

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENE »

FACULTE DE PHYSIQUE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de : MAGISTER

EN : PHYSIQUE

Spécialité : Energétique et Mécanique des Fluides

Par : M^{elle} ZITOUT Hamida

Sujet

*INFLUENCE DES CARACTERISTIQUES
GEOMETRIQUES SUR L'ECOULEMENT SANGUIN*

Soutenu le 07/04/2007, devant le jury composé de :

Mr- D. KALACHE,	Professeur, USTHB.	Président
Mr- M. CHEREF,	Maître de Conférences, Univ. ALGER.	Directeur de Thèse
Mr- S. BENHADID,	Professeur, USTHB.	Examineur
Mr- M. MAHFOUD,	Maître de Conférences, USTHB.	Examineur
Mr- M. SAIGHI,	Maître de Conférences, USTHB.	Examineur

Dédicaces

Je tiens à dédier ce travail à :

*À la mémoire de :
Ma grande mere Yamina
Chikh Mahfoud*

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail aux êtres qui me sont très chers :

- 🎁 A mes chers parents qui ont pu faire preuve d'amour et de patience tout au long de ma vie spécialement cette année.
- 🎁 A mes adorables sœurs qui ont tant donné pour moi et qui m'ont incité a étudier et dont je cite : Zohra, Meriem, Saliha, Yakout, et Nour El Houda la chouchou de la maison.
- 🎁 A mes précieux frères : Hamid, Ahmed, Youcef, Ilyes
- 🎁 A ma très chers grand-mère Hafsa, a vous également mes tantes et oncles ainsi qu'à toute la famille petit et grand.
- 🎁 A mes cousins et cousines les plus proche de moi : Rbiha , Ouarda, Sonia
- 🎁 A mes très chers amis (es) qui m'ont soutenue
- 🎁 A tous les membre de UGEL, HMS d'eucalyptus.

HAMIDA

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier ma famille surtout ma mère, qui m'ont soutenu, dans tous les sens du terme, pour que je concrétise ce travail. Mes remerciements s'adressent très vivement à mes frères Ameur, Abdenour et Mohamed Seghir, ainsi que mes sœurs Fatiha, Nacera, et Nacuel.

Ce travail de thèse a été effectué sous la direction de monsieur Mustapha Cheref à qui je tiens à exprimer ici ma profonde reconnaissance pour m'avoir fait confiance, et pour m'avoir dirigé pendant ces années. Je tiens tout particulièrement à le remercier pour la richesse de ses idées et de ces conseils, et pour m'avoir fait profiter de ses vastes connaissances, sa rigueur, sa créativité ainsi que ses qualités humaines qui m'ont énormément appris.

Ce travail de recherche a été accompli au sein de l'équipe de recherche « Rhéologie », sous la direction de M. Salah Benhadid, du laboratoire de Mécanique des Fluides Théorique et Appliquée, à l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne.

J'adresse mes sincères remerciements à M. Djamel Kalache de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury. Je remercie M. Salah Benhadid, M. Mohamed Mahfoud et M. Mohamed Saighi d'avoir fait partie de mon jury et l'intérêt qu'ils ont bien voulu porté à mon travail.

Je voudrais remercier chaleureusement tous mes collègues dans notre équipe de Rhéologie, Mohamed, Moussa, M'hamed, Yazid, Louiza, Fatma Zohra, Assia, Zaria Nerdjess, et Anissa pour l'ambiance de travail chaleureuse et motivante qu'ils ont su créer et maintenir.

Enfin, mes plus vifs remerciements vont à M. Hassen Belbachir de l'institut de mathématique, M. Ouicher Abd El-Ghani et M. Brahim Ghanem pour leur aide et leurs conseils.

SOMMAIRE

Sommaire

Sommaire	1
Nomenclature.....	1
Introduction Générale.....	1
Chapitre 1 : Système vasculaire –la rhéologie du sang.....	3
1- Système cardiovasculaire	4
1-1- Vaisseaux sanguins : caractéristiques géométriques	5
1-2- Les différents types de vaisseaux et leurs compositions	6
1-3- Altérations de la paroi vasculaire	7
2- Le sang - Rhéologie du sang	10
2-1- Caractérisation	10
2-1-1- Comportement du sang dans la grande circulation	10
2-1-2- Comportement du sang dans la petite circulation	11
2-2- Rhéologie sanguine	11
2-2-1- Comportement newtonien du sang : La viscosité du sang	12
2-2-2- Comportement non newtonien du sang	13
2-2-3- Comportement biphasique	14
3- Références bibliographiques	16
Chapitre 2: formulation du problème	20
1- Etude théorique	21
1- Fluide non-newtonien.....	23
2- Fluide newtonien.....	24
3- Problématique	26
2- Etude numérique.....	26
1- Quelques notions sur le code COSMOS FloWorksS.....	27
2- Organigramme du calcul numérique	28
3- Expression de la méthode numérique utilisée	28
3-1- La méthode aux Volumes Finis	29
- Algorithme pour la résolution de la vitesse en écoulement stationnaire	29

3- Références bibliographiques	41
Chapitre 3: Résultats et discussion	43
1- validation numérique	44
2- Etudes numériques dans le cas de conduites complexes	46
2-1- Etude de l'écoulement d'un fluide newtonien et d'un fluide non-newtonien dans une conduite divergente	47
2-2- Etude de l'écoulement d'un fluide newtonien et d'un fluide non-newtonien dans une conduite convergente.....	49
2-3- Etude de l'écoulement d'un fluide newtonien et d'un fluide non-newtonien dans une conduite sténosée.....	52
2-4- Etude de l'écoulement d'un fluide newtonien et d'un fluide non-newtonien dans une conduite coudée caractérisée par un angle de 90°	55
2-5- Etude de l'écoulement d'un fluide newtonien et d'un fluide non-newtonien dans une conduite coudée caractérisée par un angle de 45°	59
2-6 - Etude de l'écoulement d'un fluide Newtonien : application au stent.....	63
3- Discussion et Conclusion	67
4- Références bibliographiques	69
Conclusion Générale	70
Annexes	73
Annexe 01 : La Rhéologie.....	74
Annexe 02 : Maillages structurés et non-structurés (Avantages et inconvénients).....	81

Nomenclature

$\dot{\gamma}$: Vitesse de cisaillement
μ_a	: Viscosité dynamique apparente
μ	: Viscosité dynamique
τ_c	: Contraintes seuil de cisaillement
ρ	: Masse volumique de fluide
P	: Pression
f	: Force de pesanteur
$\bar{\bar{D}}$: Tenseur de déformation
$\bar{\bar{\tau}}$ ou τ	: Tenseur de taux de frottement
k	: consistance du fluide
n	: Indice de structure de fluide
(r, θ, z)	: Coordonnées cylindriques
$\vec{V}=(v_r, v_\theta, v_z)$: Composantes de la vitesse dans le système des coordonnées cylindriques
(x, y, z)	: Coordonnées cartésiennes
$\vec{V}=(u, v, w)$: Composantes de la vitesse dans le système des coordonnées cartésiennes
e	: la position « est » de la maille
E	: la position « est » de la maille après interpolation
w	: la position « ouest » de la maille
W	: la position « ouest » de la maille après interpolation
n	: la position « nord » de la maille
N	: la position « nord » de la maille après interpolation
s	: la position « sud » de la maille
S	: la position « sud » de la maille après interpolation
ΔV_u	: Volume de contrôle
U_j	: La vitesse discrétisée
P_c	: Pression discrétisée

A_{ij}	: La surface des faces des volumes de contrôle
u, v	: les composantes de la vitesse suivant les directions x et y respectivement
I, J	: les notations de la grille décalée suivant les directions x et y respectivement
i, j	: les notations de la grille suivant les directions x et y respectivement

INTRODUCTION

GENERALE

Introduction Générale

La Biomécanique, discipline qui étudie, suivant les principes de la Mécanique, la physiologie des systèmes vivants, a pour but d'explicitier et d'aider à mieux comprendre le comportement des systèmes biologiques, en particulier du fluide sanguin et de ses interactions avec le système cardiovasculaire.

A ce titre, la mise en oeuvre de modèles théoriques aide à mieux appréhender l'évolution des fluides et des tissus étudiés ainsi que les pathologies afférentes dans le cadre d'une vision prédictive.

En effet, le système cardiovasculaire et plus particulièrement le système artériel, ensemble de conduits à géométries complexes, révèlent des flux sanguins qui varient en fonction de l'arbre circulatoire.

L'hémodynamique vasculaire reste donc, de fait, toujours un champ d'investigation important et d'actualité : les explications évoquées dans les travaux de recherche sont encore souvent sujettes à caution, en partie à cause de la difficulté de traduire les aspects d'interaction fluide – structure.

Ainsi, l'examen de la nature des écoulements sanguins au sein de l'arbre vasculaire permet de mettre en évidence l'influence des diamètres des structures vasculaires sur le tissu sanguin qui peut se comporter, du point de vue de la Mécanique, comme un fluide newtonien, non-newtonien, voire une suspension.

C'est pourquoi, pour étudier le comportement de l'écoulement d'un fluide sanguin à travers ces géométries complexes, et tenant compte du comportement non linéaire du sang, la

modélisation numérique se présente comme un outil très utile et efficace pour évaluer le comportement du sang s'écoulant dans les conduites artérielles ou à travers des dispositifs artificiels, dans une optique de thérapeutiques de substitution ou de revascularisation.

Dans le cadre de ce travail, nous étudierons les écoulements du fluide sanguin supposant le régime stationnaire et ce, dans différentes configurations axisymétriques : conduite cylindrique, conduite convergente, conduite divergente, conduite sténosée, ainsi que dans des coudes caractérisés par différents angles : 90° et 45° .

Pour ce faire, l'étude numérique mise en œuvre a été développée dans le cadre de la méthode aux Volumes Finis, utilisant le code de calcul COSMOS FloWorks.

Ainsi, nous présenterons d'abord brièvement le système cardio-vasculaire du point de vue de la physiologie et de son architecture, ainsi que des pathologies afférentes.

Nous présenterons également les caractéristiques du tissu sanguin du point de vue de la biorhéologie et exposerons les études relatives aux écoulements sanguins déjà réalisées.

Le second chapitre concerne l'étude théorique, la formulation mathématique, et la modélisation numérique réalisée à l'aide du code de calcul COSMOS FloWorks, utilisant la Méthode aux Volumes Finis.

Le troisième chapitre réunit les résultats obtenus et les discussions qui en découlent avec deux axes : le premier traduisant notre souci de valider le modèle numérique développé : une étude analytique effectuée dans un cas simple (conduite cylindrique, fluide newtonien) pour établir une comparaison entre les résultats numériques et analytiques. Le second concerne l'étude dynamique de l'écoulement dans les différentes configurations géométriques proposées.

Les profils de vitesses et les zones de recirculation sont étudiés en régime laminaire stationnaire en fonction de la géométrie, des singularités (exemple de la sténose) et des aspects non-newtoniens du fluide.

CHAPITRE I :

Systeme

Vasculaire – la

Rhéologie du Sang

L'appareil circulatoire est l'un des premiers à s'ébaucher. Ce fait traduit l'importance vitale du flux circulatoire dès le début de l'embryogenèse, et constitue l'un des caractères biologiques les plus fondamentaux de l'individu. L'appareil circulatoire s'appuie sur un véritable réseau aussi étendu que précis : un ensemble de conduits à géométries complexes caractérisés par une variation de leurs diamètres, des grandes artères vers les capillaires.

I. Système cardiovasculaire

Tenant compte du cœur, organe central de la circulation, la mise en mouvement du sang est principalement due à l'action de celui-ci qui joue le rôle de double pompe à quatre cavités, le cœur droit et le cœur gauche, chacun formé d'une oreillette et d'un ventricule. La composante musculaire du système cardiaque lui confère la capacité à se contracter afin d'assurer son rôle de pompe.

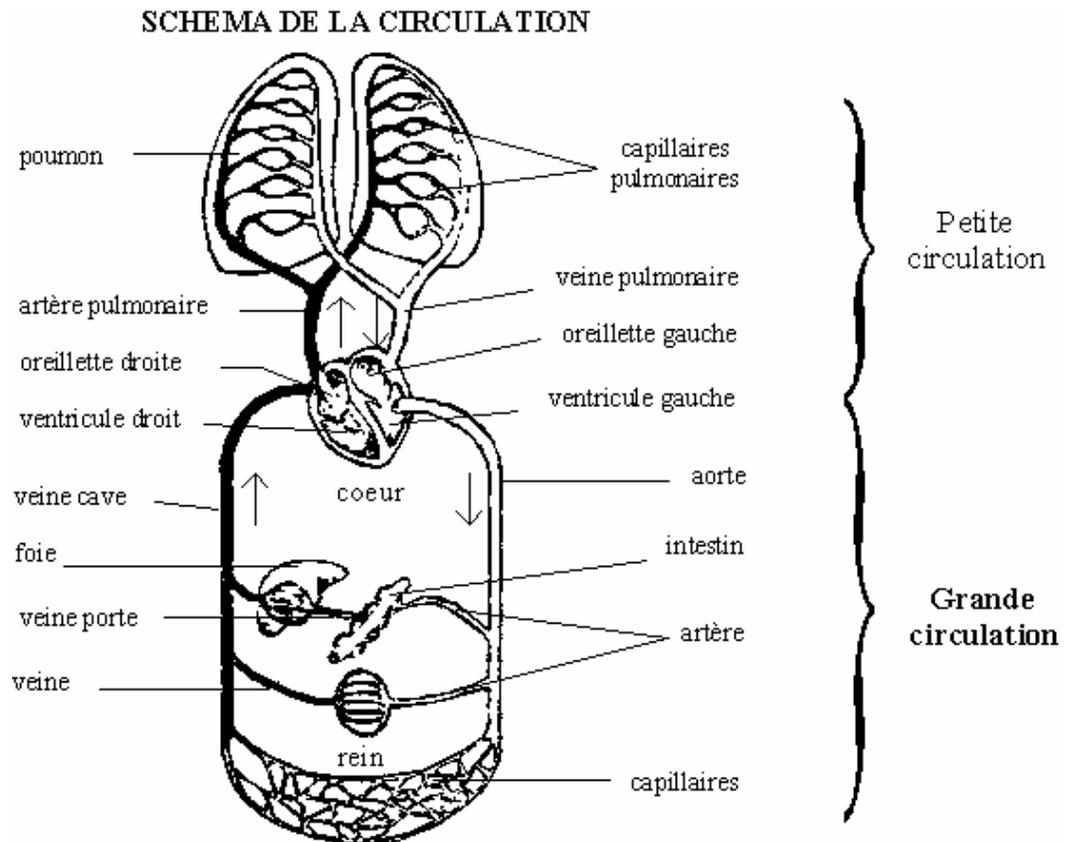


figure1 : Les principales artères et veines de l'homme

I.1. Vaisseaux sanguins : caractéristiques géométriques

L'arbre vasculaire est formé de vaisseaux capables de faire varier leurs géométries, non seulement de manière passive, mais également de façon active par contraction des muscles lisses de leur paroi [1] .

Les géométries varient en fonction de l'arbre vasculaire et la composition de la paroi, comme indiqué dans le tableau 1 suivant [2-4],

Vaisseau	Aorta	Artère	Artériole	capillaire	veinule	Veine	venae cavae
Paroi	2mm	1mm	20µm	1µm	2µm	0.5mm	1.5mm
Lumière	25mm	4mm	30µm	8µm	20µm	5mm	30mm
Taille des différents vaisseaux							
noir : Composition du de la paroi d'endothélium de cellule Vert : tissu élastique violet: muscle lisse orange : tissu connectif							
Pression mmHg	100	100-40	40-30	30-18	18-10	10-5	5-0
Ecoulement mm/sec	330-400	50	25	5	10	35	150
Section cm ²	8	20	700	5000	3000	20	14

Tableau 1. Comparaison entre les différents types de vaisseau sanguin

I.2. Les différents types de vaisseaux et leurs compositions

Il existe plusieurs types de vaisseaux sanguins qui diffèrent par leur longueur, leur diamètre et par l'épaisseur de leurs parois (artères, veines, capillaires et veinules [5]). Ces vaisseaux ni rigides, ni statiques, sont des structures dynamiques qui peuvent se contracter, se relâcher et même proliférer selon les besoins du système cardiovasculaire. Les propriétés des parois vasculaires ont ainsi été l'objet de nombreux travaux expérimentaux et théoriques [6-8].

Les parois des artères et des veines, sauf les plus petites, sont composées de trois couches, entourant un espace interstitiel rempli de sang. La couche interne est formée d'endothélium, un épithélium simple tapissant la lumière de tous les vaisseaux, en continuité avec l'endocarde. La couche moyenne comprend principalement des cellules musculaires lisses disposées en anneaux et des feuilletts d'élastine continus. La couche externe est composée de fibres collagènes lâchement entrelacées qui protègent les vaisseaux et les ancrent aux structures environnantes [4].

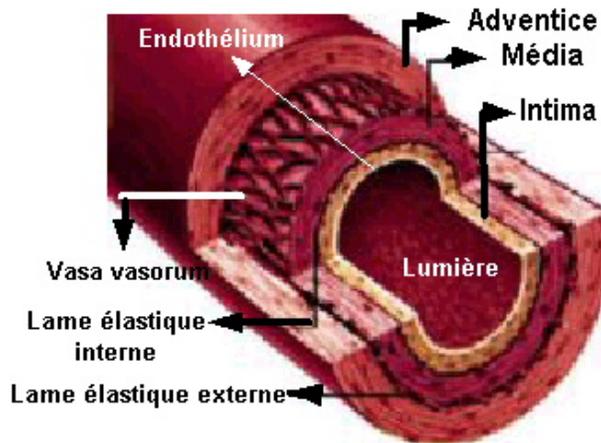


Figure 1 : Structure de base d'un vaisseau sanguin

Ainsi, l'observation de l'écoulement sanguin à travers l'arbre vasculaire révèle plusieurs phases différentes. Les contractions du cœur chassent le sang dans les grosses artères issues des ventricules [9] dans de grands vaisseaux dont les dimensions sont beaucoup plus grandes que le diamètre du globule rouge : le mélange apparaît comme un fluide homogène. Le sang peut être traité ici comme un fluide newtonien doué d'un coefficient de viscosité constant.

Le sang parcourt ensuite les ramifications des artères, jusqu'aux plus petites, les artérioles. Il aboutit ainsi dans les lits capillaires des organes et des tissus.

A sa sortie des capillaires, le sang emprunte les veinules, les veines et enfin les grosses veines qui convergent vers le cœur [10].

L'on met ici en évidence l'effet fahreus-lindquist [9] : dans le cadre de cet écoulement, le coefficient de viscosité efficace diminue avec le diamètre du vaisseau sanguin. Il est en outre important de noter que seuls les capillaires sont en contact étroit avec les cellules. Leurs parois extrêmement fines permettent des échanges entre le sang et le liquide interstitiel dans lequel baignent les cellules, le tissu sanguin apparaît ici comme une suspension.

I.3. Altérations de la paroi vasculaire

Les maladies cardiovasculaires sont souvent directement liées à la géométrie du vaisseau sanguin. Pour exemple, le rétrécissement des artères coronaires (les artères qui forment une couronne autour du cœur) entraîne une diminution du flux sanguin qui irrigue le cœur, et peut entraîner alors un infarctus [11] : aussi, l'étude de pathologies propres au système vasculaire nous amène à lier directement le comportement du fluide sanguin et la paroi vasculaire. C'est le cas d'une étude numérique par la Méthode aux Volumes Finis [12].

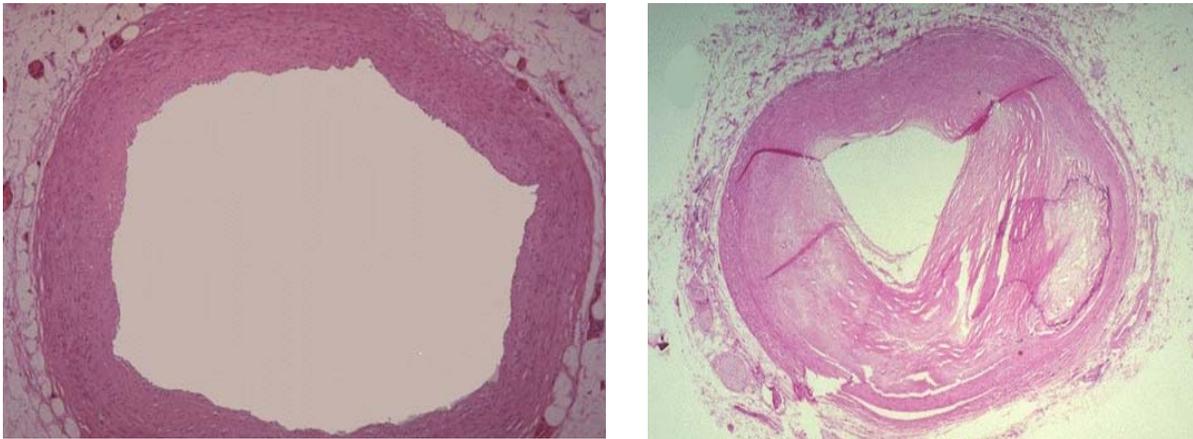


Figure 4 : forme normale et pathologique (athérosclérose)

L'athérosclérose a fait l'objet de nombreux travaux d'ordre fondamental et appliqué dans le but de comprendre la genèse de cette pathologie et les divers paramètres la régissant [4]. Benard [13] a ainsi établi une forte corrélation entre les zones d'athérosclérose et les zones de recirculation.

Un autre type d'altération, l'anévrisme (il s'agit d'une dilatation anormale d'un vaisseau qui amène une fragilité de sa paroi) (figure 5)[4] qui peut amener l'artère à se rompre entraînant

une hémorragie potentiellement mortelle, a également fortement été étudié. Jean-Noel et al [14] ont réalisé une étude détaillée sur les anévrysmes et les méthodes de diagnostic et de traitement. D'autres travaux expérimentaux utilisant l'imagerie médicale [15] (pour exemple, des scanners) pour évaluer l'effet de la pression sur un anévrysmes (supposant la paroi élastique) ont également été effectués [16, 17]. Finol [18] a ainsi développé une visualisation à trois dimensions (utilisant la Méthode aux Eléments Finis [19]).



Figure 5 : la forme d'anévrysmes

Plus, le rétrécissement pathologique, congénital ou acquis, du calibre d'un organe, d'un canal ou d'un vaisseau sont autant d'exemples traduisant l'intérêt de ces études : une sténose empêche le transit du sang, et peut provoquer une dilatation du segment organique sus-jacent [20].

Par ailleurs, de nombreuses études simulant les écoulements de différents fluides [21] à travers les sténoses artérielles, tenant compte de certaines hypothèses, ont permis d'étudier le comportement de ces fluides ; certains auteurs ont réalisé des études théoriques : Lorthois et al [22] sur une sténose axisymétrique avec un fluide postulé incompressible en supposant la paroi rigide et d'autres qui ont pris en considération la paroi élastique [19, 23, 24]. Ainsi, Liepsch [25] a réalisé un dispositif associé à une sténose de forme cylindrique, suivi par une visualisation des échantillons de sténoses à différentes valeurs de Reynolds [26]. Gijsen et al [27] ont utilisé un anémomètre laser doppler pour une comparaison entre deux modèles exprimant la bifurcation de l'artère carotide, la même technique a été utilisée pour calculer la vitesse dans un divergent [28]. Allard et al [29] ont également utilisé un système laser doppler pour mesurer la vitesse dans une bifurcation.

D'autres travaux ont pris en considération les écoulements pulsés dans le cadre de différents modèles géométriques [30, 31] et [32].

D'autres, par le calcul de la contrainte de cisaillement pariétale maximale dans une sténose, ont développé des modèles par une méthode de couche limite en fonction des paramètres géométriques caractéristiques (degré de sténose et longueur) et du nombre de Reynolds de l'écoulement [33, 34]. Ainsi, une modélisation du comportement rhéologique du sang a été établie par l'utilisation de deux lois constitutives donnant la variation de la contrainte de cisaillement en fonction de la vitesse de cisaillement par la Méthode aux Eléments Finis dans le cadre d'un écoulement non-newtonien [35, 36].

Plusieurs travaux de recherche ont également associé des formes géométriques aux formes caractérisant des situations pathologiques [37-39], comme les prothèses coniques [40] ou « ondulées » [41] : exemple d'une étude numérique dans une conduite conique associée à une sténose utilisant la loi puissance [42], ou une bifurcation conique associée à une sténose [43, 44].

En outre, des simulations numériques dans le cadre d'études d'écoulements stationnaires laminaires d'un fluide, dont le comportement rhéologique est rhéofluidifiant, ont été effectuées dans une bifurcation à trois dimensions [45-47]. Plusieurs travaux de recherche ont également été réalisés sur une bifurcation coudée (avec un angle de courbure de 90°) [48] : Thiriet et al [49] (angle de courbure de 90° , rapport de courbure de 1/10) et une bifurcation plane symétrique (angle de bifurcation de 70° , rapport des sections de 0, 8) par un calcul basé sur la Méthode aux Eléments Finis. Le fluide est supposé ici traduire un comportement newtonien généralisé, représenté par la loi de Carreau, adaptée aux observations in situ.

Tout modèle d'écoulement de sang doit, à priori, prendre en compte le comportement non-newtonien du fluide. Toutefois, cet impératif est discuté lorsque l'investigation porte sur les gros troncs artériels [50, 51], avec un écoulement pulsé [52], voire dans le cas d'études d'un écoulement laminaire dans une conduite hélicoïdale avec la méthode aux volumes finis [53, 54]

Certains auteurs ont ainsi étudié les aspects liés à une sténose, des bifurcations dans le cas d'un fluide non-newtonien [55-58]. Klanchar [59] a déterminé expérimentalement l'influence de la paroi élastique déformable sur la contrainte de cisaillement en comparant une conduite simple et une bifurcation.

