N° d'ordre : 34 / 2008 - M / PH

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DE PHYSIQUE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN : PHYSIQUE

Spécialité : Physique Théorique de la Matière et des Hautes Energies

Par : **ZAMOUM Redouane**

Thème :

ETUDE DES PARTICULES ETENDUES STOCHASTIQUES AVEC SPIN

Soutenu publiquement le 29/06/2008, devant le Jury composé de

Mr A. SMIDA	Professeur (USTHB)	Président
Mr M. HACHEMANE	Maître de conférences (USTHB)	Directeur de thèse
Mme A. H. HAMICI	Maître de conférences (USTHB)	Examinatrice
Mr A. CHAFA	Maître de conférences (USTHB)	Examinateur

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire de Physique Théorique de l'U.S.T.H.B. sous la direction du Professeur Mahmoud HACHEMANE. Je lui adresse mes remerciements pour sa méthode de travail et pour ses sages conseils.

J'adresse mes sincères remerciements à monsieur Abdallah SMIDA Professeur à l'U.S.T.H.B. pour avoir accepter de présidé le jury de soutenance.

Je remercie également monsieur Azzedine CHAFA Maître de conférence à l'U.S.T.H.B.pour avoir accepter d'honorer le jury de soutenance. Mes vifs remerciements sont adressés à madame Amel-Hiba HAMICI Maître de conférence à l'U.S.T.H.B. pour avoir accepter de juger le présent travail, pour ses conseils et pour les discussions fructueuses qu'on a eu ensemble.

Je remercie tous les membres du laboratoire Physique Théorique enseignants et étudiants, spécialement Sami, Karima, Fodel, Samia et Naima.

Je remercie mes amis proches, Abdelwahab, Rahim, Adel, Hmimed, Houssame et Yacine avec lesquels j'ai passé des moments inoubliables. Je remercie également Basma, Nawel, Naima, Smail, Kamel et Ameur pour leurs précieuses aides. Je remercie aussi Sandra pour son aide et ses encouragements.

Enfin, mon dévouement entier et mon total respect s'adressent à mes parents, qui ont été toujours présents tout au long de mon existence. Mes remerciements les plus vifs s'adressent à mes frères et soeurs avec lesquels j'ai vécu et tout partagé dans la vie. Je remercie également tout les membres de ma famille sans exception et tout ceux que je n'ai pas cité.

Table des matières

INTRODUCTION

La théorie des groupes est une théorie très utilisée dans diverses branches des mathématiques. En physique, la théorie des groupes permet de modéliser des situations de symétries en mécanique quantique, en physique des particules élémentaires et dans d'autres branches. L'existence de symétries permet la simplification des problèmes physiques [19]. De plus, un groupe possède des représentations, cette notion de représentation est fondamentale. Il s'agit d'étudier les différentes manières dont agit un groupe sur des espaces vectoriels par des transformations linéaires, et essayer d'en déduire par la suite certaines propriétés de ce groupe. Une représentation qui est susceptible de décrire les états d'une particule élémentaire doit être obligatoirement irréductible [41].

Dans la deuxième moitié du siècle précédent, les physiciens ont pu approfondir leurs connaissances de la structure de la matière grâce à l'étude des particules élémentaires. Dans les expériences réalisées dans des accélérateurs, quand l'énergie du faisceau incident est très élevée, on peut étudier la structure de la matière cible sur des distances très petites. Par conséquent, la particule élémentaire est souvent considérée comme un point matériel de dimensions négligeables. Sous certaines conditions, la particule élémentaire peut être trouvée avec certitude dans une région finie de l'espace. Ainsi, la particule élémentaire est considérée comme un point matériel parfaitement localisable.

D'autres parts, en mécanique quantique conventionnelle, la mesure d'une observable est représentée par un seul nombre et la valeur mesurée est supposée exacte et bien déterminée. Cependant, le problème de la non existence d'une valeur mesurée exacte et que chaque mesure est accompagnée d'erreurs a été jugé digne d'intérêt par certains chercheurs. A partir de ce principe, une approche considérant toute particule élémentaire comme ayant une extension au sens de la mesure a été construite [25]. Cette extension est due à l'imperfection de l'appareil de mesure et elle est qualifiée de stochastique [25, 2]. A la fin du siècle précédent, Edouard Prugovecki a proposé une théorie qui utilise cette extension et qu'il a nommé mécanique quantique stochastique (ou théorie stochastique) [25]. Cette théorie est fondée sur un principe opérationnel selon lequel une théorie physique doit définir des concepts en tenant compte des conditions expérimentales de leur observation [2]. L'imperfection des appareils de mesures des grandeurs physiques telles que la position, l'impulsion ou même le spin doit donc être prise en compte. Une observable n'est plus alors représentée par un nombre unique, mais par une valeur accompagnée d'une densité de probabilité que la valeur réelle soit différente de celle obtenue comme résultat de mesure. Si l'on prend l'exemple de la position et de l'impulsion, la particule n'est plus parfaitement localisée, et les fluctuations dues à l'imperfection de l'appareil de mesure lui attribuent une extension stochastique dans l'espace des phases. Insistons sur le fait que cette extension n'est pas réelle, elle n'est qu'apparente mais désormais inévitable car on ne peut jamais disposer d'instrument de mesure parfait. La question de la réalité physique de l'extension ne se pose pas dans la théorie stochastique basée sur un principe opérationnel.

La théorie stochastique n'est pas la seule théorie qui attribue un caractère non ponctuel aux particules quantiques. En effet, un point de vue totalement opposé lui attribue une extension réelle. Au début du vingtième siècle, de Broglie [10] avait considéré la particule comme une petite horloge qui se déplace avec son onde de façon à rester incorporée dans cette dernière. En 1927, il avait proposé l'idée de distinguer deux solutions différentes mais très liées. Il appela la première solution onde physique u, qui est réelle non normalisable et comporte une variable locale définissant la particule représentée par une singularité. La deuxième solution est l'onde Ψ, qui est normalisable et n'a pas de singularité et n'est qu'une représentation de probabilité. En se basant sur ces idées, Destouches [12, 13] a développé une nouvelle conception de la particule élémentaire liée à une meilleur approximation dans la distinction du système physique par rapport au reste de l'Univers et se rapprochant donc mieux de la réalité physique. A l'instar de Broglie, il adopta l'idée de représenter la particule par une onde physique u au lieu d'un point matériel, il appela sa théorie "théorie quantique fonctionnelle". Dans cette théorie, la fonction d'onde probabiliste est remplacée par une fonctionnelle, qui prend l'onde physique comme argument. L'extension géométrique de la particule est alors l'une des propriétés internes de la particule décrite par la fonction abstraite u qui doit être associée à un modèle phénoménologique (un fluide par exemple pour éliminer toute rigidité de la particule). Donc, contrairement à la théorie stochastique qui attribue à la particule une extension au sens de la mesure, en prenant en considération l'imperfection de l'appareil de mesure, la théorie fonctionnelle attribue à la particule une extension intrinsèque en la décrivant par une onde physique non probabiliste.

Le présent travail est une tentative de description des particules étendues stochastiquement et intrinsèquement, en combinant la théorie stochastique et un modèle de particule étendue puisé de la théorie fonctionnelle et développé dans notre laboratoire [17]. Cette combinaison a déjà été réalisée pour les particules scalaires et a mené à des résultats satisfaisants [36, 23]. Notre tâche est de généraliser cette étude à un cas particulier des particules spinorielles. Pour simplifier la lecture du présent mémoire, donnons un résumé de la structure. La particule intrinsèquement étendue est initialement décrite par une fonction d'onde bilocale $\hat{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et supposée être composée de deux modes locaux, l'un externe (x) et l'autre interne (y). Pour un système à deux corps, le premier mode pourrait être le centre de masse localisé en x et le second la particule fictive en mouvement relatif. La fonction d'onde bilocale correspond à une décomposition de l'état quantique sur une base $|x, y>$. On attribue ensuite une extension stochastique au mode externe car c'est lui qui correspond à la localisation globale de la particule. La fonction d'onde bilocale devient alors $\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \mathbf{y})$ et correspond à une décomposition sur une base $|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}} > \otimes |y>$ où l'état parfaitement localisé $|x>$ est remplacé par l'état propre stochastique $|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}>$ décrit par une fonction ξ rendant compte de l'imperfection de l'appareil de mesure. Quand la fonction d'onde $\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \mathbf{y})$ est scalaire elle peut être liée à des fonctions $\hat{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $\hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ayant des spins égaux et entiers. Ceci a été mis en évidence par la théorie stochastique qui considère des fonctions locales $\hat{\psi}(\mathbf{x})$, $\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ et $\hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ et qui a pu fournir des interprétations physiques cohérentes et assurer une consistance mathématique [25]. La méthode stochastique a été ensuite appliquée au mode externe de la particule intrinsèquement étendue dans le cas où les fonctions $\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \mathbf{y})$, $\hat{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $\hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sont scalaires [36, 23]. Le présent travail considère une fonction d'onde $\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \mathbf{y})$ scalaire mais des fonctions $\hat{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de même spin entier. La considération de spins demi-entiers ou différents nécessite une fonction $\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \mathbf{y})$ non scalaire. Ce cas ne sera pas traité dans ce travail et fait l'objet d'un autre mémoire.

Le travail sera organisé de la manière suivante. Dans un premier chapitre, nous présenterons la mécanique quantique stochastique pour une particule scalaire. Les principales bases seront introduites, telles que la représentation espace des phases et les probabilités. Nous introduisons ensuite les différents opérateurs de la mécanique quantique écrits dans la représentation espace des phases. Parmi ces opérateurs, il y a les systèmes de covariance qui sont des opérateurs positifs et dont la valeur moyenne donne la probabilité de localiser (stochastiquement) la particule dans une région finie de l'espace des phases. Nous présenterons à la fin du chapitre l'équation de Schrödinger, le courant et le propagateur libre dans la représentation espace des phases. Dans chaque partie du chapitre, une comparaison entre la mécanique quantique stochastique et la mécanique quantique conventionnelle aura pour but de présenter les différences entre les deux théories. Dans le second chapitre, Nous allons présenter la mécanique quantique stochastique pour des particules possédant un spin j. On considérera que la particule système et le micro-détecteur possèdent le même spin j entier. Nous étudierons la représentation espace des phases U_0, sa décomposition en sous-représentations irréductibles, et la manière d'écrire les fonctions d'onde dans les sous-espaces de Hilbert correspondants à ces sous-représentations. Nous aborderons par la suite le système de covariance, les probabilités et le propagateur libre. A la fin du chapitre, un paragraphe sera consacré à l'application au cas du spin $j = 1$ qui ne fera qu'expliciter les sommes par rapport aux indices spinoriels. Cette application pourrait être d'une certaine utilité pour des travaux ultérieurs où des fonctions d'onde concrètes seraient utilisées. Enfin, nous aborderons notre propre travail au troisième chapitre ou la théorie stochastique des particules spinorielles sera combinée avec la théorie fonctionnelle dans le but de décrire des particules étendues à la fois stochastiquement et intrinsèquement. Comme introduction, nous présenterons les points essentiels de la théorie fonctionnelle. Ensuite, la particule sera considérée comme composée de deux modes quantiques locaux [17], un mode interne évoluant dans un espace temps interne et un mode externe qui évolue dans un espace temps externe, et elle sera décrite par une onde physique. Deux modèles seront présentés, dans le premier modèle, le mode externe sera observé par un micro-détecteur stochastique tandis que le mode interne reste ponctuel. Dans le deuxième modèle, le micro-détecteur est non seulement stochastique mais intrinsèquement étendu aussi. Dans les deux modèles, on définira l'espace de Hilbert, les systèmes de covariance, les probabilités et les propagateurs libres. Dans une première partie, nous résumerons les résultats essentiels du cas d'une particule scalaire. Nous présenterons juste après notre travail, qui concerne les particules possédant un spin, où le micro-détecteur possède le même spin que la particule système. Un dernier paragraphe fera figure d'une illustration des résultats obtenus par une application au cas du spin $j = 1$. Nous terminerons notre travail par une conclusion dans laquelle l'essentiel de notre travail sera résumé.

1

MECANIQUE QUANTIQUE STOCHASTIQUE POUR UNE PARTICULE LIBRE SCALAIRE

1.1 Introduction

La mécanique quantique est parmi les théories fondamentales de la physique, elle possède de nombreuses applications dans différents domaines qui ont montré d'avantage sa valeur. Néanmoins, elle possède des imperfections, essentiellement des inconsistances mathématiques [27]. La mécanique quantique stochastique [25] est une version améliorée de la mécanique quantique conventionnelle, fondée pour combler les lacunes de celle-ci et sensée en être une généralisation. Cette théorie est conçue à partir de la représentation espace des phases du groupe de Galilée G, où l'espace de Hilbert H est l'espace support [37] de cette représentation. L'espace de Hilbert H contient des états propres stochastiques $\left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle$ (1)qui forment une base surcomplète. La localisation de la particule dans l'espace des phases se traite par les systèmes de covariance qui sont représentés par des opérateurs positifs dont la valeur moyenne donne les probabilités.

Dans ce chapitre, nous allons présenter la mécanique quantique stochastique en partant de la représentation espace des phases passant par les probabilités, les opérateurs, le courant et terminant par la propagation. Tout au long de ce chapitre, nous allons comparer la mécanique quantique stochastique avec la mécanique quantique conventionnelle, dans le but de montrer les différences existantes dans le formalisme mathématique, tout en dévoilant les

(1) Les symboles notés en gras représentent des grandeurs vectorielles.

inconsistances mathématiques de la mécanique quantique conventionnelle, et en exposant les solutions apportées par la nouvelle théorie.

1.2 Représentation espace des phases

En mécanique quantique, un système est décrit par un vecteur ket noté $|\psi\rangle$ appartenant à l'espace de Hilbert des états physiques H sur lequel on note le produit scalaire de deux vecteurs $|\psi\rangle$ et $|\varphi\rangle$ par $\langle\varphi|\psi\rangle$. A tout vecteur ket correspond une fonctionnelle linéaire Φ définie sur H à valeurs dans ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L'ensemble de ces fonctionnelles constitue un espace normé H' nommé dual de H . Ces deux espaces sont isomorphes de sorte qu'à chaque élément $|\psi\rangle$ de H correspond un élément $\Phi_\psi = \langle\psi|$ de H' nommé vecteur bra. A tout ket correspond aussi une classe de fonctions d'onde presque partout égales[(1)] constituant une représentation de celui-ci. Ces fonctions de nature probabiliste appartiennent à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$, des fonctions de carré sommable définies sur $\mathbb{R}^n$, caractérisées par le produit scalaire suivant [26]:

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \int \varphi^*(\mathbf{z})\,\psi(\mathbf{z})\,d\mu(\mathbf{z}) \tag{1.1}$$

où $\mu(z)$ est une mesure de Lebesgue [31]. Le choix particulier de la variable $\mathbf{z}$ (c'est-à-dire d'une représentation pour H) nous conduit à obtenir des expressions explicites décrivant les états au moyen des fonctions d'onde.

Pour passer à la représentation configuration, utilisons l'opérateur de projection

$$E^Q(\mathbb{R}^3) = \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{x}\rangle\, d\mathbf{x}\, \langle\mathbf{x}| \tag{1.2}$$

Il est bien connu que cet opérateur correspond à la relation de fermeture

$$E^Q(\mathbb{R}^3) = \mathbf{1} \tag{1.3}$$

Son application à l'état $|\psi_t\rangle \in H$ donne le résultat suivant:

$$|\psi_t\rangle = E^Q(\mathbb{R}^3)\,|\psi_t\rangle = \int dx\psi(t,x)\,|x\rangle \tag{1.4}$$

avec $\psi(t,\mathbf{x}) = \langle\mathbf{x}|\psi_t\rangle$. L'expression précédente est une écriture formelle car le ket $|\mathbf{x}\rangle$ normé sur la "fonction" δ de Dirac

[(1)] Ces fonctions obéissent partout à la relation $f(x) = g(x)$ sauf en un ensemble de points x de mesure nulle

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}_0\rangle = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \tag{1.5}$$

n'appartient pas à l'espace de Hilbert H. Ceci est dû à ce que l'opérateur de projection $E^Q(\mathbb{R}^3)$ n'est applicable que sur un sous-espace dense[(1)] H_+ inclus dans H. De plus, H_+ a comme dual un espace H_- plus large que H et contenant les bras $\langle \mathbf{x}| \in H_-$. Ceci est une complication purement mathématique dont souffre la mécanique quantique conventionnelle lorsqu'il s'agit de la représentation configuration ou impulsion [27].

Par contre la représentation espace des phases

$$\begin{aligned}(U(b,\mathbf{a},\mathbf{v},R)\,\psi)(\mathbf{q},\mathbf{p},t) &= \exp\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2}(t-b)+m\mathbf{v}.(\mathbf{q}-\mathbf{a})\right)D^{\mathbf{j}}(R)\,\times\\ &\quad\psi\left(R^{-1}(\mathbf{q}-\mathbf{v}(t-b)-\mathbf{a}),R^{-1}(\mathbf{p}-m\mathbf{v}),t-b\right)\end{aligned} \tag{1.6}$$

où $D^{\mathbf{j}}(R)$ est la matrice de rotations (elle est égale à 1 dans le cas scalaire), ne possède pas cette difficulté et ses interprétations physiques sont cohérentes. Elle s'obtient par l'application de l'opérateur positif [25]

$$E^{\xi}(\Gamma) = \int_{\Gamma} \left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle d\mathbf{q}d\mathbf{p}\left\langle\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right|, \qquad \Gamma=\mathbb{R}^6 \tag{1.7}$$

qui projette un vecteur $|\psi_t\rangle$ de H sur un vecteur[(2)] $|\psi_\xi\rangle$ d'un sous-espace $H^{\boldsymbol{\xi}}$de H

$$|\psi_\xi\rangle = E^{\xi}(\Gamma)\,|\psi\rangle = \int d\mathbf{q}d\mathbf{p}\psi_{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q},\mathbf{p})\left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle \tag{1.8}$$

$$\psi_{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q},\mathbf{p}) = \left\langle\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}|\psi\right\rangle = \int d\mathbf{q}'d\mathbf{p}'\xi^*_{q,p}(\mathbf{q}',\mathbf{p}')\,\psi(\mathbf{q}',\mathbf{p}') \tag{1.9}$$

Le produit scalaire dans $L^2(\Gamma)$ s'écrit

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \int d\mathbf{q}d\mathbf{p}\varphi^*(\mathbf{q},\mathbf{p})\,\psi(\mathbf{q},\mathbf{p}) \tag{1.10}$$

La fonction $\psi(\mathbf{q}',\mathbf{p}')$ représente le vecteur $|\psi_t\rangle$ et la fonction $\psi_{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q},\mathbf{p})$ représente l'état $|\psi_{\boldsymbol{\xi}}\rangle$. Le système $\left\{\left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle\right\}$ est surcomplet dans $H^{\boldsymbol{\xi}}$. L'opérateur positif $E^{\boldsymbol{\xi}}(\Gamma)$ est applicable dans tout H et correspond à l'identité dans $H^{\boldsymbol{\xi}}$

$$E^{\boldsymbol{\xi}}(\Gamma) = \mathbf{1}_{H^\xi} \tag{1.11}$$

(1) Un sous-ensemble S est dense dans M, si tout voisinage dans M contient des éléments de S.
(2) L'indice temporel t a été omis dans $|\psi_\xi\rangle$ pour simplifier la notation.

Par conséquent, tous les vecteurs de l'espace de Hilbert $H^{\boldsymbol{\xi}}$, qui est isomorphe à son propre dual $H^{\boldsymbol{\xi}} = H^{\boldsymbol{\xi}\prime}$ et contient les états physiques, sont décomposables sur la base non-orthogonale $\left\{\left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle\right\}$

$$\left|\psi_{\boldsymbol{\xi}}\right\rangle = \mathbf{1}_{H^{\boldsymbol{\xi}}}\left|\psi_t\right\rangle = \int d\mathbf{q}d\mathbf{p}\psi_{\boldsymbol{\xi}}\left(t,\mathbf{q},\mathbf{p}\right)\left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle \tag{1.12}$$

Les fonctions $\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ sont nommées résolution continue de l'identité dans $H^{\boldsymbol{\xi}}$, elles sont définies par application de la représentation espace des phases U sur la fonction ξ (nommée générateur de cette résolution) pour les paramètres de transformations $(b = 0, \mathbf{a} = \mathbf{q}, \mathbf{v} = \mathbf{p}/m, R = I)$ du groupe de Galilée [4, 29]

$$\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = U\left(0,\mathbf{q},\mathbf{p}/m,I\right)\xi \equiv U_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\xi \tag{1.13}$$

Les fonctions ξ possèdent les propriétés suivantes:

1- L'invariance par rotation:

$$\xi\left(R\mathbf{q},R\mathbf{p}\right) = \xi\left(\mathbf{q},\mathbf{p}\right) \tag{1.14}$$

2- La fonction conjuguée est définie comme suit:

$$\xi^*\left(\mathbf{q},\mathbf{p}\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{q}.\mathbf{p}\right)\xi\left(\mathbf{q},\mathbf{p}\right) \tag{1.15}$$

Les fonctions ξ seront interprétées comme fonctions d'onde propres d'une particule d'essai jouant le rôle d'un micro-détecteur réel (imparfait) au repos stochastique à l'origine d'un repère classique. Les fonctions $\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ seront alors celles de la même particule à la position stochastique $\mathbf{q}$ et ayant l'impulsion stochastique $\mathbf{p}$ [25].

Des transformations unitaires peuvent relier la représentation espace des phases aux représentations habituelles. La première transformation relie la représentation espace des phases à la représentation configuration

$$\hat{\psi}\left(\mathbf{x}\right) \to \psi\left(\mathbf{q},\mathbf{p}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^3_{conf}} \hat{\xi}^*_{q,p}\left(\mathbf{x}\right)\hat{\psi}\left(\mathbf{x}\right)d\mathbf{x} \tag{1.16}$$

et la deuxième la relie à la représentation impulsion

$$\widetilde{\psi}(\mathbf{k}) \to \psi\left(\mathbf{q},\mathbf{p}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^3_{imp}} \tilde{\xi}^*_{q,p}\left(\mathbf{k}\right)\widetilde{\psi}\left(\mathbf{k}\right)d\mathbf{k} \tag{1.17}$$

où $\mathbf{k}$ est l'impulsion. Les fonctions $\hat{\xi}$ et $\tilde{\xi}$ correspondent aux représentations configuration et impulsion de la fonction d'onde propre ξ définie dans l'espace des phases, et lui sont reliées par les relations (1.16) et (1.17). Elles sont invariantes par rotation, réelles et vérifient [25]

$$\hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \left[\hat{U}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\hat{\xi}\right](\mathbf{x}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}.(\mathbf{x}-\mathbf{q})\right)\hat{\xi}(\mathbf{x}-\mathbf{q}) \tag{1.18}$$

$$\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{k}) = \left[\tilde{U}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\tilde{\xi}\right](\mathbf{k}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}.\mathbf{q}\right)\tilde{\xi}(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \tag{1.19}$$

où $\hat{U}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ et $\tilde{U}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ sont les représentations configuration et impulsion de l'élément $(0, \mathbf{q}, \mathbf{p}/m, I)$ du groupe de Galilée.

1.3 Probabilités

En mécanique quantique conventionnelle, la probabilité de trouver une particule dans une région Δ est égale à la valeur moyenne de l'opérateur de projection qui s'écrit formellement sous la forme suivante:

$$\mathbf{P} = \int_{\Delta} |\mathbf{x}\rangle\, d\mathbf{x}\, \langle\mathbf{x}| \tag{1.20}$$

Donc, pour un état normalisé $|\psi\rangle$ la probabilité vaut [38]

$$\langle\psi|\,\mathbf{P}\,|\psi\rangle = \int_{\Delta} \|\psi(\mathbf{x})\|^2\, d\mathbf{x} \tag{1.21}$$

Cette probabilité est une prédiction avant la mesure. Si cette mesure donne la valeur $\mathbf{x}$, on dira que la particule se trouvait précisément en $\mathbf{x}$ au moment de la mesure. Cela suppose que l'on dispose d'un appareil de mesure extrêmement précis, ce qui ne correspond pas à la réalité expérimentale.

