N° d'ordre : 25/2012-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En MATHEMATIQHES

Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres

Par

TOUATI Samira

Sujet

Algorithme De Résolution Des Equations Différentielles Linéaires Homogènes Du Second Ordre

Soutenu publiquement, le 16/02/2012, devant le jury composé de :

Mr.	A.	KASSI.	Professeur,	à l'U.S.T.H.B.	Président.
Mr.	K.	BETINA.	Professeur,	à l'U.S.T.H.B.	Directeur de mémoire.
Mr.	D.	BEHLOUL.	Maître de Conférences/A,	à l'U.S.T.H.B.	Examinateur.
Mr.	M.S.	REZAOUI.	Maître de Conférences/A,	à l'U.S.T.H.B.	Examinateur.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur **Kamel.BETINA**, professeur à l'U.S.T.H.B., mon Directeur du mémoire pour l'intéressant sujet qu'il

m'a proposé. Je lui suis également reconnaissante pour la confiance qu'il ma accordée.

Je voudrais aussi sincèrement exprimer mes plus vifs remerciments à Monsieur **Arezki.KASSI,** professeur à l'U.S.T.H.B., pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie vivement Messieurs **Djilali.BEHLOUL et M.Salem.REZAOUI**, Maîtres de conférences à l'U.S.T.H.B. qui ont bien voulu faire partie du jury.

J'exprime encore une fois mes plus vifs remerciements à Monsieur BEHLOUL pour son aide et ses précieux conseils, ainsi que Monsieurs S.BOUROUBI et M.ABCHICHE.

Toute long de ce mémoire, jai la chance de pouvoire toujours conpter sur ma famille et mes amis, je remarcie donc chaleuresement mes Merveilleux **parents** pour leurs confiance et leurs encoragements, mon **mari "mahmoud AZZOUNI"**pour ses encoragements

constants à continuer, mes petites enfants" **Fares Said** et **Anes"** pour leurs patience, sans oublier ma belle mère, ma sœur, mes frères, en particulier " **mouad ".** Mes amis specialement ceux qui ont contribué de près ou de loin à ma formation en particulier "warda, Nassima, Aichouche, zahra et Zahia ainsi que sa mère".

A mes parents

A la mémoire de mon beau père

Dédicaces

Je dédie ce travail à la mémoire de

J.KOVACIC.

Table des matières

Introduction

L'étude des équations différentielles utilise la théorie des groupes algébriques linéaires et des corps différentiels, tout comme l'étude classique des équations algébriques utilise la théorie des groupes finis et des corps.

Liouville (1835) s'intéresse aux problèmes d'intégration successive d'équations

différentielles linéaires du type $y'(x) = a(x)$ d'une part, qui fournit $y(x) = \int_c^x a(x)dt,$ et $y'(x) = a(x)\,y(x)$ d'autre part, qui donne $y(x) = \exp\int_c^x a(x)dt.$

Vessiot (1892) reprend des problèmes du "genre Liouville ".

On trouve dans la théorie des équations différentielles linéaires l'analogie des extensions normales de la théorie classique des équations algébriques.

Picard (1868) précise l'analogie avec les extensions galoisiennes finie.

Ritt (1930) introduit l'algèbre différentielle que développe Kolchin (1948)

Kolchin fait le lien avec les groupes algébriques, il applique sa théorie à la recherche de conditions sur l'opérateur L pour qu'il y'ait une base de solutions

algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}(x)$.

Kaplansky (1957) dans son livre " An introduction to differential algebra" fait connaitre les idées de Kolchin.

Dans ce mémoire on présente un algorithme pour trouver une solution sous "forme fermée" de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ où $a,\ b\ \in \mathbb{C}(x)$.

L'algorithme existe depuis le $19^{ième}$ siecle, mais malheureusement la théorie de Galois n'était pas suffisante pour montrer que l'algorithme est complet.

L'algorithme est construit de telle façon que si aucune solution n'est trouvée alors, il ne peut exister de solution.

Dans le premier chapitre on définira la solution sous" forme fermée" et d'autres définitions dont on aura besion par la suite.

On montrera qu'il y'a 4 cas possibles, et on donnera une condition nécessaire pour chaque cas.

Dans le deuxième chapitre, on présente l'algorithme , et des exemples pour chaque cas, puis une discussion sur l'efficacité des algorithmes.

Le dernier cas qui est le cas où l'équation donnée n'aura pas de solutions sous" forme fermée", qui est le cas qui se produit lorsque les trois premier cas ne sont pas vérifies

Le chapitre trois sera consacré aux démonstrations des théorèmes relatifs à chaque cas.

Chapitre 1

Théorie de Galois Différentielle et Groupes Algébriques

Ce chapitre est partagé en trois parties.

Dans la première partie on précise la signification de solution sous" forme ferrmée", la deuxième partie est réservée à une description de la théorie de Galois différentielle, et les groupes algébriques, et dans la troisième partie on présente les qautre cas possibles pour la forme d'une solution du l'équation différentille $y'' + ay' + by = 0$ avec $a, b \in \mathbb{C}(x)$, avec les conditions nécessaires.

1.1 Première partie

Le but de ce travail est de trouver une solution de l'équation différentielle linéaire homogène

$y'' + ay' + by = 0$ *où* $a,\ b\ \in \mathbb{C}\,(x)$ sous "la bonne forme "(forme fermée).

Ces fontions (formes fermées) sont regardées comme "élémentaires" elles sont obtenues à partir des fonctions exponentielles, des integrales indéfinies, et des fonctions algébriques. (1)

(1) Introduction to the Galois theory of linéair ordinary differential equations -R.C churchill- 8 september 2006 - Kolchin seminar on differential algelira- irraduate center-city university of New York

1.2 Deuxiéme partie

1.2.1 La théorie de Galois différentielle

Dans cette partie on introduira les notions de base de la théorie de Galois différentielle, ainsi que les notations utilisées par la suite.

Dérivation

Définition 1.2.1 *une dérivation sur un corps K est une application ∂ de K dans K qui satisfait $\partial(a+b) = \partial a + \partial b$ et $\partial(ab) = (\partial a)\, b + a\,(\partial b)$ pour a, b dans K.*

On note $\partial a = a'$ et $\partial^{(n)} a = a^{(n)}$.

Corps différentiel

Définition 1.2.2 *un corps différentiel est un corps commutatif K muni d'une dérivation ∂, noté (K, ∂) ou (K, ∂_K).*

On appelle corps des constantes de K, l'ensemble C_K; donné par

$C_K = \{x \in K/\ \partial(x) = 0\}$; ($C_K$ est sous corps de K)

Morphisme différentiel

Définition 1.2.3 *Soient $(K, \partial_K), (L, \partial_L)$ deux corps différentiels.*

Un K-morphisme différentiel ϕ du corps K dans L est un morphisme de corps (purement algébrique) laissant K fixe, et qui commute avec la dérivation. C'est à dire

$\forall a \in K \quad \phi(\partial_K(a)) = \partial_L(\phi(a))$.

Extension différentielle

Définition 1.2.4 *Soit (K, ∂_K) un corps différentiel, une extension différentielle du corps K est la donnée d'un corps différentiel (L, ∂_L) et d'un morphisme de corps différentiels injectif de K dans L, c'est à dire $\partial_L / K = \partial_K$ (la restriction de ∂_L à K est ∂_K). On la note (L/K).*

Groupe de Galois

Définition 1.2.5 *Soit K un corps différentiel et L une extension de K. Le groupe de Galois différentiel de L/K est le groupe de tous les automorphismes différentiels de L qui laisse fixe les éléments de K.*

On note : $Aut_{\partial_L}(L/K) = \{\sigma \in Aut(L/K) \ / \ \forall x \in L,\ \partial(\sigma x) = \sigma(\partial(x))\}$.

Extension liouvillienne

Définition 1.2.6 *Soit L une extension différentielle de corps différentiel K.*

L est une extension liouvillienne s'il existe une chaine de corps différentiels $K = G_0 \subset G_1 \subset ... \subset G_n = L$ tels que pour chaque $i = 1, ..., n$

$*$Soit $G_i = G_{i-1}(\eta_i)$ avec $\eta_i' \in G_{i-1}$; (G_i est engendré par une intégrale), c'est à dire $\eta_i = \int f$, $f \in G_{i-1}$ (η_i est dite primitive).

$*$Soit $G_i = G_{i-1}(\eta_i)$ avec $\dfrac{\eta_i'}{\eta_i} \in G_{i-1}$, c'est à dire ($G_i$ est engendré par une exponentielle d'une integrale).

$*$Soit G_i est algébrique fini sur G_{i-1}.

Solution liouvillienne

Définition 1.2.7 *Une solution η de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$*

où $a,\ b \ \in \mathbb{C}(x)$ est dite liouvillienne s'il existe une chaine de corps différentiels :
$C(x) = G_0 \subset G_1 \subset ... \subset G_m = L$, avec $\eta \in G_m$ et pour chaque $i = 1, 2, ..., m$
$G_i = G_{i-1}(\eta_i)$ où η_i est soit algébrique, primitive, ou exponentielle sur G_{i-1}.

Proposition 1.2.1 *Si l'équation différentielle*

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{1.2.1}$$

a une solution liouvillienne, alors toute solution de l'équation est liouvillienne.

En effet, on pose le changement de variable $y = \eta z$ où η est une solution liouvillienne de l'équation (1.2.1) .

d'aprés l'équation (1.2.1) on trouve : $\eta z'' + (2\eta' + a\eta) z' + (\eta'' + a\eta' + b\eta) z = 0$.

Et comme η est une solution, alors l'équation devient $\eta z'' + (2\eta' + a\eta)\, z' = 0$

d'où $\eta z'' = (-2\eta' - a\eta)\, z'$ alors $\dfrac{z''}{z'} = \dfrac{-2\eta'}{\eta} - a$ et par suite $e^{\log z'} = e^{\log \frac{1}{\eta^2}} e^{-\int a}$

D'où $\int z' = \int \dfrac{1}{\eta^2} e^{-\int a} \Rightarrow z = \int \dfrac{1}{\eta^2} e^{-\int a}$ donc $y = \eta \int \dfrac{1}{\eta^2} e^{-\int a}$.

Par conséquent $\eta \int \dfrac{1}{\eta^2} e^{-\int a}$ est une solution liouvillienne de l'équation (1.2.1) .

1.2.2 Le wronskien

Définition 1.2.8 *Soient $y_1, .., y_n$, n éléments d'un corps différentiel K.*

Le wronskien de $y_1, .., y_n$ dans K est le déterminant

$$\mathrm{w} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & \cdot & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdot & \cdot & \cdot & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdot & \cdot & \cdot & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Théorème 1.2.1 *[AM94] Soit K un corps différentiel et C_k son corps de constantes, soient $y_1, .., y_n$ n éléments de K, les éléments $y_1, .., y_n$ sont linéairement indépendants sur C_k si et seulement si leur wronskien $w(y_1, .., y_n)$ est non nul.*

Preuve. Supposons que $y_1, .., y_n$ sont linéairement dépendants sur C_k.

Alors, il existe $(c_1, .., c_n) \in C_k$ avec les c_i ne sont pas tous nuls tel que $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i = 0$.

Comme $\partial c_i = 0$, $\forall i = 1, 2, ..., n$, $\partial \left(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i \right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \partial y_i$.

Appliquons ∂^k, $0 \leq k \leq n-1$:

comme $\left(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i \right)^{(k)} = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} c_i \partial^{(k)} (y_i) = 0$, $0 \leq k \leq n-1$.

On a n équations linéaires homogènes en $(c_1, .., c_n)$, et comme les c_i ne sont pas tous nuls, alors les vecteurs colonnes de la matrice wronskienne sont C-liés.

Par suite $w(y_1, .., y_n) = 0$.

Inversement, supposons que $w(y_1, .., y_n) = 0$, alors le système $\sum_{i=1}^{n} c_i \partial^k (y_i) = 0$, a une solution non triviale $c_1, .., c_n$ où $c_i \in K$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$.

En particulier pour $k=0$, on a $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i = 0$. On peut réarrangé les indices pour que $c_1 \neq 0$ et alors par division sur c_1, on peut s'arranger de façon que $c_1 \in C_K$, et comme $c_1 \neq 0$,on peut prendre $c_1 = 1$.

Maintenant pour chaque k, $0 \leq k \leq n-1$,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(k)} = 0. \tag{1.2.2}$$

En dérivant cette équation pour $0 \leq k \leq n-2$, on trouve $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i^{(k+1)} + \sum\limits_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(k)} = 0$.

La première somme est nulle d'aprés (1.2.2) , et dans la $2^{ième}$ somme, le premier terme c_1'est nul, donc $c_2', .., c_n'$ est une solution du système d'équations linéaires

$$\sum_{i=2}^{n} y_i^{(k)} x_i = 0 \tag{1.2.3}$$

Le déterminant de la matrice des coeffecients de ce système d'équations linéaires est le wronskien $w\left(y_2, .., y_n\right)$.

Si $w\left(y_2, .., y_n\right) \neq 0$, alors la solution $c_2', .., c_n'$ est triviale, donc les c_i' étant tous nuls, et chaque c_i pour $2 \leq i \leq n$ est alors constant (possible zéro) , donc $c_i \in C_K$,et comme $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i = 0$, donc les y_i sont linéairement dépendants sur C_K.

Si $w\left(y_2, .., y_n\right) = 0$ on fait le même raisonnement précédent, et par itération du procédé on montre que tous les wronskiens successifs sont nuls ce qui est absurde,

d'où $y_1, .., y_n$ sont linéairement indépendants si $w\left(y_1, .., y_n\right) = 0$. ■

1.2.3 Extension de Picard-vessiot

Définition 1.2.9 *Considérons l'équation différentielle linéaire*

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 = 0 \tag{1.2.4}$$

à coefficients dans le corps différentiel K, et soit L une extension différentielle de K. Alors L est une extension de Picard-Vessiot si:

1) $L = K < u_1, .., u_n >$ *où $u_1, .., u_n$ sont n solutions linéairement indépendants de l'équation (1.2.4) .*

2) *L a le même corps de constantes que K.*

Remarque 1.2.1 *Si C_K est algébriquement clos, on peut montrer qu'il existe pour toute équation différentielle (1.2.4) à coefficient dans K une extension de Picard-Vessiot qui lui est associée. De plus cette extension est unique à K-isomorphisme près.*

Proposition 1.2.2 *Considérons l' équation différentielle (1.2.4) , et soit G son groupe de Galois. Si $G \subset SL(2,n)$, le groupe et l'équation est dit unimodulaire, sinon, on peut rendre l'équation unimodulaire en effectuant le changement de variable suivant $y = e^{-\int \frac{a_{n-1}}{n}} z$, la nouvelle équation en z sera alors unimodulaire.*

En effet: Considérons l'équation différentielle linéaire homogène (1.2.1) .

Soit $y = e^{-\frac{1}{2}\int a} z$, le changement de variable pour rendre l'équation unimodulaire.

$$(1.2.1) \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}\int a}\left[\left(\frac{-1}{2}a' + \frac{1}{4}a^2\right)z - az' + z''\right] + e^{-\frac{1}{2}\int a}\left[-\frac{1}{2}a^2 z + az'\right] + e^{-\frac{1}{2}\int a} bz = 0$$

$$\Leftrightarrow z'' + \left(-\frac{1}{2}a' - \frac{1}{4}a^2 + b\right)z = 0$$

On pose $r = b - \frac{1}{2}a' - \frac{1}{4}a^2 \in \mathbb{C}(x)$.

Considérons alors, dans toute la suite l'équation différentielle suivante :

$$y'' = ry \quad , \quad r \in \mathbb{C}(x) \tag{1.2.5}$$

Remarque 1.2.2 *Les solutions de l'équation (1.2.4) forment un espace vectoriel de dimension au plus n. Un système fondamental de solutions de l'équation (1.2.4) est un ensemble $\{y_1, .., y_n\}$ de solutions de l'équation linéairement indépendants sur C_K.*

Considérons $\{\eta, \xi\}$ un système fondamental de solutions de l'équation (1.2.5) (tel que η, ξ sont des fonctions à une variable complexe). η et ξ engendre l'extension de Picard-Vessiot $L = \mathbb{C}(x) < \eta, \xi >= \mathbb{C}(\eta, \xi, \eta', \xi')$ du corps différentiel $\mathbb{C}(x)$.

η et ξ sont linéairement indépendants sur le corps des constantes C_k de l'extention L, et soit G le groupe de Galois différentiel de L sur $\mathbb{C}(x)$.

On va maitenant introduire une représentation linéaire de G.

Soit $\sigma \in G$ donc $\{\sigma\eta,\ \sigma\xi\}$ est un autre système fondamental

En effet:

$$\begin{aligned}(\sigma\eta)'' &= \sigma\eta'',\ \textit{car}\ \ \sigma\ \textit{est un automorphisme différentiel}\\ &= \ \sigma(r\eta),\ \ \textit{car}\ \ \eta\ \ \textit{est une solution de(1.2.5)}\\ &= r(\sigma\eta),\ \ \textit{car}\ \ \sigma\ \textit{est un automorphisme}\end{aligned}$$

D'où $\sigma\eta$ est une autre solution de l'équation (1.2.5)

Soient α,$\beta \in \mathbb{C}$, tel que $\alpha\sigma\eta + \beta\sigma\xi = 0$ et montrons que $\alpha = \beta = 0$

$$\alpha\sigma\eta + \beta\sigma\xi = 0 \ \textit{implique}\ \ \sigma(\alpha\eta + \beta\xi) = 0$$

Comme σ est un automorphisme, alors $\alpha\eta + \beta\xi = 0$, mais η, ξ sont linéairement

indépendants alors $\alpha = \beta = 0$.

Remarque 1.2.3 *D'après la remarque précédente, $\sigma\eta$ et $\sigma\xi$ sont des combinaisons linéaires de η et ξ, c'est à dire, qu'il existe une matrice* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2)$

tels que $\begin{cases} \sigma\eta = a\eta + c\xi \\ \sigma\xi = b\eta + d\xi \end{cases}$ *, (où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$), c'est équivalent à*

$$\sigma\begin{pmatrix} \eta & \xi \\ \eta' & \xi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\eta & \sigma\xi \\ \sigma\eta' & \sigma\xi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & \xi \\ \eta' & \xi' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

L'homomorphisme $\rho : G \longrightarrow GL(2)$

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ est injectif}$$

donne alors une représentation de G comme sous groupe du groupe $GL(2)$, donc identifie G avec $\rho(G) \subset GL(2)$.

Remarque 1.2.4 *Si $\{\eta_1, \xi_1\}$ est un autre système fondamental pour l'équation (1.2.5) , alors il existe une matrice $X \in GL(2)$ telle que $(\eta_1, \xi_1) = (\eta, \xi) X$; (X est la*

matrice de passage de la base $\{\eta, \xi\}$ à $\{\eta_1, \xi_1\}$), donc $\mathbb{C}(x)\langle\eta_1, \xi_1\rangle = \mathbb{C}(x)\langle\eta, \xi\rangle$.