D'autres auteurs se sont intéressés au comportement du tissu sanguin en simplifiant la géométrie des parois [60]. La modélisation du comportement rhéologique du sang par deux lois paramétriques (Casson et Cross) ont permis d'évaluer la variation de la contrainte de cisaillement en fonction de la vitesse de cisaillement [35], caractérisant la comparaison entre les lois Puissance et Casson [61, 62]. Une approche numérique et expérimentale d'un fluide viscoplastique dans une conduite simple, un rétrécissement et un élargissement brusque ont également été développées [63].

II. Le sang - Rhéologie du sang

II. 1. Caractérisation :

Le sang est un tissu liquide dont les propriétés mécaniques peuvent être décrites à deux niveaux :

- (i) dans les gros vaisseaux, comme fluide newtonien incompressible de propriétés physiques connues.
- (ii) dans les petits vaisseaux, comme fluide complexe, suspension de particules dont l'influence des propriétés physiques ne sont plus négligeables.

Des variations anormales de ces propriétés peuvent être à l'origine de changements importants qui correspondent sur le plan médical à diverses pathologies.

Le sang est le media du système circulatoire. Il s'agit d'un mélange de cellules et de plasma qui compose 55% du liquide sanguin. Le volume restant de sang est la partie pleine appelée l'hématocrite et contient trois types principaux de cellules : globules rouges (érythrocytes), les globules blancs (leucocytes), et les plaquettes. Les cellules et les protéines semi-solides du sang augmentent la viscosité du sang et affectent le comportement de ce fluide [64]. A noter que le sang est approximativement quatre fois plus visqueux que l'eau [9].

II.1.2. Comportement du sang dans la grande circulation

Dans la zone de circulation artérielle, la dispersion des rouleaux d'hématies est pratiquement totale en raison de l'importance des vitesses de déformation rencontrées, par contre la fréquence relativement basse des pulsations cardiaques (environ 1 HZ) pourrait permettre au caractère non-newtonien du sang de se manifester de façon plus ou moins importante. Ainsi la

rhéologie sanguine dans cette zone peut être envisagée suivant deux types d'écoulement : les écoulements permanents et les écoulements pulsés et transitoires.

Elle dépend surtout des propriétés des parois (viscoélasticité, caractéristiques géométriques...)

II.1.3. Comportement du sang dans la petite circulation

La rhéologie dans cette zone de circulation est envisagée là encore sous deux aspects :

- la circulation capillaire où l'on rencontre de très importantes forces de cisaillement ; les globules rouges (les hématies) sont pratiquement totalement dispersés est seule intervient leur déformabilité en raison des dimensions des vaisseaux à traverser (le rayon du capillaire est inférieur ou égal à celui des hématies). Ainsi, la circulation est dominée par les propriétés rhéologiques du globule rouge (viscoélasticité de sa membrane et viscosité du fluide intérieur) [63].

- dans la microcirculation (artérioles, veinules), apparaissent essentiellement les propriétés rhéologiques (non-newtoniens) du sang dues à la formation et à la désagrégation des rouleaux des hématies à cause des vitesses de déformation faibles. Dans cette zone de circulation, la viscoélasticité du sang ne joue aucun rôle, puisque le flux n'est pratiquement plus pulsé, et que l'écoulement se fait en régime établi. Par contre, la concentration des globules rouges dans la région axiale et la formation des couches plasmatiques près de la paroi caractérisent un écoulement biphasique.

II.2. Rhéologie sanguine

Les propriétés rhéologiques du sang sont complexes et influencées par de nombreux facteurs et cela d'autant que le sang n'est pas un fluide homogène. Parmi ces propriétés, la relation entre contraintes appliquées et vitesses de déformation est l'une des plus importantes à connaître.

Il s'agit de contraintes de cisaillement, de vitesse de cisaillement $\dot{\gamma}$, et le rapport $\mu_a = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$ qui constitue la viscosité dynamique apparente.

La viscosité d'un fluide caractérise les modifications transversales que subit la vitesse de déplacement de ce fluide

La loi de comportement rhéologique qui caractérise le matériau étudié peut être défini par la courbe donnant les variations de τ avec $\dot{\gamma}$ (Figure II.1) [3].

Quand cette courbe est une droite passant par l'origine, τ est proportionnel à $\dot{\gamma}$ et l'on a : $\tau = \mu \dot{\gamma}$

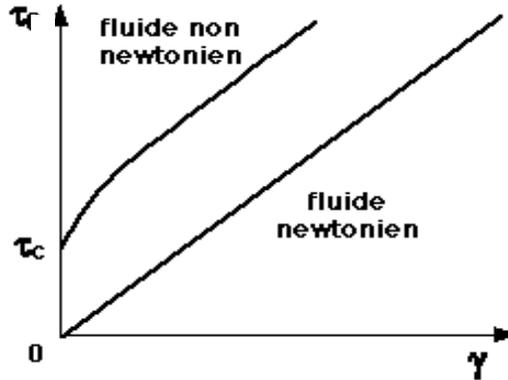


Figure II.1 : Courbes viscosimétriques d'un fluide newtonien et d'un fluide non-newtonien.

Le sang est non newtonien et ce, du fait de sa composante cellulaire (Figure II.2) [3]. Le sang est une suspension de cellules dans le plasma, qui a un comportement parfaitement newtonien, (sa viscosité est de $1.6 \cdot 10^{-2}$ Po (poiseuille) à 37deg.C).

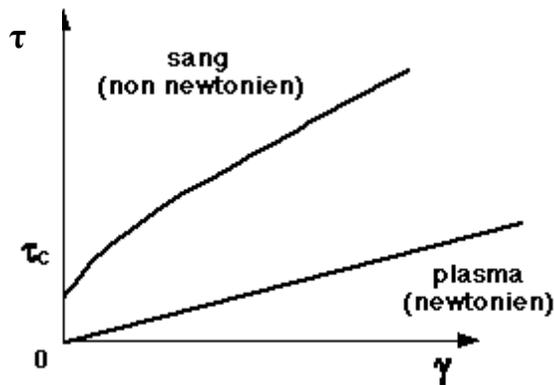


Figure II.2 : Comportement rhéologique du sang et du plasma

II.2.1 Comportement newtonien du sang : La viscosité du sang

Le nombre insignifiant de globules blancs devant le nombre de globules rouges traduit le fait que le comportement rhéologique du sang est étroitement lié au comportement des globules rouges. Ce comportement est newtonien quand les contraintes visqueuses sont assez fortes, mais il faut également que l'échelle des longueurs soit précisée dans ce cadre : le diamètre des conduits doit être bien plus grand que celui des globules.

Les facteurs influençant la viscosité du sang sont essentiellement l'hématocrite, la température et la déformabilité des hématies.

Aussi, et du fait que le fluide sanguin est une suspension de particules dans un liquide newtonien, plus l'hématocrite augmente, plus la viscosité est grande. Il est à noter que la viscosité apparente du sang n'évolue pas avec la température quand le gradient de vitesse est élevé (supérieur à 80 cm/s), mais augmente quand celui-ci est faible (inférieur à 1 cm/s). Indépendamment de leur concentration (l'hématocrite) et de leur agrégabilité, la déformabilité et la viscosité interne des hématies jouent un rôle très important dans la viscosité sanguine globale. A l'état normal la viscosité du sang est trois fois plus grande que celle du plasma. Le sang ne se comporte pas comme une suspension de particules solides, mais plutôt comme une suspension de gouttes de liquide déformables. Cette déformabilité dépend des propriétés mécaniques de la membrane de la goutte et de sa viscosité interne (hémoglobine). Il est en tout cas remarquable que, même avec un hématocrite de 95%, le sang continu à se comporter comme un liquide.

II.2.2 Comportement non newtonien du sang

Quand les contraintes visqueuses sont insuffisantes, les globules rouges s'agglomèrent face à face en formant des rouleaux et la présence de ces rouleaux modifie profondément le comportement rhéologique du sang. La viscosité apparente du sang diminue quand il s'écoule dans des conduits de diamètres décroissants : c'est l'effet Fåhræus-Lindqvist (Figure II.3) [3] et il apparaît dès que le diamètre vasculaire descend en dessous de 0.5 mm environ. Plusieurs hypothèses ont été émises pour expliquer ce phénomène. La plus probable est celle qui suppose l'existence d'une couche de plasma, sans globule, au contact de la paroi.

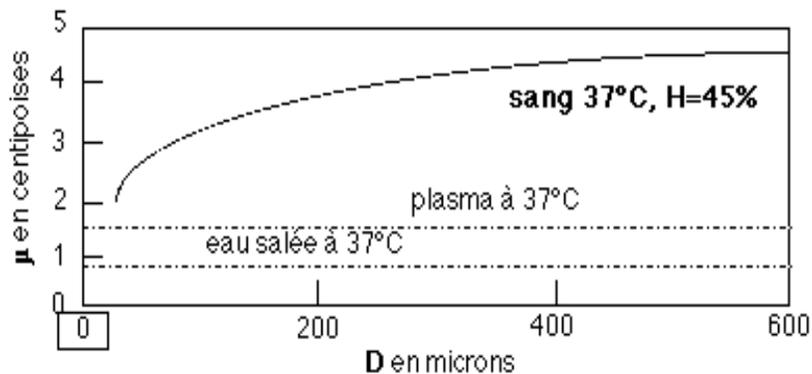


Figure II.3 : Effet Fåhræus-Lindqvist : diminution de la viscosité du sang avec la diminution du diamètre du tube.

Cette couche plasmatique est de très faible épaisseur, de l'ordre du diamètre des globules. En dehors de cette couche, l'hématocrite est soit constante, soit fonction du rayon du tube. Par ailleurs, l'on observe que l'hématocrite moyen dans un compartiment vasculaire dont le diamètre est inférieur à quelques $10^{\text{ème}}$ de mm est inférieur à l'hématocrite du réservoir vasculaire d'amont (de très gros diamètre) (Figure II.4) [3]. Il n'est pas indépendant de l'effet Fåhrus-Lindquist, tous deux étant liés au fait que la répartition radiale des globules n'est pas uniforme dans les conduits de faible diamètre.

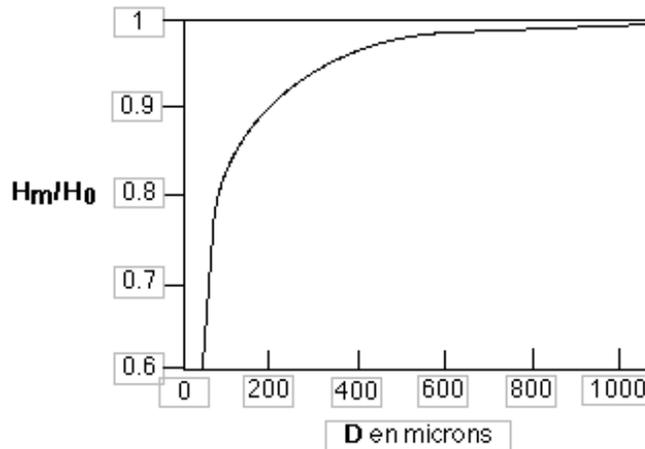


Figure II.4 : Effet Fåhrus : diminution de l'hématocrite moyen H_m du tube avec la diminution de son diamètre. (H_0 = hématocrite du réservoir).

II.2.3. Comportement biphasique

Lorsque le sang s'écoule dans les micro-vaisseaux dont le diamètre est de l'ordre de grandeur de celui des globules rouges, l'hypothèse d'un milieu continu devient caduque. Dans certains cas, le diamètre d'un globule non déformé ($7 \mu\text{m}$) est supérieur à celui du capillaire qu'il traverse ($5 \mu\text{m}$). Le problème qui se pose est alors un problème d'écoulement à deux phases (biphasique). L'on considère alors un fluide continu, incompressible et newtonien, dans lequel sont emportés des corps libres et déformables. L'étude de ces écoulements est évidemment extrêmement difficile à mener. Certains auteurs ont montré que la viscosité relative du fluide varie d'une manière non linéaire avec la vitesse débitante, de telle sorte que la résistance hydraulique offerte par le conduit diminuait à mesure que le débit augmentait. L'explication simple de ce résultat inattendu est que la traction tangentielle visqueuse s'exerçant sur le globule s'accroît quand la vitesse moyenne du globule rouge augmente. Le globule rouge prend une

forme alors plus allongée et par conséquent laisse un espace plus important entre lui et la paroi, et qui entraîne une réduction de la contrainte pariétale.

Si au contraire le débit tend vers zéro, le globule tend à reprendre sa forme naturelle et, comme un piston, tend à occuper toute la section du capillaire.

Ainsi tous les travaux évoqués ici mettent en évidence l'influence majeure des géométries des conduits vasculaires et des singularités observées dans le système circulatoire sur les paramètres hydrodynamiques locaux, sur les contraintes de cisaillement pariétal et sur les pertes de charges singulières.

En conclusion, c'est donc dans ce cadre que notre étude de l'influence des géométries sur le comportement du tissu sanguin est mise en œuvre, tenant compte de l'hypothèse de symétrie axiale vis-à-vis de l'écoulement sanguin, que celui-ci soit supposé newtonien ou non-newtonien en régime stationnaire.

Référence bibliographique

1. Burton, A.C., "*Physiologie et biophysique de la circulation*". MASSON ed. 1975, Paris.
2. Amit Agrawal, S.J., Heather Virginia, "*Hemodynamics in Large Blood Vessels*". 2004.
3. Comolet, R., "*Biomécanique circulatoire*". MASSON ed. 1984, Paris.
4. Acosta-Tamayo, O.D., "*De la navigation exploratoire virtuelle à la planification d'interventions endovasculaires*", *TRAITEMENT DU SIGNAL ET TÉLÉCOMMUNICATIONS*. 2004, UNIVERSITÉ DE RENNES 1.
5. Javier Atencia, D.J.B., "*Steady flow generation in microcirculatory systems*". The Royal Society of Chemistry 2006(6): p. 567-574.
6. Canfield. Thomas R, P.B.D., "*Statistic elastic properties of blood vessels*", *Handbook of Bioengineering*.
7. Gary E. McVeigh, P.K.H., David R. Morgan, "*Evaluation of mechanical arterial properties: clinical, experimental and therapeutic aspects*". The Biochemical Society and the Medical Research Society, 2002(102): p. 51-67.
8. Louis J. Brossollet, R.P.V., "*An alternate formulation of blood vessel mechanics and the meaning of the in vivo property*". *Journal of Biomechanics*, 1995. Vol. 28(6): p. 679-687.
9. Fung, Y.c., "*Biomechanics: motion, flow, stress and growth*". Spriger-Verlang ed. 1990, New York. 570.
10. Cros, F., "*Confluences, remplissage et vidange deux aspects singuliers du réseau veineux jambier*", *Mécanique des fluides et des tissus biologiques*. 2003, Université Paris 7.
11. Kellera.A, S.P.-A., Lemoineb.R, Terriera.F., "*Anévrisme de l'artère rénale et hypertension artérielle rénovasculaire*". *Schweiz Med Forum*, 2002(46): p. 1108-1110.
12. Suo, J., "*Investigation of blood flow patterns and hemodynamics in the human ascending aorta and major trunks of right and left coronary arteries using magnetic resonance imaging and computational fluid dynamics*", *Georgia Institute of Technology*. 2005.
13. Bénard, N., "*Analyse de l'écoulement physiologique dans un stent coronarien : Application à la caractérisation des zones de resténose pariétale.*" *Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées*. 2005, Université de Poitiers.
14. Fiessinger Jean-Noël, J.E., Pierre Julla- Hegp, "*Anévrisme de l'aorte abdominale*", *Pathologie cardiovasculaire*. 2005/2006, université de René Descartes: Faculté de médecine René Descartes- Paris 5.
15. Hafsa.C, S.K., M. Zbidi, A. Laifi, F. Noomene, M. Golli, A. Gannouni, "*Anévrisme de l'artère mésentérique supérieure révélateur de la maladie de Behçet : à propos d'un cas*". *Annales de Cardiologie et d'Angéologie* 2006(55): p. 291-293.
16. Drangova M, H.D.W., Boyd Cameron j, Dunmore PJ, Roach Margot R, Fenster A., "*Elasticity and geometry measurements of vascular specimens using a high-resolution laboratory CT scanner*". *Physiological measurements*, 1993(14): p. 277-290.
17. Yannis Papaharilaou, J.A.E., Eirini Manousaki, Asterios N. Katsamouris. "*Stress analysis in abdominal aortic aneurysms applying flow induced wall pressure*". *5th GRACM International Congress on Computational Mechanics*. 2005. Limassol.
18. Ender A. Finol, C.H.A., "*Flow Dynamics in Anatomical Models of Abdominal Aortic Aneurysms: Computational Analysis of Pulsatile Flow*". *BIOFLUIDS Acta Cientifica Venezolana*, 2003(54): p. 43-49.
19. Aksouh, M., "*Simulation numérique des écoulements instationnaires pour des fluides non-newtoniens à travers des configurations complexes : Applications aux écoulements sanguins*", *Energétique et Mécanique des Fluides*. 2004, USTHB/ALGER.

20. LI Xin-yu, W.G.-b., LI Ding, "*Computer simulation of non-Newtonian flow and mass transfer through coronary arterial stenosis*". Applied Mathematics and mechanics, 2001. Vol. 22(4): p. 409-424.
21. Young, D.F., "*Fluid mechanics of arterial stenosis*". Journal of Biomechanical Engineering, 1979. vol. 101: p. 157-173.
22. Sylvie Lorthois, P.-Y.L., Jean-Pierre Marc-Vergnes, Francis Cassot, "*Maximal Wall Shear Stress in Arterial Stenosis: Application to the Internal Carotid Arteries*". Journal of Biomechanical Engineering, 2000. vol.122.
23. Dalin Tang, J.Y., "*A free moving boundary model and boundary iteration method for unsteady viscous flow in stenotic elastic tubes*". Society for Industrial and Applied Mathematics journal of science and computational, 2000. Vol. 21(4): p. 1370-1386.
24. Sakurai. A, Y.T., Okino.H, Hanai. S, Masuda.M, "*A method for formulating realistic mathematical models based on arterial casts for the computational fluid mechanical studies on arterial flow and atherosclerosis*". Journal de Physique III, 1993(3): p. 1551-1556.
25. Dieter Liepsch, M.S., Martin Lee, "*Experimental analysis of the influence of stenotic geometry on steady flow*". Biorheology, 1992(29): p. 419-431.
26. Carla J. Egelhoff, R.S.B., Donald F. Elger, Jeffrey A. Qaniels. "*A study of pulsatile flow in stenotic coronary artery models*". The American society of mechanical engineers national meeting of the fluids engineering 1998. Washington.
27. Gijssen.F. J. H, P.D.E.M., van der Beek.M. H. E, van de Vosse.F. N, van Dongen.M. E. H, Janssen J. D., "*Analysis of the axial flow field in stenosed carotid artery bifurcation model- LDA experiments*". Journal of Biomechanics, 1996. vol. 29(11): p. 1483-1489.
28. Muller, S.J., "*Velocity measurements in complex flows of non-Newtonian fluids*". Korea-Australia Rheology Journal, 2002. Vol 14(3): p. 93-105.
29. Louis Allard, G.C.a.L.-G.D., "*Doppler velocity ratio measurements evaluated in a phantom model of multiple arterial disease*". Ultrasound in Medicine and Biology, 1995. Vol.21 (4): p. 471-480.
30. Mittal. R, S.S.P., Udaykumar. H. S., "*Application of Large-Eddy Simulation to the Study of Pulsatile Flow in a Modeled Arterial Stenosis*". Journal of Biomechanical Engineering, 2001. vol.123: p. 325-332.
31. Zendehbudi. G. R, M.M.S., "*Comparison of physiological and simple pulsatile flows through stenosed arteries*". Journal of biomechanics 1999(32): p. 959-965.
32. Deplano. V, S.M., "*Experimental and numerical study of pulsatile flows through stenosis: Wall shear stress analysis*". Journal of Biomechanics, 1999(32): p. 1081-1090.
33. Sylvie Lortois, P.-Y.L. and J.-P.M.-V. Francis Cassot. "*Contrainte de cisaillement pariétale maximale dans une sténose artérielle*". 14e Congrès Français de Mécanique. 1999. Toulouse
34. Elhadj, S., "*Chronic Shear Stress Effects on Endothelial Cell Response*", Chemical Engineering Department, Virginia Polytechnic. 2001, Institute and State University, Blacksburg, VA.
35. Achab .L, B.S., "*Application d'une loi constitutive dans l'étude numérique de l'écoulement sanguin à travers une artère sténosée*". Rhéologie, 2005. vol. 7: p. 28-34.
36. Hun Jung, J.W.C., Chan Guk Park, "*Asymmetric flows of non-Newtonian fluids in symmetric stenosed artery*". Korea-Australia Rheology Journal, 2004. 16(02): p. 101-108.

37. Zakaria Doulfoukar, M.O.T., Jaifar Khalid Naciri et Mokhtar Zagzoule "*Méthode numérique pour la résolution de l'écoulement d'un fluide viscoélastique en conduite a paroi déformable*". Journal de Physique III, 1996(06): p. 433-442.
38. Canghu Yang, C.A.G., Ann H. Muggeride, Robert W. Zimmerman, "*A model for steady laminar flow through a deformable gel-coated channel*". Journal of Colloid and Interface Science 2000(226): p. 105-111.
39. Viguier, C., "*Contribution au développement d'actionneurs électroactifs pour l'assistance circulatoire - Application à la mise au point d'une fonction antithrombotique*", INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE. 2005.
40. How, T.V., "*Elastic deformation of a tapered vascular prosthesis*". Journal of Materials Science: Materials in Medicine, 1991(2): p. 94-100.
41. Gerrard, B.c.N.S.J.H., "*Numerical analysis of the flow through a corrugated tube with application to arterial prostheses*". Journal of Fluid Mechanics 1984. Vol. 138: p. 129-160.
42. Mandal, P.K., "*An unsteady analysis of non-Newtonian blood flow through tapered arteries with a stenosis*". International Journal of Non-Linear Mechanics, 2005(40): p. 151-164.
43. Alberto Figueroa. C, I.E.V.-C., Kenneth E. Jansen, Thomas J.R. Hughes, Charles A. Taylor "*A coupled momentum method for modeling blood flow in three-dimensional deformable arteries*". Computer Methods in Applied. Mechanics and Engineering. 2006(195): p. 5685–5706.
44. Stroud, J.S., "*Numerical simulation of blood flow in the stenotic carotid artery bifurcation*". 2000, University of California, Berkeley.
45. Barbara M. Johnston, P.R.J., Stuart Corney, David Kilpatrick, "*Non-Newtonian blood flow in human right coronary arteries: Transient simulations*". Journal of Biomechanics, 2006(39).
46. Kim.T, A.Y.C., H.A. Dwyer, "*A simulated dye method for flow visualization with a computational model for blood flow*". Journal of Biomechanics 2004(37): p. 1125-1136.
47. Francesco Migliavacca, G.D., "*Computational modeling of vascular anastomoses*". Biomechanics modeling mechanobiology, 2005(3): p. 235-250.
48. Jure Marn, P.T., "*Laminar flow of a shear-thickening fluid in a 90° pipe bend*". Fluid Dynamics Research, 2006(38): p. 295-312.
49. Thiriet. M, G.M.-B., F. Hecht, "*Écoulement rhéofluidifiant dans un coude et une bifurcation plane symétrique. Application à l'écoulement sanguin dans la grande circulation*". Journal de physique III, 1996(6): p. 569-542.
50. Thiriet. M, J.M.R.G., and R. I. Issa "*A computational model of wall shear and residence time of particles conveyed by steady flow in a curved tube*". Journal de physique III, 1993(3): p. 85-103.
51. Gijzen. F.J.H , E.A., F.N. van de Vosse, J.D. Janssen, "*The influence of the non-Newtonian properties of blood on the flow in large arteries: unsteady flow in a 90° curved tube*". Journal of Biomechanics, 1999(32): p. 705-713.
52. Thiriet. M, J.-M.R.,G.a.R.-I.-I., "*A pulsatile developing flow in a bend*". Journal de physique III, 1992(2): p. 995-1013.
53. Rennie, T.J., "*Numerical and experimental studies of a doublepipe helical heat exchanger*", Department of Bioresource Engineering. 2004, McGill University, Montreal.
54. Vimal Kumar, K.D.P.N., "*Numerical simulation of steady flow fields in coiled flow inverter*". International Journal of Heat and Mass Transfer, 2005(48): p. 4811-4828.

55. Himeno, R. "*Blood Flow Simulation toward Actual Application at Hospital*". *THE 5TH ASIAN COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS*. 2003. BUSAN, KOREA,.
56. Berger. S. A, L.-D.J., "*Flows in stenotic vessels*". *Annual reviews : Fluid Mechanics* 2000(32): p. 347-382.
57. David M. Wootton, D.N.K., "*Fluid Mechanics of Vascular Systems, Diseases, and Thrombosis*". *Annual reviews: Fluid Mechanics*, 1999(01).
58. Jayaraman. G, R.K.D., K.N. Mehta, "*Flow in a catheterized curved artery with stenosis*". *Journal of Biomechanics*, 1999(32).
59. Martin Klanchar, J.M.T., Da-Ming Wang, "*In vivo study of the influence of radial wall motion on wall shear stress in an elastic tube model of the aorta*". *Circulation Research*, 1990. Vol. 66(6): p. 1624-.
60. Gupta, R.C., "*On developing laminar non-Newtonian flow in pipes and channels*". *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2001(2): p. 171-193.
61. Lorenzini, G., "*Blood velocity field numerical assessment using a GPL code in case of intravascular Doppler catheter affections: comparative analysis of different rheological models*". *Journal of Biomechanics*, 2005(38): p. 2058-2069.
62. Panagiotis Neofytou, S.T. "*Computational hemodynamics and the effects of blood rheological models on the flow through an arterial stenosis*". *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2004*. 2004. Jyväskylä.
63. Benhadid, s, "*Rhéologie des écoulements sanguins: Modélisation, Approches numérique et expérimentale*", *Institut national polytechnique de lorraine*. 1987.
64. Shewaferaw S. Shibeshi, W.E.C., "*The Rheology of Blood Flow in a Branched Arterial System*". *Applied Rheology*, 2005. 15(6): p. 398-405.