En mécanique quantique stochastique, cette idéalisation est abandonnée. On y définit la probabilité que la mesure simultanée de la position et de l'impulsion donne les valeurs $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ dans le domaine $\Delta = \hat{\Delta} \times \tilde{\Delta}$ de l'espace des phases, c'est-à-dire que $\mathbf{q} \in \hat{\Delta} \subset \mathbb{R}^3_{conf}$ et $\mathbf{p} \in \tilde{\Delta} \subset \mathbb{R}^3_{imp}$, comme la valeur moyenne d'un opérateur positif

$$E^{\xi}(\Delta) = \int_{\Delta} \left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle d\mathbf{q}d\mathbf{p} \left\langle\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right| \tag{1.22}$$

qui n'est généralement pas un projecteur. Pour un état $|\psi_\xi\rangle$ (noté $|\psi\rangle$ dans la suite), cette probabilité est égale à

$$P\left(\mathbf{q}\in\hat{\Delta},\mathbf{p}\in\tilde{\Delta}\right)=\langle\psi|\,E^{\boldsymbol{\xi}}\left(\Delta\right)|\psi\rangle=\int\limits_{\Delta=\hat{\Delta}\times\tilde{\Delta}}d\mathbf{q}d\mathbf{p}\psi^{*}\left(\mathbf{q},\mathbf{p}\right)\psi\left(\mathbf{q},\mathbf{p}\right)\tag{1.23}$$

On définit aussi les probabilités marginales en étendant le domaine d'intégration correspondant à l'une des variables à tout l'espace $\mathbb{R}^3$. Dans le cas où la région $\tilde{\Delta}$ de l'espace des impulsions est étendue à tout $\mathbb{R}^3$, la relation (1.16) conduit à la probabilité marginale suivante :

$$P\left(\mathbf{q}\in\hat{\Delta},\mathbf{p}\in\mathbb{R}^3_{imp}\right)=\int\limits_{\hat{\Delta}}d\mathbf{q}\int\limits_{\mathbb{R}^3_{imp}}d\mathbf{p}\left\|\psi\left(\mathbf{q},\mathbf{p}\right)\right\|^2=\int\limits_{\hat{\Delta}}d\mathbf{q}\int\limits_{\mathbb{R}^3}d\mathbf{x}\chi_{\mathbf{q}}\left(\mathbf{x}\right)\left\|\psi\left(\mathbf{x}\right)\right\|^2\tag{1.24}$$

La fonction $\chi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) = (2\pi\hbar)^3\left\|\hat{\xi}\left(\mathbf{x}-\mathbf{q}\right)\right\|^2$ [3, 30] peut être interprétée comme densité de probabilité que la mesure de la position donne $\mathbf{q}$ quand la particule est en $\mathbf{x}$ et décrit un appareil de mesure réel (imparfait)[25]. Comme $\left\|\psi\left(\mathbf{x}\right)\right\|^2$ est la densité de probabilité que la particule soit en $\mathbf{x}$, la probabilité (1.24) est celle que l'appareil de mesure donne comme résultat une valeur $\mathbf{q}\in\hat{\Delta}$. Si la mesure donne une valeur bien définie $\mathbf{q}$, la fonction $\chi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x})$ donne alors la densité de probabilité que la position réelle soit $\mathbf{x}$. Cette dernière ne peut jamais être déterminée avec précision et la particule apparaîtra toujours comme étendue. Comme cette extension est déterminée par la fonction χ, reflétant l'imperfection de l'appareil de mesure, elle est appelée stochastique [29].

Un résultat analogue s'obtient dans le cas ou la région $\hat{\Delta}$ de l'espace de configuration est étendue à tout $\mathbb{R}^3$, la relation (1.17) conduit à la probabilité marginale suivante:

$$P\left(\mathbf{q}\in\mathbb{R}^3_{conf},\mathbf{p}\in\tilde{\Delta}\right)=\int\limits_{\tilde{\Delta}}d\mathbf{p}\int\limits_{\mathbb{R}^3_{con,f}}d\mathbf{q}\left\|\psi\left(\mathbf{q},\mathbf{p}\right)\right\|^2=\int\limits_{\tilde{\Delta}}d\mathbf{p}\int\limits_{\mathbb{R}^3}d\mathbf{k}\chi_{p}(\mathbf{k})\left\|\psi\left(\mathbf{k}\right)\right\|^2\tag{1.25}$$

où $\chi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}) = (2\pi\hbar)^3\left\|\tilde{\xi}\left(\mathbf{k}-\mathbf{p}\right)\right\|^2$ [3, 30]est la densité de probabilité que la mesure de l'impulsion donne $\mathbf{p}$ quand la particule a l'impulsion $\mathbf{k}$ [25]. En résumé, ce que l'on mesure ce ne sont pas les valeurs précises $\mathbf{x}$ et $\mathbf{k}$ de la position et de l'impulsion respectivement, mais les valeurs stochastiques $\left(\mathbf{q},\chi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x})\right)$ et $\left(\mathbf{p},\chi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k})\right)$ [5]. Pour chaque valeurs mesurées $\mathbf{q}$ et $\mathbf{p}$, les distributions $\chi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x})$ et $\chi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k})$ donne la probabilité pour que les valeurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{k}$ soient les valeurs réelles de la position et de l'impulsion de la particule. Donc, toutes les particules sont étendues au sens stochastique (au sens de la mesure) dans cette théorie, et ceci reflète l'imperfection de l'appareil de mesure [29].

Remarquons que si la fonction de confiance $\chi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x})$ tend vers la fonction $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{q})$ [25], la relation (1.24) se réduit à la formule conventionnelle (1.21). En ce sens, la théorie quantique stochastique apparaît comme une généralisation de la mécanique quantique conventionnelle.

Dans le cas particulier où les fonctions $\hat{\xi}(\mathbf{x})$ et $\tilde{\xi}(\mathbf{k})$ sont données par l'état fondamental de l'oscillateur harmonique

$$\hat{\xi}^{l}(\mathbf{x}) = \left(8\pi^2\hbar^2 l^2\right)^{-\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4l^2}\right) \tag{1.26}$$

$$\tilde{\xi}^{l}(\mathbf{k}) = \left(\frac{8\pi l^2}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{l^2\mathbf{k}^2}{\hbar^2}\right) \tag{1.27}$$

où l représente une longueur fondamentale caractérisant l'extension, les distributions $\chi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x})$ et $\chi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k})$ prennent les formes Gaussiennes suivantes:

$$\chi_{\mathbf{q}}^{l}(\mathbf{x}) = \left(2\pi l^2\right)^{-\frac{3}{2}} \exp -\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{q}}{l}\right)^2 \tag{1.28}$$

$$\chi_{\mathbf{p}}^{l}(\mathbf{k}) = \left(\frac{2l}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp -\frac{2l^2\left(\mathbf{k}-\mathbf{p}\right)^2}{\hbar^2} \tag{1.29}$$

dont les moyennes μ sont données par $\mathbf{q}$ et $\mathbf{p}$, respectivement, et la déviation standard σ par $\Delta x = l$ et $\Delta k = \hbar/2l$ respectivement. Le produit de ces étalements vaut

$$\Delta x \Delta k = \frac{\hbar}{2} \tag{1.30}$$

Sachant que $\mathbf{x}$ et $\mathbf{k}$ représentent les valeurs réelles de la position et de l'impulsion, on remarque que le principe d'incertitude de Heisenberg est vérifié et même minimisé. Par conséquent, on peut dire que ξ^l est minimale au sens que χ^l donne l'étalement minimal compatible avec le principe d'incertitude [25].

1.4 Opérateurs

Dans un espace de Hilbert H, toute transformation linéaire A, d'un sous espace $D_A \subset H$ dans H, est nommée opérateur linéaire [26]. Ces opérateurs peuvent être représentés par des matrices carrées, qui en mécanique quantique agissent sur des vecteurs ket de l'espace des états H [28]. En plus, ils possèdent la propriété d'hermicité. Chaque opérateur représente une grandeur physique mesurable, qui agissant sur un état propre $|\psi\rangle$ le transforme en $a\,|\psi\rangle$, où la valeur propre a de l'opérateur A correspond à l'une des valeurs que peut prendre la grandeur physique[38]. Nous allons décrire deux types d'opérateurs importants. Le premier type concerne l'opérateur position $\mathbf{X}$, l'opérateur impulsion $\mathbf{P}$, l'hamiltonien H et l'opérateur moment cinétique $\mathbf{J}$. Leur importance réside dans les grandeurs fondamentales qu'ils représentent et dans leur lien directe avec la théorie des groupes et les algèbres de Lie. Le second type correspond aux opérateurs de projection et aux opérateurs positifs qui décrivent le processus de mesure en mécanique quantique. Commençons par le premier type.

Une algèbre est un espace vectoriel muni d'une deuxième loi interne. Dans le cas de l'algèbre de Lie $Lie(G)$ du groupe de Galilée G, cette loi correspond à la commutation [9, 32, 34]

$$[X,Y] = XY - YX \quad , \quad X,Y \in Lie(G) \tag{1.31}$$

En général, un élément d'un groupe de Galilée (de Lie) s'écrit (il y a sommation sur l'indice $i = 1,2,3$)

$$g = \exp i \left(bH - a^i P_i + v^i K_i + \varphi^i J_i \right) \tag{1.32}$$

La famille des générateurs $\{H, P_i, K_i, J_i\}_{i=1,2,3}$ constitue une base dans $Lie(G)$ et chaque générateur correspond à un sous-groupe à un paramètre. Pour les translations temporelles le paramètre est b et le générateur est H. Les paramètres a^i correspondent aux générateurs P_i qui engendrent les translations spatiales selon les axes i. Les paramètres v^i du vecteur vitesse $\mathbf{v}$ correspondent aux générateurs K_i engendrant les boosts. Les paramètres φ^i sont des angles et correspondent aux générateurs J_i engendrant les rotations autour des axes i. Ces générateurs obéissent aux lois de commutation suivantes [22, 33]:

$$\begin{aligned}
[H,H] &= [P_i,H] = [J_i,H] = 0 \\
[K_i,K_j] &= [K_i,P_j] = [P_i,P_j] = 0 \ , \ [K_i,H] = -i\hbar P_i \\
[J_i,J_j] &= i\varepsilon_{ijk}J_k \ , \ [J_i,K_j] = -i\hbar\varepsilon_{ijk}K_k \ , \ [J_i,P_j] = -i\hbar\varepsilon_{ijk}P_k
\end{aligned} \tag{1.33}$$

où ε_{ijk} est le tenseur complètement antisymétrique d'ordre 3. Les générateurs H, $\mathbf{P}$ et $\mathbf{J}$ possèdent les interprétations physiques d'hamiltonien, d'opérateur impulsion et d'opérateur moment cinétique. Le générateur $\mathbf{K}$ ne correspond pas à un opérateur utilisé en mécanique quantique, car il ne commute pas avec H, mais il peut être relié à l'opérateur position lorsque le groupe de Galilée G [16, 39] est remplacé par le groupe de Galilée étendu $\bar{G}$ [6, 9]. Ce dernier est composé des éléments

$$\hat{g} = (\theta, g) \quad \theta \in \mathbb{R}, g \in G \tag{1.34}$$

Le générateur correspondant au sous-groupe $\Theta = \{(\theta, e)\,;\theta \in \mathbb{R}\}$ est l'identité I. Les relations de commutation de $\bar{G}$ sont les mêmes que celles de G sauf la relation [18]

$$[K_i, P_j] = m\delta_{ij} \tag{1.35}$$

où apparaissent la masse m de la particule et les éléments de matrice δ_{ij} du générateur I. On peut donc définir l'opérateur position de la mécanique quantique par

$$\mathbf{X} = \frac{1}{m}\mathbf{K} \tag{1.36}$$

car il obéit aux lois de commutations

$$\left[X^i, P^j\right] = i\delta_{ij}\ ,\ \left[X^i, X^j\right] = 0\ ,\ [J_i, X_j] = i\varepsilon_{ijk}X_k \tag{1.37}$$

Pour le groupe étendu, les opérateurs de casimir [21] (invariants) sont les opérateurs de masse M, d'énergie au repos E_0 et de spin S^2

$$M = mI\ ,\ E_0 = H - \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2\ ,\ S^2 = \left[\mathbf{J} - \frac{1}{m}\left(\mathbf{K} \wedge \mathbf{P}\right)\right]^2 \tag{1.38}$$

Les différents opérateurs définis auparavant peuvent être écrits sous une forme explicite, selon la représentation choisie du groupe de Galilée G. Dans la représentation configuration ils s'écrivent sous la forme:

$$\hat{H} = i\hbar\partial_t\ ,\ \hat{\mathbf{P}} = -i\hbar\nabla_{\mathbf{x}}\ ,\ \hat{\mathbf{J}} = \mathbf{S} - i\hbar\mathbf{x} \wedge \nabla_{\mathbf{x}}\ ,\ \hat{\mathbf{K}} = m\mathbf{x} - i\hbar t\nabla_{\mathbf{x}} \tag{1.39}$$

en représentation impulsion:

$$\tilde{H} = \frac{\mathbf{k}^2}{2m} + E_0\ ,\ \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{k}\ ,\ \tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{S} - i\mathbf{k} \wedge \nabla_{\mathbf{k}}\ ,\ \tilde{\mathbf{K}} = im\nabla_{\mathbf{k}} \tag{1.40}$$

et en représentation espace des phases [25]:

$$H = i\hbar\partial_t\ ,\ \mathbf{P} = -i\hbar\nabla_{\mathbf{q}}\ ,\ \mathbf{K} = m\mathbf{q} - i\hbar m\nabla_{\mathbf{p}}\ ,\ \mathbf{J} = \mathbf{S} - i\hbar(\mathbf{q} \wedge \nabla_{\mathbf{q}} + \mathbf{p} \wedge \nabla_{\mathbf{p}}) \tag{1.41}$$

On remarque que les relations de commutation dans $Lie(\bar{G})$ sont vérifiées dans les trois représentation. En résumé, les opérateurs H, $\mathbf{P}$, $\mathbf{X}$ et $\mathbf{J}$ génèrent les symétrie par rapport aux translations temporelles, les translations spatiales, les boosts et les rotations. Leurs relations de commutations constituent l'algèbre de Lie de la symétrie. Ces opérateurs peuvent avoir plusieurs représentations, chacune avec une interprétation physique appropriée. De plus, on peut constituer au moyen d'eux des opérateurs invariants (les casimirs) par rapport au groupe de symétrie considéré dont les valeurs propres (m, E_0 et $s(s+1)$) désignent un sous-espace propre invariant minimal (c'est-à-dire qu'il ne contient pas de sous-espaces invariants). Ce sous-espace correspond à une représentation irréductible décrivant une particule élémentaire de masse, d'énergie au repos et de spin bien définis. Pour les représentations configuration et impulsion ce sous-espace correspond à $L^2(\mathbb{R}^3)$. Pour la représentation espace des phases, c'est le sous-espace $H^{\boldsymbol{\xi}}$ de $L^2(\Gamma)$.

Décrivons maintenant le second type d'opérateurs liés à la mesure. Considérons d'abord les opérateurs de projection qui décrivent le processus de mesure conventionnel en mécanique quantique. Tout opérateur linéaire défini sur tout l'espace de Hilbert H, est un projecteur si et seulement si [26], il est auto-adjoint

$$E = E^* \tag{1.42}$$

et idempotent:

$$E = E^2 \tag{1.43}$$

Le module de ce projecteur est égal à l'unité:

$$\|E\| = 1 \tag{1.44}$$

Désignons par M l'espace de configuration, des impulsions, ou l'espace des phases (ou tout autre espace physique). La famille de toutes les applications E associant aux domaines Δ de l'espace M les opérateurs de projection $E(\Delta)$ agissant dans H, est une mesure à valeurs projectives (PV-measure, en anglais) [1] si les propriétés suivantes sont vérifiées:

$$\begin{aligned} E(M) &= 1 && (1.45) \\ E(\cup_{i=1}^{\infty}\Delta_i) &= \Sigma_{i=1}^{\infty}E(\Delta_i)\ ,\ \ \Delta_i \cap \Delta_j = \oslash,\ i \neq j && (1.46) \end{aligned}$$

Une telle mesure constitue un système d'imprimitivité pour une représentation unitaire $U(g)$, d'un groupe de symétries G, si [15, 24]:

$$U(g)E(\Delta)U^{-1}(g) = E(g\Delta)\ ,\ \ g\Delta = \{g(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Delta\} \tag{1.47}$$

Expliquons ces définitions dans le cas du groupe de Galilée isochrone G'(sans les translations temporelles) et la représentation configuration $\hat{U}$. L'opérateur de projection formellement défini par [25]

$$E^{\mathbf{x}}(\hat{\Delta}) = \int_{\hat{\Delta}} |\mathbf{x}\rangle\, d\mathbf{x}\, \langle \mathbf{x}| \tag{1.48}$$

est rigoureusement défini par son action sur une fonction d'onde $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$

$$(E^x(\hat{\Delta})\hat{\psi})(\mathbf{x}, t) = \chi_{\hat{\Delta}}(\mathbf{x})\hat{\psi}(\mathbf{x}, t) \tag{1.49}$$

où $\chi_{\hat{\Delta}}(\mathbf{x})$ est la fonction caractéristique

$$\chi_{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}) = 1 \text{ si } \mathbf{x} \in \hat{\Delta} \text{ , } 0 \text{ si } \mathbf{x} \notin \hat{\Delta} \tag{1.50}$$

Par conséquent, la probabilité que la mesure donne une valeur appartenant à $\hat{\Delta}$, est donnée par la valeur moyenne de l'opérateur de projection $E^{\mathbf{x}}(\hat{\Delta})$ dans l'état ψ:

$$p_{\psi}(\hat{\Delta}) = \left\langle \hat{\psi} | E^{\mathbf{x}}(\hat{\Delta}) \hat{\psi} \right\rangle = \int_{\hat{\Delta}} d\mathbf{x} \hat{\psi}^{*}(\mathbf{x}) \hat{\psi}(\mathbf{x}) \tag{1.51}$$

La propriété d'imprimitivité

$$\hat{U}(g) E^{\mathbf{x}}(\hat{\Delta}) \hat{U}^{-1}(g) = E^{\mathbf{x}}(g\hat{\Delta}) \text{ , } \; g\hat{\Delta} = \left\{ R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}, \mathbf{x} \in \hat{\Delta} \right\} \tag{1.52}$$

se déduit aussi de la définition (1.49) et exprime l'invariance de la probabilité après la transformation $\hat{U}\,(g)$

$$\left\langle \hat{\psi} \hat{U}^{-1}(g) | E^{\mathbf{x}}(g\hat{\Delta}) \hat{U}(g) \hat{\psi} \right\rangle = \left\langle \hat{\psi} | E^{\mathbf{x}}(\hat{\Delta}) \hat{\psi} \right\rangle$$

Les autres propriétés du système d'imprimitivité expriment les propriétés des probabilités. La somme des probabilités sur les ensembles Borel(1) [8], implique que $E(\Delta)$ peut être étendu à tout ensemble Borel de la manière suivante:

$$E(\cup_{i=1}^{\infty} \Delta_i) = \Sigma_{i=1}^{\infty} E(\Delta_i) \text{ , } \; \Delta_i \cap \Delta_j = \oslash, \, i \neq j \tag{1.53}$$

comme $p_{\boldsymbol{\psi}}(M) = 1$, pour tout $\boldsymbol{\psi} \in H$, on doit avoir:

$$E(M) = 1 \tag{1.54}$$

Finalement, comme $p_{\psi}(\Delta) \geq 0$ et $p_{\psi}(\oslash) = 0$ pour tout vecteur d'état ψ, tout opérateur $F(\Delta)$ doit être défini-positif [26]

$$F(\Delta) \geq 0 \text{ , } F(\oslash) = 0 \tag{1.55}$$

Nous avons donc retrouvé toutes les propriétés du système d'imprimitivité sauf le fait qu'il soit un opérateur de projection. C'est cette dernière propriété que la mécanique quantique stochastique remplace par la propriété (1.55) et utilise donc un système de covariance au

(1) Précisément, aux ensembles de Borel. Les ensembles Borel dans $\mathbb{R}^n$, appartiennent à la plus petite famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ obéissant aux propriétés suivantes:

- la famille est fermée sous la complémentarité
- la famille est fermée sous les unions dénombrables
- la famille contient tous les sous-ensembles ouverts.

lieu du système d'imprimitivité. Tous les opérateurs $F(\Delta)$ qui prennent des valeurs finies sur des compactes[1], et qui satisfont aux relations (1.55) et (1.53), constituent une mesure à valeurs operatorielles positives (POV measure) [7], si de plus la relation (1.54) est satisfaite, $F(\Delta)$ est une POV-measure normalisée. Les PV mesures sont un cas particulier des POV mesures, si dans celle-ci $F(\Delta)$ représente un opérateur de projection. Une POV mesure constitue un système de covariance pour une représentation unitaire $U(g)$ d'un groupe de symétries G, si la propriété suivante est réalisée:

$$U(g)F(\Delta)U^{-1}(g) = F(g\Delta)\ ,\ \ g\Delta = \{g(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Delta\} \tag{1.56}$$

Ainsi, en mécanique quantique stochastique, les opérateurs $E^{\boldsymbol{\xi}}(\Delta)$ constituent un système de covariance, pour la représentation espace des phases U du groupe de Galilée G, et sont donnés par l'intégrale

$$E^{\boldsymbol{\xi}}(\Delta) = \int_{\Delta} \left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle d\mathbf{q}d\mathbf{p} \left\langle\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right| \tag{1.57}$$

Les opérateurs $E^{\boldsymbol{\xi}}(\Delta)$ ne sont pas des opérateurs de projection car la famille $\left\{\left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle\right\}$ n'est pas orthogonale [25]

$$\left[E^{\boldsymbol{\xi}}(\Delta)\right]^2 = \int_{\Delta} \left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle \left\langle\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right|\left.\xi_{\mathbf{q}',\mathbf{p}'}\right\rangle \left\langle\xi_{\mathbf{q}',\mathbf{p}'}\right| d\mathbf{q}d\mathbf{p}d\mathbf{q}'d\mathbf{p}' \neq \delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \neq E^{\xi}(\Delta) \tag{1.58}$$

1.5 Equation de Schrödinger

L'évolution temporelle des systèmes physiques est régie par les équations du mouvement. En mécanique quantique, l'évolution temporelle des vecteurs d'état $|\psi_t(\mathbf{x})\rangle$ est régie par l'équation de Schrödinger [38]:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\left|\psi_t(\mathbf{x})\right\rangle = H(t)\left|\psi_t(\mathbf{x})\right\rangle \tag{1.59}$$

où $H(t)$ est l'opérateur hamiltonien. L'équation de Schrödinger est au premier ordre par rapport temps, par conséquent la donnée de l'état initial $\left|\psi_{t_0}(\mathbf{x})\right\rangle$ suffit pour déterminer l'état $|\psi_t(\mathbf{x})\rangle$ à un instant t quelconque. Cette équation est linéaire et homogène, donc toutes ces solutions sont linéairement superposables. L'opérateur hamiltonien étant hermétique, le carré de la norme du vecteur d'état $\langle\psi_t(\mathbf{x})|\psi_t(\mathbf{x})\rangle$ ne dépend pas de t

$$\frac{d}{dt}\left\langle\psi_t(\mathbf{x})|\psi_t(\mathbf{x})\right\rangle = 0 \tag{1.60}$$

[1] Dans $\mathbb{R}^n$, un compacte est un intervalle fermé et borné

et comme

$$\left\langle \psi_{t_0}(\mathbf{x}) | \psi_{t_0}(\mathbf{x}) \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \, |\psi(\mathbf{x}, t_0)|^2 = 1 \tag{1.61}$$

cela implique que la probabilité de présence de la particule dans l'espace est conservée dans le temps.

$$\langle \psi_t(\mathbf{x}) | \psi_t(\mathbf{x}) \rangle = \left\langle \psi_{t_0}(\mathbf{x}) | \psi_{t_0}(\mathbf{x}) \right\rangle = 1 \tag{1.62}$$

L'expression explicite de l'équation de Schrödinger dépend de celle de l'opérateur énergie de repos [19, 20] $E_0 = H - \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2$, et par conséquent du choix de la représentation du groupe de symétrie.

Il s'ensuit que la donnée des opérateurs hamiltonien et impulsion suffit pour écrire explicitement l'équation de Schrödinger en choisissant une énergie de repos [28](de référence) nulle $E_0 = 0$. Nous avons déjà donné les expressions de ces deux opérateurs dans les différentes représentations. Réécrivons les dans la représentation configuration en utilisant la constante de Planck $\hbar$ [23]

$$\hat{H} = i\hbar\partial_t \quad ; \qquad \hat{\mathbf{P}} = -i\hbar\nabla_{\mathbf{x}} \tag{1.63}$$

L'équation de Schrödinger s'écrit alors dans la représentation configuration

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{\psi}(\mathbf{x}, t) = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta_{\mathbf{x}}\hat{\psi}(\mathbf{x}, t) \tag{1.64}$$

Etant donnée que l'hamiltonien et l'opérateur impulsion prennent la forme suivante dans la représentation espace des phases:

$$H = i\hbar\partial_t \qquad \hat{\mathbf{P}} = -i\hbar\nabla_{\mathbf{q}} \tag{1.65}$$

l'équation de Schrödinger s'écrit

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta_{\mathbf{q}}\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \tag{1.66}$$

L'équation de Schrödinger écrite sous différentes représentations, est invariante sous la représentation choisie.

