



République Algérienne Démocratique et Populaire
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE

USTHB / ALGER
FACULTE DE PHYSIQUE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme **MAGISTER**
En Physique

Spécialité : Physique Théorique des Basses et Moyennes Energies

Par
KERROUCHI Slimane

SUJET

*Etude de l'effet des fluctuations du nombre
de particules sur l'énergie de déformation
nucléaire*

Soutenu publiquement le: 17/12 /2005, devant le jury suivant :

M FELLAH
N. H. ALLAL
F. Z. IGHEZOU
K. KOUACHE-KHALAL
M. R. OUDIH

Professeur, USTHB
Professeur, USTHB
Professeur, USTHB
Maître de Conf., USTHB
MA, Dr Physique, USTHB

Président
Directrice de thèse
Examinatrice
Examinatrice
Examineur

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer mes sincères remerciements à :

- ✚ Monsieur M. FELLAH, Professeur à l' USTHB et ex-Directeur du Laboratoire de Physique Théorique de l' USTHB, qui a bien voulu m'accueillir au sein de son Laboratoire et de son équipe de recherche et pour les moyens matériels qu'il a bien voulu mettre à ma disposition et pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant la présidence du jury de ce mémoire.

- ✚ Mlle N. H. ALLAL, Professeur à l' USTHB, pour m'avoir proposé ce travail. Je la remercie particulièrement pour m'avoir, par ces nombreux conseils, fait profiter de sa rigueur et de sa grande compétence, et pour m'avoir porté une attention constante, exigeante et régulière à mon travail. Les conseils et les encouragements qu'elle m'a prodigués m'ont été très précieux.

- ✚ Madame F. Z. IGHEZOU, Professeur à l' USTHB ; Madame K. KOUACHE-KHALAL, Maître de conférences à l' USTHB et Monsieur M. R. OUDIH, Maître assistant à l' USTHB, l'intérêt qu'il ont manifesté à ce travail en acceptant de participer au jury de ce mémoire.

Enfin, durant les quelques mois que j'ai passés au sein du Laboratoire de Physique Théorique, j'ai eu la chance de côtoyer des personnes qui m'ont beaucoup marqué par leur soutien, sympathie et bon humour. Mes remerciements s'adressent au Docteur Mlle N. Benhamouda, Mlle D. Mokhtari, Mlle I. Ami, Mm Gislaine et S.Meziani.

Table des matières

Introduction	4
1 La théorie BCS	6
1.1 Introduction	6
1.2 Hamiltonien du système	7
1.2.1 Hamiltonien du système en seconde quantification	7
1.2.2 Etat renversé par rapport au sens du temps	8
1.2.3 L'interaction d'appariement	8
1.3 La théorie BCS	9
1.3.1 Transformation de Bogoliubov-Valatin	9
1.3.2 L'état BCS	10
1.3.3 Valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules et variance	11
1.4 Equations du gap	12
1.4.1 Diagonalisation de l'Hamiltonien	12
1.4.2 Les états excités	16
1.4.3 Solution triviale	17
2 La méthode de projection SBCS	19
2.1 Introduction	19
2.2 Projection de la fonction d'onde BCS	20
2.2.1 Projection de la fonction BCS	21
2.2.2 Ecriture de la fonction d'onde en représentation quasiparticule	24
2.3 Conservation du nombre de particules	25

2.3.1	Propriété des opérateurs conservant le nombre de particules	25
2.3.2	Calcul de la constante de normalisation	27
2.3.3	Calcul de la valeur moyenne de N	27
2.3.4	Energie	28
2.4	Extraction de la partie réelle	29
2.4.1	Constante de normalisation	30
2.4.2	Nombre de particules	31
2.4.3	Energie	32
3	Correction d'appariement	33
3.1	Introduction	33
3.2	Correction d'appariement	34
3.3	Energie de corrélation d'appariement dans la théorie BCS	36
3.3.1	Première équation du gap	36
3.3.2	Energie de corrélation d'appariement	37
3.4	Energie de corrélation d'appariement dans la théorie SBCS	38
3.4.1	Lissage de la constante de normalisation	38
3.4.2	Lissage de l'expression de l'énergie	41
3.4.3	Correction d'appariement	47
4	Résultats numériques et discussion	49
4.1	Le modèle schématique de Richardson	49
4.1.1	Convergence de la méthode SBCS	49
4.1.2	Correction d'appariement	50
4.2	Le modèle réaliste de Woods-Saxon	52
4.2.1	Paramétrisation de la surface nucléaire	53
4.2.2	Choix des constantes d'appariement	59
4.2.3	Correction d'appariement	59
4.2.4	Influence des fluctuations du nombre de particules sur l'énergie du système	60

Conclusion	71
Annexes	73
A Ecriture de l'hamiltonien en représentation quasi particule	74
B Lissage des quantités I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 et I_6 :	76
C Table des intégrales	81
Bibliographie	83

Introduction

L'étude de la structure du noyau a reposé, jusqu'à récemment, sur les noyaux et isotopes stables, que l'on pouvait trouver sur terre. Il s'agissait donc d'espèces proches de la vallée de stabilité nucléaire [1]. Les récents progrès expérimentaux, ont entraîné la construction d'accélérateurs permettant la production de faisceaux radioactifs. Ces dispositifs ont rendu possible l'exploration du tableau des nucléides loin de la vallée de stabilité, dans le domaine des noyaux exotiques, et ont ouvert de nouvelles perspectives quant à l'étude de la structure du noyau. De nouvelles voies d'exploration vers les noyaux exotiques [2] de plus en plus lourds ou au voisinage des drip-lines proton [3] (le noyau est instable vis-à-vis de l'émission de protons) ou neutron (le noyau est instable vis-à-vis de l'émission de neutrons) sont encore inconnues [4, 5].

L'objectif est alors d'utiliser les nouvelles données pour parvenir à une compréhension de la structure des noyaux suffisamment précise, et ainsi d'être en mesure d'aborder la physique de n'importe quel système de nucléons, notamment ceux que l'on rencontre en astrophysique et en cosmologie [1, 6].

Vue l'importance des corrélations d'appariement dans les noyaux exotiques [4, 5], il est essentiel de les prendre en compte de manière rigoureuse. Très souvent, ces corrélations sont étudiées dans le cadre de la théorie BCS [7].

Or, il est bien connu que le fait que l'état BCS ne soit pas état propre de l'opérateur nombre de particules peut induire des erreurs considérables lors des calculs des observables physiques. Une méthode de projection dans l'espace nombre d'occupation, la méthode Sharp BCS (SBCS), permettant de corriger ce défaut de la théorie BCS a été mise au point au sein du Laboratoire de Physique Théorique de l'USTHB et intensément utilisée dans diverses études [8 – 14].

Toutefois, une question demeure en suspens, à savoir, l'influence de la projection dans l'espace nombre d'occupation sur la valeur des paramètres de déformation d'équilibre. En effet, ces dernières sont généralement déterminées par minimisation de l'énergie de déformation totale du noyau évaluée dans le cadre du modèle macroscopique-microscopique. Cette dernière est constituée d'une partie macroscopique, calculée dans le cadre du modèle de la goutte liquide [19], et de corrections microscopiques, à savoir la correction de couches calculée par la méthode de Strutinsky [19] et la correction d'appariement, calculée au moyen de la théorie BCS [15 – 21].

Le but du présent travail est donc d'étudier l'effet des fluctuations du nombre de particules dans la théorie BCS, qui est responsable d'un certain nombre d'effets non physique citons entre autres l'existence d'une valeur critique de la force d'appariement en dessous de laquelle n'existe que la solution triviale des équations BCS, sur les valeurs des paramètres de déformation d'équilibre.

Nous commencerons pour cela par rappeler dans le premier chapitre la théorie BCS, puis dans le seconde chapitre la méthode SBCS qui a pour l'avantage d'être une méthode discrète contrairement à d'autres méthode de projection, il s'agit de la méthode de Lipkin[22], Kyotoku[22] et Zheng et al[41], etc...

Nous commencerons pour cela par construire l'état BCS projeté et par la suite, nous allons établir les nouvelles expressions des différentes observables décrivant le problème.

Dans le chapitre trois, nous établirons l'expression analytique de la correction d'appariement dans le cadre de cette dernière méthode. Nous commencerons dans par rappeler le résultat déjà établi dns le cadre de la théorie BCS, par la suite nous allons établir nos propres expressions après élimination de la fluctuation du nombre de particules.

Nous allons appliquer par la suite nos résultats théoriques à quelques noyaux représentatifs de la région des actinides. Les résultats numériques sont présentés et discutés dans le dernier chapitre.

Chapitre 1

La théorie BCS

1.1 Introduction

L'hypothèse de base de l'approximation des particules indépendantes [19] consiste dans le fait que le mouvement de chaque nucléon ne dépend pas explicitement du mouvement des autres nucléons. Chaque nucléon se meut dans un potentiel créé par les autres nucléons.

Toutefois, si les modèles à particules indépendantes ont permis d'expliquer un certain nombre de phénomènes comme, entre autres, l'existence des couches [21] et des nombres magiques etc..., ils sont incapables d'en expliquer d'autres comme la déformation du noyau, les réactions nucléaires, la fission nucléaire, etc...

Ceci montre la nécessité de prendre en compte les interactions résiduelles qui ont été négligées dans ces modèles. La plus importante est l'interaction d'appariement. En effet, de nombreux faits expérimentaux suggèrent l'existence d'un appariement entre les nucléons. Citons entre autres [22] :

- La différence de masse entre les noyaux pair-pairs, impair-impairs et les noyaux impair-pairs [23] ;

- L'existence d'un gap dans le spectre à énergies indépendantes des noyaux pair-pairs et son absence pour les noyaux impair-impairs.

En raison de l'analogie qui existe entre l'appariement des électrons dans un solide à l'état supra-conducteur et l'appariement entre les nucléons dans un noyau, ce dernier phénomène est généralement traité dans le cadre de la théorie BCS (Bardeen, Cooper

et Schrieffer) [7] (Cf. eg.[15 – 21]). Le but du présent chapitre est de rappeler la théorie BCS.

1.2 Hamiltonien du système

1.2.1 Hamiltonien du système en seconde quantification

Soit un système de n nucléons (nous allons considérer les deux types de nucléons comme deux systèmes indépendants, c'est-à-dire que l'on négligera les interactions neutron-proton).

L'hamiltonien qui régit le mouvement d'un tel système est donné par [19], [20] :

$$H = H_0 + V \quad (1.1)$$

où H_0 est un champ moyen (sa valeur moyenne est l'énergie du système en l'absence des interactions résiduelles). On se place dans une base où H_0 est diagonal. Son écriture en seconde quantification est alors [21] :

$$H_0 = \sum_k \varepsilon_k a_k^+ a_k \quad (1.2)$$

où ε_k est l'énergie d'une particule dans l'état $|k\rangle$ et a_k^+ , a_k sont respectivement les opérateurs de création et d'annihilation correspondants. Ils obéissent aux règles d'anti-commutation des fermions :

$$\{a_k^+, a_l^+\} = \{a_k, a_l\} = 0 \quad (1.3)$$

$$\{a_k^+, a_l\} = \delta_{kl} \quad (1.4)$$

V représente l'ensemble des interactions résiduelles, son écriture en seconde quantification est :

$$V = \frac{1}{4} \sum_{klmn} \langle kl | V | mn \rangle a_k^+ a_l^+ a_n a_m \quad (1.5)$$

1.2.2 Etat renversé par rapport au sens du temps

Considérons un système dans l'état $|\nu\rangle$:

$$|\nu\rangle = |n_\nu j_\nu m_\nu\rangle \quad (1.6)$$

où :

n_ν est le nombre quantique principal et j_ν, m_ν sont respectivement le moment cinétique et sa projection.

On définit alors [18] :

$$|-\nu\rangle = |n_\nu j_\nu - m_\nu\rangle \quad (1.7)$$

L'état renversé par rapport au sens du temps de l'état $|\nu\rangle$ est :

$$|\tilde{\nu}\rangle = s_\nu |-\nu\rangle \quad (1.8)$$

où s_ν est un facteur de phase défini comme suit :

$$s_\nu = (-1)^{j_\nu - m_\nu} \quad (1.9)$$

Le facteur de phase vérifie en outre les propriétés suivantes : [17]

$$s_\nu^2 = 1 \quad s_{-\nu} = -s_\nu \quad (1.10)$$

Dans ce qui suit, on supposera H_0 et V invariants via le renversement du sens du temps.

1.2.3 L'interaction d'appariement

L'interaction d'appariement est l'une des interactions résiduelles, et pour en tenir compte, Belyaev [24] a introduit la notion d'interaction entre deux états renversés l'un de l'autre par rapport au sens du temps, ses éléments de matrice s'écrivent sous la forme :

$$\langle kl | V | mn \rangle = -4G \delta_{k\bar{l}} \delta_{m\bar{n}} \quad (1.11)$$

où G est l'intensité de la force d'appariement que l'on supposera constante. En tenant compte des équations (1.1) et (1.11), on aura : [20]

$$H = \sum_{\nu>0} \varepsilon_{\nu} (a_{\nu}^{+} a_{\nu} + a_{\tilde{\nu}}^{+} a_{\tilde{\nu}}) - G \sum_{\nu\mu>0} a_{\nu}^{+} a_{\tilde{\nu}}^{+} a_{\tilde{\mu}} a_{\mu} \quad (1.12)$$

Il s'agit à présent de trouver une base commune pour les deux opérateurs décrivant notre problème ; l'hamiltonien et l'opérateur nombre de particules qui est défini par : [19]

$$N = \sum_{\nu>0} (a_{\nu}^{+} a_{\nu} + a_{\tilde{\nu}}^{+} a_{\tilde{\nu}}) \quad (1.13)$$

Ce problème n'admet pas de solution exacte dans le cas général. On a alors recours aux méthodes approximatives. Parmi ces méthodes, la plus connue est la théorie BCS, dont nous rappelons ci-dessous les grandes lignes.

1.3 La théorie BCS

1.3.1 Transformation de Bogoliubov-Valatin

Dans un souci de faciliter les calculs, Bogoliubov et Valatin [25], ont défini les opérateurs α_{ν}^{+} et α_{ν} qui sont combinaisons linéaires des opérateurs de création et d'annihilation a_{ν}^{+} , a_{ν} des vraies particules :

$$\begin{cases} \alpha_{\nu} = u_{\nu} a_{\nu} + v_{\nu} a_{\tilde{\nu}}^{+} \\ \alpha_{\nu}^{+} = u_{\nu} a_{\nu}^{+} + v_{\nu} a_{\tilde{\nu}} \end{cases} \quad (1.14)$$

α_{ν}^{+} est appelé opérateur de création d'une quasi particule qui est définie comme une particule avec une amplitude de probabilité u_{ν} et un trou avec une amplitude de probabilité v_{ν} . α_{ν} est l'opérateur conjugué de α_{ν}^{+} .

Les paramètres u_{ν} , v_{ν} sont des nombres positifs qui satisfont aux conditions :

$$u_{\nu} = u_{\tilde{\nu}} \quad v_{\nu} = v_{\tilde{\nu}} \quad (1.15)$$

car $|\tilde{\nu}\rangle$ est supposé occupé ou inoccupé avec la même amplitude de probabilité que

$|\nu\rangle$.

La transformation (1.14) étant unitaire alors, les opérateurs α_ν^+ et α_ν doivent obéir aux relations d'anticommutation habituelles des fermions. Soit :

$$\{\alpha_\nu^+, \alpha_\mu\} = (u_\nu^2 + v_\nu^2) \delta_{\nu\mu} = \delta_{\nu\mu} \quad (1.16)$$

ce qui conduit à : $u_\nu^2 + v_\nu^2 = 1$.

La transformation inverse de (1.14) s'écrit :

$$\begin{cases} a_\nu = u_\nu \alpha_\nu + v_\nu \alpha_{\bar{\nu}}^+ \\ a_\nu^+ = u_\nu \alpha_\nu^+ + v_\nu \alpha_{\bar{\nu}} \end{cases} \quad (1.17)$$

1.3.2 L'état BCS

On définit une nouvelle représentation dite : représentation quasiparticules dont le vide sera noté $|BCS\rangle$, il est défini par l'équation : [19]

$$|BCS\rangle = \prod_{\nu>0} \alpha_\nu \alpha_{\bar{\nu}} |0\rangle \quad (1.18)$$

Cet état est obtenu en annihilant toutes les quasi particules dans le vrai vide.

D'après les deux équations (1.14) et (1.18), on obtient , après normalisation :

$$|BCS\rangle = \prod_{\nu>0} (u_\nu + v_\nu a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+) |0\rangle \quad (1.19)$$

Remarquons ici que l'état (1.19) ne peut décrire qu'un système possédant un nombre pair de particules.

En effet, cet état est une superposition d'états correspondant à différents nombres de paires de particules, ce qui représente l'inconvénient majeur de cette théorie.

En effet, le produit (1.19) peut s'écrire sous forme :

$$|BCS\rangle = \left(\prod_{\nu>0} u_\nu \right) \prod_{\nu>0} \left(1 + \frac{v_\nu}{u_\nu} a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+ \right) |0\rangle \quad (1.20)$$

ou encore :

$$|BCS\rangle = \left(\prod_{\nu>0} u_\nu \right) \left[|0\rangle + \sum_{\nu>0} \frac{v_\nu}{u_\nu} a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+ |0\rangle + \frac{1}{2} \sum_{\nu\mu>0} \frac{v_\nu v_\mu}{u_\nu u_\mu} a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+ a_{\bar{\mu}}^+ a_\mu^+ |0\rangle + \dots \right] \quad (1.21)$$

Dans la physique de l'état solide, ce défaut n'est pas vraiment gênant car le nombre de particules est très grand. Par contre, en physique nucléaire, ce problème subsiste vu le nombre limité des particules du système et entraîne un certain nombre d'inconvénients.

1.3.3 Valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules et variance

Dans le but de mesurer les fluctuations du nombre de particules, calculons la variance de N . Pour cela calculons tout d'abord sa valeur moyenne.

Commençons par calculer l'action de N sur l'état $|BCS\rangle$.

En prenant en compte (1.19) et (1.13) on aura alors :

$$N |BCS\rangle = \sum_{\mu>0} (a_\mu^+ a_\mu + a_{\bar{\mu}}^+ a_{\bar{\mu}}) \prod_{\nu>0} (u_\nu + v_\nu a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+) |0\rangle \quad (1.22)$$

$$= 2 \sum_{\mu>0} v_\mu a_\mu^+ a_{\bar{\mu}}^+ \prod_{\nu \neq \mu} (u_\nu + v_\nu a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+) |0\rangle \quad (1.23)$$

d'où :

$$\langle BCS | N | BCS \rangle = 2 \sum_{\mu>0} v_\mu^2 \quad (1.24)$$

Après avoir calculé la valeur moyenne de N , calculons maintenant sa variance, soit :

$$\sigma_N^2 = \langle BCS | N^2 | BCS \rangle - \langle BCS | N | BCS \rangle^2 \quad (1.25)$$

En tenant compte de (1.19) et (1.13), il vient :

$$N^2 |BCS\rangle = \sum_{\nu>0} (a_\nu^+ a_\nu + a_{\bar{\nu}}^+ a_{\bar{\nu}}) \sum_{\sigma>0} (a_\sigma^+ a_\sigma + a_{\bar{\sigma}}^+ a_{\bar{\sigma}}) \prod_{\mu>0} (u_\mu + v_\mu a_\mu^+ a_{\bar{\mu}}^+) |0\rangle \quad (1.26)$$

considérons à présent deux cas de figure :

► $\mu \neq \sigma$: le deuxième terme de l'équation (1.26) s'écrit :

$$4 \sum_{\mu \neq \sigma} v_\mu v_\sigma a_\mu^+ a_\mu^+ a_\sigma^+ a_\sigma^+ \prod_{\nu \neq \mu\sigma} (u_\nu + v_\nu a_\nu^+ a_\nu^+) |0\rangle \quad (1.27)$$

► $\mu = \sigma$: le deuxième terme de l'équation (1.26) devient dans ce cas :

$$4 \sum_{\mu > 0} v_\mu a_\mu^+ a_\mu^+ \prod_{\nu \neq \mu} (u_\nu + v_\nu a_\nu^+ a_\nu^+) |0\rangle \quad (1.28)$$

Alors :

$$\langle BCS | N^2 | BCS \rangle = 4 \sum_{\mu \neq \sigma} v_\mu^2 v_\sigma^2 + 4 \sum_{\mu > 0} v_\mu^2 \quad (1.29)$$

$$= 4 \left\{ \sum_{\nu} u_\nu^2 v_\nu^2 + \left(\sum_{\nu > 0} v_\nu^2 \right)^2 \right\} \quad (1.30)$$

On en déduit :

$$\sigma_N^2 = 4 \sum_{\nu} u_\nu^2 v_\nu^2 \quad (1.31)$$

1.4 Equations du gap

1.4.1 Diagonalisation de l'Hamiltonien

Comme nous venons de le voir dans ce qui précède, il y a une non conservation du nombre de particules, d'après l'équation (1.21). Pour tenir compte de la contrainte de la conservation du nombre de particules, nous utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange qui nous conduit à l'Hamiltonien auxiliaire :

$$H' = H - \lambda N \quad (1.32)$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange. Il représente en fait le potentiel chimique.