CHAPITRE

II :

Formulation du

Problème

La volonté de plus en plus importante d'apporter, depuis maintenant plus d'un quart de siècle, des thérapeutiques efficaces aux pathologies cardio-vasculaires a engendré un nombre de plus en plus considérable d'études biomécaniques caractérisant la physiologie vasculaire, plus particulièrement le système circulatoire, avec l'ambition de développer des modèles mathématiques capables de traduire le comportement du fluide sanguin au sein de la matrice vasculaire.

Malheureusement, les modélisations d'ordre analytique ou semi analytique obligent les investigateurs à postuler des hypothèses en comportement ou en cinématique pour mettre en œuvre de tels modèles.

C'est pourquoi, et du fait de la complexité des géométries du réseau circulatoire, notre choix d'ordre phénoménologique s'est orienté vers une approche numérique par l'utilisation de la Méthode aux Volumes finis dans le cadre de la modélisation des écoulements du fluide sanguin au sein du système vasculaire.

I. Etude théorique

Notre modèle mathématique se fonde sur les équations de Navier-Stokes. Plusieurs études utilisant ces équations et basées sur des méthodes numériques, qu'elles soient aux Différences Finies[1], aux Eléments Finis[2-5], ou aux Volumes Finis[6-10] ont conduit à exprimer les bifurcations et les divergents [11, 12], la sphère pulmonaire (les bronches) [13], voire les aspects d'interactions fluide – structure [14].

Les équations de Navier Stokes, usitées dans différents domaines de la Mécanique des fluides [15] sont largement utilisées dans le domaine biomédical [3, 4, 16-18]. Notons les travaux de Lachamp dans le cadre de la résolution des équations dans le cas non-newtonien où le modèle rhéologique choisi est le modèle d'Herschel-bulkley [19].

Notre étude s'applique plus particulièrement à la description de l'écoulement sanguin dans le système artériel [20, 21]. Des conditions aux limites équivalentes (lois sur les parois) sont proposées et implémentées utilisant les équations de Navier-Stokes tenant compte des domaines caractérisées par leurs frontières [22], relatives à l'expression des réalités physiologique et histologique.

1. Bilan de quantité de mouvement :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{f} - \vec{\nabla}P + \text{div} \bar{\bar{\tau}} \quad (1)$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} \vec{V}$$

Avec : $\bar{\bar{\tau}} = 2\mu\bar{\bar{D}}$ pour un fluide newtonien

$\bar{\bar{\tau}}$: tenseur de contrainte de frottement ;

\vec{V} : la vitesse du fluide ;

ρ : la masse volumique du fluide ;

P : la pression ;

f : la force de pesanteur ;

$\bar{\bar{D}}$: tenseur de taux Déformation.

2. Equation de continuité :

Pour un fluide incompressible, hypothèse que nous postulons pour le fluide sanguin [23]

$$\text{div} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2)$$

Tenant compte de ces hypothèses générales, l'étude est effectuée en régime stationnaire, donc indépendamment du temps.

Par ailleurs, le régime est supposé laminaire : il s'agit là d'une hypothèse forte mais cohérente dans le cadre de notre étude. En effet, notre intérêt se porte principalement sur les écoulements dans les petits vaisseaux où les pathologies vasculaires que nous souhaiterions caractériser sont plus présentes.

Ainsi, le choix postulé de la valeur de Reynolds, tenant compte des hypothèses observées in vivo, est de l'ordre de : $Re = 100$.

En outre, et toujours pour les mêmes raisons que celles évoquées ci-dessus, les vaisseaux sanguins sur lesquels se portent notre attention se caractérisent également par une élasticité et une viscoélasticité pariétale faisant plus souvent appel à des processus de vasoconstriction ou de vasodilatation comparativement faible au regard des déplacements pariétaux des grands vaisseaux. De fait, il n'est donc pas incongru de supposer la paroi comme rigide.

Aussi, dans le cas d'un fluide sanguin considéré comme newtonien ou non newtonien, les hypothèses développées seront toujours respectées dans le cadre de notre étude.

1- Fluide non-newtonien :

Pour un fluide non-newtonien, la viscosité dépend de la vitesse de cisaillement, les équations sont telles que :

- Bilan de quantité de mouvement :

$$\rho [\vec{V} \cdot \text{grad} \vec{V}] = \vec{f} - \vec{\nabla} P + \text{div} \cdot \vec{\tau} \quad (1a)$$

- Equation de continuité :

$$\text{div} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2)$$

- Le modèle rhéologique :

Dans le cadre de notre étude, et par une approche phénoménologique nous avons choisi le modèle de Herschel-bulkley pour traduire le comportement hémodynamique présent in vivo [24]. Ce modèle rhéologique (Herschel-Bulkley) apparaît traduire au mieux le fluide sanguin [19, 21]. Celui-ci serait ainsi caractérisé par une contrainte seuil, à partir de laquelle il se comporterait comme un fluide newtonien pour $n=1$.

Ce modèle n'est pas adapté pour les forts taux de cisaillement

$$\tau = \tau_c + k (\dot{\gamma})^n \quad (3)$$

τ : La contrainte de cisaillement ;

k : indice de consistance ;

$\tau_c=5.89727$ Pa: contrainte seuil d'écoulement ;

$\dot{\gamma}$: la vitesse de cisaillement.

$n= 0.86523$: indice de structure

$\mu= 0.05546$ Pa.s : relation entre K et $\dot{\gamma}$

➤ Développement des équations :

Compte tenu des hypothèses de travail, et dans le cadre d'un repère cylindrique ($r ; \theta ; z$) avec les composantes de la vitesse $\vec{V}=(v_r, v_\theta, v_z)$, les équations précédentes s'écrivent :

$$\rho \left[v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right]$$

$$\rho \left[v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_\theta v_r}{r} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right]$$

$$\rho \left[v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right]$$

$$\text{div } \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Remplaçant τ dans les équations

2- Fluide newtonien :

Pour un fluide newtonien, la viscosité dynamique est constante, l'équation se simplifie alors et l'on écrit :

➤ Bilan de quantité de mouvement :

$$\rho [\vec{V} \cdot \text{grad } \vec{V}] = -\vec{\nabla} P - \mu \vec{\nabla}^2 \vec{V} \quad (1b)$$

➤ Equation de continuité :

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (2)$$

D'où :

$$\bar{\tau} = 2\mu\bar{D}$$

Avec :

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Ainsi :

$$\bar{\tau} = 2\mu \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

➤ Développement des équations

Les équations pour un fluide newtonien (viscosité μ est constante : $\mu = \text{cste}$)

$$\rho \left[v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right)$$

$$\rho \left[v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_\theta v_r}{r} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right)$$

$$\rho \left[v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

On applique les hypothèse de travail on obtient la formule suivante de la vitesse

$$v = v_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

3. Problématique :

Pour que le problème soit bien posé, il faut définir les conditions aux limites. La résolution des équations de Navier-Stokes consiste à trouver les deux variables (\vec{v} , P) sur un domaine où l'on applique les conditions au frontières : les bords, la section d'entrée, et la section de sortie.

Dans le cadre de notre problématique, les hypothèses de travail sont :

$\vec{v} = \vec{0}$ sur les bords

$\vec{v} = v_d$ sur la section d'entrée

$P = P_{\text{atm}}$ sur la section de sortie

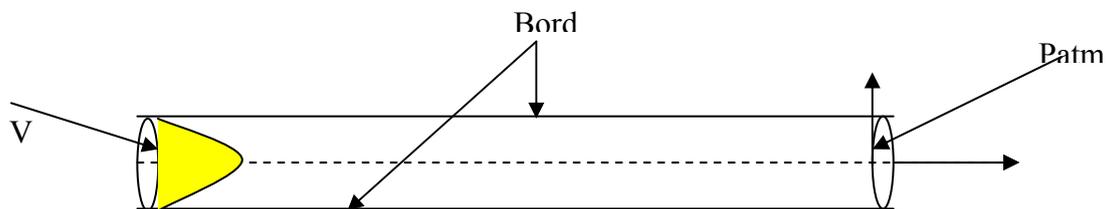


Figure 1 : présentation des conditions aux limites sur le domaine

la première égalité correspond à une vitesse nulle à la paroi, qui est la condition de non-glissement, la deuxième exprime le profil de vitesse imposé en entrée, et enfin la troisième signifie que la sortie est à pression atmosphérique.

II. Etude numérique :

La méthodologie adoptée ici pour la résolution des équations a nécessité, du fait de la complexité des géométries considérées, de faire appel à une méthode numérique.

Le choix s'est orienté vers un Code de Calcul permettant la détermination des profils de vitesses et des taux de cisaillement utilisant la Méthode aux Volumes Finis (MVF).

1. Quelques notions sur le code COSMOS FloWorksS :

Toute la partie numérique de ce travail a été réalisée à l'aide de deux logiciels : SOLIDWorks et COSMOS FloWorks.

COSMOSFloWorks peut modéliser des états de frontière environnementaux de pression aux ouvertures où la direction de l'écoulement n'est pas connue. Cet état de frontière agit en tant que pression totale aux admissions et à pression statique aux sorties [25].

COSMOSFloWorks permet d'animer la trajectoire d'écoulement en utilisant des flèches ou des sphères. La visualisation du profil d'écoulement à l'intérieur du modèle est ainsi améliorée [25].

Le logiciel COSMOS FloWorks nous permet de résoudre les équations établies tenant compte des hypothèses de notre étude, à savoir les parois sont supposées fixes [24] et le fluide est caractérisé par un comportement rhéologique spécifique et choisi de manière phénoménologique [25].

L'équation (1) de quantité de mouvement est ainsi résolue par la Méthode aux Volumes finis pour les fluides, et par la Méthode aux Eléments Finis pour les parois [25]. Soit :

$$\rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad}P + \text{div} \left(\mu (\text{grad}\vec{v} + \text{grad}'\vec{v}) \right) + \vec{f} \quad (1)$$

2. Organigramme du calcul numérique :

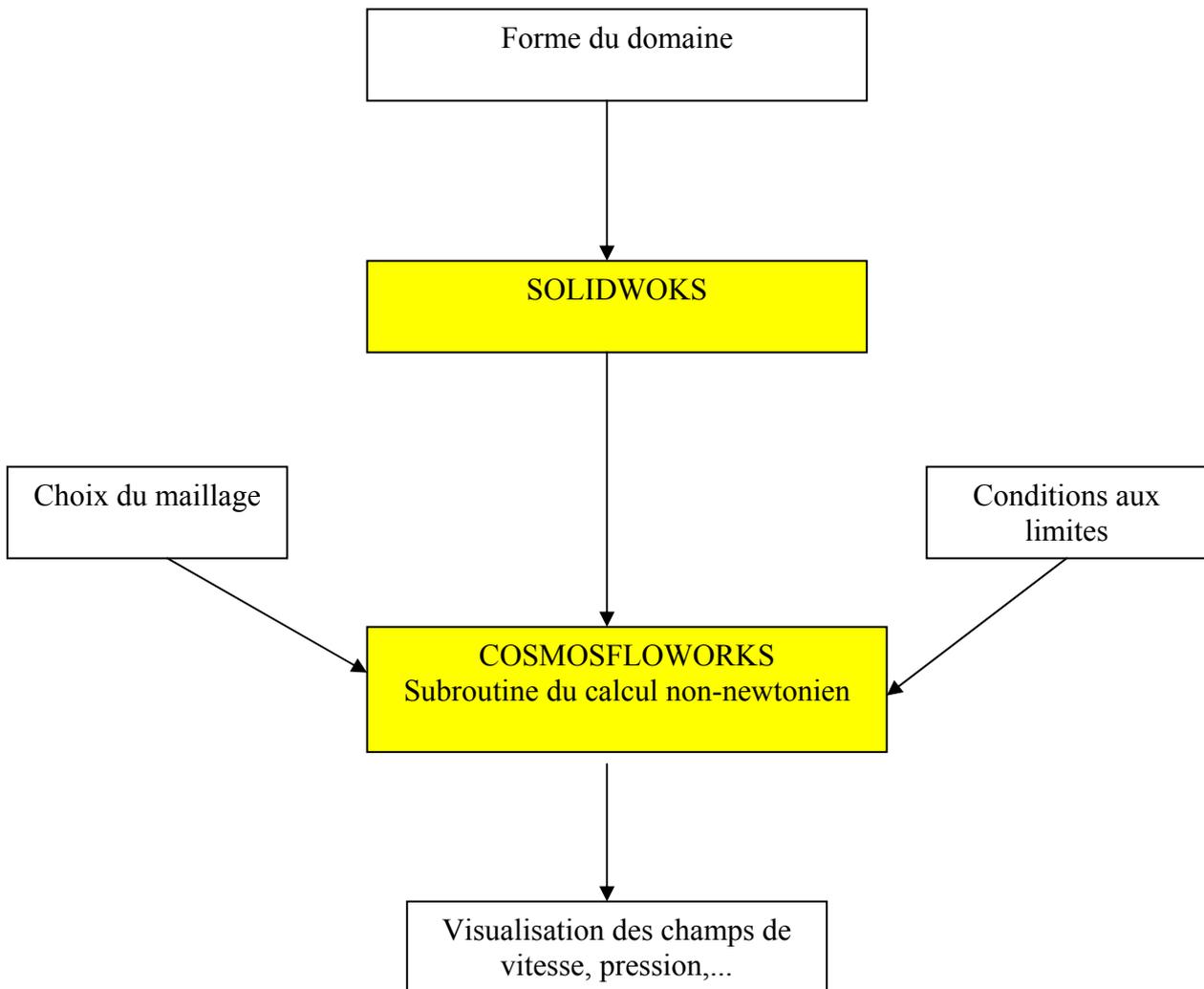


Figure 2 : organigramme du calcul numérique développé dans le cadre de notre étude

3. Expression de la méthode numérique utilisée :

C'est une méthode mathématique d'intégration numérique des équations aux dérivées partielles mises sous forme variationnelle [7, 26].

La résolution des équations permet alors de caractériser le comportement d'un corps sous sollicitations mécaniques ce qui revient généralement à calculer les contraintes et les déformations associées. C'est dans ce cadre que la résolution des équations de Navier-Stokes nous permet de traduire le comportement des fluides étudiés.

Alors que la résolution des équations différentielles est possible analytiquement pour des géométries et des cas simples, cela devient impossible pour des systèmes complexes, discontinus, plus proches de la réalité, en particulier lorsque nous tentons d'approcher au

mieux les réalités anatomique, histologique et physiologique. C'est pourquoi les formulations permettant une approximation numérique sont plus indiquées. Une méthode s'est montrée particulièrement efficace : la Méthode aux Volumes Finis [7, 9, 27].

3.1. La méthode aux Volumes Finis :

La méthode aux volumes finis qui permet aujourd'hui de répondre à de nombreuses questions dans de nombreux domaines est un outil puissant et disponible offrant la possibilité de réduire considérablement le temps de calcul [8, 10, 28].

Cette méthode est aujourd'hui largement utilisée dans le cadre de l'hémodynamique vasculaire. Ainsi, les travaux de Shibeshi et al [21] ont permis d'explorer les prédictions hémodynamiques de chaque modèle rhéologique à l'aide d'un logiciel de calcul basé sur la Méthode aux Volumes Finis (Fluent 6.1). D'autres études basées sur ce type d'approches ont également été développées : tenant compte de la géométrie [29], l'écoulement sanguin dans des conduits hélicoïdaux [30, 31], des écoulements après la pose de stents ou dans le cadre de conduites sténosées [16] ou même caractérisées par une forme d'athérosclérose [32].

Notons que du point de vue de la Mécanique, les équations développées restent similaires. Nous noterons à titre d'exemples, les travaux de recherche de Amziane [33] qui portent sur des méthodes d'homogénéisation et d'approximation numérique pour des écoulements mono ou multiphasiques en milieux poreux hétérogènes et dans le domaine de l'hydraulique [34, 35].

Algorithme pour la résolution de la vitesse en écoulement stationnaire :

Le champ de vitesses doit satisfaire les équations de quantité de mouvement et de continuité

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

La solution des équations suivantes introduit deux nouveaux problèmes :

- ❖ Les termes convectifs des équations de quantité de mouvement contiennent des quantités non linéaires.
- ❖ Les équations sont couplées, car les composantes de la vitesse apparaissent dans chaque équation de quantité de mouvement de l'équation de continuité.

Mais le problème le plus complexe à résoudre reste le rôle que joue la pression. Elle apparaît dans les équations de quantité de mouvement, mais il n'y a pas d'équation de transport pour la pression.

Si le gradient de pression est connu, le processus d'obtention des équations discrétisées pour la vitesse à partir des équations de quantité de mouvement est moins compliqué pour les produits scalaires.

Si le gradient de pression n'est pas connu, En écoulement incompressible, la densité est constante et donc non liée à la pression. Dans ce cas, le couplage entre la pression et la vitesse introduit une contrainte sur la solution : si le champ de pression appliqué dans l'équation de quantité de mouvement est correct, le champ de vitesse résultant doit satisfaire l'équation de continuité.

Tenant compte de tous ces éléments, la mise en œuvre de la Méthode aux Volumes Finis dans le cadre de notre étude se résume à identifier trois étapes :

a. Génération de maillage :

La première étape consiste à diviser le domaine en volumes de contrôle discrets. Les limites du volume de contrôle sont positionnés à mi distance des deux points nodaux qui lui sont adjacents. Chaque point nodal est entouré par un volume de contrôle (ou cellule) [7, 27].

Après la discrétisation du domaine, il peut paraître logique de définir les vitesses aux mêmes positions que les variables scalaires (pression). Cependant, dans ce cas, et si les vitesses et la pression sont définies aux mêmes nœuds, un champ de pression hautement non uniforme peut avoir les mêmes conséquences qu'un champ uniforme dans les équations discrétisées de quantité de mouvement.

Tenant compte également de l'importance du choix du domaine ainsi que des points de contrôle pour le calcul de la vitesse [7, 27]. Nous présentons ici, pour exemple, une situation simple bidimensionnelle (figure 3), où une grille uniforme est utilisée :

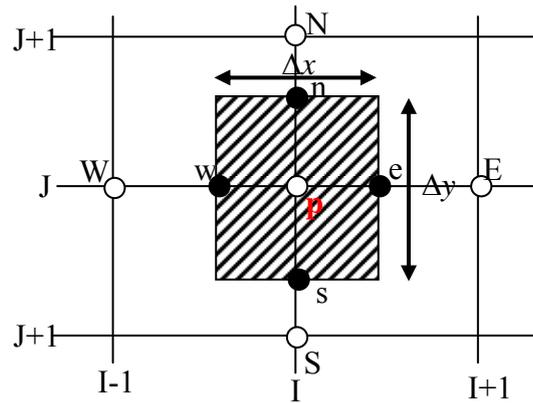


Figure 3 : exemple de maillage

Considérons que nous avons obtenu la distribution hautement irrégulière du champ de pression montré par la figure ci-dessus :

Si les pressions en « e » et « w » sont obtenues par une interpolation linéaire, le gradient de pression $\frac{\partial P}{\partial x}$ dans l'équation de quantité de mouvement selon x devient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_e - p_w}{\delta x} = \frac{\frac{p_E + p_p}{2} - \frac{p_p + p_W}{2}}{\delta x} = \frac{p_E - p_W}{\delta x} \quad (4)$$

De même le gradient $\frac{\partial P}{\partial y}$ pour la direction donne :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_n - p_s}{\delta y} = \frac{\frac{p_N + p_p}{2} - \frac{p_p + p_S}{2}}{\delta y} = \frac{p_N - p_S}{\delta y} \quad (5)$$

Il est parfaitement évident que si les vitesses sont définies aux mêmes nœuds que les scalaires, l'influence de la pression est mal prise en compte dans les équations discrétisées de quantité de mouvement.

Un remède à ce problème consiste à utiliser une grille décalée pour la vitesse [9]. L'idée est ainsi d'évaluer les variables scalaires comme la pression, la densité en des points nodaux ordinaires et de calculer les composantes de la vitesse sur une grille centrée autour des faces des cellules.

Les variables scalaires sont stockées aux points d'intersection des lignes continues. Les vitesses sont alors définies sur les faces des cellules entre les nœuds nodaux et indiquées par des flèches (figure 4) [27].

Dans le cadre d'un arrangement « grille décalée », les nœuds de pression coïncident avec les faces des cellules de contrôle u. le gradient de pression $\frac{\partial P}{\partial x}$ est donné par

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{P_p - P_w}{\delta x_u} \tag{6}$$

De même

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{P_p - P_s}{\delta y_v} \tag{7}$$

Si nous considérons les données de l'exemple précédent, les gradients ne sont plus nuls. Ce décalage évite donc le comportement non réaliste de la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement. L'avantage de cette grille est qu'elle permet d'exprimer la vitesse exactement là où elle est nécessaire pour le calcul. Aucune interpolation n'est ainsi nécessaire pour le calcul de la vitesse au centre des faces des cellules.

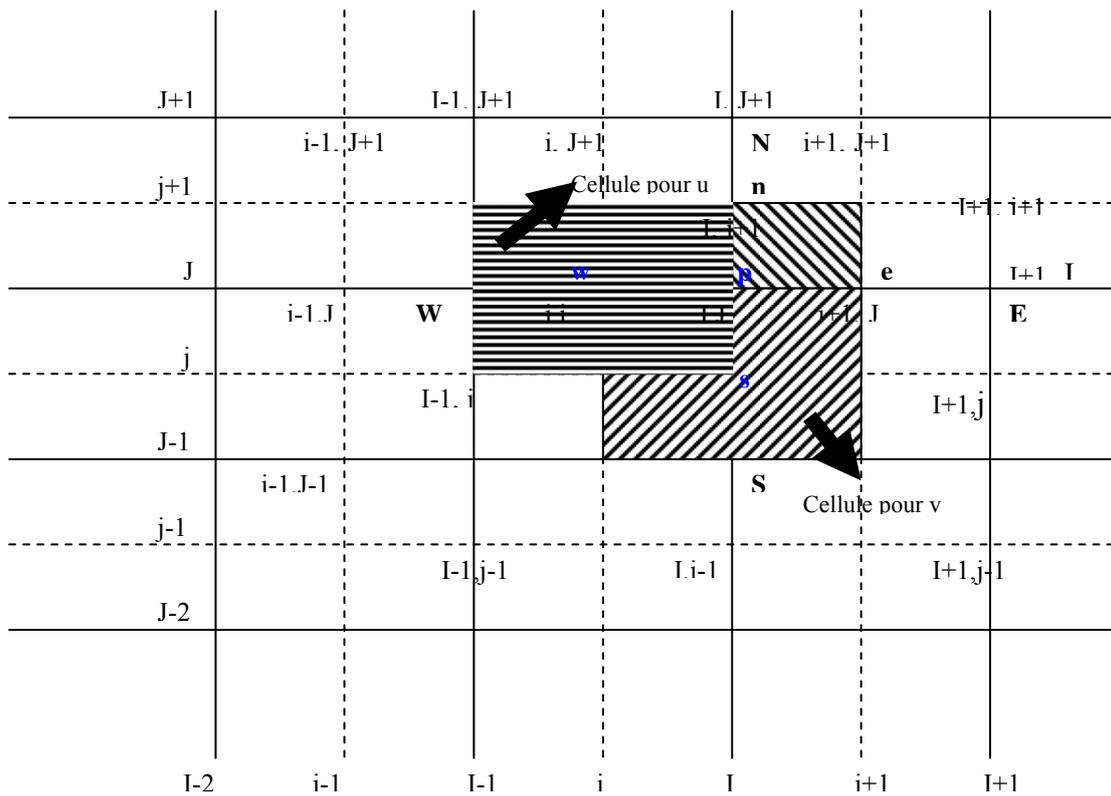


Figure 4 : le maillage décalé

b. Equation de quantité de mouvement

Comme la grille est décalée, une nouvelle notation sera utilisée. Les lignes continues sont numérotées en utilisant les lettres majuscules I-1, I, I+1,... dans la direction x et J-1, J, J+1,... dans la direction y. Les lignes discontinues qui constituent les faces des cellules pour les scalaires sont notées par des minuscules i-1, i, i+1,... pour la direction x et j-1, j, j+1,... pour la direction y.

Ecrite dans ce nouveau système, la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement selon x pour la position de la vitesse (i, J) est :

$$a_{i,J}u_{i,J} = \sum a_{n,b}u_{n,b} - \frac{p_{I,J} - p_{I-1,J}}{\delta x_u} \Delta V_u$$

Où (8)

$$a_{i,J}u_{i,J} = \sum a_{n,b}u_{n,b} + (p_{I-1,J} - p_{I,J})A_{i,J}$$

Où ΔV_u est le volume de la cellule u et $A_{i,J}$ est la surface de la face (« est » ou « ouest ») du volume de contrôle u.

Le terme source de pression a été discrétisé en utilisant une interpolation linéaire des pressions situées sur les limites du volume de contrôle u.

