

N° d'ordre : 45/2012-M/PH

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTE DE PHYSIQUE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : PHYSIQUE

Spécialité : Physique Théorique de La Matière et des Hautes Energies

Par : Taïbi Hamza

Sujet :

Mesure Quantique Continue et Décohérence

Soutenu publiquement, le 19/06/2012, devant le Jury composé de :

Chaffa Azzedine	Maitre de conférences à l'USTHB	Président
Hachemane Mahmoud	Professeur à l'USTHB	Directeur de mémoire
Smida Abdalah	Professeur à l'USTHB	Examineur
Chouchaoui Ahmed	Professeur à l'USTHB	Examineur
Hamici Amel-Hiba	Maitre de conférences à l'USTHB	Examinatrice

Table des matières

INTRODUCTION	3
1 Le formalisme de l'intégrale de chemin	5
1.1 Formulation générale	5
1.1.1 <i>L'intégrale de chemin dans l'espace de configuration</i>	8
1.2 <i>Application à la particule libre</i>	9
1.3 Application à l'oscillateur harmonique	11
1.3.1 L'intégrale gaussienne	11
1.3.2 <i>Calcul du propagateur de l'oscillateur harmonique</i>	12
2 Décohérence	16
2.1 Régimes de la décohérence	17
2.1.1 La limite de la mesure quantique	18
2.1.2 La limite quantique de la décohérence	19
2.2 L'équation maîtresse de Born-Markov	19
2.2.1 Dérivation de l'équation maîtresse de Born-Markov	19
2.2.2 L'approximation de Born	20
2.2.3 L'approximation de Markov	20
2.3 Méthode des semi-groupes	22
2.3.1 Semi-groupes dynamiques	23
2.3.1.1 Applications dynamiques	23
2.3.1.2 Les représentations de Kraus	23
2.3.1.3 L'hypothèse du semi-groupe	24
2.3.2 La forme de Lindblad	24
2.4 Théorie de Feynman-Vernon	26
2.5 Théorie des histoires consistantes	28
3 Mesure continue	31
3.1 Mesure quantique continue	31
3.1.1 Mesure précise	31

3.1.2	Mesure approximative	33
3.1.3	Mesure séquentielle approximative	35
3.2	Intégrale de chemin et mesure continue	37
3.3	Évolution d'un système quantique soumis à une mesure continue	39
3.4	Diffusion d'une particule dans le milieu de la mesure	42
4	Mesure continue et décohérence	45
4.1	Effet Zénon	45
4.2	Équation de Schrödinger à hamiltonien complexe	47
4.3	Mesure continue et équation maîtresse	48
4.4	Mesure continue de l'énergie	49
4.4.1	Mesure d'un système à plusieurs niveaux d'énergies	50
4.4.1.1	Évolution libre	51
4.4.1.2	Régimes de la mesure	53
4.4.2	Mesure d'un système à deux niveaux d'énergie	53
4.4.2.1	Surveillance d'une transition quantique	56
5	Mesure dans la mécanique quantique stochastique	58
5.1	Représentation espace des phases du groupe de Galilée	59
5.2	Les mesures approximatives	61
5.3	Mesure dans l'espace de configuration	63
5.4	Mesure dans l'espace des impulsions	65
5.5	Mesures séquentielles approximatives dans la théorie stochastique	66
CONCLUSION		68

Introduction

Une première tentative de description rigoureuse de la mesure quantique a été élaborée par Von Neumann [62]. La mesure a été traitée en ignorant sa durée. Cependant, cette description n'est pas suffisante pour un système soumis à une mesure continue. Généralement, on veut comprendre le comportement du système si la mesure est appliquée continuellement à ce système. Ceci est l'objet de la théorie de la mesure quantique continue. Celle-ci peut être considérée comme une limite des mesures séquentielles instantanées. Si la précision de chacune de ces mesures est suffisante, le système reste dans l'état initial sans évolution (effet Zénon). À cause de l'effet Zénon, la mesure continue donne un résultat trivial (une fonction constante). Pour les observables continues, la mesure continue donne un résultat qui montre que le système subit une évolution. Récemment, il a été démontré que la mesure continue avec une précision finie est capable de surveiller une transition quantique [6]. Par exemple, la transition entre deux niveaux atomiques induite par un rayonnement de résonance pourrait être contrôlée par l'observation d'une série d'électrons diffusés par l'atome [8]. Ainsi, les mesures imprécises offrent un nouvel outil pour l'étude des processus quantiques. Notre travail consiste à présenter la théorie de la mesure continue développée par Mensky [48]. Cette théorie basée sur les intégrales de chemin restreintes a été appliquée à la mesure de l'énergie d'un système quantique. Le formalisme est équivalent à celui de l'équation de Schrödinger avec un hamiltonien complexe et les résultats obtenus représentent un phénomène de décohérence [56]. Comme la théorie quantique stochastique décrit la mesure approximative, nous nous sommes fixé comme but d'y appliquer le modèle de Mensky. Nous avons reformulé la mesure approximative, décrite par des opérateurs R_q , dans le cadre stochastique et nous avons appliqué la nouvelle représentation des opérateurs R_q pour décrire les mesures séquentielles approximatives. Enfin, nous avons trouvé l'expression formelle du propagateur d'une particule stochastique soumise à une mesure continue.

Dans le premier chapitre, nous présenterons le formalisme général des intégrales de chemin et son application aux cas d'une particule libre et d'un oscillateur harmonique.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude de la théorie de la décohérence. Pour ce faire, nous commencerons par la description de l'interaction entre un système quantique et son environnement et nous verrons que l'intensité de cette interaction permet d'identifier les différents régimes de la décohérence. Par la suite, nous présenterons le formalisme de la décohérence dans le cadre de la théorie des systèmes quantiques ouverts. Dans cette dernière, l'évolution du système est décrite par

une équation maitresse qu'on peut établir en utilisant des approximations (concernant l'interaction avec l'environnement) dites de Born et de Markov. Nous terminerons ce chapitre en établissant l'équation maitresse de Lindblad en faisant appel à la méthode des semi-groupes dynamiques.

Nous introduirons, au cours du troisième chapitre, les intégrales de chemin restreintes pour décrire la mesure continue. Dans cette théorie, l'effet de la mesure sur un système quantique est représenté par une restriction sur la somme dans l'intégrale de chemin. La restriction est décrite, dans le cas général, par une fonctionnelle poids qui s'approche de l'unité pour les chemins compatibles avec le résultat de la mesure. En suite, nous utiliserons l'intégrale de chemin restreinte, nommée aussi amplitude de la mesure, pour estimer les probabilité des différents résultats.

Dans le quatrième chapitre, nous présenterons une méthode équivalente aux intégrales de chemin restreintes. Il s'agit de l'équation de Schrödinger à hamiltonien complexe que nous appliquerons à la mesure continue de l'énergie d'un système à plusieurs niveaux. Un choix approprié de précision de la mesure permet de visualiser une transition quantique, ce qui représente l'avantage des mesures approximatives.

Dans le dernier chapitre, la mesure continue sera reformulée dans le cadre stochastique et le propagateur d'une particule soumise à une mesure continue sera obtenu. Le lien avec la décohérence nécessite une réflexion plus approfondie.

Nous terminerons notre travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Le formalisme de l'intégrale de chemin

1.1 Formulation générale

L'état d'un système quantique à l'instant t est décrit par une fonction d'onde $\psi_t(q)$ qui dépend de la position. Cette dernière peut être un point dans l'espace de configuration à trois dimensions (\mathbb{R}^3) ou un point dans un espace multidimensionnel si le système considéré est décrit par plusieurs paramètres.

La fonction d'onde dépendant du temps est gouvernée par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (1.1)$$

où l'hamiltonien quantique \hat{H} est déterminé à partir de l'hamiltonien classique $H(q, p, t)$ par le principe de correspondance. Si on connaît la valeur de la fonction d'onde à l'instant t , on peut résoudre l'équation de Schrödinger et trouver la fonction d'onde $\psi_{t'}$ à l'instant t' .

L'objet dans l'approche des intégrales de chemin est le calcul du propagateur qui est l'amplitude de probabilité de transition du point q' à l'instant t' au point q'' à l'instant t'' . Si le propagateur $U(q'' t'' | q' t')$ est défini, on peut exprimer l'état $|\psi_{t''}\rangle$ à partir de $|\psi_{t'}\rangle$ par

$$\psi_{t''}(q'') = \int dq' U(q'' t'' | q' t') \psi_{t'}(q') \quad (1.2)$$

Le propagateur est la solution de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial U(q'' t'' | q' t')}{\partial t''} = \hat{H}'' U(q'' t'' | q' t') \quad (1.3)$$

où \hat{H}'' est l'hamiltonien du système qui agit sur le deuxième argument (q''). Le propagateur est défini par la relation

$$U(q'' t'' | q' t') = \langle q'' | U(t'', t') | q' \rangle \quad (1.4)$$

où $U(t'', t')$ est l'opérateur d'évolution qui vérifie

$$|\psi_{t''}\rangle = U(t'', t') |\psi_{t'}\rangle \quad (1.5)$$

En remplaçant cette relation dans l'équation de Schrödinger, on obtient

$$U(t'', t') = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}(t'' - t')\right) \quad (1.6)$$

En divisant l'intervalle $[t', t'']$ en $N + 1$ subdivisions égales

$$\varepsilon = \frac{t'' - t'}{N + 1} \quad (1.7)$$

$$t_n = t_{n-1} + \varepsilon, \quad n = 1 \cdot \cdot N + 1 \quad (1.8)$$

où $t_0 = t'$ et $t_{N+1} = t''$. On peut écrire l'opérateur d'évolution sous la forme d'un produit

$$U(t'', t') = U(t'', t_N)U(t_N, t_{N-1}) \cdots U(t_n, t_{n-1}) \cdots U(t_2, t_1)U(t_1, t_0) \quad (1.9)$$

En utilisant l'équation (1.9) et la relation de fermeture

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq_n |q_n\rangle \langle q_n| = 1 \quad (1.10)$$

on peut évaluer le propagateur (1.4)

$$U(q'' t'' | q' t') = \langle q'' | U(t'', t') | q' \rangle \quad (1.11)$$

$$= \langle q'' | U(t'', t_N)U(t_N, t_{N-1}) \cdots U(t_n, t_{n-1}) \cdots U(t_2, t_1)U(t_1, t') | q' \rangle \quad (1.12)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dq_N dq_{N-1} \cdots dq_1 \langle q'' | U(t'', t_N) | q_N \rangle \cdots \langle q_1 | U(t_1, t') | q' \rangle \quad (1.13)$$

$$U(q'' t'' | q' t') = \prod_{n=1}^N \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dq_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \langle q_n | U(t_n, t_{n-1}) | q_{n-1} \rangle \quad (1.14)$$

La dernière équation peut être réécrite sous la forme

$$U(q'' t'' | q' t') = \prod_{n=1}^N \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dq_n \right] \prod_{n=1}^N U(q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1}) \quad (1.15)$$

avec un propagateur partiel $U(q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1})$ défini par

$$U(q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1}) = \langle q_n | U(t_n, t_{n-1}) | q_{n-1} \rangle$$

L'opérateur d'évolution $U(t_n, t_{n-1})$ est donné par

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\widehat{H}\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon(\widehat{T} + \widehat{V})\right) \quad (1.16)$$

où $\widehat{T} = \frac{\widehat{p}^2}{2m}$ est l'opérateur d'énergie cinétique et \widehat{V} est l'opérateur d'énergie potentiel. La formule de Baker-Compell [42] permet d'écrire l'expression précédente sous la forme

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon(\widehat{T} + \widehat{V})\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\widehat{T}\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\widehat{V}\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar^2}\varepsilon^2\widehat{X}\right) \quad (1.17)$$

où l'opérateur \widehat{X} est donné par la formule [42]

$$\widehat{X} = \frac{i}{2}[\widehat{V}, \widehat{T}] - \frac{\varepsilon}{\hbar} \left(\frac{1}{6} [\widehat{V}, [\widehat{V}, \widehat{T}]] - \frac{1}{3} [[\widehat{V}, \widehat{T}], \widehat{T}] \right) + O(\varepsilon^2). \quad (1.18)$$

dans cette expression on a négligé les termes de l'ordre de ε^2 ou plus. En négligeant le terme \widehat{X} , on peut calculer les éléments de matrice de l'opérateur $U(t_n, t_{n-1})$ entre les états $|q_n\rangle$

$$\langle q_n | \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon H(\widehat{p}, \widehat{q}, t_n)\right) | q_{n-1} \rangle \approx \int_{-\infty}^{+\infty} dq \langle q_n | \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon V(\widehat{q}, t_n) | q \right) \langle q | \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon T(\widehat{p}, t_n) | q_{n-1} \right) \rangle \quad (1.19)$$

On a

$$\langle q_n | \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon V(\widehat{q}, t_n) | q \right) = \delta(q_n - q) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon V(q_n, t_n)\right) \quad (1.20)$$

En utilisant la transformation de Fourier de $|q_{n-1}\rangle$, et la propriété de la fonction delta de Dirac

$$\int dq \delta(q - q_0) f(q) = f(q_0)$$

on obtient

$$\langle q_n | \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon H(\widehat{p}, \widehat{q}, t_n)\right) | q_{n-1} \rangle \approx \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_n (q_n - q_{n-1}) - \frac{i}{\hbar}\varepsilon (T(p_n, t_n) + V(q_n, t_n))\right) \quad (1.21)$$

En remplaçant cette expression dans l'équation (1.15), on trouve

$$U(q'' t'' | q' t') = \prod_{n=1}^N \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dq_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S^N\right) \quad (1.22)$$

où S^N est l'action de subdivision définie par

$$S^N = \sum_{n=1}^{N+1} [p_n (q_n - q_{n-1}) - \varepsilon H(q_n, p_n, t_n)] \quad (1.23)$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, l'action S^N devient

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S^N = \int_{t'}^{t''} dt [p(t)\dot{x}(t) - H(x(t), p(t), t)] = S(q, p) \quad (1.24)$$

qui est l'expression de l'action classique. Dans la limite ($N \rightarrow \infty$), le produit des intégrales (1.22) devient

$$U(q'' t'' | q' t') = \int_{q'}^{q''} d' [q] \int d[p] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(q, p)\right) \quad (1.25)$$

où

$$\begin{aligned} \int d' [q] &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dq_n \right] \\ \int d[p] &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^{N+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \end{aligned}$$

L'équation (1.25) est l'expression de l'intégrale de chemin dans l'espace des phases. L'intégrale de chemin est la somme des amplitudes de probabilité de toutes les trajectoires d'évolutions possibles pour un système physique

$$U(q'' t'' | q' t') = \sum_{\substack{\text{tous les chemins} \\ (q' t') \rightarrow (q'' t'')}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(q, p)\right) \quad (1.26)$$

1.1.1 L'intégrale de chemin dans l'espace de configuration

L'action de subdivision est donnée par

$$S^N = \sum_{n=1}^{N+1} \left[p_n(q_n - q_{n-1}) - \varepsilon \left(\frac{p_n^2}{2m} + V(q_n, t_n) \right) \right] \quad (1.27)$$

on peut la réécrire sous la forme

$$S^N = \sum_{n=1}^{N+1} \left[-\frac{\varepsilon}{2m} \left(p_n - \frac{q_n - q_{n-1}}{\varepsilon} \right)^2 + \frac{m\varepsilon}{2} \left(\frac{q_n - q_{n-1}}{\varepsilon} \right)^2 - \varepsilon V(q_n, t_n) \right] \quad (1.28)$$

En utilisant l'intégrale gaussienne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2m} \left(p_n - \frac{q_n - q_{n-1}}{\varepsilon} \right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar i\varepsilon/m}} \quad (1.29)$$

l'expression (1.22) devient

$$U(q'' t'' | q' t') = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar i\varepsilon/m}} \right)^N \prod_{n=1}^N \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dq_n \right] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S^N\right) \quad (1.30)$$

où S^N est définie maintenant par

$$S^N = \varepsilon \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{q_n - q_{n-1}}{\varepsilon} \right)^2 - V(q_n, t_n) \right] \quad (1.31)$$

Dans ce cas, les intégrations sont effectuées sur tous les chemins dans l'espace de configuration. Le propagateur est la somme des amplitudes de toutes les alternatives (chemins) pour une particule allant du point q' à l'instant t' au point q'' à l'instant t'' . L'amplitude de chaque chemin est $\exp(\frac{i}{\hbar} S^N)$.