Compte tenu de (1.12) et (1.13) on aura :

$$H' = \sum_{\nu > 0} (\varepsilon_\nu - \lambda) (a_\nu^+ a_\nu + a_\nu^+ a_\nu) - G \sum_{\nu\mu > 0} a_\nu^+ a_\nu^+ a_\mu a_\mu \quad (1.33)$$

En appliquant le théorème de Wick, nous pouvons écrire (1.33) sous la forme :

$$H' = E_0 + H_{11} + H_{20} + H_{22} + H_{31} + H_{40} \quad (1.34)$$

où E_0 est le terme constant, qui s'écrit :

$$E_0 = 2 \sum_{\nu>0} \left(\varepsilon_\nu - \lambda - \frac{G}{2} v_\nu^2 \right) v_\nu^2 - G \left(\sum_{\nu>0} u_\nu v_\nu \right)^2 \quad (1.35)$$

et $H_{i j}$ sont les termes contenant i opérateurs de création (respectivement j) et j opérateurs d'annihilation (respectivement i).

Ils sont donnés respectivement par¹ :

$$H_{11} = \sum_{\nu\mu>0} \left[(\varepsilon_\nu - \lambda - Gv_\nu^2) (u_\nu^2 - v_\nu^2) + 2Gu_\nu v_\nu \sum_{\mu>0} u_\mu v_\mu \right] (\alpha_\nu^+ \alpha_\nu + \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\nu}}) \quad (1.36)$$

$$H_{20} = \sum_{\nu>0} \left[2u_\nu v_\nu (\varepsilon_\nu - \lambda - Gv_\nu^2) - G (u_\nu^2 - v_\nu^2) \sum_{\mu>0} u_\mu v_\mu \right] (\alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\nu}}^+ + \alpha_{\bar{\nu}} \alpha_\nu) \quad (1.37)$$

$$H_{22} = -G \sum_{\nu\mu>0} [(u_\nu^2 v_\mu^2 + u_\mu^2 v_\nu^2) \alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}} \alpha_\mu + u_\nu v_\nu u_\mu v_\mu (\alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}} \alpha_{\bar{\nu}} + \alpha_\nu^+ \alpha_\mu^+ \alpha_\mu \alpha_\nu + 2\alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_\mu^+ \alpha_{\bar{\mu}} \alpha_{\bar{\nu}})] \quad (1.38)$$

$$H_{31} = G \sum_{\nu\mu>0} (u_\nu^2 - v_\nu^2) u_\mu v_\mu (\alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}} + \alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_\mu^+ \alpha_\mu + \alpha_\mu^+ \alpha_\mu^+ \alpha_{\bar{\nu}} \alpha_\nu + \alpha_{\bar{\mu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}} \alpha_{\bar{\nu}} \alpha_\nu) \quad (1.39)$$

$$H_{40} = \frac{G}{2} \sum_{\nu\mu>0} (u_\nu^2 v_\mu^2 + u_\mu^2 v_\nu^2) (\alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_\mu^+ \alpha_{\bar{\mu}}^+ + \alpha_{\bar{\mu}} \alpha_\mu \alpha_{\bar{\nu}} \alpha_\nu) \quad (1.40)$$

La résolution de notre problème consiste à diagonaliser approximativement l'hamiltonien auxiliaire H' et par suite l'hamiltonien H .

L'approximation des quasiparticules indépendantes consiste à annuler le terme H_{20} et

¹Voir l'annexe A pour les détails de calcul

à négliger le terme résiduel :

$$H_{résid} = H_{22} + H_{31} + H_{40} \quad (1.41)$$

En annulant le terme H_{20} défini par l'équation (1.37) on aura :

$$4u_\nu v_\nu (\varepsilon_\nu - \lambda - Gv_\nu^2) - 2\Delta (u_\nu^2 - v_\nu^2) = 0 \quad (1.42)$$

où l'on a posé :

$$\Delta = G \sum_{\nu>0} u_\nu v_\nu \quad (1.43)$$

Notons ici que le même résultat est obtenu en minimisant E_0 par rapport à u_ν et v_ν ,
i.e :

$$\frac{\partial E_0}{\partial v_\nu} = \frac{\partial E_0}{\partial u_\nu} = 0 \quad \forall \nu \quad (1.44)$$

Pour résoudre l'équation (1.42), posons le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u_\nu = \cos \theta_\nu \\ v_\nu = \sin \theta_\nu \end{cases} \quad (1.45)$$

Il vient alors :

$$\left. \begin{matrix} u_\nu^2 \\ v_\nu^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \frac{\varepsilon_\nu - \lambda - Gv_\nu^2}{\sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda - Gv_\nu^2)^2 + \Delta^2}} \right\} \quad (1.46)$$

L'hamiltonien auxiliaire H' devient alors :

$$H' = E_0 + \sum_{\nu>0} E_\nu (\alpha_\nu^+ \alpha_\nu + \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\nu}}) \quad (1.47)$$

où :

$$E_\nu = \sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda - Gv_\nu^2)^2 + \Delta^2} \quad (1.48)$$

est l'énergie d'une quasiparticule.

Le terme Gv_ν^2 apparaissant dans l'expression de u_ν^2 et v_ν^2 est souvent négligé [19]. En effet, son inclusion est pratiquement sans effet sur les valeurs numériques des solutions

des équations du gap.

Les probabilités d'occupation et d'inoccupation s'écrivent alors :

$$\left. \begin{array}{l} u_\nu^2 \\ v_\nu^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{\sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right\} \quad (1.49)$$

De même, l'énergie d'une quasi-particule s'écrira :

$$E_\nu = \sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda)^2 + \Delta^2} \quad (1.50)$$

Dans ce qui suit, nous écrirons entre parenthèses, le cas échéant, les termes qui n'apparaissent que si l'on tient compte de Gv_ν^2 .

On sait que le nombre de particules n'est conservé qu'en moyenne c'est-à-dire :

$$n = \langle BCS | N | BCS \rangle \quad (1.51)$$

La condition de conservation de nombre du particules s'écrit donc :

$$n = 2 \sum_{\nu>0} v_\nu^2 \quad (1.52)$$

Les équations du gap sont alors définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = G \sum_{\nu>0} u_\nu v_\nu \\ n = 2 \sum_{\nu>0} v_\nu^2 \end{array} \right. \quad (1.53)$$

La première équation du gap peut également être écrite sous la forme suivante :

$$\frac{2}{G} = \sum_{\nu>0} \frac{1}{E_\nu} \quad (1.54)$$

Quand à l'énergie du système, elle est définie par :

$$E_{BCS} = \langle BCS | H | BCS \rangle \quad (1.55)$$

c'est-à-dire :

$$E_{BCS} = \langle BCS | H' | BCS \rangle + \lambda \langle BCS | N | BCS \rangle \quad (1.56)$$

alors :

$$E_{BCS} = 2 \sum_{\nu>0} \varepsilon_\nu v_\nu^2 - \frac{\Delta^2}{G} \left(-G \sum_{\nu>0} v_\nu^4 \right) \quad (1.57)$$

1.4.2 Les états excités

Un noyau atomique peut être excité dans un état vibrationnel qui est indépendant de l'appariement des nucléons, comme il peut être excité dans un état rotationnel dans le cas non sphérique.

En dehors de ces deux cas, on peut également avoir des états excités par cassure des paires.

Dans notre présente étude nous nous limiterons à ce dernier cas.

Considérons dans un premier temps, l'état excité à une quasiparticule, il est donné par :

$$| \psi_\mu \rangle = \alpha_\mu^+ | BCS \rangle = a_\mu^+ \prod_{\nu \neq \mu} (u_\nu + v_\nu a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+) | 0 \rangle \quad (1.58)$$

L'énergie correspondante est obtenue en calculant sur cet état, la valeur moyenne de H' qui se réduit en fait à celle de $E_0 + H_{11}$, soit:

$$\langle \psi_\mu | H' | \psi_\mu \rangle = \langle \psi_\mu | E_0 + H_{11} | \psi_\mu \rangle \quad (1.59)$$

$$= \langle BCS | \alpha_\mu \left[E_0 + \sum_{\nu>0} E_\nu (\alpha_\nu^+ \alpha_\nu + \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\nu}}) \right] \alpha_\mu^+ | BCS \rangle \quad (1.60)$$

$$= E_0 + E_\mu \quad (1.61)$$

Soit, compte tenu de (1.48) :

$$\langle \psi_\mu | H' | \psi_\mu \rangle = E_0 + \sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda - Gv_\nu^2)^2 + \Delta^2} \geq E_0 + \Delta \quad (1.62)$$

L'état excité à deux quasiparticules indépendantes, s'écrit :

$$|\psi_{\mu\gamma}\rangle = \alpha_{\mu}^{+}\alpha_{\gamma}^{+} |BCS\rangle = a_{\mu}^{+}a_{\gamma}^{+} \prod_{\nu \neq \mu\gamma} (u_{\nu} + v_{\nu}a_{\nu}^{+}a_{\nu}^{+}) |0\rangle \quad (1.63)$$

L'énergie correspondante est dans ce cas :

$$\langle \psi_{\mu\gamma} | H' | \psi_{\mu\gamma} \rangle = E_0 + E_{\mu} + E_{\gamma} \geq E_0 + 2\Delta \quad (1.64)$$

L'état excité à deux quasiparticules appariées est défini par :

$$|\psi_{\mu\bar{\mu}}\rangle = \alpha_{\mu}^{+}\alpha_{\bar{\mu}}^{+} |BCS\rangle = (v_{\mu} - u_{\mu}a_{\mu}^{+}a_{\gamma}^{+}) \prod_{\nu \neq \mu} (u_{\nu} + v_{\nu}a_{\nu}^{+}a_{\nu}^{+}) |0\rangle \quad (1.65)$$

d'où :

$$\langle \psi_{\mu\bar{\mu}} | H' | \psi_{\mu\bar{\mu}} \rangle = E_0 + 2E_{\mu} \geq E_0 + 2\Delta \quad (1.66)$$

On remarque que pour avoir un état excité à une (resp. deux) quasiparticules indépendantes, il faut fournir un minimum d'énergie égale à Δ (resp. 2Δ).

1.4.3 Solution triviale

En faisant une étude de la variation de Δ en fonction de la constante d'appariement G (voir Fig 1-1), on constate que lorsque $G \leq G_c$ (où G_c est appelée valeur critique de G), Δ s'annule.

Les équations du gap donnent dans ce cas la solution triviale suivante :

$$\begin{cases} u_{\nu}^2 = 1, & v_{\nu}^2 = 0 & \text{si } \varepsilon_{\nu} > \lambda \\ v_{\nu}^2 = 1, & u_{\nu}^2 = 0 & \text{si } \varepsilon_{\nu} \leq \lambda \end{cases} \quad (1.67)$$

Dans ce cas λ correspond à l'énergie du niveau de Fermi dans le modèle à particules indépendantes. L'énergie du système devient alors : $E_{BCS}(\Delta = 0) = 2 \sum_{\nu} \varepsilon_{\nu} \left(-G \sum_{\nu} '1 \right)$ où \sum_{ν} correspond à la sommation sur les niveaux occupés.

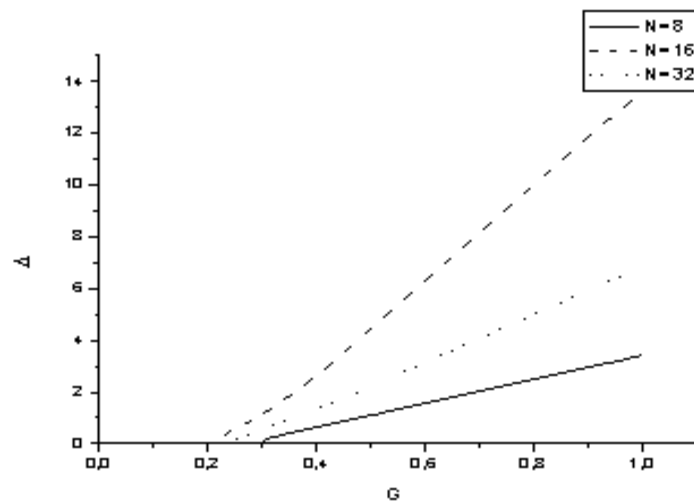


FIG. 1-1 – Variation de la demi-largeur du gap en fonction de la constante d'appariement G dans le cas du modèle de Richardson à 8, 16 et 32 niveaux (Voir chapitre 4 pour les détails du modèle).

Chapitre 2

La méthode de projection SBCS

2.1 Introduction

Le modèle microscopique BCS a connu de nombreux succès et est encore très souvent utilisé pour la description de l'appariement nucléaire (Cf. eg. [31 – 33], [36 – 38] etc...), et ce, pour deux raisons :

i) Il a permis de décrire un certain nombre de phénomènes physiques comme : le moment d'inertie, l'énergie de déformation, etc...

ii) Sa formulation simple en terme de quasi-particules indépendantes en fait une méthode très maniable.

Toutefois, s'il est satisfaisant dans le cas d'un système possédant un grand nombre de particules comme dans un solide, le modèle est moins satisfaisant dans le cas d'un système fini comme le noyau. En effet, comme on vient de le voir dans le chapitre précédent, la théorie BCS possède deux inconvénients majeurs :

i) La fonction d'onde BCS n'est pas fonction propre de l'opérateur nombre de particules.

ii) L'existence d'une valeur critique pour la constante d'appariement G qui correspond à un effet non physique : le passage brusque de l'état normal vers l'état suprafluide.

C'est pourquoi de nombreuses méthodes de projection dans l'espace nombre d'occupation ont été proposées. Citons par exemple la méthode de Lipkin-Nogami (LN) [30], la méthode de la coordonnée génératrice (GCM) [19] ou la méthode PHFB (Projected

Hartree-Fock-Bogoliubov) [35].

Notons ici que les méthodes de projection sont, en général, soit approximatives et faciles à manipuler (comme les méthodes LN et GCM) [19], soit exactes mais difficiles à appliquer en pratique (comme la PHFB).

Dans le présent chapitre, nous nous intéressons à la méthode Sharp-BCS (ou SBCS) ([19], [41]), qui présente l'avantage d'être à la fois exacte et simple à manipuler puisqu'il s'agit d'une méthode discrète.

2.2 Projection de la fonction d'onde BCS

Considérons un système physique comportant P paires de particules appariées.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que l'état fondamental d'un système comportant un nombre pair de particules s'écrit comme suit :

$$|BCS\rangle = |\psi\rangle = \prod_{\nu>0} (u_\nu + v_\nu a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+) |0\rangle \quad (2.1)$$

qui peut se mettre encore sous la forme (1.20) ou (1.21), ou encore, sous une forme condensée :

$$|\psi\rangle = \sum_{l=0}^{\Omega} |\phi_l\rangle \quad (2.2)$$

où :

$$|\phi_l\rangle = \frac{1}{l!} \left(\sum_{\nu>0} \frac{v_\nu}{u_\nu} a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+ \right)^l \left(\prod_{\nu>0} u_\nu \right) |0\rangle \quad (2.3)$$

et Ω est la dégénérescence totale de paires.

$|\phi_l\rangle$ s'appelle la composante à l paires de particules.

Il s'agit à présent d'extraire la composante physique (c'est-à-dire la composante à P paires de particules). Pour cela, prenons la forme (1.20) de l'état BCS et multiplions tous les rapports $\frac{v_\nu}{u_\nu}$ par un nombre complexe α non nul.

On remarque alors que la composante à l paires de particules se trouve multipliée par

un facteur α^l ; alors les états de la forme :

$$\alpha^{-P} \prod_{\nu>0} (u_\nu + \alpha v_\nu a_\nu^+ a_\nu^+) | 0 \rangle \quad (2.4)$$

sont des états qui ont la même composante physique que l'état BCS, c'est-à-dire qu'ils décrivent le même système physique que l'état $|\psi\rangle$.

La seule contrainte sur le choix du paramètre α est la condition de normalisation, soit :

$$u_\nu^2 + |\alpha|^2 v_\nu^2 = 1 \quad (2.5)$$

ce qui entraîne :

$$|\alpha|^2 = 1 \quad (2.6)$$

et c'est sur cette propriété qu'on se basera pour l'élimination des fausses composantes (ou composantes non physiques c'est-à-dire telles que $l \neq P$).

2.2.1 Projection de la fonction BCS

Procédons maintenant à la projection de l'état BCS. Pour cela, on commence par éliminer de proche en proche les fausses composantes de ce dernier.

La contrainte (2.6) signifie que α appartient à un cercle de rayon unité dans la représentation complexe.

En posant $\alpha = \pm 1$, construisons alors $|\psi_1\rangle$ défini par :

$$|\psi_1\rangle = C_1 \left[\prod_{\nu>0} (u_\nu + v_\nu a_\nu^+ a_\nu^+) + (-1)^P \prod_{\nu>0} (u_\nu - v_\nu a_\nu^+ a_\nu^+) \right] | 0 \rangle \quad (2.7)$$

où C_1 est une constante de normalisation.

Développons maintenant l'état (2.7) sous une forme analogue à (1.21), on aura alors :

$$|\psi_1\rangle = C_1 \left(\prod_{\nu>0} u_\nu \right) \sum_{Q=0}^{l-Q} \frac{1}{Q!} \left[1 + (-1)^{P+Q} \right] \left(\sum_{\nu>0} \frac{v_\nu}{u_\nu} a_\nu^+ a_\nu^+ \right)^Q | 0 \rangle \quad (2.8)$$

Remarquons alors que : $\left[1 + (-1)^{P+Q}\right] = 0$ si : $Q = P \pm 1, P \pm 3, P \pm 5, \dots$

Ce qui veut dire qu'on a éliminé les composantes à $P \pm 1, P \pm 3, P \pm 5, \dots$ paires de particules. Cela représente la première étape dans l'élimination des fausses composantes.

Construisons maintenant l'état $|\psi_2\rangle$ relatif à : $\alpha = \pm 1, \pm i$ (où i est le l'imaginaire pur), soit :

$$|\psi_2\rangle = C_2 \left[\prod_{\nu>0} (u_\nu + v_\nu a_\nu^+ a_\nu^+) + (-1)^P \prod_{\nu>0} (u_\nu - v_\nu a_\nu^+ a_\nu^+) + \right. \\ \left. (i)^P \prod_{\nu>0} (u_\nu + i v_\nu a_\nu^+ a_\nu^+) + (-i)^P \prod_{\nu>0} (u_\nu - i v_\nu a_\nu^+ a_\nu^+) \right] \quad (2.9)$$

En développant ce dernier de manière analogue à (2.2), on aura :

$$|\psi_2\rangle = C_2 \left(\prod_{\nu>0} u_\nu \right) \sum_{Q=0}^{\Omega} \frac{1}{Q!} \left[1 + (-1)^{P+Q}\right] \left[1 + (i)^{Q-P}\right] \left(\sum_{\nu>0} \frac{v_\nu}{u_\nu} a_\nu^+ a_\nu^+ \right)^Q |0\rangle \quad (2.10)$$

On voit que le terme $\left[1 + (i)^{Q-P}\right]$ s'annule pour :

$$Q - P = Q \pm (4m + 2) \quad \text{où } m \text{ est un entier positif ou nul.} \quad (2.11)$$

Ce qui veut dire que les composantes à $P \pm 2, P \pm 6, P \pm 10, \dots$ paires de particules sont éliminées en plus des composantes déjà éliminées.

En réitérant ce processus, toutes les fausses composantes seront éliminées.

La généralisation à l'étape n s'écrit :

$$|\psi_n\rangle = C_n \left\{ \left[\prod_{\nu>0} (u_\nu + v_\nu a_\nu^+ a_\nu^+) + (-1)^P \prod_{\nu>0} (u_\nu - v_\nu a_\nu^+ a_\nu^+) \right] + \right. \\ \left. \sum_{k=1}^n z_k^{-P} \prod_{\nu>0} (u_\nu + z_k v_\nu a_\nu^+ a_\nu^+) + c.c \right\} |0\rangle \quad (2.12)$$

où : $z_k = e^{i\varphi_k}$ avec : $\varphi_k = \frac{k\pi}{n+1}$ et n est un entier positif, il représente le degré d'extraction des fausses composantes.

C_n est la constante de normalisation et c.c est le complexe conjugué par rapport à z_k .

Sous une forme compacte, $|\psi_n\rangle$ peut également s'écrire :

$$|\psi_n\rangle = C_n \left[\sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} \prod_{\nu>0} (u_\nu + z_k v_\nu a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+) + c.c \right] |0\rangle \quad (2.13)$$

où :

$$\xi_k = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < k < n + 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } k = 1 \text{ ou } k = n + 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

Dès que l'inégalité :

$$2(n+1) > \max(P, \Omega - P) \quad (2.15)$$

est vérifiée, toutes les fausses composantes sont éliminées. En effet, la composante de $|\psi_n\rangle$ à Q paires de particules est de la forme[27] :

$$|\psi_n\rangle_Q = C_n \left(\prod_{\nu>0} u_\nu \right) \sum_{k=0}^{n+1} \exp \left[ik \frac{(Q-P)\pi}{n+1} \right] \prod_{\nu>0} \left(\frac{v_\nu}{u_\nu} a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+ \right)^Q |0\rangle \quad (2.16)$$

Sachant que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \exp \left[ik \frac{(Q-P)\pi}{n+1} \right] = \begin{cases} 0 & \text{si } Q - P \neq \pm 2l(n+1) \\ 2(n+1) & \text{si } Q - P = \pm 2l(n+1) \end{cases} \quad (2.17)$$

où l est un entier positif, d'après l'expression (2.17) on voit bien que les composantes non nulles correspondent à un nombre de paires égal à $P \pm 2l(n+1)$, et sachant que :

- Si : $P + 2l(n+1) < \Omega$ alors $2(n+1) < \frac{\Omega - P}{l}$
- Si : $P - 2l(n+1) > 0$ alors $2(n+1) > \frac{P}{l}$

on aura finalement :

$$2(n+1) > \max(P, \Omega - P) \quad (2.18)$$

A partir de ce point, on a deux cas de figures qui peuvent se présenter :

- La méthode PBCS (ou Projected-BCS) où les paramètres variationnels sont calculés avant la projection.
- La méthode FBCS (ou Fixed-BCS) où la variation est faite après projection.