Théorème 1.2.2 *L'image du groupe de Galois G de l'équation (1.2.5) est dans $SL(2)$.*

Preuve. Considérons le wronskien $w = \eta\xi' - \eta'\xi$, et soit $\sigma \in G$.

$\sigma w = \sigma(\eta\xi') - \sigma(\eta'\xi) = (ad - cd)\, w = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} w.$

Comme $w' = \eta\xi'' - \eta''\xi = \eta r\xi - r\eta\xi = 0$, alors w est une constante, donc $\sigma w = w$,

par suite $\sigma w = w = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} w$, d'où $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1.$

Par conséquent $G \subset SL(2)$; (G est unimodulaire). ■

Proposition 1.2.3 *[KOV97] Soit ε un corps intermédiaire entre $\mathbb{C}(x)$ et L, c'est à dire $\mathbb{C}(x) \subset \varepsilon \subset L$.*

Soit $g \in L$, si $\sigma g = g$ pour tout $\sigma \in G'$, $G\prime$ est le groupe Galois de L sur ε, alors $g \in \varepsilon$.

En particulier si $\sigma g = g$ pour tout $\sigma \in G, G$ est le groupe de Galois de L sur $\mathbb{C}(x)$, alors $g \in \mathbb{C}(x)$.

D'après cette proposition, G est unimodulaire si et seulement si $w \in \mathbb{C}(x)$.

1.2.4 Groupes algébriques

Définition 1.2.10 *Un groupe algébrique est un ensemble algébrique (pas nécessairement une variété algébrique irréductible) telles que les applications*

$$\begin{aligned} (x, y) &\rightarrow xy \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

soient rationnelles.

Un groupe algébrique est dit défini sur un corps K, si K est le corps de définition de l'ensemble algébrique et les deux applications sont rationnelles.

Maintenant on va définir la composante connexe de l'identité.

Un groupe algébrique linéaire G peut se décomposer en une réunion disjointe finie de variétés algébriques irréductibles, on note G° celle qui contient l'identité.

La composante de l'identité G° est un sous groupe algébrique de G distingué d'indice fini.[(1)] *(égale au nombre de composantes irréductibles) et connexe (au sens de la topologie de Zariski pour laquelle les fermés sont les ensembles algébriques).*

[(1)] Kaplansky,I.An Introduction to Differential Algebra. Page 28, Lemme 4.5.

Pour éviter la confusion entre les notions d'irréductibilités pour les actions de groupe et pour les variétés algébriques, on appellera G° la composante connexe de l'identité de G, celle ci nous permet de d'écrire le lien entre le caractère liouvillien d'une extension et son groupe de Galois.[PG05]

Théorème de Lie-Kolchin

Le théorème de Lie-Kolchin est la clé de l'algorithme

Théorème 1.2.3 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1- *Toute solution de l'équation différentielle est liouvillienne.*

2- *La composante G° est résoluble.*

3- *La composante G° est triangularisable.*

Preuve. [KAP57], chp 4, $\oint$ 18, $p\ 30-31,\ th\ 4.11$ ■

Lemme 1.2.1 *[KOL73] Si G est un sous groupe de $GL(n)$, s'il existe un ensemble $\sum$ de polynômes $P \in [(x_{ij})]$, tel que un élément $(x_{ij}\ )$ de $GL(n)$ est dans G si et seulement si $p((x_{ij}) = 0, (p \in \sum)$, alors G est un groupe algébrique.*

On démontre le lemme dans le cas spécial (l'ordre 2).

Donc un sous groupe G de $GL(2)$ est un groupe algébrique, s'il existe une collection finie de polynômes $P_1, ...P_r \in \mathbb{C}\left[X_1, X_2, X_3, X_4\right]$, tel que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ si et seulement si $P_1\left(a,b,c,d\right) = ... = P_r\left(a,b,c,d\right) = 0$.

Preuve. [KOV85] Soient y, z, y_1, z_1 des indéterminées dans $\mathbb{C}\left(x\right)$.

Considérons l'homomorphisme

$$\Psi : \mathbb{C}\left[x,y,z,y_1,z_1\right] \mapsto \mathbb{C}\left[x,\eta,\xi,\eta',\xi'\right]$$

Le noyau de Ψ est un idéal premier noté I.

Un élément $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2)$ induit un automorphisme

$$(y, z, y_1, z_1) \mapsto (ay + cz, by + dz, ay_1 + cz_1, by_1 + dz_1)$$

De plus, $A \in G$ si et seulement si $\Psi(I) = I$.

Soit $I = (q_1, ..., q_s)$ avec $q_1, ..., q_s$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$. Soit n le maximum des degrés de $q_1, ..., q_s$ en x, y, z, y_1, z_1,et soit V l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de tous les polynômes de $\mathbb{C}[x, y, z, y_1, z_1]$ de degré au plus n. L'action de $SL(2)$ sur $\mathbb{C}[x, y, z, y_1, z_1]$ est restreint à V.

Si $q_1, ..., q_s, q_{s+1}, ..., q_t$ est une base de V, alors ils existe des polynômes $p_{i,j} \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4]$ telle que l'action de A sur q_i est $\sum_{j=1}^{t} p_{i,j}\ (a, b, c, d)\, q_i$,par suite $A \in G$ si et seulement si $p_{i,j}\ (a, b, c, d) = 0$ pour $i = 0, 1, ..., s,\ j = s + 1, ..., t$. D'ou G est un groupe algébrique. ■

Théorème 1.2.4 *[KAP57], th 5.5, p36.*

Le groupe de Galois différentiel d'une extension de Picard-vessiot est un groupe algébrique de matrices sur le corps des constantes.

Preuve. D'après le lemme précédent et le théorème (1.2.2) , le groupe de Galois G est un groupe algébrique. ■

1.3 Troisième partie

1.3.1 Les quatre cas

Considérons l'équation différentielle (1.2.5) .

Théorème 1.3.1 *Il y'a 4 cas possibles.*

1^er^ cas *L'équation différentielle (1.2.5) admet une solution de la forme $e^{\int w}$, $w \in \mathbb{C}(x)$.*

2^ième^cas *L'équation (1.2.5) admet une solution de la forme $e^{\int w}$ où w est algébrique sur $\mathbb{C}(x)$ de degré 2, et le 1^{er} cas n'est pas vérifie.*

$3^{ième}$*cas* *Toute solution de l'équation (1.2.5) est algébrique sur* $\mathbb{C}(x)$ *et les cas* $1, 2$ *ne sont pas vérifiés.*

$4^{ième}$*cas* *L'équation différentielle (1.2.5) n'a pas de solutions liouvilliennes.*

Pour montrer ce théorème, il faut connaitre le résultat suivant (voir Kaplansky- page 31).

Lemme 1.3.1 *Soit* G *un sous groupe algébrique de* $SL(2)$*, alors l'un des* 4 *cas suivants est vérifié.*

1. Le groupe G est triangularisable.
2. Le groupe G est conjugué a un sous groupe du groupe $D^{+} = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} / c \in \mathbb{C}\ ,\ c \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^{-1} & 0 \end{pmatrix} / c \in \mathbb{C}\ ,\ c \neq 0 \right\}$, et le 1^{er} cas ne peut pas être vérifié.
3. Le groupe G est fini et les cas $1, 2$ ne sont pas vérifiés.
4. Le groupe G est $SL(2)$.

   Preuve. cf [KOV85] ■

Passons à la preuve du théorème.

Preuve. de Théoreme [KOV85] Soit $\{\eta, \xi\}$ un système fondamental de solutions de l'équation différentielle (1.2.5) , et soit G le groupe de Galois relatif au système $\{\eta, \xi\}$.

Soit $L = \mathbb{C}(x) < \eta, \xi >$.

1^{er}*cas* D'après le lemme précédent, G est triangularisable.

On assume que G est triangulaire, alors pour chaque $\sigma \in G$, $\sigma\eta = c_\sigma \eta$, $c_\sigma \in \mathbb{C}$, $c_\sigma \neq 0$; par conséquent $\sigma w = w$, où $w = \dfrac{\eta'}{\eta}$, cela implique que $w \in \mathbb{C}(x)$.

$2^{ième}$*cas* Le groupe G est conjugué à un sous groupe de D^{+}.

On assume que G est un sous groupe de D^{+}. Si $w = \dfrac{\eta'}{\eta}$ et $\phi = \dfrac{\xi'}{\xi}$, alors pour tout $\sigma \in G$, ou bien $\sigma w = w$, $\sigma\phi = \phi$,ou bien $\sigma w = \phi$, $\sigma\phi = w$,donc w est quadratique sur $\mathbb{C}(x)$.

$3^{ième}cas$ Le groupe G est fini; dans ce cas l'extension L a seulement un nombre fini d'automorphismes différentiels $\sigma_1, ...\sigma_n$. comme la fonction symétrique élémentaire de $\sigma_1\eta, ...\sigma_n\eta$ est invariante sur G, alors η est algébrique sur $\mathbb{C}(x)$ .De même ξ est algébrique sur $\mathbb{C}(x)$. Comme toute solution de l'équation différentielle est contenue dans L, alors toute solution est algébrique.

$4^{ième}cas$ Le groupe $G = SL(2)$; supposons que l'équation différentielle admet une solution liouvillienne, alors d'après la proposition (1.2.1) chaque solution de l'équation est liouvillienne, donc L est contenu dans une extension liouvillienne. Par suite G° est résoluble, (Kolchin 1973-p415), et comme

$(SL(2))^\circ = SL(2))$ qui n'est pas résoluble, alors l'équation différentielle n'admet pas de solutions liouvilliennes.

■

1.3.2 Les conditions nécessaires

Dans cette partie, on discute quelques conditions nécessaires pour que les 3 premiers cas soient vérifiés, et on donne une condition suffisante pour le $4^{ième}cas$.

Comme r est une fonction rationnelle, notre étude est basée sur l'ordre des pôles de r.

Si $r = \dfrac{s}{t}$, avec $s, t \in \mathbb{C}[x]$, premier entre eux, les pôles de r coincide avec les zéros de t. l'ordre d'un pôle de r est la multiplicité d'un zéro de t. et l'ordre de r à l'infini (ord_∞) est égale à $degt - degs$.

Théorème 1.3.2 *Ces conditions sont nécessaires respectivement pour chaque cas du théorème (1.3.1) .*

1^{er}cas *Chaque pôle de r doit avoir un ordre pair ou bien a un ordre* 1. *L'ordre de r à l'infini doit être pair ou bien plus grand que* 2.

$2^{ième}$cas *La fraction r doit avoir au moins un pôle, soit il est d'ordre impair plus grand que* 2 *soit il est d'ordre* 2.

$3^{\text{ième}}$*cas* *L'ordre d'un pôle de r ne peut pas dépasser 2, et l'ordre de r à l'infini doit être au moins 2.*

Si l'expression de la fraction partielle de r est

$$r = \sum_i \frac{\alpha_i}{(x - c_i)^2} + \sum_j \frac{\beta_j}{x - d_j}$$

alors $\sqrt{1 + 4\alpha_i} \in \mathbb{Q}$, *pour chaque* i, $\sum_j \beta_j = 0$, *et si* $\gamma = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j d_j$,

alors $\sqrt{1 + 4\gamma} \in \mathbb{Q}$.

Preuve. [KOV85]

1^{er}*cas* L'équation (1.2.5) a une solution de la forme $e^{\int w}$, $w \in \mathbb{C}(x)$, comme $\eta" = r\eta$ alors $(w' + w^2) e^{\int w} = e^{\int w} r$.

Donc $w' + w^2 = r$ (c'est l'équation de Ricatti).

Soit c un point dans le plan complexe $\mathbb{C}$.

Les fonctions r et w admettent un développement de Laurent au point c; pour simplifier les notation, on pose $c = 0$.

Donc $r = \alpha x^\nu + ... \quad \nu \in \mathbb{Z}, \alpha \neq 0.$

$w = bx^\mu + ... \quad \mu \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$

En utilisant l'équation de Ricatti.

$\mu b x^{\mu - 1} + ... + b^2 \ x^{2\mu} + ...\alpha x^\nu \ + ... = \alpha x^\nu + ...$

On montre que chaque pôle de r est d'ordre 1 ou bien d'ordre pair, alors:

On assume que $\nu \leq -3$ car (si $\nu \geq 0, \mu \geq 0$ alors $\mu = -1$ et $b = 1$).

(si $\nu = -1$ alors $\mu = -1$ et $b = 1$).

(si $\nu = -2$ alors $\mu = -1$ et $b^2 - b = \alpha$).

Comme $\alpha \neq 0$, $-3 \geq \nu \geq \min(\mu - 1, 2\mu)$, par suite $\mu < -1$ et $2\mu < \mu - 1$.

Comme $b^2 \neq 0$, $2\mu = \nu$,ce qui implique ν est pair.

On remarque que si r admet un pôle d'ordre $2\mu > 4$ au point c, alors w doit avoir un pôle d'ordre μ en c.

Cette remarque est reservée pour le $2^{ème}$ `chapitre` (`dans la` preuve de l'algorithme).

Considérons les séries de Laurent de r et w à l'infini.

$w = bx^{\mu} + ... \qquad \mu \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$

$r = \alpha x^{\nu} + ... \qquad \nu \in \mathbb{Z}, a \neq 0.$

(Les points représentent les termes en x élevé à une puissance inférieure).

On assume que $\nu \geq -1$.

Utilisons l'équation de Ricatti : $\mu b x^{\mu-1} + ... + b^2 x^{2\mu} + ... = \alpha x^{\nu} + ...$

Comme $\alpha \neq 0,\ 1 \leq \nu \leq \max(\mu - 1, 2\mu),\ \mu > -1$ et $2\mu > \mu - 1$

Comme $b^2 \neq 0$, $2\mu = \nu$, donc ν est pair.

On remarque que si r a un pôle d'ordre $2\mu \geq 0$ à l'infini alors w a un pôle d'ordre μ à l'infini.

$2^{ième}$ *cas* Considérons le groupe de Galois différentiel G de l'équation (1.2.5) . D'après le lemme (1.3.1) , le groupe G est conjugué à un sous groupe H de D^+, qui n'est pas triangulaire (sinon le cas 1 est verifié).

Soit $\{\eta, \xi\}$ un système fondamental de solutions de l'équation (1.2.5) relatif au groupe H. Pour tout $\sigma \in G$, soit $\sigma\eta = c_\sigma \eta$, $\sigma\xi_1 = c_\sigma^{-1}\xi$ ou bien $\sigma\eta = -c_\sigma^{-1}\xi$, $\sigma\xi = c_\sigma \eta$.

Donc $\eta^2\xi^2$ est un invariant.

Remarque 1.3.1 *On dit que F est un semi- invariant si $\sigma F = c_\sigma F$ pour toute σ dans G, et F est dit invariant si $c_\sigma = 1$ pour toute σ dans G ($c_\sigma \in \mathbb{C}$).*

On a trouvé que $\eta^2\xi^2$ est un invariant, c'est à dire $\eta^2\xi^2 \in \mathbb{C}(x)$.

En effet

$\sigma(\eta^2\xi^2) = (\sigma\eta)^2 (\sigma\xi)^2 = (c\eta)^2 (c^{-1}\xi)^2 = \eta^2\xi^2$, où $\sigma(\eta^2\xi^2) = (-c^{-1}\xi)^2 (c\eta^2) = \eta^2\xi^2$.

De plus $\eta\xi \notin \mathbb{C}(x)$ (en effet : $\sigma(\eta\xi) = c\eta c^{-1}\xi = \eta\xi$, où $\sigma(\eta\xi) = -c^{-1}\xi c\eta = -\eta\xi$), sinon G sera dans un sous groupe du groupe diagonal.

Comme $\eta^2\xi^2 \in \mathbb{C}(x)$,

$$\eta^2\xi^2 = \Pi(x-c_i)^{e_i}, e_i \in \mathbb{Z}$$

On a au moins un exposant impair.

Sans perte de généralité, on pose $\eta^2\xi^2 = x^e \prod (x-c_i)^{e_i}$ tel que e est impair.

Soit $\theta = \dfrac{(\eta\xi)'}{\eta\xi} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(\eta^2\xi^2)'}{\eta^2\xi^2} = \dfrac{1}{2}ex^{-1} + ...$

(Les points représentent les termes en x avec des puissances non négatives)

Comme $\eta" = r\eta$ et $\xi" = r\xi$,

$$\theta" + 3\theta'\theta = 4r\theta + 2r' \tag{1.3.1}$$

Soit $r = \alpha x^\nu + ...$la série de Laurent de r en 0, $\alpha \neq 0$, $\nu \in \mathbb{Z}$.

$\theta' = \dfrac{1}{2}ex^{-2} + ..., \theta'' = ex^{-3} + ..., \theta^3 = \dfrac{1}{8}e^3x^{-3} + ...$

$2r' + 4r\theta = 2\alpha(e+\nu)x^{\nu-1} + ...$

$(1.3.1) \iff \left(e - \dfrac{3}{4}e^2 + \dfrac{1}{3}e^3\right)x^{-3} + ... = 2\alpha(e+\nu)x^{\nu-1} + ...$

Si $\nu > -2$ alors : $8e - 6e^2 + e^3 = 0$, c'est à dire $e(e-2)(e-4) = 0 \Rightarrow e = 0, 2, 4$ (contradiction car e est impair).

Par conséquent $\nu \leq -2$.

Si $\nu < -2$ alors $e + \nu = 0$, donc ν est impair.

$3^{ième}$ *cas* L'équation (1.2.5) admet une solution algébrique sur $\mathbb{C}(x)$, dons η admet un développement de Puiseaux au point c dans $\mathbb{C}$.

On pose $c = 0$, on a $\eta = ax^\mu + ...$, $a \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{Q}$.

Comme $r \in \mathbb{C}(x)$, $r = \alpha x^\nu + ...$ $\quad \nu \in \mathbb{Z}, a \neq 0$

L'équation (1.2.5) implique

$a\mu(\mu-1)x^{\mu-2} + ... = \alpha a x^{\mu+\nu} + ...,$

par suite $\nu \geq -2$, c'est à dire que, r n'a pas de pôle d'ordre plus grand que 2.

Si $\nu = -2$, alors $\alpha = \mu(\mu-1)$, et comme $\mu \in \mathbb{Q}$ alors$\sqrt{1+4\alpha} \in \mathbb{Q}$.

On a montré que $r = \sum\limits_i \frac{\alpha_i}{(x - c_i)^2} + \sum\limits_j \frac{\beta_j}{x - d_j} + P,\ P \in \mathbb{C}[x]$ et $\sqrt{1 + 4\alpha_i} \in \mathbb{Q}$ pour tout i.

Conséderons maintenant la série de η et de r à l'infini,

$\eta = ax^{\mu} + ...$

$r = \gamma x^{\nu} + ...$

(Les points représentent les termes en x de puissances inferieures).