Dans la limite continue, la somme (1.31) devient

$$S[q] = \int_{t'}^{t''} dt L(q, \dot{q}) = \int_{t'}^{t''} dt \left[\frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q, t) \right] \quad (1.32)$$

On peut réécrire l'amplitude (1.30) sous la forme condensée

$$U(q'' t'' | q' t') = \int_{q'}^{q''} d[q] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(q)\right). \quad (1.33)$$

où la mesure $d[q]$ définie par

$$d[q] = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \frac{dq_n}{\sqrt{2\pi\hbar i\varepsilon/m}} \quad (1.34)$$

1.2 Application à la particule libre

Le formalisme de l'intégrale de chemin peut être utilisé pour calculer le propagateur d'une particule libre. Le lagrangien de cette dernière est donné par

$$L = m \frac{\dot{q}^2}{2} \quad (1.35)$$

En utilisant les équations (1.30) et (1.31), on obtient la forme générale du propagateur

$$U(q'' t'' | q' t') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar\varepsilon/m}} \right)^N \prod_{n=1}^N \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_n}{\sqrt{2\pi i\hbar\varepsilon/m}} \right] \exp \left[\frac{im}{2\hbar\varepsilon} \sum_{i=1}^{N+1} (q_i - q_{i-1})^2 \right] \quad (1.36)$$

C'est un produit d'intégrales gaussiennes de la forme $\int \exp(-aq^2) dq$ (a est une constante)

$$U(q''t'' | q't') = \left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{-N/2} \int dq_1 dq_2 \dots dq_N \exp\left(\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(q_1 - q_0)^2\right) \dots \exp\left(\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(q_{N+1} - q_N)^2\right). \quad (1.37)$$

avec $q_{N+1} = q''$, $q_0 = q'$. On calcule la première intégrale

$$\left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{-1} \int dq_1 \exp\left(\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(q_1 - q_0)^2\right) \exp\left(\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(q_2 - q_1)^2\right) \quad (1.38)$$

à l'aide de la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq_n \exp(-\alpha(q_{n+1} - q_n)^2) \exp(-\beta(q_n - q_{n-1})^2) = \exp\left(-\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}(q_{n+1} - q_{n-1})^2\right) \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + \beta}}. \quad (1.39)$$

Pour $n = 1$, $\alpha = \beta = -\frac{im}{2\hbar\varepsilon}$, on obtient

$$\left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{-1} \int dq_1 \exp\left(\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(q_1 - q_0)^2\right) \exp\left(\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(q_2 - q_0)^2\right) \quad (1.40)$$

$$= \left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{-1} \left(\frac{\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{im}{2\hbar 2\varepsilon}(q_2 - q_0)^2\right) \quad (1.41)$$

$$= \left(\frac{m}{2\hbar 2\varepsilon \pi i}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{im}{2\hbar 2\varepsilon}(q_2 - q_0)^2\right) \quad (1.42)$$

De la même façon, on calcule la deuxième intégrale, on trouve

$$\left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{-1/2} \left(\frac{m}{\pi i 2\hbar 2\varepsilon}\right)^{1/2} \int dq_2 \exp\left(\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(q_3 - q_2)^2\right) \exp\left(\frac{im}{2\hbar 2\varepsilon}(q_2 - q_0)^2\right) \quad (1.43)$$

$$= \left(\frac{m}{\pi i 2\hbar 3\varepsilon}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{im}{2\hbar 3\varepsilon}(q_3 - q_0)^2\right). \quad (1.44)$$

on obtient finalement l'expression suivante

$$U(q_{N+1}, t_{N+1} | q_0 t_0) = \left(\frac{m}{\pi i 2\hbar(N+1)\varepsilon}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{im}{2\hbar(N+1)\varepsilon}(q_{N+1} - q_0)^2\right). \quad (1.45)$$

Dans la limite continue ($N \rightarrow +\infty$), le propagateur de la particule libre prend la forme

$$U(q''t'' | q't') = \left(\frac{m}{\pi i 2\hbar(t'' - t')}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{im}{2\hbar(t'' - t')}(q'' - q')^2\right) \quad (1.46)$$

1.3 Application à l'oscillateur harmonique

Avant d'entamer le calcul du propagateur de l'oscillateur harmonique nous présentons des résultats concernant le calcul des intégrales gaussiennes à plusieurs variables pour les utiliser ultérieurement.

1.3.1 L'intégrale gaussienne

Les intégrales gaussiennes sont données par la forme suivante

$$\int \left(\prod_i dq_i \right) \exp\left(-\sum_{i,j} \lambda_{ij} q_i q_j\right) \quad (1.47)$$

où les coefficients λ_{ij} sont les éléments réels de la matrice $\hat{\lambda}$. Dans le cas d'une seule variable q et un λ réel et positif, on a

$$\int dq \exp(-\lambda q^2) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \quad (1.48)$$

Pour diagonaliser la matrice $[\lambda_{ij}]$ nous effectuons les transformations suivantes

$$q_i = O_{ij} \tilde{q}_j, O^T \lambda O = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad (1.49)$$

avec

$$O^T O = O O^T = 1 \quad (1.50)$$

Ainsi, nous obtenons

$$\int \prod_i dq_i = |\det(O)| \int \prod_i d\tilde{q}_i = \int \prod_i d\tilde{q}_i$$

Avec cette transformation l'intégrale (1.47) devient

$$\int \prod_i dq_i \exp\left(-\sum_{i,j} q_i \lambda_{ij} q_j\right) = \int \prod_i d\tilde{q}_i \exp\left(-\sum_i \lambda_i \tilde{q}_i^2\right)$$

D'après l'équation (1.48), on obtient

$$\int \prod_i dq_i \exp\left(-\sum_{i,j} \lambda_{ij} q_i q_j\right) = \prod_i \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} = \sqrt{\frac{1}{\det\left(\frac{1}{\pi} \hat{\lambda}\right)}} \quad (1.51)$$

Ce résultat a un sens à condition que toutes les valeurs λ_n soient positives. De la même manière, nous pouvons calculer les intégrales avec une fonction exponentielle d'argument imaginaire

$$I = \int dq \exp(i\lambda q^2) = \exp\left(i \text{sgn}(\lambda) \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{\pi}{|\lambda|}}$$

Le résultat généralisé à plusieurs variables est le suivant

$$I = \exp(i(n_+ - n_-)\frac{\pi}{4}) \sqrt{\frac{1}{\det(\frac{1}{\pi}\widehat{\lambda})}}$$

où n_+ et n_- sont, respectivement, les nombres des valeurs propres λ_n positives et négatives de l'opérateur $\widehat{\lambda}$

1.3.2 Calcul du propagateur de l'oscillateur harmonique

Le propagateur est défini par

$$U(q''t'' | q't') = \int d[q(t)] \exp(\frac{i}{\hbar}S[q(t)]) \quad (1.52)$$

où

$$S[q(t)] = \int_{t'}^{t''} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (1.53)$$

On peut écrire $q(t)$ comme une somme de la trajectoire classique $q_c(t)$ et une fluctuation $z(t)$ autour de cette trajectoire

$$q(t) = q_c(t) + z(t) \quad (1.54)$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$z(t') = z(t'') = 0 \quad (1.55)$$

$$\dot{z}(t') = \dot{z}(t'') = 0 \quad (1.56)$$

de l'équation (1.54), on déduit que

$$d[q(t)] = d[z(t)]$$

donc, on a

$$S[q(t)] = S[q_c(t) + z(t)] = \int_{t'}^{t''} dt (\frac{m}{2}(\dot{q}_c(t) + \dot{z}(t))^2 - \frac{m\omega^2}{2}(q_c(t) + z(t))^2) \quad (1.57)$$

En développant les carrés et en utilisant une intégration par partie qui nous mène à l'équation du mouvement pour $q_c(t)$, l'expression de l'action se simplifie

$$S[q(t)] = \int_{t'}^{t''} dt (\frac{m}{2}(\dot{q}_c^2 - \omega^2 q_c^2)) + \int_{t'}^{t''} dt \frac{m}{2}(\dot{z}^2(t) - \omega^2 z(t)^2) \quad (1.58)$$

$$S[q(t)] = S_c[q_c(t)] + S[z(t)] \quad (1.59)$$

En remplaçant ce résultat dans l'équation (1.52), on trouve

$$U(q'' t'' | q' t') = \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_c[q_c(t)]\right) \int_{z(t')}^{z(t'')} d[z(t)] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[z(t)]\right)$$

On a $z(t') = z(t'') = 0$, ainsi nous obtenons

$$U(q'' t'' | q' t') = \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_c[q_c(t)]\right) \int d[z(t)] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[z(t)]\right) \quad (1.60)$$

$$U(q'' t'' | q' t') = \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_c[q_c(t)]\right) J(t'' - t') \quad (1.61)$$

Commençons par le calcul de S_c . En utilisant une intégration par parties et l'équation du mouvement

$$\ddot{q}_c + \omega^2 q_c(t) = 0 \quad (1.62)$$

on trouve

$$S_c = \int_{t'}^{t''} dt \left(\frac{m}{2} (\dot{q}_c^2 - \omega^2 q_c^2(t)) \right) = \frac{m}{2} \dot{q}_c q_c \Big|_{t'}^{t''} \quad (1.63)$$

il est facile de montrer que la solution q_c , avec les conditions $q' = q_c(t')$ et $q'' = q_c(t'')$, a la forme

$$q_c = \frac{1}{\sin(\omega T)} \left[q' \sin(\omega(t'' - t)) + q'' \sin(\omega(t - t')) \right] \quad (1.64)$$

où $T = t'' - t'$. Si l'on remplace ce résultat dans l'équation (1.63), on obtient

$$S_c = \frac{m\omega}{2 \sin(\omega(t'' - t'))} \left[(q'^2 + q''^2) \cos(\omega(t'' - t')) - 2q' q'' \right] \quad (1.65)$$

Maintenant nous calculons la quantité $J(T)$ avec la méthode du déterminant

$$J(T) = \int d[z(t)] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[z(t)]\right) \quad (1.66)$$

Comme $\int_{t'}^{t''} dt \frac{d}{dt} (z\dot{z}) = z(t'')\dot{z}(t'') - z(t')\dot{z}(t') = 0$, on trouve

$$i \int_{t'}^{t''} dt \frac{m}{2\hbar} (\dot{z}^2 - \omega^2 z^2) = -\frac{i}{2} \left[\int_{t'}^{t''} dt \frac{m}{\hbar} z \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) z \right] \quad (1.67)$$

$$= -\frac{i}{2} \left[\int_{t'}^{t''} dt z \widehat{O} z \right] \quad (1.68)$$

$$\widehat{O} = -\frac{m}{\hbar} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) \quad (1.69)$$

donc $J(T)$ prend la forme d'une intégrale gaussienne à plusieurs variables. En utilisant l'équation (1.51), on peut montrer que le résultat est proportionnel à $\det(\widehat{O})^{-\frac{1}{2}}$ de la manière suivante. La fonction $z(t)$, avec les conditions aux limites $z(t') = z(t'') = 0$, peut être évaluée comme une série de Fourier

$$z(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_n(t) \quad (1.70)$$

Les fonctions $z_n(t)$

$$z_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) \quad (1.71)$$

sont des fonctions propres orthonormées de \widehat{O}

$$\widehat{O}z_n(t) = \lambda_n z_n(t) \quad (1.72)$$

$$\int dt z_n(t) z_m(t) = \delta_{nm} \quad (1.73)$$

Les valeurs propres de l'opérateur \widehat{O} sont

$$\lambda_n = \frac{m}{\hbar} \left(\left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 - \omega^2 \right) \quad (1.74)$$

On a

$$d[z(t)] = \prod_n \frac{da_n}{\sqrt{2\pi i}} \quad (1.75)$$

En utilisant les équations (1.70) et (1.73), on trouve

$$\int dt z \widehat{O} z = \sum_{nm} \int dt a_n a_m z_n \widehat{O} z_m = \sum_n \lambda_n a_n^2 \quad (1.76)$$

ainsi, on obtient

$$J(T) = \widetilde{N} \prod_n \frac{da_n}{\sqrt{2\pi i}} \exp\left(i \sum_n \lambda_n a_n^2\right). \quad (1.77)$$

Si l'on utilise le résultat pour les intégrales gaussiennes, on trouve

$$J(T) = \widetilde{N} \prod_n (\lambda_n)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-in - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.78)$$

Notons que \widehat{O} dépend de ω ainsi nous avons

$$J_\omega(T) = \widetilde{N} \left(\det \widehat{O}_\omega \right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-in - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.79)$$

Pour $\omega = 0$, le propagateur de l'oscillateur harmonique coïncide avec le propagateur de la particule libre

$$J_0(T) = \tilde{N} \left(\det \hat{O}_0 \right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{m}{\pi i 2 \hbar T} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{im}{2 \hbar T} (q'' - q')^2 \right) \quad (1.80)$$

Nous pouvons considérer le rapport

$$\frac{J_\omega(T)}{J_0(T)} \exp(-in_-\frac{\pi}{2}) = \left(\left| \frac{\det \hat{O}_\omega}{\det \hat{O}_0} \right| \right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\prod_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{\lambda_n(0)}{\lambda_n(\omega)} \right| \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.81)$$

Le rapport des valeurs propres de l'opérateur \hat{O}_ω étant (voir (1.74))

$$\frac{\lambda_n(0)}{\lambda_n(\omega)} = \frac{\left(\frac{n\pi}{T} \right)^2}{\left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 - \omega^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{n\pi} \right)^2} \quad (1.82)$$

où $a = \omega T$. En utilisant la relation d'Euler [54], on obtient

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{\lambda_n(0)}{\lambda_n(\omega)} \right| = \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{n\pi} \right)^2} = \frac{a}{\sin a} \quad (1.83)$$

Si l'on remplace ce résultat dans l'équation (1.81), on trouve

$$J_\omega(T) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin(\omega T)}} \exp(in_-\frac{\pi}{2}). \quad (1.84)$$

L'expression finale du propagateur de l'oscillateur harmonique est la suivante

$$U(q'' t'' | q' t') = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin(\omega T)}} \exp \left(\frac{im\omega}{2\hbar} \left[(q'^2 + q''^2) \cot(\omega T) - \frac{2q' q''}{\sin(\omega T)} \right] \right) \quad (1.85)$$

Chapitre 2

Décohérence

Le rôle de l'interaction, entre un système quantique et son environnement, dans la transition des lois quantiques basées sur le principe d'interférence à la réalité classique familière (où ce principe est violé) est actuellement un sujet de grand intérêt. Cette activité de recherche est motivée par les expériences sophistiquées qui nous permettent d'explorer les frontières entre le monde quantique et classique [5, 72]. L'intérêt de la transition du quantique au classique est motivé aussi par l'apparition de nouvelles situations où l'analyse détaillée de la réduction du paquet d'ondes [25, 41] est nécessaire comme c'est le cas dans l'optique quantique [14, 37] et la cosmologie quantique [31, 52] où l'interprétation de Copenhague ne suffit pas. L'idée clé est le processus de décohérence [28, 79] où les cohérences quantiques sont supprimées à cause de l'interaction entre le système quantique et son environnement. Durant cette interaction le système quantique se comporte comme un système ouvert.

On considère un système quantique \mathcal{S} et un appareil de mesure \mathcal{A} . On suppose que le système \mathcal{S} à l'instant initial est décrit par l'état $|\psi_{\mathcal{S}}\rangle$ défini par

$$|\psi_{\mathcal{S}}\rangle = \sum_j c_j |s_j\rangle \quad (2.1)$$

L'appareil de mesure est initialement dans l'état $|a_r\rangle$. Maintenant, on introduit un troisième élément, l'environnement. Ses états possibles constituent un espace de Hilbert \mathcal{H}_E . Si l'état de l'environnement à l'instant initial est décrit par $|e_0\rangle$, l'état initial du système total (système- environnement -appareil de mesure) est décrit par

$$|\psi_{\mathcal{SAE}}\rangle_{initial} = \sum_j c_j |s_j\rangle |a_r\rangle |e_0\rangle \quad (2.2)$$

Après l'interaction, l'état final devient un état intriqué

$$|\psi_{\mathcal{SAE}}\rangle_{final} = \sum_i c_i |s_i\rangle |a_i\rangle |e_i\rangle \quad (2.3)$$

Les états de l'environnement sont supposés être orthogonaux (c'est en effet le cas à cause du grand nombre de degrés de liberté). On peut décrire l'état (2.3) dans le langage de la matrice densité comme suit :

$$\rho^{SAE} = \sum_{i,j} c_i c_j^* |s_i\rangle \langle s_j| \otimes |a_i\rangle \langle a_j| \otimes |e_i\rangle \langle e_j| \quad (2.4)$$

Dans l'étude de la décohérence, on s'intéresse seulement à l'état du système et de l'appareil de mesure en effectuant la trace sur les degrés de liberté de l'environnement. La matrice réduite du sous-système \mathcal{SA} est alors

$$\rho^{SA} = \text{Tr}_{\mathcal{H}_E} [\rho^{SAE}] = \sum_{ij} c_i c_j^* \langle e_j | e_i \rangle |s_i\rangle \langle s_j| |a_i\rangle \langle a_j| \quad (2.5)$$

Si on peut démontrer que les éléments $|e_i\rangle$ sont orthogonaux, l'état du sous-système \mathcal{SA} se réduit à un état de mélange incohérent,

$$\rho^{SA} = \sum_i |c_i|^2 |s_i\rangle \langle s_i| |a_i\rangle \langle a_i| \quad (2.6)$$

Les modèles développés pour étudier la décohérence essaient de répondre à la question suivante : pendant combien de temps et sous quelles conditions les états intriqués $\{|e_i\rangle\}$ deviennent orthogonaux ? Cela dépend généralement de la nature de l'interaction entre l'environnement et le système. L'intensité de cette interaction détermine le temps de ce processus et permet d'identifier les différents régimes de la décohérence. Maintenant, on considère l'interaction entre le système et l'environnement avec plus de détails pour trouver les circonstances sous lesquelles on obtient la décohérence.