Dans notre présente étude, on adoptera la première méthode, à savoir la méthode PBCS qui est la projection après variation, beaucoup plus maniable que son analogue.

2.2.2 Ecriture de la fonction d'onde en représentation quasiparticule

On se propose de déterminer l'expression de la fonction d'onde $|\psi_n\rangle$ en représentation quasiparticule.

Pour cela et pour alléger les notations, posons :

$$|\psi(z_k)\rangle = \prod_{\nu>0} (u_\nu + z_k v_\nu a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+) \quad (2.19)$$

sachant que $|\psi_n\rangle$ est une combinaison linéaire d'états correspondant à différents nombres de paires de quasiparticules alors, il peut s'écrire sous la forme suivante[18] :

$$|\psi_n\rangle = \alpha |\psi\rangle + \sum_{\nu} \beta_{\nu} |\nu\tilde{\nu}\rangle + \sum_{\nu\mu} \gamma_{\nu\mu} |\nu\tilde{\nu}\mu\tilde{\mu}\rangle + \dots \quad (2.20)$$

où $|\nu\tilde{\nu}\rangle, |\nu\tilde{\nu}\mu\tilde{\mu}\rangle, \dots$ sont respectivement les états à 1, 2..... paires de quasiparticules, définis au chapitre précédent.

En projetant, respectivement, $|\psi_n\rangle$ sur $|\psi\rangle$ puis $|\nu\tilde{\nu}\rangle, |\nu\tilde{\nu}\mu\tilde{\mu}\rangle \dots$, on aura les différents coefficients $\alpha, \beta_{\nu}, \gamma_{\nu\mu} \dots$

Soit :

$$\alpha = \langle \psi | \psi_n \rangle \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} &= C_n \left[\sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} \langle \psi | \psi(z_k) \rangle + c.c \right] \\ &= C_n \left[\sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} \prod_{\nu>0} (u_\nu^2 + z_k v_\nu^2) + c.c \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

sachant que :

$$\langle \psi | \psi(z_k) \rangle = \prod_{\nu>0} (u_\nu^2 + z_k v_\nu^2) \quad (2.23)$$

De la même manière, on peut déterminer $\beta_\nu, \gamma_{\nu\mu}, \dots$ et finalement on trouve :

$$|\psi_n\rangle = C_n \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} \prod_{j>0} (u_j^2 + z_k v_j^2) \left[1 + (z_k - 1) \sum_{\nu>0} \frac{u_\nu v_\nu}{u_\nu^2 + z_k v_\nu^2} \alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\nu}}^+ + \frac{(z_k - 1)^2}{2!} \sum_{\nu\mu>0} \frac{u_\nu v_\nu}{u_\nu^2 + z_k v_\nu^2} \frac{u_\mu v_\mu}{u_\mu^2 + z_k v_\mu^2} \alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_\mu^+ \alpha_{\bar{\mu}}^+ + \dots \right] + c.c \right\} |\psi\rangle \quad (2.24)$$

en représentation quasiparticule.

2.3 Conservation du nombre de particules

2.3.1 Propriété des opérateurs conservant le nombre de particules

Soit Θ un opérateur quelconque tel que :

$$[N, \Theta] = 0 \quad (2.25)$$

Cet opérateur vérifie la propriété suivante :

$$\langle \psi_n | \Theta | \psi_n \rangle = 2(n+1) C_n \langle \psi_n | \Theta | \psi \rangle \quad (2.26)$$

En effet, en prenant en compte les expressions (2.2) et (2.3), on a :

$$\langle \psi_n | \Theta | \psi \rangle = \left(\prod_{\nu>0} u_\nu \right) \sum_{l=0}^{\Omega} \left\{ \frac{1}{l!} \sum_{\nu_1 \nu_2 \nu_l > 0} \frac{v_{\nu_1} v_{\nu_2} \dots v_{\nu_l}}{u_{\nu_1} u_{\nu_2} \dots u_{\nu_l}} \langle \psi_n | \Theta A_{\nu_1}^+ A_{\nu_2}^+ \dots A_{\nu_l}^+ | 0 \rangle \right\} \quad (2.27)$$

où A_ν^+ est l'opérateur de création d'une paire de particules défini par :

$$A_\nu^+ = a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+ \quad (2.28)$$

Sachant que la fonction projetée correspond à la P ième composante, alors :

$$\langle \psi_n | \Theta | \psi \rangle = \left(\prod_{\nu > 0} u_\nu \right) \left\{ \frac{1}{P!} \sum_{\nu_1 \nu_2 \nu_p > 0} \frac{v_{\nu_1} v_{\nu_2} \dots v_{\nu_p}}{u_{\nu_1} u_{\nu_2} \dots u_{\nu_p}} \langle \psi_n | \Theta A_{\nu_1}^+ A_{\nu_2}^+ \dots A_{\nu_p}^+ | 0 \rangle \right\} \quad (2.29)$$

Or $|\psi(z_k)\rangle$ défini par (2.19) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} |\psi(z_k)\rangle &= \left(\prod_{\nu > 0} u_\nu \right) \prod_{\nu > 0} \left(1 + z_k \frac{v_\nu}{u_\nu} a_\nu^+ a_\nu^+ \right) |0\rangle \\ &= \sum_{l=0}^{\Omega} \left\{ \frac{1}{l!} \sum_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l > 0} \frac{v_{\nu_1} v_{\nu_2} \dots v_{\nu_l}}{u_{\nu_1} u_{\nu_2} \dots u_{\nu_l}} z_k^l A_{\nu_1}^+ A_{\nu_2}^+ \dots A_{\nu_l}^+ |0\rangle \right\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

On aura alors :

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | \Theta | \psi(z_k) \rangle &= \left(\prod_{\nu > 0} u_\nu \right) \left\{ \frac{1}{P!} \sum_{\nu_1 \nu_2 \nu_p > 0} \frac{v_{\nu_1} v_{\nu_2} \dots v_{\nu_p}}{u_{\nu_1} u_{\nu_2} \dots u_{\nu_p}} z_k^P \langle \psi_n | \Theta A_{\nu_1}^+ A_{\nu_2}^+ \dots A_{\nu_p}^+ | 0 \rangle \right\} \\ &= z_k^P \langle \psi_n | \Theta | \psi \rangle \end{aligned} \quad (2.31)$$

d'où, on déduit :

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | \Theta | \psi_n \rangle &= C_n \left[\sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} \langle \psi | \Theta | \psi(z_k) \rangle + c.c \right] \\ &= C_n \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k + c.c \right\} \langle \psi_n | \Theta | \psi \rangle \end{aligned} \quad (2.32)$$

et finalement :

$$\langle \psi_n | \Theta | \psi_n \rangle = 2(n+1)C_n \langle \psi_n | \Theta | \psi \rangle \quad (2.33)$$

Ce résultat nous facilitera par la suite l'évaluation des valeurs moyennes des différents opérateurs.

2.3.2 Calcul de la constante de normalisation

La condition de normalisation de $|\psi_n\rangle$, compte tenu de (2.33), s'écrit :

$$\langle \psi_n | \psi_n \rangle = 1 = 2(n+1)C_n \langle \psi_n | \psi \rangle \quad (2.34)$$

On a alors, compte tenu de (2.13) :

$$\langle \psi_n | \psi_n \rangle = 2(n+1)C_n^2 \left[\sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} \prod_{j>0} (u_j^2 + z_k v_j^2) + c.c \right] \quad (2.35)$$

ce qui conduit à :

$$2(n+1)C_n^2 = \left[\sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} \prod_{j>0} (u_j^2 + z_k v_j^2) + c.c \right]^{-1} \quad (2.36)$$

2.3.3 Calcul de la valeur moyenne de N

De même, la valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules N , s'écrit :

$$\langle \psi_n | N | \psi_n \rangle = 2(n+1)C_n \langle \psi_n | N | \psi \rangle \quad (2.37)$$

En tenant en compte les résultats (1.24), on aura :

$$\langle \psi_n | N | \psi \rangle = 2(n+1)C_n^2 \left[\sum_{\nu>0} \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} v_\nu^2 \prod_{j>0} (u_j^2 + z_k v_j^2) + c.c \right] \quad (2.38)$$

Maintenant et après qu'on a calculé la valeur moyenne de N , calculons la variance sur le nombre de particules définie par :

$$\sigma_N^2 = \langle \psi_n | N^2 | \psi_n \rangle - \langle \psi_n | N | \psi_n \rangle^2 \quad (2.39)$$

Sachant que :

$$\langle \psi_n | N^2 | \psi_n \rangle = 2(n+1)C_n \langle \psi_n | N^2 | \psi \rangle \quad (2.40)$$

et en tenant compte du résultat obtenu au chapitre précédent (1.26) ,il vient :

$$\langle \psi_n | N^2 | \psi \rangle = 2(n+1)C_n^2 \left[\sum_{\nu \neq \mu} \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k v_\nu^2 v_\mu^2 \prod_{j>0} (u_j^2 + z_k v_j^2) + c.c \right] \quad (2.41)$$

Finalement, on aura :

$$\langle \psi_n | N^2 | \psi_n \rangle = 2(n+1)C_n^2 \left[\sum_{\nu \neq \mu} \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k v_\nu^2 v_\mu^2 \prod_{j>0} (u_j^2 + z_k v_j^2) + c.c \right] \quad (2.42)$$

2.3.4 Energie

Comme l'on a vu au chapitre précédent, l'hamiltonien auxiliaire du système peut s'écrire en représentation quasi-particule, sous la forme (1.34) :

$$H' = E_0 + H_{11} + H_{20} + H_{22} + H_{31} + H_{40} \quad (2.43)$$

L'énergie correspondante par rapport à l'état projeté $|\psi_n\rangle$ est définie par :

$$E'_n = \langle \psi_n | H' | \psi_n \rangle \quad (2.44)$$

Vu l'écriture de l'état projeté en représentation quasi-particule, l'expression (2.44) s'écrira alors :

$$E'_n = E_0 + \langle \psi_n | H_{40} | \psi_n \rangle \quad (2.45)$$

d'où, l'énergie de l'état fondamental du système :

$$E_n = E_{BCS} + \langle \psi_n | H_{40} | \psi_n \rangle \quad (2.46)$$

Calculons dans un premier temps le terme $\langle \psi_n | H_{40} | \psi_n \rangle$. Compte tenu de la propriété (2.33), on aura alors :

$$\langle \psi_n | H_{40} | \psi_n \rangle = 2(n+1)C_n \langle \psi_n | H_{40} | \psi \rangle \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | H_{40} | \psi_n \rangle = & \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} (z_k - 1)^2 \prod_{j>0} (u_j^2 + z_k v_j^2) \frac{G}{4} \sum_{\nu\mu\eta\gamma} \frac{u_\nu v_\nu}{u_\nu^2 + z_k v_\nu^2} \frac{u_\mu v_\mu}{u_\mu^2 + z_k v_\mu^2} \times \right. \\ & \left. (u_\mu^2 v_\nu^2 + u_\nu^2 v_\mu^2) \langle \psi | \alpha_{\bar{\mu}} \alpha_\mu \alpha_{\bar{\nu}} \alpha_\nu \alpha_\eta^+ \alpha_{\bar{\eta}}^+ \alpha_\gamma^+ \alpha_{\bar{\gamma}}^+ | \psi \rangle + c.c \right\} \end{aligned} \quad (2.48)$$

En appliquant les règles d'anticommuation des fermions, on aura :

$$\langle \psi | \alpha_{\bar{\mu}} \alpha_\mu \alpha_{\bar{\nu}} \alpha_\nu \alpha_\eta^+ \alpha_{\bar{\eta}}^+ \alpha_\gamma^+ \alpha_{\bar{\gamma}}^+ | \psi \rangle = \delta_{\nu\eta} \delta_{\mu\gamma} + \delta_{\nu\gamma} \delta_{\mu\eta} \quad (2.49)$$

L'expression (2.48) devient alors :

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | H_{40} | \psi_n \rangle = & \frac{G}{2} (n+1) C_n^2 \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} (z_k - 1)^2 \prod_{j>0} (u_j^2 + z_k v_j^2) \right. \\ & \left. 2 \sum_{\nu \neq \mu} \frac{u_\nu v_\nu}{u_\nu^2 + z_k v_\nu^2} \frac{u_\mu v_\mu}{u_\mu^2 + z_k v_\mu^2} (u_\mu^2 v_\nu^2 + u_\nu^2 v_\mu^2) + c.c \right\} \end{aligned} \quad (2.50)$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | H_{40} | \psi_n \rangle = & 2(n+1) C_n^2 G \sum_{\nu \neq \mu} u_\nu^3 v_\nu u_\mu v_\mu^3 \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} (z_k - 1)^2 \right. \\ & \left. \prod_{j \neq \nu\mu} (u_j^2 + z_k v_j^2) + c.c \right\} \end{aligned} \quad (2.51)$$

d'où finalement :

$$\begin{aligned} E_n = E_{BCS} + & 2(n+1) C_n^2 G \sum_{\nu \neq \mu} u_\nu^3 v_\nu u_\mu v_\mu^3 \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} (z_k - 1)^2 \right. \\ & \left. \prod_{j \neq \nu\mu} (u_j^2 + z_k v_j^2) + c.c \right\} \end{aligned} \quad (2.52)$$

2.4 Extraction de la partie réelle

Maintenant, et après avoir calculé les valeurs moyennes des différents opérateurs, procédons à l'extraction de leur partie réelle. Pour cela, on posera les changements de variables

suivants :

$$z_k = \exp(2ix_k) \quad \text{où : } x_k = \frac{\varphi_k}{2} = \frac{k\pi}{2(n+1)} \quad (2.53)$$

et :

$$u_j^2 + z_k v_j^2 = \rho_{jk} \exp i(\varphi_{jk} + x_k) = u_j^2 + v_j^2 (\cos 2x_k + i \sin 2x_k) \quad (2.54)$$

d'où l'on déduit :

$$\rho_{jk} = (1 - \gamma_j^2 \sin^2 x_k)^{\frac{1}{2}} \quad (2.55)$$

où :

$$\gamma_j = 2u_j v_j \quad (2.56)$$

D'autre part, l'argument de $u_j^2 + z_k v_j^2$ est donné par :

$$\text{tg}(u_j^2 + z_k v_j^2) = \frac{v_j^2 \sin 2x_k}{u_j^2 + v_j^2 \cos 2x_k} \quad (2.57)$$

En posant le changement de variable : $T = \text{tg } x_k$, et sachant que :

$$\begin{cases} \sin 2x_k = \frac{2T}{1+T^2} \\ \cos 2x_k = \frac{1-T^2}{1+T^2} \end{cases} \quad (2.58)$$

on aura :

$$\text{tg}(\varphi_{jk} + x_k) = \frac{2T v_j^2}{1 + T^2 (u_j^2 - v_j^2)} \quad (2.59)$$

Sachant que :

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \text{tg } b} \quad (2.60)$$

on aura finalement :

$$\text{tg } \varphi_{jk} = -\delta_j \text{tg } x_k \quad \text{où : } \delta_j = u_j^2 - v_j^2 \quad (2.61)$$

2.4.1 Constante de normalisation

Soit la condition de normalisation donnée par l'équation (2.36).

En effectuant les changements de variables donnés par (2.53) et (2.54), on aura :

$$2(n+1)C_n^2 \left[\sum_{k=0}^{n+1} \xi_k \exp(-2iPx_k) \prod_{j>0} \rho_{jk} \exp i(\varphi_{jk} + x_k) + c.c \right] = 1 \quad (2.62)$$

ou encore :

$$2(n+1)C_n^2 \left[\sum_{k=0}^{n+1} \xi_k R_k \exp i\psi_k + c.c \right] = 1 \quad (2.63)$$

où :

$$R_k = \prod_{j>0} \rho_{jk} \quad \text{et} \quad \psi_k = \sum_{j=1}^{\Omega} \varphi_{jk} + (\Omega - 2P)x_k \quad (2.64)$$

Après extraction de la partie réelle, on aura alors :

$$4(n+1)C_n^2 \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k R_k \cos \psi_k = 1 \quad (2.65)$$

2.4.2 Nombre de particules

Soit l'expression de la valeur moyenne de N , donnée par l'expression (2.38). En effectuant les changements de variables donnés par (2.53) et (2.54), on aura alors :

$$\langle \psi_n | N | \psi_n \rangle = 2(n+1)C_n^2 \left[\sum_{\nu>0} \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k \exp(-2iPx_k) v_\nu^2 \exp i \left[\sum_j \varphi_{jk} + (\Omega - 1)x_k \right] + c.c \right] \quad (2.66)$$

Et après extraction de la partie réelle :

$$\langle \psi_n | N | \psi_n \rangle = 8(n+1)C_n^2 \sum_{\nu>0} \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k v_\nu^2 R_k^\nu \cos(\psi_k^\nu - x_k) \quad (2.67)$$

avec :

$$R_k^\nu = \frac{R_k}{\rho_{\nu k}} \quad \text{et} \quad \psi_k^\nu = \psi_k - \varphi_{\nu k} \quad (2.68)$$

De la même manière, l'extraction de la partie réelle de la moyenne quadratique de N donne :

$$\langle \psi_n | N^2 | \psi_n \rangle = 8(n+1)C_n^2 \left\{ \sum_{\nu \neq \mu} \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k v_\nu^2 v_\mu^2 R_k^{\nu\mu} \times \right.$$

$$\exp i \left[\sum_{j \neq \nu\mu} \varphi_{jk} + (\Omega - 2P + 2) x_k \right] + c.c \left\} + \langle \psi_n | N | \psi_n \rangle \quad (2.69)$$

soit :

$$\langle \psi_n | N^2 | \psi_n \rangle = 16(n+1)C_n^2 \sum_{\nu \neq \mu} \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k v_\nu^2 v_\mu^2 R_k^{\nu\mu} \cos(\psi_k^{\nu\mu} + 2x_k) + \langle \psi_n | N | \psi_n \rangle \quad (2.70)$$

où :

$$R_k^{\nu\mu} = \frac{R_k}{\rho_{\nu k} \rho_{\mu k}} \quad \text{et} \quad \psi_k^{\nu\mu} = \psi_k - \varphi_{\nu k} - \varphi_{\mu k} \quad (2.71)$$

2.4.3 Energie

Considérons, maintenant l'expression (2.51) de la valeur moyenne de H_{40} et effectuons les changements de variables (2.53) et (2.54).

Sachant que :

$$z_k - 1 = 2 \sin x_k \exp i \left(x_k + \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.72)$$

on aura alors :

$$\langle \psi_n | H_{40} | \psi_n \rangle = 2(n+1)C_n^2 G \sum_{\nu \neq \mu} u_\nu^3 v_\nu u_\mu v_\mu^3 \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} 4\xi_k \sin^2 x_k \exp 2i \left(x_k + \frac{\pi}{2} \right) R_k^{\nu\mu} \exp i\psi_k^{\nu\mu} + c.c \right\}$$

La partie réelle est alors :

$$\langle \psi_n | H_{40} | \psi_n \rangle = -16(n+1)C_n^2 G \sum_{\nu \neq \mu} u_\nu^3 v_\nu u_\mu v_\mu^3 \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k \sin^2 x_k R_k^{\nu\mu} \cos \psi_k^{\nu\mu} \quad (2.73)$$

Par suite l'énergie sera alors donnée par l'expression suivante :

$$E_n = E_{BCS} - 16(n+1)C_n^2 G \sum_{\nu \neq \mu} u_\nu^3 v_\nu u_\mu v_\mu^3 \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k \sin^2 x_k R_k^{\nu\mu} \cos \psi_k^{\nu\mu} \quad (2.74)$$

Chapitre 3

Correction d'appariement

3.1 Introduction

Le modèle macroscopique-microscopique [40], introduit par Myers et Swiatecki et amélioré par Strutinsky [42], a permis l'évaluation de l'énergie de déformation du noyau. L'idée de base de ce modèle est de combiner l'aspect macroscopique (qui a permis de décrire correctement certains phénomènes tels que les masses, la fission nucléaire, etc...) et l'aspect microscopique (qui a permis de décrire correctement d'autres phénomènes comme l'existence des nombres magiques, l'existence du gap en énergie dans les noyaux pairs etc...).

La partie macroscopique est généralement décrite par le modèle de la goutte liquide et cela vu sa bonne description des tendances globales du noyau. La partie microscopique est prise en compte sous forme de correction : corrections de couches et d'appariement.

Dans le présent chapitre, on s'intéressera à la seconde correction, à savoir, la correction d'appariement. Nous allons, dans une première étape, rappeler son expression dans le cadre de la théorie BCS.

Dans une seconde étape, nous nous proposons d'établir cette correction dans le cadre de l'approche SBCS.

3.2 Correction d'appariement

Par définition, la correction d'appariement est la différence entre l'énergie de corrélation d'appariement pour la distribution réelle de niveaux E_p et celle d'une distribution uniforme \tilde{E}_p également appelée énergie de corrélation d'appariement lissée [26], soit :

$$\delta E_p = E_p - \tilde{E}_p \quad (3.1)$$

L'énergie de corrélation d'appariement est définie comme l'énergie due à l'appariement des nucléons, soit :

$$E_p = E_{BCS}(\Delta) - E_{BCS}(0) \quad (3.2)$$

où : $E_{BCS}(\Delta)$ et $E_{BCS}(0)$ sont données respectivement par les équations (1.57) et (1.68), ou encore :

$$E_p = 2 \left[\sum_{\nu>0} \varepsilon_\nu v_\nu^2 - \sum_{\varepsilon_\nu \leq \lambda} \varepsilon_\nu \right] - \frac{\Delta^2}{G} \left(-G \left[\sum_{\nu>0} v_\nu^4 - \sum_{\substack{\nu \\ \varepsilon_\nu \leq \lambda}} 1 \right] \right) \quad (3.3)$$

Dans ce qui suit, nous négligerons systématiquement les termes dûs à Gv_ν^2 dans l'expression de u_ν^2 et v_ν^2 , i.e :

$$E_p = 2 \left[\sum_{\nu>0} \varepsilon_\nu v_\nu^2 - \sum_{\substack{\nu \\ \varepsilon_\nu \leq \lambda}} \varepsilon_\nu \right] - \frac{\Delta^2}{G} \quad (3.4)$$

En fait, seuls un certain nombre de niveaux sont concernés par l'appariement. En effet, pour les niveaux éloignés du niveau de Fermi, les probabilités d'occupation et d'inoccupation se ramènent à celles du modèle à particules indépendantes (voir Fig-3.1).