1.6 Densité et courant de probabilité

La probabilité $dP(\mathbf{x}, t)$ de trouver à l'instant t la particule dans l'élément de volume d^3x situé au point $\mathbf{x}$ est

$$dP(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)d^3x \tag{1.67}$$

où

$$\rho(\mathbf{x}, t) = |\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)|^2 \tag{1.68}$$

est la densité de probabilité. L'intégrale dans tout l'espace de $\rho(\mathbf{x}, t)$ est constant dans le temps, ce qui n'implique pas qu'en chaque point de l'espace la densité de probabilité $\rho(\mathbf{x}, t)$ soit conservée. Si l'on considère un volume infinitésimal d^3x autour de $\mathbf{x}$, la densité de probabilité $\rho(\mathbf{x}, t)$ est conservée dans ce volume. Si la surface qui le limite est traversée par un flux de vecteur densité de courant de probabilité $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$, la densité $\rho(\mathbf{x}, t)$ et la densité de courant $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ satisfont à l'équation de continuité [38]

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + div\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{1.69}$$

où la densité de courant de probabilité

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\right] \\ &= \frac{1}{m}\,\mathrm{Re}\left[\psi^* (\frac{\hbar}{i} \nabla \psi)\right] \end{aligned} \tag{1.70}$$

est définie d'une manière ad hoc (pour satisfaire l'équation de continuité).

En mécanique quantique stochastique, on définit aussi une densité de probabilité

$$\rho^{\xi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = |\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)|^2 \tag{1.71}$$

et un courant de probabilité

$$\mathbf{J}^{\xi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \nabla \psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \nabla \psi^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\right] \tag{1.72}$$

qui satisfont à l'équation de continuité [25]

$$\frac{\partial \rho^{\xi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{q}}.\mathbf{J}^{\xi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = 0 \tag{1.73}$$

L'analogie de la mécanique quantique stochastique avec la mécanique classique statistique [25] permet de lier le courant $\mathbf{J}^{\xi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ à un courant ayant une interprétation physique claire. En premier lieu, la densité de probabilité

$$\hat{\rho}^{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)|^2 \, d\mathbf{p} \tag{1.74}$$

est analogue à la densité de probabilité choisie pour décrire un ensemble de particules dans l'espace de configuration en mécanique statistique classique [22]

$$\hat{\rho}^{cla}(\mathbf{q}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho^{cla}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} \tag{1.75}$$

où $\rho^{cla}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ est la fonction de distribution. De même, un vecteur densité de courant de probabilité

$$\hat{\mathbf{J}}^{\xi}(\mathbf{q},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{p}}{m} \left|\boldsymbol{\psi}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)\right|^2 d\mathbf{p} \tag{1.76}$$

peut être définie par analogie au vecteur densité de courant de la mécanique statistique classique

$$\hat{\mathbf{J}}^{cla}(\mathbf{q},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{p}}{m} \rho^{cla}(\mathbf{q},\mathbf{p},t) d\mathbf{p} \tag{1.77}$$

L'équation de continuité classique

$$\frac{\partial \hat{\rho}^{cla}(\mathbf{q},t)}{\partial t} + \nabla.\hat{\mathbf{J}}^{cla}(\mathbf{q},t) = 0 \tag{1.78}$$

est vérifiée par la densité de courant stochastique [25]

$$\frac{\partial \hat{\rho}^{\xi}(\mathbf{q},t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{q}}.\hat{\mathbf{J}}^{\xi}(\mathbf{q},t) = 0 \tag{1.79}$$

Ces relations montrent que la mécanique quantique stochastique est plus proche de la mécanique classique que la mécanique quantique conventionnelle. Mieux encore, la densité de courant $\mathbf{J}^{\xi}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$, qui a été définie d'une manière ad hoc, peut maintenant être lié au courant $\mathbf{J}^{\xi}(\mathbf{q},t)$ défini d'une manière physique

$$\mathbf{J}^{\xi}(\mathbf{q},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{J}^{\xi}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)\, d\mathbf{p} \tag{1.80}$$

à condition que les fonctions $\hat{\xi}(\mathbf{x})$ et $\tilde{\xi}(\mathbf{k})$ soient réelles.

Un autre mérite de la mécanique quantique stochastique réside dans les limites ponctuelles (extension stochastique négligée) de la densité et du courant stochastiques. La densité de probabilité peut être réécrite sous la forme:

$$\hat{\rho}^{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q},t) = \int d\mathbf{x} \chi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) \left|\psi(\mathbf{x},t)\right|^2 \tag{1.81}$$

La limite ponctuelle correspond au passage $\chi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) \to \delta(\mathbf{x}-\mathbf{q})$ de l'appareil de mesure réel vers l'appareil de mesure parfait. On trouve alors que la densité stochastique tend vers la densité quantique conventionnelle [25]

$$\hat{\rho}^{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q},t) \mapsto \left|\psi(\mathbf{q},t)\right|^2 = \rho(\mathbf{q},t) \tag{1.82}$$

De même pour la densité de courant stochastique peut s'écrire sous la forme

$$\hat{\mathbf{J}}^{\xi}(\mathbf{q},t) = \int d\mathbf{x} \chi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x})\, \mathbf{J}(\mathbf{x},t) \tag{1.83}$$

et tend vers la densité de courant conventionnelle

$$\hat{\mathbf{J}}^{\xi}(\mathbf{q},t) \mapsto \mathbf{J}(\mathbf{x},t) \tag{1.84}$$

Donc, le cas conventionnel présente une limite du cas stochastique comme cela devrait être pour toute théorie que se prétend être une généralisation d'une autre.

1.7 Propagateurs

L'évolution temporelle du vecteur d'état $|\psi\rangle$ se fait selon la loi [38]

$$|\psi_t\rangle = \hat{U}(t-t')\,|\psi_{t'}\rangle \tag{1.85}$$

où l'opérateur évolution $\hat{U}(t-t')$ est donné par

$$\hat{U}(t-t') = \exp -\frac{i}{\hbar}H_0(t-t') = \exp -\frac{i\mathbf{P}^2}{2m\hbar}(t-t') \tag{1.86}$$

La fonction d'onde $\psi_t(x)$ peut être écrite en fonction de l'opérateur évolution:

$$\psi_t(\mathbf{x}) = \langle\mathbf{x}|\,\hat{U}(t-t')\,|\psi_{t'}\rangle \tag{1.87}$$

L'introduction de la relation de fermeture sur la base $\{|\mathbf{x}\rangle\}$

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x}'\,|\mathbf{x}'\rangle\,\langle\mathbf{x}| = 1 \tag{1.88}$$

entraîne la forme d'opérateur intégral suivante:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_{t'}(\mathbf{x}') &= \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x}' K(\mathbf{x}',t';\mathbf{x},t)\psi_t(\mathbf{x}) & (1.89)\\ K(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t') &= \langle\mathbf{x}|\,\hat{U}(t-t')\,|\mathbf{x}'\rangle & (1.90)\end{aligned}$$

L'élément de matrice $K(\mathbf{x}',t';\mathbf{x},t)$ de l'opérateur évolution $\hat{U}(t-t')$ dans la représentation configuration est nommé propagateur. Il représente l'amplitude de probabilité de transition de l'état localisé en $\mathbf{x}'$ à l'instant t', vers l'état localisé en $\mathbf{x}$ à l'instant t. Sa formule pour une particule libre de masse m est [14]

$$K(\mathbf{x}',t';\mathbf{x},t) = \left(\frac{m}{i2\pi\hbar(t-t')}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\frac{1}{2}\frac{m\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2}{(t-t')}\right) \tag{1.91}$$

En multipliant l'argument de l'exponentiel par $1=(t-t')/(t-t')$, on trouve

$$K(\mathbf{x}',t';\mathbf{x},t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2\,(t-t')\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t}\mathcal{L}dt\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{class}\,(t-t')\right) \tag{1.92}$$

où $S_{class}\,(t-t')$ est l'action classique, la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi. On définit la densité de probabilité que la particule ayant été préparée à l'instant t à la position $\mathbf{x}$ soit détectée à l'instant t' à la position $\mathbf{x}'$ par

$$\rho\,(\mathbf{x}',t';\mathbf{x},t) = (2\pi\hbar)^3\,|K(\mathbf{x}',t';\mathbf{x},t)|^2 \tag{1.93}$$

Par conséquent, la probabilité que la particule ayant été préparée à l'instant t' à la position $\mathbf{x}'$ soit détectée à l'instant t à la position $\mathbf{x}$, vaut

$$P\left(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t\right) = \int \rho\left(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t\right) d\mathbf{x} = (2\pi\hbar)^3 \int \left|K(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t)\right|^2 d\mathbf{x} \longrightarrow \infty \tag{1.94}$$

De plus, l'énergie moyenne de l'observation d'un tel phénomène de propagation sur les trajectoires est infinie

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\rangle = \int K^*(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) \left(-\frac{\hbar\nabla_{\mathbf{x}}^2}{2m}\right) K(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) \longrightarrow \infty \tag{1.95}$$

La divergence dans les précédentes formules est le problème majeur des propagateurs conventionnels. Ce problème peut être résolu en travaillant dans la représentation espace des phases stochastique [2]. On définit le propagateur en mécanique quantique stochastique comme la valeur moyenne de l'opérateur évolution écrit dans la représentation espace des phases [25]

$$K^{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t') = \left\langle \xi_{\mathbf{qp}} \right| U(t - t') \left| \xi_{\mathbf{q}'\mathbf{p}'} \right\rangle \tag{1.96}$$

Il représente l'amplitude de probabilité qu'une particule préparée en $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ soit détectée en $(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t')$. La famille $\left\{ \left|\xi_{\mathbf{qp}}\right\rangle / (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \Gamma \right\}$ constitue une résolution de l'identité dans $L^2(\Gamma^\xi)$

$$\int d\mathbf{q}d\mathbf{p} \left|\xi_{\mathbf{qp}}\right\rangle \left\langle \xi_{\mathbf{qp}}\right| = 1 \tag{1.97}$$

par conséquent, on peut réécrire la fonction d'onde autrement

$$\begin{aligned}
\psi\left(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t\right) &= \int d\mathbf{q}' d\mathbf{p}' \left\langle \boldsymbol{\xi}_{qp} \right| U(t - t') \left| \xi_{\mathbf{q}'\mathbf{p}'} \right\rangle \left\langle \xi_{\mathbf{q}'\mathbf{p}'} \right| \left| \psi_{t'} \right\rangle \\
&= \int d\mathbf{q}' d\mathbf{p}' K^{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t') \psi\left(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t'\right)
\end{aligned} \tag{1.98}$$

Le propagateur stochastique possède les propriétés habituelles des propagateurs, qui sont l'unitarité de l'évolution

$$U^+(t - t') = U^{-1}(t - t') = U(t - t') \tag{1.99}$$

$$K^{\boldsymbol{\xi}*}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t') = K^{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t'; \mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \tag{1.100}$$

et la reproductibilité (reproducing) [40]

$$U(t - t'') = U(t - t')U(t' - t'') \tag{1.101}$$

$$K^{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}'', \mathbf{p}'', t'') = \int d\mathbf{q}' d\mathbf{p}' K^{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t') K^{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t'; \mathbf{q}'', \mathbf{p}'', t'') \tag{1.102}$$

Si l'on exprime les vecteurs d'état propres stochastiques dans la représentation impulsion, le propagateur stochastique prend la forme

$$K^{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}, t; \boldsymbol{\xi}', t') = \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-i\frac{\mathbf{k}^2}{2m\hbar}(t-t')\right) \tilde{\xi}^*_{q'p'}(\mathbf{k})\tilde{\xi}_{qp}(\mathbf{k})d\mathbf{k} \tag{1.103}$$

La densité de probabilité que la particule ayant été préparée à l'instant t aux coordonnées stochastiques $\left\{\left(\mathbf{q}, \chi_{\mathbf{q}}\right); \left(\mathbf{p}, \chi_{\mathbf{p}}\right)\right\}$ soit détectée à l'instant t' aux coordonnées stochastiques $\left\{\left(\mathbf{q}', \chi_{\mathbf{q}'}\right); \left(\mathbf{p}', \chi_{\mathbf{p}'}\right)\right\}$ est:

$$\rho\left(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t'\right) = (2\pi\hbar)^3 \left|K^{\xi}\left(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t'\right)\right|^2 \tag{1.104}$$

La probabilité

$$P\left(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t'\right) = \int \rho\left(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t'\right) d\mathbf{x} = (2\pi\hbar)^3 \int \left|K^{\boldsymbol{\xi}}\left(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t'\right)\right|^2 d\mathbf{x} \tag{1.105}$$

que la particule ayant été préparée à l'instant t aux coordonnées stochastiques $\left\{\left(\mathbf{q}, \chi_{\mathbf{q}}\right); \left(\mathbf{p}, \chi_{\mathbf{p}}\right)\right\}$ soit détectée à l'instant t' aux coordonnées stochastiques $\left\{\left(\mathbf{q}', \chi_{\mathbf{q}'}\right); \left(\mathbf{p}', \chi_{\mathbf{p}'}\right)\right\}$, est finie. De plus, l'énergie moyenne associée à cet probabilité

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\rangle = \int K^{\boldsymbol{\xi}*}\left(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t'\right) \left(-\frac{\hbar\nabla^2_{\mathbf{q}}}{2m}\right) K^{\boldsymbol{\xi}}\left(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t'\right) \tag{1.106}$$

est aussi finie [25].

Dans le cas de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique, pour lequel le vecteur d'état propre stochastique prend la forme (1.27), le propagateur stochastique s'écrit:

$$\begin{aligned} K_l^{\boldsymbol{\xi}}\left(\xi, t; \xi', t'\right) &= (2\pi\hbar)^{-3} \left(\frac{l^2}{L(t-t')}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\left(\mathbf{q}'-\mathbf{q}\right)^2}{8L(t-t')} - \frac{l^4}{2L(t-t')}\left(\frac{\mathbf{p}'-\mathbf{p}}{\hbar}\right)^2\right) \times \\ &\quad \exp\left(\frac{il^2}{2\hbar lL(t-t')}\left(\left(\mathbf{q}'-\mathbf{q}\right)\left(\mathbf{p}'+\mathbf{p}\right) - \frac{t'-t}{2m}\left(\mathbf{p}'^2+\mathbf{p}^2\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{1.107}$$

avec

$$L(t-t') = l^2 + i\frac{\hbar}{4m}(t'-t) \tag{1.108}$$

est le facteur de renormalisation [25].

La limite

$$\begin{aligned} \lim_{l \longrightarrow 0} \left(\frac{2\pi\hbar}{2l^2}\right)^{\frac{3}{2}} K_l^{\boldsymbol{\xi}}\left(\xi, t; \xi', t'\right) &= \left[\frac{m}{2\pi i\hbar\left(t-t'\right)}\right]^{\frac{3}{2}} \exp\left(-im\frac{\left(\mathbf{q}-\mathbf{q}'\right)^2}{2\hbar\left(t-t'\right)}\right) \\ &= K\left(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}', t'\right) \end{aligned} \tag{1.109}$$

montre que si le paramètre l caractérisant l'extension stochastique est négligé, on retrouve la formule du propagateur conventionnel. Le fait que le propagateur conventionnel constitue une limite ponctuelle du propagateur stochastique, confirme une fois encore que la théorie stochastique peut bien prétendre être une généralisation de la mécanique quantique conventionnelle. Remarquons aussi que, dans cette limite, le propagateur conventionnel apparaît comme le propagateur stochastique (parfaitement défini) renormalisé par une constante infinie. Cette infinité se manifeste lorsque l'on pose

$$\frac{m}{i\hbar 2\left(t-t'\right)}=\frac{1}{4\tau}\ ,\ \tau=t-t' \tag{1.110}$$

La formule (1.109) devient alors

$$K\left(\mathbf{q},t;\mathbf{q}',t'\right)=\left(\frac{1}{4\pi\tau}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{\left(\mathbf{q}-\mathbf{q}'\right)^{2}}{4\tau}\right) \tag{1.111}$$

et sachant que

$$\lim_{t\longrightarrow 0}f_{t}\left(\mathbf{x}\right)=\left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{\mathbf{x}^{2}}{4t}\right)=\ \delta\left(\mathbf{x}\right) \tag{1.112}$$

on trouve la distribution δ à la limite τ=0

$$\lim_{\tau\longrightarrow 0}K\left(\mathbf{q},t;\mathbf{q}',t'\right)=\delta\left(\mathbf{q}-\mathbf{q}'\right) \tag{1.113}$$

ce qui montre d'avantage le problème de divergence rencontré dans les propagateurs conventionnels.

La mécanique quantique stochastique ainsi décrite, peut être considérée comme généralisation de la mécanique quantique conventionnelle: mis-à-part les solutions aux problèmes de celle-ci, les résultats de la théorie stochastique tendent vers ceux de la mécanique quantique conventionnelle à la limite ponctuelle. Tous les résultats précédents ont été présentés dans le cadre de l'étude des particules scalaires. La question qui se pose tout de suite est: comment cette théorie va-t-elle s'appliquer aux particules possédant un spin. Cette question sera abordée au chapitre suivant où les résultats ont été trouvés grâce à un ensemble d'outils mathématiques liés à l'étude de la représentation espace des phases du groupe de Galilée G.

2

MECANIQUE QUANTIQUE STOCHASTIQUE POUR UNE PARTICULE LIBRE SPINORIELLE

2.1 Introduction

En théorie stochastique, la particule est représentée par une fonction d'onde $\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, et les fonctions $\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ représentent les fonctions d'onde propres du micro-détecteur [25]. Dans le chapitre précédent, la particule ainsi que le micro-détecteur étaient supposés sans spin. Dans ce chapitre, nous considérons un système particule+micro-détecteur dont le spin total est $\mathbf{J}$. L'étude de ce type de particules est directement liée à celle de la représentation espace des phases du groupe de Galilée G . Cette représentation est hautement réductible, d'où la nécessité de trouver ses sous-représentations irréductibles pour pouvoir décrire les particules élémentaires. La représentation espace des phases de spin total $\mathbf{J}$ est donnée par [1]

$$\begin{aligned}(U_J(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R)\psi)(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &= \exp\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2}(t-b) + m\mathbf{v}.(\mathbf{q}-\mathbf{a})\right) D^{\mathbf{J}}(R) \times \\ &\quad \psi\left(R^{-1}(\mathbf{q}-\mathbf{v}(t-b)-\mathbf{a}), R^{-1}(\mathbf{p}-m\mathbf{v}), t-b\right) \quad (2.1)\end{aligned}$$

où $D^{\mathbf{J}}(R)$ [11] est la matrice de rotation de spin $J = 0, \frac{1}{2}, 1, ...$ Le spin total du système $\mathbf{J} = \mathbf{j} + \mathbf{j}'$ est la somme du spin $\mathbf{j}$ de la particule et du spin $\mathbf{j}'$ du micro-détecteur. Le système évolue dans l'espace de Hilbert

$$H_J = l^2(2J+1) \otimes L^2(\Gamma); \quad \Gamma = \mathbb{R}^6 \quad (2.2)$$

L'étude de la décomposition de $H_{\mathbf{J}}$ et de $U_{\mathbf{J}}$ en composantes irréductibles peut être faite dans deux cas. Le premier consiste à considérer un spin total nul $J = 0$ correspondant à l'égalité des spins entiers [1] de la particule et du micro-détecteur ($\mathbf{j} = \mathbf{j}' = entier$). Le deuxième cas correspond au spin total $\mathbf{J}$ non nul et des spins entiers ou demi-entiers différents pour la particule et le micro-détecteur ($\mathbf{j} \neq \mathbf{j}'$). Ce cas constituera le sujet d'un autre mémoire et ne sera pas considéré dans ce travail. Dans le second paragraphe, on présentera la représentation espace des phases dans le cas où $\mathbf{J} = 0$ ainsi que ses sous-représentations irréductibles. Dans le troisième paragraphe, on étudiera les systèmes de covariance correspondants aux sous-espaces de représentations irréductibles. Dans le quatrième paragraphe, on s'intéressera aux probabilités et aux interprétations physiques. Dans le cinquième paragraphe on abordera le propagateur libre stochastique. Un sixième paragraphe sera consacré à l'application au cas du spin $j = 1$.

2.2 La représentation de spin total nul

Commençons par le premier cas $\mathbf{J} = 0$. Le système évolue donc dans l'espace de Hilbert

$$H_0 \simeq L^2(\Gamma) \tag{2.3}$$

et la représentation espace des phases s'écrit

$$\begin{aligned}(U_0(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R)\psi)(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &= \exp\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2}(t-b) + m\mathbf{v}.(\mathbf{q}-\mathbf{a})\right)\times \\ &\quad \psi\left(R^{-1}(\mathbf{q}-\mathbf{v}(t-b)-\mathbf{a}), R^{-1}(\mathbf{p}-m\mathbf{v}), t-b\right)\end{aligned} \tag{2.4}$$

Cette représentation est réductible et décomposable en somme directe de sous-représentations irréductibles [1]. Chaque sous-représentation irréductible est désignée par U_0^{nj} et le sous-espace correspondant par H_0^{nj} car ce dernier est construit en considérant une particule de spin entier $\mathbf{j}$ et un micro-détecteur de type n et de même spin $\mathbf{j}$. Insistons sur le fait que ce premier cas, $\mathbf{J} = 0$, ne permet pas de considérer des particules et des micro-détecteurs de même spin $\mathbf{j}$ demi-entier [1]. La particule est représentée dans l'espace des impulsions par la fonction $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{k})$ ayant $(2j+1)$ composantes $\tilde{\psi}_s(\mathbf{k})$ avec $\tilde{\psi}_s \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et $s = -j, ..., +j$. De même le micro-détecteur est représenté par la fonction $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{k})$ ayant $(2j+1)$ composantes $\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{k})$. Le sous-espace H_0^{nj} est constitué de la famille de toutes les fonctions de H_0 qui s'écrivent sous la forme suivante:

$$\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{k})\, \tilde{\psi}_s(\mathbf{k})\, d\mathbf{k} \tag{2.5}$$

La fonction d'onde propre du micro-détecteur $\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}$ s'écrit en coordonnées sphériques comme produit d'une composante radiale $e_n(|\mathbf{p}-\mathbf{k}|)$ et une composante angulaire $Y_{js}(\mathbf{p}-\mathbf{k})$. Les fonctions $e_n(|\mathbf{p}-\mathbf{k}|)$ appartiennent à l'espace $L^2_{\bar{\mu}}(\mathbb{R}^1)$ de toutes les fonctions $f(\mathbf{p})$ de carré sommable par rapport au module $p \in [0,\infty[$ de l'impulsion et à la mesure d'intégration $d\bar{\mu}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 d\mathbf{p}$. Les fonctions angulaires ne sont autres que les harmoniques sphériques avec une notation simplifiée

$$Y_{js}(\mathbf{k}) = Y_j^s(\mathbf{k}/|\mathbf{k}|); \qquad j = 0, 1, 2... \tag{2.6}$$

Ainsi, la fonction d'onde propre $\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}$ s'écrit

$$\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{k}) = \exp(\frac{i}{\hbar}\mathbf{q}.\mathbf{k}) e_n(|\mathbf{p}-\mathbf{k}|) Y_{js}(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \tag{2.7}$$

et les fonctions $\psi(\mathbf{q},\mathbf{p})$ peuvent être écrites sous la forme [1]

$$\psi_{nj}(\mathbf{q},\mathbf{p}) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} \exp(\frac{-i}{\hbar}\mathbf{q}.\mathbf{k}) e_n(|\mathbf{p}-\mathbf{k}|) Y^*_{js}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\, \tilde{\psi}_s(\mathbf{k})\, d\mathbf{k} \tag{2.8}$$

pour tout n et j fixés. La famille des fonctions ψ_{nj} constitue donc le sous-espace fermé H_0^{nj} de l'espace de Hilbert H_0. Chaque sous-espace H_0^{nj} est invariant sous la représentation $U_0(g)$. Notons $U_0^{nj}(g)$ la restriction de $U_0(g)$ à H_0^{nj}. L'espace H_0 est la somme directe de tous les sous-espaces orthogonaux H_0^{nj}

$$L^2(\Gamma) \simeq H_0 = \oplus_{n=1}^{\infty} \oplus_{j=0}^{\infty} H_0^{nj} \tag{2.9}$$

et la représentation $U_0(g)$ se décompose en somme directe des sous-représentations $U_0^{nj}(g)$

$$U_0(g) = \oplus_{n=1}^{\infty} \oplus_{j=0}^{\infty} U_0^{nj}(g) \tag{2.10}$$

Maintenant, il faut montrer l'irréductibilité des sous-représentations $U_0^{nj}(g)$ qui peut être vérifiée par plusieurs méthodes. L'une d'elles est l'équivalence des représentations: si une représentation est irréductible, toute autre représentation qui lui est équivalente sera irréductible aussi [21]. Par commodité, notons H_0^{nj} par $H_0^{\boldsymbol{\xi}}$ et $U_0^{nj}(g)$ par $U_0^{\boldsymbol{\xi}}(g)$. Considérons la représentation impulsion $\tilde{U}_j(g)$, qui est unitaire et irréductible, et une transformation $W_{\boldsymbol{\xi}}$

$$W_{\boldsymbol{\xi}} : \tilde{\boldsymbol{\psi}} \longrightarrow \psi_{\xi}\ , \tilde{\boldsymbol{\psi}} \in \tilde{H}_j\ ,\ \psi_{\xi} \in H_0^{\boldsymbol{\xi}} \tag{2.11}$$

qui relie les éléments de l'espace de Hilbert $\tilde{H}_j = L^2\left(\mathbb{R}^3_{imp}\right)$ des fonctions de carré sommable définies sur l'espace des impulsions, aux éléments de $H_0^{\boldsymbol{\xi}}$. La condition d'équivalence avec la représentation $U_0^{\xi}(g)$ s'écrit

$$U_0^{\boldsymbol{\xi}}(g) = W_{\boldsymbol{\xi}} \tilde{U}_j(g) W_{\boldsymbol{\xi}}^{-1} \tag{2.12}$$

Cette condition est vraie si et seulement si $W_{\boldsymbol{\xi}}$ est unitaire, c'est-à-dire que si $W_{\boldsymbol{\xi}}$ est une isométrie et si l'inverse $W_{\boldsymbol{\xi}}^{-1}$ existe

$$W_{\boldsymbol{\xi}}^{-1}W_{\boldsymbol{\xi}} = W_{\boldsymbol{\xi}}W_{\boldsymbol{\xi}}^{-1} = 1 \tag{2.13}$$

La condition de l'isométrie est vérifiée par l'égalité des produits scalaires dans les deux espaces $H_0^{\boldsymbol{\xi}}$ et $\tilde{H}_j$ [25]

$$\langle \psi_\xi | \psi_\xi \rangle_{H_0^{\boldsymbol{\xi}}} = \left\langle W_\xi \tilde{\boldsymbol{\psi}} | W_\xi \tilde{\boldsymbol{\psi}} \right\rangle_{H_0^{\boldsymbol{\xi}}} = \left\langle \tilde{\boldsymbol{\psi}} | \tilde{\boldsymbol{\psi}} \right\rangle_{\tilde{H}_j} \tag{2.14}$$

Concernant l'inverse W_ξ^{-1}, l'application W_ξ est linéaire et H_0^ξ constitue son image, de plus le noyau de cette transformation ($\ker(W_\xi)$) est égale à l'élément neutre de $\tilde{H}_j$. Par conséquent, W_ξ est une bijection et son inverse existe. Par ailleurs, son expression explicite [1]

$$\left(W_{\boldsymbol{\xi}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right)_s(\mathbf{k}) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \int_\Gamma d\mathbf{q}d\mathbf{p}\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{k})\,\psi_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{q},\mathbf{p}) \tag{2.15}$$

permet la vérification de la condition (2.12) et (2.13). Il s'ensuit que les représentations $U_0^\xi(g)$ et $\tilde{U}_j(g)$ sont équivalentes et que $U_0^\xi(g)$ est une représentation unitaire et irréductible. Il reste à vérifier que la décomposition (2.9) épuise effectivement tous les sous-espaces possibles [1]. Ceci dépasse le cadre de ce travail. Rappelons finalement que l'analyse précédente ne permet pas de considérer des particules et des micro-détecteurs de (même spin $\mathbf{j}$) demi-entier.