2.1 Régimes de la décohérence

La décohérence est plus effective pour certains états du système. D'autres états sont propres à certaines observables et restent stables vis-à-vis de la décohérence. Les observables correspondantes sont appelées pointeurs [76].

En suivant Schlosshauer [69], on va se concentrer seulement sur le système et l'environnement. L'hamiltonien du système composé est

$$H^{SE} = H^S + H^E + H^{int} \quad (2.7)$$

où H^S et H^E sont les hamiltoniens qui génèrent l'évolution libre du système et l'environnement, respectivement. H^{int} est l'hamiltonien d'interaction.

On peut identifier trois régimes de la décohérence [69]

(i) la limite de la mesure quantique, dans laquelle l'interaction entre le système et l'environnement

est tellement forte que les dynamiques libres, du système et de l'environnement, peuvent être négligées en comparaison avec l'évolution induite par l'interaction ($H^{SE} \approx H^{int}$).

(ii) La limite quantique de la décohérence, où la différence entre les niveaux d'énergies du système est grande en comparaison avec les fréquences présentes dans l'environnement $H^S \gg H^{int}$.

(iii) Le cas intermédiaire où l'interaction est du même ordre de grandeur que les évolutions libres. Ce cas est difficile et n'est généralement pas étudié.

2.1.1 La limite de la mesure quantique

On commence par le cas le plus simple de la limite de la mesure quantique. On suppose que l'état initial du système S reste invariant par l'action de l'hamiltonien $H^{SE} \approx H^{int}$. Cela signifie que l'évolution temporelle du système total est décrite par l'état de l'environnement,

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H^{int}t\right)|\psi_S\rangle|e_0\rangle = |\psi_S\rangle\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H^{int}t\right)|e_0\rangle \quad (2.8)$$

donc $|\psi_S\rangle$ doit être un état propre de l'hamiltonien d'interaction H^{int} . Dans le langage des observables, il s'agit des observables pointeurs dont les états propres restent stables sous l'effet de la décohérence induite par l'environnement. Ce sont les observables qui commutent avec H^{int} ,

$$[O^S, H^{int}] = 0 \quad (2.9)$$

Dans plusieurs cas, on peut écrire l'hamiltonien d'interaction sous forme d'un produit tensoriel

$$H^{int} = S \otimes E \quad (2.10)$$

où S et E sont des opérateurs qui agissent sur les espace de Hilbert du système et l'environnement, respectivement. Les observables pointeurs sont les observables qui commutent avec S . Si S est hermitique, il représente la quantité mesurée par l'environnement. Pour la position x , l'hamiltonien d'interaction s'écrit $H^{int} = x \otimes E$ et l'environnement effectue une mesure dans la base $|x\rangle$ de la position du système. L'évolution temporelle s'écrit

$$e^{-iH^{int}t}|x\rangle|e_0\rangle = |x\rangle|e_x(t)\rangle \quad (2.11)$$

$$|e_x(t)\rangle = e^{-ixEt}|e_0\rangle \quad (2.12)$$

L'indice $-x-$ dans $|e_x(t)\rangle$ indique que l'état de l'environnement contient des informations sur la position du système.

2.1.2 La limite quantique de la décohérence

Dans le deuxième régime, la limite quantique de la décohérence, on observe des corrélations entre l'environnement et l'énergie du système, parce qu'elle est la seule quantité qui peut être mesurée par l'environnement. Cet effet a été analysé par Paz et Zurek [77]. Ils ont trouvé que l'observable pointeur dans ce cas est l'hamiltonien du système. Donc, les états propres d'énergie sont stables mais leur superposition sera détruite par la décohérence.

Dans cette section nous avons décrit les différents régimes de la décohérence définis par l'intensité de l'interaction entre le système et l'environnement, mais on n'a pas spécifié l'évolution de l'état du système au cours de cette interaction. Dans ce qui suit, on va établir l'équation qui détermine l'évolution temporelle de l'état du système dans le cadre de la théorie des systèmes quantiques ouverts.

2.2 L'équation maîtresse de Born-Markov

L'équation maîtresse de Born-Markov joue un rôle important dans l'étude des systèmes quantiques ouverts car elle permet de traiter les problèmes de la décohérence par une forme mathématique simple. La comparaison entre les prédictions des modèles basés sur cette équation et les données expérimentales montre que les hypothèses de Born et de Markov utilisées pour établir cette équation sont raisonnables dans plusieurs situations.

2.2.1 Dérivation de l'équation maîtresse de Born-Markov

L'équation qui décrit l'évolution d'un système quantique fermé, dont l'état est exprimé par la matrice densité, est l'équation de Von Neumann

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)] \quad (2.13)$$

Dans la représentation interaction cette équation prend la forme suivante

$$\frac{d\rho^I(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H_{int}(t), \rho^I(t)] \quad (2.14)$$

où $H_{int}(t)$ est l'hamiltonien d'interaction. On peut écrire la dernière équation sous la forme intégrale

$$\rho^I(t) = \rho(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [H_{int}(t'), \rho^I(t')] \quad (2.15)$$

En remplaçant l'équation précédente dans le commutateur de l'équation (2.14), on obtient

$$\frac{d\rho^I(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H_{int}(t), \rho(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [H_{int}(t), [H_{int}(t'), \rho^I(t')]] \quad (2.16)$$

L'opérateur densité $\rho^I(t)$ décrit l'état du système total (système-environnement). Pour trouver

une équation qui décrit l'évolution du système réduit, on effectue la trace sur les degrés de liberté de l'environnement, on trouve

$$\frac{d\rho_S^I(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_E [H_{int}(t), \rho(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_E \left[H_{int}(t), \left[H_{int}(t'), \rho^I(t') \right] \right] \quad (2.17)$$

En considérant que $\text{Tr}_E [H_{int}(t), \rho(0)] = 0$, l'équation (2.17) devient

$$\frac{d\rho_S^I(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_E \left[H_{int}(t), \left[H_{int}(t'), \rho^I(t') \right] \right] \quad (2.18)$$

cette équation contient toujours l'état du système composé $\rho^I(t')$. Pour trouver une équation qui dépend seulement de l'état du système réduit, il faut utiliser l'approximation de Born.

2.2.2 L'approximation de Born

On considère que le couplage entre le système et l'environnement est faible ce qui permet d'écrire la matrice densité du système total sous la forme factorisée

$$\rho^I(t) = \rho_S^I(t) \otimes \rho_E(t), \forall t \geq 0 \quad (2.19)$$

En plus, l'environnement a un grand nombre de degrés de libertés, donc l'effet de l'interaction sur son état peut être négligé. L'état de l'environnement reste stationnaire durant l'évolution

$$\rho_E(t) = \rho_E(0) = \rho_E \quad (2.20)$$

Alors

$$\rho^I(t) = \rho_S^I(t) \otimes \rho_E \quad (2.21)$$

L'approximation de Born conduit à la forme suivante pour l'équation maîtresse

$$\frac{d\rho_S^I(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_E \left[H_{int}(t), \left[H_{int}(t'), \rho_S^I(t') \otimes \rho_E \right] \right] \quad (2.22)$$

Cette équation est non locale dans le temps. Pour la transformer en une équation locale, on utilise l'approximation markovienne.

2.2.3 L'approximation de Markov

On peut écrire l'hamiltonien d'interaction sous la forme

$$H_{int}(t) = \sum_{\alpha} S_{\alpha}(t) \otimes E_{\alpha}(t)$$

En remplaçant cette expression dans l'équation (2.22), on obtient

$$\frac{d\rho_S^I(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \sum_{\alpha\beta} Tr_E \left[S_\alpha(t) \otimes E_\alpha(t), \left[S_\beta(t') \otimes E_\beta(t'), \rho_S^I(t') \otimes \rho_E \right] \right] \quad (2.23)$$

Maintenant, on introduit la fonction de corrélation $C_{\alpha\beta}$,

$$C_{\alpha\beta}(t-t') = Tr_E \left\{ E_\alpha(t-t') E_\beta \rho_E \right\} \quad (2.24)$$

En utilisant l'équation précédente, on peut réécrire l'équation (2.23) sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_S^I(t)}{dt} = & -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \sum_{\alpha\beta} \left\{ C_{\alpha\beta}(t-t') \left[S_\alpha(t) S_\beta(t') \rho_S^I(t') - S_\beta(t') \rho_S^I(t') S_\alpha(t) \right] \right. \\ & \left. + C_{\alpha\beta}(t'-t) \left[\rho_S^I(t') S_\beta(t') S_\alpha(t) - S_\alpha(t) \rho_S^I(t') S_\beta(t') \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Pour simplifier la dernière équation on impose l'approximation de Markov. Cette dernière dit que l'environnement oublie les auto-corrélations, construites durant l'interaction, dans un temps caractéristique τ_{corr} très inférieur au temps τ_S durant lequel l'évolution du système devient significative. Pour cela, nous pourrions remplacer l'opérateur densité $\rho_S^I(t')$ par $\rho_S^I(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_S^I(t)}{dt} = & -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \sum_{\alpha\beta} \left\{ C_{\alpha\beta}(t-t') \left[S_\alpha(t) S_\beta(t') \rho_S^I(t) - S_\beta(t') \rho_S^I(t) S_\alpha(t) \right] \right. \\ & \left. + C_{\alpha\beta}(t'-t) \left[\rho_S^I(t) S_\beta(t') S_\alpha(t) - S_\alpha(t) \rho_S^I(t) S_\beta(t') \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Pour $t-t' \gg \tau_{corr}$ la fonction de corrélation $C_{\alpha\beta}$ s'annule, donc l'intégrale s'annule aussi. Cela permet d'étendre la limite inférieure de l'intégrale jusque'à $-\infty$. En posant $\tau = t-t'$, l'équation (2.26) devient

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_S^I(t)}{dt} = & -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^{+\infty} d\tau \sum_{\alpha\beta} \left\{ C_{\alpha\beta}(\tau) \left[S_\alpha(t) S_\beta(t-\tau) \rho_S^I(t) - S_\beta(t-\tau) \rho_S^I(t) S_\alpha(t) \right] \right. \\ & \left. + C_{\alpha\beta}(-\tau) \left[\rho_S^I(t) S_\beta(t-\tau) S_\alpha(t) - S_\alpha(t) \rho_S^I(t) S_\beta(t-\tau) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Pour transformer la dernière équation à l'image de Schrödinger, on utilise la relation suivante

$$\rho_S^I(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H_S t} \rho_S(t) e^{-\frac{i}{\hbar} H_S t} \quad (2.28)$$

cette transformation conduit à l'équation

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho_S(t)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^{+\infty} d\tau \sum_{\alpha\beta} \{C_{\alpha\beta}(\tau) [S_\alpha, S_\beta(-\tau)\rho_S(t)] + C_{\beta\alpha}(-\tau) [\rho_S(t)S_\beta(-\tau), S_\alpha]\} \quad (2.29)$$

On simplifie l'équation précédente en introduisant les opérateurs C_α, B_α indépendants du temps définis par

$$B_\alpha = \int_0^{+\infty} d\tau \sum_{\beta} C_{\alpha\beta}(\tau) S_\beta(-\tau) \quad (2.30)$$

$$C_\alpha = \int_0^{+\infty} d\tau \sum_{\beta} C_{\beta\alpha}(-\tau) S_\beta(-\tau) \quad (2.31)$$

La forme finale de l'équation maîtresse de Born-Markov est

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho_S(t)] - \frac{1}{\hbar^2} \sum_{\alpha} \{[S_\alpha, B_\alpha \rho_S(t)] + [\rho_S(t)C_\alpha, S_\alpha]\} \quad (2.32)$$

Une forme particulièrement intéressante de cette équation est celle de Lindblad que nous allons établir par la méthode des semi-groupes.

2.3 Méthode des semi-groupes

L'évolution de l'état d'un système ouvert est gouvernée par l'équation maîtresse (2.32). Notre but est de trouver une équation similaire par la méthode des semi-groupes dynamiques. Cette équation peut être spécifiée par un super-opérateur qui est un opérateur linéaire qui lie l'ensemble des états antérieurs du système à la dérivée à l'instant t

$$\partial_t \rho = \mathcal{K} \{ \{ \rho_\tau : \tau \leq t \} \} \quad (2.33)$$

L'interprétation de la dépendance de la dynamique du système de son histoire est que l'environnement a une mémoire. Mais, dans un temps caractéristique τ très supérieur au temps τ_{corr} , qui représente la durée de corrélation entre le système et l'environnement, l'effet de mémoire peut être négligé. Dans ce cas, une équation maîtresse qui dépend seulement de l'état du système ρ à l'instant t peut être trouvée. Cette équation a la forme générale suivante

$$\partial_t \rho(t) = \mathcal{L} \rho(t) \quad (2.34)$$

\mathcal{L} est un super-opérateur dit opérateur de Liouville. Les équations maîtresses de ce type sont appelées markoviennes à cause de leurs ressemblances à l'équation de Chapman-Kolmogorov pour les processus markoviens classiques [11].

2.3.1 Semi-groupes dynamiques

La notion de semi-groupe dynamique permet de formuler rigoureusement l'hypothèse de Markov dans la théorie quantique. Pour l'introduire nous avons besoin de certaines notions de la théorie des systèmes quantiques ouverts.

2.3.1.1 Applications dynamiques

Une application dynamique est une famille \mathcal{W} d'applications \mathcal{W}_t qui vérifient les propriétés de préservation de la trace, à savoir, la linéarité convexe et la positivité complète

$$\mathcal{W}_t : \rho_0 \rightarrow \rho_t, \text{ pour } t \in \mathbb{R}_0^+ \quad (2.35)$$

avec $\mathcal{W}_0 = id$. Cette famille d'applications dynamiques décrit l'évolution temporelle de l'état d'un système par une transformation de l'état initial ρ_0 à un état valable ρ_t à l'instant t .

Les propriétés des applications \mathcal{W}_t mentionnées ci-dessus ont un sens physique déterminé. La condition de préservation de la trace garantit la normalisation de l'état ρ

$$tr(\rho_t) = 1 \quad (2.36)$$

et la linéarité convexe

$$\mathcal{W}_t(\lambda\rho_0 + (1 - \lambda)\rho'_0) = \lambda\mathcal{W}_t(\rho_0) + (1 - \lambda)\mathcal{W}_t(\rho'_0), \text{ pour tout } : 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (2.37)$$

garantit que la transformation des états de mélange est consistante avec la notion classique d'ignorance [10]. La propriété de la positivité complète signifie que toutes les extensions possibles des applications positives \mathcal{W}_t par produit tensoriel (défini par l'application identité id) aux espaces de dimensions supérieures restent positives

$$\mathcal{W}_t \otimes id \geq 0 \quad (2.38)$$

Cette propriété garantit que l'état du système reste positif si il est la partie réduite d'un état non séparable de dimension supérieure.

2.3.1.2 Les représentations de Kraus

Une application dynamique admet une représentation, dite de Kraus[45], de la forme suivante

$$\mathcal{W}_t(\rho) = \sum_{k=1}^N W_k(t)\rho W_k^\dagger \quad (2.39)$$

Les opérateurs de Kraus $W_k(t)$ vérifient la relation de fermeture

$$\sum_{k=1}^N W_k^\dagger(t) W_k(t) = I \quad (2.40)$$

Le nombre des opérateurs $W_k(t)$ est limité par la dimension de l'espace de Hilbert du système.

$$N \leq \dim(\mathcal{H})^2 \quad (2.41)$$

2.3.1.3 L'hypothèse du semi-groupe

On peut considérer que les applications $\{\mathcal{W}_t, t \in \mathbb{R}_0^+\}$ forment un semi-groupe dynamique continu [4]

$$\mathcal{W}_{t_2}(\mathcal{W}_{t_1}(\cdot)) = \mathcal{W}_{t_1+t_2}(\cdot) \quad (2.42)$$

Cette hypothèse est violée dans un temps microscopique réel, mais elle reste raisonnable dans un temps caractéristique beaucoup plus long que le temps pris par l'environnement pour oublier l'interaction avec le système.