Dans le nouveau système de coordonnées E, W, N et S évoqués dans la sommation $\sum a_{n,b}u_{n,b}$ sont respectivement : (i-1, J) ; (i+1, J), (i,J+1) et (i, J-1).

En appliquant la nouvelle notation, nous avons :

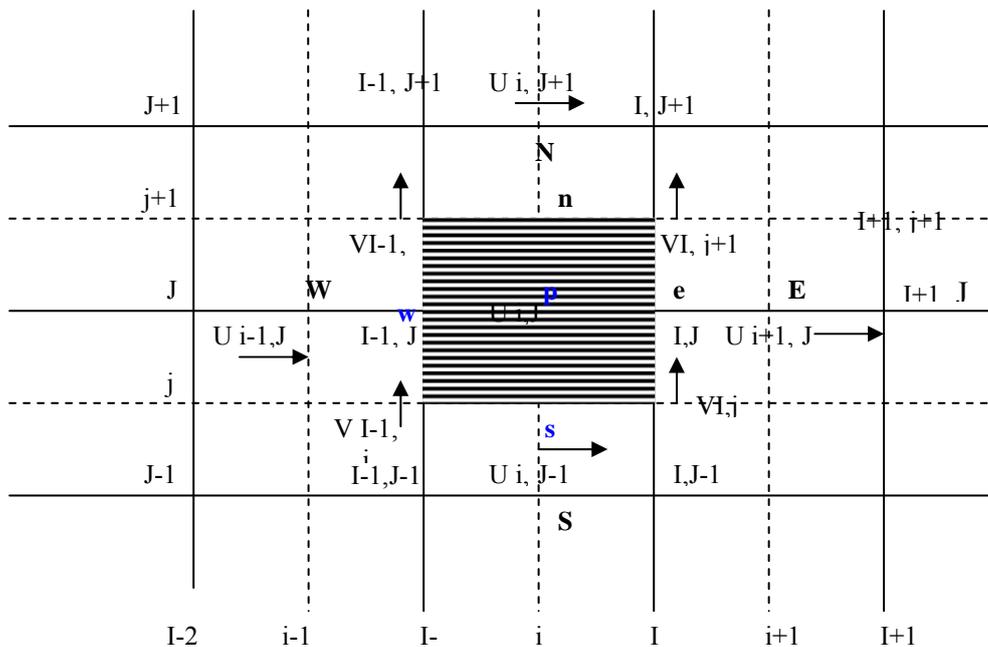


Figure 5 : maillage de pression et les différentes directions de la vitesse

Aussi, et pour exprimer les différents flux :

Flux à travers la face « ouest w »

$$F_w = (\rho u)_w = \frac{F_{i,j} + F_{i-1,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}}{2} \right) u_{i,j} + \left(\frac{\rho_{i-1,j} + \rho_{i-2,j}}{2} \right) u_{i-1,j} \right] \dots (9a)$$

Flux à travers la face « est e »

$$F_e = (\rho u)_e = \frac{F_{i+1,j} + F_{i,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j}}{2} \right) u_{i+1,j} + \left(\frac{\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}}{2} \right) u_{i,j} \right] \dots (9b)$$

Flux a travers la face « sud s »

$$F_s = (\rho v)_s = \frac{F_{i,j} + F_{i-1,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} \right) v_{i,j} + \left(\frac{\rho_{i-1,j} + \rho_{i-1,j-1}}{2} \right) v_{i-1,j} \right] \dots (9c)$$

Flux a travers la face « nord n »

$$F_n = (\rho v)_n = \frac{F_{i,j+1} + F_{i-1,j+1}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{i,j+1} + \rho_{i,j}}{2} \right) v_{i,j+1} + \left(\frac{\rho_{i-1,j+1} + \rho_{i-1,j}}{2} \right) v_{i-1,j+1} \right] \dots (9d)$$

$$D_w = \frac{\Gamma_{i-1,j}}{x_i - x_{i-1}} \dots (9e)$$

$$D_e = \frac{\Gamma_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} \dots (9f)$$

$$D_s = \frac{\Gamma_{i-1,j} + \Gamma_{i,j} + \Gamma_{i-1,j-1} + \Gamma_{i,j-1}}{4(y_j - y_{j-1})} \dots (9g)$$

$$D_n = \frac{\Gamma_{i-1,j+1} + \Gamma_{i,j} + \Gamma_{i-1,j} + \Gamma_{i,j}}{4(y_{j+1} - y_j)} \dots (9h)$$

Les expressions (9) révèlent que lorsque les variables ou composantes de la vitesse ne sont pas disponibles sur la face du volume de contrôle u, il est donc souhaitable d'utiliser une moyenne sur les deux ou quatre points les plus proches où ces valeurs sont disponibles. Durant chaque itération les composantes \bar{u} et \bar{v} de la vitesse utilisée pour calculer les expressions (9) proviennent de l'itération précédente. Il faut noter que ces valeurs connues de \bar{u} et de \bar{v} entrent dans le calcul des coefficient a de l'expression (8). Ces valeurs sont distinctes des valeurs $u_{i,j}$ et $u_{n,b}$ qui sont des valeurs scalaires inconnues.

Par analogie, la discrétisation de la deuxième équation de quantité de mouvement devient :

$$a_{I,j} v_{I,j} = \sum a_{n,b} v_{n,b} + (p_{I,j-1} - p_{I,j}) A_{I,j} \quad (10)$$

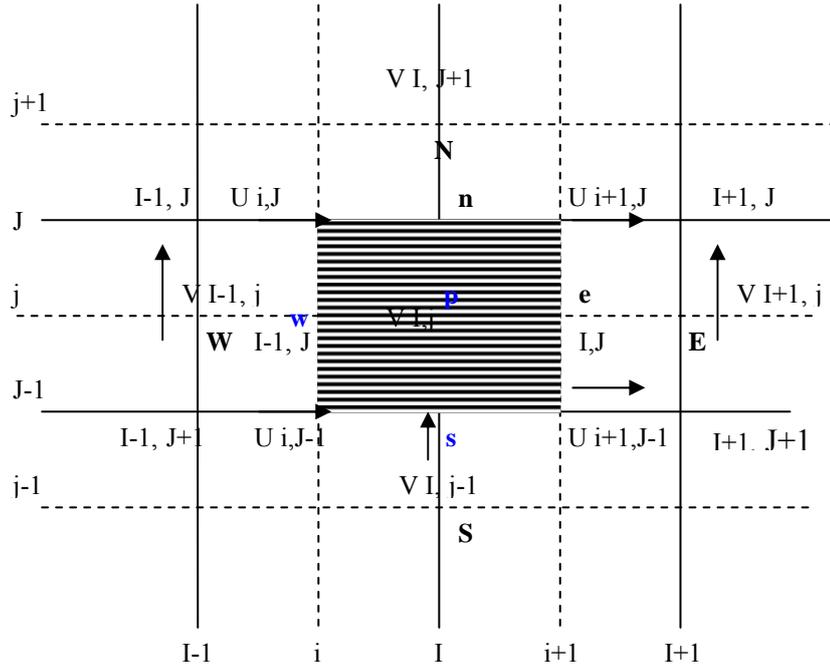


Figure 6 : maillage de U et V

Les équations de quantité de mouvement discrétisées (8) et (10) sont ensuite résolues en utilisant le champ de pression p^* pour obtenir les composantes de vitesses u^* et v^* comme suit :

$$a_{i,J} u_{i,J}^* = \sum a_{n,b} u_{n,b}^* + (p_{I-1,J}^* - p_{I,J}^*) A_{i,J} \quad (11)$$

$$a_{I,j} v_{I,j}^* = \sum a_{n,b} v_{n,b}^* + (p_{I,J-1}^* - p_{I,J}^*) A_{I,j} \quad (12)$$

$$\text{Pour la définition de } p^*, p \text{ est tel que : } p = p^* + p' \quad (13)$$

$$\text{De façon similaire } u = u^* + u' \quad (14) \quad v = v^* + v' \quad (15)$$

En substituant le champ de pression dans l'équation de quantité de mouvement nous obtenons le champ de vitesse (u, v) .

Les équations discrétisées (8) et (10) lient le champ de pression au champ de vitesses

En soustrayant les équations (11) et (12) des équations (8) et (10) nous aurons :

$$a_{i,J} (u_{i,J} - u_{i,J}^*) = \sum a_{n,b} (u_{n,b} - u_{n,b}^*) + [(p_{I-1,J} - p_{I-1,J}^*) - (p_{I,J} - p_{I,J}^*)] A_{i,J} \quad (16)$$

$$a_{I,j} (v_{I,j} - v_{I,j}^*) = \sum a_{n,b} (v_{n,b} - v_{n,b}^*) + [(p_{I,J-1} - p_{I,J-1}^*) - (p_{I,J} - p_{I,J}^*)] A_{I,j} \quad (17)$$

En introduisant les expressions de (13), (14) et (15) dans (16) et (17) :

$$a_{i,J} u'_{i,J} = \sum a_{n,b} u'_{n,b} + (p'_{I-1,J} - p'_{I,J}) A_{i,J} \quad (18)$$

$$a_{I,j} v'_{I,j} = \sum a_{n,b} v'_{n,b} + (p'_{I,J-1} - p'_{I,J}) A_{I,j} \quad (19)$$

Faisant l'approximation suivante, (les sommes $\sum a_{n,b}u'_{n,b}$ et $\sum a_{n,b}v'_{n,b}$ sont négligeables)

$$u'_{i,j} = d_{i,j}(p'_{i-1,j} - p'_{i,j}) \quad (20)$$

$$v'_{i,j} = d_{i,j}(p'_{i,j-1} - p'_{i,j}) \quad (21)$$

Où

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} \quad d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} \quad (22)$$

Les équations (20) et (21) précisent la correction qu'il faut appliquer à la vitesse à travers les équations (14) et (15). Nous avons alors :

$$u_{i,j} = u^*_{i,j} + d_{i,j}(p'_{i-1,j} - p'_{i,j}) \quad (23)$$

$$v_{i,j} = v^*_{i,j} + d_{i,j}(p'_{i,j-1} - p'_{i,j}) \quad (24)$$

Des équations similaires pour $u_{i+1,j}$ et $v_{i,j+1}$ existent :

$$u_{i+1,j} = u^*_{i+1,j} + d_{i+1,j}(p'_{i,j} - p'_{i+1,j}) \quad (25)$$

$$v_{i,j+1} = v^*_{i,j+1} + d_{i,j+1}(p'_{i,j} - p'_{i,j+1}) \quad (26)$$

Où

$$d_{i+1,j} = \frac{A_{i+1,j}}{a_{i+1,j}} \quad d_{i,j+1} = \frac{A_{i,j+1}}{a_{i,j+1}} \quad (27)$$

Au-delà des hypothèses de travail et des considérations permises. Le champ de vitesses doit tenir compte d'une autre contrainte : satisfaire l'équation de continuité sous forme discrétisée sur le volume de contrôle scalaire (voir figure 7 ci-dessous) [27].

$$\left[(\rho u A)_{i+1,j} - (\rho u A)_{i,j} \right] + \left[(\rho v A)_{i,j+1} - (\rho v A)_{i,j} \right] = 0 \quad (28)$$

En remplaçant les vitesses provenant des équations (23, 24, 25 et 26) dans l'équation de continuité discrétisée (28) nous obtenons :

$$\left[\rho_{i+1,j} A_{i+1,j} \left(u^*_{i+1,j} + d_{i+1,j} (p'_{i,j} - p'_{i+1,j}) \right) - \rho_{i,j} A_{i,j} \left(u^*_{i,j} + d_{i,j} (p'_{i-1,j} - p'_{i,j}) \right) \right] \\ + \left[\rho_{i,j+1} A_{i,j+1} \left(v^*_{i,j+1} + d_{i,j+1} (p'_{i,j} - p'_{i,j+1}) \right) - \rho_{i,j} A_{i,j} \left(v^*_{i,j} + d_{i,j} (p'_{i,j-1} - p'_{i,j}) \right) \right] = 0 \quad (29)$$

Qui peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}
 & \left[(\rho dA)_{i+1,J} + (\rho dA)_{i,J} + (\rho dA)_{I,j+1} + (\rho dA)_{I,j} \right] p'_{I,J} = \\
 & (\rho dA)_{i+1,J} p'_{i+1,J} + (\rho dA)_{i,J} p'_{i-1,J} + (\rho dA)_{I,j+1} p'_{I,j+1} + (\rho dA)_{I,j} p'_{I,j-1} \\
 & + \left[(\rho u^* A)_{i,J} - (\rho u^* A)_{i+1,J} + (\rho v^* A)_{I,j} - (\rho v^* A)_{I,j+1} \right]
 \end{aligned} \tag{30}$$

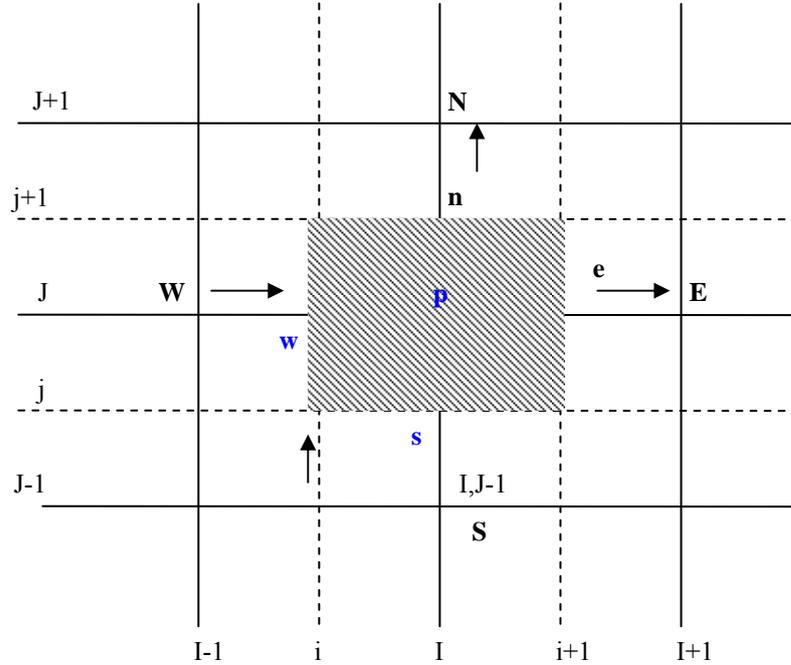


Figure 7 : maillage de pression

En identifiant les coefficients de p' (30) :

$$a_{I,J} p'_{I,J} = a_{i+1,J} p'_{i+1,J} + a_{i-1,J} p'_{i-1,J} + a_{I,j+1} p'_{I,j+1} + a_{I,j-1} p'_{I,j-1} + b'_{I,J} \tag{31}$$

Où

$$a_{I,J} = a_{i+1,J} + a_{i-1,J} + a_{I,j+1} + a_{I,j-1}$$

Et les différents coefficients qui sont donnés par :

$$a_{i+1,J} = (\rho dA)_{i+1,J}$$

$$a_{i-1,J} = (\rho dA)_{i,J}$$

$$a_{I,j+1} = (\rho dA)_{I,j+1}$$

$$a_{I,j-1} = (\rho dA)_{I,j}$$

$$b'_{I,J} = (\rho u^* A)_{i,J} - (\rho u^* A)_{i+1,J} + (\rho v^* A)_{I,j} - (\rho v^* A)_{I,j+1}$$

L'équation (31) montre que l'équation de continuité est utilisée comme une équation de correction pour la pression P', en résolvant cette équation (31), est obtenu le champ de pression P' en tout point, en utilisant l'équation (13) pour le calcul de P. il reste donc à calculer les composantes de la vitesse en utilisant les expressions (23), (24), (25) et (26).

c. Le maillage avec Cosmosfloworks :

L'utilisation du logiciel dans la mise en œuvre du maillage de la structure recherchée revient, tenant compte des géométries complexes étudiées, à réaliser celui-ci et de s'assurer de l'assemblage de tous les éléments qui formeront le maillage de la structure dans toute sa complexité : utilisation du maillage paramétrique (manuel) ou du maillage automatique, en prenant en compte la forme "idéale" des volumes de contrôle, leur densité optimale et les problèmes de convergence des volumes à la frontière entre les surfaces maillées [25].

Pour la détermination des profils de vitesses et des taux de cisaillement utilisant la Méthode aux Volumes Finis (MVF) dans le cadre de la résolution des équations de Navier Stokes, nous avons :

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \quad [1]$$

Pour un fluide incompressible :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = 0$$

[2]

Les équations précédentes peuvent se mettre sous la forme générale :

$$a_{ij} U_{ij} = \sum a_{nb} U_{nb} - \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\delta x_u} \Delta V_u$$

Où

$$a_{ij} U_{ij} = \sum a_{nb} U_{nb} - (p_{i,j} - p_{i-1,j}) A_{ij}$$

Où ΔV_u est le volume de la cellule u, A_{ij} est la surface de la face (« est » ou « ouest ») du volume de contrôle u.

Le terme source de pression est discrétisé en utilisant une interpolation linéaire des pressions situées sur les limites du volume de contrôle u.

Dans le nouveau système de coordonnées E, W, N et S évoqué dans la simulation $\sum a_{nb} U_{nb}$ sont : $(i-1,j)$; $(i+1,j)$, $(i,j+1)$ et $(i,j-1)$.

Cette équation est intégrée sur le volume de contrôle (figure 2) [27] en appliquant un schéma d'approximation pour calculer les coefficients a_{ij}, a_{nb}

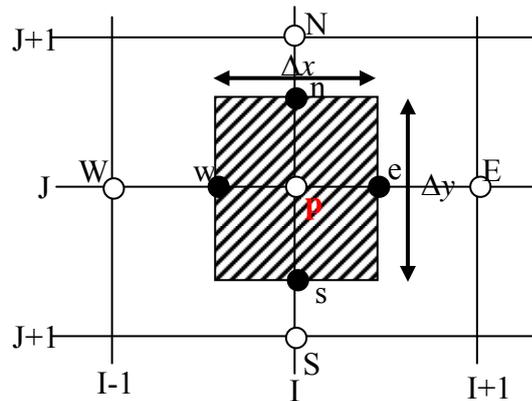


Figure 8 : Volume d'intégration

Le Maillage intégré à COSMOS permet donc de diviser le domaine en cellules cubiques permettant alors d'obtenir un maillage structuré uniforme [9]. Tenant compte des complexités géométriques, celui-ci est affiné pour une meilleure précision près de la paroi [25].

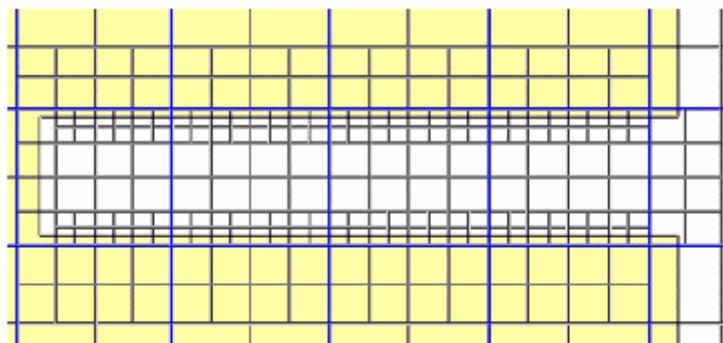


Figure 9 : Section longitudinale d'une conduite cylindrique
Maillage affiné près de la paroi

En conclusion, la mise en œuvre du maillage des structures pour lesquelles nous étudierons l'écoulement fluide qui les traverseront, permet, grâce au code de Calcul utilisé et basé sur la Méthode aux Volumes Finis, d'offrir une bonne approximation des modes d'écoulement dans différentes configurations.

Dans le prochain chapitre, nous présenterons ainsi les résultats obtenus obtenus dans le cadre de l'étude de l'écoulement fluide dans des conduites divergente, convergente, sténosée, et caractérisées par un coude d'angles spécifiques.

Références bibliographiques

1. Zakaria Doulfoukar, M.O.T., Jaifar Khalid Naciri et Mokhtar Zagzoule "Méthode numérique pour la résolution de l'écoulement d'un fluide viscoélastique en conduite a paroi déformable". Journal de Physique III, 1996(06): p. 433-442.
2. Thiriet. M., G.M.-B., F. Hecht, "Ecoulement rhéofluidifiant dans un coude et une bifurcation plane symétrique. Application à l'écoulement sanguin dans la grande circulation". Journal de physique III, 1996(6): p. 569-542.
3. Cros. F, " Confluences, remplissage et vidange deux aspects singuliers du réseau veineux jambier", *Mécanique des fluides et des tissus biologiques*. 2003, Université Paris 7.
4. Almeder, C.R., "Hydrodynamic modelling and simulation of the human arterial blood flow". 1999, Technische Universitat wien.
5. Aksouh, M., "Simulation numérique des écoulements instationnaires pour des fluides non-newtoniens à travers des configurations complexes : Applications aux écoulements sanguins", *Energétique et Mécanique des Fluides*. 2004, USTHB/ALGER.
6. Ramaswamy. B, T.C.J., J. E .Akin, "finite-element analysis of unsteady tow-dimensional Navier-Stokes equations". Numerical Heat Transfer, 1992. Vol. 21: p. 147-182.
7. Versteeg.H. K, W.M., "An introduction to Computational Fluid Dynamics – the finite volume method". 1995: Longman Scientific & Technica.
8. Antipolis, S., "Calcul scientifique, modélisation et analyse numérique". 2002, INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE.
9. Santacreu, S.D., "Méthode de raffinement de maillage adaptatif pour la mécanique des fluides numérique", *ÉCOLE DOCTORALE DE SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR*. 2006, UNIVERSITÉ BORDEAUX I.
10. Mohamed. K, " Simulation numérique en volume finis, de problèmes d'écoulements multidimensionnels raides, par un schéma de flux à deux pas", *mathématiques appliquées*. 2005, Université Paris 13.
11. Viguier. C, "Contribution au développement d'actionneurs électroactifs pour l'assistance circulatoire - Application à la mise au point d'une fonction antithrombotique", *INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE*. 2005.
12. Ravelet. F, "Bifurcations globales hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques dans un écoulement de von Kármán turbulent". 2005, École Polytechnique: paris.
13. Mauroy, B., "Hydrodynamique dans le poumon, relations entre flux et géométries", *ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN*. 2004.
14. Metter. P, "Modélisation, analyse mathématique et applications numériques de problèmes d'interaction fluide-structure instationnaires". 2003, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI.
15. Fermigier. M, "Hydrodynamique Physique". Paris Tech - ESPCI - ed. L.d.P.e.M.e.d.M. Heterogenes. 2005.
16. Bénard. N, "Analyse de l'écoulement physiologique dans un stent coronarien : Application à la caractérisation des zones de resténose pariétale." *Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées*. 2005, Université de Poitiers.
17. Acosta-Tamayo. O.D, "De la navigation exploratoire virtuelle à la planification d'interventions endovasculaires", *TRAITEMENT DU SIGNAL ET TÉLÉCOMMUNICATIONS*. 2004, UNIVERSITÉ DE RENNES 1.

18. Stroud. J.S, *"Numerical simulation of blood flow in the stenotic carotid artery bifurcation"*. 2000, University of California, Berkeley.
19. Lachamp. P, *"modélisation numérique de l'effet d'un obstacle sur les écoulements de fluides à seuil par la méthode SPH"*, *Sciences de la terre et de l'Univers*. 2003, UNIVERSITE JOSEPH FOURIER.
20. Formaggia. L, J.F.G., F. Nobile, A. Quarteroni., *"On the coupling of 3D and 1D Navier-Stokes equations for flow problems in compliant vessels"*. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2001(191): p. 561-582.
21. Shewaferaw. S, Shibeshi, W.E.C., *"The Rheology of Blood Flow in a Branched Arterial System"*. *Applied rheology*, 2005. 15(6): p. 398-405.
22. Gabriel R. Barrenechea, P.L.T., Frederic Valentin, *"New Wall Laws for the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations on Rough Domains"*. 2001, INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE.
23. Delfino, A. *" Analysis of the stress field in a model of the human carotid bifurcation"*. 1996. Département de Physique, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse.
24. Bachelet, C., *"Implémentation d'une loi rhéologique d'un fluide dans un code numérique de résolution trois dimensions des équation de navier-stokes application en hémodynamique"*, *Génie des procédés*. 1998, université de Paris 19: Paris.
25. COSMOS, *"COSMOSFloWorks Fundamentals, f.f.s. software, Editor*. 2006.
26. Paxcal, F., *"Sur des méthodes d'approximation effectives et d'analyse numérique pour les équations de la mécanique des fluides"*, *Mathématiques*. 2002, UNIVERSITÉ de PARIS-SUD Centre d'ORSAY.
27. Ranade, V.V., *"Computational flow modeling for chemical reactor engineering"*, ed. P.S.E. Series. 2002: George Stephanopoulos and John Perkins.
28. Popa, I.C. *"modélisation Numérique du Transfert Thermique : Méthode des volumes finis."* 2002: universitaria cralova.
29. Jongman Kim, J.R.Y., Jae Chun Hyun, *"Three dimensional flow analyses within a profile extrusion die by using control volume finite-element method"*. *Korea-Australia Rheology Journal*, 2001. Vol.13 (2): p. 97-106.
30. Rennie, T.J., *"Numerical and experimental studies of a doublepipe helical heat exchanger"*, *Department of Bioresource Engineering*. 2004, McGill University, Montreal.
31. Vimal Kumar, K.D.P.N., *"Numerical simulation of steady flow fields in coiled flow inverter"*. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2005(48): p. 4811-4828.
32. Suo, J., *"Investigation of blood flow patterns and hemodynamics in the human ascending aorta and major trunks of right and left coronary arteries using magnetic resonance imaging and computational fluid dynamics"*, *Georgia Institute of Technology*. 2005.
33. Amaziane, B., *"Homogénéisation et Modélisation Numérique d'Écoulements en Milieux Poreux Hétérogènes: Applications à des Problématiques Énergétiques et Environnementales"*, *Ecole Doctorale des Sciences Exactes et de Leurs Applications, Spécialité : Mathématiques Appliquées*. 2002.
34. Atfeh, B., *"Méthode des lignes de courant appliquée à la modélisation des bassins"*, *Mathématiques Appliquées*. 2002, UNIVERSITÉ DE PROVENCE, AIX-MARSEILLE I.
35. Etcheverry, D., *"Une approche déterministe des distributions des temps de transit de l'eau souterraine par la théorie des réservoirs"*, *INSTITUT DE GEOLOGIE CENTRE D'HYDROGEOLOGIE*. 2001, Université de Neuchâtel.