2.3 Système de covariance

Les systèmes de covariances sont un outil très important pour décrire le processus de mesure en mécanique quantique. Dans le cas de la représentation $U_0(g)$, la mesure (PV) $E_0(\Delta)$ avec [1]

$$(E_0(\Delta)\psi)(\mathbf{q},\mathbf{p},0) = \chi_\Delta(\mathbf{q},\mathbf{p})\psi(\mathbf{q},\mathbf{p},0) \qquad \Delta \subset \Gamma \tag{2.16}$$

donne un système de covariance$\{U_0, E_0\}$ pour le groupe de Galilée isochrone G', par contre la mesure (POV)

$$F_0(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(\Delta_t, t)\,dt,\; B \subset \bar{\Gamma} \tag{2.17}$$

$$E_0(\Delta_t, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}H_0 t\right) E_0(\Delta) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0 t\right) \tag{2.18}$$

$$\Delta_t = \{(\mathbf{q},\mathbf{p}) \,/\, (t,\mathbf{p},\mathbf{q}) \in B\} \subset \Gamma \tag{2.19}$$

donne un système de covariance pour tout le groupe de Galilée G. Nous allons nous limiter dans cette partie, au cas du groupe de Galilée isochrone G'.

Le système de covariance $\{U_0(g), E_0(\Delta)\}$, $g \in G'$, $\Delta \subset \Gamma$, est décomposable en somme directe de systèmes de covariances irréductibles $\left\{U_0^{\boldsymbol{\xi}}, E_0^{\boldsymbol{\xi}}\right\}$ [1]

$$E_0^{\boldsymbol{\xi}}(\Delta) = \int\limits_{\Delta} |U_0(0, \mathbf{q}, \mathbf{p}/m, I)\,\xi\rangle\, d\mathbf{q}d\mathbf{p}\, \langle U_0(0, \mathbf{q}, \mathbf{p}/m, I)\,\xi| \tag{2.20}$$

car $U_0(g)$ possède la décomposition (2.10) en sous-représentations irréductibles. Autrement dit, chaque sous-représentation irréductible $U_0^{\boldsymbol{\xi}}(g)$ agit dans le sous-espace $H_0^{\boldsymbol{\xi}}$ muni d'une mesure (POV) $E_0^{\xi}(\Delta)$ et chaque couple $\left\{U_0^{\xi}, E_0^{\xi}\right\}$ constitue un système de covariance dans ce sous-espace. Les mesures (POV) $E_0^{\boldsymbol{\xi}}(\Delta)$ possèdent des extensions $E_0(\Delta)$ qui sont des mesures (PV) et qui leurs sont liées par un projecteur $P_{\boldsymbol{\xi}}$ [1]

$$P_{\xi} = \int\limits_{\Gamma} \left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle d\mathbf{q}d\mathbf{p} \left\langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right| \tag{2.21}$$

$$E_0^{\boldsymbol{\xi}}(\Delta) = P_{\boldsymbol{\xi}} E_0(\Delta) P_{\boldsymbol{\xi}} \tag{2.22}$$

Ces extensions agissent dans $H_0 \supset H_0^{\boldsymbol{\xi}}$ et sont qualifiées de minimales, au sens où si $\mathbf{f}$ varie dans tout $H_0^{\boldsymbol{\xi}}$ et Δ varie sur tous les ensembles $Borel$, alors les vecteurs $E_0(\Delta)\,\mathbf{f}$ parcourent tout H_0. Notons aussi que cette extension minimale est unique à une transformation unitaire près. Du point de vue physique, ces mesures (PV) sont reliées à la localisation des systèmes classiques dans l'espace des phases. Par contre, l'interprétation physique des opérateurs $E_0^{\xi}(\Delta)$ est liée à la localisation des systèmes quantiques dans l'espace des phases stochastique Γ_{ξ}. Cette dernière interprétation de la localisation deviendra claire au paragraphe suivant et se basera sur les systèmes de covariances marginaux définis au moyen des mesures (POV) marginales suivantes [25]

$$\tilde{E}_0^{\boldsymbol{\xi}}\left(\tilde{\Delta}\right) = E_0^{\boldsymbol{\xi}}\left(\mathbb{R}^3_{conf} \times \tilde{\Delta}\right), \;\; \tilde{\Delta} \subset \mathbb{R}^3_{imp} \tag{2.23}$$

$$\hat{E}_0^{\boldsymbol{\xi}}\left(\hat{\Delta}\right) = E_0^{\boldsymbol{\xi}}\left(\hat{\Delta} \times \mathbb{R}^3_{imp}\right), \;\; \hat{\Delta} \subset \mathbb{R}^3_{conf} \tag{2.24}$$

Ces mesures (POV) donnent les systèmes de covariances $\left\{U_0(g), \tilde{E}_0^{\boldsymbol{\xi}}\right\}$ et $\left\{U_0(g), \hat{E}_0^{\boldsymbol{\xi}}\right\}$, $g \in G'$, à travers les ensembles Borel de l'espace des impulsions et de l'espace de configuration, respectivement. Pour $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = W_{\xi}^{-1}\boldsymbol{\xi} \in \tilde{H}_j$, on a [1]

$$(W_{\boldsymbol{\xi}}^{-1}\tilde{E}_0^{\boldsymbol{\xi}}\left(\tilde{\Delta}\right) W_{\xi}\tilde{\boldsymbol{\psi}})_s(\mathbf{k}) = (2\pi\hbar)^3 \sum_{s'=-j}^{+j} \int\limits_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p}\tilde{\xi}_s^*(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\tilde{\xi}_{s'}(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\tilde{\psi}_{s'}(\mathbf{k}) \tag{2.25}$$

De même, pour l'espace de configuration on a

$$(F_j^{-1} W_{\boldsymbol{\xi}}^{-1} \hat{E}_0^{\xi}\left(\hat{\Delta}\right) W_{\boldsymbol{\xi}} \hat{\boldsymbol{\psi}})_s\left(\mathbf{x}\right) = (2\pi\hbar)^3 \sum_{s'=-j}^{+j} \int_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q}\, \hat{\xi}_s^*\left(\mathbf{x}-\mathbf{q}\right) \hat{\xi}_{s'}\left(\mathbf{x}-\mathbf{q}\right) \tilde{\psi}_{s'}\left(\mathbf{x}\right) \qquad (2.26)$$

où F_j est la transformée de Fourier de l'espace de Hilbert $\hat{H}_j = L^2\left(\mathbb{R}^3_{conf}\right)$ des fonctions de carré sommable définies sur l'espace de configuration vers $\tilde{H}_j$

$$\tilde{\xi}_s\left(\mathbf{k}\right) = \left(F_j \hat{\boldsymbol{\xi}}\right)_s\left(\mathbf{k}\right) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{x}.\mathbf{k}\right) \hat{\xi}_s\left(\mathbf{x},0\right) d\mathbf{x} \qquad (2.27)$$

Les formules (2.25) et (2.26) sont déduites à partir des formules

$$\left(W_{\xi}\tilde{\boldsymbol{\psi}}\right)\left(\mathbf{q},\mathbf{p}\right) = \sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}\left(\mathbf{k}\right) \tilde{\psi}_s\left(\mathbf{k}\right) d\mathbf{k} \qquad (2.28)$$

$$\left(W_{\xi}^{-1}\psi\right)_s\left(\mathbf{k}\right) = \int_{\Gamma} \tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}\left(\mathbf{k}\right) \psi\left(\mathbf{q},\mathbf{p}\right) d\mathbf{q}d\mathbf{p} \qquad (2.29)$$

en introduisant la propriété [25]

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s} &= \left(\tilde{U}_j\left(0,\mathbf{q},\mathbf{p}/m,I\right)\tilde{\boldsymbol{\xi}}\right)_s\left(\mathbf{k}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{q}.\mathbf{k}\right) \tilde{\xi}_s\left(\mathbf{k}-\mathbf{p}\right) \end{aligned} \qquad (2.30)$$

des fonctions ξ.

2.4 Probabilité

La probabilité est définie comme la valeur moyenne de l'opérateur positif $E_0^{\boldsymbol{\xi}}\left(\Delta\right)$

$$\begin{aligned} P_{\psi_\xi}\left(\Delta\right) &= \left\langle \psi_\xi \right| E_0^{\boldsymbol{\xi}}\left(\Delta\right) \left|\psi_\xi\right\rangle \\ &= \int_{\Delta=\hat{\Delta}\times\tilde{\Delta}} d\mathbf{q}d\mathbf{p}\psi_\xi\left(\mathbf{q},\mathbf{p}\right)\psi_\xi^*\left(\mathbf{q},\mathbf{p}\right) \end{aligned} \qquad (2.31)$$

Les probabilités marginales sont les valeurs moyennes des mesures (POV) marginales $\tilde{E}_0^{\boldsymbol{\xi}}\left(\tilde{\Delta}\right)$ et $\hat{E}_0^{\boldsymbol{\xi}}\left(\hat{\Delta}\right)$

$$P_{\psi_\xi}\left(\tilde{\Delta}\right) = \left\langle \psi_\xi \right| \tilde{E}_0^{\xi}\left(\tilde{\Delta}\right) \left|\psi_\xi\right\rangle \qquad (2.32)$$

$$P_{\psi_\xi}\left(\hat{\Delta}\right) = \left\langle \psi_\xi \right| \hat{E}_0^{\xi}\left(\tilde{\Delta}\right) \left|\psi_\xi\right\rangle \qquad (2.33)$$

L'étude de ces probabilités présente deux cas, le premier cas est celui d'un spin de la particule bien défini et parfaitement aligné avec celui du micro-détecteur. Dans le deuxième cas, le spin de la particule prend une direction quelconque par rapport au spin du micro-détecteur.

Commençons par le premier cas où l'amplitude de probabilité de spin $\hat{\psi}_s(\mathbf{x})$ est parfaitement alignée en tout point $x \in \mathbb{R}^3_{conf}$ avec l'axe des coordonnées stochastiques sur lequel le spin est mesuré [1]. Cet axe coïncide avec le spin du micro-détecteur de sorte qu'une seule composante de $\tilde{\boldsymbol{\psi}}\left(\mathbf{k}\right)$ est non nulle. Les probabilités marginales s'écrivent dans ce cas

$$\begin{aligned} P_{\psi_\xi}\left(\tilde{\Delta}\right) &= P_{\psi_\xi}\left(\mathbb{R}^3_{conf} \times \tilde{\Delta}\right) \\ &= \int\limits_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p} \int\limits_{\mathbb{R}^3_{conf}} d\mathbf{q}\ \psi^*(\mathbf{q},\mathbf{p})\psi(\mathbf{q},\mathbf{p}) \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned} P_{\psi_\xi}\left(\hat{\Delta}\right) &= P_{\psi_\xi}\left(\hat{\Delta} \times \mathbb{R}^3_{imp}\right) \\ &= \int\limits_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q} \int\limits_{\mathbb{R}^3_{imp}} d\mathbf{p}\ \psi^*(\mathbf{q},\mathbf{p})\psi(\mathbf{q},\mathbf{p}) \end{aligned} \tag{2.35}$$

En utilisant (1.16), (1.17) et leurs conjuguées complèxes respectives dans les expressions des probabilités marginales pour la représentation impulsion et la représentation configuration respectivement, on trouve

$$P_{\psi_\xi}\left(\tilde{\Delta}\right) = \int\limits_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p} \int\limits_{\mathbb{R}^3_{conf}} d\mathbf{q} \int\limits_{\mathbb{R}^6} d\mathbf{k}d\mathbf{k}'\ \tilde{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}\left(\mathbf{k}\right)\tilde{\psi}_s\left(\mathbf{k}\right)\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}\left(\mathbf{k}'\right)\tilde{\psi}^*_s\left(\mathbf{k}'\right) \tag{2.36}$$

$$P_{\psi_\xi}\left(\hat{\Delta}\right) = \int\limits_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q} \int\limits_{\mathbb{R}^3_{imp}} d\mathbf{p} \int\limits_{\mathbb{R}^6} d\mathbf{x}d\mathbf{x}'\ \hat{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}\left(\mathbf{x}\right)\hat{\psi}_s\left(\mathbf{x}\right)\hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}\left(\mathbf{x}'\right)\hat{\psi}^*_s\left(\mathbf{x}'\right) \tag{2.37}$$

Si l'on introduit en plus les propriétés (1.18) et (1.19) des fonctions d'ondes propres $\hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}\left(\mathbf{x}\right)$ et $\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}\left(\mathbf{k}\right)$, on déduit que

$$\begin{aligned} P_{\psi_\xi}\left(\tilde{\Delta}\right) = & \int\limits_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p} \int\limits_{\mathbb{R}^3_{conf}} d\mathbf{q}\ \times \\ & \int\limits_{\mathbb{R}^6} d\mathbf{k}d\mathbf{k}' \exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\mathbf{q}}.\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right)\right)\ \tilde{\xi}^*\left(\mathbf{k}-\mathbf{p}\right)\tilde{\psi}_s\left(\mathbf{k}\right)\tilde{\xi}\left(\mathbf{k}'-\mathbf{p}\right)\tilde{\psi}^*_s\left(\mathbf{k}'\right) \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned} P_{\psi_\xi}\left(\hat{\Delta}\right) = & \int\limits_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q} \int\limits_{\mathbb{R}^3_{imp}} d\mathbf{p} \times \\ & \int\limits_{\mathbb{R}^6} d\mathbf{x}d\mathbf{x}' \exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\mathbf{p}}.\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right)\right)\hat{\xi}^*\left(\mathbf{x}-\mathbf{q}\right)\hat{\psi}_s\left(\mathbf{x}\right)\hat{\xi}\left(\mathbf{x}'-\mathbf{q}\right)\hat{\psi}^*_s\left(\mathbf{x}'\right) \end{aligned} \tag{2.39}$$

L'intégrale des fonctions en exponentielle par rapport à $d\mathbf{q}$ dans la première formule, et par rapport à $d\mathbf{p}$ dans la deuxième formule, permet d'avoir

$$P_{\boldsymbol{\psi}_\xi}\left(\tilde{\Delta}\right) = \int\limits_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}\,(2\pi\hbar)^{-3}\left|\tilde{\xi}\left(\mathbf{k}-\mathbf{p}\right)\right|^2\left|\tilde{\psi}_s\left(\mathbf{k}\right)\right|^2 \tag{2.40}$$

$$P_{\boldsymbol{\psi}_\xi}\left(\tilde{\Delta}\right) = \int\limits_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x}\,(2\pi\hbar)^{-3}\left|\hat{\xi}\left(\mathbf{x}-\mathbf{q}\right)\right|^2\left|\hat{\psi}_s\left(\mathbf{x}\right)\right|^2 \tag{2.41}$$

car

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{q}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\mathbf{q}}.\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right)\right) = (2\pi\hbar)^3\,\delta\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right) \tag{2.42}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\mathbf{p}}.\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right)\right) = (2\pi\hbar)^3\,\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right) \tag{2.43}$$

En posant

$$\chi_{\mathbf{p},s}\left(\mathbf{k}\right) = (2\pi\hbar)^3\left|\tilde{\xi}\left(\mathbf{k}-\mathbf{p}\right)\right|^2 \tag{2.44}$$

$$\chi_{\mathbf{q},s}\left(\mathbf{x}\right) = (2\pi\hbar)^3\left|\hat{\xi}\left(\mathbf{x}-\mathbf{q}\right)\right|^2 \tag{2.45}$$

les formules des probabilités marginales deviennent [1]

$$P_{\psi_\xi}\left(\tilde{\Delta}\right) = \int\limits_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}\chi_{\mathbf{p},s}\left(\mathbf{k}\right)\left|\tilde{\psi}_s\left(\mathbf{k}\right)\right|^2 \tag{2.46}$$

$$P_{\psi_\xi}\left(\hat{\Delta}\right) = \int\limits_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x}\chi_{\mathbf{q},s}\left(\mathbf{x}\right)\left|\hat{\psi}_s\left(\mathbf{x}\right)\right|^2 \tag{2.47}$$

Comme dans le premier chapitre, $\chi_{\mathbf{p},s}\left(\mathbf{k}\right)$ est la densité de probabilité que la mesure de l'impulsion donne le résultat $\mathbf{p}$ quand la particule possède l'impulsion $\mathbf{k}$, et $\chi_{\mathbf{q},s}\left(\mathbf{x}\right)$ est la densité de probabilité que la mesure de la position donne le résultat $\mathbf{q}$ quand la particule se trouve en $\mathbf{x}$. Comme la fonction d'onde possède une seule composante non nulle, $\left|\tilde{\psi}_s\left(\mathbf{k}\right)\right|^2$ est la densité de probabilité que la particule possède l'impulsion $\mathbf{k}$ et $\left|\hat{\psi}_s\left(\mathbf{x}\right)\right|^2$ est la densité de probabilité que la particule soit à la position $\mathbf{x}$. Par conséquent, les relations (2.46) et (2.47) gardent la même interprétation que dans le premier chapitre mais pour une particule de spin non nul. Autrement dit, ce sont les probabilités que la mesure de la position donne la valeur $\mathbf{q}$ dans $\hat{\Delta}$ et celle de l'impulsion donne la valeur $\mathbf{p}$ dans $\tilde{\Delta}$. Ces valeurs sont obtenues quand le micro-détecteur est une particule étendue de fonction propre $\boldsymbol{\xi}$ et le spin de la particule observée est dirigé dans la même direction et le même sens que ceux du spin du micro-détecteur. Pour chaque valeur $\mathbf{q}$ obtenue, la densité de probabilité que la position réelle soit $\mathbf{x}$ est donnée par la fonction de confiance $\chi_{\mathbf{q},s}(\mathbf{x})$. Il en est de même des impulsions $\mathbf{p}$, $\mathbf{k}$ et de la densité $\chi_{\mathbf{p},s}(\mathbf{k})$. La relation (2.31) représente alors la probabilité d'observer les valeurs stochastiques $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in \Delta$ pour une mesure simultanée de la position et de l'impulsion de ce type de particule.

En générale, l'amplitude de probabilité $\hat{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x})$ est une matrice à une colonne à $(2j+1)$ composantes $\hat{\psi}_s(\mathbf{x})$ [1]. Le spin de la particule système prend ainsi une direction quelconque par rapport à l'axe de coordonnées stochastiques sur lequel il est mesuré. La fonction d'onde prend alors la forme (2.5). En introduisant la relation (2.5) dans (2.34), et la relation

$$\psi(\mathbf{q},\mathbf{p}) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{x})\, \hat{\psi}_s(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \tag{2.48}$$

dans la relation (2.35), et leurs conjuguées complèxes respectives, on obtient les expressions des probabilités marginales dans les espaces impulsion et configuration

$$P_{\psi_\xi}\left(\tilde{\Delta}\right) = \int_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{q} \left[\sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{k})\, \tilde{\psi}_s(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}\right] \left[\sum_{s'=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s'}(\mathbf{k}')\, \tilde{\psi}^*_{s'}(\mathbf{k}')\, d\mathbf{k}'\right] \tag{2.49}$$

$$P_{\psi_\xi}\left(\hat{\Delta}\right) = \int_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p} \left[\sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{x})\, \hat{\psi}_s(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\right] \left[\sum_{s'=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s'}(\mathbf{x}')\, \hat{\psi}^*_{s'}(\mathbf{x}')\, d\mathbf{x}'\right] \tag{2.50}$$

Introduisons encore les propriétés (1.18) et (1.19) des fonctions d'ondes propres $\hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{x})$ et $\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{k})$. Après quelques réarrangements, et en tenant compte des relations (2.42) et (2.43), on obtient

$$P_{\psi_\xi}\left(\tilde{\Delta}\right) = \sum_{s,s'=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \left[\int_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p} \tilde{\xi}^*_s(\mathbf{k}-\mathbf{p})\, \tilde{\xi}_{s'}(\mathbf{k}-\mathbf{p})\right] \tilde{\psi}^*_{s'}(\mathbf{k})\, \tilde{\psi}_s(\mathbf{k}) \tag{2.51}$$

$$P_{\psi_\xi}\left(\hat{\Delta}\right) = \sum_{s,s'=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \left[\int_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q}\, \hat{\xi}^*_s(\mathbf{x}-\mathbf{q})\, \hat{\xi}_{s'}(\mathbf{x}-\mathbf{q})\right] \hat{\psi}^*_{s'}(\mathbf{x})\, \hat{\psi}_s(\mathbf{x}) \tag{2.52}$$

En posant [1]

$$f^{\tilde{\Delta}}_{ss'}(\mathbf{k}) = \int_{\Delta_k} d\mathbf{p}' \tilde{\xi}_s(\mathbf{p}')\, \tilde{\xi}^*_{s'}(\mathbf{p}') \tag{2.53}$$

$$f^{\hat{\Delta}}_{ss'}(\mathbf{x}) = \int_{\Delta_x} d\mathbf{q}' \hat{\xi}_s(\mathbf{q}')\, \hat{\xi}^*_{s'}(\mathbf{q}') \tag{2.54}$$

où

$$\mathbf{q}' = \mathbf{x}-\mathbf{q} \;,\; \Delta_{\mathbf{x}} = \mathbf{x}-\hat{\Delta} \tag{2.55}$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{k}-\mathbf{p} \;,\; \Delta_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}-\tilde{\Delta} \tag{2.56}$$

les probabilités marginales deviennent

$$P_{\psi_\xi}\left(\hat{\Delta}\right) = \sum_{s,s'=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\psi}_s^*(\mathbf{x})\; f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}) \hat{\psi}_{s'}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{2.57}$$

$$P_{\psi_\xi}\left(\tilde{\Delta}\right) = \sum_{s,s'=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\psi}_s^*(\mathbf{k})\; f_{ss'}^{\tilde{\Delta}}(\mathbf{k}) \tilde{\psi}_{s'}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \tag{2.58}$$

Les fonctions f possèdent les limites suivantes

$$\lim_{\hat{\Delta}\longrightarrow\mathbb{R}^3} f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}) = \delta_{ss'} \tag{2.59}$$

$$\lim_{\tilde{\Delta}\longrightarrow\mathbb{R}^3} f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{k}) = \delta_{ss'} \tag{2.60}$$

et servent à définir les fonctions de distribution de spin [1]

$$\chi_s^{\Delta_{\mathbf{x}}}(s') = \left\| f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}) \right\|^2 \left(\sum_{s'=-j}^{+j} \left| f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}) \right|^2 \right)^{-1} \tag{2.61}$$

$$\chi_s^{\Delta_{\mathbf{k}}}(s') = \left\| f_{ss'}^{\tilde{\Delta}}(\mathbf{k}) \right\|^2 \left(\sum_{s'=-j}^{+j} \left| f_{ss'}^{\tilde{\Delta}}(\mathbf{k}) \right|^2 \right)^{-1} \tag{2.62}$$

qui vérifient les relations de normalisation suivantes [**?**]:

$$\sum_{s'=-j}^{+j} \chi_s^{\Delta_{\mathbf{x}}}(s') = \sum_{s=-j}^{+j} \chi_s^{\Delta_{\mathbf{x}}}(s') = 1 \tag{2.63}$$

$$\sum_{s'=-j}^{+j} \chi_s^{\Delta_{\mathbf{k}}}(s') = \sum_{s=-j}^{+j} \chi_s^{\Delta_{\mathbf{k}}}(s') = 1 \tag{2.64}$$

Ces relations de normalisation permettent d'interpréter $\chi_s^{\Delta_x}(s')$ et $\chi_s^{\Delta_{\mathbf{k}}}(s')$ comme des fonctions de confiance du spin stochastique $s = (s, \chi_s)$. Le sens physique de ces fonctions de confiance est le suivant:

Supposant que l'on définisse un système de référence classique par des particules ponctuelles, l'une désigne l'origine et les autres les extrémités des vecteurs de base. Cette définition n'est plus possible en mécanique quantique conventionnelle car il faudra connaître à chaque instant la position et l'impulsion exactes de ces particules et contredire ainsi le principe d'incertitude. Si l'on remplace ces particules par des particules d'essai stochastiques de fonction d'onde propre ξ, cela devient possible car leurs positions et impulsions ne sont jamais déterminées avec exactitude. Cependant, le système de référence ainsi défini n'est pas rigide et possède des fluctuations autour du système classique de l'ordre de grandeur de l'étendue des fonctions ξ. La mesure du spin par rapport au système quantique ne donne jamais une valeur exacte mais une distribution de valeurs. La relation (2.57) contient les termes pour lesquels $s = s'$ trouvés dans le cas où les spins de la particule et du micro-détecteur sont parfaitement alignés, mais aussi des termes supplémentaires pour lesquels $s \neq s'$ et qui reflètent l'effet des fluctuations du spin par rapport à l'axe de coordonnées stochastiques sur lequel il est mesuré sur la mesure de la position [1]. En effet, notons que si l'amplitude de probabilité $\hat{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x})$ est telle que $\hat{\psi}_s(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $s \neq s'$, l'effet des fluctuations disparaît, et la relation (2.57) prend la forme (2.47). Un raisonnement analogue peut être fait pour les relations (2.58) et (2.46) correspondant à la mesure de l'impulsion.