Pour un semi-groupe dynamique, il existe un générateur, un super-opérateur, qui satisfait

$$\mathcal{W}_t = e^{\mathcal{L}t} \quad (2.43)$$

Dans ce cas, $\mathcal{W}_t(\rho)$ est la solution formelle de l'équation maîtresse.

2.3.2 La forme de Lindblad

Maintenant, on peut trouver le générateur du semi-groupe dynamique, en prenant $\dim(\mathcal{H}) = d \leq \infty$. Les opérateurs bornés en \mathcal{H} forment un espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ de dimension d^2 qui devient un espace de Hilbert si on ajoute le produit scalaire de Hilbert-Schmidt.

On considère une base orthogonale des opérateurs $\{E_j : 1 \leq j \leq d^2\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$, le produit scalaire est définie par

$$(E_i, E_j) = \text{tr}(E_i^\dagger E_j) = \delta_{ij} \quad (2.44)$$

On peut décomposer un opérateur de Hilbert-Schmidt quelconque W_k dans cette base comme suit

$$W_k = \sum_{j=1}^{d^2} (E_j, W_k) E_j \quad (2.45)$$

On choisit l'un des opérateurs de base (E_{d^2}) proportionnel à l'opérateur identité

$$E_{d^2} = \frac{1}{\sqrt{d}} I \quad (2.46)$$

En remplaçant cette relation dans l'équation (2.44), on trouve que tous les éléments de la base $\{E_j\}$ ont une trace nulle.

La représentation des super-opérateurs des applications dynamiques (2.39) dans la base $\{E_j\}$ prend la forme suivante

$$\mathcal{W}_t(\rho) = \sum_{i,j=1}^{d^2} c_{ij}(t) E_i \rho E_j^\dagger \quad (2.47)$$

où les coefficients c_{ij} sont définis par

$$c_{ij}(t) = \sum_{k=1}^N (E_i, W_k(t))(E_j, W_k(t))^* \quad (2.48)$$

On peut calculer le générateur du semi-groupe dynamique par la différenciation de ρ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\rho &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathcal{W}_\tau(\rho) - \rho}{\tau} \\ &= \underbrace{\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{d} c_{d^2 d^2} - 1}{\tau} \rho}_{c_0} + \underbrace{\lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{d^2-1} \frac{c_{id^2}(\tau)}{\sqrt{d\tau}} E_i \rho}_{B} + \underbrace{\rho \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{d^2-1} \frac{c_{d^2 j}(\tau)}{\sqrt{d\tau}} E_j^\dagger}_{B^\dagger} + \sum_{i,j} \underbrace{\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{c_{ij}(\tau)}{\tau}}_{\alpha_{ij}} E_i \rho E_j^\dagger \\ &= c_0 \rho + B \rho + \rho B^\dagger + \sum_{i,j=1}^{d^2-1} \alpha_{ij} E_i \rho E_j^\dagger \\ &= \frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \frac{1}{\hbar} (G \rho + \rho G) + \sum_{i,j=1}^{d^2-1} \alpha_{ij} E_i \rho E_j^\dagger \end{aligned} \quad (2.49)$$

Dans la dernière équation on a introduit les opérateurs

$$G = \frac{\hbar}{2} (B + B^\dagger + c_0) \quad (2.50)$$

$$H = -\frac{i\hbar}{2} (B - B^\dagger) \quad (2.51)$$

La conservation de la trace $tr(\mathcal{L}\rho) = 0$ permet de relier les opérateurs G avec la matrice (α_{ij}) .

$$0 = tr(\mathcal{L}\rho) = 0 + tr \left[\left[\frac{2G}{\hbar} + \sum_{i,j=1}^{d^2-1} \alpha_{ij} E_j^\dagger E_i \right] \rho \right] \quad (2.52)$$

Cette relation est valable quelque soit l'état ρ , donc on peut écrire

$$G = -\frac{\hbar}{2} \sum_{i,j=1}^{d^2-1} \alpha_{ij} E_j^\dagger E_i \quad (2.53)$$

En remplaçant l'équation précédente dans (2.49), on obtient

$$\mathcal{L}\rho = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \sum_{i,j=1}^{d^2-1} \alpha_{ij} \left(E_i \rho E_j^\dagger - \frac{1}{2} E_j^\dagger E_i \rho - \frac{1}{2} \rho E_j^\dagger E_i \right) \quad (2.54)$$

Si nous diagonalisons la matrice α_{ij} par une transformation unitaire U

$$U\alpha U^\dagger = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{d^2-1}) \quad (2.55)$$

nous obtenons

$$L_k = \sum_{j=1}^{d^2-1} E_j U_{jk}^\dagger \Rightarrow E_j = \sum_{k=1}^{d^2-1} L_k U_{kj} \quad (2.56)$$

On obtient finalement l'équation maîtresse dans la forme de Lindblad

$$\partial_t \rho = \mathcal{L}\rho = \frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \sum_{k=1}^N \gamma_k L_k \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2} L_k^\dagger L_k \rho - \frac{1}{2} \rho L_k^\dagger L_k \quad (2.57)$$

où $N \leq d^2 - 1$. Les opérateurs L_k sont appelés opérateurs de Lindblad [46]. La forme spécifique de ces opérateurs dépend du modèle utilisé pour décrire l'environnement.

2.4 Théorie de Feynman-Vernon

Dans cette section, on va formuler l'évolution d'un système quantique ouvert dans le langage des intégrales de chemin. Cette méthode est une autre technique pour calculer la matrice densité réduite d'un système composé, mais la situation physique est similaire aux dernières sections.

On considère deux systèmes en interaction S et E . Le système S qu'on souhaite étudier est décrit par les variables q et l'environnement par les variables x . La matrice densité du système total évolue unitairement suivant la loi

$$\rho(t_f) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t_f\right) \rho(t_i) \exp\left(\frac{i}{\hbar} H t_f\right) \quad (2.58)$$

où l'hamiltonien du système total est

$$H = H_S + H_E + H_I \quad (2.59)$$

où H_S est l'hamiltonien propre du système, H_E est l'hamiltonien de l'environnement et H_I est l'hamiltonien d'interaction. On peut écrire la matrice densité dans la représentation de configuration comme suit

$$\langle q_f x_f | \rho(t_f) | q'_f x'_f \rangle = \int dq_i dq'_i dx_i dx'_i \langle q_f x_f | \exp(-\frac{i}{\hbar} H t_f) | q_i x_i \rangle \langle q_i x_i | \rho(t_i) | q'_i x'_i \rangle \langle q'_i x'_i | \exp(\frac{i}{\hbar} H t_f) | q'_f x'_f \rangle \quad (2.60)$$

Les amplitudes de transition de l'équation précédente peuvent être exprimées comme une intégrale de chemin

$$\langle q_f x_f | \exp(-\frac{i}{\hbar} H t_f) | q_i x_i \rangle = \int d[q(t)] d[x(t)] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[q(t), x(t)]\right) \quad (2.61)$$

$$\langle q'_i x'_i | \exp(+\frac{i}{\hbar} H t_f) | q'_f x'_f \rangle = \int d[q'(t)] d[x'(t)] \exp(-\frac{i}{\hbar} S[q'(t), x'(t)]) \quad (2.62)$$

où S est l'action totale qu'on peut écrire sous la forme

$$S = S_S + S_E + S_I \quad (2.63)$$

La somme dans les intégrales des chemins (2.60) et (2.62) est effectuée sur tous les chemins qui satisfont les conditions aux limites suivantes

$$q(t_i) = q_i, q(t_f) = q_f, \text{ etc} \quad (2.64)$$

Dans l'étude de la décohérence, on s'intéresse seulement à la matrice densité réduite [47, 32]. Cette dernière est définie par la trace sur les degrés de liberté de l'environnement

$$\rho_S(q_f, q'_f, t_f) = \int dx_f dx'_f \delta(x_f - x'_f) \langle q_f x_f | \rho(t_f) | q'_f x'_f \rangle \quad (2.65)$$

En utilisant les équations (2.60) et (2.65), on peut réécrire l'équation précédente comme suit

$$\begin{aligned} \rho_S(q_f, q'_f, t_f) &= \int dq_i dq'_i dx_i dx'_i dx_f \langle q_i x_i | \rho(t_i) | q'_i x'_i \rangle \int d[q(t)] d[x(t)] d[q'(t)] d[x'(t)] \\ &\times \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_S[q(t)] - \frac{i}{\hbar} S_S[q'(t)] + \frac{i}{\hbar} S_E[x(t)] - \frac{i}{\hbar} S_E[x'(t)] + \frac{i}{\hbar} S_I[q(t), x(t)]\right) \end{aligned} \quad (2.66)$$

L'équation (2.66) contient toujours la matrice densité totale $\rho_i(q_i, x_i, q', x')$. Pour trouver une expression qui dépend seulement de la matrice densité du système réduit, on considère que l'état initial ρ_i peut être factorisé [20],

$$\rho_i(q_i, x_i, q'_i, x'_i) = \rho_S(q_i, q'_i) \rho_E(x_i, x'_i) \quad (2.67)$$

Cette condition exprime le fait que les corrélations quantiques entre le système et l'environnement sont absentes à l'état initial où elles peuvent être négligées.

Avec la condition (2.67), on arrive à l'expression finale de la matrice densité réduite

$$\rho_S(q_f, q'_f, t_f) = \int dq_i dq'_i J(q_f, q'_f, t_f, q_i, q'_i, t_i) \rho_S(q_i, q'_i, t_i) \quad (2.68)$$

où le super-propagateur J est défini par

$$J(q_f, q'_f, t_f, q_i, q'_i, t_i) = \int d[q(t)] d[q'(t)] \exp(iS_S[q(t)] - iS_S[q'(t)]) \mathcal{F}[q(t), q'(t)] \quad (2.69)$$

dans la dernière expression on a introduit la fonctionnelle d'influence définie par

$$\mathcal{F}[q(t), q'(t)] = \int dx_i dx'_i dx_f \rho_E(x_i, x'_i) \int d[x(t)] d[x'(t)] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_E[x(t)] - \frac{i}{\hbar} S_E[x'(t)]\right) \quad (2.70)$$

$$+ \frac{i}{\hbar} S_I[q(t), x(t)] - \frac{i}{\hbar} S_I[q'(t), x'(t)] \quad (2.71)$$

La fonctionnelle d'influence représente l'effet de l'environnement sur l'état du système. Si les différents modèles de l'environnement donnent la même fonctionnelle d'influence, les dynamiques réduites du sous-système seront indiscernables [24]. S'il n'y a pas une interaction entre le système et l'environnement, la fonctionnelle d'influence est égale à l'unité.

Dans la dérivation précédente, la seule hypothèse utilisée est la factorisation de l'état initial du système total. À cause du fait qu'on n'a pas besoin de plusieurs hypothèses pour déduire cette méthode, la fonctionnelle d'influence est utilisée pour établir des équations maîtresses exactes pour la matrice densité réduite [34, 35].

2.5 Théorie des histoires consistantes

La théorie des histoires consistantes est une approche ayant apparue dans les dernières années pour décrire la décohérence [27, 30, 63]. L'objet de cette théorie est la description de la décohérence pour les systèmes quantiques fermés. On va essayer dans cette section de décrire brièvement cette théorie suivant les travaux de Gell-Mann et Hartle [26].

Une histoire C_α est définie comme une chaîne de projecteurs qui spécifient les états d'un système quantique à des moments successifs, de la façon suivante

$$C_\alpha = P_{\alpha_n}^n(t_n) P_{\alpha_{n-1}}^{n-1}(t_{n-1}) \dots P_{\alpha_1}^1(t_1) \quad (2.72)$$

L'indice k dans $P_{\alpha_k}^k(t_k)$ indique l'ensemble des projecteurs à l'instant t_k et α_k indique l'alternative choisie à cette instant. Par exemple, k peut être la projection du spin et α_k indique "spin en haut". Les opérateurs $P_{\alpha_k}^k(t_k)$ définissent l'opérateur d'évolution.

$$U_\alpha = U(t_n - t_{n-1})P_{\alpha_{n-1}}^{n-1}(t_{n-1})U(t_{n-1} - t_{n-2})\dots P_{\alpha_1}^1(t_1)U(t_1 - t_0) \quad (2.73)$$

Dans la théorie des histoires consistantes, les projecteurs ne décrivent pas des mesures réelles, mais ils décrivent l'évolution libre du système quantique. L'opérateur U_α est l'une des plusieurs alternatives correspondant à l'évolution du système. L'opérateur d'évolution total est défini par

$$U = \sum_{\alpha} U_\alpha \quad (2.74)$$

où la somme est effectuée sur toutes les histoires c'est-à-dire sur tous les choix possibles des projecteurs aux différents moments.

On peut définir une partition des histoires $\{\alpha\}$ en classes $\{\bar{\alpha}\}$. L'histoire $\{\bar{\alpha}\}$ est représentée par les opérateurs $C_{\bar{\alpha}}$ définis par

$$C_{\bar{\alpha}} = \sum_{\alpha \in \bar{\alpha}} C_\alpha = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \bar{\alpha}} P_{\alpha_n}^n(t_n)P_{\alpha_{n-1}}^{n-1}(t_{n-1})\dots P_{\alpha_1}^1(t_1) \quad (2.75)$$

ces opérateurs sont nommés les opérateurs de classe .

Dans la théorie de la mesure de Von Neumann, on associe à chaque alternative k une probabilité

$$p_k = \text{tr}(P_k^\dagger \rho_0 P_k) \quad (2.76)$$

La généralisation à l'histoire C_α est donnée par

$$p(\alpha) = \text{tr}(C_\alpha^\dagger \rho_0 C_\alpha) \quad (2.77)$$

Cette quantité n'est pas nécessairement une probabilité. Le but est de trouver la condition pour laquelle $p(\alpha)$ définit une probabilité pour l'histoire C_α . Pour cela, on considère un cas particulier de l'équation (2.75) dans lequel on définit $C_{\bar{\alpha}}$ comme suit

$$C_{\bar{\alpha}} = C_\alpha + C_\beta \quad (2.78)$$

Par conséquent

$$p(C_{\bar{\alpha}}) = p(C_\alpha) + p(C_\beta) + 2\text{Re}(\text{tr}(C_\alpha \rho_0 C_\beta)) \neq p(C_\alpha) + p(C_\beta) \quad (2.79)$$

On peut associer une probabilité à l'histoire $C_{\bar{\alpha}}$ si le dernier terme de l'équation précédente est égal à zéro. Cette condition peut être réexprimée en utilisant la fonctionnelle de décohérence

$$\mathcal{D}(\alpha, \alpha') = \text{tr}(C_\alpha \rho_i C_\alpha^\dagger) \quad (2.80)$$

où ρ_i est la matrice densité initiale. À partir de l'équation (2.79), on conclut qu'on peut associer à l'histoire C_α la probabilité $p(\alpha)$ définie par (2.77) si la fonctionnelle de décohérence (2.80) satisfait la relation

$$\text{Re}(\mathcal{D}(\alpha, \alpha')) = 0, \forall \alpha \neq \alpha' \quad (2.81)$$

Cette condition est dite condition de consistance. Dans le cas où la condition (2.81) est vérifiée, on peut associer à C_α la probabilité

$$p(\alpha) = \mathcal{D}(\alpha, \alpha) \quad (2.82)$$

Si la condition de consistance est vérifiée, les histoires α deviennent des alternatives classiques car elles vérifient la loi de sommation des probabilités. Cette condition est appelée aussi la condition de décohérence.

Chapitre 3

Mesure continue

La description la plus simple de la mesure quantique a été élaborée par Von Neumann [62]. En mécanique quantique, la mesure est traitée en ignorant l'appareil et la durée de la mesure. Cependant, cette description n'est pas suffisante pour un système soumis à une mesure continue. Généralement, on veut comprendre le comportement du système si la mesure est appliquée continuellement. Ceci est l'objet de la théorie de la mesure quantique continue [38]. Notre but est de présenter l'approche de Mensky de la mesure continue basée sur les intégrales de chemin restreintes.