Utilisons l'équation différentielle (1.2.5)

$\mu(\mu - 1)\, ax^{\mu-2} + ... = a\gamma\nu x^{\nu+\mu} + ...$

Si $\nu \leq -2,\ r$ ne peut pas avoir un pôle d'ordre inferieur à 2, donc $p = 0$

Mais

$$\begin{aligned} r &= \sum_i \frac{\alpha_i}{(x - c_i)^2} + \sum_j \frac{\beta_j}{x - d_j} \\ &= \left(\sum_j \beta_j\right) x^{-1} + \nu x^{-2} + ... \end{aligned}$$

où $\nu = \sum\limits_i \alpha_i + \sum\limits_j \beta_j d_i,$ par conséquent $\sum\limits_j \beta_j = 0$ et $\mu(\mu - 1) = \nu$.

Comme $\mu \in \mathbb{Q},$ alors $\sqrt{1 + 4\gamma} \in \mathbb{Q}$.

■

Chapitre 2

L'Algorithme

2.1 Algorithme du premier cas

Cette section est partagée en trois parties, la première partie est consacrée à la description de l'algorithme, dans la deuxième partie quelques exemples sont donnés et enfin on montre que l'algorithme est correct.

2.1.1 Description

Le but de cet algorithme est de trouver une solution de l'équation (1.2.5) sous forme $\eta = Pe^{\int w}$. comme η peut être toujours écrite sous forme $\eta = e^{\int\left(\frac{P'}{P}+w\right)}$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ et $w \in \mathbb{C}(X)$, c'est la forme décrite dans le premier chapitre et qui permet de déduire qu'on est dans le premier cas.

En effet $P \in \mathbb{C}[X]$ et $w \in \mathbb{C}(X), P' \in \mathbb{C}[X]$ donc $\dfrac{P'}{P} \in \mathbb{C}(X)$ d'où $\left(\dfrac{P'}{P} + w\right) \in \mathbb{C}(X)$.

La première étape de l'algorithme consiste à déterminer les parties de la fraction partielle de w.

Dans la deuxième étape, on regroupe ses parties en famille pour former les candidats pour w. s'il n y a pas de condidats, alors le cas 1 n'est pas verifié.

La troisième étape est appliqué pour chaque candidat de w, et consiste en la recherche d'un polynôme adéquat. Si pour chaque candidat de w aucun polynôme adéquat n'est trouvé, alors le cas 1 n'est pas vérifié.

2.1.2 L'algorithme

On assume que la condition nécessaire du premier cas est vérifiée.

Soit Γ l'ensemble des pôles de r.

Première étape

Pour chaque pôle $c \in \Gamma \cup \{\infty\}$, on définit une fonction rationnelle $[\sqrt{r}\,]_c$ et deux nombres complexes α_c^+, α_c^- comme décrit ci-dessus.

C1) Si $c \in \Gamma$ et si c est un pôle de r d'ordre 1, alors la fonction rationnelle

$$[\sqrt{r}\,]_c = 0,$$

et les nombres

$$\alpha_c^+ = \alpha_c^- = 1.$$

C2) Si $c \in \Gamma$ et si c est un pôle d'ordre 2, alors la fonction rationnelle

$$[\sqrt{r}\,]_c = 0.$$

Soit b le coefficient du terme $\dfrac{1}{(x-c)^2}$ dans la fraction partielle de r. alors

$$\alpha_c^+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4b}\ ,\ \alpha_c^- = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4b}$$

C3) Si $c \in \Gamma$ et s'il est d'ordre $2v \geq 4$, alors la fonction rationnelle $[\sqrt{r}\,]_c$est la somme des termes correspondants à $\dfrac{1}{(x-c)^i}$ pour $2 \leq i \leq v$ dans la série de Laurent de la fonction $\sqrt{r}$ au point c. Il y a deux possibilités pour la fonction $[\sqrt{r}\,]_c$, une est la négation de l'autre. On va choisir l'une des deux.

$$[\sqrt{r}\,]_c = \frac{a}{(x-c)^v} + \cdots + \frac{d}{(x-c)^2}.$$

Dans la pratique, on ne peut former la série de Laurent de $\sqrt{r}$, mais on peut déterminer la fonction $[\sqrt{r}\,]_c$ par l'utilisation des coefficients indéterminés.

Soit b le coefficient de $\frac{1}{(x-c)^{\upsilon+1}}$ dans la fonction r moins le coefficient de $\frac{1}{(x-c)^{\upsilon+1}}$ dans la fonction $[\sqrt{r}\ ]_c$.

Alors

$$\alpha_c^{\pm} = \frac{1}{2}\left[\pm\frac{b}{a} + \upsilon\right]$$

L'étude à l'infini

∞1) Si l'ordre de r à l'infini est plus grand que 2, alors la fonction rationnelle

$$\left[\sqrt{r}\ \right]_{\infty} = 0$$

et les nombres

$$\alpha_{\infty}^{+} = 0 \text{ et } \alpha_{\infty}^{-} = 1$$

∞2) Si l'ordre de r à l'infini est égal à 2, alors la fonction rationnelle

$$\left[\sqrt{r}\ \right]_{\infty} = 0$$

Soit b le coefficient de terme $\frac{1}{x^2}$ dans la série de Laurent de r à l'infini.

Si $r = \frac{s}{t}$ avec $s, t \in \mathbb{C}(X)$ et $(s,t) = 1$, alors b est le coefficient principal de s divisé par le coefficient principal de t. alors

$$\alpha_{\infty}^{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4b}$$

.

∞3) Si l'ordre de r à l'infini est $-2\upsilon \leq 0$, alors $[\sqrt{r}\ ]_{\infty}$ est la somme des termes en x^i pour $0 \leq i \leq \upsilon$ dans la série de Laurent de $\sqrt{r}$ à l'infini .

Il y a deux possibilités de la fonction $[\sqrt{r}\ ]_{\infty}$ c'est une différence de signe.

$$\left[\sqrt{r}\ \right]_{\infty} = ax^{\upsilon} + \cdots + d$$

Soit b le coefficient de $x^{\upsilon-1}$ dans la fonction r moins le coefficient de $x^{\upsilon-1}$ dans la foction $[\sqrt{r}\ ]_{\infty}^2$, alors

$$\alpha_{\infty}^{\pm} = \frac{1}{2}\left[\pm\frac{b}{a} - \upsilon\right]$$

.

Deuxième étape

Pour chaque famille $(s\,(c))_{s\in\Gamma\cup\{\infty\}}$ avec $s\,(c)$ est : + ou -,

soit

$$d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \sum_{c\in\Gamma} \alpha_c^{s(c)}$$

si d est un entier non négatif alors

$$w = \sum_{c\in\Gamma} (s(c)\left[\sqrt{r}\right]_c + \frac{\alpha_c^{s(c)}}{x-c}) + s(\infty)\left[\sqrt{r}\right]_\infty \tag{2.1.1}$$

-Si d est un entier négatif, la famille s ne le prend pas en considération.

Troisième étape

Cette étape est appliquée seulement pour les familles considérées en deuxième étape, jusqu'au succés, sinon le premier cas n'est pas vérifié.

On cherche pour chaque famille un polynôme unitaire de degré d (calculer dans la deuxième étape), tel que P satisfait l'équation

$$P'' + 2wP' + \left(w' + w^2 - r\right) P = 0. \tag{2.1.2}$$

-Si cette équation admet des solutions, c'est-à-dire le polynôme P existe, alors $\eta = Pe^{\int w}$ est une solution de l'équation différentielle (1.2.5) , mais si aucun polynôme n'est trouvé pour chaque famille considérée en deuxième étape, alors le premier cas ne peut être vérifié.

2.1.3 Exemples

Considérons l'équation (1.2.5)

où $r = \dfrac{4x^6 - 8x^5 + 12x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 20x + 4}{4x^4}$

$= x^2 - 2x + 3 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{7}{4x^2} - \dfrac{5}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}$

a) r admet un seul pôle $c = 0$ d'ordre 4 (pair).

b) $r = \dfrac{s}{t}$ tel que $(s,t) = 1$, alors $ord_\infty(r) = ord(t) - ord(s)$, d'où l'ordre de r à l'infini est : $ord_\infty r = 4 - 6 = -2$(pair).

c) D'après a) et b) la condition nécessaire du premier cas est verifiée, et les conditions du deuxième et troisième cas ne sont pas vérifiées.

Appliquons alors l'algorithme du premier cas. La solution de l'équation différentielle (1.2.5) est de la forme $\eta = Pe^{\int w}$.

Pour trouver η, on cherche le polynôme P et la fonction rationnelle w.

$1^{ière}$étape :

1) Le pôle $c = 0$ est d'ordre $4 = 2\upsilon \geq 4$, donc appliquons le C3).

La fonction rationnelle $[\sqrt{r}\,]_0 = \sum_{i=2}^{\upsilon} \frac{\alpha_i}{(x-c)^i} = \sum_{i=2}^{\upsilon} \frac{\alpha_i}{x}$, et comme $\upsilon = 2$, $[\sqrt{r}\,]_0 = \frac{\alpha}{x^2}$ d'où $[\sqrt{r}]_0 = \frac{\alpha^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$, par suit $\alpha = \pm 1$.

On choisit $\alpha = 1$ par suite

$$[\sqrt{r}\,]_0 = \frac{1}{x^2}$$

2) Soit b le coefficient de $\frac{1}{x^3}$ dans l'expression de r moins le coefficient de $\frac{1}{x^3}$ dans l'expression de $[\sqrt{r}\,]_0$.

$b = -5 - 0 = -5$

Par conséquent

$$\alpha_0^+ = \frac{1}{2}\left(+\frac{b}{\alpha} + \upsilon\right) = -\frac{3}{2} \text{ et } \alpha_0^- = \frac{1}{2}\left(-\frac{b}{\alpha} + \upsilon\right) = \frac{7}{2}$$

.

L'étude à l'infini :

$ord_\infty r = -2 \leq 0$, appliquons le ∞_3)

$ord_\infty r = -2 = -2\upsilon \Rightarrow \upsilon = 1$.

La fonction rationnelle $[\sqrt{r}\,]_\infty$ est de la forme $[\sqrt{r}]_\infty = a^\upsilon x + \cdots + d$.

comme $\upsilon = 1$, alors $[\sqrt{r}]_\infty = ax + d$ et $[\sqrt{r}]_\infty^2 = a^2x^2 + 2adx + d^2$.

Par identification, on trouve $a^2 = 1$ et $ad = -1$.

On choisit $a = 1$ donc $d = -1$.

Par suite

$$\left[\sqrt{r}\,\right]_{\infty} = x - 1$$

Soit b le coefficient de x^{v-1} dans l'expression de r moins le coefficient de x^{v-1} dans l'expression de $[\sqrt{r}]_{\infty}^{2}$.

$b = 3 - 1 = 2$, d'où les nombres

$$\alpha_{\infty}^{+} = \frac{1}{2} \text{ et } \alpha_{\infty}^{-} = -\frac{3}{2}$$

2^{ième}étape :

Il y a quatre familles à considérées

$$\begin{aligned}
s(0) &= + \text{ , } s(\infty) = + \text{ et } \ d = \frac{1}{2} - (\frac{-3}{2}) = 2 \\
s(0) &= + \text{ , } s(\infty) = - \ \text{ et } \ d = -\frac{3}{2} - (\frac{-3}{2}) = 0 \\
s(0) &= - \text{ , } s(\infty) = + \ \text{ et } \ d = \frac{1}{2} - \frac{7}{2} = -3 \\
s(0) &= - \text{ , } s(\infty) = - \ \text{ et } \ d = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -5
\end{aligned}$$

$d = -3$ et $d = -5$ sont écartés, d'où pour $d = 0$ et $d = 2$, on va étudier la possibilité de déterminer des candidats w.

Pour $d = 0$

On a $s\,(0) = +, s\,(\infty) = -$, $\left[\sqrt{r}\,\right]_0 = \frac{1}{x^2}$ et $\left[\sqrt{r}\,\right]_{\infty} = x - 1$.

D'après l'équation (2.1.1) , $w = \frac{1}{x^2} + \frac{-\frac{3}{2}}{x} + (-\,(x-1))$, d'où

$$w = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x} - x + 1.$$

Pour $d = 2$

On a $s\,(0) = +, s\,(\infty) = +$, alors

$$w = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x} + x - 1$$

.

3^{ième}étape :

Pour chaque w trouvé dans la $2^{ième}$étape, on cherche le polynôme unitaire P de degré d par la formule (2.1.2) .

Pour $d = 0$

p est un polynôme unitaire de degré 0, donc $P = 1$ et $P' = P'' = 0$.

Calculons w' et w^2.

$w' = \dfrac{-2}{x^3} + \dfrac{3}{2x^2} - 1.$

$w^2 = \dfrac{1}{x^4} - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{17}{4x^2} - \dfrac{5}{x} + x^2 - 2x + 4.$

La résolution de l'équation (2.1.2) revient à résoudre $w' + w'' - r = 0$, et comme $P = 1$, l'existence de P revient au fait que l'équation $w' + w - r = 0$ soit verifie ou pas, c'est à dire $\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{6}{x} = 0.$

Le polynôme P n'existe pas, par suite la solution.

Passons au calcul du polynôme P pour $d = 2$. Le polynôme est de la forme $P = x^2+Ax+B$, $P' = 2x + A$ et $P'' = 2$.

On a $w' = \dfrac{-2}{x^3} + \dfrac{3}{2x^2} + 1.$

$$w^2 = \frac{1}{x^4} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{4x^2} + \frac{5}{x} + x^2 - 2x - 2.$$

$$w' + w^2 - r = \frac{4}{x} - 4.$$

D'où (2.1.2) $\Leftrightarrow 2 + 2\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{2x} + x - 1\right)(2x + A) + \left(\dfrac{4}{x} - 4\right)(x^2 + Ax + B) = 0.$

$$\Leftrightarrow \frac{2A}{x^2} + \frac{4 + 4B - 3A}{x} - 2Ax + 2A - 4B - 4 = 0.$$

$$\Longleftrightarrow A = 0 \text{ et } B = -1.$$

Donc

$$P(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Alors la solution est : $\eta = Pe^{\int w} = (x^2 - 1)\, e^{\int \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x} + x - 1}$

$$\eta = \left(x^2 - 1\right) x^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{x}+x^2-x}$$

2.1.4 La preuve de l'algorithme

Dans ce premier cas la solution η de l'équation (1.2.5) est de la forme $e^{\int w}$, $w \in \mathbb{C}(x)$, comme $\eta'' = r\eta$, alors $\left(e^{\int w}\right)'' = re^{\int w}$, par suite $(w' + w^2) e^{\int w} = re^{\int w}$, alors $w' + w^2 - r = 0$ (c'est l'équation de Ricatti).

On doit déterminer l'expression de la fraction partielle de w.Pour cela utilisons la série de Laurent de r et l'équation de Ricatti.

Pour $c \in \mathbb{C}$, on note la composante au point c de la fraction partielle de w par

$$[w]_c + \frac{\alpha}{x-c} = \sum_{i=2}^{v} \frac{a_i}{(x-c)^i} + \frac{\alpha}{x-c}$$

Sans perte de généralité, on fait l'étude au point $c = 0$.

Considérons la série de Laurent de w au point $c = 0$.

$$w = [w] + \frac{\alpha}{x} + \overline{w}$$

où $\overline{w}$ est un polynôme à coefficients complexes qui n'intervient pas dans la démonstration.

On assume que la condition nécessaire pour le premier cas est satisfaite, c'est-à-dire assumer que les pôles de r sont d'ordre pair ou au moins d'ordre 1.

On va partager la démonstration en parties suivant la nature de r au point 0, c'est en parallèle à la division de 1^{ere}étape de l'algorithme.

$\mathbf{c}_{1)}$ Supposons que 0 est un pôle de r d'ordre 1, donc $r = \dfrac{A}{x} + \cdots$.

On a $w = [w] + \dfrac{\alpha}{x} + \overline{w}$

$$w' = [w]' + \frac{\alpha}{x^2} + \overline{w}'$$
$$w^2 = [w]^2 + \frac{\alpha^2}{x^2} + \overline{w}^2 + 2[w]\frac{\alpha}{x} + 2[w]\overline{w} + 2\frac{\alpha}{x}\overline{w}$$

comme

$$w = \sum_{i=2}^{vv} \frac{a_i}{x^i} + \frac{\alpha}{x} + \overline{w}$$

$$\begin{aligned}
[w] &= \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots + \frac{a_v}{x^v} \\
[w]' &= 2\frac{a_2}{x3} - 3\frac{a_3}{x^4} + \cdots - v\frac{a_v}{x^{v+1}} \\
[w]^2 &= \frac{a_2^2}{x^4} + \frac{a_3^2}{a^6} + \cdots + \frac{a_v^2}{x^{2v}} + 2\frac{a_2 a_v}{x^{v+2}} + 2\frac{a_2 a_{v-1}}{x^{v+1}} + 2\frac{a_2 a_{v-2}}{x^v} + \cdots
\end{aligned}$$

.

En remplaçant dans l'équation de Ricatti
$\frac{-va_v}{x^{v+1}} + \cdots + \frac{a_v^2}{x^v} = \frac{\beta}{x} + \cdots$
comme $a_v^2 \neq 0$, et r a un seul pôle d'ordre 1, par identification on trouve
$v \leq 1$ et $[w] = \sum_{i=2}^{v} \frac{a_i}{x^i} = 0$.
Par suite $w = \frac{\alpha}{x} + \overline{w}$.
En remplaçant w dans l'équation de Ricatti, on obtient
$\frac{-\alpha}{x^2} + \overline{w}' + \frac{\alpha^2}{x^2} + \frac{2\alpha}{x}\overline{w} + \overline{w}^2 = \frac{\beta}{x} + \cdots$,
par suite

$$\frac{-\alpha + \alpha^2}{x^2} + \frac{2\alpha}{x}\overline{w} + \overline{w}' + \overline{w}^2 = \frac{\beta}{x} + \cdots \tag{2.1.3}$$

Par identifiction, on obtient $-\alpha + \alpha^2 = 0$, donc $\alpha = 1$ ou $\alpha = 0$.

Pour $\alpha = 0$, l'équation (2.1.3) devient $\overline{w}' + \overline{w}^2 = \frac{\beta}{x} + \cdots$

Le côté gauche admet 0 comme point ordinaire, par contre le côté droit admet 0 comme pôle; on conclut que $\alpha = 1$ et la composante de la fraction partielle de w au point 0 est $\frac{\alpha}{x}$.

En utilisant les notations de l'algorithme, la composante est $\frac{\alpha^{\pm}}{x}$ et $\alpha^{\pm} = 1$.

c$_2$) On pose que r admet 0 comme pôle d'ordre 2, donc r est de la forme $r = \frac{b}{x^2} + \frac{\beta}{x} + \cdots$

L'équation de Ricatti devient

$\frac{-va_v}{x^v} + \cdots + \frac{a_v^2}{x^v} = \frac{b}{x^2} + \frac{\beta}{x} + \cdot\cdot$

comme $a_v^2 \neq 0, r$ admet un pôle d'ordre 2, alors $v \leq 2$ et $[w] = 0, -\alpha + \alpha^2 = b$.

La composante de la fraction partielle de w en 0 est $\dfrac{\alpha^{\pm}}{x}$.