CHAPITRE

III :

Résultats et

Discussion

Dans le cadre de ce travail de recherche, et suite aux modélisations développées utilisant le code de calcul COSMOS FloWorks dans le chapitre précédent, nous présentons ici les résultats obtenus caractérisant l'hémodynamique vasculaire, qu'il s'agisse d'écoulement d'ordre physiologique ou pathologique. Par ailleurs, est également évalué le comportement du fluide sanguin lorsque celui-ci traverse des singularités ou des conduits coudés (avec une estimation de l'influence de l'angle caractérisant ces conduits).

Pour ce faire et dans une première phase, un calcul analytique est d'abord réalisé pour caractériser l'écoulement permanent d'un fluide Newtonien et d'un fluide Non Newtonien à travers une conduite cylindrique à symétrie axiale et ce, dans une optique de validation de la méthode numérique aux volumes Finis mise en œuvre.

La seconde partie est consacrée aux écoulements de fluide newtonien ou non newtonien dans des configurations à géométries plus complexes : conduite cylindrique, conduite convergente, conduite divergente, conduite sténosée, et conduite caractérisée par des coudes de différents angles (90° et 45°), avec l'ambition de traduire le comportement du tissu sanguin.

1. Validation du modèle numérique

L'étude analytique de l'écoulement laminaire d'un fluide newtonien ou non newtonien à travers une conduite cylindrique est ici développée. La même étude est également réalisée utilisant la méthode aux volumes finis précédemment développée.

Les résultats obtenus par ces deux études sont alors comparés : sont ainsi analysées les différentes évolutions en fonction des paramètres de l'écoulement.

Dans ce cas simple, le calcul analytique a ainsi permis de valider les résultats obtenus numériquement à l'aide du Code de Calcul COSMOS, dans le cas d'un écoulement laminaire et stationnaire d'un fluide newtonien (figure 1)

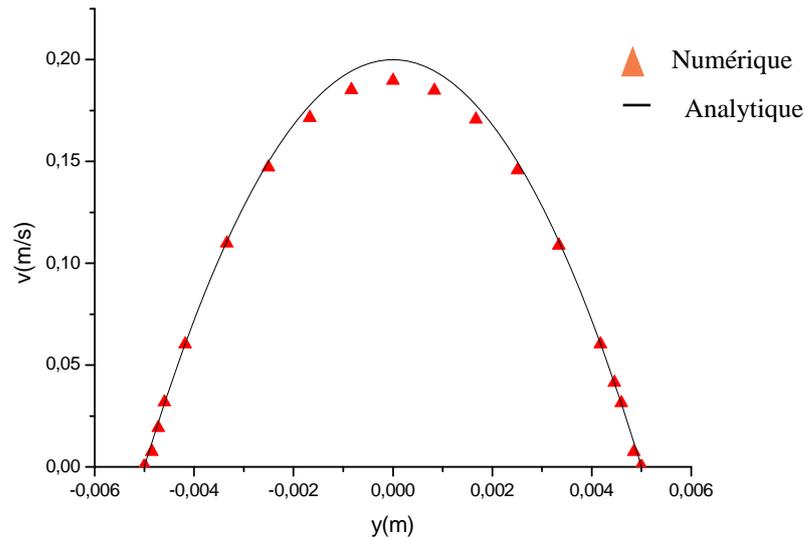


Figure (1) : Profils de vitesses dans le cas d'une conduite cylindrique de rayon $r=5\text{mm}$ de longueur $L=500\text{ mm}$, $Re=100$

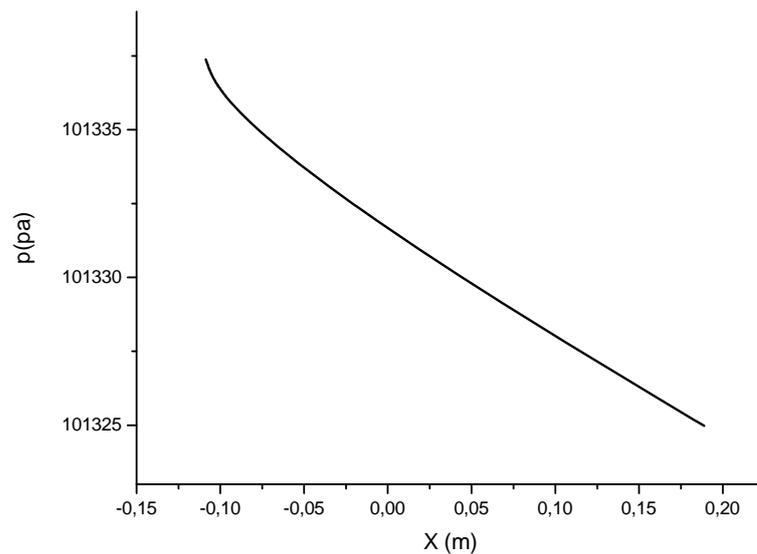


Figure (2) : la pression le long de la conduite rayon $r=5\text{mm}$ de longueur $L=500\text{ mm}$, $Re=100$

Une petite comparaison entre le fluide newtonien et non newtonien a été réalisée dans les mêmes conditions et pour la même géométrie (figure 3).

Le profil de vitesses établi du fluide non-newtonien est de forme bouchon, ceci signifie qu'au niveau de la paroi, le cisaillement est important, d'où une viscosité proche de la valeur constatée pour le fluide newtonien. Par contre, le profil de vitesses du fluide newtonien a une forme parabolique dans le cas présent, avec un cisaillement plus faible à la paroi que celui du fluide non-newtonien. En résumé, la contrainte de cisaillement pariétale est plus élevée pour le fluide non-newtonien.

Ces résultats se retrouvent à l'aide de la méthode numérique mise en œuvre [1-3].

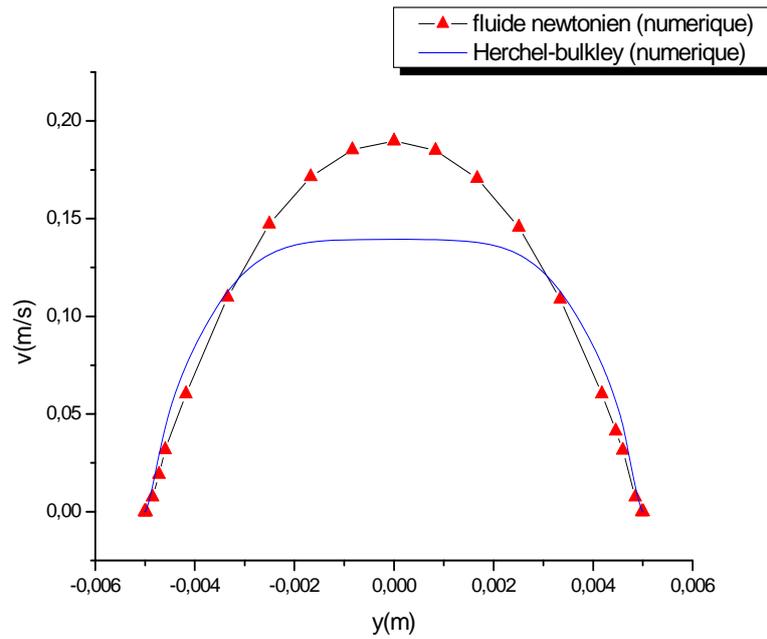


Figure (3) : profils de vitesses dans le cas d'une conduite cylindrique comparaison entre fluide newtonien et fluide non-newtonien, rayon $r=5\text{mm}$ de longueur $L=500\text{ mm}$, $Re=100$

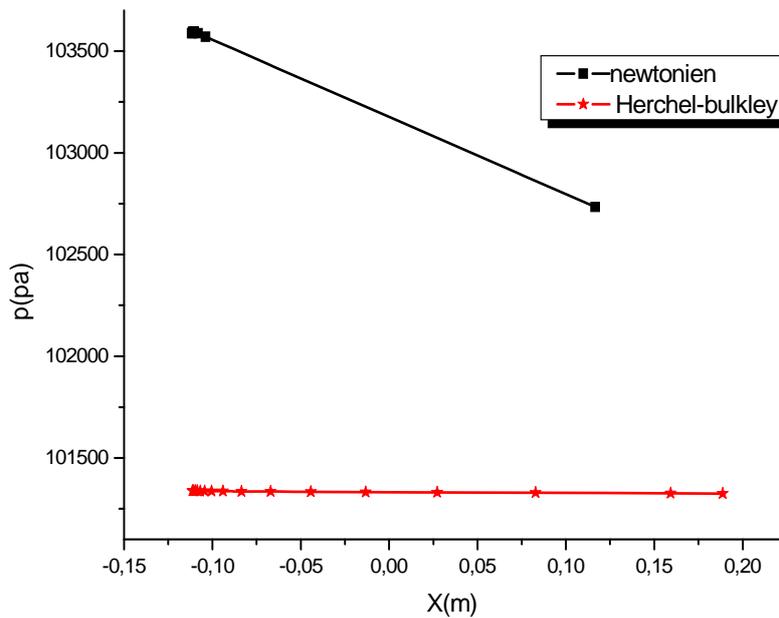


Figure (4) : profils de pressions le cas d'une conduite cylindrique comparaison entre fluide newtonien et fluide non-newtonien, rayon $r=5\text{mm}$ de longueur $L=500\text{ mm}$, $Re=100$

II Etudes numériques dans le cas de conduites complexes

Sont étudiés ici les écoulements de fluides newtoniens ou non-newtonien incompressibles dans le cas d'une conduite sténosée, d'une conduite divergente, et d'une conduite convergente. Ainsi que dans des coudes à différents angles (90° et 45°).

1. Etude de l'écoulement d'un fluide Newtonien et d'un fluide non-newtonien dans une conduite divergente

La conduite divergente est caractérisée par une longueur $L= 500\text{mm}$ et un rayon d'entrée $r_1=3\text{mm}$ et un rayon de sortie $r_2=6\text{mm}$.

Le nombre de Reynolds est constant $Re= 100$

a. fluide newtonien

Le graphe (figure 5), représentant l'évolution de la vitesse le long de l'axe en trois positions de la conduite. Nous constatons que la vitesse diminue entre l'entrée et la sortie de la conduite [3]

La conduite a une faible variation de divergence

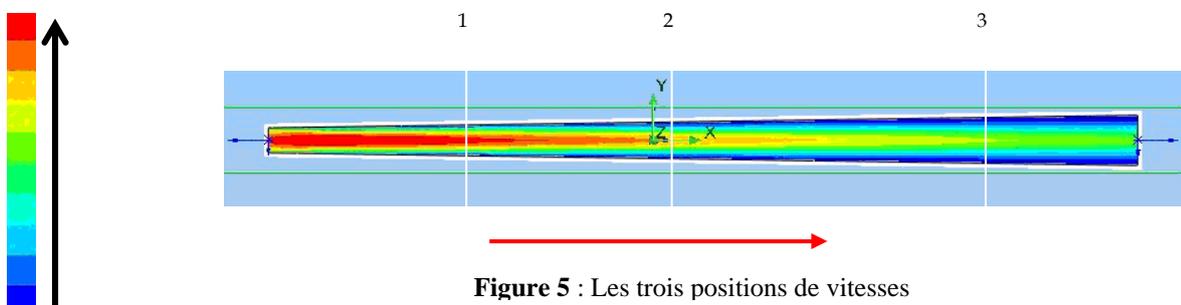
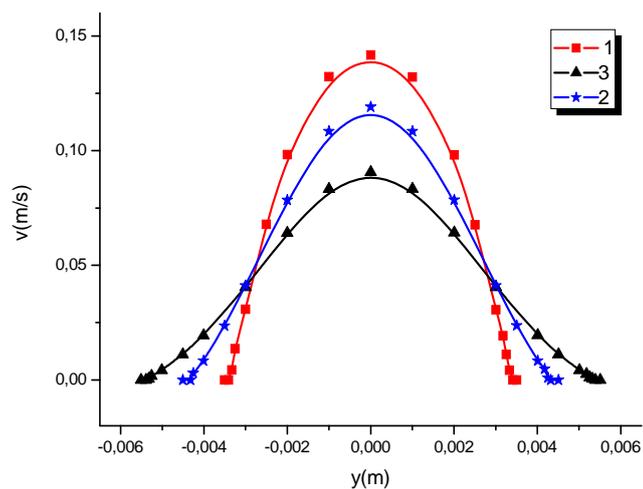


Figure 5 : Les trois positions de vitesses

La figure suivante, représente l'évolution de la pression le long de la conduite suivant la direction x

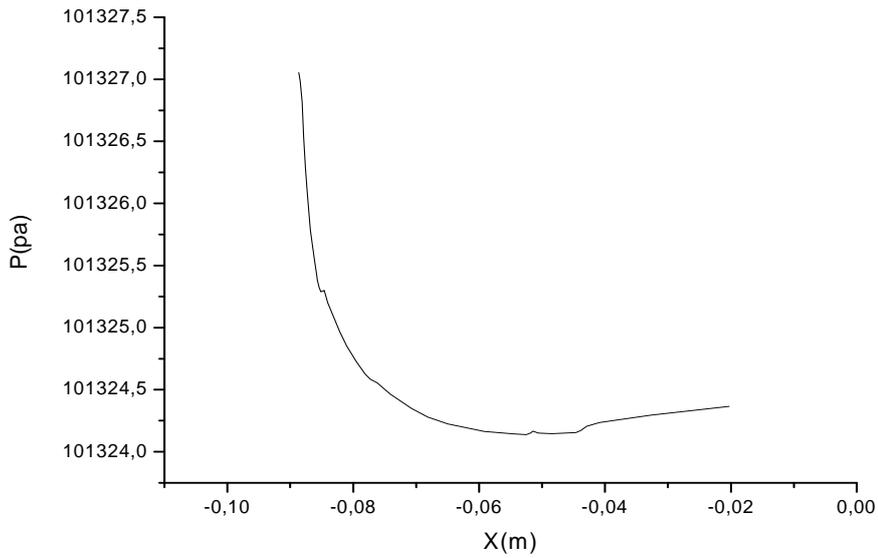


Figure 6 : profil de pression

b. fluide non-newtonien (Herschel-bulkley)

Le graphe (figure 7), représentant la vitesse le long de l'axe en trois positions de la conduite, montre que la vitesse diminue entre l'entrée et la sortie de la conduite

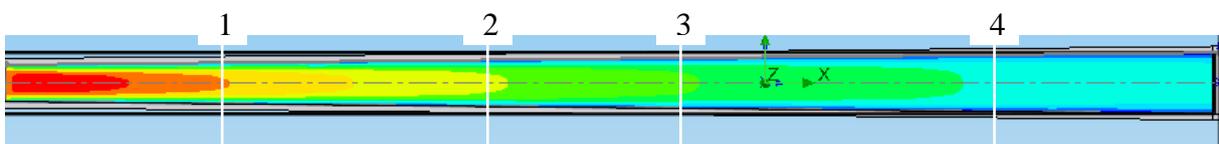
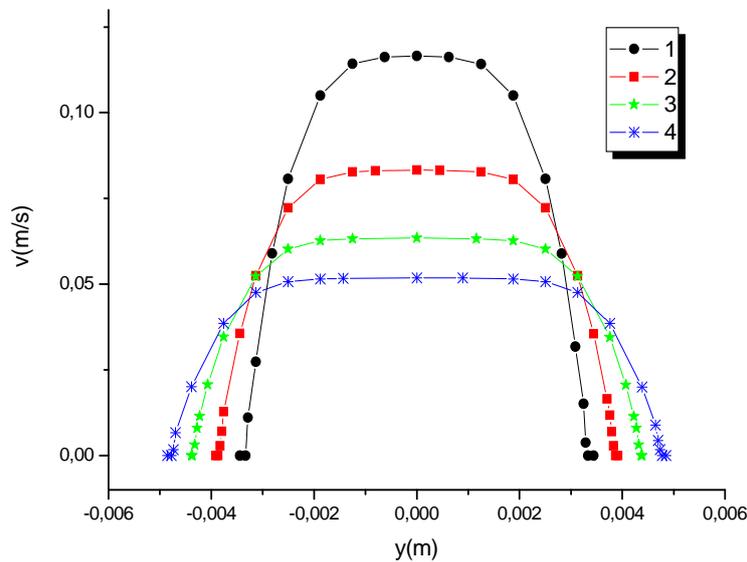


Figure 7 : profils de vitesses à différentes positions de x

La figure suivante, représente l'évolution de la pression le long de la conduite suivant la direction x

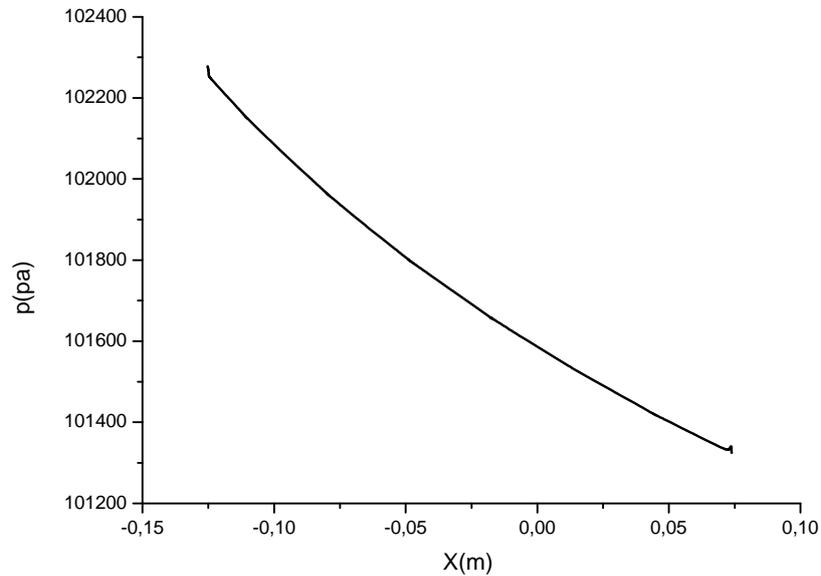


Figure 8 : la pression le long de la conduite

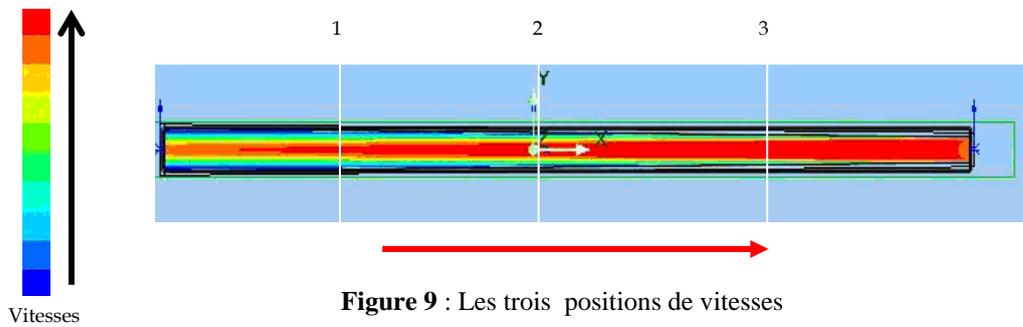
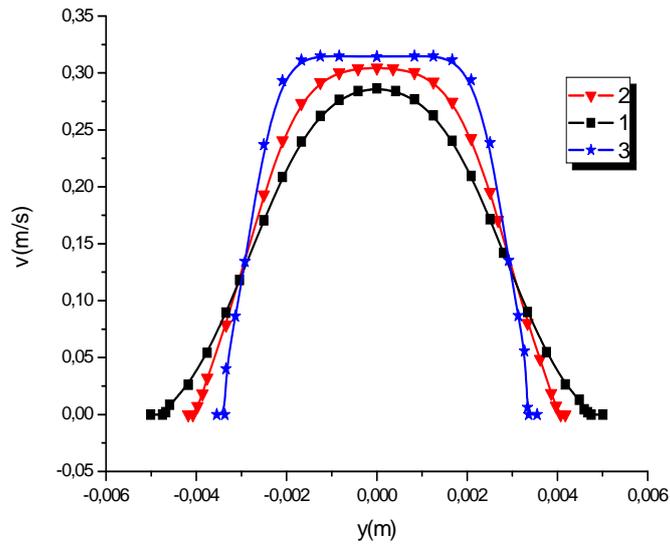
2. Etude de l'écoulement d'un fluide Newtonien et d'un fluide non-newtonien dans une conduite convergente

La conduite divergente est caractérisée par une longueur $L = 500$ mm et un rayon d'entrée $r_1 = 6$ mm et un rayon de sortie $r_2 = 3$ mm.

Le nombre de Reynolds est constant $Re = 100$

a. fluide newtonien

Le graphe (figure 9), représente l'évolution de la vitesse pour trois positions sur l'axe de la conduite. A l'inverse, nous constatons que la vitesse augmente entre l'entrée et la sortie de la conduite par rapport à la conduite divergente.



La figure suivante, représente l'évolution de la pression le long de la conduite suivant la direction x

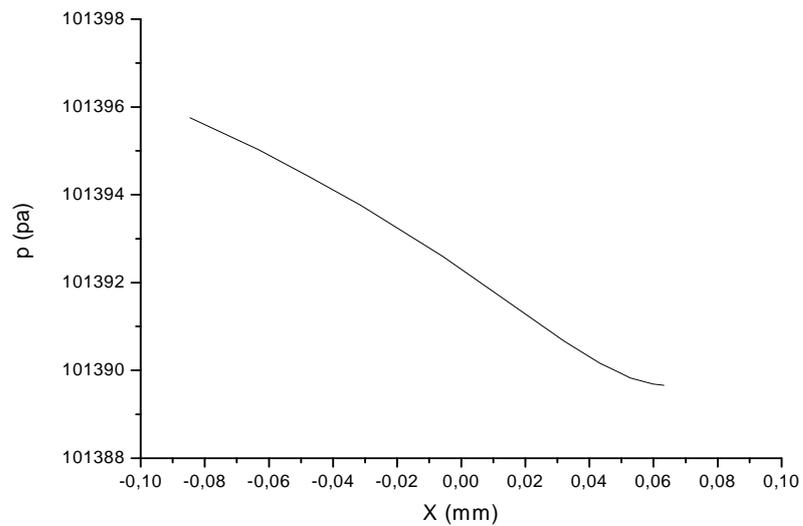


Figure 10 : la pression le long de la conduite

b. fluide non-newtonien (Herschel-bulkley)

Le graphe (figure 11), représente l'évolution de la vitesse pour quatre positions sur l'axe de la conduite. A l'inverse des observations pour la conduite divergente, nous constatons que la vitesse augmente entre l'entrée et la sortie de la conduite.