3.1 Mesure quantique continue

On présente maintenant trois types de mesures : la mesure précise de Von Neumann, la mesure approximative et la mesure séquentielle approximative. Cette dernière peut être vue comme un modèle de mesure continue.

3.1.1 Mesure précise

Décrivons la mesure d'un système quantique conformément au modèle de Von Neumann.

L'état d'un système quantique est décrit par un vecteur $|\psi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle$ dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} . La mesure d'une observable A donne ses valeurs propres a_i comme résultats possibles avec les probabilités

$$p_i = |\langle a_i | \psi \rangle|^2 \quad A |a_i\rangle = a_i |a_i\rangle \quad (3.1)$$

Autrement dit, $c_i = \langle a_i | \psi \rangle$ est l'amplitude de probabilité que la mesure donne le résultat a_i . L'état du système juste après la mesure se réduit à l'état $|a_i\rangle$. Cette transition non unitaire et acausale est appelée réduction du paquet d'ondes (ou effondrement de l'état $|\psi\rangle$, [71]) .

L'effet de la mesure peut aussi être représenté par le projecteur P_i défini par [60]

$$P_i = |a_i\rangle\langle a_i| \quad (3.2)$$

La mesure donne le résultat a_i avec la probabilité

$$p_i = \langle \psi | P_i | \psi \rangle \quad (3.3)$$

et l'état du système après la mesure se réduit à $P_i | \psi \rangle$. L'ensemble des projecteurs $\{P_i\}$ satisfont les conditions de fermeture et d'orthogonalité

$$\sum_i P_i = 1, \quad P_i P_j = \delta_{ij} P_i \quad (3.4)$$

La description précédente de la mesure s'applique aux états purs. Pour les états de mélange, il faut utiliser la matrice densité ρ

$$\rho = \sum_{ij} c_{ij} | a_i \rangle \langle a_j | \quad (3.5)$$

qui décrit un état pur quand tous les coefficients sont des produits

$$\forall i, j, c_{ij} = c_i c_j^* \iff \rho = | \Psi \rangle \langle \Psi | \quad (3.6)$$

Le procédé de Schmidt [69], pour savoir si un état est pur ou un mélange, se base sur le fait qu'il existe toujours un système orthonormé $\{ | \varphi_k \rangle = \sum_i U_{ki} | a_i \rangle \}$, où la matrice densité est diagonale

$$\rho = \sum_k s_k | \varphi_k \rangle \langle \varphi_k | \quad (3.7)$$

Les coefficients s_k sont les probabilités classiques correspondants aux états $| \varphi_k \rangle$. Ils satisfont donc à la condition de normalisation

$$\sum_k s_k = 1 \iff \text{tr}(\rho) = 1 \quad (3.8)$$

et expriment notre ignorance du système. C'est-à-dire que le système peut être dans l'un des états purs $\rho_k = | \varphi_k \rangle \langle \varphi_k |$ mais nous ignorons lequel. Nous ne connaissons que la probabilité correspondante. S'il y a un seul terme dans (3.7), l'état est pur. Sinon, c'est un mélange.

Quand le système est dans l'état ρ , la mesure de l'observable A donne le résultat a_i avec la probabilité

$$p_i = \text{tr}(P_i \rho), \quad P_i = | a_i \rangle \langle a_i | \quad (3.9)$$

et le système se réduit après la mesure à l'état

$$\rho_i = \frac{P_i \rho P_i}{\text{tr}(P_i \rho)} \quad (3.10)$$

avec

$$\text{tr}(\rho_i) = 1, \quad \sum_i p_i = 1 \quad (3.11)$$

Si on ignore le résultat de la mesure, c'est-à-dire que l'on réalise la mesure mais on ne lit pas le résultat, la matrice densité ρ_i après la mesure doit être remplacée par

$$\rho' = \sum_i P_i \rho P_i \quad (3.12)$$

Dans la description de l'état du système par la matrice densité ρ' , on a tenu compte de tous les résultats et la mesure est dite non sélective.

3.1.2 Mesure approximative

Dans la mesure précise, le résultat obtenu est supposé être la valeur réelle du système quantique. Par exemple, si le résultat de la mesure de la position d'une particule donne $x = 2m$ cela signifie que la cette particule se trouve réellement à cette position. On sait que ceci ne correspond pas à la réalité car la mesure est toujours imprécise.

Pour tenir compte de ce fait, on introduit la mesure approximative [68] notée $\{a\}$ et décrite par un ensemble d'opérateurs $\{P_a\}$. Pour simplifier, supposons que cette mesure ne donne pas une seule valeur mais un ensemble de résultats I_a constitué de plusieurs valeurs i que donnerait une mesure projective (précise) P_i . Il est donc naturel de poser

$$P_a = \sum_{i \in I_a} P_i \quad (3.13)$$

La propriété (3.4) des projecteurs P_i , implique que les opérateurs P_a sont des projecteurs

$$P_a P_a = \sum_{i,j \in I_a} P_i \delta_{ij} = P_a \quad (3.14)$$

Cependant, comme les ensembles I_a peuvent contenir des éléments communs, les projecteurs P_a ne sont pas orthogonaux. En effet, pour $a \neq b$, le produit

$$P_a P_b = \sum_{i \in I_a, j \in I_b} P_i \delta_{ij} = \sum_{i \in I_a \cap I_b} P_i \quad (3.15)$$

n'est pas toujours nul.

Si on effectue une mesure approximative, on obtient le résultat a avec une certaine probabilité p_a et l'état $|\psi\rangle$ du système se réduit après la mesure à un certain état $|\psi_a\rangle$. On cherche à déterminer cette probabilité et cet état. Pour cela, effectuons une mesure projective $\{i\}$ juste après cette mesure approximative. Évidemment, on obtient l'un des résultats i appartenant à l'intervalle I_a avec la

probabilité

$$p_{ai} = \frac{\langle \psi_a | P_i | \psi_a \rangle}{\langle \psi_a | \psi_a \rangle} \quad (3.16)$$

C'est la probabilité conditionnelle d'obtenir le résultat i après avoir obtenu le résultat a . Par conséquent, si l'on réalise une mesure projective $\{i\}$ directement sur l'état $|\psi\rangle$, la probabilité d'obtenir le résultat i est

$$\langle \psi | P_i | \psi \rangle = \sum_{a(i \in I_a)} p_a p_{ai} \quad (3.17)$$

où la somme s'étend sur tous les a pour lesquels I_a contient i .

S'il n'y a pas de dégénérescence, l'état après avoir obtenu le résultat i est proportionnel au vecteur propre correspondant à cette valeur. Il est donc indépendant de l'état initial et on doit avoir

$$P_i | \psi_a \rangle \sim P_i | \psi \rangle \quad (3.18)$$

Cette dernière relation et le fait que les opérateurs P_a satisfont la relation

$$P_i P_a = \begin{cases} P_i & \text{si } i \in I_a \\ 0 & \text{si } i \notin I_a \end{cases} \quad (3.19)$$

nous permet d'écrire la réduction de l'état du système sous la forme

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi_a\rangle = R_a |\psi\rangle \quad (3.20)$$

où

$$R_a = \mu P_a \quad (3.21)$$

et μ est une constante de normalisation. Si on remplace p_{ai} par son expression (3.16) dans (3.17) en utilisant encore l'équation (3.19), on obtient

$$1 = \mu^2 \sum_{a(i \in I_a)} \frac{p_a}{\langle \psi | R_a^2 | \psi \rangle} = 1 \quad (3.22)$$

On peut vérifier la dernière équation si on pose

$$p_a = \langle \psi_a | \psi_a \rangle = \langle \psi | R_a^2 | \psi \rangle \quad (3.23)$$

$$\mu^{-2} = n$$

où n est le nombre des éléments de l'ensemble I_a .

L'intérêt de la constante μ apparaît dans le cas où les points $i \in I_a$ n'ont pas la même probabilité

d'avoir lieu après le résultat a . On garde alors les mêmes relations mais on change uniquement les opérateurs R_a

$$R_a = \sum_{i \in I_a} \mu_{ai} P_i \quad (3.24)$$

Dans la description du système par l'état mélange ρ , la réduction est définie par

$$\rho \rightarrow \rho_a = R_a \rho R_a \quad (3.25)$$

et la densité de probabilité correspondante est

$$p_a = \text{tr}(\rho_a) \quad (3.26)$$

Cette procédure peut être généralisée au cas des observables à valeurs continues comme la position q [57]. Si la mesure donne q , la valeur réelle peut être n'importe quelle autre valeur q' mais avec une densité de probabilité $\Omega_q(q')$ (l'équivalent de μ_{ai}) qui peut être une distribution gaussienne

$$\Omega_q(q') = J \exp\left(-\frac{(q - q')^2}{2\Delta q^2}\right) \quad (3.27)$$

où Δq représente l'erreur sur la mesure. Cette mesure est décrite par des opérateurs R_q positifs qui donnent la probabilité

$$p(q) = \langle \psi | R_q^2 | \psi \rangle \quad (3.28)$$

d'obtenir le résultat q . Dans ce cas, l'état après la mesure est

$$| \psi \rangle \xrightarrow{q} R_q | \psi \rangle \quad (3.29)$$

où

$$(R_q \psi)(q') = R(q - q') \psi(q') \quad (3.30)$$

La fonction $R(q - q') = \sqrt{\Omega_q(q')}$ caractérise l'imprécision de l'appareil de mesure. Nous avons résumé les résultats de la mesure approximative continue sans les démontrer, car nous montrerons au dernier chapitre que la théorie stochastique correspond à ce type de mesure. Ceci nous permettra d'appliquer directement les résultats de la section suivante pour déduire une expression formelle du propagateur d'un système subissant une mesure continue en mécanique quantique stochastique.

3.1.3 Mesure séquentielle approximative

Maintenant, on considère une série de mesures imprécises appliquées au système, séparées par des intervalles d'évolutions libres. Si l'état initial à l'instant $t_0 = 0$ est $|\psi_0\rangle$, le système évolue librement

dans l'intervalle $[t_0, t_1]$ à l'état

$$|\psi_1\rangle = U(t_1, t_0) |\psi_0\rangle \quad (3.31)$$

Si la mesure de q à l'instant t_1 donne le résultat q_1 , l'état du système après la mesure se réduit à

$$|\psi'_1\rangle = R_{q_1} |\psi_1\rangle = R_{q_1} U(t_1, t_0) |\psi_0\rangle \quad (3.32)$$

La densité de probabilité correspondante est

$$p(q_1) = \langle \psi_1 | R_{q_1}^2 | \psi_1 \rangle = \langle \psi_0 | U^\dagger(t_1, t_0) R_{q_1}^2 U(t_1, t_0) | \psi_0 \rangle \quad (3.33)$$

À l'instant t_2 l'état du système devient

$$|\psi_2\rangle = U(t_2, t_1) |\psi'_1\rangle \quad (3.34)$$

Si une autre mesure est effectuée à l'instant t_2 donnant le résultat q_2 , l'état du système se réduit à

$$|\psi'_2\rangle = R_{q_2} U(t_2, t_1) R_{q_1} U(t_1, t_0) |\psi_0\rangle \quad (3.35)$$

avec la densité de probabilité

$$p(q_2) = \frac{\langle \psi_2 | R_{q_2}^2 | \psi_2 \rangle}{\langle \psi_2 | \psi_2 \rangle} \quad (3.36)$$

Si à la $(N - 1)$ -ième mesure on obtient le résultat q_{N-1} , après une évolution libre jusqu'à l'instant $t_N = T$, on obtiendra l'état

$$|\psi_N\rangle = U_{q_1 q_2 \dots q_{N-1}} |\psi_0\rangle \quad (3.37)$$

où

$$U_{q_1 q_2 \dots q_{N-1}} = U(t_N, t_{N-1}) R_{q_{N-1}} \dots U(t_2, t_1) R_{q_1} U(t_1, t_0) \quad (3.38)$$

La densité de probabilité pour la séquence des résultats $(q_1, q_2 \dots q_{N-1})$ est définie par

$$p(q_1, q_2 \dots q_{N-1}) = p(q_1) p(q_2) \dots p(q_{N-1}) \quad (3.39)$$

Dans la limite $(N \rightarrow \infty)$, l'équation (3.37) devient

$$|\psi_\alpha\rangle = U_\alpha |\psi_0\rangle, \quad p_\alpha = \langle \psi_\alpha | \psi_\alpha \rangle \quad (3.40)$$

où

$$U_\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} U_{q_1 q_2 \dots q_{N-1}} \quad (3.41)$$

Le résultat $(q_1, q_2 \dots q_{N-1})$ avec l'erreur Δq pour chaque q_i définit dans la limite ($N \rightarrow \infty$) un corridor continu de largeur $2\Delta q$ (voir figure 3.1). Dans cette limite, on obtient une série infinie de mesures pendant l'intervalle T . On peut considérer cette procédure comme un modèle de la mesure continue [8, 9, 39]. La mesure continue peut être aussi décrite

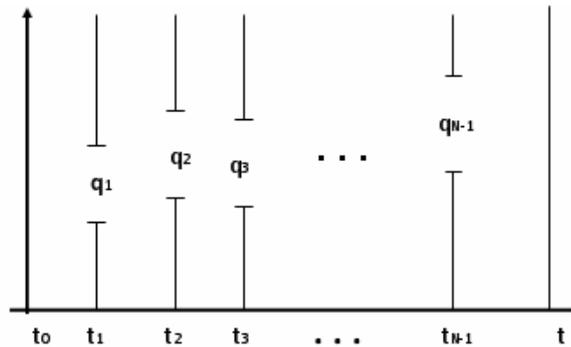


FIGURE 3.1 – Un corridor déterminé par une séquence des mesures approximatives

par les intégrales de chemin restreintes que nous allons établir maintenant.

3.2 Intégrale de chemin et mesure continue

La recherche sur la mesure quantique continue a commencé depuis longtemps (Zeh [75], Davies [17], Diosi [18]) à l'aide de modèles concrets pour l'appareil de mesure. Une approche indépendante du modèle basée sur les intégrales de chemin restreintes a été proposée par Mensky [48] et d'autres auteurs [1, 15, 16]. La mesure instantanée décrite dans les sections précédentes peut être obtenue comme une limite de la mesure continue [12, 59]. Nous présentons l'approche de Mensky.

Selon Feynman, l'une des différences principales entre la mécanique classique et la mécanique quantique est que dans la première on additionne les probabilités p alors que dans la seconde on somme les amplitudes de probabilités

$$A = A_1 + A_2 \quad (3.42)$$

où A_1 et A_2 sont les amplitudes de deux alternatives. La probabilité correspondante est

$$p = |A_1 + A_2|^2 \quad (3.43)$$

Dans l'expérience des deux fentes de Young, l'amplitude que la particule passe par l'une des fentes est A_1 et par l'autre A_2 . La loi de sommation des amplitudes de ces deux alternatives donne le mo-

dèle d'interférences bien connu. Cependant, si une observation est effectuée (obstruction de l'une des fentes) donnant une information sur la trajectoire du rayon lumineux, une alternative est éliminée. Dans le cas général, la somme des amplitudes doit être remplacée par une sommation sur les probabilités. Par exemple, supposons que l'on a un nombre N paire de fentes et que l'on peut savoir si la particule est passée par l'une des paires $(1, 2) \dots (N - 1, N)$ mais pas par quelle fente dans la même paire. Dans ce cas, on somme sur les amplitudes à l'intérieur de chaque paire

$$P_i = |A_{2i} + A_{2i+1}|^2 \quad (3.44)$$

mais on somme également les probabilités correspondant aux différentes paires

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_{N/2} \quad (3.45)$$

On dit que les alternatives dans chaque paire interfèrent mais les alternatives des différentes paires sont incompatibles. C'est cette idée qui a été exploitée par Mensky pour définir une amplitude de transition lorsque le système est soumis à une observation continue.

En effet, on a vu que le propagateur de Feynman [19] $U(t'' q'' | t' q')$ est une intégrale sur les amplitudes correspondant à tous les chemins (alternatives) possibles $[q]$ entre les points q' et q''

$$U(t'' q'' | t' q') = \int_{q'}^{q''} d[q] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[q]\right) \quad (3.46)$$

Une mesure continue réalisée, simultanément avec la transition entre les points q' et q'' , donne une information partielle qu'on peut exprimer par un ensemble de chemins I_α [58]. Par exemple, le résultat d'une mesure continue α de la position donne un chemin $[a]$ exprimé par la courbe $a(t)$. Autrement dit, à chaque instant t , cette mesure donne la valeur approximative $a(t)$ de la position réelle $q(t)$ avec une précision Δa . Connaissant le résultat de la mesure $\alpha = a(t)$, on peut estimer que la trajectoire réelle du système est située dans le corridor I_α de largeur $2\Delta a$ autour de $[a]$. Ce corridor est identifié avec le résultat α [54]. Par conséquent, l'amplitude de transition est une intégrale sur l'ensemble I_α

$$U_\alpha(t'' q'' | t' q') = \int_{I_\alpha} d[q] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[q]\right) \quad (3.47)$$

C'est le propagateur d'une particule qui subit une mesure continue. Si les points q' et q'' sont fixés, la même amplitude U_α correspond à la probabilité pour que la mesure donne le résultat α .