Dans ce qui suit, on notera respectivement n_λ , $n_\lambda - n_c$, $n_\lambda + n_c$, le numéro du niveau de Fermi et les limites inférieure et supérieure des niveaux concernés par l'interaction d'appariement et λ , $\lambda + \varepsilon_{n_c}$, $\lambda - \varepsilon_{n_c}$ les énergies correspondantes.

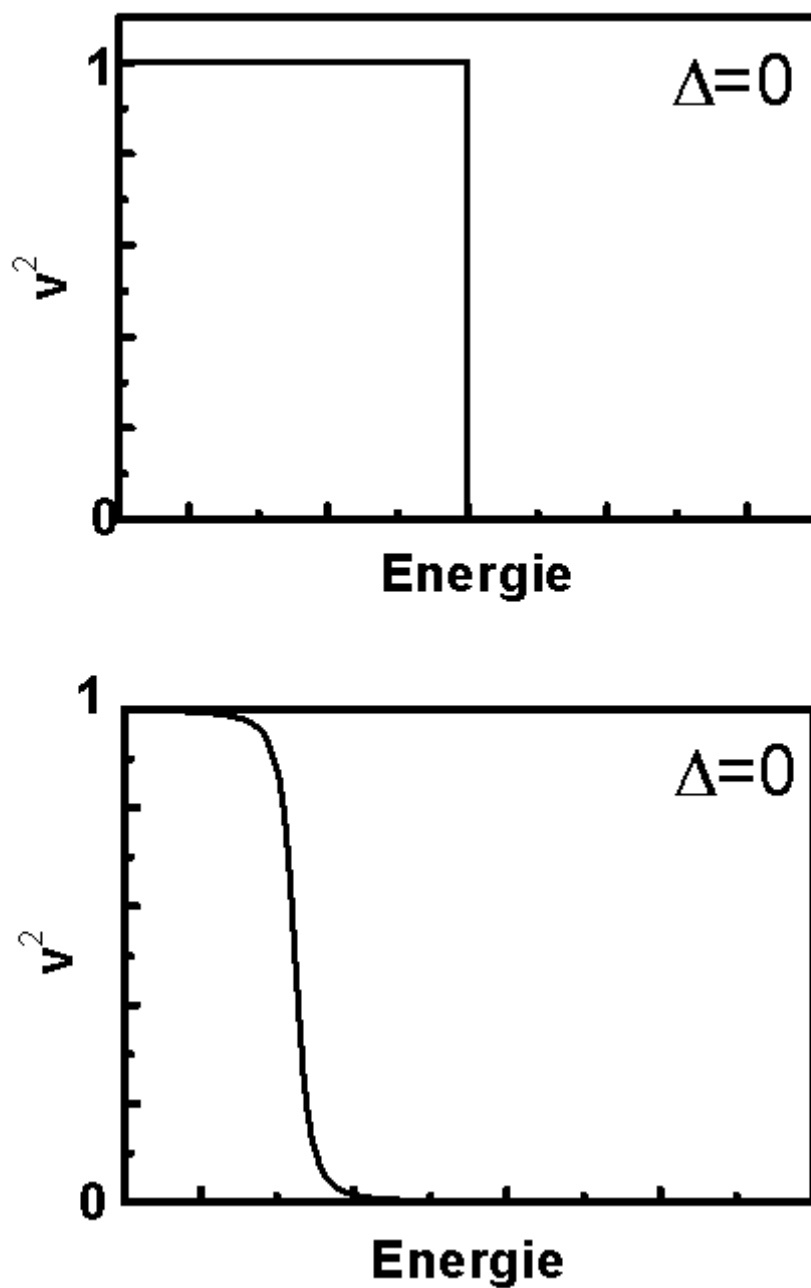


FIG. 3-1 – Variation de la probabilité d'occupation en fonction de l'énergie en présence ($\Delta = 0$) et absence ($\Delta \neq 0$) de corrélations d'appariement.

L'équation (3.4) devient alors :

$$E_p = 2 \sum_{\nu=n_\lambda-n_c}^{n_\lambda+n_c} \varepsilon_\nu v_\nu^2 - 2 \sum_{\nu=n_\lambda-n_c}^{n_\lambda} \varepsilon_\nu - \frac{\Delta^2}{G} \quad (3.5)$$

\tilde{E}_p sera déterminée en remplaçant les différentes sommes discrètes dans l'expression (3.5) par des intégrales. Pour cela, on introduit une densité de niveaux lissée \tilde{g} que l'on suppose constante au voisinage du niveau de Fermi.

Le lissage consiste alors en la substitution suivante [26] :

$$\sum_{\nu=n_\lambda-n_c}^{n_\lambda+n_c} f(\varepsilon_\nu - \lambda) \longrightarrow \tilde{g} \int_a^b f(x) dx \quad (3.6)$$

où l'on a posé :

$$x = \varepsilon - \lambda \quad (3.7)$$

et où :

$$a \rightarrow \lambda - \varepsilon_{n_c} \quad \text{et} \quad b \rightarrow \lambda + \varepsilon_{n_c} \quad (3.8)$$

Dans ce qui suit, nous considérons le même nombre de niveaux de part et d'autre du niveau de Fermi, ce qui conduit à :

$$a = -b \quad (3.9)$$

3.3 Energie de corrélation d'appariement dans la théorie BCS

3.3.1 Première équation du gap

De la même façon que l'équation (3.5), la première équation du gap (1.43) devient :

$$\frac{2}{G} = \sum_{\nu=n_\lambda-n_c}^{n_\lambda+n_c} \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda)^2 + \Delta^2}} \quad (3.10)$$

et dans le cas d'une distribution uniforme de niveaux :

$$\frac{2}{\bar{G}} = \tilde{g} \int_{-b}^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \tilde{\Delta}^2}} \quad (3.11)$$

où $\tilde{\Delta}$ est l'équivalent de Δ dans le cas d'une distribution uniforme et est donné par [26] :

$$\tilde{\Delta} = \frac{12}{\sqrt{A}} \quad (3.12)$$

On a alors, tous calculs faits¹ :

$$\bar{G} = \left[\tilde{g} \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + \tilde{\Delta}^2}}{\tilde{\Delta}} \right]^{-1} \quad (3.13)$$

3.3.2 Energie de corrélation d'appariement

La condition de conservation du nombre de particules (1.52) s'écrit également :

$$n = 2 \sum_{\substack{\nu \\ \varepsilon_\nu \leq \lambda}} 1 \quad (3.14)$$

lorsque : $G \leq G_c$, ou encore :

$$n = 2 \sum_{\nu=n_\lambda-n_c}^{n_\lambda+n_c} v_\nu^2 = 2 \sum_{\nu=n_\lambda-n_c}^{n_\lambda} 1 \quad (3.15)$$

On peut alors écrire l'expression (3.5) sous la forme :

$$E_p = 2 \sum_{\nu=n_\lambda-n_c}^{n_\lambda+n_c} (\varepsilon_\nu - \lambda) v_\nu^2 - 2 \sum_{\nu=n_\lambda-n_c}^{n_\lambda} (\varepsilon_\nu - \lambda) - \frac{\Delta^2}{G} \quad (3.16)$$

Dans le cas d'une distribution uniforme, cette dernière expression devient :

$$\tilde{E}_p = \tilde{g} \int_{-b}^b \left[1 - \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \tilde{\Delta}^2}} \right] x dx - 2\tilde{g} \int_{-b}^0 x dx - \frac{\tilde{\Delta}^2}{\bar{G}} \quad (3.17)$$

¹Voir Annexe C pour les différentes intégrales intervenant dans ce qui suit.

soit :

$$\tilde{E}_p = \tilde{g} \left(b^2 - b\sqrt{b^2 + \tilde{\Delta}^2} \right) \quad (3.18)$$

Soit encore, si l'on suppose que : $\frac{\tilde{\Delta}}{b} \ll 1$:

$$\tilde{E}_p = -\frac{1}{2}\tilde{g}\tilde{\Delta}^2 \quad (3.19)$$

3.4 Energie de corrélation d'appariement dans la théorie SBCS

3.4.1 Lissage de la constante de normalisation

Considérons l'expression de la condition de normalisation (2.35) :

$$1 = 2(n+1)C_n^2 \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} \prod_j (u_j^2 + z_k v_j^2) + c.c \right\} \quad (3.20)$$

qu'on peut écrire encore sous la forme :

$$1 = 2(n+1)C_n^2 \left\{ 1 + \left[\sum_{k=1}^n \xi_k z_k^{-P} \prod_j (u_j^2 + z_k v_j^2) + c.c \right] + (-1)^P \prod_j (u_j^2 - v_j^2) \right\} \quad (3.21)$$

où l'on a isolé les valeurs extrêmes de k ($k = 0$ et $k = n + 1$) afin d'éviter les singularités lors des calculs numériques.

a) Valeurs extrêmes de k ($k = 0$ et $k = n + 1$) :

Le terme correspondant à $k = 0$ étant une constante, lissons dans un premier temps le terme correspondant à $k = n + 1$, soit :

$$I = \prod_j (u_j^2 - v_j^2) = \prod_j \frac{y_j}{\sqrt{y_j^2 + \Delta^2}} \quad (3.22)$$

où :

$$y_j = \varepsilon_j - \lambda \quad (3.23)$$

Comme le lissage consiste à remplacer une somme discrète par une intégrale, nous allons tout d'abord considérer le logarithme népérien de I de manière à manipuler une somme au lieu d'un produit. On a alors :

$$\ln I = \sum_j \ln \left(\frac{y_j}{\sqrt{y_j^2 + \Delta^2}} \right) \quad (3.24)$$

En remplaçant la somme discrète par une somme continue, il vient :

$$\overline{\ln I} = \frac{\tilde{g}}{2} \int_{-b}^b \ln \left(\frac{y^2}{y^2 + \tilde{\Delta}^2} \right) dy = \tilde{g} \int_0^b \ln \left(\frac{y^2}{y^2 + \tilde{\Delta}^2} \right) dy \quad (3.25)$$

d'où finalement² :

$$\bar{I} = \left(\frac{b^2}{b^2 + \tilde{\Delta}^2} \right)^{b\tilde{g}} \exp \left[-2\tilde{g}\tilde{\Delta} \arctan \left(\frac{b}{\tilde{\Delta}} \right) \right] \quad (3.26)$$

b) Terme général ($k \neq 0$ et $k \neq n+1$) :

Posons :

$$J = \prod_j (u_j^2 + z_k v_j^2) = \prod_j [\rho_{jk} \exp i(\varphi_{jk} + x_k)] \quad (3.27)$$

où l'on a tenu compte de (2.50).

De même que pour (3.22), considérons le logarithme de cette expression, soit :

$$\ln J = \sum_j \ln \rho_{jk} + i \sum_j \varphi_{jk} + i\Omega x_k \quad (3.28)$$

Sachant que :

$$\rho_{jk} = (1 - 4u_j^2 v_j^2 \sin^2 x_k) \quad (3.29)$$

$$= \left(\frac{y_j^2 + \cos^2 x_k \Delta^2}{y_j^2 + \Delta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.30)$$

²Voir l'annexe C pour les différentes intégrales intervenant dans ce qui suit.

il vient :

$$\ln J = \frac{1}{2} \sum_j \ln \left(\frac{y_j^2 + \cos^2 x_k \Delta^2}{y_j^2 + \Delta^2} \right) + i \sum_j \varphi_{jk} + i\Omega x_k \quad (3.31)$$

d'où :

$$\overline{\ln J} = \frac{\tilde{g}}{2} \int_{-b}^b \ln \left(y^2 + \cos^2 x_k \tilde{\Delta}^2 \right) dy - \frac{\tilde{g}}{2} \int_{-b}^b \ln \left(y^2 + \tilde{\Delta}^2 \right) dy + i\Omega x_k \quad (3.32)$$

En effet, compte tenu de (2.57) :

$$\overline{\sum_j \varphi_{jk}} = \overline{\sum_j \arctan \left[(v_j^2 - u_j^2) t g x_k \right]} = \tilde{g} \int_{-b}^b \arctan \left(\frac{y}{\sqrt{y^2 + \tilde{\Delta}^2}} t g x_k \right) dy = 0 \quad (3.33)$$

Alors :

$$\overline{\ln J} = b\tilde{g} \ln \left(\frac{b^2 + \cos^2 x_k \tilde{\Delta}^2}{b^2 + \tilde{\Delta}^2} \right) + 2\tilde{\Delta}\tilde{g} \cos x_k \arctan \left(\frac{b}{\tilde{\Delta} \cos x_k} \right) - 2\tilde{\Delta}\tilde{g} \arctan \left(\frac{b}{\tilde{\Delta}} \right) + i\Omega x_k \quad (3.34)$$

D'où finalement :

$$\bar{J} = \left(\frac{b^2 + \cos^2 x_k \tilde{\Delta}^2}{b^2 + \tilde{\Delta}^2} \right)^{b\tilde{g}} \exp \left\{ 2\tilde{\Delta}\tilde{g} \left[\cos x_k \arctan \left(\frac{b}{\tilde{\Delta} \cos x_k} \right) - \arctan \left(\frac{b}{\tilde{\Delta}} \right) \right] + i\Omega x_k \right\} \quad (3.35)$$

que nous noterons :

$$\bar{J} = \bar{A} \exp (i\Omega x_k) \quad (3.36)$$

où l'on a posé :

$$\bar{A} = \left(\frac{b^2 + \cos^2 x_k \tilde{\Delta}^2}{b^2 + \tilde{\Delta}^2} \right)^{b\tilde{g}} \exp \left\{ 2\tilde{\Delta}\tilde{g} \left[\cos x_k \arctan \left(\frac{b}{\tilde{\Delta} \cos x_k} \right) - \arctan \left(\frac{b}{\tilde{\Delta}} \right) \right] \right\} \quad (3.37)$$

La condition de normalisation, dans le cas d'une distribution uniforme de niveaux s'écrit alors :

$$1 = 2(n+1) \bar{C}_n^2 \left\{ \left[\sum_{k=1}^n z_k^{-P} \bar{J} + c.c \right] + 1 + (-1)^{-P} \bar{I} \right\} \quad (3.38)$$

Après extraction de la partie réelle, on aura finalement :

$$1 = 2(n+1)\bar{C}_n^2 \left\{ \left[2 \sum_{k=1}^n \bar{A} \cos [(\Omega - 2P)x_k] + c.c \right] + 1 + (-1)^{-P} \bar{I} \right\} \quad (3.39)$$

3.4.2 Lissage de l'expression de l'énergie

Considérons l'expression (2.69) de l'énergie :

$$E_n = E_{BCS} + G \sum_{\nu \neq \mu} u_\nu^3 v_\nu u_\mu v_\mu^3 \left[2(n+1)C_n^2 \left[\sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} (z_k - 1)^2 \prod_{j \neq \nu\mu} (u_j^2 + z_k v_j^2) + c.c \right] \right] \quad (3.40)$$

posons :

$$E_{corr} = G \sum_{\nu \neq \mu} u_\nu^3 v_\nu u_\mu v_\mu^3 \left[2(n+1)C_n^2 \left[\sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} (z_k - 1)^2 \prod_{j \neq \nu\mu} (u_j^2 + z_k v_j^2) + c.c \right] \right] \quad (3.41)$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$E_{corr} = 2(n+1)C_n^2 G \sum_{k=0}^{n+1} \left\{ \sum_{\nu \neq \mu} \frac{u_\nu^3 v_\nu u_\mu v_\mu^3}{(u_\nu^2 + z_k v_\nu^2)(u_\mu^2 + z_k v_\mu^2)} \left[\xi_k z_k^{-P} (z_k - 1)^2 \prod_j (u_j^2 + z_k v_j^2) + c.c \right] \right\} \quad (3.42)$$

Là encore, isolons les valeurs extrêmes de k , soit :

$$E_{corr} = 2(n+1)C_n^2 G \left\{ 4(-1)^P \prod_j (u_j^2 - v_j^2) \sum_{\nu \neq \mu} \frac{u_\nu^3 v_\nu}{u_\nu^2 - v_\nu^2} \frac{u_\mu v_\mu^3}{u_\mu^2 - v_\mu^2} + \left[\sum_{k=1}^n z_k^{-P} (z_k - 1)^2 \prod_j (u_j^2 + z_k v_j^2) \sum_{\nu \neq \mu} \frac{u_\nu^3 v_\nu}{u_\nu^2 + z_k v_\nu^2} \frac{u_\mu v_\mu^3}{u_\mu^2 + z_k v_\mu^2} \right] + c.c \right\} \quad (3.43)$$

a) Valeurs extrêmes de k ($k = 0$ et $k = n + 1$) :

Notons que le terme correspondant à $k = 0$ est nul (en effet : $z_k = 1$ dans ce cas).

Considérons donc le terme :

$$B = \prod_j (u_j^2 - v_j^2) \sum_{\nu \neq \mu} \frac{u_\nu^3 v_\nu}{u_\nu^2 - v_\nu^2} \frac{u_\mu v_\mu^3}{u_\mu^2 - v_\mu^2} \quad (3.44)$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$B = \prod_j (u_j^2 - v_j^2) \left[\sum_\nu \frac{u_\nu^3 v_\nu}{u_\nu^2 - v_\nu^2} \sum_\mu \frac{u_\mu v_\mu^3}{u_\mu^2 - v_\mu^2} - \sum_\nu \frac{u_\nu^4 v_\nu^4}{(u_\nu^2 - v_\nu^2)^2} \right] \quad (3.45)$$

Posons :

$$J_1 = \sum_\nu \frac{u_\nu^3 v_\nu}{u_\nu^2 - v_\nu^2} = \frac{\Delta}{4} \sum_\nu \frac{\sqrt{y_\nu^2 + \Delta^2} + y_\nu}{y_\nu \sqrt{y_\nu^2 + \Delta^2}} \quad (3.46)$$

$$J_2 = \sum_\mu \frac{u_\mu v_\mu^3}{u_\mu^2 - v_\mu^2} = \frac{\Delta}{4} \sum_\mu \frac{\sqrt{y_\mu^2 + \Delta^2} - y_\mu}{y_\mu \sqrt{y_\mu^2 + \Delta^2}} \quad (3.47)$$

et :

$$J_3 = \sum_\nu \frac{u_\nu^4 v_\nu^4}{(u_\nu^2 - v_\nu^2)^2} = \frac{\Delta^4}{16} \sum_\nu \frac{1}{y_\nu^2 (y_\nu^2 + \Delta^2)} \quad (3.48)$$

On aura alors³ :

$$\bar{J}_1 = \frac{\tilde{\Delta} \tilde{g}}{4} \int_{-b}^b \frac{y + \sqrt{y^2 + \tilde{\Delta}^2}}{y \sqrt{y^2 + \tilde{\Delta}^2}} dy \quad (3.49)$$

$$= \frac{\tilde{\Delta} \tilde{g}}{2} \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{y^2 + \tilde{\Delta}^2}} \quad (3.50)$$

$$= \frac{\tilde{\Delta} \tilde{g}}{2} \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 + \tilde{\Delta}^2}}{\tilde{\Delta}} \right) \quad (3.51)$$

De même :

$$\bar{J}_2 = \frac{\tilde{\Delta} \tilde{g}}{4} \int_{-b}^b \frac{-y + \sqrt{y^2 + \tilde{\Delta}^2}}{y \sqrt{y^2 + \tilde{\Delta}^2}} dy \quad (3.52)$$

$$= -\frac{\tilde{\Delta} \tilde{g}}{2} \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{y^2 + \tilde{\Delta}^2}} \quad (3.53)$$

$$= -\bar{J}_1 \quad (3.54)$$

³Voir l'annexe C pour les différentes intégrales intervenant dans les calculs.

et :

$$\bar{J}_3 = \frac{\tilde{\Delta}^4 \tilde{g}}{16} \int_{-b}^b \frac{1}{y^2(y^2 + \Delta^2)} \quad (3.55)$$

$$= \frac{\tilde{\Delta}^4 \tilde{g}}{8} \int_0^b \frac{dy}{y^2(y^2 + \Delta^2)} \quad (3.56)$$

$$= -\frac{\tilde{\Delta}^4 \tilde{g}}{8} \left(\frac{1}{b\tilde{\Delta}^2} + \frac{\arctan\left(\frac{b}{\tilde{\Delta}}\right)}{\tilde{\Delta}} \right) \quad (3.57)$$

La forme lissée de B est alors :

$$\bar{B} = -\bar{I}(\bar{J}_1^2 + \bar{J}_3) \quad (3.58)$$

b) Terme général ($k \neq 0$ et $k \neq n+1$) :

Considérons d'abord la somme :

$$\sum_{\nu \neq \mu} \frac{u_\nu^3 v_\nu u_\mu v_\mu^3}{(u_\nu^2 + z_k v_\nu^2)(u_\mu^2 + z_k v_\mu^2)}$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\sum_\nu \frac{u_\nu^3 v_\nu}{u_\nu^2 + z_k v_\nu^2} \sum_\mu \frac{u_\mu v_\mu^3}{u_\mu^2 + z_k v_\mu^2} - \sum_\nu \frac{u_\nu^4 v_\nu^4}{(u_\nu^2 + z_k v_\nu^2)^2}$$