Notons aussi que ces interprétations sont compatibles avec la limite conventionnelle, car la fonction $f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x})$ tend vers le produit du symbole de Kronecker avec la fonction caractéristique [1]

$$f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}) \longrightarrow \delta_{ss'}\chi_{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}) \tag{2.65}$$

Par conséquent, la probabilité stochastique tend vers la probabilité conventionnelle

$$P_{\psi_\xi}\left(\hat{\Delta}\right) \longrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left|\hat{\psi}_s(\mathbf{x})\right|^2 d\mathbf{x} \tag{2.66}$$

2.5 Propagateur

Le propagateur libre stochastique pour une particule système de spin nul est défini par la relation suivante

$$K^\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t') = \left\langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \right| U(t - t') \left| \xi_{\mathbf{q}',\mathbf{p}'} \right\rangle \tag{2.67}$$

L'opérateur évolution $U(t - t')$ est écrit dans la représentation espace des phases

$$U(t - t') = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2m}(t - t')\right) \tag{2.68}$$

où $\mathbf{P} = -i\hbar\nabla_{\mathbf{q}}$. Ce propagateur possède les propriétés habituelles des propagateurs qui sont l'unitarité de l'évolution [25]

$$K^\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t') = K^{\xi *}(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t'; \mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \tag{2.69}$$

et la reproductibilité (reproducing)

$$K^{\xi}\left(\mathbf{q},\mathbf{p},t;\mathbf{q}',\mathbf{p}',t'\right)=\int_{\Gamma}K^{\xi}\left(\mathbf{q},\mathbf{p},t;\mathbf{q}'',\mathbf{p}'',t''\right)K^{\xi}\left(\mathbf{q}",\mathbf{p}",t";\mathbf{q}',\mathbf{p}',t'\right)d\mathbf{q}"d\mathbf{p}" \tag{2.70}$$

De plus, à chaque instant ($t=0$ par exemple), le projecteur P^{ξ} doit être un opérateur intégral de noyau $K^{\xi}\left(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{q}',\mathbf{p}'\right)=K^{\xi}\left(\mathbf{q},\mathbf{p},0;\mathbf{q}',\mathbf{p}',0\right)$

$$\left(P^{\xi}\psi\right)(\mathbf{q},\mathbf{p})=\int_{\Gamma}K^{\xi}\left(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{q}',\mathbf{p}'\right)\psi\left(\mathbf{q}',\mathbf{p}'\right)d\mathbf{q}'d\mathbf{p}' \tag{2.71}$$

ce qui implique que H^{ξ} est un espace de Hilbert à noyau reproductible (reproducing kernel Hilbert space) [40].

Pour la particule de spin j, nous retenons évidemment la même définition du propagateur tant que le spin de la représentation espace des phases est nul. En exprimant l'opérateur évolution (2.68) et les vecteurs d'état propres stochastiques dans la représentation impulsion (invariance du produit salaire), on obtient

$$K^{\xi}\left(\mathbf{q},\mathbf{p},t;\mathbf{q}',\mathbf{p}',t'\right)=\left\langle\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{\tilde{\mathbf{P}}^{2}}{2m}(t-t')\right)\left|\tilde{\xi}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}'}\right\rangle \tag{2.72}$$

L'application de la définition du produit scalaire dans cette représentation donne

$$\begin{aligned}K^{\xi}\left(\mathbf{q},\mathbf{p},t;\mathbf{q}',\mathbf{p}',t'\right) &= \sum_{s=-j}^{+j}\int_{\mathbb{R}^3}d\mathbf{k}\;\tilde{\xi}^{*}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{k})\left(\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{\tilde{\mathbf{P}}^{2}}{2m}(t-t')\right)\tilde{\xi}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}'}\right)_{s}(\mathbf{k})\\ &= \sum_{s=-j}^{+j}\int_{\mathbb{R}^3}d\mathbf{k}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{\mathbf{k}^{2}}{2m}(t-t')\right)\tilde{\xi}^{*}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{k})\;\tilde{\xi}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}',s}(\mathbf{k})\end{aligned} \tag{2.73}$$

Ce propagateur contient $(2j+1)$ termes et représente l'amplitude de probabilité que la particule, ayant été préparée aux coordonnées stochastiques $(\mathbf{q},\mathbf{p})$ à l'instant t, soit détectée en $(\mathbf{q}',\mathbf{p}')$ à l'instant t' sans que s change de valeur.

Si l'on remplace les fonctions d'onde propres stochastiques par leurs expressions (2.7) dans le relation (2.73), on obtient

$$\begin{aligned}K^{\xi}\left(\mathbf{q},\mathbf{p},t;\mathbf{q}',\mathbf{p}',t'\right) &= \sum_{s=-j}^{+j}[\int_{\mathbb{R}^3}d\mathbf{k}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{\mathbf{k}^{2}}{2m}(t-t')\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left[(\mathbf{q}'-\mathbf{q}).\mathbf{k}\right]\right)\times\\ & e_{n}^{*}(|\mathbf{p}-\mathbf{k}|)e_{n}(|\mathbf{p}'-\mathbf{k}|)Y^{*}_{js}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\,Y_{js}(\mathbf{p}'-\mathbf{k})]\end{aligned} \tag{2.74}$$

Comme la sommation sur l'indice s ne concerne que les harmoniques sphériques, on utilise alors le théorème d'addition des harmoniques sphériques [38]. Le propagateur libre stochastique prend la forme

$$\begin{aligned} K^{\xi}(\mathbf{q},\mathbf{p},t;\mathbf{q}',\mathbf{p}',t') &= \frac{2j+1}{4\pi(2\pi\hbar)^3}[\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left[(\mathbf{q}'-\mathbf{q}).\mathbf{k}-\frac{\mathbf{k}^2}{2m}(t-t')\right]\right)\times \\ & P_j\left(\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{k}).(\mathbf{p}'-\mathbf{k})}{|\mathbf{p}-\mathbf{k}|\,|\mathbf{p}'-\mathbf{k}|}\right)e_n^*(|\mathbf{p}-\mathbf{k}|)e_n(|\mathbf{p}'-\mathbf{k}|)] \end{aligned} \tag{2.75}$$

où P_j est un polynôme de Legendre d'ordre j.

2.6 Application au cas du spin $j = 1$

Illustrons les résultats précédents par une application au cas du spin $j = 1$ tout en rappelant que les spins demi-entiers ne sont pas admissibles. Considérons une particule système de spin $j = 1$ représentée dans l'espace des impulsions par une fonctions $\tilde{\psi}(\mathbf{k})$ ayant trois composantes $\hat{\psi}_{-1}(\mathbf{k})$, $\hat{\psi}_0(\mathbf{k})$ et $\hat{\psi}_{+1}(\mathbf{k})$. De même, le micro-détecteur est représenté par une fonction $\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{k})$ ayant trois composantes aussi $\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},-1}(\mathbf{k})$, $\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},0}(\mathbf{k})$ et $\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},+1}(\mathbf{k})$. Alors, le sous-espace irréductible H_0^{n1} est constitué de la famille de fonctions

$$\psi(\mathbf{q},\mathbf{p}) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}}\sum_{s=-1}^{+1}\int_{\mathbb{R}^3}\tilde{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{k})\,\tilde{\psi}_s(\mathbf{k})\,d\mathbf{k} \tag{2.76}$$

qui peut être réécrite en considérant la fonction d'onde propre du micro-détecteur $\tilde{\xi}^*_{q,p,s}(\mathbf{k})$ en coordonnées sphériques

$$\psi_{n1}(\mathbf{q},\mathbf{p}) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}}\sum_{s=-1}^{+1}\int_{\mathbb{R}^3}\exp(\frac{-i}{\hbar}\mathbf{q}.\mathbf{k})e_n(|\mathbf{p}-\mathbf{k}|)Y^*_{1s}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\,\tilde{\psi}_s(\mathbf{k})\,d\mathbf{k} \tag{2.77}$$

Passons maintenant au système de covariance. Celui-ci garde la même forme que celle donnée en (2.20) mais s'expriment comme suit, pour $\tilde{\xi} = W_{\xi}^{-1}\xi \in \tilde{H}_1$

$$(W_{\boldsymbol{\xi}}^{-1}\tilde{E}_0^{\boldsymbol{\xi}}\left(\tilde{\Delta}\right)W_{\xi}\tilde{\boldsymbol{\psi}})_s(\mathbf{k}) = (2\pi\hbar)^3\sum_{s'=-1}^{+1}\int_{\tilde{\Delta}}d\mathbf{p}\tilde{\xi}^*_s(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\tilde{\xi}_{s'}(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,\tilde{\psi}_{s'}(\mathbf{k}) \tag{2.78}$$

Pour l'espace de configuration, on a

$$(F_1^{-1}W_{\boldsymbol{\xi}}^{-1}\hat{E}_0^{\xi}\left(\hat{\Delta}\right)W_{\boldsymbol{\xi}}\hat{\boldsymbol{\psi}})_s(\mathbf{x}) = (2\pi\hbar)^3\sum_{s'=-1}^{+1}\int_{\hat{\Delta}}d\mathbf{q}\;\hat{\xi}^*_s(\mathbf{x}-\mathbf{q})\,\hat{\xi}_{s'}(\mathbf{x}-\mathbf{q})\,\tilde{\psi}_{s'}(\mathbf{x}) \tag{2.79}$$

où F_1 est la transformée de Fourrier de l'espace de Hilbert $\hat{H}_1 = L^2\left(\mathbb{R}^3_{conf}\right)$ des fonctions de carré sommable définies sur l'espace de configuration (représentant des particules ayant un spin $j = 1$) vers $\tilde{H}_1$

$$\tilde{\xi}_s(\mathbf{k}) = \left(F_1\hat{\boldsymbol{\xi}}\right)_s(\mathbf{k}) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{x}.\mathbf{k}\right)\hat{\xi}_s(\mathbf{x},0)\,d\mathbf{x} \tag{2.80}$$

Concernant les probabilités, nous allons présenter les résultats pour les deux cas traités auparavant. Commençons par le premier cas, où l'axe de coordonnées stochastiques sur lequel le spin est mesuré coïncide avec celui-ci, de sorte qu'une seule composante de $\tilde{\psi}(\mathbf{k})$ soit non nulle. Soit $\hat{\psi}_{+1}(\mathbf{k})$ cette composante. Ainsi, les probabilités marginales prennent les formes suivantes

$$P_{\boldsymbol{\psi}_\xi}\left(\tilde{\Delta}\right) = \int\limits_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p}\int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}\,(2\pi\hbar)^{-3}\left|\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},+1}(\mathbf{k}-\mathbf{p})\right|^2\left|\tilde{\psi}_{+1}(\mathbf{k})\right|^2 \tag{2.81}$$

$$P_{\boldsymbol{\psi}_\xi}\left(\hat{\Delta}\right) = \int\limits_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q}\int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x}\,(2\pi\hbar)^{-3}\left|\hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},+1}(\mathbf{x}-\mathbf{q})\right|^2\left|\hat{\psi}_{+1}(\mathbf{x})\right|^2 \tag{2.82}$$

et les fonctions de confiance prennent les formes

$$\chi_{\mathbf{p},+1}(\mathbf{k}) = (2\pi\hbar)^{-3}\left|\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},+1}(\mathbf{k}-\mathbf{p})\right|^2 \tag{2.83}$$

$$\chi_{\mathbf{q},+1}(\mathbf{x}) = (2\pi\hbar)^{-3}\left|\hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},+1}(\mathbf{x}-\mathbf{q})\right|^2 \tag{2.84}$$

Les relations (2.81) et (2.82) représentent les probabilités que la mesure de l'impulsion, respectivement de la position, donne la valeur p dans $\tilde{\Delta}$, respectivement q dans $\hat{\Delta}$, quand le micro-détecteur est une particule étendue de spin $j = 1$ avec projection $s = 1$ et la particule système possède le même spin j orienté dans le même sens et la même direction.

Passons maintenant au cas général où l'amplitude de probabilité $\tilde{\psi}(\mathbf{k})$ est un vecteur ayant les trois composantes $\hat{\psi}_s(\mathbf{k})$ avec $-1 \leq s \leq +1$. Le spin de la particule système prend une direction quelconque par rapport au spin du micro-détecteur. Les probabilités marginales deviennent

$$P_{\psi_\xi}\left(\hat{\Delta}\right) = \sum_{s,s'=-1}^{+1}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\hat{\psi}_s^*(\mathbf{x})\;f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x})\hat{\psi}_{s'}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \tag{2.85}$$

$$P_{\psi_\xi}\left(\tilde{\Delta}\right) = \sum_{s,s'=-1}^{+1}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\tilde{\psi}_s^*(\mathbf{k})\;f_{ss'}^{\tilde{\Delta}}(\mathbf{k})\tilde{\psi}_{s'}(\mathbf{k})d\mathbf{k} \tag{2.86}$$

Les fonctions f gardent les même formes (2.53) et (2.54) sauf que s ne prend que les valeurs $-1, 0, +1$. On remarque que chaque probabilité marginale est une somme de neuf termes. Les termes pour lesquels $s = s'$ représentent la probabilité sur la mesure de la position (respectivement de l'impulsion) dans le cas où le spin de la particule système et celui du micro-détecteur sont parfaitement alignés. Les autres termes où $s \neq s'$, reflètent l'effet des fluctuations du spin par rapport à l'axe de coordonnées stochastiques. A leur tour, les fonctions de confiance du spin stochastique gardent les mêmes formes (2.61) et (2.62) avec $-1 \leq s \leq +1$. Ainsi, on a neuf fonctions de confiance, chacune définie pour un couple (s, s') et représente la fonction de distribution du spin stochastique (s, χ_s) avec $-1 \leq s \leq +1$.

En ce qui concerne le propagateur libre stochastique, dans le cas où le spin $j = 1$, il s'exprime comme suit

$$K^{\xi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t') = \sum_{s=-1}^{+1} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{\mathbf{k}^2}{2m}(t-t')\right) \tilde{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{k}) \ \tilde{\xi}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}',s}(\mathbf{k}) \tag{2.87}$$

Ce propagateur comprend trois termes propres aux trois valeurs que peut prendre s. Il garde la même interprétation que celle donnée au paragraphe précédent. La relation (2.75) devient dans ce cas

$$\begin{aligned} K^{\xi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t') \quad = \quad & \frac{3}{4\pi (2\pi\hbar)^3}[\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left[(\mathbf{q}'-\mathbf{q}).\mathbf{k} - \frac{\mathbf{k}^2}{2m}(t-t')\right]\right) \times \\ & P_1\left(\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{k}).(\mathbf{p}'-\mathbf{k})}{|\mathbf{p}-\mathbf{k}|\,|\mathbf{p}'-\mathbf{k}|}\right) e_n^*(|\mathbf{p}-\mathbf{k}|)e_n(|\mathbf{p}'-\mathbf{k}|)] \end{aligned} \tag{2.88}$$

où P_1 est le polynôme de Legendre d'ordre 1.

3

PARTICULE SPINORIELLE STOCHASTIQUEMENT ET INTRINSEQUEMENT ETENDUE

3.1 Introduction

La théorie stochastique pour les particules spinorielles décrite dans le chapitre précédent, est basée sur un principe qui prend en compte l'imperfection de l'appareil de mesure [29]. Ainsi, les grandeurs physiques que l'on mesure comme la position $\mathbf{q}$ ou l'impulsion $\mathbf{p}$ sont déterminés par des fonctions de confidence $\chi_{\mathbf{q}}$, $\chi_{\mathbf{p}}$ et χ_s^{Δ} qui dépendent des fonctions $\boldsymbol{\xi}$. Une fonction $\boldsymbol{\xi}$ est un vecteur d'état propre d'un micro-détecteur au repos stochastique à l'origine d'un système d'inertie, tandis que les fonctions $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ représentent un état de la même particule à une position stochastique $(\mathbf{q}, \chi_{\mathbf{q}})$, possédant une impulsion stochastique $(\mathbf{p}, \chi_{\mathbf{p}})$ [30].

Contrairement à la théorie stochastique, la théorie fonctionnelle [12, 13] introduit un autre type d'extension à la particule élémentaire. Cette théorie introduite par Destouches, exclut la notion de particule ponctuelle et la remplace par une particule étendue qui possède des caractéristiques internes influençables par l'environnement extérieur. L'effet du milieu extérieur est exprimé par un champ $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ qui agit sur la particule, si cette particule est ponctuelle ou possède une géométrie rigide, elle ne permet pas un changement des caractéristiques internes sous l'effet du champ $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$. Par conséquent, la solution est de considérer une représentation fonctionnelle de la particule qui remplace la représentation ponctuelle, où la particule est représentée par une fonction u décrivant ses caractéristiques internes.

Ainsi, la théorie fonctionnelle décrit une particule qui est elle même étendue, par la substitution de sa conception ponctuelle par une conception fonctionnelle. L'extension géométrique fait partie des caractéristiques internes modifiables de la particule. A son tour la théorie stochastique se base sur une interprétation opérationnelle de l'extension, qui s'exprime comme une manifestation de l'imperfection de l'appareil de mesure.

Dans ce chapitre, nous allons décrire deux modèles qui combinent la théorie stochastique et la théorie fonctionnelle, dans le but de décrire l'extension de la particule dans les deux sens, intrinsèque et stochastique. Chaque modèle est une manière différente de considérer le micro-détecteur, mais l'état de la particule est représenté par une fonctionnelle $\mathbf{\Psi}[u]$ [12] équivalente à une fonction bilocale $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ représente la variable de l'espace externe et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ représente la variable de l'espace interne. Dans le premier modèle, le micro-détecteur possède une extension stochastique alors que la partie interne garde son caractère ponctuel. Dans le second modèle la particule d'essai possède une extension intrinsèque en plus. Dans ce cas, les vecteurs d'état propres possèdent la forme $\mathbf{\Xi}[h] = \xi h$ où h correspond à l'onde physique de la particule d'essai.

Le présent chapitre sera divisé en quatre sections. Dans la première section, nous présentons la structure générale de notre conception de la particule étendue. Nous citons les points essentiels de la théorie fonctionnelle qui est à l'origine de l'interprétation physique et la structure de l'espace des états. Dans la deuxième section nous résumons les résultats relatifs au cas, d'une particule scalaire stochastiquement et intrinsèquement étendue, qui a fait l'objet d'un travail précédent [23, 36]. Dans la troisième section, nous présentons le cas où la particule possède un spin externe j égal à celui du micro-détecteur. Dans la dernière section, nous présentons l'application des résultats de la troisième section au cas du spin $j = 1$.

3.2 Structure générale

Généralement, en physique classique ou quantique, une particule est considérée comme un point matériel possédant des caractéristiques propres tels que la masse, le spin,...etc. Ces caractéristiques internes ne sont pas influençables par le milieu extérieur. L'hypothèse de Destouches consiste à ce que le milieu extérieur influe sur certaines caractéristiques comme l'étendue de la particule. Pour cela, un passage doit être fait de la conception ponctuelle représentée par un point $\mathbf{x}$ à une conception fonctionnelle abstraite décrite par une fonction u. Le lien entre ces deux conceptions est donné par

$$\mathbf{x} = F[u] \tag{3.1}$$

où F est une fonctionnelle quelconque de l'onde u appelée onde physique (Dans la théorie de de Broglie, le point $\mathbf{x}$ représente une singularité de u) [10]. La particule est représentée par cette dernière onde qui est classique et possède les propriétés suivantes [12, 13]:

- Elle dépend des variables spatio-temporelles (T, y) sans sens physique déterminé à l'avance.

- Il faut lui associer un modèle (réaliste) pour pouvoir la traiter.

La fonction d'onde $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)$ est remplacée en théorie fonctionnelle par l'onde fonctionnelle $X[u, t]$ possédant une décomposition spectrale

$$X = \sum_i c_i X_i \tag{3.2}$$

où X_i représente l'état où une observable A possède la valeur propre a_i avec l'amplitude de probabilité c_i.

Dans notre travail, la particule sera supposée composée de deux modes quantiques locaux [17], l'un interne et l'autre externe. La particule est alors décrite par une fonctionnelle bilocale $X[u, t]\,(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, où le mode externe évolue dans un espace temps externe composé des points $x = (t, \mathbf{x})$, et le mode interne est localisé au point $\mathbf{y} = (y^0 = T, \mathbf{y})$ de l'espace-temps interne de la particule. A cette fonctionnelle bilocale on associe une fonction d'onde $\boldsymbol{\Psi}$ qui représente l'amplitude de probabilité que le mode externe soit en $\mathbf{x}$ et que le mode interne soit en $\mathbf{y}$ [35].

$$\begin{aligned} X &: u \longrightarrow \boldsymbol{\Psi} \\ \boldsymbol{\Psi} &: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C} \\ X[u, t]\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\equiv \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L^2(\mathbb{R}^6) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Le mode externe sera traité par la mécanique quantique stochastique, et le mode interne par la mécanique quantique conventionnelle. Pour cela, soit l'espace de Hilbert

$$H_\xi = L^2(\Gamma^\xi) \otimes L^2(\mathbb{R}^3) \tag{3.4}$$

où $L^2(\Gamma^\xi)$ représente l'espace externe et $L^2(\mathbb{R}^3)$ l'espace interne. Les vecteurs d'états $|\psi\rangle$ de cet espace seront décrits par des fonctions d'onde scalaires $\psi\,(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{y})$ de carré sommable par rapport au produit scalaire

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^9} d\mathbf{q} d\mathbf{p} d\mathbf{y} \psi_1^*\,(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{y})\, \psi_2\,(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{y})$$

Le choix des vecteurs d'états propres dépendra du cas considéré. Dans le cas où la particule et le micro-détecteur sont scalaires, il seront donnés par

$$\left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}}\right\rangle = \left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle \otimes |\mathbf{y}\rangle \tag{3.5}$$

Si dans ce même cas, le micro-détecteur possède une extension intrinsèque les vecteurs propres seront donnés par

$$\left|\Xi_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}}\right\rangle = \left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle \otimes h\left(\mathbf{y}\right)\left|\mathbf{y}\right\rangle$$

Dans ces deux cas, la fonction d'onde stochastique sera toujours donnée par

$$\psi\left(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}\right) = \left\langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}}|\psi\right\rangle = \left\langle \hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}}|\hat{\psi}\right\rangle = \left\langle \tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}}|\tilde{\psi}\right\rangle \tag{3.6}$$

$$\psi\left(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}\right) = \int d\mathbf{x}d\mathbf{y}'\hat{\xi}^*_{q,p,y}(\mathbf{x},\mathbf{y}')\hat{\psi}(\mathbf{x},\mathbf{y}') = \int d\mathbf{k}d\mathbf{y}'\tilde{\xi}^*_{q,p,y}(\mathbf{k},\mathbf{y}')\tilde{\psi}(\mathbf{k},\mathbf{y}') \tag{3.7}$$

mais les probabilités dépendront des vecteurs propres car ces derniers définissent les systèmes de covariance.