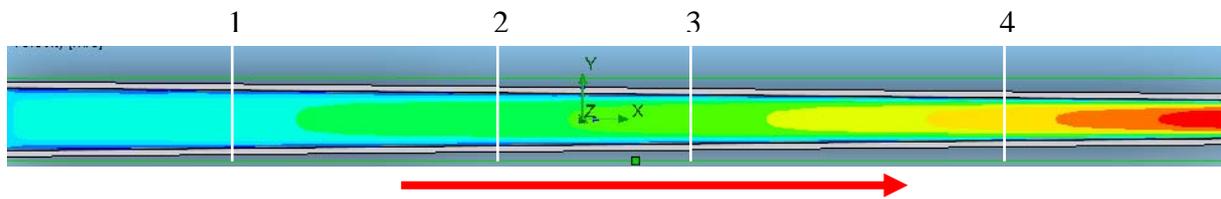
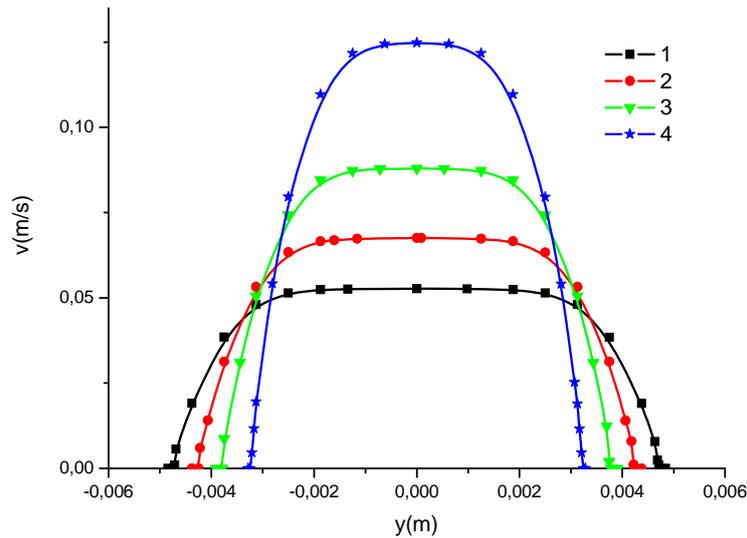


Figure 11: profil de vitesses à différente position de x

La figure suivante, représente l'évolution de la pression le long de la conduite suivant la direction x

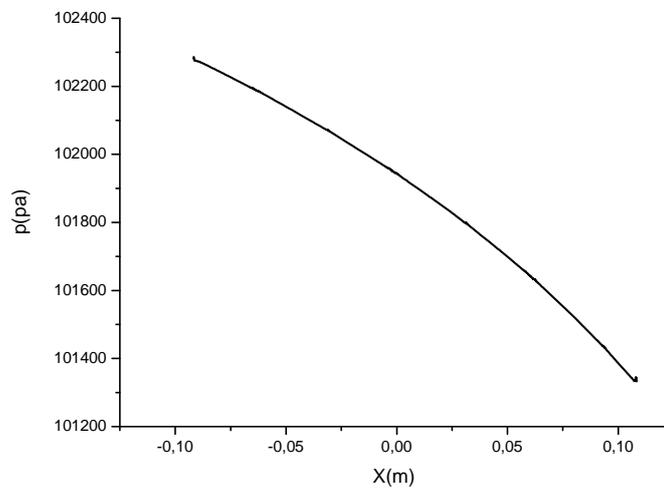


Figure 12 : la pression le long de la conduite

3. Etude de l'écoulement d'un fluide Newtonien et d'un fluide non-newtonien dans une conduite sténosée

la forme de la sténose est semi sphérique de dimension 3mm, la longueur $L=500m$ le rayon $r= 5 \text{ mm}$

a. fluide newtonien

Le graphe (figure 13) représente la vitesse sur l'axe en fonction de Y pour différentes positions de X. Elle augmente au passage de la sténose, mais ne reprend pas la valeur qu'elle avait en amont puisque la recirculation crée un effet de jet

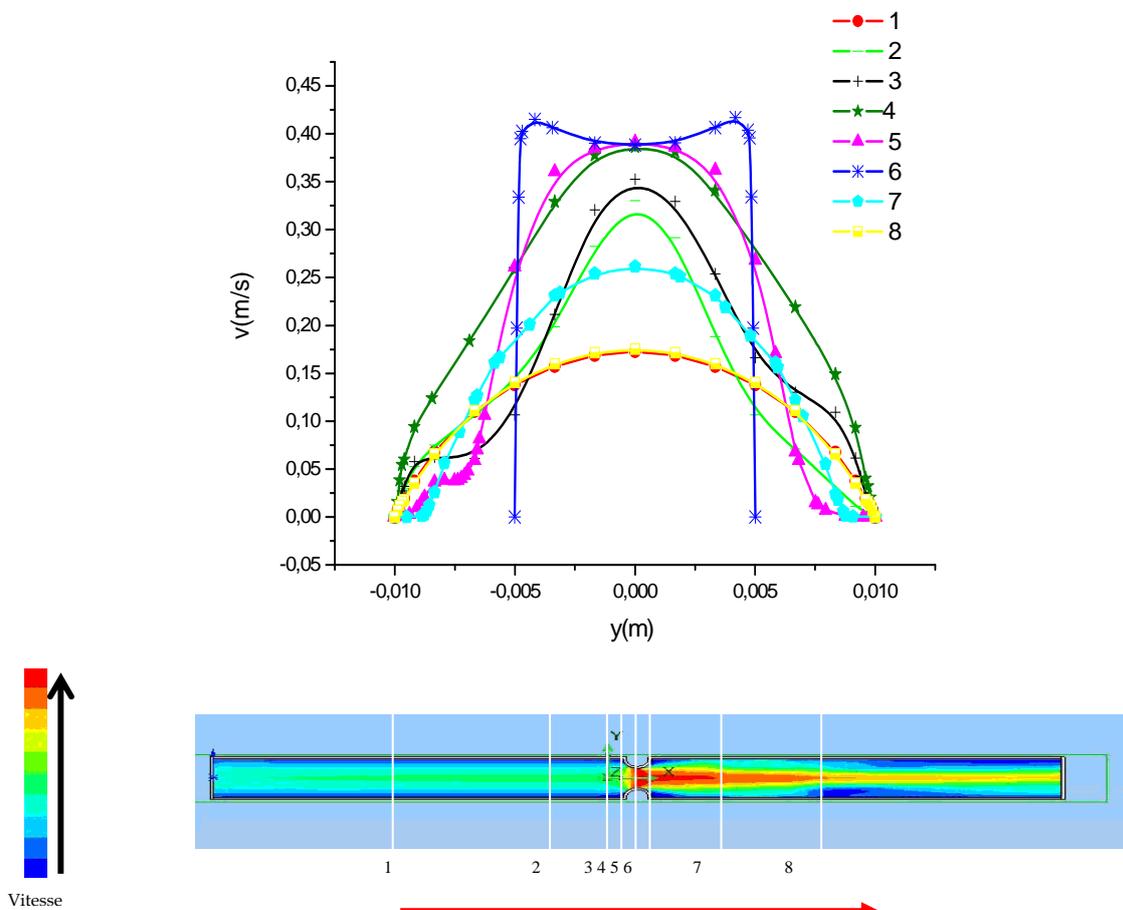


Figure 13 : les différentes positions de vitesses

b. fluide non-newtonien (Herschel-bulkley)

Le graphe (figure 14), représente la vitesse sur l'axe en fonction de Y pour différentes positions de X. celui-ci révèle une augmentation de la vitesse du fluide au passage de la sténose, mais ne reprend pas la valeur qu'elle avait avant puisque la recirculation crée un effet de jet, par contre la nature du fluide non-newtonien révèle que cet effet de jet est à l'origine d'un palier horizontal parfaitement observable au niveau de la figure représentée [4].

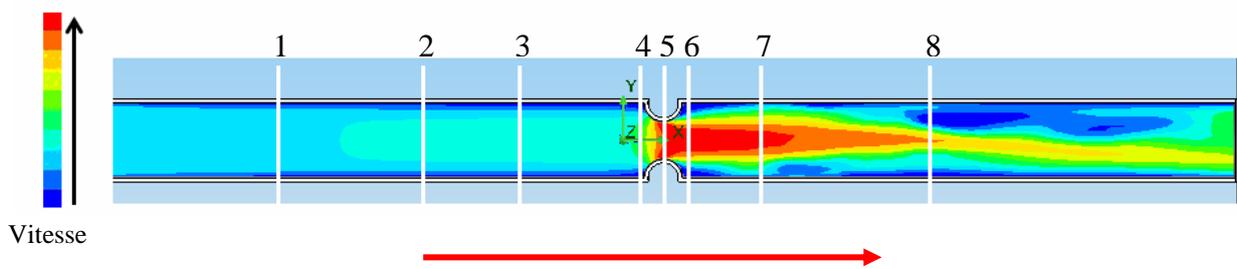
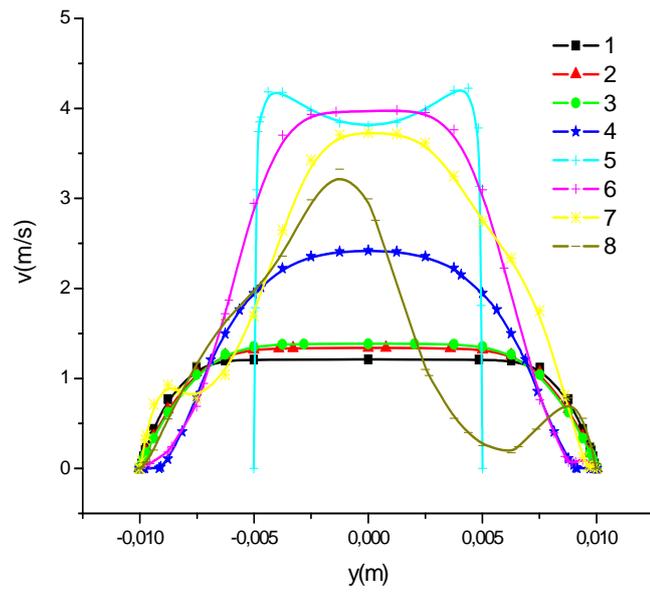


Figure 14 : profil de vitesse suivant l'axe de symétrie de la conduite

La figure suivante, représente l'évolution de la pression le long de la conduite suivant la direction x

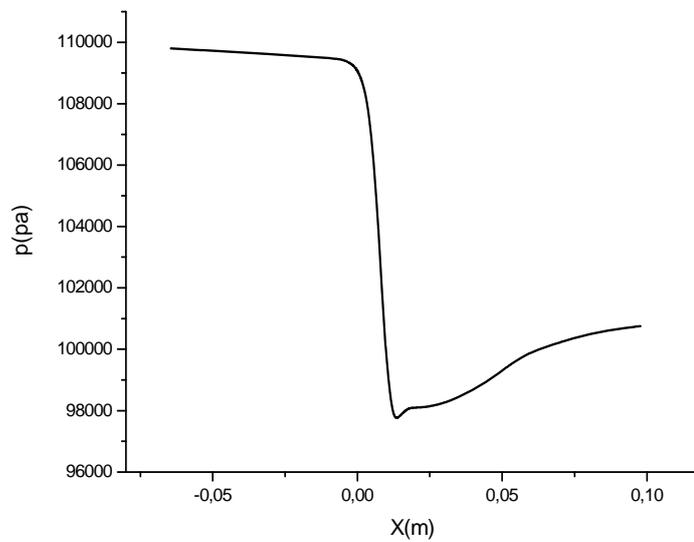


Figure 15 : la pression le long de la conduite

Remarque pour les conduites divergente, convergente, et sténosée :

Ce type de singularités géométriques se rencontre souvent dans les réseaux physiologiques comme dans les sténoses (diminution locale du diamètre d'un vaisseau) ou dans les anévrismes (augmentation locale du diamètre d'un vaisseau).

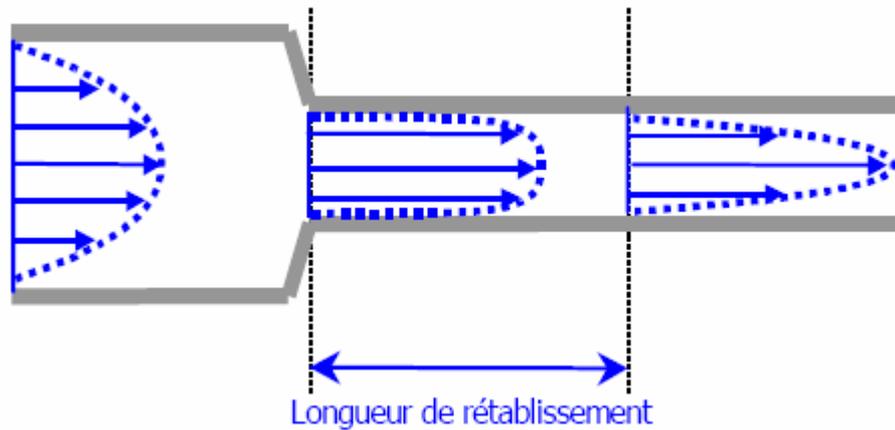


Figure 16: CONVERGENT: la paroi est représentée en gris, les profils de vitesses en pointillés bleus et les vecteurs vitesses par des flèches bleues

Une diminution de section (appelée convergent, voir figure 16) impose par conservation du débit, une augmentation de la vitesse. Plus le changement est brusque, plus les profils de vitesse sont longs à se rétablir. Ce type de singularité correspond à une entrée de sténose ainsi qu'à une sortie d'anévrisme. A l'inverse, une augmentation de section, ou divergent (figure 17), engendre une diminution de la vitesse. Une zone de stase, voire de recirculation, peut même naître juste à l'aval de la singularité. Ce phénomène est généralement observé en sortie de sténose [1], il est également présent en entrée d'anévrisme.

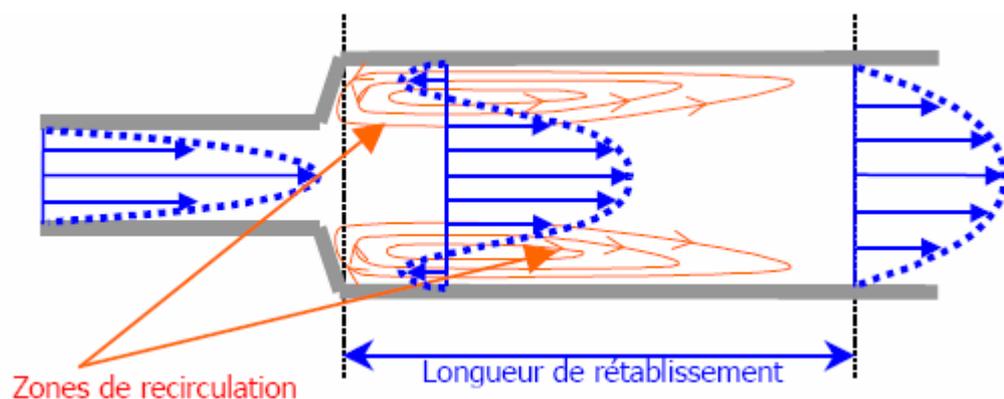


Figure 17: DIVERGENT: recirculations (en orange), profils de vitesses (pointillés bleus), vecteurs vitesses (flèches bleues). La paroi est dessinée en gris.

4. Etude de l'écoulement d'un fluide Newtonien et d'un fluide non-newtonien dans une conduite coudée caractérisée par un angle de 90°

a. fluide newtonien

Le fluide est soumis à une force d'inertie centrifuge supplémentaire, qui agit perpendiculairement à la direction locale de l'axe du tube. La répartition asymétrique par rapport à l'axe du tube de la quantité de mouvement impose une nouvelle distribution de la pression transversalement. Le mouvement des particules fluides est caractérisé par une trajectoire hélicoïdale [5, 6] (figure 18). A tout instant et en tout lieu du domaine fluide, le vecteur vitesse est décomposé en une composante parallèle à la direction locale de l'axe du tube et une composante perpendiculaire, dans le plan de la section droite. Cette dernière composante constitue le vecteur vitesse de l'écoulement secondaire. Le même résultat est retrouvé dans le cadre d'une simulation numérique d'écoulement stationnaire laminaire de fluide newtonien qui a été effectuée dans une bifurcation coudée (angle de courbure de 90 degrés) par la Méthode aux Eléments Finis [7, 8].

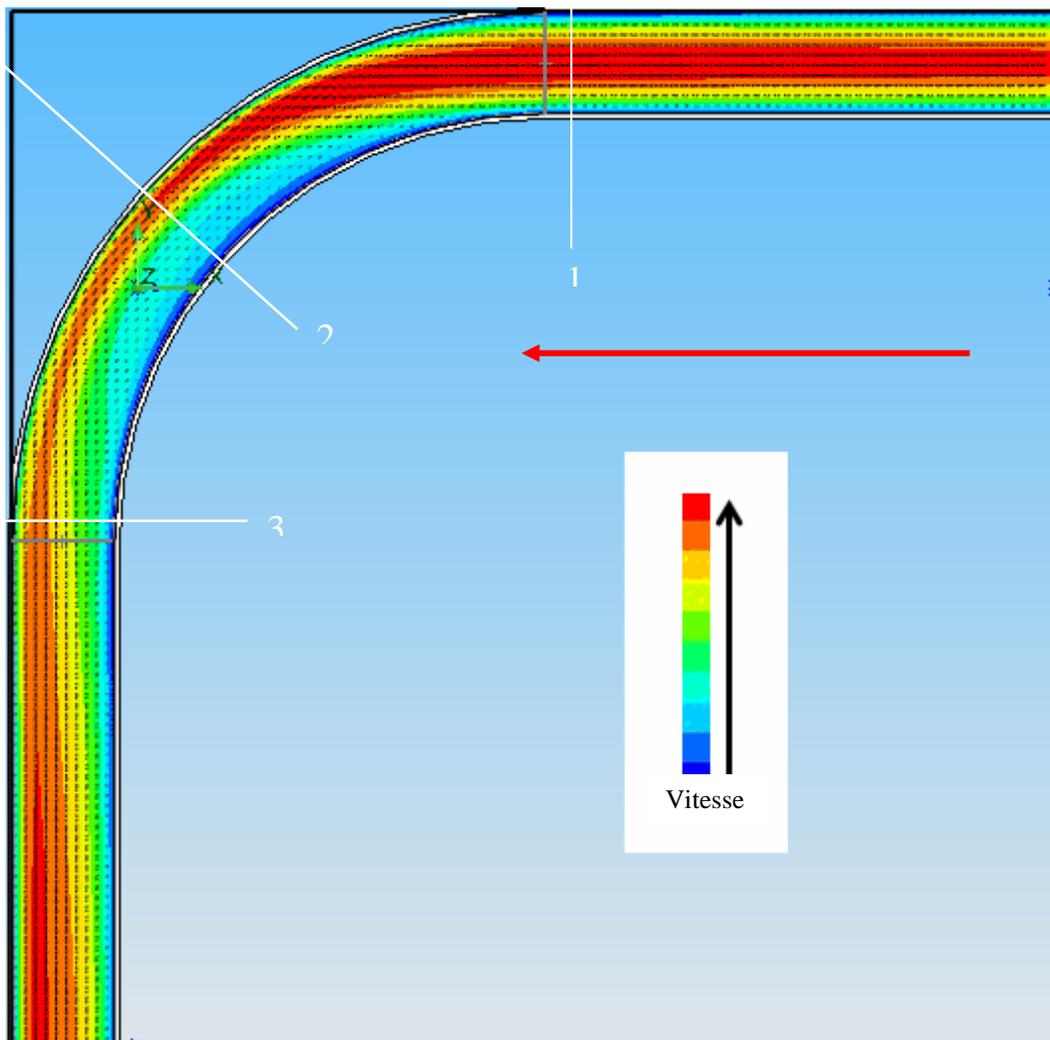


Figure 18: les différentes positions de la vitesse dans une conduite coudée de rayon $r=3\text{mm}$

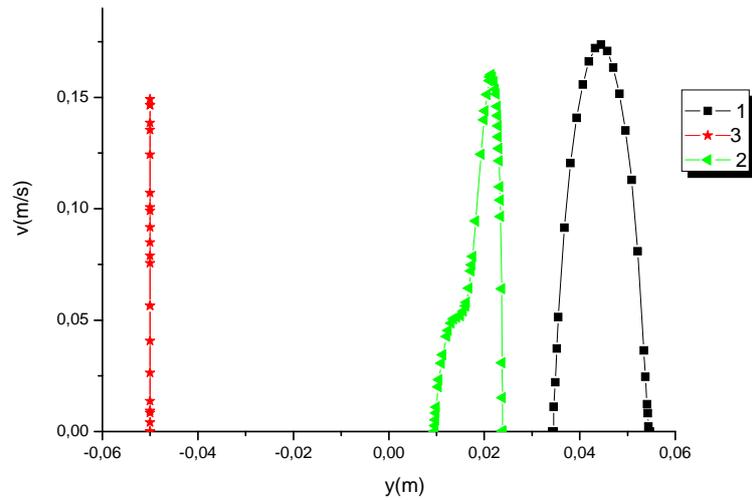


Figure 19 : les différentes positions de la vitesse

La figure suivante, représente l'évolution de la vitesse le long de la conduite suivant la direction x

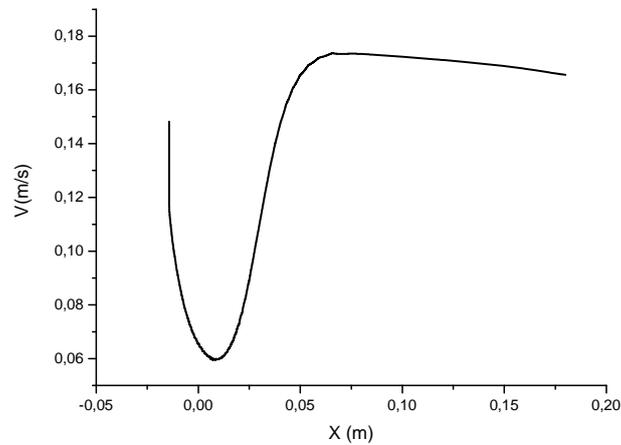


Figure 20 : profil de vitesses suivant l'axe x

La figure suivante, représente l'évolution de la pression le long de la conduite suivant la direction x

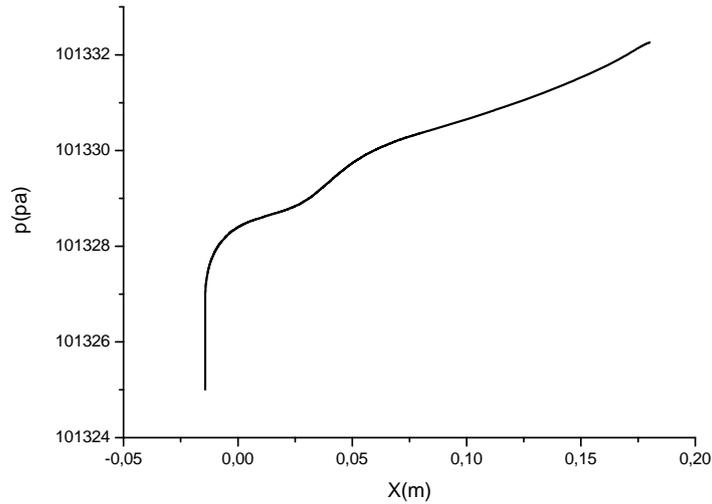


Figure 21 : la pression le long de la conduite

b. fluide non-newtonien (Herschel-bulkley)

Le graphe (figure 24) représente la vitesse sur l'axe en fonction de Y pour différentes positions le long de la conduite. Le profil de vitesses établi est de forme bouchon pour le même nombre de Reynolds ($Re=100$) choisi pour tout les cas étudiés, si l'on augmente le nombre de Reynolds à 500 [7], l'on retrouve une trajectoire hélicoïdale comme pour le fluide newtonien mais celle-ci est décalée par rapport à la première simulation [5, 8].

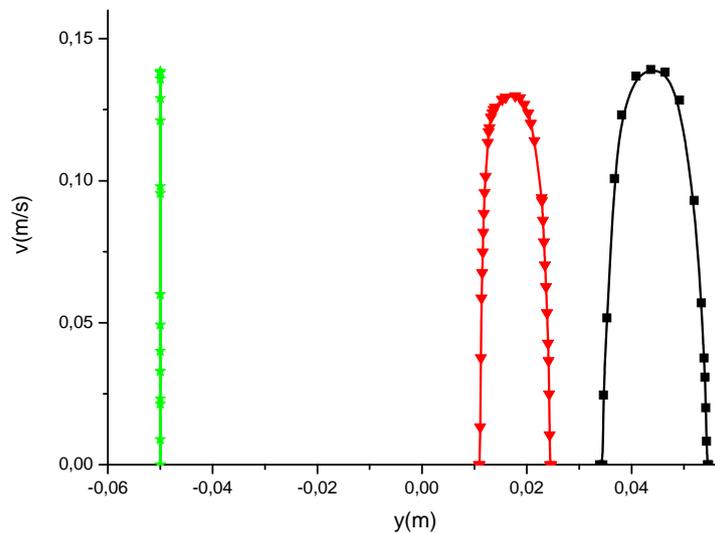


Figure 22 : profil de vitesses sur différentes sections

La figure suivante, représente l'évolution de la pression le long de la conduite suivant la direction x

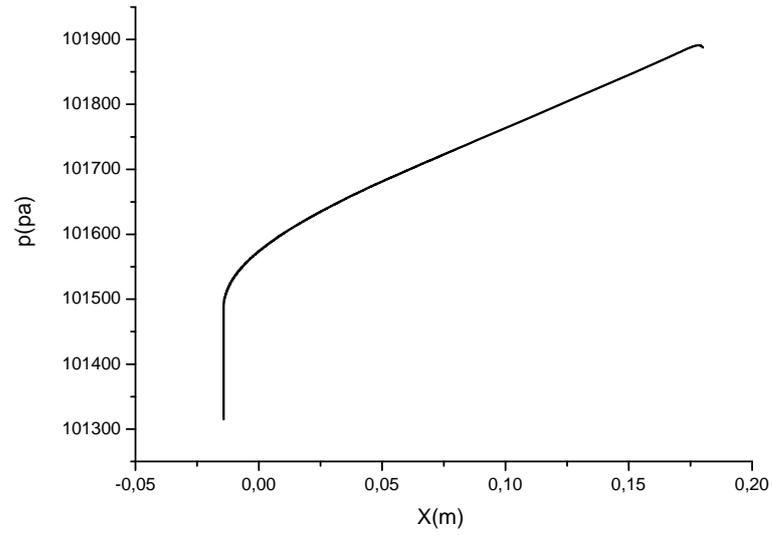


Figure 23 : la pression le long de la conduite

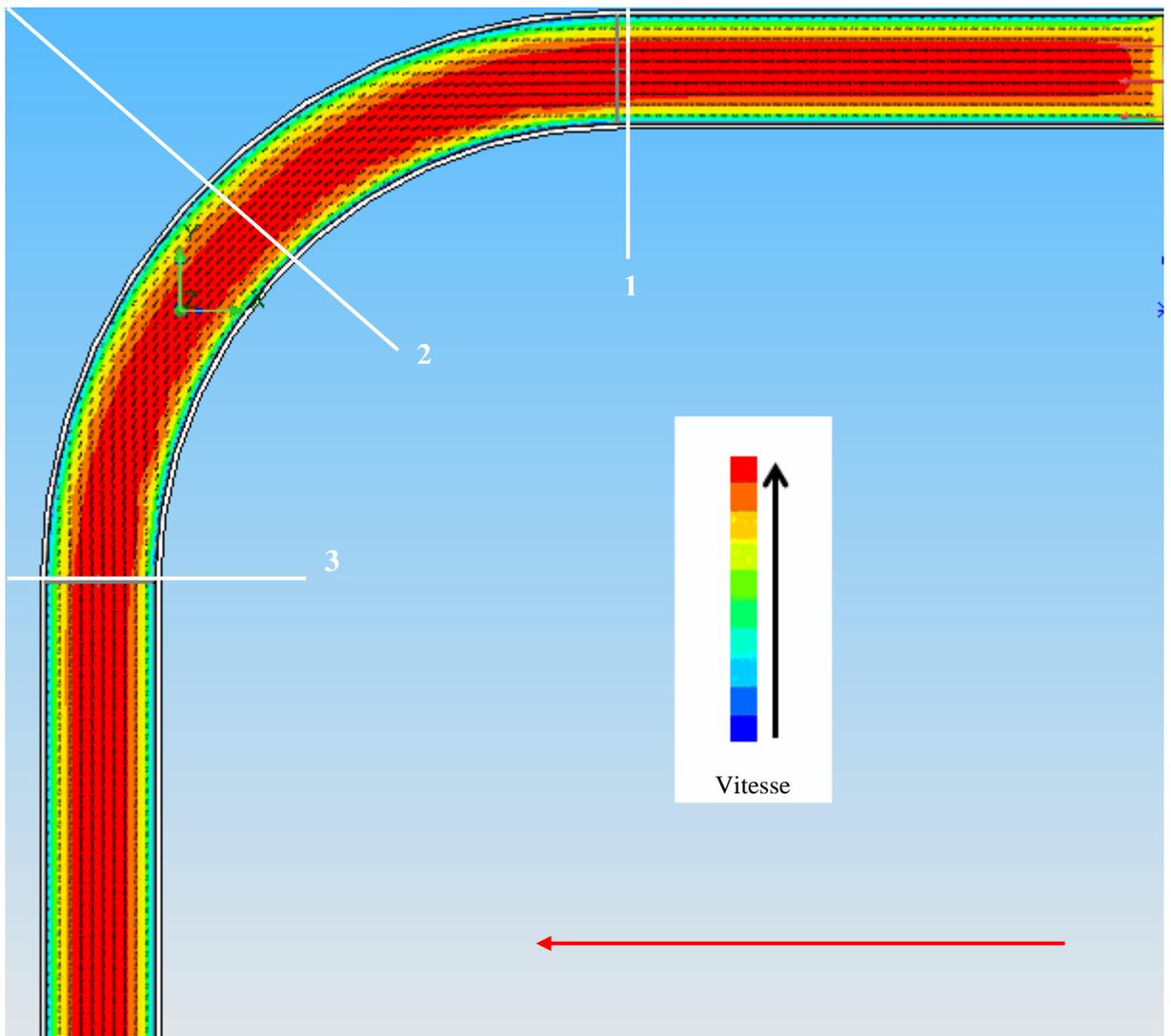


Figure 24 : profils de vitesses suivant l'axe de symétrie de la conduite de rayon $r=3\text{mm}$
 $Re = 100$

5. Etude de l'écoulement d'un fluide Newtonien et du fluide sanguin dans une conduite coudée caractérisée par un angle de 45°

a. fluide newtonien

Les mêmes remarques que celles formulées pour les conduites coudées avec un angle de 90° peuvent être développées une nouvelle fois : ainsi, l'on observe pour l'angle de 45° que le mouvement des particules fluides est caractérisé par une trajectoire hélicoïdale (figure 28) mais décalée par rapport à celle obtenue pour une conduite coudée d'angle 90° .