Posons :

$$S_1 = \sum_\nu \frac{u_\nu^3 v_\nu}{u_\nu^2 + z_k v_\nu^2} \quad (3.59)$$

$$S_2 = \sum_\nu \frac{u_\nu v_\nu^3}{u_\nu^2 + z_k v_\nu^2} \quad (3.60)$$

$$S_3 = \sum_\nu \frac{u_\nu^4 v_\nu^4}{(u_\nu^2 + z_k v_\nu^2)^2} \quad (3.61)$$

Compte tenu de l'équation (2.50), S_1 s'écrit :

$$S_1 = \sum_\nu \frac{u_\nu^3 v_\nu}{\rho_{\nu k}} \exp[-i(\varphi_{\nu k} + x_k)] \quad (3.62)$$

Alors :

$$S_1 = \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^3 v_{\nu} \cos(\varphi_{\nu k} + x_k)}{\rho_{\nu k}} - i \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^3 v_{\nu} \sin(\varphi_{\nu k} + x_k)}{\rho_{\nu k}} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^3 v_{\nu} \cos \varphi_{\nu k} \cos x_k}{\rho_{\nu k}} - \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^3 v_{\nu} \sin \varphi_{\nu k} \sin x_k}{\rho_{\nu k}} \\ &\quad - i \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^3 v_{\nu} \sin \varphi_{\nu k} \cos x_k}{\rho_{\nu k}} - i \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^3 v_{\nu} \cos \varphi_{\nu k} \sin x_k}{\rho_{\nu k}} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Posons :

$$I_1 = \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^3 v_{\nu} \cos \varphi_{\nu k}}{\rho_{\nu k}} \quad (3.65)$$

$$I_3 = \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^3 v_{\nu} \sin \varphi_{\nu k}}{\rho_{\nu k}} \quad (3.66)$$

alors :

$$S_1 = (I_1 \cos x_k - I_3 \sin x_k) - i(I_3 \cos x_k + I_1 \sin x_k) \quad (3.67)$$

De la même façon, S_2 s'écrit :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{\nu} \frac{u_{\nu} v_{\nu}^3 \cos \varphi_{\nu k} \cos x_k}{\rho_{\nu k}} - \sum_{\nu} \frac{u_{\nu} v_{\nu}^3 \sin \varphi_{\nu k} \sin x_k}{\rho_{\nu k}} \\ &\quad - i \sum_{\nu} \frac{u_{\nu} v_{\nu}^3 \sin \varphi_{\nu k} \cos x_k}{\rho_{\nu k}} - i \sum_{\nu} \frac{u_{\nu} v_{\nu}^3 \cos \varphi_{\nu k} \sin x_k}{\rho_{\nu k}} \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$S_2 = (I_2 \cos x_k - I_4 \sin x_k) - i(I_4 \cos x_k + I_2 \sin x_k) \quad (3.69)$$

où l'on a posé :

$$I_2 = \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^3 v_{\nu} \sin \varphi_{\nu k}}{\rho_{\nu k}} \quad (3.70)$$

$$I_4 = \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^3 v_{\nu} \cos \varphi_{\nu k}}{\rho_{\nu k}} \quad (3.71)$$

Et finalement la somme S_3 , s'écrit :

$$S_3 = \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^4 v_{\nu}^4}{\rho_{\nu k}^2} \exp[-2i(\varphi_{\nu k} + x_k)] \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^4 v_{\nu}^4 \cos 2\varphi_{\nu k} \cos 2x_k}{\rho_{\nu k}} - \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^4 v_{\nu}^4 \sin 2\varphi_{\nu k} \sin 2x_k}{\rho_{\nu k}} \\
&-i \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^4 v_{\nu}^4 \cos 2\varphi_{\nu k} \sin 2x_k}{\rho_{\nu k}} - \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^4 v_{\nu}^4 \sin 2\varphi_{\nu k} \cos 2x_k}{\rho_{\nu k}}
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Soit encore :

$$S_3 = (I_5 \cos 2x_k - I_6 \sin 2x_k) - i(I_5 \sin 2x_k + I_6 \cos 2x_k) \tag{3.74}$$

où l'on a posé :

$$I_5 = \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^4 v_{\nu}^4 \cos 2\varphi_{\nu k}}{\rho_{\nu k}} \tag{3.75}$$

$$I_6 = \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^4 v_{\nu}^4 \sin 2\varphi_{\nu k}}{\rho_{\nu k}} \tag{3.76}$$

Procédons maintenant au lissage des trois sommes :

$$\bar{S}_1 = (\bar{I}_1 \cos x_k - \bar{I}_3 \sin x_k) - i(\bar{I}_3 \cos x_k + \bar{I}_1 \sin x_k) \tag{3.77}$$

où⁴ :

$$\bar{I}_1 = \frac{\tilde{\Delta} \tilde{g}}{2} \left[\sin x_k \arctan \left(\frac{b \tan x_k}{\sqrt{b^2 + \tilde{\Delta}^2}} \right) + \cos x_k \ln \left(\frac{\sqrt{b^2 + \tilde{\Delta}^2} + b}{\tilde{\Delta}} \right) \right] \tag{3.78}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\tilde{\Delta} \tilde{g}}{2} \left[\cos x_k \arctan \left(\frac{b \tan x_k}{\sqrt{b^2 + \tilde{\Delta}^2}} \right) - \sin x_k \ln \left(\frac{\sqrt{b^2 + \tilde{\Delta}^2} + b}{\tilde{\Delta}} \right) \right] \tag{3.79}$$

\bar{S}_1 peut également s'écrire :

$$\bar{S}_1 = \sqrt{(\bar{I}_1 \cos x_k - \bar{I}_3 \sin x_k)^2 + (\bar{I}_3 \cos x_k + \bar{I}_1 \sin x_k)^2} \exp i\theta \tag{3.80}$$

où l'argument θ est donné par :

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{\bar{I}_3 \cos x_k + \bar{I}_1 \sin x_k}{\bar{I}_1 \cos x_k - \bar{I}_3 \sin x_k} \tag{3.81}$$

⁴Voir l'annexe B pour les détails de calcul.

De même pour \bar{S}_2 , on a :

$$\bar{S}_2 = \overline{\sum_{\nu} \frac{u_{\nu} v_{\nu}^3}{\rho_{\nu k}} \exp[-i(\varphi_{\nu k} + x_k)]} \quad (3.82)$$

compte tenu du fait que ⁵ :

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 \quad (3.83)$$

$$\bar{I}_3 = -\bar{I}_4 \quad (3.84)$$

\bar{S}_2 peut également s'écrire :

$$\bar{S}_2 = \sqrt{(\bar{I}_1 \cos x_k + \bar{I}_3 \sin x_k)^2 + (\bar{I}_1 \sin x_k - \bar{I}_3 \cos x_k)^2} \exp i\theta' \quad (3.85)$$

où l'argument θ' est donné par :

$$\text{tg } \theta' = \frac{\bar{I}_1 \sin x_k - \bar{I}_3 \cos x_k}{\bar{I}_1 \cos x_k + \bar{I}_3 \sin x_k} \quad (3.86)$$

Et finalement, sachant que $\bar{I}_6 = 0$, il vient :

$$\bar{S}_3 = \bar{I}_5 \exp(-2ix_k) \quad (3.87)$$

où \bar{I}_5 est donnée par l'expression⁵ :

$$\begin{aligned} \bar{I}_5 = \frac{\tilde{\Delta}^4}{8 \sin^2 x_k} \tilde{g} \left\{ -\cos x_k \frac{1}{\tilde{\Delta}^3} \arctan \left(\frac{b}{\tilde{\Delta} \cos x_k} \right) + \frac{1}{\tilde{\Delta}^3} \arctan \left(\frac{b}{\tilde{\Delta}} \right) \right. \\ \left. + \frac{b \sin^2 x_k}{\tilde{\Delta}^2 (b^2 + \tilde{\Delta}^2 \cos^2 x_k)} \right\} \quad (3.88) \end{aligned}$$

Remplaçons maintenant le trois sommes dans l'expression (3.43), il vient :

$$\bar{E}_{corr} = 2\bar{G}(n+1)\bar{C}_n^2 \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} (z_k - 1)^2 \overline{\prod_j (u_j^2 + z_k v_j^2)} \right\}$$

⁵Voir l'annexe B pour les détails de calcul.

$$\left[(\bar{I}_1^2 + \bar{I}_3^2) \exp i(\theta + \theta') - \bar{I}_5 \exp(-2ix_k) \right] + c.c \} \quad (3.89)$$

Sachant que :

$$(z_k - 1)^2 = -4 \sin^2 x_k \exp(2ix_k) \quad (3.90)$$

on obtient finalement :

$$\bar{E}_{corr} = 8\bar{G}(n+1)\bar{C}_n^2 \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k \bar{A} \exp i(\Omega - 2P)x_k \exp 2ix_k \sin^2 x_k \right. \\ \left. \left[(\bar{I}_1^2 + \bar{I}_3^2) \exp i(\theta + \theta') - \bar{I}_5 \exp(-2ix_k) \right] + c.c \right\} \quad (3.91)$$

Alors la partie réelle est :

$$\bar{E}_{corr} = -16\bar{G}(n+1)\bar{C}_n^2 \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k \sin^2 x_k \bar{A} \left\{ (\bar{I}_1^2 + \bar{I}_3^2) \cos \left[(\theta + \theta') + (\Omega - 2P + 2)x_k \right] \right. \\ \left. - \bar{I}_5 \cos [(\Omega - 2P)x_k] \right\} \quad (3.92)$$

D'où l'expression de l'énergie lissée :

$$\bar{E}_n = \overline{E_{BCS}} - 16\bar{G}(n+1)\bar{C}_n^2 \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k \sin^2 x_k \bar{A} \left\{ (\bar{I}_1^2 + \bar{I}_3^2) \cos \left[(\theta + \theta') + (\Omega - 2P + 2)x_k \right] \right. \\ \left. - \bar{I}_5 \cos [(\Omega - 2P)x_k] \right\} \quad (3.93)$$

3.4.3 Correction d'appariement

D'après la définition donnée ci-dessus, la correction d'appariement une fois l'énergie projetée est donnée par :

$$\delta E_{pn} = E_{pn} - \bar{E}_{pn} \quad (3.94)$$

où :

$$E_{pn} = E_n - E_n(0) = E_n - E_{BCS}(0) \quad (3.95)$$

et :

$$\bar{E}_{pn} = \bar{E}_n - \bar{E}_n(0) = \bar{E}_n - \bar{E}_{BCS}(0) \quad (3.96)$$

Compte tenu de la définition (3.41) de E_{corr} , on aura :

$$\delta E_{pn} = \delta E_p + (E_{corr} - \bar{E}_{corr}) \quad (3.97)$$

Chapitre 4

Résultats numériques et discussion

4.1 Le modèle schématique de Richardson

Afin de tester la validité des équations établies dans le chapitre précédent, nous les avons appliquées au modèle schématique de Richardson. Il s'agit d'un modèle simple consistant en un spectre discret de niveaux d'énergie équidistants doublement dégénérés. Il permet de simuler les noyaux déformés.

4.1.1 Convergence de la méthode SBCS

Nous nous sommes dans une première étape, assuré de la convergence de la méthode SBCS. Nous avons pour cela élaboré un code de calcul et évalué l'énergie projetée E_n de systèmes possédant 8, 16 et 32 particules en fonction du degré d'extraction n des fausses composantes.

Les tableaux 4.1 à 4.3, illustrent la variation de l'énergie SBCS en fonction du degré d'extraction des fausses composantes n . Nous avons reporté dans les mêmes tableaux les valeurs de l'écart type σ_N du nombre de particules. On constate une convergence rapide et parfaite des valeurs de E_n pour une précision de 10^{-4} . La convergence s'avère même parfois plus rapide que celle prévue théoriquement. En effet, d'après la relation (2.15), la convergence devait être atteinte dès que :

$$2(n + 1) > \max(P, \Omega - P) \tag{4.1}$$

Or :

- Dans le cas $N = 8$, la convergence est atteinte pour $n > 1$, aussi bien pour E_n que pour σ_N , ce qui rejoint la valeur théorique (ici $n_{\text{lim}}^{\text{th}} > 1$).
- Dans le cas $N = 16$, la convergence est atteinte pour $n > 2$ dans les deux cas, ce qui est légèrement plus rapide que la valeur théorique (ici $n_{\text{lim}}^{\text{th}} > 3$).
- Dans le cas $N = 32$, la convergence est atteinte pour $n > 3$ dans les deux cas, ce qui est nettement plus rapide que la valeur théorique (ici $n_{\text{lim}}^{\text{th}} > 7$).

De plus, on constate que la valeur de σ_N passe de la valeur 4,85 (respectivement 4,98 et 6,26) dans le cadre de la théorie BCS, à la valeur 0 après convergence. On voit bien qu'il y a une restauration stricte du nombre de particules en plus de la convergence rapide. Cela illustre la puissance de la méthode de projection.

TAB. 4.1 – Variation de l'énergie projetée du système et de la variance du nombre de particules projetée en fonction du degré d'extraction n des fausses composantes dans le cas $N=8$, $G=0,8$ MeV. L'énergie BCS dans ce cas est de : -2,374217 MeV.

n	$E_n(\text{MeV})$	σ_N
0	-2,436289	4,857867
1	-3,778036	0,169444
2	-3,825842	0,000000
3	-3,825842	0,000000
4	-3,825842	0,000000

TAB. 4.2 – Variation de l'énergie projetée du système et de la variance du nombre de particules projetée en fonction du degré d'extraction n des fausses composantes dans le cas $N=16$, $G=0,475$ MeV. L'énergie BCS dans ce cas est de : 5,061706 MeV.

n	$E_n(\text{MeV})$	σ_N
0	4,983983	4,983826
1	3,711022	0,363889
2	3,613740	0,001017
3	3,613476	0,000000
4	3,613476	0,000000

4.1.2 Correction d'appariement

Dans le but d'étudier l'influence de la non conservation du nombre de particules dans les états BCS sur l'énergie de corrélation d'appariement ; nous avons évalué cette dernière

TAB. 4.3 – Variation de l'énergie projetée du système et de la variance du nombre de particules projetée en fonction du degré d'extraction n des fausses composantes dans le cas $N=32$, $G=0,375$ MeV. L'énergie BCS dans ce cas est de : 29,830136 MeV.

n	$E_n(MeV)$	σ_N
0	29,788096	6,266275
1	28,181825	0,993959
2	27,889919	0,011051
3	27,886742	0,000022
4	27,886736	0,000000
5	27,886736	0,000000
6	27,886736	0,000000

dans les cas du modèle de Richardson : à 8, 16 et 32 particules. Les valeurs correspondantes sont reportées dans les tableaux 4.4 à 4.6.

TAB. 4.4 – Variation de la correction d'appariement en fonction du degré d'extraction n des fausses composantes dans le cadre de la projection dans le cas du modèle de Richardson : $N=8$, $G=0,8$ MeV. La valeur BCS est dans ce cas de -1,6 MeV.

n	$\delta E_{pn}(MeV)$	n	$\delta E_{pn}(MeV)$
0	-2,86144	15	-1,69907
1	-2,03337	16	-1,69710
2	-1,88729	17	-1,69535
3	-1,82477	18	-1,69377
4	-1,78972	19	-1,69235
5	-1,76726	20	-1,69106
6	-1,75163	21	-1,68989
7	1,74013	22	-1,68881
8	1,73131	23	-1,68782
9	1,71868	24	-1,68691
10	1,71400	25	-1,68607
11	1,71006	26	-1,68529
12	1,70671	27	-1,68456
13	1,70381	28	-1,68388
14	1,70129	29	-1,68325

Contrairement au cas de l'énergie projetée, on constate qu'il n'y a pas une convergence parfaite de la correction d'appariement dans les trois cas considérés. En effet, même en poussant le degré d'extraction des fausses composantes jusqu'à $n = 29$, la stabilité n'excède pas deux chiffres après la virgule dans chacun des cas. Même si on pousse jusqu'à $n = 1000$, la stabilité n'excède pas les quatre chiffres après la virgule, alors que la conver-

TAB. 4.5 – Même commentaire que le tableau 4 pour $N=16$, $G=0,475$ MeV, la correction d'appariement dans le cas de la théorie BCS est de : $-1,6$ MeV.

n	$\delta E_{pn}(MeV)$	n	$\delta E_{pn}(MeV)$
0	-2,31843	15	-0,91245
1	-0,99322	16	-0,91214
2	-0,94503	17	-0,91188
3	-0,93297	18	-0,91164
4	-0,92656	19	-0,91143
5	-0,92266	20	-0,91124
6	-0,92006	21	-0,91107
7	-0,91821	22	-0,91092
8	-0,91683	23	-0,91078
9	-0,91577	24	-0,91065
10	-0,91493	25	-0,91053
11	-0,91424	26	-0,91042
12	-0,91368	27	-0,91032
13	-0,91320	28	-0,91023
14	-0,91280	29	-0,91014

gence théorique, rappelons-le, correspond à $n > 1$, $n > 3$ et $n > 7$ pour : $N = 8, 16, 32$ respectivement.

Ce résultat peu satisfaisant peut s'expliquer par les deux facteurs suivants :

- Le procédé utilisé pour le lissage des expressions de la constante de normalisation (3.21) et de l'énergie (3.40) utilisé au chapitre précédent. Rappelons en effet que ces expressions contiennent des produits et nous avons été amenés à considérer leur logarithme népérien en vue de leur lissage (Voir paragraphe 3.4). Ce procédé n'est peut-être pas adéquat.

- Le fait d'utiliser la méthode de projection après variation qui est une approche de type PBCS moins rigoureuse que son homologue de type FBCS (variation après projection).

4.2 Le modèle réaliste de Woods-Saxon

Nous avons dans une seconde étape considéré des cas réalistes. Nous nous sommes basés pour cela sur les énergies et états propres d'un champ moyen déformé de Woods-

TAB. 4.6 – Même commentaire que le tableau 4 pour $N=32$, $G=0,375$ MeV. Cette correction est de $-1,6$ MeV dans le cas de la théorie BCS.

n	$\delta E_{pn}(MeV)$	n	$\delta E_{pn}(MeV)$
0	-2,74849	15	-1,31837
1	-1,53799	16	-1,31833
2	-1,32616	17	-1,31830
3	-1,32173	18	-1,31827
4	-1,32061	19	-1,31824
5	-1,31995	20	-1,31822
6	-1,31952	21	-1,31820
7	-1,31922	22	-1,31818
8	-1,31901	23	-1,31816
9	-1,31885	24	-1,31814
10	-1,31872	25	-1,31813
11	-1,31862	26	-1,31812
12	-1,31854	27	-1,31810
13	-1,31848	28	-1,31809
14	-1,31842	29	-1,31808

Saxon [46].

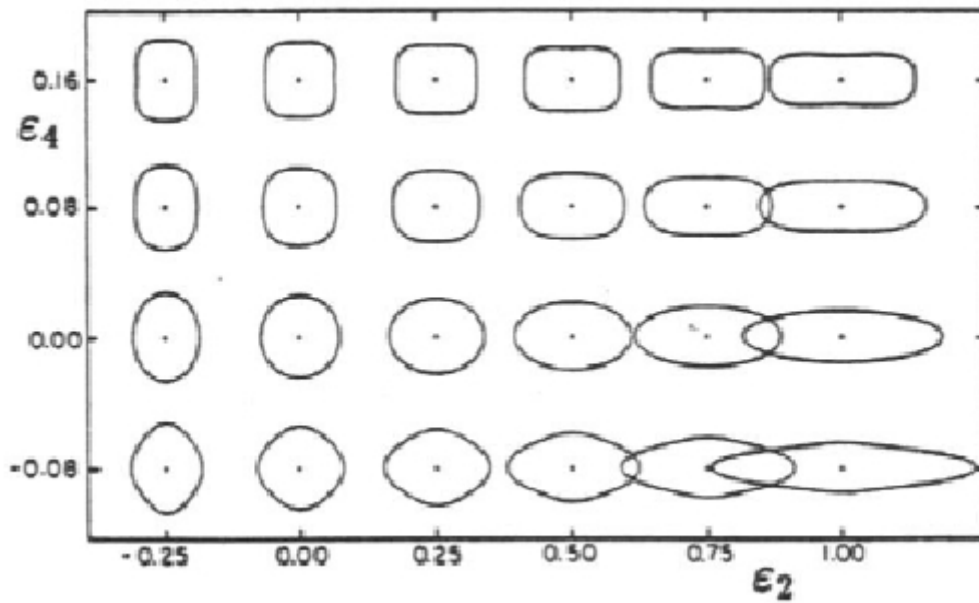
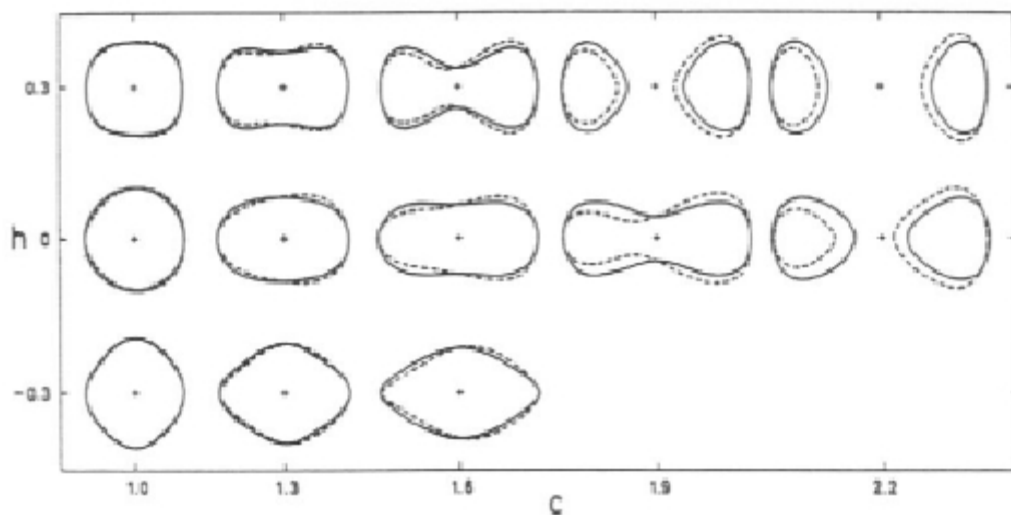
Nous avons dans ce qui suit considéré quatre noyaux représentatifs de la région des actinides à savoir ^{226}Ra , ^{230}Th , ^{238}U et ^{240}Pu .