Calculons $\alpha^{\pm}$:

$\alpha^2 - \alpha - b = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-b) = 1 + 4b$

$\alpha^{+} = \dfrac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ et $\alpha^{-} = \dfrac{1-\sqrt{1+4b}}{2}$.

d'où les nombres $\alpha^{\pm} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{1+4b}$.

c$_3$) On pose que r a un pôle ou point 0 d'ordre $2\mu \geq 4$.

Dans la démonstration du théorème (1.3.2) , on a montré que $\mu = \upsilon$. Rappelons aussi la formule

$[\sqrt{r}\,]_c = \dfrac{a}{(x-c)^{\upsilon}} + \cdots + \dfrac{d}{(x-c)^2}$.

Pour $c = 0$, $[\sqrt{r}\,]_0 = \dfrac{a}{x^{\upsilon}} + \cdots + \dfrac{d}{x^2}$.
Soit $\overline{r} = \sqrt{r} - [\sqrt{r}\,]$, donc $r = [\sqrt{r}\,]^2 + 2[\sqrt{r}\,]\overline{r} + \overline{r}^2$.
En utilisant l'équation de Ricatti

$$w' + w^2 = r \tag{2.1.4}$$

où $w' = [w]' - \dfrac{\alpha}{x} + \overline{w}'$

$w^2 = [w]^2 + \dfrac{\alpha^2}{x^2} + \overline{w}^2 + 2\left([w]\dfrac{\alpha}{x} + [w]\,\overline{w} + \dfrac{\alpha}{x}\overline{w}\right)$

(2.1.4) $\Leftrightarrow [w]' - \dfrac{\alpha}{x} + \overline{w}' + [w]^2 + \dfrac{\alpha^2}{x^2} + \overline{w}^2 + 2\left([w]\dfrac{\alpha}{x} + [w]\,\overline{w} + \dfrac{\alpha}{x}\overline{w}\right) = [\sqrt{r}\,]^2 + 2[\sqrt{r}\,]\overline{r} + \overline{r}^2$

et

$$\left([w]^2 - [\sqrt{r}\,]^2\right) = \left([w] - [\sqrt{r}\,]\right)\left([w] + [\sqrt{r}\,]\right) \tag{2.1.5}$$

(2.1.5) $= -[w]' + \dfrac{\alpha^2}{x^2} - \overline{w}' - \dfrac{2\alpha}{x}[w] - 2[w]\,\overline{w} - \dfrac{\alpha^2}{x^2} - \dfrac{2\alpha}{x}\overline{w} - \overline{w}^2 + 2\overline{r}[\sqrt{r}\,] + \overline{r}^2$.

Le côté droit ne contient pas les termes $\dfrac{1}{x^i}$, $2 \leq i \leq 2+\upsilon$ et $\upsilon \geq 1$, cela implique que le côté gauche est nul.

En effet, comme $2\,[w] = ([w] - [\sqrt{r}\ ]) + ([w] + [\sqrt{r}\ ])$, au moins un des facteurs correspond à $\dfrac{1}{x^{\upsilon}}$ ou les autres facteurs, non nuls, doivent correspondre à $\dfrac{1}{x^{i}}$ pour un certain $i \geq 2$.

Le produit alors correspond à $\dfrac{1}{x^{\upsilon+i}}$, pour un certain $i \geq 2$, ce qui est absurde, d'où

$$[w] = \pm\left[\sqrt{r}\ \right]$$

.

Le coefficient de $\dfrac{1}{x^{\upsilon+1}}$ dans le côté droit dans l'équation (1.2.5) est $\pm \upsilon a \pm 2\alpha a + b$, où b est le coefficient de $\dfrac{1}{x^{\upsilon+1}}$ dans $2\overline{r}\,[\sqrt{r}\ ] + \overline{r}^2 = r - [\sqrt{r}\ ]^2$.

Par conséquent, $\alpha^{\pm} = \dfrac{1}{2}\left(\pm\dfrac{b}{a} + \upsilon\right)$, on conclut que si 0 est un pôle de r d'ordre $2\upsilon \geq 4$, alors la composante de la fraction partielle de w au point 0 est $\pm\,[\sqrt{r}\ ] + \dfrac{\alpha^{\pm}}{x}$, avec $\alpha^{\pm} = \dfrac{1}{2}\left(\pm\dfrac{b}{a} + \upsilon\right)$.

C4) Finalement, on doit considérer 0 comme point ordinaire de r.

Comme dans le cas C1) : $[w] = 0$ et $-\alpha + \alpha^2 = 0$, mais dans ce cas, on ne peut pas conclure que $\alpha \neq 0$, donc la composante de la fraction partielle de r au point 0 est soit 0 soit $\dfrac{1}{x}$.

Soit Γ l'ensemble des pôles de r alors

$w = \sum\limits_{c\in\Gamma}\left(s\,(c)\,[\sqrt{r}\ ]_c + \dfrac{\alpha^{s(c)}}{x-c}\right) + \sum\limits_{i=1}^{d}\dfrac{1}{x-d} + R$ avec $R \in \mathbb{C}\,[x]\,, s\,(c) = +$ où $-$, et $[\sqrt{r}\ ]_c$, $\alpha_c^{s(c)}$ sont les notations de l'algorithme.

En considérant aussi la série de Laurent de w au voisinage de ∞.

En supposant que

$$w = R + \frac{\alpha_\infty}{x} + \cdots$$

.

∞_1) Si r est d'ordre $\upsilon \rangle\ 2$ à l'infini alors $r = \dfrac{*}{x^{\upsilon}} + \dfrac{*}{x^{\upsilon+1}} + \cdots$.

En utilisant l'équation de Ricatti, on trouve

$$\frac{\alpha_\infty^2 - \alpha^\infty}{x^2} + 2\frac{\alpha_\infty}{x} + R' + R^2 + \cdots = \frac{*}{x^v} + \frac{*}{x^{v+1}} + \cdots$$

.

Comme $v \rangle 2$ alors $\alpha_\infty^2 - \alpha_\infty = 0$ et $R = 0$ donc $\alpha_\infty = 0$ ou 1.

∞_2) Si r est d'ordre 2 à l'infini alors

$$r = \frac{b}{x^2} + \frac{*}{x^3} + \cdots$$

.

L'équation de Ricatti donne $R = 0$ et $\alpha_\infty^2 - \alpha_\infty = b$ d'où $\alpha_\infty = \pm\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4b}$

∞_3) D'après la condition nécesssaire, l'ordre de r à l'infini est pair. Le même argument comme dans le cas c_3).

On trouve $R = \pm[\sqrt{r}\,]_\infty$, $\alpha_\infty = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{b}{a} - v\right)$,où $-2v$ est l'ordre de r à l'infini, a est le plus grand coefficient de $[\sqrt{r}\,]_\infty$ et b est le coefficient de $\frac{1}{x^{v-1}}$ dans $r - [\sqrt{r}\,]_\infty^2$.

Maintenant, il faut savoir que la fraction partielle de w est de la forme

$$w = \sum_{c\in\Gamma}\left(s(c)\left[\sqrt{r}\,\right]_c + \frac{\alpha^{s(c)}}{x-c}\right) + s(\infty)\left[\sqrt{r}\,\right]_\infty \sum_{i=1}^{d}\frac{1}{x-d}$$

de plus, le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans la série de Laurent de w à l'infini est $\alpha_\infty^{s(\infty)}$, d'où

$d = \alpha_\infty^{s(\infty)} - \sum_{c\in\Gamma}\alpha_c^{s(c)} \in \mathbb{N}$.

Soit $\theta = \sum_{c\in\Gamma}(s(c)[\sqrt{r}\,]_c + \frac{\alpha^{s(c)}}{x-c}) + s(\infty)[\sqrt{r}\,]_\infty$ et $P = \prod_{i=1}^{d}(x-d_i)$, alors $w = \theta + \frac{P'}{P}$.

On utilisant l'équation (2.1.4) (de Ricatti)

On a $w' = \theta' + \frac{PP'' - P'^2}{P^2}$, $w^2 = \theta^2 + \frac{P'^2}{P^2} + 2\theta\frac{P'}{P}$

$$(2.1.4) \Leftrightarrow \theta'' + \frac{P''}{P} + \theta^2 + 2\theta\frac{P'}{P} - r = 0$$

$(2.1.4) \Leftrightarrow P\left(\theta' + P'' + P\theta^2 + 2P'\theta - P\ r\right) = 0$

Comme $P \neq 0$ alors

$$P'' + 2P'\theta + P\left(\theta' + \theta^2 - r\right) = 0 \tag{2.1.6}$$

Si P est une solution de cette équation, alors w satisfait l'équation de Ricatti, par suite si P est solution de l'équation (2.1.6) , alors $\eta = e^{\int w}$ est une solution de l'équation (1.2.5) .

2.2 Algorithme du deuxième cas

La solution d'après le théorème (1.3.1) est de la forme $e^{\int w}, w$ algébrique sur $\mathbb{C}(x)$ de degré 2.

Dans ce cas, et même pour le $3^{ième}$ cas, on a trois parties.

2.2.1 Description

Comme dans le 1^{er}cas, on rassemble les données pour chaque pôle c de r, aussi à l'infini et par rapport aux données on forme les familles d'ensemble E_c et E_∞.

Parmi ses dernieres certaines sont acceptées et d'autres rejetées. Si aucune famille n'est retenue le deuxième cas ne peut être verifié. Pour chaque famille retenue on cherche un polynôme unitaire P qui satisfait une certaine équation différentielle linéaire.

Si pour toute famille, un tel polynôme n'existe pas, alors le cas 2 n'est pas vérifié.

Si un tel polynôme existe, alors une solution de l'équation différentielle est trouvée.

2.2.2 L'algorithme

On assume que la condition nécessaire du deuxième cas est vérifiée.

Soit Γ l'ensemble des pôles de r.

Première étape

Pour chaque pôle c de r, on définit l'ensemble E_c comme suit :

$\mathbf{c}_1$) Si c est un pôle de r d'ordre 1, alors

$$E_c = \{4\}\,.$$

$\mathbf{c}_2$) Si c est un pôle de r d'ordre 2 et si b est le coefficient de terme $\dfrac{1}{(x-c)^2}$ dans l'expression de la fraction partielle de r, alors

$$E_c = \left\{2 + k\sqrt{1+4b}/k = 0, \pm 2\right\} \cap \mathbb{Z}.$$

$\mathbf{c}_3$) Si c est un pôle de r d'ordre $\upsilon \rangle\ 2$, alors

$$E_c = \{\upsilon\}$$

.

L'étude à l'infini

∞_1) Si r est d'ordre $\rangle\ 2$ à l'infini alors

$$E_\infty = \{0, 2, 4\}\,.$$

∞_2) Si r est d'ordre2 à l'infini et si b est le coefficient de $\dfrac{1}{x^2}$ dans la série de Laurent de r à l'infini, alors

$$E_\infty = \left\{2 + k\sqrt{1+4b}, k = 0, \pm 2\right\} \cap \mathbb{Z}$$

.

∞_3) Si c est un pôle de r d'ordre $\upsilon < 2$, alors

$$E_\infty = \{\upsilon\}$$

Deuxième étape

Considérons toutes les familles $(e_c)_{c\in\Gamma\cup\{\infty\}}$ avec $e_c \in E_c$.

Soit

$$d = \frac{1}{2}\left(e_\infty - \sum_{c\in\Gamma} e_c\right)$$

Si d est un entier non négatif, la famille est retenue, si non(c'est-à-dire d est négatif), la famille est rejetée. Si aucune famille n'est retenue, alors le $2^{ième}$ cas n'est pas vérifié.

Troisième étape

Pour chaque famille retenue dans la $2^{ième}$ étape, on construit la fonction rationnelle

$$\theta = \frac{1}{2}\sum_{c\in\Gamma} \frac{e_c}{x-c}$$

.

Après on cherche un polynôme unitaire P de degré d (d l'entier non négatif défini dans la $2^{ième}$étape) vérifiant l'équation

$$P''' + 3\theta P'' + \left(3\theta^2 + 3\theta^{'} - 4r\right) + \left(\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r'\right) P = 0 \qquad (2.2.1)$$

Si un tel polynôme n'est pas trouvé pour chaque famille retenue, alors le deuxième cas n'est pas vérifie.

Supposons qu'un tel polynôme existe.

Soit

$$\phi = \theta + \frac{P'}{P}$$

et soit w la solution de l'équation

$$w^2 + \phi w + \left(\frac{1}{2}\phi' + \frac{1}{2}\phi^2 - r\right) = 0$$

Alors $\eta = e^{\int w}$ est la solution de l'équation différentielle (1.2.5) .

2.2.3 Exemple

On considère l'équation différentielle (1.2.5) , avec $r = \dfrac{16x-3}{16x^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{16x^2}$.

a) r admet un seul pôle $c = 0$ d'ordre 2.

b) L'ordre de r à l'infini est $ord_\infty r = 1$.

D'après a) et b) les conditions nécessaires de cas 1 et cas 3 ne sont pas vérifiées, mais la condition du $2^{ième}$cas est vérifiée .

par suite appliquons l'algorithme du $2^{ième}$cas.

$1^{ière}$ étape :

On cherche l'ensemble E_0.

Comme $c = 0$ est d'ordre 2 alors on applique le c$_2$).
Soit b le coefficient de $\frac{1}{x^2}$ dans la fraction partielle de r, donc $b = -\frac{3}{16}$.
Par conséquent $E_0 = \left\{2 + k\sqrt{1 + 4\left(\frac{-3}{16}\right)}, k = 0, \pm 2\right\} \cap \mathbb{Z}$.

$$E_0 = \{1, 2, 3\}$$

.

On cherche E_∞

On note υ l'ordre de r à l'infini

$\upsilon = 1 < 2$, donc appliquons ∞_3).

$$E_\infty = \{\upsilon\} = \{1\}$$

$2^{ième}$ étape :

On considère toutes les familles $(e_c)_{c\in\Gamma\cup\{\infty\}}$, on a les familles
$(e_0, e_\infty) = (1, 1), (2, 1), (3, 1)$.
On cherche l'entier d par la formule $d = \frac{1}{2}\left(e_\infty - \sum_{c\in\Gamma} e_c\right)$.
Pour la famille $(1, 1)$, $d = 0$.
Pour la famille $(2, 1)$, $d = -\frac{1}{2}$.
Pour la famille $(3, 1)$, $d = -1$.
Les familles $(2, 1), (3, 1)$ sont écartées car d est négatif.
On applique l'étape 3 pour la famille $(1, 1)$ où $d = 0$.

$3^{ième}$ étape :

En considère la fonction $\theta = \frac{1}{2}\sum_{c\in\Gamma}\frac{e_c}{x-c}$.

On a $\theta = \frac{1}{2x}$.

Par suite, on cherche le polynôme unitaire P qui vérifie l'équation (2.2.1) et de degré $d = 0$, alors le polynôme $P = 1$.

D'où l'existence de P est la question si on prend $\left(\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r'\right) = 0$.

On a $P''' = P'' = P' = 0$.

$\theta' = -\frac{1}{2x^2}$, $\theta'' = \frac{1}{x^3}$, $\theta^3 = -\frac{1}{8x^3}$, $r' = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{8x^3}$.

(2.2.1) $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{8x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{8x^3} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{4x^4}\right)P = 0$

$\Longleftrightarrow \left(-\frac{3}{4x^4} + \frac{3}{4x^4}\right)P = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4x^4}\left(1 - \frac{1}{x}\right)P = 0.$

Comme $P = 1$, alors

$\frac{3}{4x^4}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Soit $\phi = \theta + \frac{p'}{p} \Rightarrow \phi = \theta + \frac{1}{2x}$, car $p' = 0$

Soit w la solution de l'équation

$$w^2 + \phi w + (\frac{1}{2}\phi' + \frac{1}{2}\phi^2 - r) = 0 \tag{2.2.2}$$

(2.2.2) $\Longleftrightarrow w^2 + \frac{1}{2x}w + (-\frac{1}{4x} + \frac{1}{8x^2} - \frac{1}{x} + \frac{3}{16x^2}) = 0$

$\Longleftrightarrow w^2 + \frac{1}{2x}w + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{x} = 0$, (c'est une équation d'ordre 2, calculons alors son discriminant Δ pour la résoudre).

On a $\Delta = \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4x^2} + \frac{4}{x} = \frac{4}{x}$,donc $w_1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2x} - \frac{2}{\sqrt{x}}) = \frac{1}{4x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ et

$w_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2x} + \frac{2}{\sqrt{x}}) = \frac{1}{4x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ par suite $\eta = e^{\int (\frac{1}{4x} \pm \frac{1}{\sqrt{x}}} = x^{\frac{1}{4}} e^{\pm 2\sqrt{x}}$.

2.2.4 La preuve de l'algorithme

On assume que le cas 1 ne peut être vérifié.

Pour cette preuve, on utilise beaucoup plus le groupe de Galois différentiel et ses propiétés, on le note G. Dans ce cas (cas 2), le groupe G est conjugué à un sous groupe du groupe D^+, où

$D^+ = \{\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} / c \in \mathbb{C}, c \neq 0\} \cup \{\begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^{-1} & 0 \end{pmatrix} / c \in \mathbb{C}, c \neq 0\}$, de plus G est non triangularisable d'après le lemme (1.3.1) .

Soit $\{\eta, \xi\}$ un système fondamental de solutions de l'équation (1.2.5) , pour tout $\sigma \in G$, on a

soit

$$\sigma\eta = c\eta \ , \ \sigma\xi = c^{-1}\xi$$

ou bien

$$\sigma\eta = -c^{-1}\xi \ , \ \sigma\xi = c\eta$$

comme $\sigma(\eta^2\xi^2) = \eta^2\xi^2$, donc $\eta^2\xi^2 \in \mathbb{C}(x)$. De plus $\eta\xi \notin \mathbb{C}(x)$, car le cas 1 n'est pas vérifié

On écrit

$$\eta^2\xi^2 = g \prod_{c\in\Gamma} (x-c)^{e_c} \prod_{i=1}^{m} (x-d_i)^{f_i}$$

où Γest l'ensemble des pôles de r, et e_i , f_i sont des entiers.

Le but est de trouver les exposants e_c et f_i.

Soit

$$\phi = \frac{(\eta\xi)'}{(\eta\xi)} = \frac{1}{2}\frac{(\eta^2\xi^2)'}{(\eta^2\xi^2)} = \frac{1}{2}\sum_{c\in\Gamma}\frac{e_c}{x-c} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{f_i}{x-d_i}$$

puisque $\phi = \dfrac{\eta'}{\eta} + \dfrac{\xi'}{\xi}$, car $(\eta\xi)' = \eta'\xi + \eta\xi'$, alors

$$\phi'' + 3\phi\phi' + \phi^3 = 4r\phi + 2r' \tag{2.2.3}$$

Premièrement on détermine e_c pour $c \in \Gamma$. et pour sinplifier les notations on assume que $c = 0$.

C_1) Supposons que 0 est un pôle d'ordre 1.