On peut utiliser une description plus générale de la mesure avec la relation

$$U_\alpha(t'' q'' | t' q') = \int_{q'}^{q''} d[q] w_\alpha[q] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[q]\right) \quad (3.48)$$

L'intégrale est effectuée sur tous les chemins qui relient les points q' et q'' et la fonctionnelle poids w_α représente l'effet de la mesure.

L'intégrale de chemin restreinte (3.47) peut être considérée comme une approximation de l'intégrale pondérée (3.48). On appelle l'amplitude (3.48) l'amplitude de mesure. Cette dernière permet d'estimer les probabilités des différents résultats α . Le résultat α_{cl} pour lequel $|U_\alpha|^2$ est maximum est le plus probable et les résultats pour lesquels $|U_\alpha|^2$ est proche de $|U_{\alpha_{cl}}|^2$ sont très probables aussi [53].

La fonctionnelle w_α peut être représentée par une exponentielle d'une intégrale sur le temps

$$w_\alpha = \exp \left(-\gamma \int_{t'}^{t''} dt K_\alpha(q, \dot{q}, t) \right) \quad (3.49)$$

L'intégrale de chemin restreinte (3.48) devient

$$U_\alpha(t'' q'' | t' q') = \int_{q'}^{q''} d[q] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_\alpha[q]\right) \quad (3.50)$$

où l'action a été remplacée par une action effective

$$S_\alpha[q] = S[q] + i\hbar\gamma \int_{t'}^{t''} dt K_\alpha(q, \dot{q}, t) \quad (3.51)$$

correspondant à un lagrangien effectif L_α défini par

$$L_\alpha = L + i\hbar\gamma K_\alpha \quad (3.52)$$

3.3 Évolution d'un système quantique soumis à une mesure continue

Dans cette section, on veut décrire l'évolution d'un système quantique soumis à une mesure continue. La relation (3.40) montre qu'une telle évolution durant l'intervalle $[t', t'']$ est décrite par l'opérateur d'évolution partiel $U_{t'' t'}^\alpha$ correspondant au résultat α

$$|\psi_{t''}^\alpha\rangle = U_{t'' t'}^\alpha |\psi_{t'}\rangle \quad (3.53)$$

Dans le but de pouvoir généraliser cette description de l'évolution à la mesure non sélective (voir plus bas), on utilise la matrice densité qui, pour un état pur, s'écrit

$$\rho_{t'} = |\psi_{t'}\rangle\langle\psi_{t'}| \quad (3.54)$$

Si la mesure donne le résultat α , l'état du système à l'instant t'' devient

$$\rho_{t''}^{\alpha} = | \psi_{t''}^{\alpha} \rangle \langle \psi_{t''}^{\alpha} | \quad (3.55)$$

Cette mesure est dite sélective. D'après la relation (3.53), la loi d'évolution du système s'exprime par

$$\rho_{t''}^{\alpha} = U_{t'' t'}^{\alpha} \rho_{t'} (U_{t'' t'}^{\alpha})^{\dagger} \quad (3.56)$$

Si l'état initial est un mélange d'états purs $| \psi_{t'}^i \rangle$, il s'écrit

$$\rho_{t'} = \sum_i p_i | \psi_{t'}^i \rangle \langle \psi_{t'}^i | \quad (3.57)$$

où les probabilités classiques p_i satisfont la relation

$$\sum_i p_i = 1 \quad (3.58)$$

Cette relation est équivalente à

$$\text{tr}(\rho_{t'}) = 1 \quad (3.59)$$

On peut décrire l'évolution de l'état mélange comme une évolution d'un ensemble des états purs. Ceci conduit à l'instant t'' aux mêmes probabilités classiques mais à des états purs différents

$$\rho_{t''}^{\alpha} = \sum_i p_i | \psi_{t''}^{(i)\alpha} \rangle \langle \psi_{t''}^{(i)\alpha} | \quad (3.60)$$

où

$$| \psi_{t''}^{(i)\alpha} \rangle = U_{t'' t'}^{\alpha} | \psi_{t'}^i \rangle \quad (3.61)$$

On suppose maintenant que la mesure a été réalisée mais on ne connaît pas encore le résultat. Cette mesure est dite non sélective. Dans ce cas, l'état final n'est pas connu et il faut sommer l'équation (3.56) sur tous les résultats possibles α

$$\rho_{t''} = \sum_{\alpha} \rho_{t''}^{\alpha} = \sum_{\alpha} U_{t'' t'}^{\alpha} \rho_{t'} (U_{t'' t'}^{\alpha})^{\dagger} \quad (3.62)$$

L'état $\rho_{t''}$ est normalisé

$$\text{tr}(\rho_{t''}) = 1 \quad (3.63)$$

si et seulement si les opérateurs $U_{t'' t'}^{\alpha}$ vérifient la condition de normalisation généralisée au cas d'un système soumis à une mesure continue

$$\sum_{\alpha} (U_{t'' t'}^{\alpha})^{\dagger} U_{t'' t'}^{\alpha} = 1 \quad (3.64)$$

Comme, les résultats de la mesure continue sont des variables continues, il faut remplacer la somme dans l'équation (3.62) par une intégrale avec une mesure $\mu(\alpha)$. Les relations (3.62) et (3.64) deviennent

$$\rho_{t''}^\alpha = \int d\mu(\alpha) U_{t''t'}^\alpha \rho_{t'}^\alpha (U_{t''t'}^\alpha)^\dagger \quad (3.65)$$

$$\int d\mu(\alpha) (U_{t''t'}^\alpha)^\dagger U_{t''t'}^\alpha = 1 \quad (3.66)$$

Ceci montre que la matrice densité $\rho_{t'}^\alpha$ ne satisfait pas la condition de normalisation. La trace $tr(\rho_{t'}^\alpha)$ est la densité de probabilité pour obtenir le résultat α [56] et la probabilité que la mesure donne un résultat contenu dans l'intervalle $[\alpha, \alpha + d\alpha]$ est donnée par

$$prob(\alpha, d\alpha) = tr(\rho_{t'}^\alpha) d\mu(\alpha) \quad (3.67)$$

Par conséquent, la probabilité que la mesure donne un résultat contenu dans l'ensemble A est

$$prob(\alpha \in A) = \int_A tr(\rho_{t'}^\alpha) d\mu(\alpha) \quad (3.68)$$

Pour illustrer ces résultats, en posant $t' = 0$, $t'' = T$ et $U_{t''t'}^\alpha = U_\alpha$, intéressons nous à la condition d'unitarité (3.66) et l'équation (3.65),

$$1 = \int d\mu(\alpha) U_\alpha^\dagger U_\alpha \quad (3.69)$$

$$\rho_T = \int d\mu(\alpha) U_\alpha \rho_0 U_\alpha^\dagger \quad (3.70)$$

dans la représentation configuration. On projette alors ces deux équations sur les bras et kets de la base $\{|q\rangle\}$ en introduisant les relations de fermeture appropriées entre ρ_0 , U_α et U_α^\dagger

$$\delta(q'_1 - q'_2) = \int d\mu(\alpha) dq \langle q'_1 | U_\alpha^\dagger | q \rangle \langle q | U_\alpha | q'_2 \rangle \quad (3.71)$$

$$\langle q'_1 | \rho_T | q'_2 \rangle = \int d\mu(\alpha) dq_1 dq_2 \langle q'_1 | U_\alpha | q_1 \rangle \langle q_1 | \rho_0 | q_2 \rangle \langle q_2 | U_\alpha^\dagger | q'_2 \rangle \quad (3.72)$$

En adoptant la notation usuelle pour les éléments de matrice de l'opérateur densité ρ et de l'opérateur U_α

$$\langle q_1 | \rho | q_2 \rangle = \rho(q_1, q_2), \quad \langle q'_1 | U_\alpha | q_1 \rangle = U(q'_1, q_1), \quad \langle q_2 | U_\alpha^\dagger | q'_2 \rangle = U^*(q'_2, q_2) \quad (3.73)$$

et en posant

$$U(q'_1, q_1 | q'_2, q_2) = \int d\mu(\alpha) U_\alpha(q'_1, q_1) U_\alpha^*(q'_2, q_2) \quad (3.74)$$

on obtient

$$\delta(q'_1 - q'_2) = \int dq U(q, q'_2 | q, q'_1) \quad (3.75)$$

$$\rho_T(q'_1, q'_2) = \int dq_1 \int dq_2 U(q'_1, q_1 | q'_2, q_2) \rho_0(q_1, q_2) \quad (3.76)$$

La dernière relation montre que la fonction $U(q'_1, q_1 | q'_2, q_2)$ s'interprète comme un super-propagateur (propagateur de la matrice densité) pour un système ayant subi une mesure continue.

En tenant compte de la relation (3.48), pour les éléments de matrice de l'opérateur U_α

$$U_\alpha(q', q) = \int_q^{q'} d[q] w_\alpha[q] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[q]\right) \quad (3.77)$$

le super-propagateur prend la forme

$$U(q'_1, q_1 | q'_2, q_2) = \int_{q_1}^{q'_1} d[q_1] \int_{q_2}^{q'_2} d[q_2] w([q_1], [q_2]) \exp\left(\frac{i}{\hbar} (S[q_1] - S[q_2])\right) \quad (3.78)$$

où

$$w([q_1], [q_2]) = \int d\mu(\alpha) w_\alpha[q_1] w_\alpha[q_2] \quad (3.79)$$

L'étude de la mesure continue de la position revient au calcul des intégrales (3.78) et (3.79).

3.4 Diffusion d'une particule dans le milieu de la mesure

Maintenant, on considère une application de la section précédente. Le super-propagateur de l'oscillateur harmonique a été évalué par Mensky pour une classe de mesures continues dites mesures spectrales [21, 51]. Cette appellation est due au fait que les appareils de mesures utilisés pour surveiller la position $q(t)$ de l'oscillateur harmonique sont effectifs pour certaines fréquences. Ainsi, la mesure de la position peut être considérée comme une mesure des composantes spectrales q_n de la décomposition

$$q(t) = \sum_n q_n \sin(\Omega_n t)$$

où $\Omega_n = \frac{n\pi}{T}$ avec l'erreur Δa_n pour chaque composante. Un cas particulier de l'oscillateur harmonique est la particule libre qui correspond à une fréquence nulle $\omega = 0$ de celui-ci. On présente ce dernier cas pour illustrer l'influence de la mesure continue de la position sur l'état de la particule. Précisément, on s'intéressera à l'effet de l'incertitude de la mesure de la position sur l'incertitude de l'impulsion. Le résultat sera interprété comme une diffusion de la particule par le milieu (appareil) de la mesure.

Pour une particule libre, dans un mouvement unidimensionnel, on obtient [51]

$$U(q'_1, q_1 | q'_2, q_2) = N \exp\left(\frac{im}{2\hbar T}[(q'_1 - q_1)^2 - (q'_2 - q_2)^2 - \frac{1}{3\Delta a^2}[(q_1 - q_2)^2(q'_1 - q'_2)^2 + (q_1 - q_2)(q'_1 - q'_2)]]\right) \quad (3.80)$$

Ce super-propagateur est un cas particulier du problème à trois dimensions. Si la mesure continue de la position donne le résultat

$$[a] = \{a(t) | 0 \leq t \leq T\} \quad (3.81)$$

avec l'erreur Δa , on peut poser

$$d\mu(\alpha) = d[a] = \prod_{t=0}^T da(t) \quad (3.82)$$

où a est un vecteur tridimensionnel. En choisissant une gaussienne pour la fonction poids des vecteurs position r

$$w_{[a]}[r] = \exp\left(-\frac{2}{T\Delta a^2} \int_0^T (r(t) - a(t))^2 dt\right) \quad (3.83)$$

le super-propagateur prend une forme analogue à (3.80)

$$U(r'_1, r_1 | r'_2, r_2) = N \exp\left(\frac{im}{2\hbar T}[(r'_1 - r_1)^2 - (r'_2 - r_2)^2 - \frac{1}{3\Delta a^2}[(r_1 - r_2)^2(r'_1 - r'_2)^2 + (r_1 - r_2)(r'_1 - r'_2)]]\right) \quad (3.84)$$

L'équation d'évolution de la particule libre s'écrit alors

$$\rho_T(r'_1, r'_2) = \int dr_1 \int dr_2 U(r'_1, r_1 | r'_2, r_2) \rho_0(r_1, r_2) \quad (3.85)$$

où $\rho_0(r_1, r_2)$ est l'état de cette particule à l'instant initial et $\rho_T(r'_1, r'_2)$ représente son état à l'instant T après la mesure continue de la position. Pour étudier l'influence de l'incertitude Δa sur l'impulsion, on doit calculer la valeur moyenne $\langle p | \rho_T | p \rangle$ donnant la distribution des impulsions de la particule à l'instant T . Si on utilise le résultat (1.48) pour l'intégrale gaussienne, on obtient

$$\langle p | \rho_T | p \rangle = \int dr_1 \int dr_2 W_p(r_1, r_2) \rho_0(r_1, r_2) \quad (3.86)$$

où

$$W_p(r_1, r_2) = N_2 \exp \left(-\frac{i}{\hbar} p (r_1 - r_2) - \frac{2}{\Delta a^2} (r_1 - r_2)^2 \right) \quad (3.87)$$

Une particule libre initialement localisée à l'origine avec une impulsion p_0 et des incertitudes

$$\Delta q_0 = \frac{l}{\sqrt{2}}, \quad \Delta p_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}l} \quad (3.88)$$

où l est la longueur caractéristique, est décrite par la fonction d'onde

$$\psi_0(r) = N_3 \exp \left(\frac{i}{\hbar} p_0 r - \frac{r^2}{2l^2} \right) \quad (3.89)$$

La matrice densité correspondante est

$$\rho_0(r_1, r_2) = |N_3|^2 \exp \left(-\frac{i}{\hbar} p_0 (r_1 - r_2) - \frac{1}{2l^2} (r_1^2 + r_2^2) \right) \quad (3.90)$$

En remplaçant la dernière équation dans (3.86), on obtient

$$\langle p | \rho_T | p \rangle = N_4 \exp \left(-\frac{(p - p_0)^2}{2 \left(\frac{\hbar^2}{l^2} + \frac{4\hbar^2}{\Delta a^2} \right)} \right) \quad (3.91)$$

Par conséquent, l'incertitude sur l'impulsion à l'instant T (après la mesure continue de la position avec l'incertitude Δa) est la suivante

$$\Delta p = \sqrt{\Delta p_0^2 + \frac{2\hbar^2}{\Delta a^2}} \quad (3.92)$$

On constate qu'elle a augmenté de la valeur $\frac{2\hbar^2}{\Delta a^2}$. Ceci implique que la mesure continue de la position avec l'erreur Δa provoque la diffusion de la particule dans le milieu de la mesure.

Chapitre 4

Mesure continue et décohérence

On considère maintenant quelques applications qui montrent l'intérêt de la mesure continue approximative et son lien avec la décohérence. Cependant, on commence d'abord par montrer que la mesure continue infiniment précise empêche l'évolution dynamique du système mesuré. C'est l'effet Zénon quantique.

4.1 Effet Zénon

Soit un système quantique décrit à l'instant initial par l'état $|\psi_1\rangle$. On cherche à trouver l'effet de la mesure continue sur son évolution. Pour cela, on considère une série constituée de N mesures appliquées à ce système pendant un intervalle T puis on suppose que $(N \rightarrow \infty)$. Dans cette limite, on s'attend à l'apparition de l'effet Zénon [22, 39, 66]. L'état du système à un instant quelconque t peut être exprimé par

$$|\psi(t)\rangle = C_1(t) |\psi_1\rangle + C_2(t) |\psi_2\rangle \quad (4.1)$$

où $C_1(0) = 1$ et $C_2(0) = 0$.