Quand la particule et le micro-détecteur possèdent le même spin $\mathbf{j}$, les fonctions d'ondes $\hat{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x},\mathbf{y}')$ et $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{k},\mathbf{y}')$ ainsi que les vecteurs propres $\left|\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle$ auront $(2j+1)$ composantes $\hat{\psi}_s(\mathbf{x},\mathbf{y}')$, $\tilde{\psi}_s(\mathbf{k},\mathbf{y}')$ et $\left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}\right\rangle$ respectivement. Les produits scalaires et les systèmes de covariance en seront alors affectés. La fonction d'onde stochastique $\psi\left(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}\right)$ gardera son caractère scalaire car nous nous intéressons à ce cas uniquement. Le cas où elle correspond à un spin $\mathbf{J}$ non nul sera considéré dans un autre travail.

3.3 Cas scalaire

3.3.1 Micro-détecteurs stochastiquement étendus

Le premier cas qui va être présenté, est celui de la particule d'essai stochastiquement étendue, pour laquelle la fonction d'onde propre $\hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}}$ s'écrit [23, 36]

$$\hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}') = \hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{x})\delta\left(\mathbf{y}-\mathbf{y}'\right) \tag{3.8}$$

La fonction d'onde s'écrit alors

$$\psi\left(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}\right) = \int \hat{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{x})\hat{\psi}(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x} \tag{3.9}$$

Le système de covariance dans ce cas s'écrit comme produit tensoriel du système de covariance du mode externe et du système d'imprimitivité du mode interne

$$\begin{aligned} E(\Delta\times\Delta') &= \int_{\Delta\times\Delta'} \left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}}\right\rangle d\mathbf{q}d\mathbf{p}d\mathbf{y}\left\langle\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}}\right| \\ &= \int_{\Delta}\left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle d\mathbf{q}d\mathbf{p}\left\langle\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right| \otimes \int_{\Delta'}\left|\mathbf{y}\right\rangle d\mathbf{y}\left\langle\mathbf{y}\right| \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ainsi, la probabilité vaut

$$P_\psi(\Delta, \Delta') = \langle \psi | E(\Delta \times \Delta') | \psi \rangle = \int_{\Delta \times \Delta'} d\mathbf{q} d\mathbf{p} d\mathbf{y} \psi^* (\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{y}) \psi (\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{y}) \tag{3.11}$$

et les probabilités marginales

$$P_\psi\left(\hat{\Delta}\right) = \int_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q} d\mathbf{x} \hat{\chi}_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \left| \hat{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right|^2 \tag{3.12}$$

$$P_\psi\left(\tilde{\Delta}\right) = \int_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p} d\mathbf{k} \tilde{\chi}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}) \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \left| \psi(\mathbf{k}, \mathbf{y}) \right|^2 \tag{3.13}$$

Ce résultat est analogue à celui de la théorie stochastique. Seulement, les densités de probabilité $|\hat{\psi}(\mathbf{x})|^2$ et $|\tilde{\psi}(\mathbf{k})|^2$ ont été remplacées par les densités partielles $\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \left| \hat{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right|^2$ et $\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \left| \psi(\mathbf{k}, \mathbf{y}) \right|^2$ du système à deux modes, ce qui est naturel.

Le propagateur libre vaut

$$K_\xi\left(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \mathbf{y}, y^0; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t', \mathbf{y}', y^{0\prime}\right) = \left\langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}} \right| U \left| \xi_{\mathbf{q}',\mathbf{p}',\mathbf{y}'} \right\rangle \tag{3.14}$$

L'opérateur évolution total

$$U = U(t - t') \otimes \hat{U}(y^0 - y^{0\prime}) \tag{3.15}$$

est le produit de l'opérateur évolution stochastique

$$U(t - t') = \exp(\frac{-i}{\hbar} H_0 (t - t')) \tag{3.16}$$

associé à l'hamiltonien H_0 écrit dans la représentation espace des phases externe, et de l'opérateur évolution conventionnel

$$\hat{U}(y^0 - y^{0\prime}) = \exp(\frac{-i}{\hbar} \hat{H}_0 (y^0 - y^{0\prime})) \tag{3.17}$$

associé à l'hamiltonien $\hat{H}_0$ écrit dans la représentation configuration interne. Le propagateur est alors le produit de deux propagateurs

$$K_\xi\left(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \mathbf{y}, y^0; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t', \mathbf{y}', y^{0\prime}\right) = K_\xi\left(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t'\right) \Pi\left(\mathbf{y}, y^0; \mathbf{y}', y^{0\prime}\right) \tag{3.18}$$

Le premier est stochastique et agit sur la partie externe

$$K_\xi\left(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t'\right) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{\mathbf{k}^2}{2m} (t - t')\right) \tilde{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{k}) \ \tilde{\xi}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}',s}(\mathbf{k}) \tag{3.19}$$

et l'autre conventionnel et agit sur la partie interne

$$\Pi\left(\mathbf{y}, y^0; \mathbf{y}', y^{0\prime}\right) = \left(\frac{\mu}{2\pi\hbar i (y^0 - y'^0)}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{i\mu\left(\mathbf{y}' - \mathbf{y}\right)^2}{2\hbar (y^0 - y'^0)}\right) \tag{3.20}$$

3.3.2 Micro-détecteurs stocastiquement et intrinsèquement étendus

Considérons maintenant un micro-détecteur étendu dans les deux sens, stochastique et intrinsèque. Le vecteur d'état propre, noté Ξ cette fois, est donné par [23, 36]

$$\begin{aligned} |\Xi_{\mathbf{y}}[h]\rangle &= |\xi_{\mathbf{y}}\rangle\, h(\mathbf{y}) & (3.21)\\ |\Xi_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}}\rangle &= |\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}}\rangle\, h(\mathbf{y}) & (3.22)\end{aligned}$$

où h représente l'onde physique de ce micro-détecteur. Ce vecteur est représenté par la fonctionnelle propre stochastique suivante:

$$\hat{\Xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}') = \hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}')h(\mathbf{y}) = \hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{x})\delta\left(\mathbf{y}-\mathbf{y}'\right)h(\mathbf{y}) \tag{3.23}$$

Le système de covariance s'écrit alors

$$\begin{aligned} E^{\Xi}(\Delta) &= \int_{\Delta} d\mathbf{q}d\mathbf{p}\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y}\,|\Xi_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}}\rangle\langle\Xi_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}}| \\ &= \int_{\Delta} d\mathbf{q}d\mathbf{p}\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y}\,|h(\mathbf{y})|^2\,|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}}\rangle\langle\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}}| & (3.24)\end{aligned}$$

Par conséquent, à la probabilité

$$\begin{aligned} P_{\psi}(\Delta) &= \langle\psi|\,E^{\Xi}(\Delta)\,|\psi\rangle \\ &= \int_{\Delta} d\mathbf{q}d\mathbf{p}\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y}\,|h(\mathbf{y})|^2\,|\psi(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y})|^2 & (3.25)\end{aligned}$$

correspondent les probabilités marginales

$$\begin{aligned} P_{\psi}(\hat{\Delta}\times\mathbb{R}^3) &= \int_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q}\int d\mathbf{x}d\mathbf{y}\chi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,|\psi(\mathbf{x},\mathbf{y})|^2 & (3.26)\\ P_{\psi}(\tilde{\Delta}\times\mathbb{R}^3) &= \int_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p}\int d\mathbf{k}d\mathbf{y}\chi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k},\mathbf{y})\,|\psi(\mathbf{k},\mathbf{y})|^2 & (3.27)\end{aligned}$$

La nouvelle fonction de confiance

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= (2\pi\hbar)^3\left|\hat{\xi}\left(\mathbf{x}-\mathbf{q}\right)\right|^2|h(\mathbf{y})|^2 \\ &= (2\pi\hbar)^3\left|\hat{\Xi}_{\mathbf{y}}\left(\mathbf{x}-\mathbf{q}\right)\right|^2 & (3.28)\end{aligned}$$

représente la densité de probabilité que le mode externe soit en x et que le mode interne soit en y alors que la mesure de la position du premier mode donne un résultat q. La fonction de confiance

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k},\mathbf{y}) &= (2\pi\hbar)^3\left|\xi\left(\mathbf{k}-\mathbf{p}\right)\right|^2|h(\mathbf{y})|^2 \\ &= (2\pi\hbar)^3\left|\Xi_{\mathbf{y}}\left(\mathbf{k}-\mathbf{p}\right)\right|^2 & (3.29)\end{aligned}$$

représente la densité de probabilité que le mode externe ait l'impulsion k et que le mode interne soit en y alors que la mesure de l'impulsion donne un résultat p. La quantité $|\psi(\mathbf{x},\mathbf{y})|^2$ est la densité de probabilité que le mode externe soit en x et le mode interne soit en y, et $|\psi(\mathbf{k},\mathbf{y})|^2$ est la densité de probabilité que le mode externe ait l'impulsion k et le mode interne soit en y. Ce résultat est aussi analogue à celui de la théorie stochastique avec une intégration sur deux variables au lieu d'une seule.

Le propagateur libre dans ce cas s'écrit

$$\begin{aligned} K_\Xi\left(\mathbf{q},\mathbf{p},t,\mathbf{y},y^0;\mathbf{q}',\mathbf{p}',t',\mathbf{y}',y^{0\prime}\right) &= \langle\Xi_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}}|\,U\,|\Xi_{\mathbf{q}',\mathbf{p}',\mathbf{y}'}\rangle \\ &= h^*(\mathbf{y})h(\mathbf{y}')\left\langle\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right|U(t,t')\left|\xi_{\mathbf{q}',\mathbf{p}'}\right\rangle\langle\mathbf{y}|\,U(y^0,y^{0\prime})\,|\mathbf{y}'\rangle \\ &= h^*(\mathbf{y})h(\mathbf{y}')\Pi\left(\mathbf{y},y^0;\mathbf{y}',y^{0\prime}\right)K_\xi\left(\mathbf{q},\mathbf{p},t;\mathbf{q}',\mathbf{p}',t'\right) \end{aligned} \tag{3.30}$$

Cet opérateur décrit la propagation de l'onde fonctionnelle stochastique

$$\Psi_{t,y^0}(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}) = \Psi\left(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y},t,y^0\right) = U(t,t')\hat{U}(y^0,y^{0\prime})\Psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}) \tag{3.31}$$

Les opérateurs évolution $U(t,t')$ et $\hat{U}(y^0,y^{0\prime})$ sont les mêmes que ceux donnés dans les relations (3.16) et (3.17), respectivement.

3.4 Cas spinoriel

Nous considérons dans le présent paragraphe une particule étendue spinorielle possédant deux modes quantiques, l'un interne et l'autre externe. Le mode interne qui est décrit par la mécanique quantique conventionnelle est supposé scalaire pour des raisons de simplicité. Le cas d'un mode interne spinoriel mérite une étude séparée. Par contre, le mode externe possède un spin $\mathbf{j}$. Le mode interne sera décrit dans la représentation configuration alors que le mode externe sera décrit dans la représentation espace des phases U_0 correspondant à un spin $J = 0$. Nous savons que le micro-détecteur possède alors le même spin $\mathbf{j}$ que celui du mode externe. Nous étudierons, comme dans le paragraphe précédent, le cas où ce micro-détecteur ne possède pas puis possède une extension intrinsèque.

3.4.1 Micro-détecteurs stochastiquement étendus

Considérons le cas où la particule d'essai est purement stochastique, les états physiques $|\psi\rangle$ qui représentent les deux modes appartiennent à l'espace de Hilbert total H qui s'écrit sous la forme produit tensoriel

$$H = H^\xi \otimes L^2\left(\mathbb{R}^3\right) \tag{3.32}$$

où H^{ξ} correspond à la mécanique quantique stochastique et $L^2(\mathbb{R}^3)$ à la mécanique quantique conventionnelle. Dans H, le produit scalaire est défini par

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^9} \psi^*(\mathbf{q},\mathbf{p},;\mathbf{y})\,\psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y})\,d\mathbf{q}d\mathbf{p}d\mathbf{y} \tag{3.33}$$

où $\psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y})$ représente la fonction d'onde de la particule étendue

$$\psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}) = \langle\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}|\boldsymbol{\psi}\rangle \tag{3.34}$$

Le vecteur "bra" du membre droit de l'égalité s'écrit

$$\left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}\right\rangle = \left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle \otimes |\mathbf{y}\rangle \tag{3.35}$$

correspond à un vecteur d'état propre du micro-détecteur. Comme le mode externe de la particule système est supposé avoir le même spin $\mathbf{j}$ que le micro-détecteur, ce dernier est décrit dans la représentation configuration par les composantes

$$\left|\hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s;\mathbf{y}}\right\rangle = \left|\hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}\right\rangle \otimes |\mathbf{y}\rangle\,; \qquad -j \leq s \leq +j \tag{3.36}$$

qui correspondent aux fonctions

$$\hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s;\mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}') = \hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{x})\,\delta(\mathbf{y}-\mathbf{y}') \tag{3.37}$$

De même l'état de la particule système est décrit par $(2j+1)$ composantes $\hat{\psi}_s(\mathbf{x},\mathbf{y})$ appartenant chacune à $L^2(\mathbb{R}^6)$ dans cette représentation. La fonction d'onde spinorielle appartient donc à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^6)\otimes l^2(2j+1)$ dont le produit scalaire est défini par la relation suivante

$$\left\langle\hat{\boldsymbol{\psi}}|\hat{\boldsymbol{\psi}}\right\rangle = \sum_{s=-j}^{+j}\int_{\mathbb{R}^6} d\mathbf{x}d\mathbf{y}\,\hat{\psi}_s^*(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\hat{\psi}_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{3.38}$$

L'utilisation de la propriété (3.37) dans la formule précédente, nous conduit à une autre définition de $\psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y})$

$$\psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}) = \left\langle\hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}|\hat{\boldsymbol{\psi}}\right\rangle = \sum_{s=-j}^{+j}\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x}\hat{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{x})\,\hat{\psi}_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{3.39}$$

En effet, cette dernière relation conduit à l'égalité des produits scalaires **(annexe)** (3.33) et (3.38) et correspond donc bien à la définition (3.34). Remarquons que dans la représentation espace des phases, le vecteur d'état propre est représenté par la fonction scalaire

$$\begin{aligned}
\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}\left(\mathbf{q}',\mathbf{p}';\mathbf{y}'\right) &= \left\langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}'} | \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}} \right\rangle = \left\langle \hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}'} | \hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}} \right\rangle \\
&= \sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \hat{\xi}^{*}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}',s}(x)\, \hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s;\mathbf{y}}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}'\right) \\
&= \delta\left(\mathbf{y}-\mathbf{y}'\right) \sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \hat{\xi}^{*}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}',s}(\mathbf{x})\, \hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Le choix de la forme du vecteur $\left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}\right\rangle$ correspond au fait que la localisation n'est stochastique que dans l'espace externe, elle reste ponctuelle dans l'espace interne. La considération d'une symétrie composée de deux groupes de Galilée G'(isochrone dans le cas stochastique) et G, nous conduit à définir une représentation agissant sur H, composée d'une représentation espace des phases $U_0^{\xi}\left(G'\right)$ agissant sur le sous-espace externe H^{ξ} et d'une représentation configuration $U'\left(G\right)$ agissant sur le sous-espace interne $L^2\left(\mathbb{R}^3\right)$. Donc, par rapport à la représentation $U_0^{\xi}\left(G'\right) \otimes U'\left(G\right)$, on définit un système de covariance

$$E^{\xi}\left(\Delta \times \Delta'\right) = \int_{\Delta,\Delta'} \left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}\right\rangle d\mathbf{q} d\mathbf{p} d\mathbf{y} \left\langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}\right| \ ; \quad \mathbf{q},\mathbf{p} \in \Delta \ , \ \mathbf{y} \in \Delta' \tag{3.41}$$

où Δ est un sous-ensemble de l'espace des phases externe Γ et Δ' est un sous-ensemble de l'espace de configuration interne $\mathbb{R}^3$. L'utilisation de (3.35) dans (3.41), nous permet d'écrire celle-ci comme un produit tensoriel d'un système de covariance correspondant à la partie externe et un système d'imprimitivité correspondant à la partie interne

$$E^{\xi}\left(\Delta \times \Delta'\right) = \int_{\Delta} \left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle d\mathbf{q} d\mathbf{p} \left\langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right| \otimes \int_{\Delta'} \left|\mathbf{y}\right\rangle d\mathbf{y} \left\langle \mathbf{y}\right| \tag{3.42}$$

On peut ainsi définir la probabilité totale, qui représente la valeur moyenne du système de covariance

$$\begin{aligned}
P_{\psi}^{\xi}\left(\Delta \times \Delta'\right) &= \left\langle \psi | E^{\xi}\left(\Delta \times \Delta'\right) \psi \right\rangle \\
&= \int_{\Delta,\Delta'} \left\langle \psi | \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}} \right\rangle d\mathbf{q} d\mathbf{p} d\mathbf{y} \left\langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}} | \psi \right\rangle \\
&= \int_{\Delta'} d\mathbf{y} \int_{\Delta} d\mathbf{q} d\mathbf{p} \left|\psi\left(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}\right)\right|^2
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Les composantes marginales du système de covariance sont une conséquence de la relation (3.42)

$$E^{\xi}\left(\Delta\right) = E^{\xi}\left(\Delta \times \mathbb{R}^3\right) = \int_{\Delta} \left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle d\mathbf{q} d\mathbf{p} \left\langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right| \otimes 1 \tag{3.44}$$

$$E^{\xi}\left(\Delta'\right) = E^{\xi}\left(\Gamma \times \Delta'\right) = 1 \otimes \int_{\Delta'} \left|\mathbf{y}\right\rangle d\mathbf{y} \left\langle \mathbf{y}\right| \tag{3.45}$$

La première composante est un système de covariance par rapport à $U_0^\xi(G') \equiv U_0^\xi(G') \otimes 1$ et la seconde est un système d'imprimitivité par rapport à $U'(G) \equiv 1 \otimes U'(G)$. Par conséquent, la probabilité totale donnée dans (3.43) est décomposable en deux parties, une probabilité de mesure stochastique et une probabilité de localisation du mode interne dans la région Δ'. Ces probabilités, qui correspondent aux systèmes de covariances (3.44) et (3.45), s'écrivent

$$P_\psi^\xi\left(\Delta \times \mathbb{R}^3\right) = \left\langle \psi | E^\xi\left(\Delta \times \mathbb{R}^3\right)\psi\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \int_\Delta d\mathbf{q}d\mathbf{p}\left|\psi\left(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}\right)\right|^2 \tag{3.46}$$

$$P_\psi^\xi\left(\Gamma \times \Delta'\right) = \left\langle \psi | E^\xi\left(\Gamma \times \Delta'\right)\psi\right\rangle = \int_{\Delta'} d\mathbf{y} \int_\Gamma d\mathbf{q}d\mathbf{p}\left|\psi\left(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}\right)\right|^2 \tag{3.47}$$

La restriction de la relation (3.44) à un intervalle $\hat{\Delta}$ appartenant à l'espace de configuration externe puis à un intervalle $\tilde{\Delta}$ appartenant à l'espace des impulsions externe, correspond aux deux formes suivantes

$$E^\xi\left(\hat{\Delta}\right) = E^\xi\left(\hat{\Delta} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\right) = \int_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p}\left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle d\mathbf{q}d\mathbf{p}\left\langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right| \otimes 1 \tag{3.48}$$

$$E^\xi\left(\tilde{\Delta}\right) = E^\xi\left(\mathbb{R}^3 \times \tilde{\Delta} \times \mathbb{R}^3\right) = \int_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{q}\left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle d\mathbf{q}d\mathbf{p}\left\langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right| \otimes 1 \tag{3.49}$$

Dans la représentation configuration, la probabilité est donnée par

$$\begin{aligned} P_\psi^\xi\left(\hat{\Delta}\right) &= \left\langle \psi | E^\xi\left(\hat{\Delta}\right)\psi\right\rangle = \int_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q} \int_{\mathbb{R}^6} d\mathbf{p}d\mathbf{y}\left|\psi\left(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}\right)\right|^2 \\ &= \sum_{s,s'=-j}^{+j} \int d\mathbf{y}d\mathbf{x}\; \hat{\psi}_s^*\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) f_{ss'}^{\hat{\Delta}}\left(\mathbf{x}\right) \hat{\psi}_{s'}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) \end{aligned} \tag{3.50}$$

et dans la représentation impulsion par

$$\begin{aligned} P_\psi^\xi\left(\tilde{\Delta}\right) &= \left\langle \psi | E^\xi\left(\tilde{\Delta}\right)\psi\right\rangle = \int_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p} \int_{\mathbb{R}^6} d\mathbf{q}d\mathbf{y}\left|\psi\left(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}\right)\right|^2 \\ &= \sum_{s,s'=-j}^{+j} \int d\mathbf{y}d\mathbf{k}\; \tilde{\psi}_s^*\left(\mathbf{k},\mathbf{y}\right) f_{ss'}^{\tilde{\Delta}}\left(\mathbf{k}\right) \tilde{\psi}_{s'}\left(\mathbf{k},\mathbf{y}\right) \end{aligned} \tag{3.51}$$

où les fonctions $f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x})$ et $f_{ss'}^{\tilde{\Delta}}(\mathbf{k})$ sont données par les relations

$$f_{ss'}^{\tilde{\Delta}}(\mathbf{k}) = \int_{\Delta_k} d\mathbf{p}'\tilde{\xi}_s\left(\mathbf{p}'\right)\tilde{\xi}_{s'}^*\left(\mathbf{p}'\right) \tag{3.52}$$

$$f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}) = \int_{\Delta_x} d\mathbf{q}'\hat{\xi}_s\left(\mathbf{q}'\right)\hat{\xi}_{s'}^*\left(\mathbf{q}'\right) \tag{3.53}$$

qui sont identiques aux relations (2.53) et (2.54) du deuxième chapitre.

Nous retrouvons encore une fois les mêmes relations que celles de la théorie stochastique avec une intégration supplémentaire sur la variable interne. La relation marginale (3.50) donne alors la probabilité que la mesure de la position du mode externe donne une valeur $\mathbf{q}$ dans $\hat{\Delta}$ et que le mode interne soit dans Δ'. Cette probabilité fait intervenir des composantes différentes des fonctions d'onde $\hat{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ à cause des fluctuations stochastiques de l'axe par rapport auquel le spin est mesuré. La relation (3.51) admet une interprétation analogue. Les fonctions de distribution du spin stochastique

$$\chi_s^{\Delta_{\mathbf{x}}}(s') = \left\| f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}) \right\|^2 \left(\sum_{s'=-j}^{+j} \left| f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}) \right|^2 \right)^{-1} \tag{3.54}$$

$$\chi_s^{\Delta_{\mathbf{k}}}(s') = \left\| f_{ss'}^{\tilde{\Delta}}(\mathbf{k}) \right\|^2 \left(\sum_{s'=-j}^{+j} \left| f_{ss'}^{\tilde{\Delta}}(\mathbf{k}) \right|^2 \right)^{-1} \tag{3.55}$$

sont identiques aux relations (2.61) et (2.62) du chapitre précédent.