Les séries de Laurent de r et de ϕ au point 0 sont de formes :

$$\begin{aligned} r &= \alpha x^{-1} + ... \qquad\qquad (\alpha \neq 0) \\ \phi &= \frac{1}{2}ex^{-1} + f + ... \, (e \in \mathbb{Z}, f \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

En remplaçant les deux séries dans la formule (2.2.3) , mais avant ça calculons ϕ, ϕ'', ϕ^3, r' et $\phi\phi'$.

$$\begin{aligned}
\phi' &= -\frac{1}{2}ex^{-2} + f + ... \qquad\qquad f \in \mathbb{C} \\
\phi'' &= ex^{-3} + f + ... \\
\phi^2 &= \frac{1}{4}e^2x^{-2} + ex^{-1}f + f^2 + ... \\
\phi^3 &= \frac{1}{8}e^3x^{-3} + \frac{1}{4}e^2x^{-2}f + \frac{1}{2}e^2x^{-2}f + ex^{-1}f^2 + \frac{1}{2}ex^{-1}f^2 + f^3 + ... \\
r' &= -\alpha x^{-2} + ... \\
\phi\phi' &= -\frac{1}{4}e^2x^{-3} - \frac{1}{2}ex^{-2}f + \frac{1}{2}ex^{-1}f + f^2 + ...
\end{aligned}$$

En remplaçant dans (2.2.3) , on obtient

Par identification

$$\begin{aligned}
e - \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^3 &= 0 \\
-\frac{3}{2}ef + \frac{3}{4}e^2 f &= 2\alpha e - 2\alpha
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
e &= 0 \text{ et } \left(\frac{1}{8}e^2 - \frac{3}{4}e + 1\right) = 0 \\
\frac{3}{4}fe - \frac{3}{2}f &= 2\alpha e - 2\alpha
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
e &= 0 \;\text{ et } \Delta = \frac{1}{16} \\
\frac{3}{4}fe - \frac{3}{2}f &= 2\alpha e - 2\alpha
\end{aligned}$$

Alors

$$\left\{ e = 0 \ , \ e_1 = 4 \ , \ e_2 = 2 \text{ et } \frac{3}{4}fe^2 - \frac{3}{2}ef = 2\alpha e - 2\alpha \right.$$

comme $\alpha \neq 0$, alors $e \neq 0$ (car si $e = 0$ ou $2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ contradiction), par conséquent $e = 4$.

C_2) supposons que 0 est un pôle d'ordre 2, et soit b le coefficient de $\frac{1}{x^2}$ dans la série de

Laurent de r.

$$\begin{aligned} r &= bx^{-2}+... \quad , \quad r' = -2bx^{-3}+..., \\ \phi &= \frac{1}{2}ex^{-1}+f+... \end{aligned}$$

En remplaçont dans l'équation (1.2.1)

$$(2.2.3) \ \Leftrightarrow \left(e-\frac{3}{4}e^2+\frac{1}{8}e^3\right)x^{-3}+\left(-\frac{3}{2}ef+\frac{3}{4}e^2f\right)x^{-2}+... = (2eb-4b)\,x^{-3}+4bfx^{-2}...$$

Par identification

$$e-\frac{3}{4}e^2+\frac{1}{8}e^3 = 2eb-4b \Leftrightarrow \frac{1}{8}e^3-\frac{3}{4}e^2+(-2b+1)\,e+4b=0 \tag{2.2.4}$$

On remarque que $e=2$ est une solution de l'équation (2.2.4) donc

$$\left((2.2.4) \ \Leftrightarrow (e-2)\left(\frac{1}{8}e^2-\frac{1}{2}e-2b\right)=0\right)$$

Résoudre l'équation $\frac{1}{8}e^2-\frac{1}{2}e-2b=0$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{4}+b \\ e_1 &= \frac{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+b}}{\frac{1}{4}} = 2-2\sqrt{1+4b} \\ e_2 &= \frac{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+b}}{\frac{1}{4}} = 2+2\sqrt{1+4b} \end{aligned}$$

d'où $e=2$ et $e=2\pm2\sqrt{1+4b}$ sont des racines de l'équation (2.2.4) . (les deux dernières racines sont écartées dans le cas ou ne sont pas des entiers)

C_3) Supposons que 0 est un pôle de r d'ordre $v \succ 2$.

Donc

$$\begin{aligned} r &= \alpha x^{-\gamma}+... \qquad (\alpha \neq 0) \\ \phi &= \frac{1}{2}ex^{-1}+... \end{aligned}$$

On a

$$
\begin{aligned}
r' &= -\upsilon \alpha x^{-\upsilon-1} + ... \\
4r\phi &= 2e\alpha x^{-\upsilon-1} + ... \\
(1.2.1) \quad \Leftrightarrow & \left(e - \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^3\right) x^{-3} + \left(-\frac{3}{2}ef + \frac{3}{4}e^2 f\right) x^{-2} + ... = (2e\alpha - 2\alpha\upsilon)\, x^{-\upsilon-1} + ...
\end{aligned}
$$

Alors par identification $2e\alpha - 2\alpha\upsilon = 0 \Rightarrow e = \upsilon$.

Pour déterminer les exposants f_i, on reprend le calcul de C_1) avec $\alpha = 0$ (comme d_i doit être un point ordinaire de r) on trouve $f_i = 0$, 2,ou 4.

On ne peut pas exclure la possibilité $f_i = 2$, mais exclure la possibilité $f_i = 0$.

On a montré que

$$\eta^2\zeta^2 = \prod_{c\in\Gamma} (x-c)^{e_c} P^2 \quad \text{ou} \;\; e_c \in E_c \;\; \text{et} \;\; P \in \mathbb{C}[x]$$

Soit $\theta = \frac{1}{2}\sum_{c\in\Gamma} \frac{e_c}{x-c}$, alors $\phi = \theta + \frac{P'}{P}$.

La prochaine étape de notre preuve est de déterminer le degré d de P, et pour le déterminé on utilise la série de Laurent de la fonction ϕ à l'infini, et l'équation (1.2.1) .

On a

$$\phi = \frac{1}{2}e_\infty x^{-1} + ... \qquad , \qquad e_\infty = \sum_{c\in\Gamma} e_c + 2d$$

∞_1) Supposons que l'ordre de r à l'infini $\succ$ à 2.

Le même raisonement comme dans (C_1), on trouve $e_\infty = 0, 2$ ou 4.

∞_2)Supposons que l'ordre de r à l'infini est 2, et soit b le coefficient de x^{-2} dans la séries de Laurent de r à l'infini. comme dans C_2), $e_\infty = 2 \pm \sqrt{1+4b}$ et e_∞ est un entier.

∞_3) Supposons que l'ordre de r à l'infini est $\upsilon \prec 2$, comme (C_3), $e_\infty = \upsilon$.

Noté qu'au moins un des e_c $(c \in \Gamma)$ est impair, comme $\eta\zeta \notin \mathbb{C}(x)$, utilisons l'équation (1.2.1) et l'équation $\phi = \theta + \frac{p'}{p}$.

On a

$$
\begin{aligned}
\phi &= \theta+\frac{p'}{p}\\
\phi' &= \theta'+\frac{p''}{p}-\frac{p'^2}{p^2}\\
\phi'' &= \theta''+\frac{p'''}{p}-3\frac{p'p''}{p^2}+2\frac{p'^3}{p^3}\\
3\phi\phi' &= 3\theta\theta'-3\frac{p'^3}{p^3}+3\frac{p'p''-\theta p'^2}{p^2}+3\frac{p''\theta+p'\theta'}{p}\\
\phi^3 &= \theta^3+3\theta\frac{p'^2}{p^2}+3\theta^2\frac{p'}{p}+\frac{p'^3}{p^3}\\
(2.2.4)\quad &\Leftrightarrow \theta''+3\theta\theta'+\theta^3+\frac{p'''+3p''\theta+3p'\theta'+3\theta^2p'}{p}+\frac{3p'p''-3\theta p'^2-3p'p''+3\theta p'^2}{p^2}=\\
&\quad 4r\theta+4r\frac{p'}{p}+2r'\\
&\Leftrightarrow \left(\theta''+3\theta\theta'+\theta^3\right)p+p'''+3p''\theta+3p'\theta'+3\theta^2p'-4r\theta p-4rp'-2r'=0
\end{aligned}
$$

$$(2.2.4)\ \Leftrightarrow p'''+3\theta p''+\left(3\theta^2+3\theta'-4r\right)p'+\left(\theta''+3\theta\theta'+\theta^3-4r\theta-2r'\right)p=0 \qquad (2.2.5)$$

(2.2.5) est une équation différentielle linéaire homogène en p, admet une solution polynomiale si et seulement s'il existe un polynôme unitaire p qui est une solution.

Maintenant, pour compléter la preuve, on montre que $e^{\int\omega}$ est une solution de l'équation différentielle (1.2.5) .

Soit ω une solution de l'équation $\omega^2-\phi\omega+\frac{1}{2}\phi'+\frac{1}{2}\phi^2-r=0$

On dérive cette équation

$$2\omega\omega'-\phi'\omega-\phi\omega'+\frac{1}{2}\phi''+\phi\phi'-r'=0 \qquad (2.2.6)$$

d'où

$$(2\omega-\phi)\,\omega=\phi'\omega-\frac{1}{2}\phi''-\phi\phi'+r'$$

Le facteur $2\omega-\phi$ ne peut pas s'annulé car sinon, si $\phi=2\omega$ alors l'équation (2.2.6) donne $\omega^2+\omega'-r=0$, donc $\eta=e^{\int\omega}$ est solution de l'équation (2.2.6) , mais $\omega=\dfrac{1}{2}\phi\in\mathbb{C}(x)$ et $\eta=e^{\int\omega}$, $\omega\in\mathbb{C}(x)$ est solution pour le 1^er^ cas, qui est non vérifié.

Utilisons les équations (2.2.6) et (1.2.1) on obtient :

$$2\left(2\omega-\phi\right)\left(\omega^{2}+\omega'-r\right)=-\phi''-3\phi\phi'-\phi^{3}+4r\phi+2r'=0$$

d'où $\omega^2+\omega'-r=0$ par suite $\eta=e^{\int\omega}$ est solution de l'équation différentielle (1.2.5) .

2.3 Algorithme du troisième cas

Comme dans les 2 cas précédents, cette section est partagée en 3 parties. Une description de l'algorithme, des exemples, et finalement la partie de la preuve de l'algorithme.
La preuve exige la connaissance des sous groupes finis du groupe $SL\left(2\right)$ et ses invariants, ces derniers, on les présente dans le chapitre 3.

Dans ce cas l'équation différentielle a des solutions algébriques, et on assume que le 1^{er} et le $2^{i\grave{e}me}$ cas ne sont pas vérifiés.

2.3.1 Description

Soit η une solution de l'équation différentielle (1.2.5) , $r\in\mathbb{C}\left(x\right)$ et soit $\omega=\dfrac{\eta'}{\eta}$, comme on va le montrer dans le chapitre 3, ω est algébrique sur $\mathbb{C}\left(x\right)$ de degré 4, 6 ou 12. C'est le polynôme minimal de ω qu'on doit déterminer. L'équation minimale de η sera de degré $24,48$ ou 120, donc on est incapable de le déterminer.

Il ya deux méthodes possibles pour déterminer le polynôme minimal de ω.

La première méthode

Trouver un polynôme de degré 12 et le factoriser. on montre que si ω est solution d'un polynôme de degré 12 trouvé par cette méthode, alors $\eta=e^{\int\omega}$ est une solution de l'équation différentielle, donc tout facteur irréductible peut être utilisé, cette méthode est la plus directe.

La deuxième méthode

L'alternative est de tenter de trouver en premier un polynôme de degré 4 en ω, sinon, on cherche un polynôme de degré 6, sinon enfin une équation de degré 12. L'avantage dans cette méthode est que si une équation est trouvée, alors elle sera irréductible.

2.3.2 L'algorithme

D'après le théorème (1.3.2) , r ne peut pas avoir un pôle d'ordre supérieur strictement à 2. On note par n le degré de l'équation qu'on va deteminer.

C'est juste comme dans le $2^{ième}$ cas. Dans la première étape on va définir les ensembles E_c, E_∞ et les entiers α_c, α_∞. Après on regroupe les familles $(e_c)_{c\in\Gamma\cup\{\infty\}}$,c'est la $2^{ième}$ étape, finalement on construit la fonction θ, les polynômes s et p_i , $i = n, n-1, ..., 0$ pour trouver w.

Soit Γ l'ensemble des pôles de r.

Première étape

C_1) Si c est un pôle de r d'ordre 1, alors

$$E_c = \{12\}$$

.

C_2) Si c est un pôle de r d'ordre 2 et si b est le coefficient de $\dfrac{1}{(x-c)^2}$ dans la fraction partielle de r, alors

$$E_c = \left\{6 + \frac{12k}{n}\sqrt{1+4b}/k = 0, \pm 1 \pm ... \pm \frac{n}{2}\right\} \cap \mathbb{Z}$$

Remarque: d'après la condition néccessaire du troisième cas, l'analogue de cas C_3) n'existe pas .

∞) Si la série de Laurent de r à l'infini est de la forme $r = bx^{-2} + ...$ (b peut être égal à 0), alors

$$E_\infty = \{6 + \frac{12}{n}k\sqrt{1+4b}/k = 0, \pm 1 \pm ... \pm \frac{n}{2}\} \cap \mathbb{Z}$$

Deuxième étape

On considère toutes les familles $(e_c)_{c\in\Gamma\cup\{\infty\}}$ où $(e_c) \in E_c$. pour chaque famille, on définit l'entier

$$d = \frac{n}{12}(e_\infty - \sum_{c\in\Gamma} e_c).$$

Si d est un entier non négatif, la famille est retenue, sinon elle est écartée. Si aucune famille n'est retenue, alors le $3^{ième}$ cas n'est pas vérifié.

Troisième étape

Pour chaque famille retenue dans la $2^{ième}$ étape, on forme la fonction rationnelle

$$\theta = \frac{n}{12} \sum_{c \in \Gamma} \frac{e_c}{x-c},$$

et la fonction polynômiale

$$S = \prod_{c \in \Gamma} (x-c)\,.$$

En suite, on cherche un polynôme unitaire P de degré d, $\left(d \text{ calculé dans la } 2^{ième} \text{ étape}\right)$ tel que

$$\begin{aligned} P_n &= -P && (2.3.1) \\ P_{i-1} &= -SP_i' + ((n-i)\,S' - S\theta)\,P_i - (n-i)\,(i+1)\,S^2 r P_{i+1}, (i = n, n-1, ..., 0) \\ p_{-1} &= 0 \end{aligned}$$

On assume qu'une famille et son polynôme associé sont déterminés.

Soit ω une solution de l'équation

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{S^i P_i}{(n-i)!} \omega^i = 0 \qquad (2.3.2)$$

alors $\eta = e^{\int \omega}$ est une solution de l'équation différentielle (1.2.5)

2.3.3 Exemples

Exemple 2.3.1 *(1)* *Considérons l'équation différentielle (1.2.5)*, *avec* $r = -\dfrac{5x^2+27}{36\,(x^2-1)^2}$

$$r = -\frac{2}{9\,(x-1)^2} - \frac{2}{9\,(x+1)^2} + \frac{11}{72\,(x-1)} - \frac{11}{72\,(x+1)}$$

Vérifiant les conditions nécessaires :

* r admet deux pôles $c_1 = 1$ et $c_2 = -1$, $c_1$et c_2 sont d'ordre 2.

* l'ordre à l'infini : $ord_\infty r = 2$.

* La $1^{ière}$ condition est vérifiée car l'ordre de c_1 et c_2 est pair et l'ordre de r à l'infini est pair.

* La $2^{ième}$ condition est aussi vérifiée (r a ou moins un pôle d'ordre 2).

* La $3^{ième}$ condition est vérifiée (l'ordre d'un pôle de r ne peut pas depasser 2 et l'ordre à l'infini est au moins 2). Donc les 4 cas sont possibles.

L'algorithme du 1^{er}cas Le pôle $c_1 = 1$ est d'ordre 2, alors appliquons le (C_2), même pour le pôle c_2.

$1^{ière}$étape $[\sqrt{r}]_1 = [\sqrt{r}]_{-1} = 0$.

Soit b le coefficient de $\dfrac{1}{x-1}$ dans la fraction partielle de r et soit B le coefficient de $\dfrac{1}{x+1}$ dans la fraction partielle de r, alors $b = -\dfrac{2}{9}$ et $B = -\dfrac{2}{9}$.

Calculons les entiers $\alpha_1^{\pm}$, $\alpha_{-1}^{\pm}$, donc

$$\begin{aligned} \alpha_1^{\pm} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{1+4\left(\frac{-2}{9}\right)} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6} \\ \alpha_1^{+} &= \alpha_{-1}^{+} = \frac{2}{3} \quad , \quad \alpha_1^{-} = \alpha_{-1}^{-} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

L'étude à l'infini Comme $ord_\infty r = 2$, alors on applique le (∞_2) ,

$[\sqrt{r}]_\infty = 0$

soit $\gamma = \dfrac{\text{le coefficient principal}}{\text{le coefficient principal}}$ dans r, d'ou $\gamma = -\dfrac{5}{36}$.

$2^{ième}$étape Soient les familles $(e_c)_{c\in\Gamma\cup\{\infty\}}$et calculons l'entier $d = \alpha_\infty^{S(\infty)} - \sum_{c\in\Gamma} \alpha_c^{S(c)}$

$$\begin{aligned}
S(1) &= + \quad , \quad S(\infty) = + \ , \ S(-1) = + \quad , \quad d = \frac{5}{6} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \prec 0 \\
S(1) &= + \quad , \quad S(\infty) = + \ , \ S(-1) = - \quad , \quad d = \frac{5}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \prec 0 \\
S(1) &= + \quad , \quad S(\infty) = - \ , \ S(-1) = + \quad , \quad d = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \prec 0 \\
S(1) &= + \quad , \quad S(\infty) = - \ , \ S(-1) = - \quad , \quad d = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \prec 0 \\
S(1) &= - \quad , \quad S(\infty) = + \ , \ S(-1) = + \quad , \quad d = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \prec 0 \\
S(1) &= - \quad , \quad S(\infty) = + \ , \ S(-1) = - \quad , \quad d = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z} \\
S(1) &= - \quad , \quad S(\infty) = - \ , \ S(-1) = + \quad , \quad d = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \prec 0 \\
S(1) &= - \quad , \quad S(\infty) = - \ , \ S(-1) = - \quad , \quad d = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \prec 0
\end{aligned}$$

donc on a : $d = \alpha_{\infty}^{\pm} - \alpha_{1}^{\pm} - \alpha_{1}^{\pm}$ qui n'est jamais un entier non négatif et par suite le 1^{er} cas n'est pas vérifié.

L'algorithme du $2^{ième}$ cas. On applique le (C_2) et (∞_2)

Calcul de E_∞.

$$\begin{aligned} b &= -\frac{5}{36} \quad , \quad E_\infty = \left\{ 2 + k \pm 4\left(-\frac{5}{36}\right) \ / \quad k = 0, \pm 2 \right\} \cap \mathbb{Z} \\ E_\infty &= \{2\} \end{aligned}$$

$2^{ième}$étape On a une seule famille à considérer : $e_1 = 2$, $e_\infty = 2$, $e_{-1} = 2$.
L'entier d :

$$d = \frac{1}{2}\left(e_\infty - e_1 - e_{-1} = -1\right) \prec 0$$

donc la seule famille trouvée n'est pas retenue, par suite le $2^{ième}$ cas n'est pas vérifie.