La mesure réalisée à l'instant Δt donne le résultat 2 correspondant à $|\psi_2\rangle$ avec une probabilité (de transition $1 \rightarrow 2$) p et le résultat 1 (correspondant à $|\psi_1\rangle$) avec la probabilité $q = 1 - p$

$$|C_2(\Delta t)|^2 = p \quad , \quad |C_1(\Delta t)|^2 = q = 1 - p \quad (4.2)$$

Si l'état initial du système est $|\psi_2\rangle$, son état à un instant ultérieur Δt sera

$$|\psi'(t)\rangle = d_1(t) |\psi_1\rangle + d_2(t) |\psi_2\rangle \quad (4.3)$$

avec $d_1(0) = 0$ et $d_2(0) = 1$. On prend la probabilité de transition $2 \rightarrow 1$ égale à p

$$|d_1(\Delta t)|^2 = p \quad , \quad |d_2(\Delta t)|^2 = q = 1 - p \quad (4.4)$$

En général, si l'état initial est $|\psi_{i_0}\rangle$ où $i_0 = 1, 2$, la probabilité pour que la mesure donne le résultat i_1 à l'instant t_1 est p si $i_1 \neq i_0$ et $q = 1 - p$ si $i_1 = i_0$. Après la mesure, le système se réduit à l'état $|\psi_{i_1}\rangle$ pour lequel on refait la mesure qui donne une probabilité de basculement p et une de stabilisation $q = 1 - p$. Si l'état du système bascule k fois, la probabilité qu'une séquence de mesures donne les résultats $i_0, i_1 \dots i_N$ est donnée par

$$p(i_0, i_1, \dots, i_N) = p^k q^{N-k} \quad (4.5)$$

Par conséquent, la probabilité pour trouver le système dans le même état initial à la fin de la mesure est

$$P(\text{le même}) = \sum_{k \text{ pair}} \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = \frac{1}{2} [1 + (q - p)^N] \quad (4.6)$$

La somme est effectuée sur tous les nombres k pairs entre 0 et N . On appelle cette probabilité la probabilité de stabilisation ou de survie de l'état original

$$P_{\text{surv}} = \frac{1}{2} [1 + (q - p)^N] = \frac{1}{2} [1 + (1 - 2p)^N] \quad (4.7)$$

On pose $\Delta t = T/N$ pour les N mesures appliquées au système pendant l'intervalle $[t_0, t_N] = [0, T]$. On suppose que, pour Δt petit, la probabilité de transition $1 \rightarrow 2$ est quadratique en Δt

$$p = \lambda^2 \Delta t^2 = \left(\frac{\lambda T}{N}\right)^2 \quad (4.8)$$

Pour les grandes valeurs de N , on obtient alors

$$P_{\text{surv}} = \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 - 2 \frac{(\lambda T)^2}{N^2} \right)^N \right] = \frac{1}{2} \left[1 + e^{-2 \frac{\lambda^2 T^2}{N}} \right] \quad (4.9)$$

Dans la limite de la mesure continue ($N \rightarrow \infty$), la probabilité de stabilisation tend vers l'unité

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\text{surv}} = 1 \quad (4.10)$$

On conclue que la mesure continue du type de Von Neumann empêche la transition $1 \rightarrow 2$. Cet effet est appelé l'effet Zénon [61].

L'effet Zénon apparaît lorsqu'on applique une série infinie de mesures avec une grande précision. En termes de décohérence, l'effet Zénon désigne une situation plus générale. C'est l'inhibition de l'évolution unitaire du système à cause de son interaction avec l'environnement. Par exemple, le

résultat d'une mesure non précise affecte la transition d'un état à l'autre sans figer le système dans l'état initial. Pour décrire ce dernier cas, on doit utiliser les intégrales de chemin restreintes dont le lien avec la décohérence est plus manifeste car elle est équivalente à une évolution régie par une équation maîtresse de Lindblad. On montrera d'abord l'équivalence de la formulation en intégrales de chemin restreinte avec l'équation de Schrödinger à Hamiltonien complexe.

4.2 Équation de Schrödinger à hamiltonien complexe

L'approche de l'intégrale de chemin restreinte pour la mesure continue a été élaborée par Mensky (en se basant sur une remarque de Feynman dans [19]) dans une série d'articles commençant par [48],[49]. L'idée est que l'intégrale de chemin doit être modifiée dans le cas d'un système quantique soumis à une mesure continue en tenant compte de l'information obtenue par la mesure. L'intégrale de chemin doit être réduite à l'ensemble des chemins compatibles avec le résultat de la mesure. La restriction peut être décrite par une fonctionnelle poids $w_a[p, q]$ qui s'approche de l'unité pour les chemins $[p, q]$ compatibles avec a . Dans ce cas, l'intégrale de chemin prend la forme (3.48).

On considère maintenant un cas particulier de la mesure continue, il s'agit de la surveillance (monitoring) d'une observable A . Cette mesure donne une valeur $a(t)$ de l'observable A à chaque instant t . Ces valeurs définissent une courbe $[a] = \{a(t), 0 \leq t \leq T\}$ qui représente le résultat de la mesure continue.

La précision de la mesure est arbitraire, donc la valeur réelle de l'observable A à chaque instant t peut être différente de $a(t)$. Alors, le résultat de la mesure doit être représenté par un corridor autour de la courbe $[a]$. La largeur de ce corridor Δa_T représente l'erreur de la mesure. Cette dernière dépend de la durée de la mesure [23, 43, 75]

$$\Delta a_T = \frac{1}{\kappa T}$$

κ est une constante qui représente la précision de la mesure. Une meilleure définition du corridor quantique consiste en l'utilisation d'une fonctionnelle poids $w_a[p, q]$ sous une forme gaussienne [60]

$$w_{[a]}[p, q] = \exp\left(-\kappa \int_0^T [A(p, q, t) - a(t)]^2 dt\right) \quad (4.11)$$

où $A(q, p, t)$ est la fonction classique définissant l'observable A . On verra à la fin de ce chapitre, qu'à l'observable énergie correspond l'hamiltonien classique libre (sans interaction).

L'intégrale de chemin restreinte avec le poids (4.11) prend la forme suivante

$$U_T^{[a]}(q'', q') = \int d[p] d[q] \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_0^T (p\dot{q} - H(p, q, t))dt - \kappa \int_0^T (A(p, q, t) - a(t))^2 dt\right) \quad (4.12)$$

On peut écrire l'intégrale de chemin restreinte (4.12) sous une forme analogue à l'intégrale de Feynman en remplaçant l'hamiltonien réel $\hat{H}(p, q, t)$ par l'hamiltonien complexe

$$H_{[a]}(p, q, t) = H(p, q, t) - i\kappa\hbar(A(p, q, t) - a(t))^2 \quad (4.13)$$

On sait que l'intégrale de chemin de Feynman est équivalente à l'équation de Schrödinger. Cela signifie que le propagateur et la fonction d'onde satisfont cette équation. Donc, l'intégrale de chemin restreinte satisfait l'équation de Schrödinger avec l'hamiltonien complexe (4.13)

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[-\frac{i}{\hbar}H - \kappa(A - a)^2 \right] \psi \quad (4.14)$$

où A représente l'opérateur correspondant à la fonction classique $A(q, p, t)$. Cette équation représente l'évolution d'un système quantique conditionnée par le résultat de la mesure continue $a(t)$. L'erreur de la mesure est déterminée par la constante κ . Pour κ très petite, l'influence de la mesure est négligeable, donc le système évolue comme un système fermé. À chaque résultat $[a]$, on associe une distribution de probabilité $p[a]$ définie par l'équation (4.5). Dans ce cas, elle prend la valeur

$$p[a] = \|\psi(T)\|^2 \quad (4.15)$$

où $\psi(T)$ se détermine en résolvant l'équation (4.14).

4.3 Mesure continue et équation maîtresse

Dans la section précédente, l'évolution d'un système quantique subissant une mesure continue est décrite par le propagateur (4.12). Si on ne connaît pas le résultat de la mesure, on utilise la matrice densité $\rho_T^{[a]}$. Dans ce cas, la loi d'évolution est donnée par

$$\rho_T = \int d[a] \rho_T^{[a]} = \int d[a] U_T^{[a]} \rho_0 \left(U_T^{[a]} \right)^\dagger \quad (4.16)$$

Le terme quadratique dans la fonctionnelle poids (4.11) permet d'écrire l'intégrale précédente sous forme d'intégrale gaussienne. Ceci nous permet de calculer l'intégrale sur les courbes $[a]$ et de trouver la forme de la matrice densité dans la représentation de configuration

$$\begin{aligned} \rho_t(q', q'') &= \int d[a] \langle q' | U_t^{[a]} \rho_0 \left(U_t^{[a]} \right)^\dagger | q'' \rangle \\ &= \int d\bar{q}' d\bar{q}'' \int d[p'] d[q'] d[p''] d[q''] \exp \left\{ -\frac{\kappa}{2} \int_0^t (A(p', q', t) - A(p'', q'', t))^2 dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\hbar} \int_0^t (p' \dot{q}' - H(p', q', t)) dt - \frac{i}{\hbar} \int_0^t (p'' \dot{q}'' - H(p'', q'', t)) dt \right\} \rho_0(\bar{q}', \bar{q}'') \end{aligned} \quad (4.17)$$

Les chemins $[q']$ relient les points \bar{q}' et q' et les chemins $[q'']$ relient les points \bar{q}'' et q'' . Le terme réel négatif $\left\{-\frac{\kappa}{2} \int_0^T (A' - A'')^2 dt\right\}$ dans l'exponentielle signifie que seuls les éléments de matrice $\langle A'' | \rho | A' \rangle$ pour lesquels A' s'approche de A'' prennent des valeurs importantes. Cela exprime l'annulation des éléments non diagonaux de la matrice densité ce qui représente une caractéristique de la décohérence.

En dérivant l'équation (4.17) par rapport au temps et en utilisant le fait que le propagateur satisfait l'équation de Schrödinger, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_t(q', q'') = \left[-\frac{i}{\hbar} (\hat{H}' - \hat{H}'') - \frac{\kappa}{2} (\hat{A}' - \hat{A}'')^2 \right] \rho_t(q', q'') \quad (4.18)$$

où le prime signifie que l'opérateur correspondant agit sur le premier argument et deux primes signifie qu'il agit sur le deuxième de la manière suivante :

$$\hat{A}' \rho_t(q', q'') = A(-i\hbar \frac{d}{dq'}, q', t) \rho_t(q', q'') = \langle q' | A(\hat{p}, \hat{q}, t) \rho | q'' \rangle \quad (4.19)$$

$$\hat{A}'' \rho_t(q', q'') = A(i\hbar \frac{d}{dq''}, q'', t) \rho_t(q', q'') = \langle q' | \rho A(\hat{p}, \hat{q}, t) | q'' \rangle \quad (4.20)$$

Les opérateurs \hat{p} et \hat{q} , agissent de la manière ordinaire en représentation configuration. Par exemple, $\langle q | \hat{p} | \psi \rangle = -i\hbar \frac{d}{dq} \langle q | \psi \rangle$ ce qui implique que $\langle \psi | \hat{p} | q \rangle = i\hbar \frac{d}{dq} \langle \psi | q \rangle$. Sachant que

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_t(q', q'') = \langle q' | \frac{\partial \rho_t}{\partial t} | q'' \rangle \quad (4.21)$$

l'équation (4.18) s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar} [H, \rho_t] - \frac{\kappa}{2} [A, [A, \rho]] \quad (4.22)$$

Cette dernière n'est autre que l'équation maîtresse de Lindblad (2.5) pour $N = 1$, $\gamma = \frac{\kappa}{2}$ et $L = A$. Ceci établit le lien entre la mesure continue approximative et la décohérence. Le formalisme de la mesure continue approximative peut être vu comme un modèle phénoménologique de la décohérence (on retrouve l'équation maîtresse sans spécifier les détails de l'environnement).

4.4 Mesure continue de l'énergie

L'approche des intégrales de chemin restreintes et l'hamiltonien complexe a été appliquée pour la première fois à la mesure continue de l'énergie d'un système à deux niveaux d'énergies par Tambini et Presilla [70]. Ils ont démontré que si la mesure de l'énergie est réalisée avec une grande précision, le système reste au même état (l'effet Zénon). Les auteurs ont supposé que le résultat de la mesure est exprimé par une courbe constante $E(t)$ et coïncide avec l'un des niveaux d'énergie du système. Cette considération semble naturelle pour un système ayant un spectre discret. Cependant, ce résultat n'est

pas correct pour une mesure avec une précision finie. La fonction $[E(t)]$, qui représente le résultat de la mesure, peut être arbitraire dans l'approche des intégrales de chemin restreintes [50, 60]. Cette propriété a été prise en compte par Mensky [6, 7] ce qui lui a permis d'analyser la mesure continue avec des précisions différentes. Dans ce qui suit, on va présenter ce travail en détail.

4.4.1 Mesure d'un système à plusieurs niveaux d'énergies

On considère un système quantique à plusieurs niveaux d'énergie. Soit H son hamiltonien qui s'écrit sous la forme suivante

$$H = H_0 + V \quad (4.23)$$

où H_0 est l'hamiltonien libre du système et V un potentiel extérieur. Supposons qu'une mesure continue de l'observable H_0 soit effectuée. On peut décrire l'effet de cette mesure par la fonctionnelle poids

$$w_{[E]}[p, q] = \exp\left(-\kappa \int_0^T [H_0(p, q, t) - E(t)]^2 dt\right)$$

c'est-à-dire avec un corridor gaussien centré autour de la courbe $[E]$. Dans ce cas, l'hamiltonien effectif est

$$H_{[E]}(p, q, t) = H_0 + V - i\kappa\hbar(H_0(p, q, t) - E(t))^2 \quad (4.24)$$

et l'équation de Schrödinger à hamiltonien complexe s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi_t\rangle = \left(-\frac{i}{\hbar}H - \kappa(H_0 - E(t))^2\right) |\psi_t\rangle \quad (4.25)$$

La résolution de cette équation donne l'état du système $|\psi_t\rangle$ à chaque instant t . D'après la relation (4.15), la norme de cet état à la fin de la mesure définit la densité de probabilité pour obtenir le résultat $[E]$.

$$p[E] = \|\psi_T\|^2 \quad (4.26)$$

Si on écrit l'état $|\psi_t\rangle$ dans la base des états propres de l'hamiltonien libre H_0

$$|\psi_t\rangle = \sum_n C_n(t) |\varphi_n(t)\rangle \quad (4.27)$$

$$|\varphi_n(t)\rangle = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}E_n t\right) |n\rangle \quad (4.28)$$

on obtient le système d'équations suivant

$$\dot{C}_n = -\kappa(E_n - E(t))^2 C_n - \frac{i}{\hbar} \sum_{n'} \langle \varphi_n | V | \varphi_{n'} \rangle C_{n'} \quad (4.29)$$

Les coefficients C_n sont les amplitudes de probabilités correspondant aux états $|\varphi_n(t)\rangle$. Dans ce cas, la densité de probabilité (4.26) est définie par

$$p[E] = \sum_n |C_n(T)|^2 \quad (4.30)$$

4.4.1.1 Évolution libre

Pour un système libre, $V = 0$, la résolution de l'équation (4.29) donne

$$C_n(T) = C_n(0) \exp\left(-\kappa \int_0^T dt (E_n - E(t))^2\right) \quad (4.31)$$

En définissant la valeur moyenne temporelle

$$\langle (E_n - E)^2 \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T dt (E_n - E(t))^2 \quad (4.32)$$

on trouve

$$C_n(T) = C_n(0) \exp\left(-\frac{T}{T_{lr}} \frac{\langle (E_n - E)^2 \rangle_T}{\Delta E^2}\right) \quad (4.33)$$

Le paramètre

$$T_{lr} = \frac{1}{\kappa \Delta E^2} \quad (4.34)$$

est un temps qui caractérise la précision de la mesure. Au bout de ce temps, l'erreur sur la mesure de l'énergie atteint une valeur caractéristique ΔE qui représente la différence entre deux niveaux voisins.