Concernant les propagateurs, le mode externe est caractérisé par un paramètre temporelle t et le mode interne par un paramètre temporel y^0. Selon la théorie fonctionnelle, t désigne le temps mesuré par un observateur alors que y^0 représente une variable temporelle interne. Dans le cas présent, le propagateur libre est défini par la relation suivante

$$K_\xi\left(\mathbf{q},\mathbf{p},t,\mathbf{y},y^0;\mathbf{q}',\mathbf{p}',t',\mathbf{y}',y'^0\right) = \left\langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}} \right| U(t-t') \otimes U\left(y^0 - y'^0\right) \left| \xi_{\mathbf{q}',\mathbf{p}';\mathbf{y}'} \right\rangle \tag{3.56}$$

Etant donnée la propriété (3.35), la relation précédente conduit à l'expression

$$\begin{aligned} K_\xi\left(\mathbf{q},\mathbf{p},t,\mathbf{y},y^0;\mathbf{q}',\mathbf{p}',t',\mathbf{y}',y'^0\right) &= \left\langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \right| U(t-t') \left| \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \right\rangle \; \langle \mathbf{y} | U\left(y^0 - y'^0\right) | \mathbf{y} \rangle \\ &= K_\xi(\mathbf{q},\mathbf{p},t;\mathbf{q}',\mathbf{p}',t')\, \Pi\left(\mathbf{y},y^0;\mathbf{y}',y'^0\right) \end{aligned} \tag{3.57}$$

qui est le produit du propagateur stochastique agissant sur la partie externe et du propagateur conventionnel agissant sur la partie interne. L'opérateur évolution stochastique est donné par

$$U(t-t') = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0(t-t')\right) \tag{3.58}$$

et le propagateur conventionnel vaut

$$\hat{U}\left(y^0 - y'^0\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(y^0 - y'^0)\right) \tag{3.59}$$

Le propagateur interne ponctuel est donné par

$$\Pi\left(\mathbf{y},y^0;\mathbf{y}',y'^0\right) = \left(\frac{\mu}{2\pi\hbar i(y^0 - y'^0)}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{i\mu\left(\mathbf{y}'-\mathbf{y}\right)^2}{2\hbar(y^0 - y'^0)}\right) \tag{3.60}$$

Comme l'hamiltonien H_0 est indépendant du spin et à cause de l'égalité des produits scalaires (3.33) et (3.38) dans les représentations espace des phases et espace des impulsions, le propagateur stochastique vaut:

$$K_\xi\left(\mathbf{q},\mathbf{p},t;\mathbf{q}',\mathbf{p}',t'\right)=\sum_{s=-j}^{+j}\int d\mathbf{k}\exp\left(\frac{-i\mathbf{k}^2\left(t-t'\right)}{2m\hbar}\right)\tilde{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}\left(\mathbf{k}\right)\tilde{\xi}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}',s}\left(\mathbf{k}\right) \tag{3.61}$$

Ce propagateur possède la même interprétation que celle donnée au propagateur (2.73) mais concerne le mode externe uniquement. Notons que μ et m représentent, respectivement, la masse du mode interne et du mode externe.

3.4.2 Micro-détecteurs stochastiquement et intrinsèquement étendus

Dans le cas présent, la particule d'essai sera munie d'une distribution dans l'espace interne. Les vecteurs d'état propres $\left|\xi_{\mathbf{y}}\right\rangle$, seront substitués par des vecteurs d'état propres possédant la forme fonctionnelle suivante

$$\left|\Xi_{\mathbf{y}}\left[h\right]\right\rangle=\left|\xi_{\mathbf{y}}\right\rangle h\left(\mathbf{y}\right) \tag{3.62}$$

où $h\left(\mathbf{y}\right)$ représente l'onde physique et décrit la partie interne de la particule d'essai. L'état propre du micro-détecteur, situé aux coordonnées stochastiques $\left(\mathbf{q},\mathbf{p}\right)$, s'obtient par l'application d'une translation spatiale $\mathbf{q}$ et d'un boost $\mathbf{v}=\mathbf{p}/m$ dans la représentation choisie

$$\left|\Xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}\right\rangle=U_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\left|\Xi_{\mathbf{y}}\right\rangle=\left(U_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\left|\xi_{\mathbf{y}}\right\rangle\right)h\left(\mathbf{y}\right) \tag{3.63}$$

A cause du fait que le micro-détecteur soit intrinsèquement étendu et de spin $\mathbf{j}$, le vecteur d'état précédent possède $(2j+1)$ composantes dans la représentation configuration

$$\hat{\Xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s;\mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}')=\hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}\left(\mathbf{x}\right)\delta\left(\mathbf{y}-\mathbf{y}'\right)h(\mathbf{y}) \tag{3.64}$$

Comme la norme de chaque $\hat{\xi}_s$ est $\left(2\pi\hbar\right)^{-3/2}$, la relation d'orthonormalisation s'écrit

$$\begin{aligned}\left\langle\hat{\mathbf{\Xi}}_{\mathbf{y}}|\hat{\mathbf{\Xi}}_{\mathbf{y}'}\right\rangle &= \sum_{s=-j}^{+j}\int d\mathbf{x}d\mathbf{y}''\hat{\Xi}_{\mathbf{y},s}(\mathbf{x},\mathbf{y}'')\hat{\Xi}_{\mathbf{y}',s}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}''\right)\\ &= \left(2j+1\right)\left(2\pi\hbar\right)^{-3}\delta\left(\mathbf{y}-\mathbf{y}'\right)h^2\left(\mathbf{y}\right)\end{aligned} \tag{3.65}$$

La particule système de spin $\mathbf{j}$, intrinsèquement et stochastiquement étendue, est alors décrite par la fonction $\Psi\left(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}\right)$

$$\Psi\left(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}\right)=\left\langle\Xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}|\Psi\right\rangle=\sum_{s=-j}^{+j}\int d\mathbf{x}d\mathbf{y}'\hat{\Xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p},s;\mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}')\hat{\psi}_s\left(\mathbf{x},\mathbf{y}'\right) \tag{3.66}$$

Les fonctions $\Psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y})$ obéissent au produit scalaire dans H

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^9} \Psi^*(\mathbf{q},\mathbf{p},;\mathbf{y})\,\Psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y})\,d\mathbf{q}d\mathbf{p}d\mathbf{y} \tag{3.67}$$

L'état de la particule système de spin j est décrit dans la représentation configuration par la fonction d'onde $\hat{\mathbf{\Psi}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ à $(2j+1)$ composantes $\hat{\Psi}_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) = h(\mathbf{y})\hat{\psi}_s(\mathbf{x},\mathbf{y})$ appartenant chacune à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^6)$. Les fonctions d'onde spinorielles appartiennent à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^6)\otimes l^2(2j+1)$ dont le produit scalaire vaut

$$\left\langle\hat{\mathbf{\Psi}}|\hat{\mathbf{\Psi}}\right\rangle = \sum_{s=-j}^{+j}\int_{\mathbb{R}^6} d\mathbf{x}d\mathbf{y}\hat{\psi}_s^*(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\hat{\psi}_s(\mathbf{x},\mathbf{y})\,|h(\mathbf{y})|^2 \tag{3.68}$$

L'utilisation de la propriété (3.64) dans ce produit scalaire nous conduit au résultat

$$\begin{aligned}\langle\Xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}|\Psi\rangle &= \sum_{s=-j}^{+j}\int d\mathbf{x}d\mathbf{y}'\;\hat{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{x})\hat{\psi}_s(\mathbf{x},\mathbf{y}')\,\delta(\mathbf{y}-\mathbf{y}')\,h(\mathbf{y})\\ &= \sum_{s=-j}^{+j}\int d\mathbf{x}\hat{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{x})\hat{\psi}_s(\mathbf{x},\mathbf{y})\,h(\mathbf{y})\end{aligned} \tag{3.69}$$

La relation (3.69) peut être considérée comme une autre manière d'écrire $\Psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y})$. Cette nouvelle façon d'exprimer la fonction d'onde conduit à l'égalité des produits scalaires (3.67) et (3.68) **(annexe)**.

Considérons dans ce cas aussi, une symétrie de Galilée composée de deux groupes G et G', de sorte que le système de covariance généralisé par rapport à la représentation $U_0^{\xi}(G)\otimes U'(G')$ s'écrit

$$\begin{aligned}E^{\Xi}(\Delta) &= \int_{\Delta\times\mathbb{R}^3} |\Xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}\rangle\, d\mathbf{q}d\mathbf{p}d\mathbf{y}\,\langle\Xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}|\\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y}\,|h(\mathbf{y})|^2\int_{\Delta}\left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}\right\rangle d\mathbf{q}d\mathbf{p}\left\langle\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}\right|\end{aligned} \tag{3.70}$$

où $|h(\mathbf{y})|^2$ représente la densité de probabilité que le micro-détecteur soit dans l'état interne $\xi_{\mathbf{y}}$. Un système de covariance analogue a été introduit dans la formulation statistique de la théorie stochastique pour un système de N particules dans l'espace des phases Γ^N [25]

$$E_\gamma(\Delta) = \int\limits_{\Delta}\gamma_{\mathbf{q},\mathbf{p}}d\mathbf{q}d\mathbf{p}\;,\;\;\Delta\subset\Gamma^N\;,\;\;(\mathbf{q},\mathbf{p})\in\Gamma^N \tag{3.71}$$

où

$$\gamma_{\mathbf{q},\mathbf{p}} = U_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\gamma U^{-1}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \tag{3.72}$$

L'opérateur γ peut prendre la forme

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\hat{\xi}_i\right\rangle \lambda_i \left\langle\hat{\xi}_i\right| \ , \hat{\xi}_i \in L^2\left(\mathbb{R}^{3N}\right) \tag{3.73}$$

et

$$\left\langle\hat{\xi}_i|\hat{\xi}_j\right\rangle = (2\pi\hbar)^{-3N}\, \delta_{ij} \tag{3.74}$$

Cette formulation reste applicable au cas d'une seule particule. En effet, l'expression de γ reste inchangée sauf que la norme des fonctions $\hat{\xi}_i \in L^2(\mathbb{R}^3)$ est $\left\|\hat{\xi}_i\right\| = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}}$ et que la représentation $U_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ sera équivalente à la représentation $\hat{U}\left(0, \mathbf{q}, \frac{\mathbf{p}}{m}, I\right)$. Les λ_i représentent la probabilité pour que le micro-détecteur soit dans l'état interne $\hat{\xi}_i$ avant le processus de mesure.

La relation (3.70) est une expression modifiée de la formule (3.71). Il lui correspond la probabilité totale

$$\begin{aligned} P_\psi(\Delta) &= \left\langle\Psi|E^{\Xi}(\Delta)\,\Psi\right\rangle \\ &= \int_\Delta d\mathbf{q}d\mathbf{p} \int_{\mathbb{R}^3} dy \left|\Psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y})\right|^2 \\ &= \int_\Delta d\mathbf{q}d\mathbf{p} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \left|h(\mathbf{y})\right|^2 \left|\psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y})\right|^2 \end{aligned} \tag{3.75}$$

En suivant les mêmes étapes de calcul que celles du paragraphe et du chapitre précédent, on détermine les probabilités marginales

$$P_\psi\left(\hat{\Delta}\right) = \sum_{s,s'=-j}^{+j} \int d\mathbf{y}d\mathbf{x}\ \hat{\psi}_s^*(\mathbf{x},\mathbf{y})\, f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\, \hat{\psi}_{s'}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{3.76}$$

$$P_\psi\left(\tilde{\Delta}\right) = \sum_{s,s'=-j}^{+j} \int d\mathbf{y}d\mathbf{k}\ \tilde{\psi}_s^*(\mathbf{k},\mathbf{y})\, f_{ss'}^{\tilde{\Delta}}(\mathbf{k},\mathbf{y})\, \tilde{\psi}_{s'}(\mathbf{k},\mathbf{y}) \tag{3.77}$$

Les fonctions $f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ et $f_{ss'}^{\tilde{\Delta}}(\mathbf{k},\mathbf{y})$ s'écrivent

$$f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |h(\mathbf{y})|^2 \int_{\Delta_x} d\mathbf{q}'\hat{\xi}_s(\mathbf{q}')\, \hat{\xi}_{s'}^*(\mathbf{q}') \tag{3.78}$$

$$f_{ss'}^{\tilde{\Delta}}(\mathbf{k},\mathbf{y}) = |h(\mathbf{y})|^2 \int_{\Delta_p} d\mathbf{p}'\tilde{\xi}_s(\mathbf{p}')\, \tilde{\xi}_{s'}^*(\mathbf{p}') \tag{3.79}$$

en adoptant la notation suivante: $\Delta_\mathbf{x} = \mathbf{x} - \hat{\Delta}$, $\Delta_\mathbf{p} = \mathbf{k} - \tilde{\Delta}$, $\mathbf{q}' = \mathbf{x} - \mathbf{q}$ et $\mathbf{p}' = \mathbf{k} - \mathbf{p}$.

Les probabilités marginales s'interprètent comme dans la théorie stochastique ordinaire. Les termes pour lesquels $s = s'$ correspondent au cas où le spin de la particule et parfaitement aligné avec celui du micro-détecteur. Les termes pour lesquels $s \neq s'$, tiennent compte des fluctuations du spin stochastique. La seule différence est l'intégration sur la variable interne y et la multiplication des fonctions f par la fonction h.

En ce qui concerne le propagateur libre, il est défini sous la forme suivante

$$\begin{aligned} K_\Xi\left(\mathbf{q},\mathbf{p},t,\mathbf{y},y^0;\mathbf{q}',\mathbf{p}',t',\mathbf{y}',y'^0\right) &= \langle \Xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}} | \, U(t-t') \otimes U\left(y^0 - y'^0\right) |\Xi_{\mathbf{q}',\mathbf{p}';\mathbf{y}'}\rangle \\ &= h^*(\mathbf{y})h(\mathbf{y}') \left\langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}} \right| U(t-t') \otimes U\left(y^0 - y'^0\right) \left|\xi_{\mathbf{q}',\mathbf{p}';\mathbf{y}'}\right\rangle \\ &= h^*(\mathbf{y})h(\mathbf{y}') K_\xi\left(\mathbf{q},\mathbf{p},t;\mathbf{q}',\mathbf{p}',t'\right) \Pi\left(\mathbf{y},y^0;\mathbf{y}',y'^0\right) \quad (3.80) \end{aligned}$$

En utilisant la forme explicite (3.61) de K_ξ, on trouve

$$\begin{aligned} K_\Xi\left(\mathbf{q},\mathbf{p},t,\mathbf{y},y^0;\mathbf{q}',\mathbf{p}',t',\mathbf{y}',y'^0\right) &= \sum_{s=-j}^{+j} \int d\mathbf{k} \exp\left(\frac{-i\mathbf{k}^2(t-t')}{2m\hbar}\right) \tilde{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{k})\, \tilde{\xi}_{\mathbf{q}',\mathbf{p}',s}(\mathbf{k}) \\ &\quad \times h^*(\mathbf{y})h(\mathbf{y}')\Pi\left(\mathbf{y},y^0;\mathbf{y}',y'^0\right) \quad (3.81) \end{aligned}$$

Ce propagateur n'est formellement pas trop différent par rapport à celui dans le paragraphe précédent, sauf qu'ici la propagation interne est affectée par l'extension intrinsèque du micro-détecteur.

3.5 Application au cas du spin $j = 1$

3.5.1 Micro-détecteurs stochastiquement étendus

Explicitons les résultats obtenus pour une particule système, de spin externe $j = 1$ et de spin interne nul, représentée dans l'espace des impulsions par une fonctions $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{k},\mathbf{y})$ ayant trois composantes $\tilde{\psi}_{-1}(\mathbf{k},\mathbf{y})$, $\tilde{\psi}_0(\mathbf{k},\mathbf{y})$ et $\tilde{\psi}_{+1}(\mathbf{k},\mathbf{y})$. De même, le micro-détecteur est représenté par une fonction $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{y}}(\mathbf{k})$ ayant trois composantes aussi $\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},-1;\mathbf{y}}(\mathbf{k})$, $\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},0;\mathbf{y}}(\mathbf{k})$ et $\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},+1;\mathbf{y}}(\mathbf{k})$. Commençons par les probabilités marginales, les formules (3.50) et (3.51) deviennent, pour la représentation impulsion

$$\begin{aligned} \left\langle \psi | E^\xi\left(\tilde{\Delta}\right)\psi\right\rangle &= \int d\mathbf{k}d\mathbf{y}\, f^{\tilde{\Delta}}_{-1,-1}(\mathbf{k}) \left|\tilde{\psi}_{-1}(\mathbf{k},\mathbf{y})\right|^2 + \int d\mathbf{k}d\mathbf{y}\, f^{\tilde{\Delta}}_{0.0}(\mathbf{k}) \left|\tilde{\psi}_0(\mathbf{k},\mathbf{y})\right|^2 \\ &+ \int d\mathbf{k}d\mathbf{y}\, f^{\tilde{\Delta}}_{+1,+1}(\mathbf{k}) \left|\tilde{\psi}_{+1}(\mathbf{k},\mathbf{y})\right|^2 + \int d\mathbf{k}d\mathbf{y}\ \tilde{\psi}^*_{-1}(\mathbf{k},\mathbf{y})\, f^{\tilde{\Delta}}_{-1,0}(\mathbf{k})\, \tilde{\psi}_0(\mathbf{k},\mathbf{y}) \\ &+ \int d\mathbf{k}d\mathbf{y}\tilde{\psi}^*_{-1}(\mathbf{k},\mathbf{y})\, f^{\tilde{\Delta}}_{-1,+1}(\mathbf{k})\ \tilde{\psi}_{+1}(\mathbf{k},\mathbf{y}) + \int d\mathbf{k}d\mathbf{y}\tilde{\psi}^*_0(\mathbf{k},\mathbf{y})\, f^{\tilde{\Delta}}_{0,-1}(\mathbf{k})\ \tilde{\psi}_{-1}(\mathbf{k},\mathbf{y}) \\ &+ \int d\mathbf{k}d\mathbf{y}\tilde{\psi}^*_0(\mathbf{k},\mathbf{y})\, f^{\tilde{\Delta}}_{0,+1}(\mathbf{k})\ \tilde{\psi}_{+1}(\mathbf{k},\mathbf{y}) + \int d\mathbf{k}d\mathbf{y}\tilde{\psi}^*_{+1}(\mathbf{k},\mathbf{y})\, f^{\tilde{\Delta}}_{+1,-1}(\mathbf{k})\ \tilde{\psi}_{-1}(\mathbf{k},\mathbf{y}) \\ &+ \int d\mathbf{k}d\mathbf{y}\tilde{\psi}^*_{+1}(\mathbf{k},\mathbf{y})\, f^{\tilde{\Delta}}_{+1,0}(\mathbf{k})\ \tilde{\psi}_0(\mathbf{k},\mathbf{y}) \quad (3.82) \end{aligned}$$

De même, nous obtenons pour la représentation configuration

$$\begin{aligned}\left\langle \psi | E^{\xi}\left(\hat{\Delta}\right)\psi \right\rangle &= \int d\mathbf{x}d\mathbf{y} f^{\hat{\Delta}}_{-1,-1}(\mathbf{x})\left|\hat{\psi}_{-1}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right|^2 + \int d\mathbf{x}d\mathbf{y} f^{\hat{\Delta}}_{0.0}(\mathbf{x})\left|\hat{\psi}_{0}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right|^2 \\ &+ \int d\mathbf{x}d\mathbf{y} f^{\hat{\Delta}}_{+1,+1}(\mathbf{x})\left|\hat{\psi}_{+1}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right|^2 + \int d\mathbf{x}d\mathbf{y}\ \hat{\psi}^*_{-1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) f^{\hat{\Delta}}_{-1,0}(\mathbf{x})\,\hat{\psi}_{0}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ &+ \int d\mathbf{x}d\mathbf{y}\hat{\psi}^*_{-1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) f^{\hat{\Delta}}_{-1,+1}(\mathbf{x})\ \hat{\psi}_{+1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \int d\mathbf{x}d\mathbf{y}\hat{\psi}^*_{0}(\mathbf{x},\mathbf{y}) f^{\hat{\Delta}}_{0,-1}(\mathbf{x})\ \hat{\psi}_{-1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ &+ \int d\mathbf{x}d\mathbf{y}\hat{\psi}^*_{0}(\mathbf{x},\mathbf{y}) f^{\hat{\Delta}}_{0,+1}(\mathbf{x})\ \hat{\psi}_{+1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \int d\mathbf{x}d\mathbf{y}\hat{\psi}^*_{+1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) f^{\hat{\Delta}}_{+1,-1}(\mathbf{x})\ \hat{\psi}_{-1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ &+ \int d\mathbf{x}d\mathbf{y}\hat{\psi}^*_{+1}n(\mathbf{x},\mathbf{y}) f^{\hat{\Delta}}_{+1,0}(\mathbf{x})\ \hat{\psi}_{0}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \end{aligned} \tag{3.83}$$

Les fonctions $f^{\hat{\Delta}}_{ss'}(\mathbf{x})$ et $f^{\tilde{\Delta}}_{ss'}(\mathbf{k})$ sont données par les relations (2.54) et (2.53) où $-1 \leq s, s' \leq +1$.

On remarque que chaque probabilité marginale se compose de neuf termes qui possèdent le même sens que celui de la théorie purement stochastique mais avec une intégration en plus sur la variable interne y. Les trois premiers termes où $s = s'$ représentent la densité de probabilité sur la mesure de la position (respectivement de l'impulsion) dans le cas où le spin de la particule et celui du micro-détecteur sont parfaitement alignés. Les autres termes sont liés à l'effet de fluctuation du spin par rapport à l'axe de coordonnées stochastiques sur la mesure de la position (respectivement de l'impulsion).

Dans le cas où le spin $j = 1$, les fonctions de distribution du spin dans la représentation impulsion sont

$$\chi^{\Delta_k}_{-1}(s) = \left\|f^{\tilde{\Delta}}_{-1,s}(\mathbf{k})\right\|^2 \left(\sum_{s=-1}^{+1}\left|f^{\tilde{\Delta}}_{-1,s}(\mathbf{k})\right|^2\right)^{-1} \tag{3.84}$$

$$\chi^{\Delta_k}_{0}(s) = \left\|f^{\tilde{\Delta}}_{0,s}(\mathbf{k})\right\|^2 \left(\sum_{s=-1}^{+1}\left|f^{\tilde{\Delta}}_{0,s}(\mathbf{k})\right|^2\right)^{-1} \tag{3.85}$$

$$\chi^{\Delta_k}_{+1}(s) = \left\|f^{\tilde{\Delta}}_{+1,s}(\mathbf{k})\right\|^2 \left(\sum_{s=-1}^{+1}\left|f^{\tilde{\Delta}}_{+1,s}(\mathbf{k})\right|^2\right)^{-1} \tag{3.86}$$

Le cas de la représentation configuration est semblable

$$\chi_{-1}^{\Delta_x}(s) = \left\|f_{-1,s}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x})\right\|^2 \left(\sum_{s=-1}^{+1} \left|f_{-1,s}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x})\right|^2\right)^{-1} \tag{3.87}$$

$$\chi_{0}^{\Delta_x}(s) = \left\|f_{0,s}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x})\right\|^2 \left(\sum_{s=-1}^{+1} \left|f_{0,s}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x})\right|^2\right)^{-1} \tag{3.88}$$

$$\chi_{+1}^{\Delta_x}(s) = \left\|f_{+1,s}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x})\right\|^2 \left(\sum_{s=-1}^{+1} \left|f_{+1,s}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x})\right|^2\right)^{-1} \tag{3.89}$$

Dans chaque représentation, pour chaque valeur fixée de s' on définit trois fonctions de confiance $\chi_{s'}^{\Delta_x}(s)$ (respectivement $\chi_{s'}^{\Delta_k}(s)$) correspondantes aux trois valeurs que peut prendre $s = -1, 0, +1$. En tout, pour chaque représentation on a neuf fonctions de confiance du spin stochastique $s = (s, \chi_s)$.