L'algorithme du $3^{ième}$cas $1^{ière}$ étape :

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ 6 + k\sqrt{1 - \frac{2}{9} \times 4} \quad / \ k = 0, \pm 1 \pm 2, ..., \pm 6 \right\} \\ &= \left\{ 6 + \frac{1}{3}k \ / \ k = 0, \pm 1 \pm 2, ..., \pm 6 \right\} \\ E_1 &= E_{-1} = \{4, 5, 6, 7, 8\} \\ E_\infty &= \left\{ 6 + \frac{2}{3}k \ / \ k = 0, \pm 1 \pm 2, ..., \pm 6 \right\} \\ E_\infty &= \{2, 4, 6, 8, 10\} \end{aligned}$$

$2^{ième}$étape : On cherche les familles $(e_c)_{c \in \Gamma \cup \{\infty\}}$ où l'entier d qui correspond soit non négatif. $d = \dfrac{n}{12}(e_\infty - \sum\limits_{c \in \Gamma} e_c) = \frac{1}{3}(e_\infty - e_1 - e_{-1})$.

donc les familles retenues sont :

$$\begin{aligned}
e_\infty &= 8\ ,\ e_1 = 4\ ,\ e_{-1} = 4\ ,\ d = 0\\
e_\infty &= 10\ ,\ e_1 = 4\ ,\ e_{-1} = 6\ ,\ d = 0\\
e_\infty &= 10\ ,\ e_1 = 5\ ,\ e_{-1} = 5\ ,\ d = 0\\
e_\infty &= 10\ ,\ e_1 = 6\ ,\ e_{-1} = 4\ ,\ d = 0
\end{aligned}$$

3^{ième}étape : pour la famille $e_\infty = 8$, $e_1 = 4$, $e_{-1} = 4$, $d = 0$.

Calculons θ et S.

$$\begin{aligned}
\theta &= \sum_{c\in\Gamma} \frac{e_c}{x-c} = \frac{4}{x-1} + \frac{4}{x+1}\\
S &= (x-1)(x+1) = x^2 - 1
\end{aligned}$$

$d^\circ P = 0$ et comme P est unitaire alors $P = 1$.

Calculons maintenant les polynômes p_i par la formule (2.3.1) .

$$\begin{aligned}
p_4 &= -1\\
p_3 &= \frac{8}{3}\, x\\
p_2 &= -(\frac{1}{3})(15x^2 + 1)\\
p_1 &= \frac{1}{9}(50x^3 + 14x)\\
p_0 &= -(\frac{1}{54})(125x^4 + 134x^2 - 3)\\
p_{-1} &= 0
\end{aligned}$$

Soit w une solution de l'équation $\frac{1}{24}p_0 + \frac{1}{6}sp_1w + \frac{1}{2}s^2p_2w^2 + s^3p_3w^3 + s^4p_4w^4 = 0$, donc w est solution de l'équation

$$sw^4 = \frac{8}{3}xsw^3 - \frac{1}{6}(15x^2 + 1)sw^2 + \frac{1}{27}(25x^3 + 7x)sw - \frac{1}{1296}(125x^4 + 134x^2 - 3)$$

Soit le changement de variable $6sw = z + 4x$, l'équation devient

$$z^4 = 6(x^2 - 1)z^2 - 8x(x^2 - 1)z + 3(x^2 - 1)^2$$

Alors

$$\eta = e^{\int w} = (x^2-1)^{\frac{1}{3}} \exp(\int z/(x^2-1))dx$$

Exemple 2.3.2 *(2)*

Considérons l'équation (1.2.5) ,
$r = -\dfrac{3}{16x} - \dfrac{2}{9(x-1)^2} + \dfrac{3}{16x(x-1)} = \dfrac{-32x^2+27x-27}{16\times 9x^2(x-1)}$
*L'équation r admet deux pôles c_0 =0 , $c_1 = 1$, les deux pôles sont d'ordres 2.

* Les conditions nécessaires du théorème (1.3.2) sont vérifiées, alors les 4 cas de théorème (1.3.1) sont possibles.

*Appliquons alors les trois algorithmes.

Algorithme du 1ercas Comme l'ordre de c_0 et c_1 est 2 alors appliquons le c_2).

$$\left[\sqrt{r}\right]_{c0} = \left[\sqrt{r}\right]_{c_1} = 0 \text{ et } \alpha_0^+ = \frac{3}{4}, \alpha_0^- = \frac{1}{4}$$

$$\alpha_1^+ = \frac{2}{3}\ ,\ \alpha_1^- = \frac{1}{3}$$

L'ordre de r à l'infini : $ord\ r_\infty = 2$, d'après ∞_2) , $\alpha_\infty^+ = \dfrac{2}{3}$, $\alpha_\infty^- = \dfrac{1}{3}$.

*$d = \alpha_\infty^\mp - \alpha_0^\mp - \alpha_1^\mp$ qui ne peut jamais être un entier non négatif, d'où le cas 1 n'est pas vérifié.

Algorithme du 2^{ième}cas

$$\begin{aligned} E_0 &= \left\{2 + k\sqrt{1+4(\frac{-3}{16})}/k = 0, \mp 2\right\} \cap \mathbb{Z} = \{2,3,1\}. \\ E_1 &= \left\{2 + k\sqrt{1+4(\frac{-2}{9})}/k = 0, \pm 2\right\} \cap \mathbb{Z} = \{2\} \\ E_\infty &= \left\{2 + k\sqrt{1+4(\frac{-2}{9})}/k = 0, \pm 2\right\} \cap \mathbb{Z} = \{2\} \end{aligned}$$

.

*.$d = e_\infty - e_0 - e_1$ qui n'est pas un entier non négatif, donc le 2^{ième}cas n'est pas vérifié.

Algorithme du $3^{ième}$cas On cherche une équation d'ordre 12 de w, d'où $n = 12$.

1^{er}étape :

Soit α le coefficient de $\frac{1}{x^2}$ dans la fraction de r , $\alpha = -\frac{3}{16}$, donc E_0 $=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,et soit β le coefficient de $\frac{1}{(x-1)^2}$dans la fraction de r.
$\beta = -\frac{2}{9}$, $E_1 = \{4, 5, 6, 7, 8\}$,et $E_\infty = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

$2^{ième}$étape :

*$d = e_\infty - e_0 - e_1$ un entier non négatif, alors les familles retenues sont

$$\begin{aligned} e_\infty &= 7 \ , e_0 = 3 \ , e_1 = 4 \ , d = 0 \\ e_\infty &= 8 \ , e_0 = 3 \ , e_1 = 4 \ , d = 1 \\ e_\infty &= 8 \ , e_0 = 3 \ , e_1 = 5 \ , d = 0 \\ e_\infty &= 8 \ , e_0 = 4 \ , e_1 = 4 \ , d = 0 \end{aligned}$$

$3^{ième}$étape :

*Pour chaque famille retenue dans la $2^{ième}$étape, on calcule la fonction θ, et le polynôme s, donc pour la première famille,

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{3}{x} + \frac{4}{x-1} \\ s &= x^2 - x \end{aligned}$$

*On cherche les polynômes p_i, (sachant que p est un polynôme unitaire de degré $d = 0$, d'où $p = 1$) par la formule(2.3.1) .Comme les calculs sont assez grands,on utilise alors le programme Maple suivant

$> p[12] := -1;$

$> s := x\hat{}2 - x;$

$> r := -3/(16 * x\hat{}2) - 2/(9 * (x-1)\hat{}2) + 3/(16 * x * (x-1));$

$> t := 3/x + 4/(x-1);$

$> for\ i\ from\ 12\ by\ -1\ to\ 0\ do$

$> p[i-1] := expand(simplify(-s * diff(p[i], x) + ((12-i) * diff(s, x) - s * t) * p[i] -$
$(12-i) * (i+1) * s\hat{}2 * r * p[i+1]));$

$r := -3/16x\hat{}2 - 2/9(x-1)\hat{}2 + 3/16x(x-1)$

$s := x\hat{}2 - x$

$t := 3/x + 4/(x-1)$

$p[12] := -1$

$p[11] := 7x - 3$

$p[10] := -134/3 * x\hat{}2 + 153/4 * x - 33/4$

$p[9] := 2318/9 * x\hat{}3 - 7933/24 * x\hat{}2 + 285/2 * x - 165/8$

$p[8] := -1328 * x\hat{}4 + 54493/24 * x\hat{}3 - 140879/96 * x\hat{}2 + 6795/16 * x - 1485/32$

$p[7] := 54400/9 * x\hat{}5 - 154895/12 * x\hat{}4 + 533675/48 * x\hat{}3 - 231625/48 * x\hat{}2 + 16875/16 * x$
$-1485/16$

$p[6] := -71680/3 * x\hat{}6 + 6607855/108 * x\hat{}5 - 28446875/432 * x\hat{}4 + 7315765/192 * x\hat{}3$
$-799645/64 * x\hat{}2 + 140805/64 * x - 10395/64$

$p[5] := 2168320/27 * x\hat{}7 - 2157785/9 * x\hat{}6 + 89147065/288 * x\hat{}5 - 773755045/3456 * x\hat{}4$
$+6266715/64 * x\hat{}3 - 207025/8 * x\hat{}2 + 244755/64 * x - 31185/128$

$p[4] := 694575/128 * x - 10888535/256 * x\hat{}2 + 24535105/128 * x\hat{}3 - 834921535/1536 * x\hat{}4$
$+572480125/576 * x\hat{}5 - 2967857305/2592 * x\hat{}6 + 61590760/81 * x\hat{}7 - 2007040/9 * x\hat{}8 - 155925/512$

$p[3] := 3104325/512 * x - 13804245/256 * x\hat{}2 + 72029685/256 * x\hat{}3 - 1459065755/1536 * x\hat{}4$
$+9922072825/4608 * x\hat{}5 - 50998947055/15552 * x\hat{}6 + 932445325/288 * x\hat{}7 - 152418560/81 * x\hat{}8$
$-155925/512 + 119275520/243 * x\hat{}9$

$p[2] := 10276875/2048 * x - 51037875/1024 * x\hat{}2 + 302029875/1024 * x\hat{}3 - 7080628625/6144 * x\hat{}4$
$+57298977575/18432 * x\hat{}5 - 2252824525/384 * x\hat{}6 + 238065730175/31104 * x\hat{}7$
$-4283726125/648 * x\hat{}8 + 276673600/81 * x\hat{}9 - 194969600/243 * x\hat{}10 - 467775/2048$

$p[1] := 1403325/512x + 630784000/729 * x\hat{}11 - 122990175/4096 * x\hat{}2 + 50779575/256 * x\hat{}3$
$-3598658525/4096 * x\hat{}4 + 6316612225/2304 * x\hat{}5 - 680624889175/110592 * x\hat{}6 + 137484649225/13824$
$*x\hat{}7 - 2117370349325/186624 * x\hat{}8 + 2821397425/324 * x\hat{}9 - 984121600/243 * x\hat{}10 - 467775/4096$

$p[0] := 6081075/8192 * x + 1716915200/729 * x\hat{}11 - 145478025/16384 * x\hat{}2 + 33108075/512 * x\hat{}3$
$-5235932625/16384 * x\hat{}4 + 9256622375/8192 * x\hat{}5 - 432502537775/147456 * x\hat{}6 +$
$623255057425/110592 * x\hat{}7 - 660249961525/82944 * x\hat{}8 + 4516099262675/559872 * x\hat{}9$
$-4060614250/729 * x\hat{}10 - 1009254400/2187 * x\hat{}12 - 467775/16384$

$p[-1] := 0$

Soit ω une solution de l'équation (2.3.2) de même on utilise un programme pour calculer cette somme. On note par g cette somme.

$> g := sum\ ('s\hat{}i * p[i]/(12-i)! * w\hat{}i'\ ,\ 'i = 0...12');$

$> solve(g, w);$

$g := 1/479001600*p[0]+1/39916800*s*p[1]*\omega+1/3628800*s\hat{}2*p[2]*\omega\hat{}2+1/362880*s\hat{}3*p[3]*\omega\hat{}3+1/40320*s\hat{}4*p[4]*\omega\hat{}4+1/5040*s\hat{}5*p[5]*\omega\hat{}5$

$+1/720*s\hat{}6*p[6]*\omega\hat{}6+1/120*s\hat{}7*p[7]*\omega\hat{}7+1/24*s\hat{}8*p[8]*\omega\hat{}8+1/6*s\hat{}9*p[9]*\omega\hat{}9+1/2*s\hat{}10*p[10]*\omega\hat{}10+s\hat{}11*p[11]*\omega\hat{}11+s\hat{}12*p[12]*\omega\hat{}12$

$> RootOf(p[0]+12*\_Z*p[1]+132*\_Z\hat{}2*p[2]+1320*\_Z\hat{}3*p[3]+11880*\_Z\hat{}4*p[4]+95040*\_Z\hat{}5*p[5]+665280*\_Z\hat{}6*p[6]+3991680*p[7]*\_Z\hat{}7+$

$19958400*p[8]*\_Z\hat{}8+79833600*p[9]*\_Z\hat{}9+239500800*p[10]*\_Z\hat{}10+479001600*p[11]*\_Z\hat{}11+479001600*p[12]*\_Z\hat{}12, label = \_L1)/s.$

Ce programme n'a pas donné le résultat, les professeurs Caviness et Saunders de l'institut polytechnique Rensselaer ont montrés que l'équation en w est le cube de l'équation polynômiale

$(x^2-x)^4w^4-(1/3)(x^2-x)^3(7x-3)w^3+(1/24)(x^2-x)^2(48x^2-41x+9)w^2-$

$(1/432)(x^2-x)(320x^3-409x^2+180x-27)w+(1/20736)(2048x^4-3484x^3+2313x^2-702x+81).$

2.3.4 La preuve de l'algorithme

Dans cette partie on montre l'efficacité des deux méthodes utilisées pour trouver l'équation de w, de plus on montre que l'équation d'ordre 4, 6 ou 12 trouvée par la 1^{er}méthode est irréductible, mais celle d'ordre 12 trouvée par la deuxième méthode peut ne pas être irréductible.

On assume que le groupe de Galois G relatif à l'équation (1.2.5) est un groupe tétraèdral, octaèdral et icosaèdral.

Soit $\{\eta\ ,\ \xi\}$ un système fondamental de solutions et soit $w = \dfrac{\eta'}{\eta}$.

Théorème 2.3.1 *Soit η_1 une solution arbitraire de l'équation (1.2.5) , et soit* $w = \dfrac{\eta_1'}{\eta_1}$.

1- Si G est un groupe tétraèdral, alors $\deg_{\mathbb{C}(x)} w_1 \geq 4$ *et* $\deg_{\mathbb{C}(x)} w = 4$.

2- Si G est un groupe octaèdral, alors $\deg_{\mathbb{C}(x)} w_1 \geq 6$ *et* $\deg_{\mathbb{C}(x)} w = 6$.

3- Si G est un groupe icosaèdral, alors $\deg_{\mathbb{C}(x)} w_1 \geq 12$ *et* $\deg_{\mathbb{C}(x)} w = 12$.

Preuve. *cf [KOV85]* ■

Soit l'équation différentielle définie récursivement par :

$$\begin{aligned} a_n &= -1 \\ a_{i-1} &= -a_i' - za_i - (n-i)(i+1)ra_{i+1} \quad , \quad i = n, ..., 0 \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Une solution de (2.3.3) est une fonction z telle que quand $a_n, ..., a_{-1}$ sont définies comme ci-dessus, alors a_{-1} est identiquement nul.

Théorème 2.3.2 *Soit z une solution de l'équation (2.3.3) et soit w une solution de*

$$w^n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{(n-i)!} w^i$$

alors $\eta = e^{\int w}$est une solution de l équation différentielle (1.2.5)

Preuve. *cf [KOV85]* ■

Théorème 2.3.3 *1- Supposons que l'équation (2.3.3) avec $n = 4$, a une solution z dans $\mathbb{C}(x)$. Alors le polynôme $a_{i-1} = -a_i' - za_i - (n-i)(i+1)ra_{i+1}$, $i = n, ..., 0$*

$$\omega^4 - \sum_{i=0}^{3} \frac{a_i}{(4-i)!} \omega^i \in \mathbb{C}(x)[\omega]$$

est irréductible sur $\mathbb{C}(x)$.

2- Supposons que l'équation (2.3.3) avec $n = 6$, a une solution z dans $\mathbb{C}(x)$, alors le polynôme

$$\omega^6 - \sum_{i=0}^{5} \frac{a_i}{(6-i)!} \omega^i \in \mathbb{C}(x)[\omega]$$

est irréductible sur $\mathbb{C}(x)$.

3- Supposons que l'équation (2.3.3) avec $n = 12$, *a une solution* z *dans* $\mathbb{C}(x)$ *et que les équations (2.3.3) pour* $n = 4$ *et* 6 *n'ont pas des solutions dans* $\mathbb{C}(x)$, *alors le polynôme*

$$\omega^{12} - \sum_{i=0}^{11} \frac{a_i}{(12-i)!}\omega^i \in \mathbb{C}(x)[\omega]$$

est irréductible sur $\mathbb{C}(x)$.

Preuve. *[KOV85] Par le théorème (2.3.1) et (2.3.2) toute racine du polynôme*

$$\omega^n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{(n-i)!}\omega^i \quad (a_i \in \mathbb{C}(x))$$

doit être de degré 4,6 *ou* 12 *sur* $\mathbb{C}(x)$, *donc pour (1) il est clair que le polynôme est irréductible, pour (2) c'est parce qu'un polynôme d'ordre* 6 *est réductible, alors l'un de ses facteurs est de degré* 3.

pour démontrer le (3), il suffit de montrer que si $\deg \omega = n$, *alors (2.3.3) a une solution* $z \in \mathbb{C}(x)$.

Soit $A \in \mathbb{C}(x)[\omega]$ *le polynôme minimal de* ω *sur* $\mathbb{C}(x)$.*et soit* $n = \deg_\omega A$ *et on écrit*

$$A = -\omega^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{(n-i)!}\omega^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{(n-i)!}\omega^i \qquad (\ a_n = -1) \tag{2.3.4}$$

Considérons le polynôme

$$B = \frac{\partial A}{\partial \omega}(r - \omega^2) + \frac{\partial A}{\partial x} + (n\omega + z)A \text{ où } z = a_{n-1} \in \mathbb{C}(x)$$

Le coefficient de $\omega^{\ n+1}$ *dans* B *est* $(-na_n + na_n = 0)$, *et le coefficient de* ω^n *dans* B *est* $(-(n-1)a_{n-1} + a'_n + na_{n-1} + za_n = a_{n-1} - z = 0)$.

Comme $a_n = -1$ *et* $a_{n-1} = z$, *donc* $\deg_\omega B \prec n$, *mais*

$$\begin{aligned} B(\omega) &= \frac{\partial A}{\partial \omega}(w)(r - \omega) + \frac{\partial A}{\partial x}(w) + (nw + z)A(w) \\ &= \frac{d}{dx}(A(w)) + (nw + z)A(w) = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent $B = 0$.