Les figures suivantes, représentent l'évolution des profils de vitesses et la pression le long de la conduite suivant la direction x

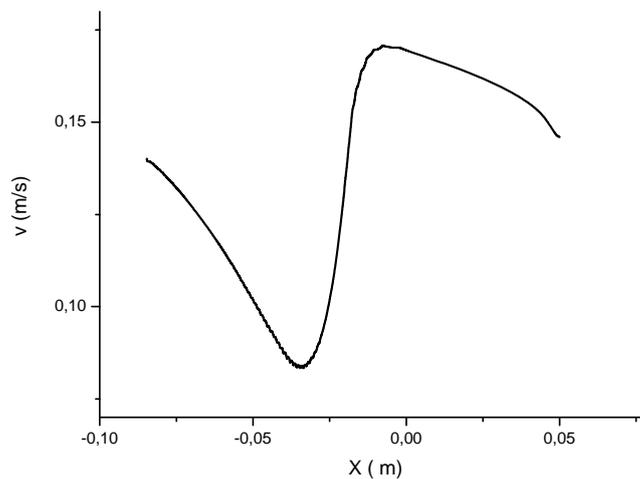


Figure 25 : profils de vitesses suivant l'axe de symétrie de la conduite

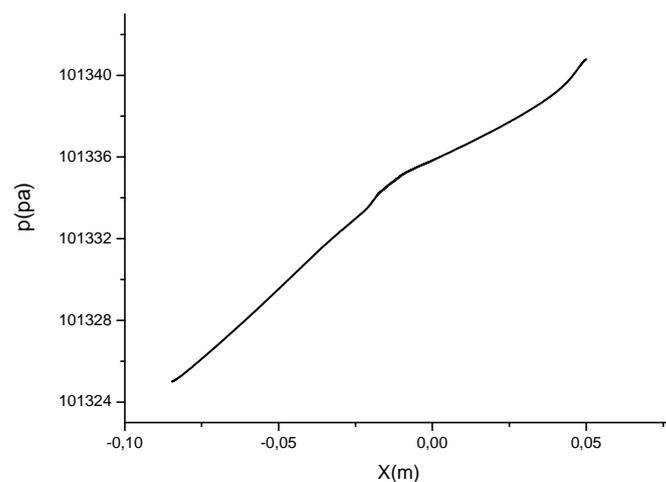


Figure 26 : la pression le long de la conduite

Le graphe suivant représente l'évolution des profils de la vitesse axiale à différentes positions de la conduite coudée

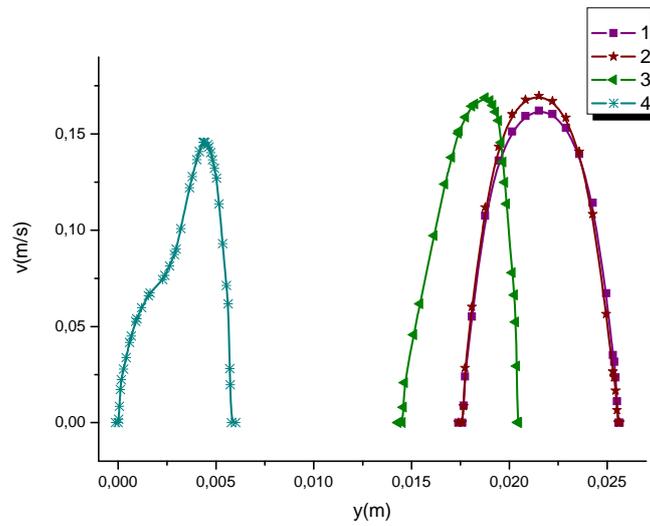


Figure 27 : profils de vitesses suivant l'axe de symétrie de la conduite

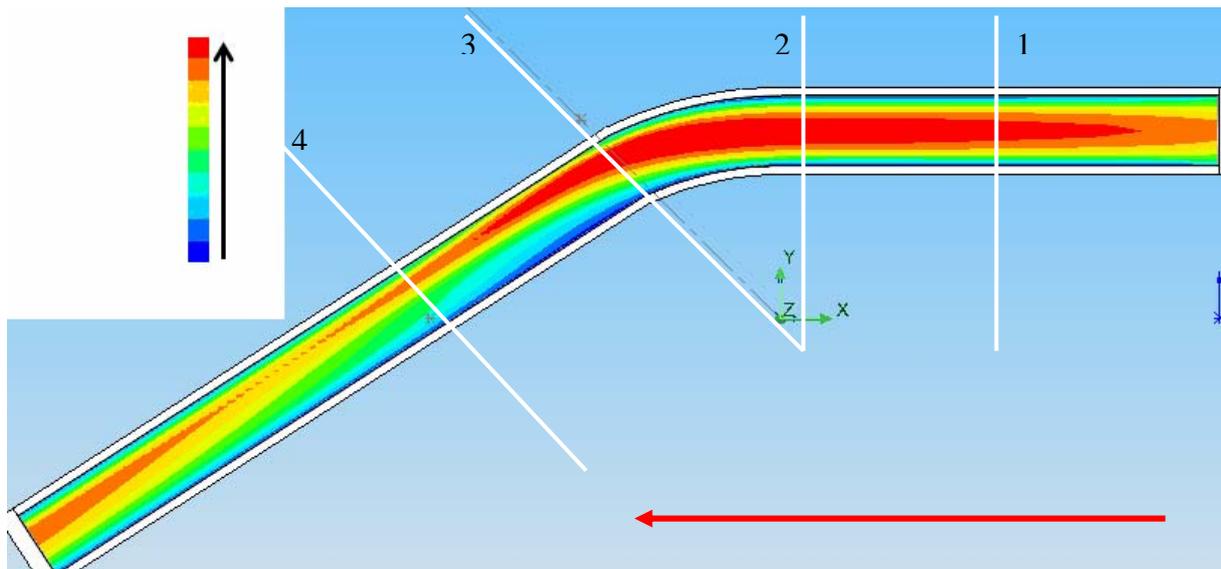


Figure 28 : profils de vitesses $r=3\text{mm}$, $Re=100$

b. fluide non-newtonien (Herschel-bulkley)

Le graphe (figure 31) représentant la vitesse sur l'axe en fonction de Y pour différentes positions le long de la conduite exprime le profil de vitesses établi. Celui-ci est de forme bouchon

La figure suivante, représente l'évolution de la pression le long de la conduite suivant la direction x

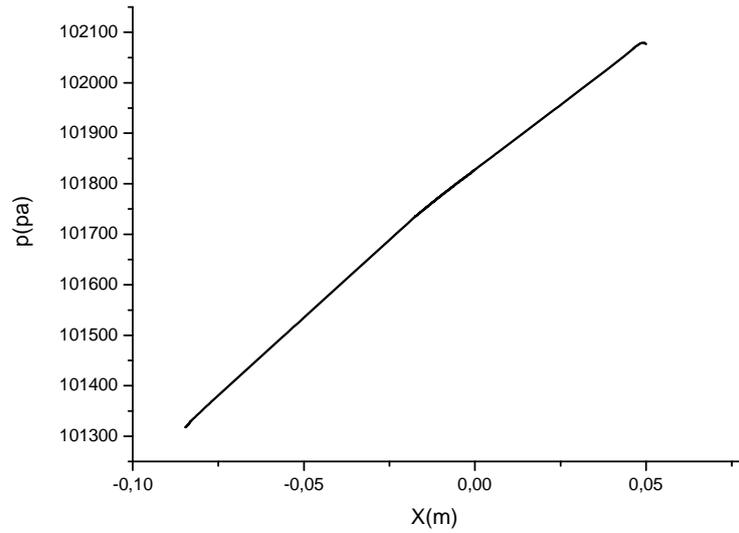


Figure29 : la pression le long de la conduite

Le graphe suivant représente l'évolution des profils de la vitesse axiale à différentes positions de la conduite coudée

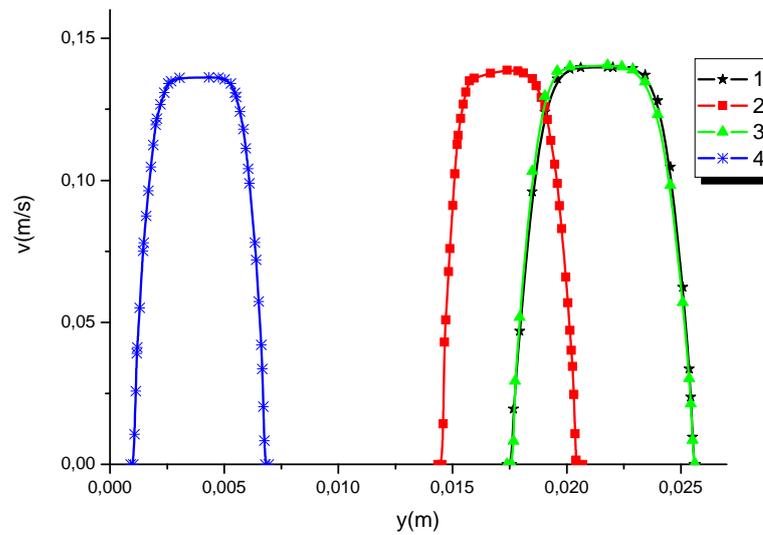


Figure 30 : profil de vitesses à différentes sections

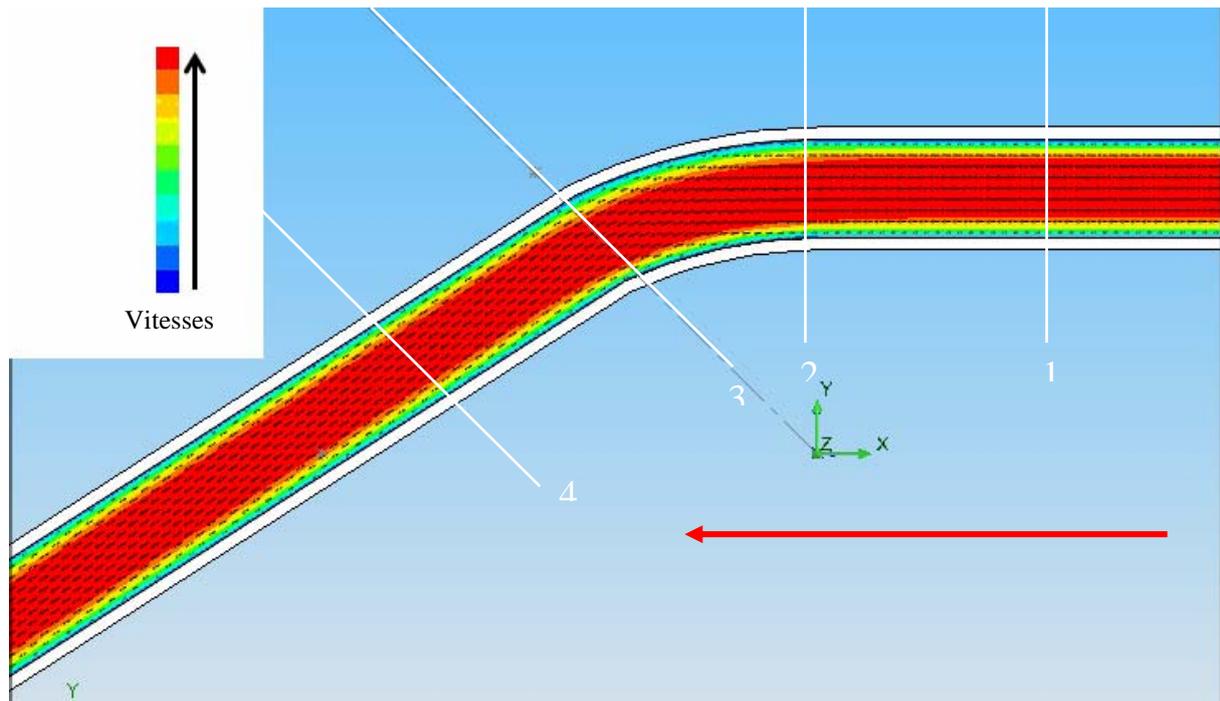


Figure 31 : profils de vitesses suivant l'axe de symétrie de la conduite $r=3\text{mm}$, $Re=100$

Les coudes donnent naissance à des circulations secondaires se manifestant par des phénomènes tourbillonnaires (figure 32). Le caractère tridimensionnel des écoulements est alors très marqué. Les particules fluides, déviées par la courbure de la géométrie, sont soumises à deux forces opposées. La première, liée à l'inertie du fluide, agit de l'intérieur vers l'extérieur du coude et est prédominante tant que la vitesse de la particule est grande ; c'est le cas au centre de l'écoulement. En conséquence, dans le plan du coude le maximum du profil des vitesses se décale vers le bord extérieur où la pression augmente (dessin de droite sur la figure 32). La seconde force, issue du gradient de pression agit de l'extérieur vers l'intérieur du virage et gouverne l'écoulement pour les faibles vitesses, c'est à dire près des bords. Une direction secondaire d'écoulement s'établit près des parois. L'écoulement le long de celles-ci s'effectue en sens inverse de celui du centre, deux tourbillons symétriques, appelés tourbillons de Dean, apparaissent (dessin de gauche sur la figure 32). De ce fait, chaque particule parcourt un plus grand chemin que dans le cas d'une conduite droite de même longueur [9].

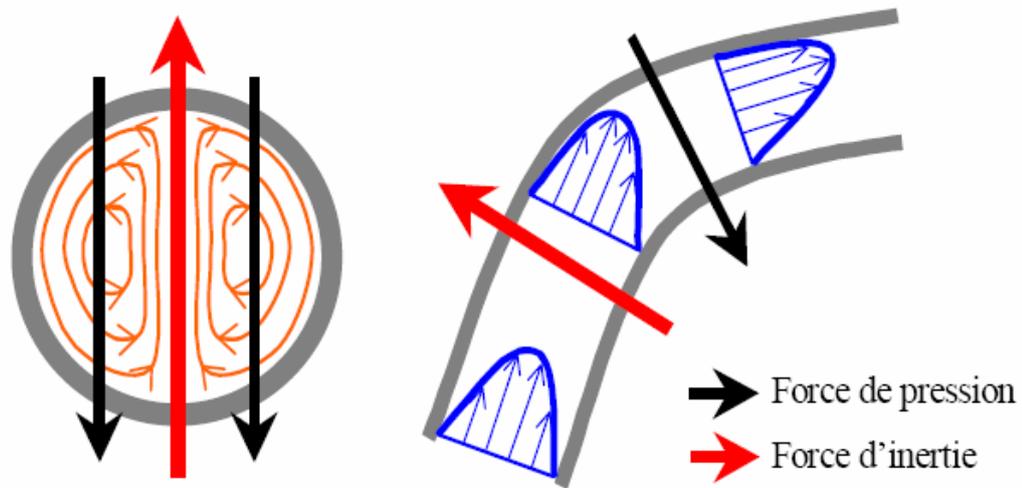


Figure 32: COUDES: répétition des forces (flèches rouges et noires), lignes tourbillonnaires (en orange, à gauche), profils de vitesses (pointilles bleus, à droite), vecteurs vitesses (flèches bleues, à droite)

6. Etude de l'écoulement d'un fluide Newtonien : application au stent

a- stent : définition

Un stent est un dispositif à base de matériau supposé biocompatible conçu pour servir d'échafaudage interne provisoire ou permanent pour maintenir ou augmenter la lumière d'un vaisseau. Il répond ainsi à une inquiétude constante chez les praticiens : celle de s'assurer de la perméabilité du conduit vasculaire (la perméabilité est, ici, à prendre au sens des chirurgiens vasculaires), et éviter ainsi de possibles collapsés des vaisseaux artériels en particulier.

Malheureusement, et malgré des évolutions considérables dans le domaine de la conception et du design de ces structures appelées également endoprothèses, celles-ci restent potentiellement thrombogènes, et l'installation de stents (en particulier au niveau coronaire) entraînent encore aujourd'hui des effets thrombogènes associés à des risques de resténose élevés car il s'agit là d'un problème très sérieux d'interaction entre le fluide sanguin, et la structure artérielle. De fait, les problèmes de revascularisation ne sont pas toujours pas entièrement élucidés.



Figure 33: image réel d une sent

b- application dans le cadre de notre modèle

L'intérêt dans notre étude a été d'évaluer l'influence de la forme géométrique du stent vis-à-vis de l'écoulement sanguin. Le maillage défini a été réalisé sur la base de caractéristiques réelles d'un stent afin que notre simulation évalue au mieux l'influence de la mise en place d'un stent sur l'écoulement sanguin vasculaire.

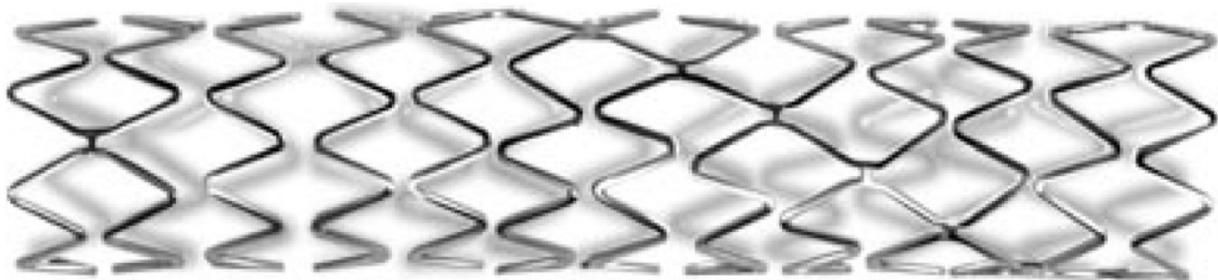


Figure34 : schéma du modèle utilisé dans notre calcul

Ainsi, les figures suivantes représentent l'évolution de la pression et de la vitesse le long de la conduite à différentes positions, supposant le fluide sanguin comme newtonien :

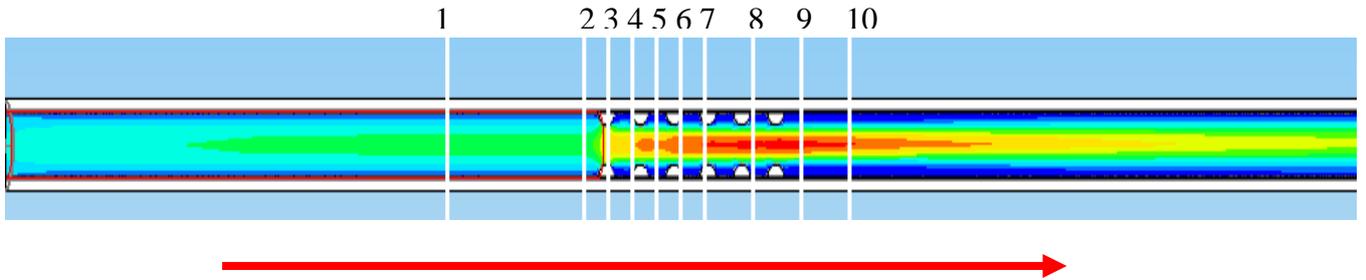
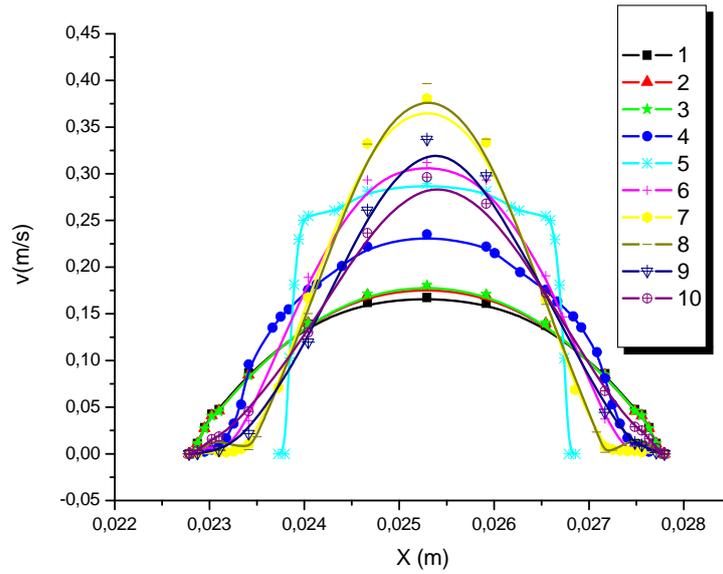


Figure 35 : profils de vitesses à différentes positions d'un stent

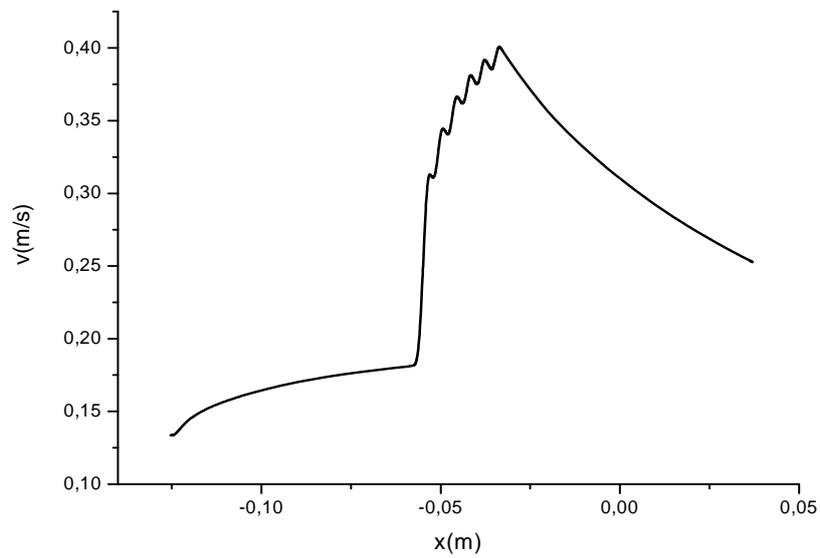


Figure 36 : profil de vitesses suivant x

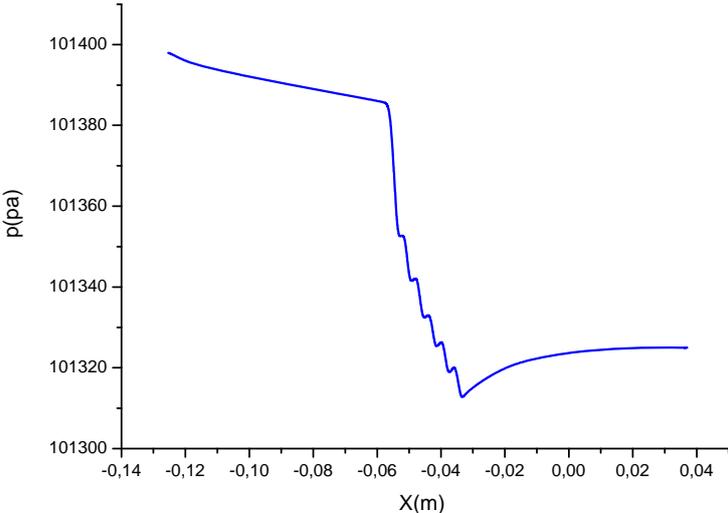


Figure 37 : profil de pression le long de la conduite

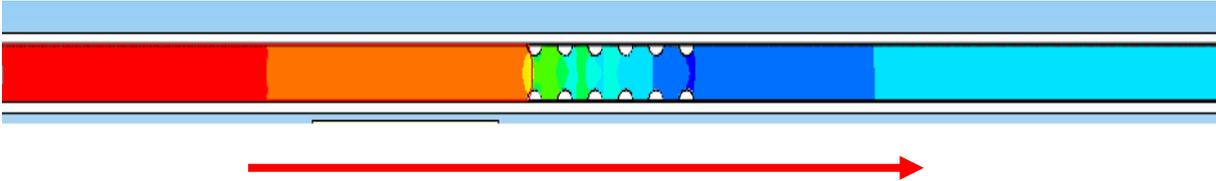


Figure38 : profil de pression

III. Discussion

Dans le cadre de ce chapitre, nous avons examiné les modifications du champ de vitesses de l'écoulement permanent de fluides newtoniens et non-newtoniens et tenté ainsi d'approcher au mieux le fluide sanguin, et ce, à travers différents types de conduits cylindriques caractérisés par différentes géométries qui éventuellement sont accompagnées de singularités parfois complexes comme une sténose (rétrécissement vasculaire) ou des conduits coudés, avec toujours l'ambition d'évaluer non seulement l'influence des géométries sur l'hémodynamique vasculaire, et également si celle-ci reste influencée lorsque la modélisation du fluide sanguin est affinée (cas du fluide non newtonien).