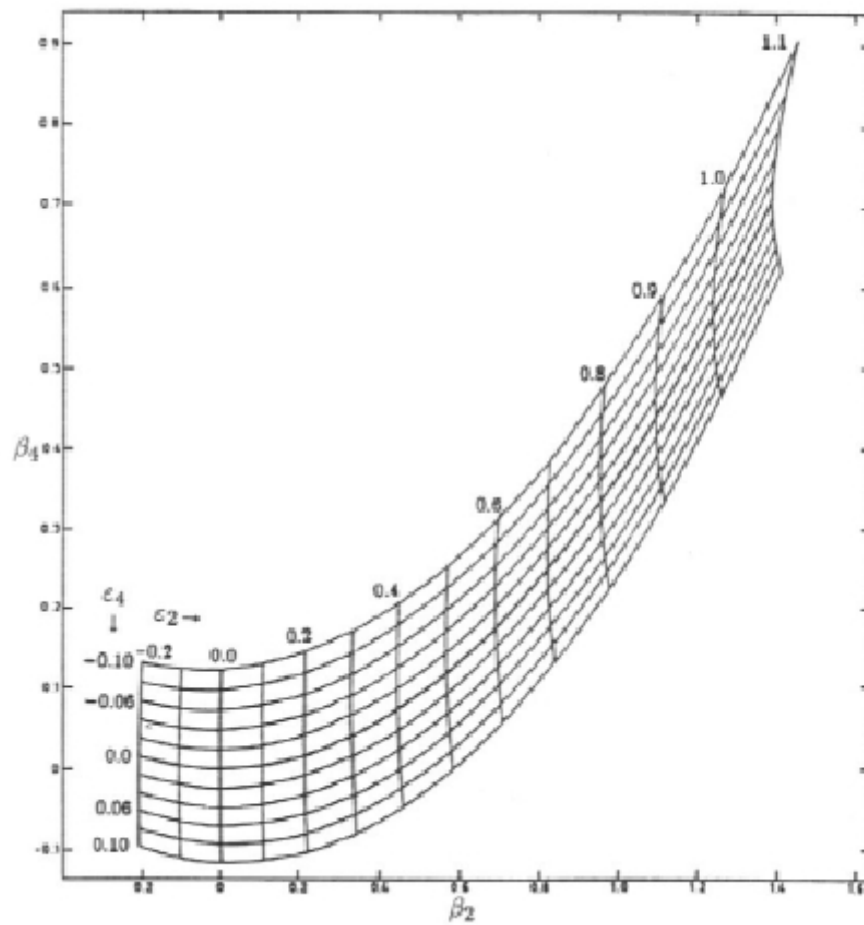
4.2.1 Paramétrisation de la surface nucléaire

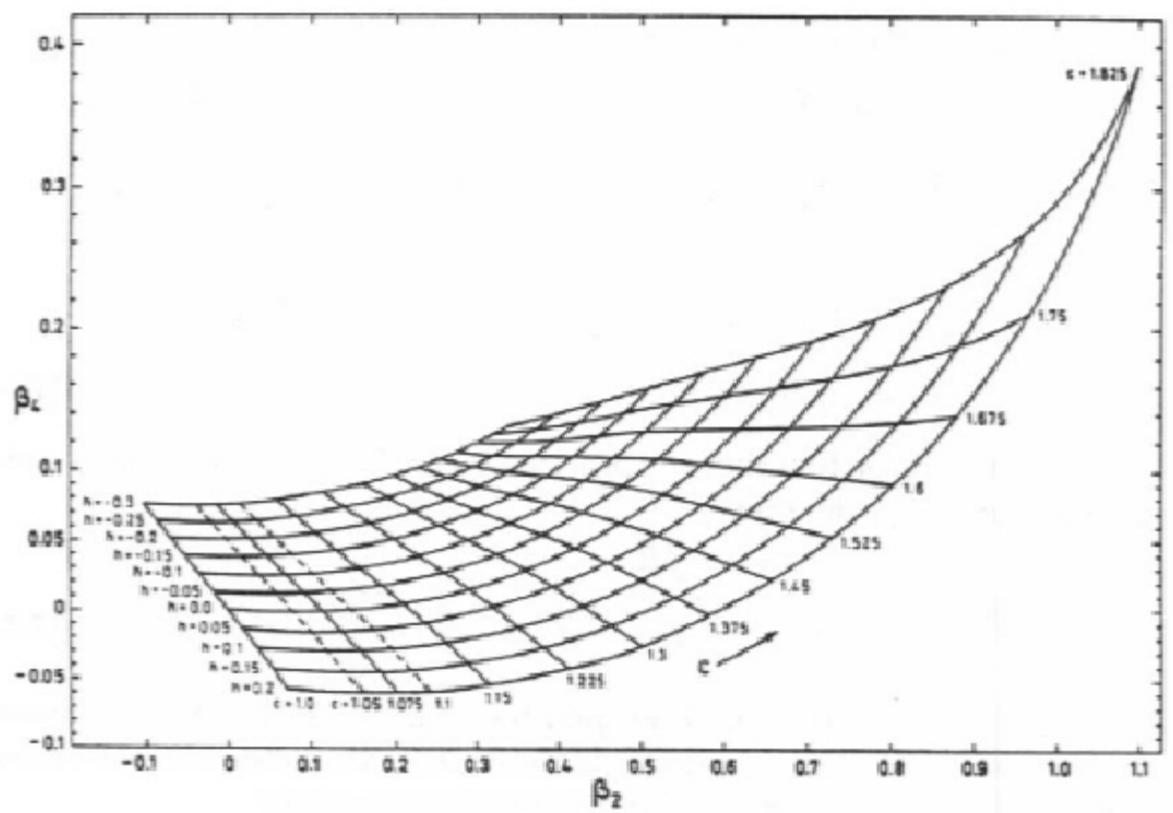
Il existe diverses méthodes pour la paramétrisation de la surface nucléaire permettant de décrire les déformations nucléaires. Citons entre autres, celles de Nilsson ($\varepsilon_2, \varepsilon_4$) [48], de Liers-Reiley (β_2, β_4) [45] et la paramétrisation de Funny Hills [49] (c, h, α). Les figures (4.1) et (4.2) illustrent les différentes formes qu'il est possible de décrire dans les paramétrisation ($\varepsilon_2, \varepsilon_4$) et (c, h, α) respectivement. La conversion des valeurs d'une paramétrisation à une autre est réalisable, soit à partir des abaques illustrées dans les figures (4.3) et (4.4), soit à partir des relations analytiques comme le système ci-dessous [45] :

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = 0,944\beta_2 - 0,122\beta_2^2 + 0,154\beta_2\beta_4 - 0,199\beta_4^2 \\ \varepsilon_4 = -0,852\beta_4 + 0,141\beta_4^2 + 0,122\beta_2\beta_4 + 0,295\beta_2 \end{cases} \quad (4.2)$$

ou encore les relations données dans la référence [45].

FIG. 4-1 – Les formes de la paramétrisation $(\varepsilon_2, \varepsilon_4)$ [43]FIG. 4-2 – Quelques formes dans la paramétrisation (c, h, α) . La ligne continue correspond aux formes symétriques ($\alpha = 0$), la ligne en pointillé correspond aux formes asymétriques ($\alpha = 0.2$) [43].

FIG. 4-3 – Relation entre les coordonnées (ϵ_2, ϵ_4) et (β_2, β_4) [43].

FIG. 4-4 – Relation entre les paramètres (β_2, β_4) et (c, h) . [43]

Dans le présent travail, nous utiliserons la paramétrisation (c, h, α) . En effet, nous supposons dans tout ce qui suit que le noyau possède une symétrie axiale, ce qui permet l'utilisation des coordonnées cylindriques.

Considérons un noyau de rayon R_0 . Introduisons les coordonnées cylindriques réduites :

$$\begin{cases} r = cR_0v \\ z = cR_0(u - \bar{u}) \end{cases} \quad (4.3)$$

où \bar{u} est la position du centre de masse de la forme considérée, de façon à ce qu'elle soit confondue avec l'origine du système de coordonnées.

L'équation de la surface nucléaire est donnée par :

$$\pi(\beta, u, v) = 0 \quad (4.4)$$

où β est l'ensemble des paramètres décrivant la déformation.

Il a été démontré que la forme polynômiale simple suivante décrit assez bien la forme de la surface nucléaire [49] :

$$\pi(u, v) = v^2 - (1 - u^2)(A + \alpha u + Bu^2 - BTu^4) \quad (4.5)$$

où α est le paramètre qui décrit l'asymétrie gauche-droite.

A et B sont des paramètres entièrement déterminés par la condition de conservation du volume (voir ci-après).

T est une constante qui permet de décrire les formes diamant. En effet, pour les formes diamant, $T = 1$ et pour les formes étranglées et séparées, $T = 0$.

Physiquement, les modes de déformation du noyau les plus importants sont l'élongation et l'étranglement. L'élongation du noyau est décrite par le facteur de normalisation du volume c défini à partir de la condition de conservation du volume nucléaire, soit :

$$c^{-3} = \int_{u_1}^{u_2} \frac{4}{3} v_s^2(u) du \quad (4.6)$$

où $v_s^2(u)$ est déterminé implicitement à partir de l'équation (4.5), et u_1, u_2 sont les deux

points extrêmes où $v_s^2(u)$ s'annule.

L'expression de c devient alors, relativement aux trois formes de la surface nucléaire :

$$\text{Forme diamant : } B < 0, T = 1 \quad (4.7)$$

$$c^{-3} = A + \frac{4}{35}B$$

$$\text{Formes étranglées : } B \geq 0, T = 0 \quad (4.8)$$

$$c^{-3} = A + \frac{B}{5}$$

$$\text{Formes séparées :} \quad (4.9)$$

$$c^{-3} = \frac{3}{4} [F(u_1) - F(u_2)] + A + \frac{B}{5} \quad (4.10)$$

où :

$$F(u) = \int v_s^2(u) du = Au + \frac{\alpha}{4}u^2 + \frac{B-A}{3}u^3 - \frac{\alpha}{4}u^4 - \frac{B}{5}u^5 \quad (4.11)$$

Pour l'étranglement, on définit un second paramètre, h , qui est déterminé à partir de l'une des conditions suivantes :

$$\begin{cases} B = \frac{1}{2}(c-1) + 2h \\ A = c^{-3} - \frac{1}{10}(c-1) - \frac{2}{5}h \end{cases} \quad (4.12)$$

Les valeurs des paramètres (c, h, α) correspondant à l'état fondamental des différents noyaux considérés dans le présent travail sont regroupées dans le tableau 4.7.

4.2.2 Choix des constantes d'appariement

Concernant les constantes d'appariement G_n et G_p , nous les avons déterminées à partir des différences de masses pair-impair à l'état fondamental définies par les expressions [26] :

$$\begin{cases} \Delta^{\text{exp}} = -\frac{1}{8} [M(Z+2, N) - 4M(Z+1, N) + 6M(Z, N) - 4M(Z-1, N) + M(Z-2, N)] \\ \Delta^{\text{exp}} = -\frac{1}{8} [M(N+2, Z) - 4M(N+1, Z) + 6M(N, Z) - 4M(N-1, Z) + M(N-2, Z)] \end{cases}$$

où M est la masse expérimentale. Nous avons dans le présent travail utilisé des valeurs tabulées dans la référence [44].

Les valeurs des constantes d'appariement et des demi-largeurs du gap correspondant aux différents noyaux considérés sont données dans le tableau 4.8.

TAB. 4.7 – Valeurs des paramètres c et h correspondant à l'état fondamental. On considère la symétrie gauche-droite (..... = 0).

	c	h
^{226}Ra	1,149	-0,293
^{230}Th	1,175	-0,293
^{238}U	1,137	0,119
^{240}Pu	1,143	0,099

TAB. 4.8 – Valeurs des constantes d'appariement et des demi-largeurs du gap des systèmes neutrons et protons pour les différents noyaux considérés dans le présent travail .

	G_n	G_p	Δ_n	Δ_p
^{226}Ra	0,1034	0,1014	0,8638	0,9523
^{230}Th	0,5133	0,0639	0,7765	0,9629
^{238}U	0,4774	0,0627	0,6059	0,9397
^{240}Pu	0,0475	0,0602	0,5673	0,7673

4.2.3 Correction d'appariement

Nous avons ensuite évalué la correction d'appariement pour les systèmes neutrons et protons du noyau ^{226}Ra choisi à titre d'exemple. Les valeurs correspondantes sont reportées dans le tableau 4.9. Comme on le constate clairement, il n'y a aucun signe de convergence. Les résultats sont dans ce cas, encore plus décevants que dans le cas du modèle schématisé de Richardson.

Il est donc clair que l'expression établie au chapitre précédent n'est pas appropriée pour le calcul de la correction d'appariement.

TAB. 4.9 – Variation de la correction d'appariement en fonction du degré d'extraction n des fausses composantes dans le cas des systèmes neutrons et protons du Ra.

<i>Neutrons</i>				<i>Protons</i>			
n	δE_n	n	δE_n	n	δE_n	n	δE_n
0	-38,166	15	-42,618	0	-21,899	15	-26,281
1	-37,731	16	4855,059	1	-21,459	16	4910,834
2	-40,640	17	-7741,426	2	-24,333	17	-8106,680
3	-43,785	18	-37,898	3	-27,447	18	-21,623
4	-37,977	19	3285,968	4	-21,704	19	3324,228
5	-43,012	20	5642,334	5	-26,682	20	5993,052
6	-155,450	21	15225,652	6	-141,785	21	15343,318
7	-42,859	22	-46,495	7	-26,527	22	-30,111
8	11198,017	23	-42,535	8	10961,279	23	-26,196
9	14686,514	24	2752,223	9	14184,731	24	2783,174
10	4791,462	25	4003,990	10	4841,534	25	4045,774
11	-42,700	26	5666,450	11	-26,364	26	5713,906
12	-112,692	27	9219,962	12	-97,770	27	9263,353
13	-726,115	28	38335,031	13	-735,109	28	37816,403
14	-17290,568	29	-2413,241	14	-18777,599	29	-2469,221

4.2.4 Influence des fluctuations du nombre de particules sur l'énergie du système

Le test numérique sur la correction d'appariement dans le cadre des modèles de Richardson et de Woods-Saxon s'étant avéré peu satisfaisant, nous nous sommes contentés dans ce qui suit d'étudier la variation de l'énergie du système en fonction de la déformation. Nous avons en effet jugé que cela était équivalent à l'étude de l'énergie de corrélation d'appariement E_p puisque l'énergie correspondant à $\Delta = 0$ (voir l'équation (3.2)) est la même dans le cadre des deux approches (BCS et SBCS).

Les figures 4.5, 4.7, 4.9 et 4.11 représentent les variations des énergies BCS (E_{BCS}) et SBCS (E_n) en fonction du paramètre h , pour des valeurs de c fixées ($c = 1, 1,2$ et $1,4$) dans le cas des 4 noyaux précédemment cités.

On constate, dans chacun des cas, que les deux courbes ont une allure identique et

que l'écart entre elles est constant. Ceci signifie que la valeur du terme E_{corr} donné par l'expression (3.41) ne varie pas en fonction de h , pour une valeur de c donnée (voir tableau 4.10).

Les figures 4.6, 4.8, 4.10 et 4.12 représentent les variations des énergies BCS et SBCS en fonction du paramètre c , pour des valeurs de h fixées ($h=0, 0,1$ et $0,2$) dans le cas des mêmes noyaux que précédemment. On constate, là encore, que dans chacun des cas les deux courbes sont d'allures identiques et l'écart entre elles est constant. Ceci signifie que E_{corr} ne varie pas en fonction de c pour une valeur de h fixée.

Les valeurs de E_{corr} correspondant aux différents noyaux étudiés sont reportées dans le tableau (4.10).

TAB. 4.10 – Valeurs de la correction apportée par la projection aux valeurs de l'énergie des différents noyaux.

Noyau	E_{corr} (MeV)
^{226}Ra	11,3
^{230}Th	2,8
^{238}U	30
^{240}Pu	2

Il ressort de l'ensemble des résultats présentés que la projection modifie la valeur de l'énergie, mais pas l'allure des courbes. Il en résulte que la projection n'affecte pas la position des minima dans la courbe de l'énergie de déformation totale et donc la valeur des paramètres d'équilibre.

En effet, la déformation d'équilibre est obtenue en minimisant l'énergie de déformation définie dans le modèle macroscopique - microscopique par l'expression :

$$E_{déf} = E_{macro} + \delta E_{shell} + \delta E_{np} \quad (4.13)$$

où E_{macro} représente la partie macroscopique de l'énergie et δE_{shell} et δE_p représentent respectivement les corrections de couches et d'appariement.

On évalue pour cela $E_{déf}$ pour un ensemble de valeurs de h (respectivement c) pour une valeur de c (respectivement h) fixée et on ne retient que la valeur minimale pour tracer la courbe. Dans le présent travail, la seule partie de $E_{déf}$ qui puisse être modifiée

par l'utilisation de la méthode de projection est bien entendu δE_p . Du fait que l'allure de δE_p en fonction de c et h n'est pas modifiée par la projection, la position des minima dans les courbes de E_{def} en fonction de c ou h ne sera pas modifiée.

Nous pouvons donc en conclure que la valeur des paramètres de déformation d'équilibre ne sera pas affectée par l'utilisation de la méthode de projection et les valeurs établies dans le cadre de la théorie BCS sont utilisables dans le cadre de la projection.

Lavin, Delgado et Capote [50] ont abouti à des conclusions similaires en comparant l'énergie de déformation BCS et celle de la méthode de Lipkin-Nogami. Les résultats du présent travail concordent également avec ceux de Benhamouda et al. [47] dans le cadre de la méthode FSBCS, de projection avant variation.

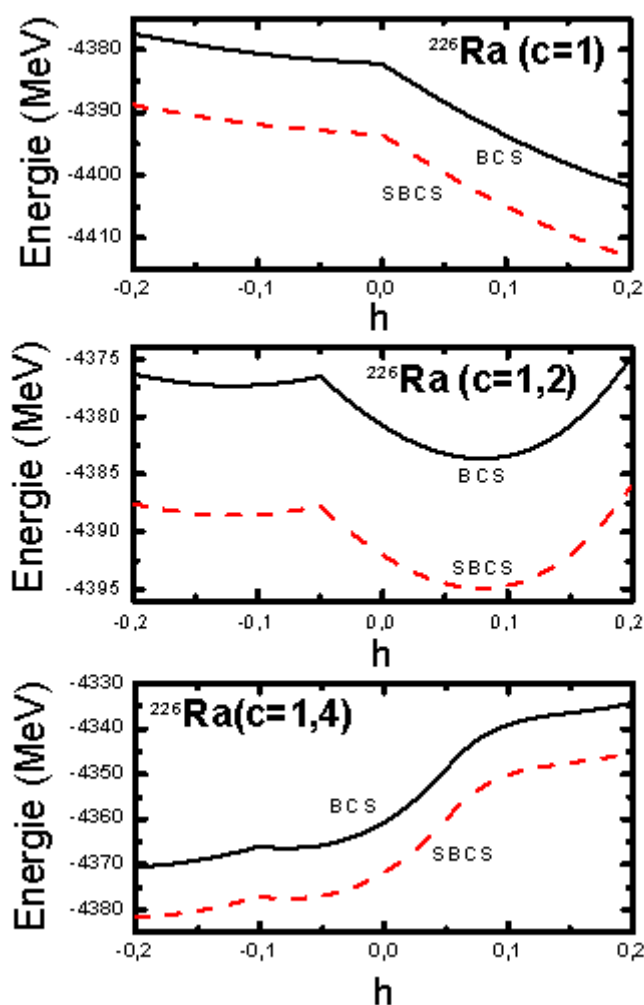


FIG. 4-5 – Variation de l'énergie du système dans les deux approches BCS (ligne continue) et SBCS (pointillés) en fonction du paramètre h pour des valeurs de c fixées dans le cas du noyau ^{226}Ra . La différence entre les deux énergies est constante quelle que soit la valeur de c considérée (l'utilisation d'échelles différentes pour les trois valeurs de c peut laisser croire le contraire).