Le coefficient de ω^i *dans* B *est :* $0 = (i+1)\dfrac{a_{i+1}}{(n-1-i)!}r - (i-1)\dfrac{a_{i-1}}{(n+1-i)!} + \dfrac{a'_i}{(n-i)!} + n\dfrac{a_{i-1}}{(n+1-i)!} + z\dfrac{a_i}{(n-i)!} = \frac{1}{(n-i)!}\left[(n-i)(i+1)ra_{i+1} + a_{i-1} + a'_i + za_i\right]$

où $a_{-1} = 0$. *c'est exactement les équations de (2.3.3) .* ■

Notation 2.3.1 *On note par $l\delta b$ la dérivée logarithmique* $\dfrac{b'}{b}$.

Théorème 2.3.4 *Soit F une forme (polynôme homogène) de degré n dans l'ensemble des solutions de l'équation (1.2.5) , alors $z = l\delta F$ est une solution de (2.3.3)*

Preuve. *cf [KOV85]* ■

Théorème 2.3.5 *(i) Si G est un groupe tétraèdral, alors l'équation (2.3.3) avec $n = 4$, a une solution $z = l\delta u$, où $u^3 \in \mathbb{C}(x)$.*

(ii) Si G est un groupe octaèdral, alors l'équation (2.3.3) avec $n = 6$, a une solution $z = l\delta u$, où $u^2 \in \mathbb{C}(x)$.

(iii) Si G est un groupe tétraèdral, octaèdral ou icosaèdral, alors l'équation (2.3.3) avec $n = 12$, a une solution $z = l\delta u$, où $u \in \mathbb{C}(x)$.

Preuve. [KOV85] Pour le cas (i) on prend $u = \eta^4 + 8\eta\xi^3$, pour le cas (ii) on prend

$u = \eta^5\xi - \eta\xi^5$,et pour le cas (iii) on prend $u = (\eta^4 + 8\eta\xi^3)^3, (\eta^5\xi - \eta\xi^5)^2$ou bien $(\eta^{11}\xi - 11\eta^6\xi^6 - \eta\xi^{11})$
et on écrit

$$u^{12/n} = \prod_{c\in\mathbb{C}} (x-c)^{e_c} \in \mathbb{C}(x), \text{où } n = 4,\ 6 \text{ ou } 12 \text{ et } e_c \in \mathbb{Z}$$

après on va déterminer les différentes possibilités pour e_c,comme dans la $1^{ière}$étape de l'algorithme. Pour simplifier les notations on suppose que $c = 0$.

Considérons alors la série de Laurent de z

$$\begin{aligned} z &= l\delta u = \frac{n}{12} l\delta(u^{\frac{12}{n}}) \\ z &= \frac{n}{12} e x^{-1} + \cdots \qquad (e = e_0 \in \mathbb{Z} \text{ , possible } 0) \end{aligned}$$

et d'après le théorème (1.3.2) la série de Laurent de r

$$r = \alpha x^{-2} + \beta x^{-1} + \cdots \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \text{possible } 0)$$

Premièrement on considère la possibilité de $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$, (il correspond au cas (c_1) de la $1^{ière}$étape de l'algorithme). ■

Théorème 2.3.6 *Si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$, alors $e = 12$.*

Preuve. *[KOV85] Soit la série de Laurent de r,*

$$z = \frac{n}{12}ex^{-1} + f + \cdots$$

e et f sont des indéterminées, alors

$a_i = A_i x^{i-n} + B_i x^{i-n+1} + C_i f x^{i-n+1} + \cdots$, *où A_i , B_i , C_i polynômes en e à coefficients dans $\mathbb{C}$*

On remplace l'équation (2.3.3) , on trouve pour $i = n, ..., 0$

$$\begin{aligned} A_n &= -1 \quad , \qquad B_n = C_n = 0 \\ A_{i-1} &= (n - i - \frac{n}{12}e)A_i \\ B_{i-1} &= (n - i - 1 - \frac{n}{12}e)B_i - -(n-i)(i+1)\beta A_{i+1} \\ C_{i-1} &= (n - i - 1 - \frac{n}{12}e)C_i - A_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ai &= -\Pi_{j=0}^{n-i-1}(j - \frac{n}{12}e) \\ B_i &= \beta \sum_{j=0}^{n-i-2} (j+1)(n-j)\Pi_{k=0,k\neq j}^{n-i-2}(k - \frac{n}{12}e) \\ C_i &= (n-i)\Pi_{j=0}^{n-i-2}(j - \frac{n}{12}e) \quad (i = n, ..., 0) \end{aligned}$$

car $\quad 0 = a_{-1} = A_{-1}x^{-n-1} + B_{-1}x^{-n} + C_{--1}fx^{-n} + \cdots$

$\quad 0 = A_{-1} = -\Pi_{j=0}^{n}(j - \frac{n}{12}e)$

et $\quad 0 = B_{-1} + C_{-1}f = \beta\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)(n-j)\Pi_{k=0,k\neq j}^{n-1}(k - \frac{n}{12}e) + f(n+1)\Pi_{k=0}^{n-1}(k - \frac{n}{12}e)$

La première équation implique que

$$e = \frac{12}{n}l, \textit{ pour un certain } l = 0, ..., n$$

En supposant que $l \neq n$. alors la deuxième équation donne

$$C = \beta(l+1)(n-l)\Pi_{k=0,k\neq j}^{n-1}(k-l)$$

qui implique que $\beta = 0$. Contradiction avec l'hypothèse $\beta = 0$, d'où $l = n$ et par suite $e = 12$. ■

On considérons maintenant la possibilité de $\alpha \neq 0$.(il correspond au (c_2) de l'étape 1 de l'algorithme. utilisons la formule précédente $a_i = A_i x^{i-n} + \cdots$).

Lemme 2.3.1 *A_i est un polynôme en e à coefficients dans $\mathbb{Q}[\alpha]$ son degré est $(n-i)$ et leur coefficient principal est $-(-(\frac{n}{12}))^{n-i}$.*

Preuve. *cf [KOV85]* ■

Théorème 2.3.7 *(i) Si G est un groupe tétraèdral, alors e est un entier choisi parmi : $6 + k\sqrt{1+4\alpha}$, $k = 0, \pm 3, \pm 6$.*

(ii) Si G est un groupe octraèdral, alors e est un entier choisi parmi : $6 + k\sqrt{1+4\alpha}$, $k = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6$

(iii) Si G est un groupe tétraèdral, octraèdre ou icosaèdre, alors e est un entier choisi parmi : $6 + k\sqrt{1+4\alpha}$, $k = 0, \pm 1, ..., \pm 6$

Preuve. *[KOV85] Dans le cas (i) $n = 4$.si $\alpha \neq \frac{1}{4}$, alors utilisons le lemme précédent , on obtient*

$$0 = A_{-1} = \Pi_{i=0}^{4}(\frac{e}{3} - 2 + (2-i)\sqrt{1+4\alpha}) \tag{2.3.5}$$

donc

$$e = 6 + k\sqrt{1+4\alpha} \qquad , \qquad k = 0, \pm 3, \pm 6$$

Si $\alpha = -\frac{1}{4}$, on utilise la récurrence (2.3.5) , on trouve

$$\begin{aligned}
A_4 &= -1 \\
A_3 &= \frac{1}{3}e \\
A_2 &= -\frac{1}{9}(e^2 - 3e + 9) \\
A_1 &= \frac{1}{27}(e^3 - 9e^2 + \frac{81}{2}e - 54) \\
A_0 &= -\frac{1}{81}(e^4 - 18e^3 + 135e^2 - 459e + \frac{1215}{2}) \\
A_{-1} &= \frac{1}{243}(e^5 - 30e^4 + 360e^3 - 2160e^2 + 6480e - 7776) = \frac{1}{243}(e-6)^5
\end{aligned}$$

Dans le cas (ii) $n = 6$. if $\alpha \neq -\frac{1}{4}$, alors d'après lemme précédent, on trouve

$$0 = A_{-1} = \Pi_{i=0}^{6}(\frac{e}{2} - 3 + (3-i)\sqrt{1+4\alpha}) \tag{2.3.6}$$

donc

$$e = 6 + k\sqrt{1+4\alpha} \qquad , \qquad k = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6$$

Si $\alpha = -1/4$, *alors*

$$\begin{aligned}
A_6 &= -1 \\
A_5 &= \frac{1}{2}e \\
A_4 &= -\frac{1}{4}(e^2 - 2e + 6) \\
A_3 &= \frac{1}{8}(e^3 - 6e^2 + 24e - 24) \\
A_2 &= -\frac{1}{16}(e^4 - 12e^3 + 72e^2 - 192e + 216) \\
A_1 &= \frac{1}{32}(e^5 - 20e^4 + 180e^3 - 840e^2 + 2040e - 2016) \\
A_0 &= -\frac{1}{64}(e^6 - 30e^5 + 390e^4 - 2760e^3 + 11160e^2 - 24336e + 22320) \\
A_{-1} &= -\frac{1}{128}(e^7 - 42e^6 + 756e^5 - 7560e^4 + 45360e^3 + 163296e^2 - 326592e - 279936) \\
&= \frac{1}{128}(e-6)^7
\end{aligned}$$

Pour le cas (iii), on a $n = 12$. *Si* $\alpha \neq -\frac{1}{4}$, *alors*

$$0 = A_{-1} = \Pi_{i=0}^{12}(e - 6 + (6-i)\sqrt{1+4\alpha}) \tag{2.3.7}$$

Donc

$$e = 6 + k\sqrt{1+4\alpha} \qquad , \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm 6$$

Si $\alpha = 1/4$, *on utilise un programme on trouve*

$$\begin{aligned}
A_{12} &= -1\\
A_{11} &= e\\
A_{10} &= -e^2+e-3\\
A_9 &= e^3-3e^2+\frac{21}{2}e-6\\
A_8 &= -e^4+6e^3-27e^2+45e-\frac{81}{2}\\
A_7 &= e^5-10e^4+60e^3-180e^2+315e-216\\
A_6 &= -e^6+15e^5-120e^4+540e^3-1485e^2+2241e+1485\\
A_5 &= e^7-21e^6+\frac{441}{2}e^5-1365e^4+5355e^3-13041e^2+\frac{36477}{2}e-11178)\\
A_4 &= -e^8+28e^7-378e^6+3066e^5-16170e^4+56196e^3-125118e^2\\
&\quad +162378e-\frac{187677}{2})\\
A_3 &= e^9-36e^8+612e^7-6300e^6+42903e^5-199206e^4+628236e^3\\
&\quad -1293732e^2+\frac{3150495}{2}e-862488\\
A_2 &= -e^{10}+45e^9-945e^8+12060e^7-103005e^6+612927e^5-2566620e^4\\
&\quad -7453620e^3-\frac{28689795}{2}e^2+\frac{33002235}{2}e-\frac{17213877}{2}\\
A_1 &= e^{11}-55e^{10}+\frac{2805}{2}e^9-21780e^8+228195e^7-1690227e^6\\
&\quad +\frac{18035325}{2}e^5-34613865e^4+\frac{187185735}{2}e^3-\frac{339306165}{2}e^2\\
&\quad +\frac{741729879}{2}e-92538045\\
A_0 &= -e^{12}+66e^{11}-2013e^{10}+37455e^9-\frac{945945}{2}e^8-28176687e^6\\
&\quad +137179251e^5-\frac{976923585}{2}e^4+1240169535e^3-\frac{4261026627}{2}e^2\\
&\quad +\frac{4446102717}{2}e-\frac{4261026627}{4}\\
A_{-1} &= e^{13}-78e^{12}+2808e^{11}-61776e^{10}+926640e^9-10007712e^8\\
&\quad +80061696e^7-480370176e^6+2161665792e^5-720552640e^4+\\
&\quad 17293326336e^3-28298170368e^2+28298170368e-13060694016\\
&= (e-6)^{13}
\end{aligned}$$

■

Finalement, considérons la possibilité $\alpha = \beta = 0$, c'est à dire un point ordinaire de r, d'après le théorème précédent $(n/12)e$ est un entier.

Soit Γ l'ensemble des pôles de r, soit $d = \deg p$, alors la série de Laurent de z à l'infini est de forme

$$z = \frac{n}{12}(\frac{n}{12}d + \sum_{c\in\Gamma} e_c)x^{-1} + \cdots$$

et la série de Laurent de r à l'infini est de la forme

$$r = \gamma x^{-2} + \cdots$$

Si on a

$$e_\infty = \frac{n}{12}(e_\infty - \sum_{c\in\Gamma} e_c)$$

alors par un théorème analogue au théorème (2.3.7) , e_∞ satisfait les même conditions que chaque e_c. Aussi

$$d = \frac{n}{12}(e_\infty - \sum_{c\in\Gamma} e_c)$$

doit être un entier non négatif. (C'est l'étape 2 de l'algorithme), et on termine la preuve de l'algorithme par prouver que les relations récursives de l'étape 3 sont identiques avec (2.3.3)

Soit

$$\theta = \frac{n}{12}\sum_{c\in\Gamma}\frac{e_c}{x-c} \text{ et } S = \Pi_{c\in\Gamma}(x-c)$$

alors $z = l\delta u = P'/P + \theta$. et soit $P_i = S^{n-i}Pa_i$,En utilisant (2.3.3) on trouve

$$\begin{aligned}
P_n &= -P \\
P_{i-1} &= S^{n-i+1}Pai-1 \\
&= S^{n-i+1}P(-a_i' - za_i - (n-i)(i+1)ra_{i+1}) \\
&= -S(S^{n-i}Pa_i)' + (n-i)S^{n-i}S'Pa_i + S^{n-i+1}P'a_i - S(P'+P\theta)(S^{n-i}a_i) \\
&\quad -(n-i)(i+1)S^2r(S^{n-i-1}Pa_{i+1)} \\
&= SP_i' + ((n-1) - S\theta)P_i - (n-i)(i+1)S^2rP_{I+1}
\end{aligned}$$

C'est éxactement l'équation de l'étape 2 de l'algorithme.

Enfin l'équation

$$w^n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{(n-i)!} w^i$$

peut s'écrire sous forme

$$0 = S^n P w^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{S^n P a_i}{(n-i)!} w^i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{S^i P_i}{(n-i)!} w^i$$

Ceci complète la preuve de l'algorithme.

Chapitre 3

Les sous groupes de SL(2,$\mathbb{C}$)

Dans ce chapitre on cherche les sous groupes finis de $SL(2,\mathbb{C}) = SL(2)$ et ses invariants.

Théorème 3.0.8

Soit G un sous groupe de $SL(2)$, alors soit

(i) Le groupe G est conjugué à un sous groupe du groupe $D^+ = D \cup \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot D$, ou

(ii) Le groupe G est d'ordre 24 (le cas tétraèdral), ou

(iii) Le groupe G est d'ordre 48 (le cas octaèdral),ou

(iν) Legroupe G est d'ordre 120 (le cas icosaèdral).

Preuve. [KOV85] On assume que G n'est pas conjugué au groupe D^+.

Premièrement on écrit G comme réunion disjointe, pour cela utilisons les résultats suivants.

Soit H l'ensemble des matrices scalaires de G, donc $H = \{1\}$ ou $H = \{1, -1\}$.

Pour un $x \in G - H$, on note par $Z(x)$ le centralisateur de x dans G, et par $N(x)$ le normalisateur de $Z(x)$ dans G.

L'élément x est fini, alors x est diagonalisable (pour le démontrer on utilise la forme de Jordan d'une matrice non diagonalisable de $SL(2)$).

Le centralisateur $Z(x) = G \cap t^{-1}Dt \quad (t \in SL(2), x \in G - H$ (car le centralisateur d'une matrice diagonale non scalaire dans $SL(2)$ est D.

Pour x, y, g, g' arbitraires dans G, $gZ(x)g^{-1} \cap g'Z(y)g'^{-1} = H$ ou $gZ(x)g^{-1} = g'Z(y)g'^{-1}$. dans ce dernier cas $y \in g'^{-1}gZ(x)g^{-1}g'$, de plus $gZ(x)g^{-1} = g'Z(y)g'^{-1}$si et seulement si $g'^{-1}g \in N(x)$.

Conséquence

$$G = \cup_{i=1}^{s} \cup (gZ(x_i)g^{-1} - H) \cup H. \tag{3.0.1}$$

Après, on décrit le groupe $N(x_i)$, (comme x_i est diagonalisable).

On note que les seules matrices dans $SL(2)$ qui conjuguent une matrice diagonale non scalaire en une matrice diagonale, sont les matrices de D^+, par suite

$$N(x_i) = G \cap u^{-1}D^+u \ , u \in SL(2)$$

en particulier $[N(x_i) : Z(x_i)] = 1$ ou 2.

Soit $M = ord(G/H)$ et $e_i = ord(Z(x_i)/H)$, (3.0.1) donne les formules

$$\begin{aligned} M \cdot ordH &= \sum_{i=1}^{s} [G : N(x_i)] \left(e_i {\cdot} ordH - ordH\right) + ordH \\ M &= \sum_{i=1}^{s} \frac{M}{[N(x_i) : Z(x_i)] \cdot e_i}(e_i - 1) + 1 \\ \frac{1}{M} &= \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{[N(x_i) : Z(x_i)] \cdot e_i}(\frac{1}{e_i} - 1) + 1 \end{aligned}$$

On a $s \neq 0$ car $G \neq H$. si $s = 1$, alors

$$\frac{1}{M} \geq \frac{1}{[N(x_1) : Z(x_1)] \cdot e_1} = 1/ord(N(x_1)/H), \text{d'où } G = N(x_1)$$

Contradiction car G n'est pas conjugué à un sous groupe de D^+.

Comme $e_i \geq 2 \quad (i = 1, ..., s)$, on a

$$0 \prec \frac{1}{M} \leq 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{[N(x_i) : Z(x_i)]} \text{ d'où } \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{[N(x_i) : Z(x_i)]} \prec 2 \text{ car } [N(x_i) : Z(x_i)] = 1 \text{ ou } 2$$

il y a exactement trois solutions de cette inégalité

$$\begin{aligned} s &= 2, \quad [N(x_1) : Z(x_1)] = 1 \ , \quad [N(x_2) : Z(x_2)] = 2 \\ s &= 2, \quad [N(x_1) : Z(x_1)] = [N(x_2) : Z(x_2)] = 2 \\ s &= 3, \quad [N(x_1) : Z(x_1)] = [N(x_2) : Z(x_2)] = \ [N(x_3) : Z(x_3)] = 2 \end{aligned}$$

pour toute solution, on a $[N(x_2):Z(x_2)] = 2$, d'où G contient un conjugué d'une matrice dans $D^+ - D$, c'est à dire le conjugué d'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, le carré de cette matrice est -1, ainsi $ordH = 2$.

La 1^{er}solution donne $\dfrac{1}{M} = \dfrac{1}{e_1} + \dfrac{1}{2e_2} - \dfrac{1}{2}$, ainsi $e_1 = 3$, $e_2 = 2$ et $M = 12$, par suite $ordG = 24$.