Ainsi, l'étude numérique des écoulements d'un fluide Newtonien ou d'un fluide non-newtonien, en l'occurrence rhéofluidifiant (représenté par la loi de d'HERSCHEL-BULKLEY[10]), à travers une conduite circulaire a été présentée (écoulement laminaire d'un fluide newtonien), avec un effort de validation : permettre en effet la validation du code de calcul par la confrontation des résultats obtenus vis-à-vis d'un calcul analytique à résolution exacte dans un cas simple [1].

Nous noterons là que l'évolution des profils de vitesse est fortement dépendante de la géométrie de la conduite : lorsque celui-ci diminue, la vitesse axiale, la perte de charge singulière et la contrainte pariétale diminuent [1, 10, 11].

Dans une seconde partie, l'étude s'est portée sur l'écoulement laminaire permanent d'un fluide non-newtonien avec l'ambition d'approcher au mieux le fluide sanguin [10].

Nous avons considéré l'écoulement laminaire à travers différentes configurations géométriques pour un fluide newtonien ou non-newtonien. Ce dernier est représenté par la loi de comportement de Herchel-bulkley.,

Les deux configurations convergente ou divergente confirment l'importance de l'évolution du diamètre du conduit vis-à-vis des écoulements fluides. Ainsi, et à l'inverse de la conduite divergente, la conduite convergente offre des profils de vitesses caractérisant une augmentation des vitesses du fluide le long de la conduite [3, 12]. Ce résultat qui reste cohérent qu'il s'agisse d'un fluide newtonien ou non newtonien met en exergue la différence de comportement en termes de contraintes de cisaillement à la paroi, caractéristiques importantes d'un point de vue biomédical.

Nous avons également observé qu'à cause des forces visqueuses la vitesse axiale sur l'axe de la conduite est moins importante pour un fluide non-newtonien qu'un fluide newtonien. Ce qui rend les tailles des zones de recirculation plus grandes pour le cas du fluide newtonien pour la conduite sténosée [1, 11, 13], considérations éloignées de la réalité physiologique.

Tous les résultats obtenus nous confortent donc dans l'optique de choisir le fluide de Herchel-bulkley pour traduire le comportement du fluide sanguin in situ.

En outre le réseau artériel est caractérisé par la présence de nombreux coudes et bifurcations. Notre modèle permet d'appréhender ainsi l'évolution de la vitesse sous forme hélicoïdale due aux fortes contraintes de cisaillement que nous retrouvons in vivo[5-9].

Référence Bibliographies

1. Bachelet, C., *"Implémentation d'une loi rhéologique d'un fluide dans un code numérique de résolution trois dimensions des équation de navier-stokes application en hémodynamique"*, *Génie des procédés*. 1998, université de Paris 19: Paris.
2. Shewaferaw S. Shibeshi, W.E.C., *"The Rheology of Blood Flow in a Branched Arterial System"*. *Applied rheology*, 2005. 15(6): p. 398-405.
3. Muller, S.J., *"Velocity measurements in complex flows of non-Newtonian fluids"*. *Korea-Australia Rheology Journal*, 2002. Vol 14(3): p. 93-105.
4. Stroud, J.S., *"Numerical simulation of blood flow in the stenotic carotid artery bifurcation"*. 2000, University of California, Berkeley.
5. Thiriet. M, J.-M.R.G.a.R.-I.-I., *"A pulsatile developing flow in a bend"*. *Journal de physique III*, 1992(2): p. 995-1013.
6. Rennie. T.J, *"Numerical and experimental studies of a doublepipe helical heat exchanger"*, *Department of Bioresource Engineering*. 2004, McGill University, Montreal.
7. Thiriet. M, G.M.-B., F. Hecht, *"Ecoulement rhéofluidifiant dans un coude et une bifurcation plane symétrique. Application à l'écoulement sanguin dans la grande circulation"*. *Journal de physique III*, 1996(6): p. 569-542.
8. Thiriet. M, J.M.R.G., R. I. Issa *"A computational model of wall shear and residence time of particles conveyed by steady flow in a curved tube"*. *Journal de physique III*, 1993(3): p. 85-103.
9. Cros. F, *" Confluences, remplissage et vidange deux aspects singuliers du réseau veineux jambier"*, *Mécanique des fluides et des tissus biologiques*. 2003, Université Paris 7.
10. Burton. A.C., *"Physiologie et biophysique de la circulation"*. MASSON ed. 1975, paris.
11. Aksouh. M., *"Simulation numérique des écoulements instationnaires pour des fluides non-newtoniens à travers des configurations complexes : Applications aux écoulements sanguins"*, *Energétique et Mécanique des Fluides*. 2004, USTHB/ALGER.
12. Mandal, P.K., *"An unsteady analysis of non-Newtonian blood flow through tapered arteries with a stenosis"*. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2005(40): p. 151-164.
13. Achab .L, B.S., *"Application d'une loi constitutive dans l'étude numérique de l'écoulement sanguin à travers une artère sténosée"*. *Rhéologie*, 2005. vol. 7: p. 28-34.

CONCLUSION

GENERALE

Conclusion Générale

Dans le cadre de ce travail de recherche, nous avons réalisé une étude numérique basée sur la Méthode aux Volumes Finis pour mieux évaluer et appréhender l'influence des géométries des conduits sur les écoulements sanguins.

Cette étude s'est ainsi orientée vers la caractérisation de ces écoulements tenant compte d'une modélisation de ceux-ci lorsque les fluides sont supposés newtoniens ou non newtoniens (exemple du modèle de Herschel-Bulkley)

Dans une première partie, une étude numérique des écoulements de fluides Newtonien et non newtonien à travers une conduite circulaire a été présentée.

Pour ce faire, nous avons disposé d'un code de calcul utilisant la Méthode aux Volumes Finis. Un effort de validation du modèle numérique mis en œuvre a été réalisé et ce, en comparant les résultats numériques et analytiques obtenus dans le cadre du calcul de la vitesse axiale du fluide au sein de la conduite axisymétrique choisie.

L'évolution constatée des profils de vitesses est fortement dépendante de l'indice de structure : lorsque celui-ci diminue, la vitesse axiale, la perte de charge singulière et la contrainte pariétale diminuent également.

Dans une seconde partie, et dans l'optique d'approcher au mieux la caractérisation de l'hémodynamique vasculaire, l'étude s'est ensuite portée sur l'écoulement laminaire sur de fluides newtonien ou non-newtonien tenant compte de géométries plus complexes.

Nous avons ainsi considéré ici l'écoulement laminaire à travers différentes configurations géométriques pour un fluide newtonien ou non-newtonien, dont ce dernier est représenté par la loi de comportement de Herschel-Bulkley.

Nous avons alors observé que, quelque soit le comportement rhéologique du fluide, les deux configurations, convergente ou divergente, confirment l'importance de l'évolution du diamètre du conduit vis-à-vis des écoulements fluides.

Ainsi, et à l'inverse de la conduite divergente, la conduite convergente offre des profils de vitesses caractérisant une augmentation des vitesses du fluide le long du conduit biosolide, avec des taux de cisaillements à la paroi comparativement plus importants. Ces résultats explicitent, pour exemple, l'intérêt de produire des prothèses vasculaires coniques pour améliorer leur intégration in situ.

En outre, le choix de modélisation se révèle également important dans le cadre d'une meilleure appréhension de l'hémodynamique vasculaire, du fait de la caractérisation des forces visqueuses. Ainsi, la vitesse axiale sur l'axe de la conduite est moins importante pour un fluide non-newtonien qu'un fluide newtonien.

Aussi, dans le cadre d'une approche phénoménologique, le choix d'une modélisation à partir de l'hypothèse d'un fluide caractérisé par une loi de Herschel-Bulkley explique de manière plus cohérente la présence de zones de recirculation au niveau des rétrécissements vasculaires (exemple d'une sténose) comme celles observées in vivo.

Par ailleurs, et appliqué au réseau artériel, caractérisé par la présence de nombreux coudes et bifurcations, notre modèle permet de mieux appréhender le comportement du fluide sanguin, et en particulier l'évolution de la vitesse visualisée par une forme hélicoïdale due aux fortes contraintes de cisaillement que nous retrouvons physiologiquement.

En conclusion, tous les résultats obtenus au cours de ce travail de recherche confirment l'importance majeure de l'influence des géométries sur l'hémodynamique vasculaire, avec une explicitation de la genèse des pathologies afférentes du point de vue de la biomécanique, en particulier pour les dilatations anévrismales ou les rétrécissements artériels.

Enfin, et pour améliorer la capacité prédictive de notre modélisation, il nous apparaît important dans le futur de tenir compte des aspects d'interaction fluide sanguin – structures vasculaires, tout en confrontant les résultats obtenus à la réalité expérimentale.

ANNEXE

I :

LA RHEOLOGIE

ANNEXE I : LA RHEOLOGIE

I. Définition :

La rhéologie est une science qui traite de l'écoulement et de la déformation des matériaux sous l'action des contraintes qui leur sont appliquées. C'est une discipline qui tente d'exprimer tous les comportements de la matière, depuis le comportement parfaitement élastique de Hooke, jusqu'au comportement parfaitement visqueux du liquide de Newton.[1]

II. Classification des Fluides :

La classification des fluides s'opère en fonction de la relation dite de comportement, qui lie à la contrainte de cisaillement τ , la vitesse de cisaillement $\dot{\gamma}$.

- Contrainte de cisaillement :

La contrainte de cisaillement τ est une grandeur fondamentale de la rhéologie. Elle représente la force de frottement par unité de surface qui s'exerce tangentiellement (parallèlement au mouvement) à la surface des strates. Elle varie donc d'une couche à l'autre, mais demeure constante en tout point d'une lamelle donnée.

Elle est définie par :

$$\tau = \frac{dF}{ds}$$

Les forces normales exercées par une couche sur sa voisine sont généralement négligées.

- Déformation de cisaillement :

Deux couches d'une substance, situées dans la même section droite à l'instant initial, parcourent une distance dx , après cisaillement entre un plan fixe et un plan mobile. La distance parcourue dépend de la vitesse propre de chaque couche par rapport au plan

immobile. Dans le cas d'un mouvement unidimensionnel, la déformation de cisaillement est donnée par :

$$\gamma = \frac{dx}{dy}$$

- **Vitesse de cisaillement :**

L'on définit la vitesse de cisaillement, la vitesse de déformation, ou encore le taux de cisaillement comme étant le rapport de la déformation sur le temps que met celle-ci pour se produire, et caractérisé par :

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dy}$$

Pour les fluides Newtoniens, la relation de comportement est décrite par une loi linéaire

$$\tau = \mu \frac{dy}{dt} = \mu \dot{\gamma} \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$$

Où μ représente la viscosité dynamique du fluide, qui s'exprime en poiseuille

$$(1 \text{ Poiseuille} = 1 \text{ Pa.s} = 1 \text{ kg.m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1})$$

III- Comportement rhéologique des fluides complexes :

Si le modèle du fluide newtonien décrit très bien la grande majorité des fluides composés de molécules simples, il existe un bon nombre de fluides (dont certains sont d'usage très courant) qui ont un comportement plus complexe.

Pour les fluides non-newtoniens, selon Midoux[2] le comportement d'un fluide est directement lié aux modifications de structure induites par un écoulement. La notion de viscosité structurelle est alors induite permettant de justifier ou d'élaborer des modèles rhéologiques utilisables dans la pratique.

A partir de ces observations expérimentales en cisaillement simple, l'on distingue [2]:

- Les fluides au comportement indépendants du temps
- Les fluides dépendant du temps
- Les fluides viscoélastiques.

III.1- Les fluides ou comportement indépendant du temps :

Ce sont des fluides purement visqueux pour lesquels la contrainte de cisaillement τ dépend seulement du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Les fluides non-newtoniens qui représentent notre domaine d'étude sont caractérisés par la non linéarité entre la contrainte de cisaillement et la vitesse de cisaillement. Trois grands types de comportement de ces fluides peuvent être mis en évidence au vu de leurs rhéogrammes [2]

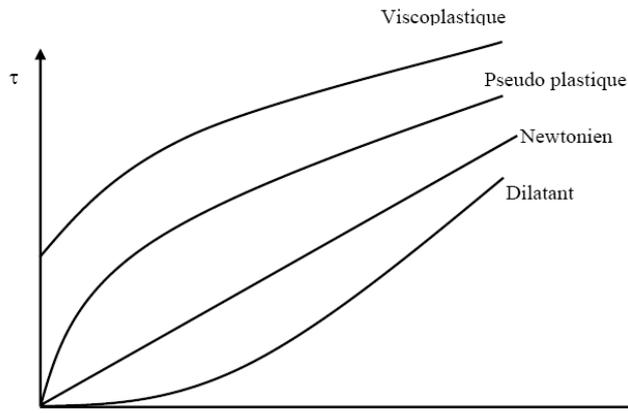


Figure : rheogramme des fluides

a- les fluides sans seuil de contrainte

Le comportement de ce type de fluides est représenté par la loi dite d'Ostwald de Waele [initiation à la rhéologie] ou loi en puissance

$$\tau = k (\dot{\gamma})^n$$

où k est l'indice de consistance ou la consistance du fluide et n , l'indice de structure .

- pour $n = 1$, le fluide newtonien
- pour $n < 1$, le fluide est dit rhéofluidifiant ou pseudoplastique. Dans ce cas, la viscosité apparente diminue avec le cisaillement. Nous pouvons citer en exemple le savon, les polymères fondus, les colles et certaines peintures.
- Pour $n > 1$, le fluide est dit rhéopaisissant ou dilatant, les fluides de ce type sont caractérisés par une augmentation du coefficient de viscosité avec la vitesse de cisaillement.

b-les fluides avec seuil de contrainte

Ce sont des fluides qui ne s'écoulent comme des liquides que lorsque les contraintes qui leur sont appliquées dépassent une certaine valeur appelée contrainte seuil. Au delà de cette contrainte, ils suivent une évolution qui tend asymptotiquement vers une loi de puissance. Ces fluides obéissent dans une large plage du taux de cisaillement à la loi de comportement d'Herschel-Bukley qui s'écrit :

$$\tau = \tau_s + k \dot{\gamma}^n$$

Pour $n = 1$, ces fluides sont appelés fluides de Bingham, ils ont alors un comportement newtonien une fois le seuil de contrainte dépassé.

Il existe également dans cette catégorie de fluides, des fluides dont le comportement peut se schématiser par la loi de Casson généralisé qui traduit le comportement initial du fluide à fort taux de cisaillement et qui s'écrit :

$$\tau = \tau_s + \mu_\infty \dot{\gamma} + k \dot{\gamma}^n$$

μ_∞ représente la viscosité limite à vitesse de cisaillement infinie

Nous avons reporté dans le tableau ci-dessous un certain nombre de lois de comportement de fluides au comportement indépendant du temps

III.2- les fluides viscoplastiques :

L'étude des propriétés viscoplastiques linéaires d'un corps permet de caractériser sa structure au repos, puisque le comportement linéaire est relié à l'aptitude du matériau à supporter des déformations, sans modification de sa structure initiale.

Le comportement des fluides viscoplastique s'apparente à la fois du comportement parfaitement élastique du solide de Hooke et du liquide parfaitement visqueux newtonien

III.3- les fluides au comportement dépendant du temps :

Le comportement de ces fluides est caractérisé par l'évolution de leur structure interne puisque le tenseur des contraintes est non seulement fonction du tenseur des taux de déformation, mais également du temps. L'on distingue deux catégories : les fluides thixotropes dont la viscosité apparente diminue avec le taux de cisaillement et avec le temps, et les fluides rhéopexiques qui présentent le phénomène inverse.

modèle	Loi rhéologique	paramètres
Ostwald de waele	$\tau = k (\dot{\gamma})^n$	K, n
Ellis	$\tau = \left[\frac{\mu_0}{1 + (\tau/\tau_{1/2})^{\alpha-1}} \right] \dot{\gamma}$	$\mu_0, \tau_{1/2}, \alpha$
Prandtl-eyring	$\tau = \tau_0 \text{sh}^{-1}(t_0 \dot{\gamma})$	τ_0, t_0
Powell-eyring	$\tau = \mu_1 \dot{\gamma} + \frac{\mu_0}{t_0} \text{sh}^{-1}(t_0 \dot{\gamma})$	μ_0, μ_1, t_0
Sisko	$\tau = \mu_0 \dot{\gamma} + k (\dot{\gamma})^n$	μ_0, K, n
Reiner phillipoff	$\tau = \left[\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\tau/\tau_s)^2} \right] \dot{\gamma}$	$\mu_0, \mu_\infty, \tau_s$
Loi de puissance tronquée de spriggs	$\tau = \mu_0 \dot{\gamma}^- \quad \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_0^-$ $\tau = \mu_0 (\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_0^-)^{n-1} \dot{\gamma}^- \quad \dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_0^-$	$\mu_0, \dot{\gamma}_0^-, n$
Williams	$\tau = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{\left(1 + 2t_1^2 \dot{\gamma}_1^2\right)^p}$	$\mu_0, \mu_\infty, t_1, p$
Cross	$\tau = \left(\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{\left(1 + \lambda \dot{\gamma}\right)^p} \right) \dot{\gamma}$	$\mu_0, \mu_\infty, \lambda, p$
Quemada	$\tau = \left[\mu_\infty + \frac{1 + \left(\lambda \dot{\gamma}\right)^p}{\left(\mu_\infty / \mu_0\right)^{1/2} + \left(\lambda \dot{\gamma}\right)^p} \right]^2 \dot{\gamma}$	$\mu_0, \mu_\infty, \lambda, p$
Krieger-Dougherty	$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = \left(1 + \left(\lambda \dot{\gamma}\right)^p\right)^{-1}$	$\mu_0, \mu_\infty, \lambda, p$
Bingham	$\tau = \tau_s + k \dot{\gamma}$	τ_s, μ_p
Herschel-Buckley	$\tau = \tau_s + k \dot{\gamma}^n$	τ_s, μ_p, n
Casson	$\tau^{1/2} = k_c \dot{\gamma}^{-1/2} - \tau_c^{1/2}$	τ_c, k, n
Skelland	$\tau - \tau_c = \frac{\mu_0 \dot{\gamma}}{1 + c(\tau - \tau_c)^m}$	τ_c, μ_0, m, c
Roberston-Stiff	$\tau = k \left(\dot{\gamma}_0 + \dot{\gamma} \right)^n$	$k, n, \tau_s = k \dot{\gamma}_0^n$

Référence

1. H.A. Barnes, J.E.H., K. Walters F. R. S., "*AN INTRODUCTION TO RHEOLOGY*". 1993: ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS B.V.
2. Midoux, M., "*Mécanique et Rhéologie des Fluides*". 1993.

ANNEXE

II :

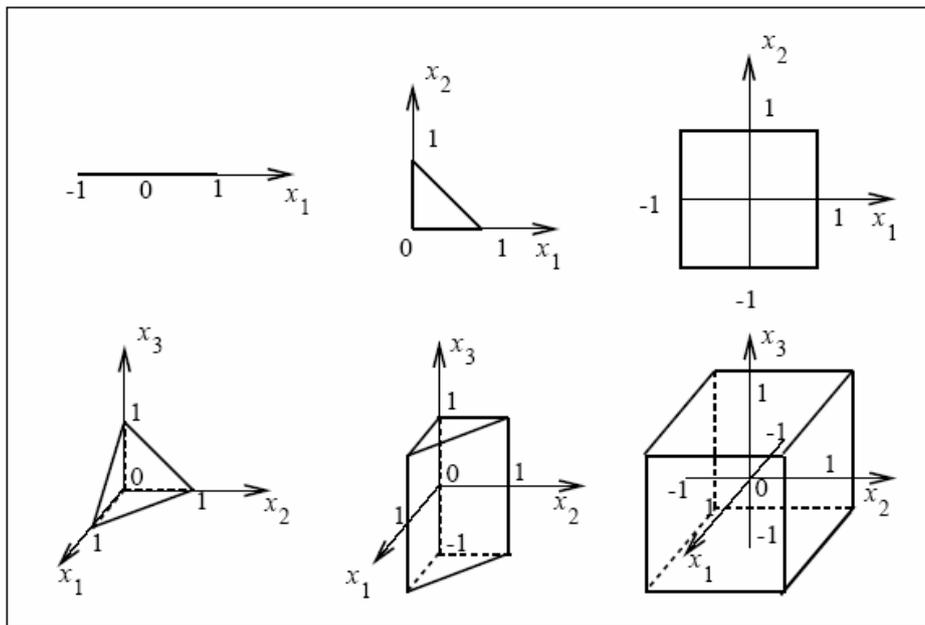
Maillages

structurés et non-

structurés

ANNEXE II : Maillages structurés et non-structurés (Avantages et inconvénients)

Dans le cadre d'une étude numérique, le maillage du domaine d'étude est la première étape fondamentale dans le calcul à effectuer. Le choix du maillage est ainsi indispensable et ce choix se définit par la forme de la maille et par la possibilité d'optimiser celui-ci. Ainsi celle-ci peut revêtir des formes et des dimensions différentes [1], à partir de formes linéiques, surfaciques, ou même volumiques. Dans le but d'uniformiser et d'automatiser les calculs, est introduite la notion de maille de référence. On ne donne ici que les mailles les plus classiques, par convention généralement admise. (Voir la figure)[2] (9).



Maillage structuré (régulier) :

Un maillage structuré est un maillage qui peut être généré en reproduisant plusieurs fois une maille élémentaire. Dans ce type de maillage, tout noeud peut être repéré par un doublet ou un triplet (i,j,k) .

En 2D, un noeud (i,j) a quatre voisins $(i\pm 1,j)$ et $(i,j\pm 1)$, et appartient à quatre mailles. En 3D un noeud (i,j,k) a six voisins $(i\pm 1,j,k)$, $(i,j\pm 1,k)$ et $(i,j,k\pm 1)$, et appartient à huit mailles. Le maillage structuré tire profit de la numérotation, et la topologie est implicite (stockage quasi-nul).

Les avantages du maillage structuré

- Bon contrôle de l'épaisseur des mailles.
- Facilité pour mailler des géométries très allongées.

Les inconvénients du maillage structuré

- Limitation d'emploi aux domaines descriptibles par un quadrilatère (2D) et un hexaèdre (3D).
- . Pas de possibilité de raffiner le maillage sans en augmenter la taille

Maillage non-structuré :

En 2D, c'est un maillage dont les éléments sont des triangles ou des quadrilatères assemblés de manière quelconque.

La topologie est complètement arbitraire.

En 3D, si l'on considère des éléments d'ordre 1, il s'agit de tétraèdres, de prismes, d'hexaèdres ou de pyramides.

Les avantages du maillage non-structuré

- Création de maillages triangulaires ou tétraédriques dans des géométries quelconques.
- Economie de points par rapport aux maillages structurés

Les inconvénients du maillage non-structuré

- Difficultés pour contrôler la densité des points dans une zone précise.
- Contrainte de stockage (structure de données)

Il existe aussi des maillages hybrides qui tentent de tirer profit des deux types précédents. Il y a donc tout intérêt à avoir des maillages réguliers : Plus un élément a une forme torturée, plus les résultats produits sont sujets à caution.

Reference

1. Versteeg.H. K, W.M., "*An introduction to Computational Fluid Dynamics – the finite volume method*". 1995: Longman Scientific & Technica.
2. POPA, I.C., "*modélisation Numérique du Transfert Thermique : Méthode des volumes finis*". 2002: universitaria cralova.