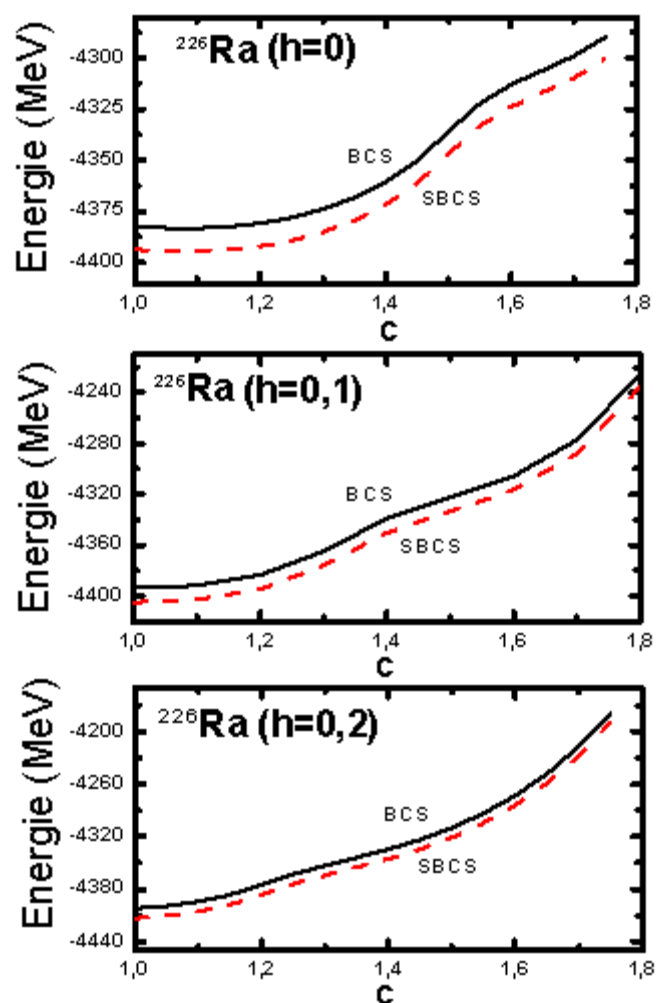
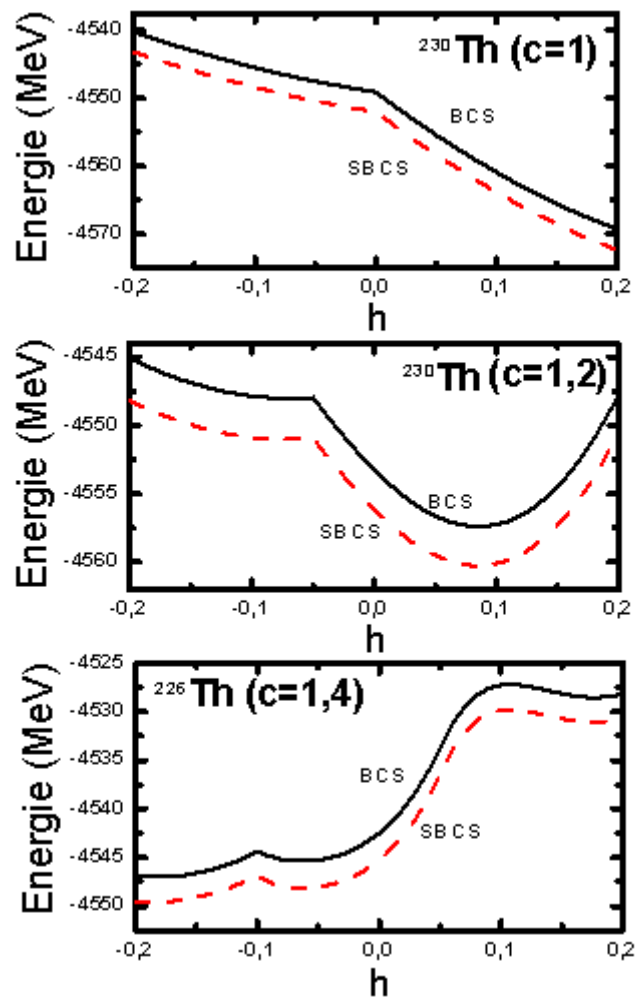
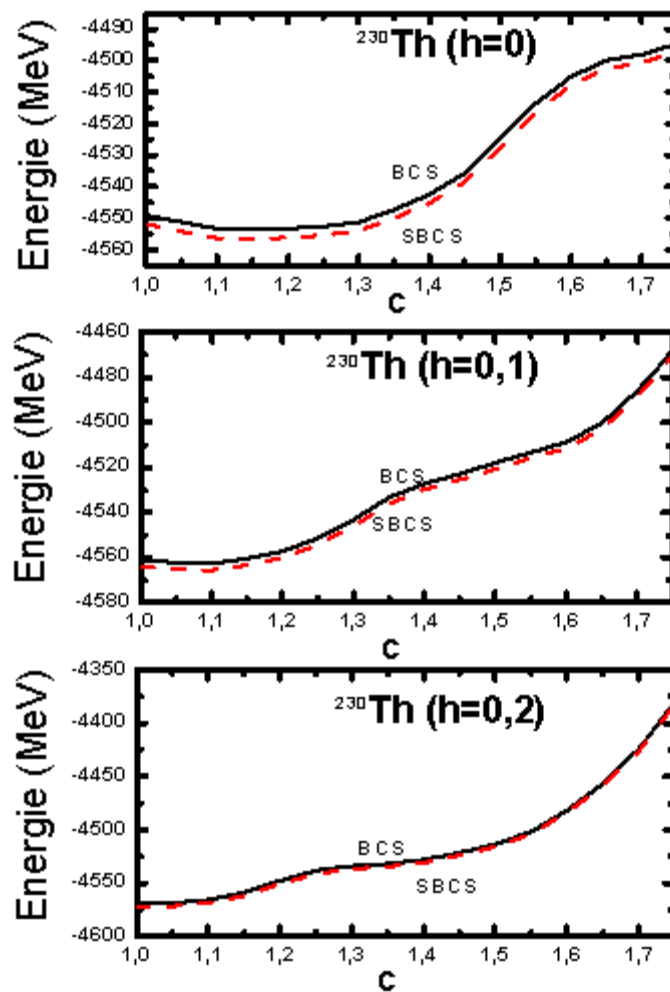
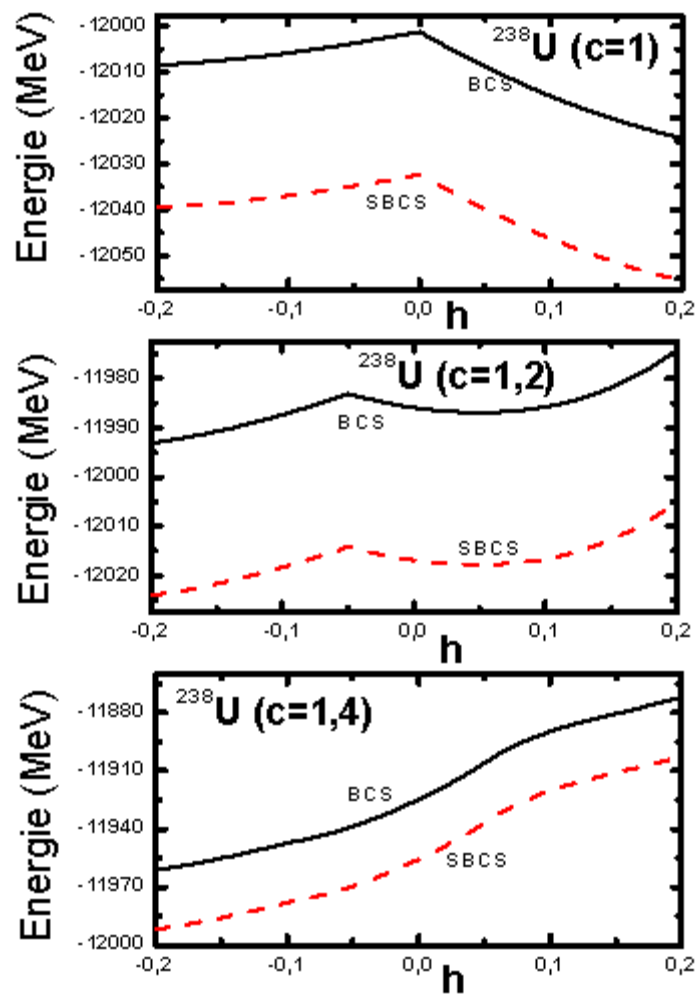
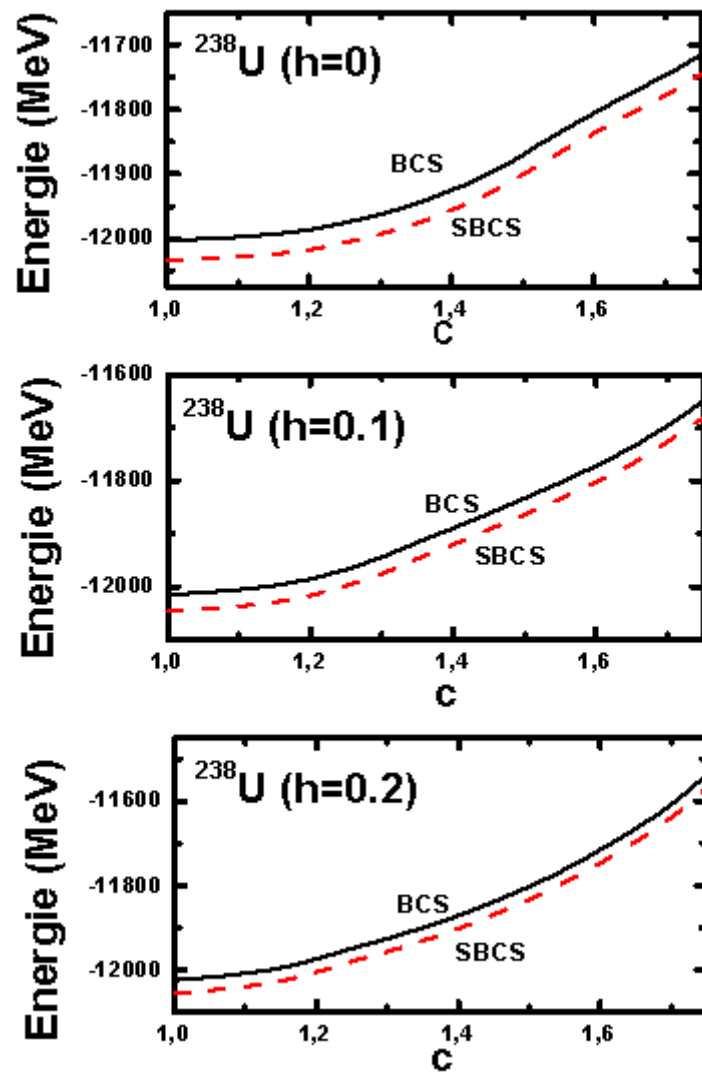


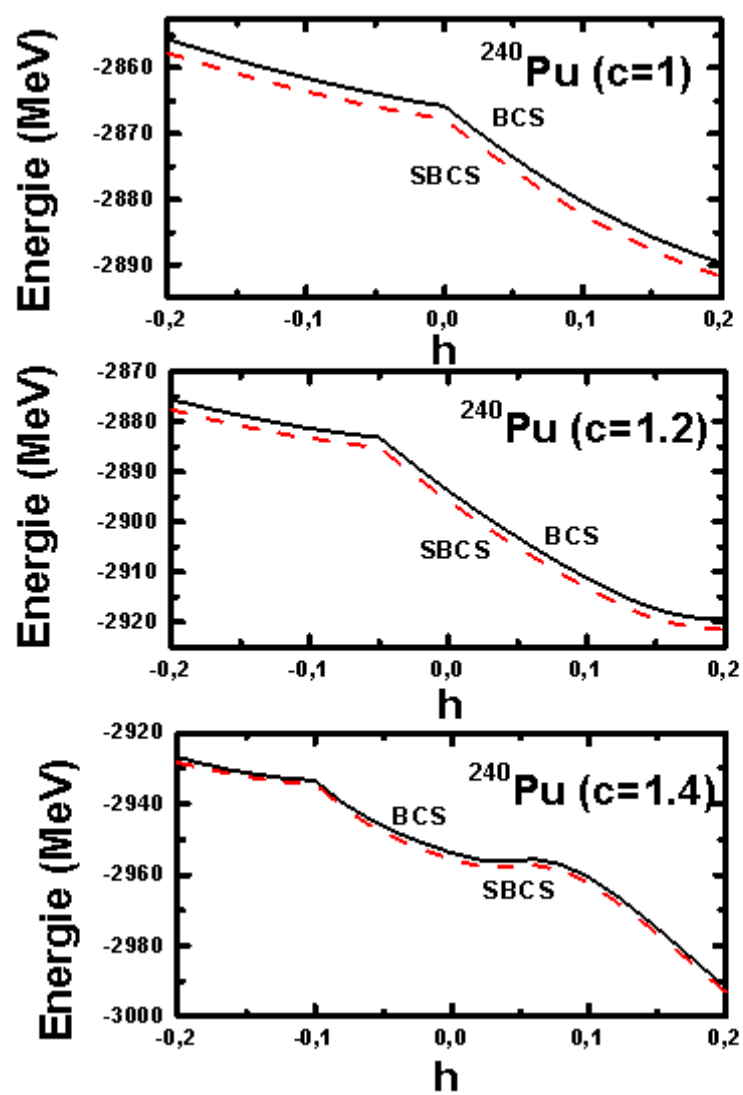
FIG. 4-6 – Variation de l'énergie du système dans les deux approches BCS (ligne continue) et SBCS (pointillés) en fonction du paramètre c pour des valeurs de h fixées dans le cas du noyau ^{226}Ra . La différence entre les deux énergies est constante quelle que soit la valeur de h considérée (l'utilisation d'échelles différentes pour les trois valeurs de h peut laisser croire le contraire).

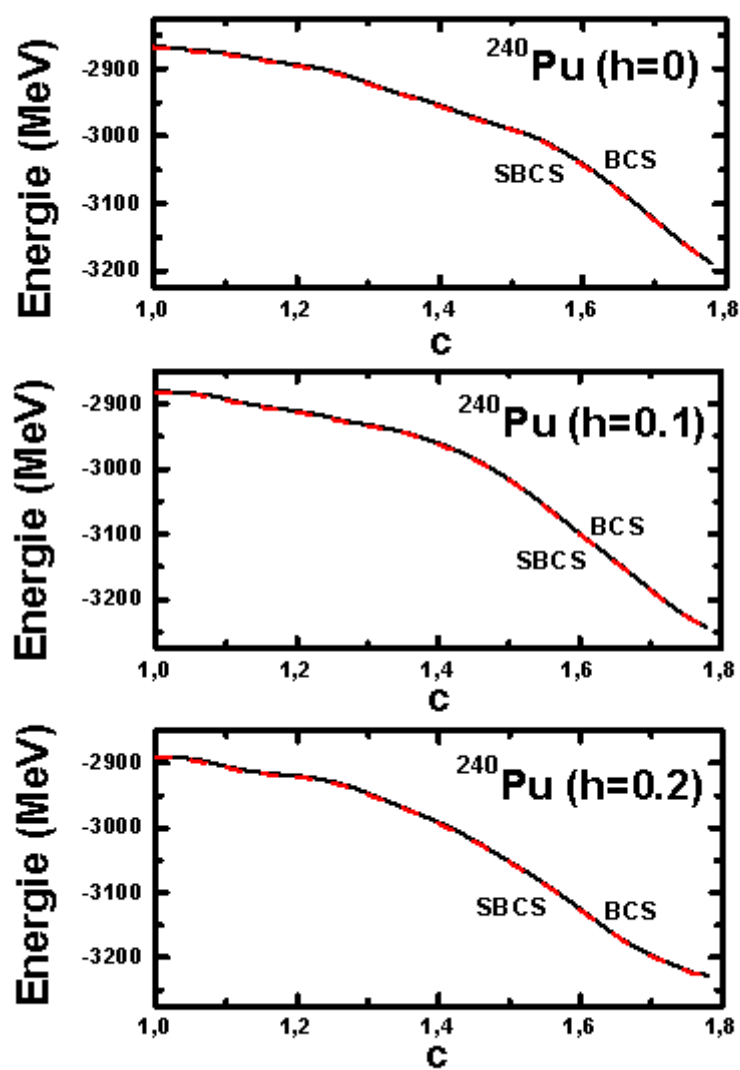
FIG. 4-7 – Même commentaire que la figure 4.5 dans le cas du noyau ^{230}Th .

FIG. 4-8 – Même commentaire que la figure 4.6 dans le cas du noyau ^{230}Th .

FIG. 4-9 – Même commentaire que la figure 4.5 dans le cas du noyau ^{238}U .

FIG. 4-10 – Même commentaire que la figure 4.6 dans le cas du noyau ^{238}U .

FIG. 4-11 – Même commentaire que la figure 4.5 dans le cas du noyau ^{240}Pu .

FIG. 4-12 – Même commentaire que la figure 4.6 dans le cas du noyau ^{240}Pu .

Conclusion

Dans le présent travail, nous avons étudié l'effet des fluctuations du nombre de particules dans la théorie BCS sur l'énergie de déformation nucléaire évaluée dans le cadre d'une approche macroscopique-microscopique. Notre objectif était de déterminer si les valeurs des paramètres de déformation d'équilibre étaient affectées ou non par l'utilisation d'une méthode de projection dans l'espace nombre d'occupation, au lieu de la méthode BCS habituelle. Nous nous sommes basés pour cela sur la méthode discrète Sharp-BCS (SBCS) de projection après variation.

Dans cette dernière, la fonction d'onde est la limite d'une suite d'états convergeant rapidement en fonction du degré d'extraction n des fausses composantes.

En nous basant sur le lissage de l'énergie projetée du système, nous avons établi une nouvelle expression de la correction d'appariement, δE_{pn} , qui est la limite d'une suite théoriquement convergeante en fonction de n . Nous avons ensuite élaboré notre propre code de calcul qui nous a permis d'appliquer cette expression dans le cadre de deux modèles : le modèle schématique de Richardson, habituellement utilisé comme test, et le modèle réaliste de Woods-Saxon.

Dans les deux cas, les résultats se sont avérés décevants : on note l'absence de convergence de δE_{pn} en fonction de n . Ceci pourrait être dû, soit au procédé de lissage utilisé, soit au fait d'utiliser une méthode de projection après variation (de type PBCS) qui est moins rigoureuse qu'une projection avant variation (de type FBCS).

Nous nous sommes alors contentés de comparer l'évolution de l'énergie du système, évaluée dans les deux approches : BCS et SBCS, en fonction des paramètres de déformation. Il s'avère alors que l'écart entre les énergies est pratiquement constant quelle que soit la valeur des paramètres de déformation.

On peut donc en conclure que si la projection modifie la valeur de l'énergie, elle ne modifie pas la position des minima de l'énergie de déformation et donc la valeur des paramètres d'équilibre. Les valeurs de ces derniers, tabulées dans la littérature et évaluées dans le cadre de la théorie BCS sont donc utilisables dans le cadre de la méthode de projection.

Des travaux antérieurs parviennent à des conclusions similaires dans le cadre des méthodes de Lipkin-Nogami et FSBCS.

Notons finalement qu'une amélioration de nos résultats pourrait être obtenue soit en effectuant une projection avant variation, soit en procédant au lissage de l'énergie du système avant sa discrétisation dans le cadre de la méthode de projection.

Annexes

Annexe A

Écriture de l'hamiltonien en représentation quasi particule

Soit l'hamiltonien donné par l'équation (1.33).

Appliquons la transformation (1.17) sur les différents opérateurs et en appliquant le théorème de Wick on aura alors :

$$a_\nu^+ a_\nu = u_\nu^2 \alpha_\nu^+ \alpha_\nu + u_\nu v_\nu \alpha_\nu^+ \alpha_\nu^+ + u_\nu v_\nu \alpha_\nu \alpha_\nu - v_\nu^2 \alpha_\nu \alpha_\nu \quad (\text{A.1})$$

cela correspond au premier terme de l'hamiltonien.

Prenons maintenant le terme correspondant à la deuxième partie de l'hamiltonien, soit :

$$\begin{aligned} a_\nu^+ a_\nu^+ a_{\bar{\mu}} a_\mu &= a_\nu^+ a_\nu^+ a_{\bar{\mu}} a_\mu + a_\nu^+ a_\mu a_\nu^+ a_{\bar{\mu}} - a_\nu^+ a_{\bar{\mu}} a_\nu^+ a_\mu + a_\nu^+ a_\nu^+ : a_{\bar{\mu}} a_\mu : + a_{\bar{\mu}} a_\mu : a_\nu^+ a_\nu^+ : + \\ & a_\nu^+ a_\mu : a_\nu^+ a_{\bar{\mu}} : + a_\nu^+ a_{\bar{\mu}} : a_\nu^+ a_\mu : - a_\nu^+ a_{\bar{\mu}} : a_\nu^+ a_\mu : - a_\nu^+ a_\mu : a_\nu^+ a_{\bar{\mu}} : + : a_\nu^+ a_\nu^+ a_{\bar{\mu}} a_\mu : \end{aligned}$$

Les contractions s'écrivent successivement :

$$a_i^+ a_j = v_i^2 \delta_{ij} \quad (\text{A.2})$$

$$a_i a_j = u_i v_i \delta_{ij} \quad (\text{A.3})$$

$$a_i^+ a_j^+ = u_i v_i \delta_{ij} \quad (\text{A.4})$$

où i et j sont quelconques.