La $2^{ième}$solution donne $\dfrac{1}{M} = \dfrac{1}{2e_1} + \dfrac{1}{2e_2}$, ceci est impossible (car $M \succ 2e_2$).

La $3^{ième}$solution donne $\dfrac{2}{M} = \dfrac{1}{e_1} + \dfrac{1}{e_2} + \dfrac{1}{e_3} - 1$.

En assumant que $e_1 \leq e_2 \leq e_3$ et on trouve: $e_1 \prec 3$ d'ou $e_1 = 2$ et $\dfrac{2}{M} = \dfrac{1}{e_2} + \dfrac{1}{e_3} - \dfrac{1}{2}$.aussi $e_2 = 3$ car $M \succ 2e_3$.

Les solutions sont $e_1 = 2$, $e_2 = 3$, $e_3 = 3$, $M = 12$, $ordG = 24$.

$e_3 = 4$, $M = 24$, $ordG = 48$.

$e_3 = 5$, $M = 60$, $ordG = 120$. ■

Dans la suite, on doit déterminer explicitement les trois groupes "géométriques ", pour cela il suffit connaitre le résultat suivant :

Lemme 3.0.2 *Soit G un sous groupe fini de $SL(2)$ qui n'est pas conjugué à un sous groupe de D^+, et soit $H = \{1, -1\}$ .alors G/H n'a pas de sous groupes cycliques normals.*

Preuve. *cf [KOV85].* ■

Théorème 3.0.9 *Soit G un sous groupe de $SL(2)$ d'ordre 24, qui n'est pas conjugué à un sous groupe de D^+. Soit $H = \{1, -1\}$, alors G/H est isomorphe au $4^{ième}$ groupe alterné A_4, de plus, le groupe G est conjugué au groupe engendré par les matrices $\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}$, $\phi \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, où ξ est une racine primitive $6^{ième}$ de l'unité et $3\phi = 2\xi - 1$.*

Preuve. *[KOV85] Comme ord G/H est 12, et par le lemme précédent G/H a quatre (3-groupe de Sylow), et G/H agit par conjugaison sur l'ensemble de ses 3-groupes de Sylow. cette action induit un homomorphisme $G/H \to S_4$ (le groupe symétrique). le sous groupe de l'image consiste en ces permutations qui laissent fixer un 3-groupe de Sylow* *particulier doit avoir un indice* 4 *comme* G/H *agit transitivement. par conséquent l'ordre de l'image est divisible par* 4.

Par suite l'ordre du noyau est $1, 2$ *ou* 3. *D'après le lemme précédent, et comme* G/H *est isomorphe a un sous groupe de* S_4,*alors l'ordre du noyau doit être égal à* 1. *Maintenant considérons l'homomorphisme composé* $G/H \to S_4 \to \{1, -1\}$,*la deuxième application est donnée par* $\sigma \to$ *sign* σ. *D'après le lemme précédent* ,G/H *ne peut avoir un sous groupe normal d'ordre* 6 *(car un sous groupe d'ordre* 6 *contient un unique sous groupe d'ordre* 3, *qui doit être normal dans* G/H *), donc l'homomorphisme composé a une image triviale et* G/H *est isomorphe à* A_4.

Soit $\tau : G \to A_4$ *un homomorphisme de noyau* H . *Soit* $A \in \tau^{-1}(123)$. *on peut conjuguer* G *tel que* A *soit une matrice diagonale, d'où*

$$A = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}.$$

Comme $\tau A^3 = (1)$, $A^3 \in H$. *Cependant,* $\tau A \neq (1)$ *et* $\tau A^2 \neq (1)$, *d'où*

$$A \notin H \quad et \; A^2 \notin H.$$

En remplaçant A *par* $(-A)$, *s'il est nécessaire, on peut assumer que* ξ *est une racine primitive* $6^{ième}$ *de l'unité.*

Soit $B \in \tau^{-1}(12)(34)$, *comme* $\tau(AB) \neq \tau(BA)$, B *ne peut être une matrice diagonale, c'est à dire* B_{12} *et* B_{21} *ne s'annule pas en même temps. en fait aucun des deux n'est nul car si un est nul et l'autre est non nul, alors* B *doit avoir un ordre infini.*

On peut conjuguer G *par la matrice* $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ *sans affecter* A. *Si on choisit* $c = B_{21}$ *et* $d = 2B_{12}$, *alors* B *a la forme*

$$B = \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ 2\psi & -\chi \end{pmatrix}.$$

Maintenant $\tau B^2 = (1)$ *donc* $B^2 \in H$. *un calcul direct montre que* $\chi = \phi$.

Puis on voit que $\tau(BA^2) = \tau(AB)^2$, *donc*

$$BA^2 = \pm (AB)^2.$$

on fait le calcul, on obtient

$$\phi(\xi^2 - 1) = \pm\xi^4$$

(*utilisant le fait que* $\psi \neq 0$).*En remplaçant* B *par* $(-B)$, *s'il est nécessaire, on peut assumer que* $\phi(\xi^2 - 1) = +\xi^4$,

d'où

$$3\phi = 2\xi - 1$$

(En utilisant la relation $\xi^2 = \xi - 1$).

Puis on utilise le fait que $\det B = 1$ *pour obtenir la formule* $\phi^2 + 2\psi^2 = -1$, *ou* $3\psi = \pm(2\xi - 1)$. *S'il est nécessaire, on conjugue* G *par la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *tel que* $3\psi = 2\xi - 1 = 3\phi$. ∎

Maintenant, on va déterminer le groupe octaèdral

Théorème 3.0.10 *Soit* G *un sous groupe de* $SL(2)$ *d'ordre* 48 *qui n'est pas conjugué à un sous groupe de* D^+. *Soit* $H = \{1, -1\}$. *Alors* G/H *est isomorphe à* S_4, (*le groupe symétrique). De plus* G *est conjugué au groupe engendré par les matrices :* $\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}$, $\phi \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, *avec* ξ *est une racine primitive* $8^{ième}$ *de l'unité et* $2\phi = \xi(\xi^2 + 1)$.

Preuve. *[KOV85] Comme ord* $G/H = 24$, *et grace du lemme précédent,* G/H *a quatre (3-groupe de Sylow). L'action de* G/H *sur l'ensemble de ses* 3*-groupes de Sylow induit un homomorphisme* $G/H \to S_4$. *L'image de cet homomorphisme contient un sous groupe d'indice* 4, *c'est le sous groupe des permutations qui laissent un* 3*-sous groupe de Sylow particulier fixe, car* G/H *agit transitivement sur l'ensemble de ses* 3*-groupes de Sylow. l'ordre de l'image est divisible par* 4, *par suite l'ordre du noyau est* $1, 2, 3$ *ou* 6. *Mais l'ordre du noyau est égal à* 6, *donc le noyau contient un unique sous groupe d'ordre* 3, *qui doit être normal dans* G, *ceci contredit le lemme. en effet, le lemme implique que ord* $\ker = 1$, *par suite* G/H *est isomorphe à* S_4.

Soit $\tau : G \to S_4$ *un homomorphisme de noyau* H *et soit* $A \in \tau^{-1}(1234)$. *on peut conjuguer* G *tel que* A *soit une matrice diagonale* $A = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}$.

Comme $\tau A^4 = (1)$, $\xi^4 = \pm 1$. *cependant, si* $\xi^4 = 1$, *alors*

$$\xi^2 = \pm 1 \text{ et } \ A^2 \in H$$

Mais $\tau A^2 \neq (1)$, *danc* ξ *est une racine primitive* $8^{ième}$ *de l'unité.*

Soit $B \in \tau^{-1}(12)$, *comme* $\tau(AB) \neq \tau(BA)$, B *ne peut être une matrice diagonale, c'est à dire* B_{12} *et* B_{21} *ne s'annule pas en même temps. en fait aucun des deux n'est nul car* B *est d'orde fini.*

On peut conjuguer G, *sans affecter* A, *par la matrice* $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, *où* $c^2 = B_{21}$ *et* $d^2 = B_{12}$.
alors B *a la forme* $B = \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ \psi & -\chi \end{pmatrix}$.

En utilisant maintenant $\tau B^2 = (1)$, *c'est à dire* $B^2 \in H$. *Un calcul direct montre que* $\chi = \phi$.

Puisque $\tau(BA^3) = \tau(AB)^2$, *donc*

$$BA^3 = \pm (AB)^2$$

Comme $\psi \neq 0$, *on trouve* $\phi(\xi^2 - 1) = \pm \xi$, *ou bien* $2\phi = \xi(\xi^2 + 1)$.*En remplaçant* B *par* $-B$, *s'il est nécessaire, on peut assumer que,* $2\phi = \xi(\xi^2 + 1)$.

d'où $2\phi^2 = -1$.

Puis, on utilise le fait que $1 = \det B = -\ \phi^2 - \psi^2$ *pour obtenir la formule* $2\psi^2 = -1$.*s'il est nécessaire, on conjugue* G *par la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *tel que* $\psi = \phi$.

Comme τA, τB *engendrent* S_4 *et le groupe engendré par* A, B *contient* H, *par conséquent on peut conclure que* A, B *engendrent* G. ■

Finalement, déterminons le groupe icosaèdral.

Théorème 3.0.11 *Soit* G *un sous groupe de* $SL(2)$ *d'ordre* 120 *qui n'est pas conjugué à un sous groupe de* D^+. *Soit* $H = 1, -1\}$, *alors* G/H *est isomorphe à* A_5. *De plus* G *est* *conjugué au groupe engendré par les matrices :* $\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \phi & \psi \\ \psi & -\phi \end{pmatrix}$ *, avec* ξ *est une racine primitive* $10^{ième}$ *de l'unité et* $5\phi = 3\xi^3 - \xi^2 + 4\xi - 2$ *, et* $5\psi = \xi^3 + 3\xi^2 - 2\xi + 1$

Preuve. *[KOV85]La preuve de* G/H *est isomorphe à* A_5 *se trouve dans "Burnside(1955,172,p.161-2)*

Soit $\tau : G \rightarrow A_5$ *, un homomorphisme de noyau* H*. Soit* $A \in \tau^{-1}(12345)$*, on peut conjuguer* G *tel que* A *soit une matrice diagonale,* $A = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}$.

Comme $\tau A^5 = (1)$*,* $\xi^5 = \pm 1$*. On remplaçant* A *par* $(-A)$*, s'il est nécessaire, on peut assumer que* $\xi^5 = -1$*. Evidemment* ξ *est une racine primitive* $10^{ième}$ *de l'unité.*

Soit $B \in \tau^{-1}(12)(34)$*. Comme dans la preuve du théorème (3.0.10) on doit assumer que* B *a la forme* $B = \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ \psi & -\chi \end{pmatrix}$.

Comme $\tau(A^4B) = \tau(BA)^2$*, donc*

$$A^4B = \pm(BA)^2$$

D'après ce calcul, on trouve

$$\phi(\xi^3 + 1) = \pm\xi^4, ou\ 5\phi = \pm(3\xi^3 - \xi^2 + 4\xi - 2).$$

En remplacant B *par* $-B$*,s'il est nécessaire, on peut assumer que le signe* $(+)$ *est obtenu . Maintenant on utilise le fait que* $\det B = 1$ *pour conclure que* $5\psi = \pm(\xi^3 + 3\xi^2 - 2\xi + 1)$*.On conjugue* G *par la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$*, s'il est nécessaire, pour que le signe plus soit obtenu.*

On note que τA*,* τB *engendrent* A_5*. (ce groupe est engendré par* τA *et* τB *contient un élément d'ordre* 5*, un élément d'ordre* 2 *et un élément d'ordre* 3*, d'où l'ordre de ce groupe est divisible par* 30*. Et comme* A_5 *est simple, ce groupe doit être* A_5*). Aussi le groupe engendré par* A*,* B *contient* H*, par conséquent* A, B *engendrent* G*.* ■

Finalement on cherche les invariants de ses trois groupes finis, pour les utiliser à la preuve de l'algorithme du $3^{ième} cas$.

Théorème 3.0.12 *Soit G le groupe de Galois de l'équation (1.2.5) , et soit η , ζ un système fondamental de solutions relatif à G*

(i) Si G est un groupe tétaèdral , alors $(\eta^4 + 8\eta\zeta^3)^3 \in \mathbb{C}(x)$.

(ii) Si G est un groupe octaèdral , alors $(\eta^5\zeta - \eta\zeta^5)^2 \in \mathbb{C}(x)$.

(iii) Si G est un groupe icosaèdral , alors $(\eta^{11}\zeta - 11\eta^6\zeta^6 - \eta\zeta^{11}) \in \mathbb{C}(x)$.

Preuve. *[KOV85](i)On considérant le groupe tétraèdral , et utilisons les notations du théorème (3.0.9) .Rappelons que $\xi^3 = -1, \xi^2 = \xi - 1$ et $3\phi = 2\xi - 1$.*

$$\eta^4 + 8\eta\zeta^3$$

est transformée en

$$\xi^4(\eta^4 + 8\eta\zeta^3)$$

par la matrice $\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}$, *la matrice* $\phi \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *transforme*

$$\eta^4 + 8\eta\zeta^3 = \eta(\eta + 2\zeta) \cdot (\eta + 2\xi^2\zeta) \cdot (\eta - 2\xi\zeta)$$

en

$$\begin{aligned} \phi(\eta + 2\zeta) \cdot 3\phi\eta \cdot \phi(1 - 2\xi)(\eta + 2\xi^2\zeta) &= -3\phi^4 \cdot (2\xi - 1)^2(\eta^4 + 8\eta\zeta^3) \qquad = -3(-1/3)^2(-3)(\eta^4 + 8\eta\zeta^3) \\ &= \eta^4 + 8\eta\zeta^3 \end{aligned}$$

d'où $(\eta^4 + 8\eta\zeta^3)$ ^{3}est un invariant de G de plus dans $\mathbb{C}(x)$.

(ii) On considérant le groupe octaedral, et utilisons les notations du théorème (3.0.9) . En rappelant que $\xi^4 = -1$ et $2\phi = \xi(\xi^2 + 1)$.

$$5\eta^5\zeta - \eta\zeta^5$$

est transformée en

$$\xi^4(\eta^5\zeta - \eta\zeta^5)$$

par la matrice $\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}$ *.la matrice* $\phi \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *transforme*

$$\eta^5\zeta - \eta\zeta^5 = \eta\zeta(\eta + \zeta).(\eta - \zeta).(\eta + \xi^2\zeta).(\eta - \xi^2\zeta)$$

en

$$\begin{aligned}\phi(\eta+\zeta).(\eta-\zeta).2\phi\eta.2\phi\zeta.\phi(1+\xi^2)(\eta-\xi^2\zeta).\phi(1-\xi^2)(\eta+\xi^2\zeta) &= 4.\phi^6(1-\xi^4).(\eta^5\zeta-\eta\zeta^5)\\ &= 8.(-1/2)^3(\eta^5\zeta-\eta\zeta^5)\\ &= -(\eta^5\zeta-\eta\zeta^5)\end{aligned}$$

d'où $(\eta^5\zeta-\eta\zeta^5)$ *est un invariant de* G *et donc dans* $\mathbb{C}(x)$.

(iii) En considérant le groupe isocaedral et utilisons les notations du théorème (3.0.9) .on a $\xi^5=-1, \xi^4=\xi^3-\xi^2+\xi-1$, $5\phi^2=\xi^3-\xi^2-3$, $5\psi^2=-\xi^3+\xi^2-2$, $5\phi\psi=2\xi^3-2\xi^2-1=5(\phi^2-\psi^2)$.

La matrice $\begin{pmatrix}\xi & 0\\ 0 & \xi^{-1}\end{pmatrix}$ *transforme* $(\eta^{11}\zeta-11\eta^6\zeta^6-\eta\zeta^{11})$ *sur lui même, la matrice* $\begin{pmatrix}\phi & \psi\\ \psi & -\phi\end{pmatrix}$ *transforme*

$$\eta^{11}\zeta-11\eta^6\zeta^6-\eta\zeta^{11}=\eta\zeta.(\eta^2-\eta\zeta-\zeta^2)(\eta^2+\xi^3\eta\zeta+\xi\zeta^2).(\eta^2-\xi^2\eta\zeta-\xi^4\zeta^2).(\eta^2-\xi\eta\zeta-\xi^2\zeta^2).(\eta^2-\xi^4\eta\zeta-\xi^3\zeta^2)$$

en

$\phi\psi(\eta^2-\eta\zeta-\zeta^2).5\phi\psi\eta\zeta.(-\xi)(\eta^2-\xi^2\eta\zeta-\xi^4\zeta^2).(\xi^4)(\eta^2+\xi^3\eta\zeta+\xi\zeta^2).(-1)(\eta^2-\xi^4\eta\zeta-\xi^3\zeta^2)=5.(\phi\psi)^2.(\eta^{11}\zeta-11\eta^6\zeta^6-\eta\zeta^{11})=\eta^{11}\zeta-11\eta^6\zeta^6-\eta\zeta^{11}$

d'où $\eta^{11}\zeta-11\eta^6\zeta^6-\eta\zeta^{11}$ *est un invariant de* G *en plus dans* $\mathbb{C}(x)$. ■

Chapitre 4

Conclusion

L'algorithme présenté par Kovacic est éfficace dans la mesure où on se restreint au cas $K = \mathbb{C}(x)$, et l'équation différentielle est réduite à la forme $y'' = ry$, $r \in \mathbb{C}(x)$

De plus, l'algorithme détermine une seule solution, seulement .L'autre solution peut être déterminée par la réduction de d'Alembert (c'est à dire l'algorithme ne détermine pas les deux solutions en même temps).

Felix Ulmer et Jacques Arthur Weil , proposent un algorithme dont la conception et la représentation donnent un algorithme plus facile à implimenter; de plus cet algorithme n'est pas limité au cas $K = \mathbb{C}(x)$, et est vérifié pour toute équation différentielle d'ordre 2 ayant un groupe de Galois unimodulaire.

Bibliographie

[AM94] Andy R .Madjid, "Lectures on differential Galois Theory". University lecture serie. Amer Math. soc Providence RI. (1994).

[UW95] Felix Ulmer and Jacques-Arthur Weil, "Note on Kovacic's algorithm "Irma, université de Rennes1, GAGE, Ecole polytechnique(1995).

[KOV85] Jerald J.Kovacic" An Algorithm for Solving Second Order Linear Homogeneous Differential Equations", (1985).

[KOV97] Jerald J.Kovacic" An Algorithm for Solving Second Order Linear Homogeneous Differential Equations", (1997).

[KAP57] Kaplansky, I. "An Introduction to Differential Algebra". Paris: Hermann. (1957)

[KOL73] Kolchin, E. R. " Differential Algebra and Algebraic Groups". New York: Acadamic Press,(1973).

[SU98] M.F. Singer et F.ulmer "Liouvillian and Algebraic solutions of second and Third ordre Linear differential equations" ; North carolina state University, Departement of mathematics, Box 8205 Raleigh.N.C $27695 - 8205$, (1998).

[PG05] Philipe Gaillard These"Applications de la théorie de Galois differentielle aux équations différentielles linéaires d'ordre 4". université de Rennes.(2005).