Concernant le propagateur libre, dans le cas où $j = 1$, il peut être écrit sous la forme

$$\begin{aligned} K_\xi\left(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \mathbf{y}, y^0; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t', \mathbf{y}', y'^0\right) = & \left[\left(\frac{\mu}{2\pi\hbar i(y^0 - y'^0)}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{i\mu\left(\mathbf{y}'-\mathbf{y}\right)^2}{2\hbar(y^0 - y'^0)}\right)\right] \times \\ & [\int d\mathbf{k} \exp\left(\frac{-i\mathbf{k}^2\left(t-t'\right)}{2m\hbar}\right) \tilde{\xi}^*_{q,p,-1}(\mathbf{k})\, \tilde{\xi}_{q',p',-1}(\mathbf{k}) \\ & + \int d\mathbf{k} \exp\left(\frac{-i\mathbf{k}^2\left(t-t'\right)}{2m\hbar}\right) \tilde{\xi}^*_{q,p,0}(\mathbf{k})\, \tilde{\xi}_{q',p',0}(\mathbf{k}) \\ & + \int d\mathbf{k} \exp\left(\frac{-i\mathbf{k}^2\left(t-t'\right)}{2m\hbar}\right) \tilde{\xi}^*_{q,p,+1}(\mathbf{k})\, \tilde{\xi}_{q',p',+1}(\mathbf{k})] \end{aligned} \tag{3.90}$$

Ce propagateur comporte trois termes propres aux trois valeurs que peut prendre s. En remplaçant par la formule (2.88), on obtient

$$\begin{aligned} K_\xi\left(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, y, y^0; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t', \mathbf{y}', y'^0\right) = & \left[\left(\frac{\mu}{2\pi\hbar i(y^0 - y'^0)}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{i\mu\left(\mathbf{y}'-\mathbf{y}\right)^2}{2\hbar(y^0 - y'^0)}\right)\right] \times \\ & [\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left[\left(\mathbf{q}'-\mathbf{q}\right).\mathbf{k} - \frac{\mathbf{k}^2}{2m}(t-t')\right]\right) \times \\ & P_1\left(\frac{\left(\mathbf{p}-\mathbf{k}\right).\left(\mathbf{p}'-\mathbf{k}\right)}{\left|\mathbf{p}-\mathbf{k}\right|\left|\mathbf{p}'-\mathbf{k}\right|}\right) e_n^*(|\mathbf{p}-\mathbf{k}|)e_n(|\mathbf{p}'-\mathbf{k}|)] \end{aligned} \tag{3.91}$$

3.5.2 Micro-détecteur stochastiquement et intrinsèquement étendu

Reconsidérons l'exemple précédent avec un micro-détecteur représenté par une fonction $\tilde{\boldsymbol{\Xi}}_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}(\mathbf{k})$ ayant trois composantes $\tilde{\Xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},-1;\mathbf{y}}(\mathbf{k})$, $\tilde{\Xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},0;\mathbf{y}}(\mathbf{k})$ et $\tilde{\Xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},+1;\mathbf{y}}(\mathbf{k})$. Les probabilités marginales deviennent dans le cas de la représentation impulsion

$$\begin{aligned}
\left\langle \Psi | E^{\xi}\left(\tilde{\Delta}\right)\Psi\right\rangle &= \int d\mathbf{k}d\mathbf{y} f^{\tilde{\Delta}}_{-1,-1}(\mathbf{k},\mathbf{y})\left|\tilde{\psi}_{-1}(\mathbf{k},\mathbf{y})\right|^2 + \int d\mathbf{k}d\mathbf{y} f^{\tilde{\Delta}}_{0.0}(\mathbf{k})\left|\tilde{\psi}_{0}(\mathbf{k},\mathbf{y})\right|^2 \\
&+ \int d\mathbf{k}d\mathbf{y} f^{\tilde{\Delta}}_{+1,+1}(\mathbf{k},\mathbf{y})\left|\tilde{\psi}_{+1}(\mathbf{k},\mathbf{y})\right|^2 + \int d\mathbf{k}d\mathbf{y}\ \tilde{\psi}^{*}_{-1}(\mathbf{k},\mathbf{y}) f^{\tilde{\Delta}}_{-1,0}(\mathbf{k},\mathbf{y})\tilde{\psi}_{0}(\mathbf{k},\mathbf{y}) \\
&+ \int d\mathbf{k}d\mathbf{y}\tilde{\psi}^{*}_{-1}(\mathbf{k},\mathbf{y}) f^{\tilde{\Delta}}_{-1,+1}(\mathbf{k},\mathbf{y})\ \tilde{\psi}_{+1}(\mathbf{k},\mathbf{y}) + \int d\mathbf{k}d\mathbf{y}\tilde{\psi}^{*}_{0}(\mathbf{k},\mathbf{y}) f^{\tilde{\Delta}}_{0,-1}(\mathbf{k},\mathbf{y})\ \tilde{\psi}_{-1}(\mathbf{k},\mathbf{y}) \\
&+ \int d\mathbf{k}d\mathbf{y}\tilde{\psi}^{*}_{0}(\mathbf{k},\mathbf{y}) f^{\tilde{\Delta}}_{0,+1}(\mathbf{k},\mathbf{y})\ \tilde{\psi}_{+1}(\mathbf{k},\mathbf{y}) + \int d\mathbf{k}d\mathbf{y}\tilde{\psi}^{*}_{+1}(\mathbf{k},\mathbf{y}) f^{\tilde{\Delta}}_{+1,-1}(\mathbf{k},\mathbf{y})\ \tilde{\psi}_{-1}(\mathbf{k},\mathbf{y}) \\
&+ \int d\mathbf{k}d\mathbf{y}\tilde{\psi}^{*}_{+1}(\mathbf{k},\mathbf{y}) f^{\tilde{\Delta}}_{+1,0}(\mathbf{k},\mathbf{y})\ \tilde{\psi}_{0}(\mathbf{k},\mathbf{y}) \qquad (3.92)
\end{aligned}$$

Dans le cas de la représentation configuration, elles s'écrivent

$$\begin{aligned}
\left\langle \Psi | E^{\xi}\left(\hat{\Delta}\right)\Psi\right\rangle &= \int d\mathbf{x}d\mathbf{y} f^{\hat{\Delta}}_{-1,-1}(\mathbf{x},\mathbf{y})\left|\hat{\psi}_{-1}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right|^2 + \int d\mathbf{x}d\mathbf{y} f^{\hat{\Delta}}_{0.0}(\mathbf{x},\mathbf{y})\left|\hat{\psi}_{0}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right|^2 \\
&+ \int d\mathbf{x}d\mathbf{y} f^{\hat{\Delta}}_{+1,+1}(\mathbf{x},\mathbf{y})\left|\hat{\psi}_{+1}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right|^2 + \int d\mathbf{x}d\mathbf{y}\ \hat{\psi}^{*}_{-1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) f^{\hat{\Delta}}_{-1,0}(\mathbf{x},\mathbf{y})\hat{\psi}_{0}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\
&+ \int d\mathbf{x}d\mathbf{y}\hat{\psi}^{*}_{-1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) f^{\hat{\Delta}}_{-1,+1}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ \hat{\psi}_{+1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \int d\mathbf{x}d\mathbf{y}\hat{\psi}^{*}_{0}(\mathbf{x},\mathbf{y}) f^{\hat{\Delta}}_{0,-1}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ \hat{\psi}_{-1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\
&+ \int d\mathbf{x}d\mathbf{y}\hat{\psi}^{*}_{0}(\mathbf{x},\mathbf{y}) f^{\hat{\Delta}}_{0,+1}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ \hat{\psi}_{+1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \int d\mathbf{x}d\mathbf{y}\hat{\psi}^{*}_{+1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) f^{\hat{\Delta}}_{+1,-1}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ \hat{\psi}_{-1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\
&+ \int d\mathbf{x}d\mathbf{y}\hat{\psi}^{*}_{+1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) f^{\hat{\Delta}}_{+1,0}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ \hat{\psi}_{0}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \qquad (3.93)
\end{aligned}$$

Les fonctions f sont les mêmes que celles données par les relations (3.78) et (3.79) avec $-1 \leq s, s' \leq +1$. Les probabilités marginales possèdent la même interprétation que celle du cas purement stochastique sauf que les fonctions f sont multipliées par la fonction h.

Finalement, le propagateur libre vaut dans le cas où $j = 1$

$$\begin{aligned}
K_{\Xi}\left(\mathbf{q},\mathbf{p},t,\mathbf{y},y^0;\mathbf{q}',\mathbf{p}',t',\mathbf{y}',y'^0\right) &= h^*(\mathbf{y})h(\mathbf{y}')\left[\left(\frac{\mu}{2\pi\hbar i(y^0-y'^0)}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(\frac{i\mu\left(\mathbf{y}'-\mathbf{y}\right)^2}{2\hbar(y^0-y'^0)}\right)\right]\times \\
&[\int d\mathbf{k}\exp\left(\frac{-i\mathbf{k}^2\left(t-t'\right)}{2m\hbar}\right)\tilde{\xi}^{*}_{q,p,-1}(\mathbf{k})\,\tilde{\xi}_{q',p',-1}(\mathbf{k}) \\
&+\int d\mathbf{k}\exp\left(\frac{-i\mathbf{k}^2\left(t-t'\right)}{2m\hbar}\right)\tilde{\xi}^{*}_{q,p,0}(\mathbf{k})\,\tilde{\xi}_{q',p',0}(\mathbf{k}) + \\
&\int d\mathbf{k}\exp\left(\frac{-i\mathbf{k}^2\left(t-t'\right)}{2m\hbar}\right)\tilde{\xi}^{*}_{q,p,+1}(\mathbf{k})\,\tilde{\xi}_{q',p',+1}(\mathbf{k})] \qquad (3.94)
\end{aligned}$$

Les relations exprimant les fonctions f et celle exprimant le propagateur libre dépendent de la variable de l'espace interne y. En effet, ces fonctions dépendent des fonctions d'onde propres $\Xi_{\mathbf{q},\mathbf{p},s;\mathbf{y}}$ qui dépendent de l'onde physique à travers la fonction $h(\mathbf{y})$ qui reflète l'extension intrinsèque de la particule. Ceci nous mène à dire que le mode interne du micro-détecteur contribue au processus de la mesure.

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons commencé par présenter la mécanique quantique stochastique pour une particule scalaire libre. Nous avons étudié la représentation espace des phases du groupe de Galilée G, les états physiques de l'espace de Hilbert $L^2\left(\Gamma^{\xi}\right)$ et les vecteurs d'état propres du micro-détecteur $|\xi\rangle$. Juste après, nous avons présenté les probabilités et leurs interprétations physiques, notamment les fonctions de confiance $\chi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x})$ et $\chi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k})$ dans les relations de marginalité (1.24) et (1.25), qui s'interprètent comme la probabilité conditionnelle que la mesure de la position (respectivement de l'impulsion) donne une valeur $\mathbf{q}$ (respectivement $\mathbf{p}$) quand la valeur réelle est $\mathbf{x}$ (respectivement $\mathbf{k}$). De plus, nous avons présenté les différents opérateurs utilisés en mécanique quantique, écrits dans la représentation espace des phases. L'opérateur positif $E^{\boldsymbol{\xi}}(\Delta)$ fait partie de ces opérateurs, il est directement lié au processus de mesure en mécanique quantique (à la localisation stochastique dans l'espace des phases) et sert à définir le système de covariance. Nous avons abordé par la suite l'équation de Schrödinger qui s'écrit directement dans la représentation dans laquelle on considère le système. Le courant de probabilité a été défini ainsi que l'équation de continuité qu'il satisfait. Enfin, nous avons considéré le propagateur libre stochastique. Notons qu'à la limite conventionnelle, les résultats de la théorie stochastique tendent vers ceux de la mécanique quantique conventionnelle, ce qui peut être un bon motif pour dire que la théorie stochastique peut être une généralisation de la mécanique quantique conventionnelle.

Ensuite, nous avons présenté la mécanique quantique stochastique pour une particule libre qui possède un spin j. Nous avons considéré un système particule+micro-détecteur de spin total $J = 0$, où la particule et le micro-détecteur ont un même spin j entier. Ce système évolue dans l'espace de Hilbert H_0 où les états sont écrits dans la représentation espace des phases U_0. Cet espace de Hilbert est décomposable en sous-espaces irréductibles H^{ξ}, il en est de même pour U_0 qui se décompose en sous-représentations irréductibles U^{ξ}. Nous avons décrit par la suite le système de covariance pour ce cas, et les systèmes de covariance marginaux. Ces systèmes de covariance servent à définir les probabilités marginales. On a distingué deux cas: dans le premier cas, le spin de la particule et celui du micro-détecteur sont parfaitement alignés. Les résultats obtenus sont semblables à ceux du cas scalaire, sauf que la particule possède un spin entier $\mathbf{j}$. Dans le deuxième cas, le spin de la particule possède une direction quelconque par rapport à celui du micro-détecteur. Dans la relation de marginalité (2.57), on a trouvé des termes où $s = s'$ ainsi que des termes où $s \neq s'$ attribués à l'effet de fluctuation du spin par rapport à l'axe de coordonnées stochastiques sur la mesure de la position. Les fonctions $\chi_s^{\Delta_{\mathbf{x}}}(s')$ sont définies comme les fonctions de confiance du spin stochastique $s = (s, \chi_s)$. A son tour le propagateur libre stochastique est obtenu dans ce cas, il comporte $(2j+1)$ termes, chacun propre à une valeur de s. L'ensemble des résultats présentés a été appliqués au cas du spin $j = 1$.

Dans les résultats présentés aux deux premiers chapitres, la particule garde son caractère ponctuel intrinsèque. Le troisième chapitre décrit les particules intrinsèquement étendues par une fonction d'onde physique u. Pour mettre cette idée en application, nous avons considéré deux cas. Commençons par le premier cas, où la partie externe de la particule intrinsèquement étendue possède un extension stochastique. L'espace de Hilbert total H est le produit tensoriel de celui de la représentation espace des phases H^{ξ} par celui de la représentation configuration $L^2(\mathbb{R}^3)$. En conséquences, le vecteur d'état propre stochastique qui décrit le micro-détecteur possède une partie externe stochastique et une partie interne ponctuelle. Le système de covariance lui aussi, est le produit tensoriel du système de covariance dans l'espace des phases externe, par le système d'imprimitivité de l'espace de configuration interne. Le propagateur possède la même structure en produit tensoriel, d'un propagateur stochastique externe par un propagateur interne conventionnel. Les probabilités marginales s'écrivent comme dans le cas purement stochastique, mais avec une intégration en plus par rapport à la variable interne $\mathbf{y}$. Les fonctions de confiance du spin stochastique sont identiques à celles du cas purement stochastique.

Dans le deuxième cas, une extension intrinsèque est attribuée au micro-détecteur stochastique. La partie interne du micro-détecteur n'est plus alors ponctuelle mais représentée par l'onde physique $h(\mathbf{y})$. Ainsi, le vecteur d'état propre $|\Xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}\rangle$ est le produit du vecteur d'état propre stochastique $\left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}\right\rangle$ par la fonction h. Le système de covariance possède la même forme que celle préposée par la théorie stochastique pour des micro-détecteurs ayant une structure interne. Dans les formules des probabilités marginales, en plus de la fonction d'onde, la fonction f dépend elle aussi de la variable interne $\mathbf{y}$ au moyen de la fonction h. La variable interne $\mathbf{y}$ témoigne de l'extension intrinsèque du micro-détecteur et de la particule système. Le propagateur a été défini d'une manière analogue à celle du cas stochastique ordinaire, sa seule particularité est que sa partie interne est multipliée par la fonction h. Comme dans le deuxième chapitre, les résultats obtenus ont été illustrés par une application au cas du spin $j = 1$.

Dans ce travail, nous n'avons considéré que des spins égaux entiers, le cas d'un spin total J non nul composé de spin différents entiers et demi-entiers du micro-détecteur et de la particule système fait l'objet d'une autre étude. Dans les deux cas étudiés, les fonctions ξ et u n'ont pas de formes explicites, et les courants de probabilité n'ont pas été étudiés. Ces questions pourraient constituer l'objet de travaux ultérieurs. Notons aussi que les fonctions de confiance du spin stochastique n'ont pas pu être définies dans les cas du micro-détecteur stochastiquement et intrinsèquement étendu. Le problème de considération d'un potentiel d'interaction n'a pas été abordé, mais il reste quand même envisageable car il correspond à une situation proche de la réalité.

ANNEXE

A EGALITE DES PRODUITS SCALAIRES

Nous montrons maintenant l'égalité des produits scalaires de l'espace de Hilbert des fonctions $\Psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y})$ et celui des fonctions $\hat{\mathbf{\Psi}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \hat{\psi}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,h(\mathbf{y})$. C'est-à-dire dans le cas où le micro-détecteur est stochastiquement et intrinsèquement étendu. Le cas où il est seulement stochastiquement étendu se déduit facilement en posant $h(\mathbf{y}) = 1$. Les vecteurs d'état propres

$$|\Xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}\rangle = U_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\,|\Xi_{\mathbf{y}}\rangle = \left(U_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\,\left|\xi_{\mathbf{y}}\right\rangle\right)h(\mathbf{y}) \tag{3.95}$$

ont la forme de composantes

$$\hat{\Xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s;\mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}') = \hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{x})\,\delta(\mathbf{y}-\mathbf{y}')\,h(\mathbf{y}) \tag{3.96}$$

La particule système est décrite par la fonction d'onde

$$\Psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}) = \langle\Xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}|\Psi\rangle = \sum_{s=-j}^{+j}\int d\mathbf{x}d\mathbf{y}'\hat{\Xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p},s;\mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}')\hat{\psi}_s(\mathbf{x},\mathbf{y}') \tag{3.97}$$

qui peut s'écrire aussi de cette manière

$$\Psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}) = \sum_{s=-j}^{+j}\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x}\hat{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{x})\hat{\psi}_s(\mathbf{x},\mathbf{y})\,h(\mathbf{y}) \tag{3.98}$$

Le produit scalaire dans H s'écrit

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^9}\Psi^*(\mathbf{q},\mathbf{p},;\mathbf{y})\,\Psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y})\,d\mathbf{q}d\mathbf{p}d\mathbf{y} \tag{3.99}$$

et le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^6)\otimes l^2(2j+1)$ s'écrit

$$\left\langle\hat{\mathbf{\Psi}}|\hat{\mathbf{\Psi}}\right\rangle = \sum_{s=-j}^{+j}\int_{\mathbb{R}^6} d\mathbf{x}d\mathbf{y}\hat{\psi}^*_s(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\hat{\psi}_s(\mathbf{x},\mathbf{y})\,|h(\mathbf{y})|^2 \tag{3.100}$$

Etablissons l'égalité entre ces deux produits scalaires, en utilisant la définition (3.98) de la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y})$. Remplaçons l'expression (3.98) dans la définition du produit scalaire dans H

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \Psi \rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{q} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \left[h(\mathbf{y}) \sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \hat{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{x}) \hat{\psi}_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) \right] \left[h^*(\mathbf{y}) \sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x}' \hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{x}') \hat{\psi}^*_s(\mathbf{x}',\mathbf{y}) \right] \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{q} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \, |h(\mathbf{y})|^2 \left[\sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^6} d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \hat{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{x}) \hat{\psi}_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) \, \hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{x}') \hat{\psi}^*_s(\mathbf{x}',\mathbf{y}) \right] \end{aligned} \tag{3.101}$$

En introduisant la propriété (1.18) de la fonction d'onde propre du micro-détecteur $\hat{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ dans la relation précédente, on trouve

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \Psi \rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{q} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \, |h(\mathbf{y})|^2 \, [\sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^6} d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \exp\left(\frac{-i}{\hbar} \mathbf{p}.(\mathbf{x}-\mathbf{q}) \right) \hat{\xi}^*_s(\mathbf{x}-\mathbf{q}) \times \\ & \quad \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}.(\mathbf{x}'-\mathbf{q}) \right) \hat{\xi}_s(\mathbf{x}'-\mathbf{q}) \hat{\psi}_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) \, \hat{\psi}^*_s(\mathbf{x}',\mathbf{y})] \end{aligned} \tag{3.102}$$

qui devient

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \Psi \rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{q} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \, |h(\mathbf{y})|^2 \, [\sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^6} d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}.(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) \right) \hat{\xi}^*_s(\mathbf{x}-\mathbf{q}) \times \\ & \quad \hat{\xi}_s(\mathbf{x}'-\mathbf{q}) \hat{\psi}_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) \, \hat{\psi}^*_s(\mathbf{x}',\mathbf{y})] \end{aligned} \tag{3.103}$$

Si l'on utilise la propriété

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}.(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) \right) = (2\pi\hbar)^3 \, \delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) \tag{3.104}$$

le produit scalaire devient

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{q} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \, |h(\mathbf{y})|^2 \, (2\pi\hbar)^3 \sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \left| \hat{\xi}_s(\mathbf{x}-\mathbf{q}) \right|^2 \hat{\psi}_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) \, \hat{\psi}^*_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{3.105}$$

Sachant que

$$\chi_{\mathbf{q},s}(\mathbf{x}) = (2\pi\hbar)^3 \left| \hat{\xi}_s(\mathbf{x}-\mathbf{q}) \right|^2; \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{q} \chi_{\mathbf{q},s}(\mathbf{x}) = 1 \tag{3.106}$$

le produit scalaire dans H prend la forme finale

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^6} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \, |h(\mathbf{y})|^2 \, \hat{\psi}_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) \, \hat{\psi}^*_s(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left\langle \hat{\mathbf{\Psi}} | \hat{\mathbf{\Psi}} \right\rangle \tag{3.107}$$

D'où l'égalité des produits scalaires entre les espaces de Hilbert H et $L^2(\mathbb{R}^6) \otimes l^2(2j+1)$.

Bibliographie

[1] S. T. Ali, E. Prugovecki, Acta Appl. Math. **6**, 19-45 (1986).

[2] S. T. Ali, E. Prugovecki, J. Math. Phys **18**, 219 (1977).

[3] S. T. Ali, E. Prugovecki, Physica **89**, 78 (1977).

[4] S. T. Ali, E. Prugovecki, J. Math. Phys **17**, 219 (1977).

[5] S. T. Ali, E. Prugovecki, J. Math. Phys **17**, 517 (1977).

[6] V. Bargmann, The Annals of Mathematics **59**, 1 (1954).

[7] C. Carmeli, G. Cassinelli, E. De Vito, A. Toigo, B. Vacchini, J. Phys. A : Math. Gen **37**, 5057 (2004).

[8] H. T. Croft, K. J. Falcon, R. K. Guy, Unsolved Problms in Geometry (New York, Springer, 1991).

[9] José A. De Azcàrraga, José M. Izquiedo, Lie group, Lie algebra, Cohomology and someApplications in Physics (Cambridge university press, 1995).

[10] L. de Broglie, La Réinterprétation de la Mécanique Ondulatoire (Paris, Gauthier- Villars,1971).

[11] B. Delamotte, Un Soupçon de la Théorie des Groupes : Groupe des Rotations et Groupe de Poincaré (cour de D. E. A. Université de Paris,1995-1996).

[12] J.L. Destouches, La Quantification en Théorie Fonctionnelle des Corpuscules (Paris, Gauthier- Villars, 1956).

[13] J.L. Destouches, Corpuscules et Champs en Théorie Fonctionnelle (Paris, Gauthier-Villars, 1958).

[14] Richard P. Feynman and André R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals (New York: McGraw-Hill 1965).

[15] N. Giovannini, J. Math. Phys **22**, 2389 (1981).

[16] D. Giulini, Annals of Physics **249**, 222 (1996).

[17] M. Hachemane : "Conception Géométro-Différentielle de la Particule Etendue et sa Quantification par la Méthode des Représentations Induites, Symétrie de De Sitter". Thèse de Magistère, USTHB, Alger (1994).

[18] E. Kapuscik ,Czechoslovak, Journal of Physics **50**, 3658 (2000).

[19] J-M. Levy-Leblond, E. Loebl, Group Theory and Applications (Academic Press, New York 1972).

[20] J-M. Levy-Leblond, J. Math. Phys **4**, 6 (1963).

[21] J-M. Levy-Leblond, Commun. Math. Phys **4**, 157 (1967).

[22] M. D. Oliveira, M. C. B. Fernandes, F. C. Khanna, Annals of Physics **312**, 492 (2004).

[23] Y. Oualili : "La Stochasticité pour la Particule Etendue". Mémoire de Magistère, USTHB, Alger (2006).

[24] T. B. Peterhouse : "Classical Observables, Measurement, and Quantum Mechanics", Thèse de Doctorat, Université de Cambridge,(1994).

[25] E. Prugovecki, Stochastic Quantum Mechanics and Quantum Space-Time (Reidel, Dordrecht, 1984).

[26] E. Prugovecki, Quantum Mechanics in Hilbert Space (Academic Press, New York and London, 1971).

[27] E. Prugovecki, Principles of Quantum General Relativity (World Scientific Publishing, 1995).

[28] E. Prugovecki, J. Math. Phys **14**, 10 (1973).

[29] E. Prugovecki, Phys. Rev D **18**, 3655 (1978).

[30] E. Prugovecki, J. Math. Phys **19**, 11 (1978).

[31] M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics : Functionnal Analysis (Academic Press, New York and London, 1980).

[32] E. J. Saletan, J. Math. Phys **2**, 1 (1961).

[33] A. E. Santana, A. Matos Neto, J. D. M. Vianna, F. C. Khanna, Physica A 280, 405 (2000).

[34] D. Sénéchal, Introduction à la théorie des groups de Lie (Cours, Univercité de Schebrook, Canada, 1997).

[35] A. Smida, M. Hachemane, A-H. Hamici, Found. Phys **28**, 8 (1998).

[36] A. Smida, M. Hachemane, A-H. Hamici, Y. Oualili, Int. J. Theo. Phys. 47, 1459 (2008).

[37] Wu-Ki Tung, Group Theory in Physics (World Scientific Publishing, 1985).

[38] C. C. Tannoudji, B. Diu, F. Loloë, Mécanique Quantique Tome I (Paris, Hermann, 1977).

[39] J. Voisin, J. Math. Phys **6**, 10 (1965).

[40] G. Wahba, An Introduction to Reproducing Kernel Hilbert Space and why they are so useful (SYSID, Rottrdam, 2003).

[41] E. P. Wigner, Ann. Math 40, 149 (1939).

.