Les produits normaux, sont donnés par :

$$: a_i^+ a_j := u_j v_j \alpha_i^+ \alpha_j + u_i v_j \alpha_i^+ \alpha_j^+ + v_i u_j \alpha_i \alpha_j - v_i v_j \alpha_i^+ \alpha_j \quad (\text{A.5})$$

$$: a_i^+ a_j^+ := u_i u_j \alpha_i^+ \alpha_j^+ + u_i v_j \alpha_i^+ \alpha_j - u_j v_i \alpha_j^+ \alpha_i + v_i v_j \alpha_i \alpha_j^+ \quad (\text{A.6})$$

$$: a_i a_j := u_i u_j \alpha_i \alpha_j - u_i v_j \alpha_i^+ \alpha_j + u_j v_i \alpha_i^+ \alpha_j + v_j v_i \alpha_i^+ \alpha_j^+ \quad (\text{A.7})$$

De plus, le produit normal de quatre opérateurs s'écrit :

$$\begin{aligned} : a_i^+ a_j^+ a_i a_j := & (u_i^2 v_j^2 + v_i^2 u_j^2) \alpha_i^+ \alpha_i^+ \alpha_j \alpha_j + u_i v_i u_j v_j (a_i^+ a_j^+ \alpha_j \alpha_i + \alpha_i^+ \alpha_j^+ \alpha_j \alpha_i + 2\alpha_i^+ \alpha_j^+ \alpha_j \alpha_i) + \\ & u_j v_i (u_i^2 - v_i^2) \left(\alpha_i^+ \alpha_i^+ \alpha_j^+ \alpha_j + \alpha_i^+ \alpha_i^+ \alpha_j^+ \alpha_j + \alpha_j^+ \alpha_j \alpha_i \alpha_i + a_j^+ \alpha_j \alpha_i \alpha_i \right) - \\ & \frac{1}{2} (u_i^2 v_j^2 + u_j^2 v_i^2) (\alpha_i^+ \alpha_i^+ \alpha_j^+ \alpha_j^+ + \alpha_j \alpha_j \alpha_i \alpha_i) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

où i, j sont quelconques.

En remplaçant dans l'Hamiltonien, on trouve :

$$H' = E_0 + H_{11} + H_{20} + H_{22} + H_{31} + H_{40} \quad (\text{A.9})$$

où $E_0, H_{11}, H_{20}, H_{22}, H_{31}$ et H_{40} sont donnés respectivement par les expressions (1.35), (1.36), (1.37), (1.38), (1.39) et (1.40).

Annexe B

Lissage des quantités I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 et I_6 :

Considérons les sommes suivantes :

$$I_1 = \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^3 v_{\nu} \cos \varphi_{\nu k}}{\rho_{\nu k}} \quad (\text{B.1})$$

$$I_2 = \sum_{\mu} \frac{u_{\mu} v_{\mu}^3 \cos \varphi_{\mu k}}{\rho_{\nu k}} \quad (\text{B.2})$$

$$I_3 = \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^3 v_{\nu} \sin \varphi_{\nu k}}{\rho_{\nu k}} \quad (\text{B.3})$$

$$I_4 = \sum_{\mu} \frac{u_{\mu} v_{\mu}^3 \sin \varphi_{\mu k}}{\rho_{\nu k}} \quad (\text{B.4})$$

$$I_5 = \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^4 v_{\nu}^4 \cos 2\varphi_{\nu k}}{\rho_{\nu k}^2} \quad (\text{B.5})$$

$$I_6 = \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^4 v_{\nu}^4 \sin 2\varphi_{\nu k}}{\rho_{\nu k}^2} \quad (\text{B.6})$$

1) Somme I_1 :

Sachant que :

$$\rho_{\nu k} = (1 - 4u_{\nu}^2 v_{\nu}^2 \sin^2 x_k)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.7})$$

il vient compte tenu de (3.23) :

$$\rho_{\nu k} = \left(\frac{y_\nu^2 + \Delta^2 \cos^2 x_k}{y_\nu^2 + \Delta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.8})$$

d'autre part, on a :

$$u_\nu^3 v_\nu = \frac{\Delta}{4} \left(\frac{\sqrt{y_\nu^2 + \Delta^2} + y_\nu}{y_\nu^2 + \Delta^2} \right) \quad (\text{B.9})$$

et :

$$\cos \varphi_{\nu k} = \cos [\arctan [(v_\nu^2 - u_\nu^2) \tan x_k]] \quad (\text{B.10})$$

$$= \frac{\sqrt{y_\nu^2 + \Delta^2} |\cos x_k|}{\sqrt{y_\nu^2 + \cos^2 x_k \Delta^2}} = \frac{\sqrt{y_\nu^2 + \Delta^2} \cos x_k}{\sqrt{y_\nu^2 + \cos^2 x_k \Delta^2}} \quad (\text{B.11})$$

puisque :

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (\text{B.12})$$

et que :

$$0 < x_k < \frac{\pi}{2} \quad \text{d'où : } \cos x_k > 0 \quad (\text{B.13})$$

La somme I_1 devient alors :

$$I_1 = \frac{\Delta}{4} \cos x_k \sum_\nu \frac{\sqrt{y_\nu^2 + \Delta^2} + y_\nu}{y_\nu^2 + \Delta^2 \cos^2 x_k} \quad (\text{B.14})$$

En passant à la sommation continue, l'expression de I_1 lissée s'écrit :

$$\bar{I}_1 = \frac{\tilde{\Delta} \tilde{g}}{4} \int_{-b}^b \frac{\sqrt{y^2 + \tilde{\Delta}^2} + y}{y^2 + \cos x_k \tilde{\Delta}^2} dy \quad (\text{B.15})$$

$$= \frac{\tilde{\Delta} \tilde{g}}{2} \cos x_k \int_0^b \frac{\sqrt{y^2 + \tilde{\Delta}^2}}{y^2 + \cos^2 x_k \tilde{\Delta}^2} dy \quad (\text{B.16})$$

$$= \frac{\tilde{\Delta} \tilde{g}}{2} |\cos x_k| \left[tg x_k \arctan \left(\frac{b |tg x_k|}{\sqrt{b^2 + \tilde{\Delta}^2}} \right) + \cos x_k \ln \left(\frac{\sqrt{b^2 + \tilde{\Delta}^2} + b}{\tilde{\Delta}} \right) \right] \quad (\text{B.17})$$

Sachant que :

$$0 < x_k < \frac{\pi}{2} \quad \text{et donc : } tg x_k > 0 \quad \text{et } \sin x_k > 0$$

on aura alors :

$$\bar{I}_1 = \frac{\tilde{\Delta}\tilde{g}}{2} \left[\sin x_k \arctan \left(\frac{btgx_k}{\sqrt{b^2 + \tilde{\Delta}^2}} \right) + \cos x_k \ln \left(\frac{\sqrt{b^2 + \tilde{\Delta}^2} + b}{\tilde{\Delta}} \right) \right] \quad (\text{B.18})$$

2) Somme I_2 :

Sachant que :

$$u_\nu v_\nu^3 = \frac{\tilde{\Delta}}{4} \frac{\sqrt{y_\nu^2 + \tilde{\Delta}^2} - y_\nu}{y_\nu^2 + \Delta^2} \quad (\text{B.19})$$

il vient :

$$I_2 = \frac{\Delta}{4} \cos x_k \sum_\nu \frac{\sqrt{y_\nu^2 + \tilde{\Delta}^2} - y_\nu}{y_\nu^2 + \Delta^2 \cos^2 x_k} \quad (\text{B.20})$$

d'où :

$$\bar{I}_2 = \frac{\tilde{\Delta}\tilde{g}}{4} \int_{-b}^b \frac{\sqrt{y^2 + \tilde{\Delta}^2} - y}{y^2 + \cos x_k \tilde{\Delta}^2} dy \quad (\text{B.21})$$

$$= \frac{\tilde{\Delta}\tilde{g}}{2} \cos x_k \int_0^b \frac{\sqrt{y^2 + \tilde{\Delta}^2}}{y^2 + \cos^2 x_k \tilde{\Delta}^2} dy \quad (\text{B.22})$$

$$= \bar{I}_1 \quad (\text{B.23})$$

3) Somme I_3 :

Sachant que :

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (\text{B.24})$$

il vient :

$$\sin \varphi_{\nu k} = \sin \left[\arctan \left[(v_\nu^2 - u_\nu^2) \tan x_k \right] \right] = -\frac{y_\nu tg x_k \cos x_k}{\sqrt{y_\nu^2 + \Delta^2 \cos^2 x_k}} \quad (\text{B.25})$$

Compte tenu de (B.9) et (B.8), I_3 s'écrit :

$$I_3 = -\frac{\Delta}{4} \sin x_k \left[\sum_\nu \frac{y_\nu^2}{\sqrt{y_\nu^2 + \Delta^2} (y_\nu^2 + \Delta^2 \cos^2 x_k)} + \sum_\nu \frac{y_\nu}{y_\nu^2 + \Delta^2 \cos^2 x_k} \right] \quad (\text{B.26})$$

Alors :

$$\bar{I}_3 = -\frac{\tilde{\Delta}}{2} \tilde{g} \sin x_k \int_0^b \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^2 + \tilde{\Delta}^2} (y^2 + \tilde{\Delta}^2 \cos^2 x_k)} \quad (\text{B.27})$$

$$= \frac{\tilde{\Delta} \tilde{g}}{2} \left[\cos x_k \arctan \left(\frac{btgx_k}{\sqrt{b^2 + \tilde{\Delta}^2}} \right) - \sin x_k \ln \left(\frac{\sqrt{b^2 + \tilde{\Delta}^2} + b}{\tilde{\Delta}} \right) \right] \quad (\text{B.28})$$

4) Somme I_4 :

Compte tenu de (B.8), (B.19) et (B.25), I_4 s'écrit :

$$I_4 = -\frac{\Delta}{4} \sin x_k \left[\sum_{\nu} \frac{y_{\nu}}{y_{\nu}^2 + \Delta^2 \cos^2 x_k} - \sum_{\nu} \frac{y_{\nu}^2}{\sqrt{y_{\nu}^2 + \Delta^2} (y_{\nu}^2 + \Delta^2 \cos^2 x_k)} \right] \quad (\text{B.29})$$

d'où :

$$\bar{I}_4 = \frac{\tilde{\Delta} \tilde{g}}{2} \sin x_k \int_0^b \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^2 + \tilde{\Delta}^2} (y^2 + \tilde{\Delta}^2 \cos^2 x_k)} \quad (\text{B.30})$$

$$= -\bar{I}_3 \quad (\text{B.31})$$

5) Somme I_5 :

Passons maintenant à la somme suivante :

$$I_5 = \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^4 v_{\nu}^4 \cos 2\varphi_{\nu k}}{\rho_{\nu k}^2} = 2 \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^4 v_{\nu}^4 \cos 2\varphi_{\nu k}}{\rho_{\nu k}^2} - \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^4 v_{\nu}^4}{\rho_{\nu k}^2} \quad (\text{B.32})$$

Sachant que :

$$u_{\nu}^4 v_{\nu}^4 = \frac{\Delta^4}{16} \frac{1}{(y_{\nu}^2 + \Delta^2)^2} \quad (\text{B.33})$$

et en tenant compte de (B.11) et (B.25), on aura alors :

$$I_5 = \frac{\Delta^4}{8} \left[2 \cos^2 x_k \sum_{\nu} \frac{1}{(y_{\nu}^2 + \Delta^2 \cos^2 x_k)^2} - \sum_{\nu} \frac{1}{(y_{\nu}^2 + \Delta^2)(y_{\nu}^2 + \Delta^2 \cos x_k)} \right] \quad (\text{B.34})$$

On en déduit :

$$\bar{I}_5 = \frac{\tilde{\Delta}^4 \tilde{g}}{8} \left[2 \cos^2 x_k \int_0^b \frac{dy}{(y^2 + \tilde{\Delta}^2 \cos^2 x_k)^2} - \int_0^b \frac{dy}{(y^2 + \tilde{\Delta}^2)(y^2 + \tilde{\Delta}^2 \cos x_k)} \right] \quad (\text{B.35})$$

par suit :

$$\bar{I}_5 = \frac{\tilde{\Delta}^4 \tilde{g}}{8 \sin^2 x_k} \left[-\cos x_k \frac{1}{\tilde{\Delta}^3} \arctan \left(\frac{b}{\tilde{\Delta} \cos x_k} \right) + \frac{1}{\tilde{\Delta}^3} \arctan \left(\frac{b}{\tilde{\Delta}} \right) + \frac{b \sin^2 x_k}{\tilde{\Delta}^2 (b^2 + \tilde{\Delta}^2 \cos^2 x_k)} \right] \quad (\text{B.36})$$

6) Somme I_6 :

En tenant compte des équations (B.33), (B.11) et (B.25) la somme I_6 définie par (B.6) peut également s'écrire sous la forme :

$$I_6 = \sum_{\nu} \frac{u_{\nu}^4 v_{\nu}^4 \sin 2\varphi_{\nu k}}{1 - \gamma_{\nu}^2 \sin^2 x_k} = -\frac{\Delta^4}{8} \sin x_k \cos x_k \sum_{\nu} \frac{y_{\nu}}{(y_{\nu}^2 + \Delta^2)(y_{\nu}^2 + \Delta^2 \cos^2 x_k)} \quad (\text{B.37})$$

sous forme lissée la somme I_6 devient :

$$\bar{I}_6 = \int_{-b}^b \frac{y dy}{(y^2 + \tilde{\Delta}^2)(y^2 + \tilde{\Delta}^2 \cos^2 x_k)} = 0 \quad (\text{B.38})$$

Annexe C

Table des intégrales

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + \Delta^2}} = \ln(\sqrt{y^2 + \Delta^2} + y) \quad (\text{C.1})$$

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + \Delta^2}} = \sqrt{y^2 + \Delta^2} \quad (\text{C.2})$$

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^2 + \Delta^2}} = \frac{y\sqrt{y^2 + \Delta^2}}{2} - \frac{\Delta^2}{2} \ln(\sqrt{y^2 + \Delta^2} + y) \quad (\text{C.3})$$

$$\int \frac{dy}{y^2 + \Delta^2} = \frac{1}{\Delta} \arctan\left(\frac{y}{\Delta}\right) \quad (\text{C.4})$$

$$\int \frac{y dy}{y^2 + \Delta^2} = \frac{1}{2} \ln(y^2 + \Delta^2) \quad (\text{C.5})$$

$$\int \frac{y^2 dy}{y^2 + \Delta^2} = y - \Delta \arctan\left(\frac{y}{\Delta}\right) \quad (\text{C.6})$$

$$\int \frac{dy}{(y^2 + \Delta^2)^2} = \frac{1}{2\Delta^2} \frac{y}{y^2 + \Delta^2} + \frac{1}{2\Delta^3} \arctan\left(\frac{y}{\Delta}\right) \quad (\text{C.7})$$

$$\int \frac{dy}{y^2(y^2 + \Delta^2)} = -\frac{1}{\Delta^2 y} - \frac{1}{\Delta^3} \arctan\left(\frac{y}{\Delta}\right) \quad (\text{C.8})$$

$$\int \ln\left(\frac{y^2}{y^2 + \Delta^2}\right) dy = -2\Delta \arctan\left(\frac{y}{\Delta}\right) + y \ln\left(\frac{y^2}{y^2 + \Delta^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{y^2}{(y^2 + \cos^2 x_k \Delta^2) \sqrt{y^2 + \Delta^2}} dy \\
&= \frac{\cos x_k}{|\sin x_k|} \arctan \left(\frac{|\sin x_k| y}{\cos x_k \sqrt{y^2 + \Delta^2}} \right) + \ln \left(y + \sqrt{y^2 + \Delta^2} \right) \quad (\text{C.9})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{y^2}{(y^2 + \cos^2 x_k \Delta^2) (y^2 + \Delta^2)} dy \\
&= \frac{1}{|\sin x_k| \Delta} \left[\arctan \left(\frac{y}{\Delta} \right) - \cos x_k \arctan \left(\frac{y}{\cos x_k \Delta} \right) \right] \quad (\text{C.10})
\end{aligned}$$

$$\int \frac{dy}{(y^2 + \cos^2 x_k \Delta^2)^2} = \frac{1}{2\Delta^3 \cos^3 x_k} \left[\frac{\Delta \cos x_k y}{y^2 + \cos^2 x_k \Delta^2} + \arctan \left(\frac{y}{\Delta \cos x_k} \right) \right] \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\sqrt{y^2 + \Delta^2}}{(y^2 + \cos^2 x_k \Delta^2)^2} dy = \\
& \frac{1}{2\Delta^2 \cos^3 x_k} \left[\cos x_k \frac{y \sqrt{y^2 + \Delta^2}}{y^2 + \cos^2 x_k \Delta^2} + \frac{1}{|\sin x_k|} \arctan \left(\frac{|\sin x_k| y}{\cos x_k \sqrt{y^2 + \Delta^2}} \right) \right] \quad (\text{C.12})
\end{aligned}$$

$$\ln(y^2 + a^2 \Delta^2) dy = 2a\Delta \arctan \left(\frac{y}{a\Delta} \right) + y [\ln(y^2 + a^2 \Delta^2) - 2] \quad (\text{C.13})$$

a étant un réel quelconque

Bibliographie

- [1] D. Vretenar, ArXiv : Nucl-th/0409060.
- [2] M. T. Yamashita et al., ArXiv : Nucl-th/0503035.
- [3] N. Tajima, ArXiv : Nucl-th/0503036.
- [4] E. Teran, V. E. Oberacker and A. S. Umar, Phys. Rev. **C67**(2003)064314.
- [5] A. Blazkiewicz, V. E. Oberacker and A. S. Umar, Phys. Rev. **C71**(2005)054321.
- [6] Y. Sun et al., ArXiv :Nucl-th/0411081.
- [7] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **C108** (1957) 1175.
- [8] M. R. Oudih, N. Benhamouda, N. H. Allal and M. Fellah, Heav. Ion Phys. **19**(2004)217.
- [9] N. Benhamouda, M. R. Oudih, N. H. Allal and M. Fellah, Heav. Ion Phys. **19**(2004)191.
- [10] N. Benhamouda, M. R. Oudih, N. H. Allal and M. Fellah, Nucl. Phys. **A690**(2001)219.
- [11] M. Fellah, N. H. Allal, M. R. Oudih and N. Benhamouda, Alg. Rev. Nucl. Sc. **2**(1998)59.
- [12] M. Fellah and T. F. Hammann, Phys. Rev. **C20**(1979)4.
- [13] M. Fellah, T. F. Hamman and D. E. Medjadi, Phys. Rev. **C8**(1973)5.
- [14] N. H. Allal and M. Fellah, Phys. Rev. **C43**(1991)6.
- [15] H. Flocard, Ecole Juliot-Curie de Physique Nucléaire (2002)P81-85.
- [16] A. M. Lane, Nuclear Theory, Benjamin (1964).

-
- [17] B. Siad - Thèse de Magister, USTHB(2004).
- [18] N. H. Allal - Thèse de Doctorat, USTHB(1994).
- [19] P. Ring and P. Schuck, The Nuclear Many-Body Problem, Springer, New York (1980).
- [20] S. G. Nilsson and I. Ragnarsson, Shapes and Shells in Nuclear Structure, Cambridge University Press (1995).
- [21] P. Martin and F. Rothen, Problèmes à n corps et champs quantiques, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne (1990).
- [22] A. Sitenko and V. Tartakovski, Theory of nucleus, Kluwer, Dordrecht (1997).
- [23] L. Valentin, Physique subatomique, Noyau et particules, Hermann, Paris (1975).
- [24] S. T. Belyaev, K. Dan and V. Selsk, Mat. Fys. Medd. **11**(1959)31.
- [25] N. Bogoliubov, Nuovo Cimento **7**(1958)794.
- [26] P. Moller and J. R. Nix, Nucl.Phys. **A536**(1992)20.
- [27] M. R. Oudih, Thèse de Doctorat, USTHB(2003).
- [28] H. C. Pauli, Phys. Rep. **C7**(1973)35.
- [29] J. G. Valatin, Nuovo Cimento **7**(1958)794.
- [30] R. Capote and A. Gonzalez, Phys. Rev. **C59**(1999)6.
- [31] A. Valor, J. L. Egido and L. M. Robledo, Phys. Rev. **C53**(1996)1.
- [32] M. Horoi, Phys. Rev. **C50**(1994)6.
- [33] A. G. Adornes and M. Kyotoku, Z. Phys. A -Hadrons and Nuclei **341**(1992)255.
- [34] M. Fellah and T. F. Hammann, Phys. Rev. **C10**(1974)1.
- [35] J. A. Sheikh, P. Ring, E. Lopes and R. Rossignoli, Phys. Rev. **C66**(2002)044318.
- [36] J. M. Arias, M. Gallardo and J. Gomez-Camacho, Nucl. Phys. **A525**(1991)144.
- [37] P. G. Reinhard, W. Nazarewicz, M. Bender and J.A. Maruhn, Phys. Rev. **C6**(1996)53.
- [38] S. X. Liu and J. Y. Zeng, Phys. Rev. **C66**(2002)067301.
- [39] M. Bolsterli, E. O. Fiset, J. R. Nix and J. L. Norton, Phys. Rev. **C5**(1972)3.
- [40] K. Pomorski, Phys. Rev. **C70**(2004)044306.

-
- [41] M. Kyotoku, Phys. Rev. **C37**(1987)5.
- [42] V .M. Strutinsky, Sov. J. Nucl. Phys. **3**(1966)449.
- [43] S. G. Nilsson et al., Nucl. Phys. **A131**(1969) 1.
- [44] P. Moller and J. R. Nix, Atomic Data and Nuclear Data Tables **59**(1995)185.
- [45] N. Benhamouda, Thèse de Magister, USTHB (1999).
- [46] R. Bengtsson, J. Dudek, W. Nazarewicz and P. Olenders, Phys. Scripta **39**(1989)196.
- [47] N. Benhamouda, N. H. Allal, M. Fellah and M. R. Oudih, Inter. J. Mod. Phys. **E14**(2005)197.
- [48] R. W. Hasse, W. D. Myers, Geometrical Relationships of macroscopic nuclear physics, Springer Verlag, Heidelberg (1988).
- [49] M. Brack et al. (Funny Hills), Rev. Mod. Phys. **44**(1972)2.
- [50] L. Lavin, A. Delgado and R. Capote, Nuclear Structure, World Scientific, Bologna (2000).