La solution précédente de l'équation (4.29) permet de trouver la densité de probabilité pour le résultat $[E]$. D'après la relation (4.30), on obtient

$$p[E] = \sum_n |C_n(0)|^2 \exp\left(-2 \frac{T}{T_{lr}} \frac{\langle (E_n - E)^2 \rangle_T}{\Delta E^2}\right) \quad (4.35)$$

L'erreur de la mesure ΔE_T au bout d'un temps T possède la même expression que ΔE . Par conséquent,

$$\Delta E_T = \sqrt{\frac{T_{lr}}{T}} \Delta E \quad (4.36)$$

et

$$p[E] = \sum_n |C_n(0)|^2 \exp\left(-2 \frac{\langle (E_n - E)^2 \rangle_T}{\Delta E_T^2}\right)$$

Cette relation montre que la densité de probabilité prend des valeurs importantes seulement si la condition suivante est vérifiée

$$|E - E_n| \lesssim \Delta E_T \ll \Delta E \quad (4.37)$$

La condition d'unitarité généralisée pour la mesure de l'énergie est

$$\int d[E] U_{[E]}^\dagger U_{[E]} = 1 \quad (4.38)$$

En prenant les éléments de matrice de cette équation dans la représentation d'énergie, on obtient

$$\int d[E] \exp\left(-2 \frac{\langle (E_n - E)^2 \rangle_T}{\Delta E_T^2}\right) = 1, \text{ pour tout } n \quad (4.39)$$

L'exponentielle dans l'intégrale signifie que les chemins $[E]$ qui sont proches de E_n sont les plus probables, donc l'intégrale de chemin restreinte à l'ensemble des résultats

$$\mathcal{A}_n = \{[E] / \langle (E - E_n)^2 \rangle_T \lesssim \Delta E_T^2\} \quad (4.40)$$

s'approche de l'unité

$$\int_{\mathcal{A}_n} d[E] \exp\left(-2 \frac{\langle (E_n - E)^2 \rangle_T}{\Delta E_T^2}\right) \simeq 1 \quad (4.41)$$

D'après les équations (3.68) et (4.35), la probabilité pour que la mesure donne un résultat $[E]$ contenu dans un ensemble arbitraire \mathcal{A} est

$$Prob([E] \in \mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} d[E] Tr(U_{[E]} \rho_0 U_{[E]}^\dagger) = \sum_n p_n(\mathcal{A}) |C_n(0)|^2 \quad (4.42)$$

où

$$p_n(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} d[E] \exp\left[-2 \frac{\langle (E - E_n)^2 \rangle_T}{\Delta E_T^2}\right] \quad (4.43)$$

En comparant la dernière équation avec (4.41), on trouve que $p_n = 1$ si $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$. Par contre, si les ensembles \mathcal{A} et \mathcal{A}_n n'ont pas des éléments communs, on a $p_n = 0$.

4.4.1.2 Régimes de la mesure

Pour définir les différents régimes de la mesure, on peut utiliser le paramètre T_{lr} . Si $T > T_{lr}$, c'est-à-dire si $\Delta E_T < \Delta E$, l'ensemble des résultats \mathcal{A}_n déterminé par l'équation (4.40) constitue une gamme étroite autour de la courbe $E(t) = E_n$. La largeur de cette gamme est très inférieure à ΔE , donc elle ne contient pas un autre niveau $E_{n'}$. D'après l'équation (4.43), on a $p_n = 1$ et $p_{n'} = 0$ pour $n' \neq n$. En remplaçant ces valeurs dans l'équation (4.42), on obtient

$$Prop(\mathcal{A}) = |C_n(0)|^2 \quad (4.44)$$

On conclut que dans le cas où $T \gg T_{lr}$, le résultat de la mesure est représenté par une courbe constante qui s'approche de l'un des niveaux E_n avec la probabilité $|C_n(0)|^2$. Pour déterminer l'état du système après la mesure, on utilise l'équation (4.33) avec la condition (4.37), on obtient

$$C_n(T) = C_n(0), \quad C_{n'}(T) = 0, \quad n' \neq n \quad (4.45)$$

Cette situation est similaire à la mesure de Von Neumann.

Maintenant, on considère le cas opposé $T \ll T_{lr}$. Dans ce cas, l'ensemble des résultats \mathcal{A}_n forme une large gamme autour de la courbe $E = E_n$. Si on définit l'ensemble des résultats \mathcal{A} comme l'ensemble des courbes $[E]$ dans la gamme d'énergie, de largeur ΔE_T comprise entre E_{min} et E_{max} , on trouve que plusieurs niveaux d'énergies E_n ($n_1 \leq n \leq n_2$) sont situés à l'intérieur de cette gamme. Pour chacun d'eux, l'intersection entre \mathcal{A}_n et \mathcal{A} représente une grande partie de \mathcal{A}_n , alors $p_n(\mathcal{A}) \sim 1$ si $n_1 \leq n \leq n_2$. En utilisant l'équation (4.42), on trouve

$$Prop(\mathcal{A}) = \sum_{n=n_1}^{n_2} |C_n(0)|^2 \quad (4.46)$$

Dans ce régime, la mesure ne peut pas distinguer entre les niveaux d'énergies.

Finalement, on conclut que la mesure continue appliquée dans une durée inférieure à T_{lr} ne donne pas une information précise sur l'état du système. Cet état est une superposition d'un certain nombre des états propres $|\varphi_n(t)\rangle$. Lorsque la durée de la mesure augmente et devient de l'ordre de T_{lr} ou plus, il reste un seul niveau d'énergie. Ce processus représente une décohérence graduelle de l'état du système, donc, on peut considérer que la mesure continue de l'énergie exprimée par la méthode des intégrales de chemin restreintes et l'hamiltonien complexe représente un modèle de la décohérence [6].

4.4.2 Mesure d'un système à deux niveaux d'énergie

On considère un système à deux niveaux d'énergie dans l'état de superposition (4.27)

$$|\psi_i\rangle = C_1(t) |\varphi_1(t)\rangle + C_2(t) |\varphi_2(t)\rangle \quad (4.47)$$

où $|\varphi_1(t)\rangle = e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} |1\rangle$ et $|\varphi_2(t)\rangle = e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} |2\rangle$ sont les états propres de l'Hamiltonien H_0 correspondant aux énergies E_1 et E_2 , respectivement. Ce système est soumis à un potentiel périodique en résonance avec la différence d'énergie

$$V = V_0 \cos \omega t \quad (4.48)$$

$$\hbar\omega = \Delta E = E_2 - E_1 \quad (4.49)$$

Dans ce cas, le système d'équations (4.29) se réduit à

$$\dot{C}_1 = -\kappa(E_1 - E(t))^2 C_1 - \frac{i}{\hbar} \langle \varphi_1(t) | V | \varphi_1(t) \rangle C_1 - \frac{i}{\hbar} \langle \varphi_1(t) | V | \varphi_2(t) \rangle C_2 \quad (4.50)$$

$$\dot{C}_2 = -\kappa(E_2 - E(t))^2 C_2 - \frac{i}{\hbar} \langle \varphi_2(t) | V | \varphi_1(t) \rangle C_1 - \frac{i}{\hbar} \langle \varphi_2(t) | V | \varphi_2(t) \rangle C_2 \quad (4.51)$$

Les différents éléments de matrice possèdent les formes suivantes :

$$\langle \varphi_1(t) | V | \varphi_1(t) \rangle = \langle 1 | V_0 | 1 \rangle \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \quad (4.52)$$

$$\langle \varphi_2(t) | V | \varphi_2(t) \rangle = \langle 2 | V_0 | 2 \rangle \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \quad (4.53)$$

$$\langle \varphi_1(t) | V | \varphi_2(t) \rangle = \langle 1 | V_0 | 2 \rangle \frac{e^{i(\omega - \frac{\Delta E}{\hbar})t} + e^{-i(\omega + \frac{\Delta E}{\hbar})t}}{2} \quad (4.54)$$

Les facteurs $e^{\pm i\omega t}$ et $e^{-i(\omega + \frac{\Delta E}{\hbar})t}$ oscillent rapidement par rapport à $e^{i(\omega - \frac{\Delta E}{\hbar})t}$ qui est soit constant (si $\hbar\omega = \Delta E$) soit très lentement variable (si $\hbar\omega \simeq \Delta E$). La moyenne sur une période des termes rapides est négligeable devant celle du terme lent. Par conséquent, on négligera tous les éléments de matrice sauf le dernier que l'on pose égal à

$$\langle \varphi_1(t) | V | \varphi_2(t) \rangle = \langle 1 | V_0 | 2 \rangle \frac{e^{i(\omega - \frac{\Delta E}{\hbar})t}}{2} = \hbar\nu(t) \quad (4.55)$$

où $\nu(t)$ est constant ou très lentement variable. L'équation de Schrödinger à hamiltonien complexe se réduit à

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= -i\nu(t)C_2 - \kappa(E_1 - E(t))^2 C_1 \\ \dot{C}_2 &= -i\nu(t)C_1 - \kappa(E_1 - E(t))^2 C_2 \end{aligned} \quad (4.56)$$

En l'absence de mesure ($\kappa = 0$), la solution du système précédent est (on suppose que ν est constante)

$$C_1(t) = C_1(0)\cos(\nu t) - iC_2(0)\sin(\nu t) \quad (4.57)$$

$$C_2(t) = C_2(0)\cos(\nu t) - iC_1(0)\sin(\nu t) \quad (4.58)$$

Ces équations décrivent les oscillations de Rabi avec la période $T_R = \pi/\nu$.

Maintenant, on suppose que le potentiel $V(t)$ est appliqué pendant un intervalle de temps $T = [T_1, T_2]$ dont la longueur est égale à la demi-période de Rabi $T_2 - T_1 = T_R/2$. Autrement dit, ν s'annule en dehors de cet intervalle. En prenant $T_1 = 0$, les solutions précédentes donnent pour $t = T_2 = \frac{T_R}{2} = T$,

$$C_1(T) = -iC_2(0) \quad (4.59)$$

$$C_2(T) = -iC_1(0) \quad (4.60)$$

Par conséquent, si le système est initialement dans l'état $|\varphi_1\rangle$ ($C_1(0) = 1$ et $C_2(0) = 0$), la probabilité $|C_2|^2$ pour le trouver dans l'état 2 augmente jusqu'à atteindre l'unité à l'instant T_2 . Le système restera après au même état car $\nu = 0$. En résumé, si la mesure n'est pas effectuée le système subit certainement la transition de l'état 1 à l'état 2.

Dans le cas où une mesure continue est réalisée ($\kappa \neq 0$), la situation précédente va être modifiée. Si κ est très faible (mesure très imprécise), on obtient un résultat proche des oscillations de Rabi (régime de Rabi). Par contre, s'il est très grand (mesure très précise) on obtient un résultat proche de l'effet Zénon (régime de Zénon). Dans le régime intermédiaire, la mesure permet de visualiser une transition quantique. On peut remplacer le paramètre κ qui caractérise la précision de la mesure par le temps $T_{lr} = 1/\kappa\Delta E^2$, de résolution entre les niveaux d'énergie, défini dans la section précédente. Si une mesure approximative continue est effectuée pendant un temps plus long que T_{lr} , la superposition entre les différents états d'énergie sera détruite. C'est-à-dire que si T_{lr} est petit, la résolution des niveaux d'énergie est assurée rapidement ce qui donne le régime de Zénon. Pour T_{lr} plus long, l'effet de la mesure est faible. Dans ce cas, la dynamique du système est caractérisée par le régime de Rabi.

L'ensemble des équations (4.56) a été résolu numériquement pour plusieurs fonctions $E(t)$ choisies aléatoirement [60]. Pour chaque fonction $E(t)$, les amplitudes $C_1(t)$ et $C_2(t)$ sont calculées ainsi que la densité de probabilité $p[E] = |C_1(t)|^2 + |C_2(t)|^2$. Comme on a déjà vu dans la sous-section précédente, cette densité donne la distribution de probabilité pour les différents résultats de la mesure. Le comportement du système est donné par la probabilité de transition

$$\mathcal{P}_2(t) = |c_2(t)|^2 = \frac{|C_2(t)|^2}{\sqrt{|C_1|^2 + |C_2|^2}}$$

Nous avons vu qu'en l'absence de mesure, cette probabilité va de zéro à un pendant la durée de

l'impulsion. En présence de mesure, cette probabilité se comporte différemment suivant le résultat de la mesure $[E]$. La figure (4.1) montre les résultats du calcul numérique basée sur les équations (4.56). Notons que les courbes ont été lissées avant de les mettre dans les diagrammes.

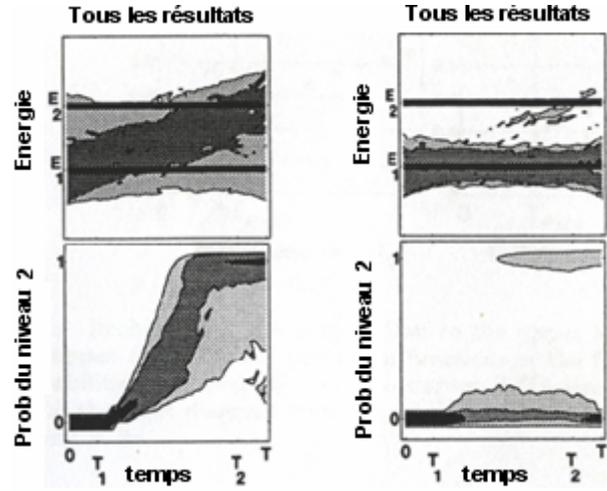


FIGURE 4.1 – Résultats de la mesure $E(t)$ et les densités de probabilités correspondantes $\mathcal{P}_2(t)$ qui décrivent le comportement de l'état du système pour deux valeurs de précisions : une petite précision où $4\pi T_{lr}/T_R = 10/3$ (gauche) et une grande précision où $4\pi T_{lr}/T_R = 2/3$ (droite)

La partie gauche de la figure décrit une mesure imprécise. Les courbes $E(t)$ sont représentées par les digrammes en haut et les probabilités correspondantes par les digrammes en bas. Les courbes représentées par les points sombres sont les plus probables. D'après les courbes \mathcal{P}_2 , on constate que la transition de l'état 1 à l'état 2 peut se produire avec une grande probabilité. Cette mesure appartient au régime de Rabi où la dynamique du système est dominée par les oscillations de Rabi. Dans ce régime, l'effet de la mesure sur le comportement du système est faible, mais l'information obtenu sur son état est imprécise car la gamme des résultats possibles est large. La partie droite de la figure (4.1) représente le cas inverse. Elle a un caractère d'une mesure projective (le régime de Zénon). Les résultats $[E]$ montrent que le système reste avec une grande probabilité dans l'état 1 et les courbes $[\mathcal{P}_2]$ confirment ce comportement. La mesure projective influence le système fortement et empêche la transition entre les niveaux d'énergie. Dans ce cas, l'information obtenue par les courbes E est beaucoup plus précise (une gamme étroite des résultats possibles). Cependant, les oscillations de Rabi sont supprimées complètement.

4.4.2.1 Surveillance d'une transition quantique

Dans le régime de mesure intermédiaire, qui s'étend entre celui de Zénon et celui de Rabi, les résultats obtenus sont plus intéressants. Dans ce cas, l'influence de la mesure sur l'évolution du système est moins que celle du régime de Zénon et l'information donnée par les courbes $[E]$ est plus précise que celle du régime de Rabi.

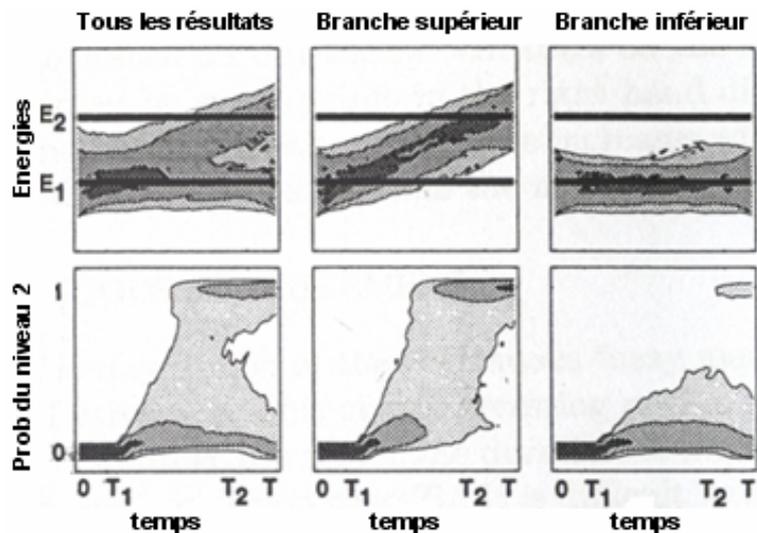


FIGURE 4.2 – Mesure continue avec une précision moyenne ($4\pi T_{lr}/T_R = 4/3$). La paire des diagrammes à gauche montre tous les résultats de la mesure $E(t)$ et les courbes correspondantes $\mathcal{P}_2(t) = |c_2(t)|^2$. Les diagrammes au milieu de la figure représentent les résultats qui indiquent une transition au niveau 2 et les diagrammes à droite indiquent que le système reste au même état d'énergie. Les courbes $\mathcal{P}_2(t)$ confirment ce comportement.

La paire de diagrammes à gauche dans la figure (4.2) représente tous les résultats possibles. On voit qu'ils sont séparés en deux classes, l'une indique une transition et l'autre indique l'absence de transition. Les paires de diagrammes, au milieu et à droite de la figure, représentent les deux classes séparément. D'après ces diagrammes, on voit que le comportement des courbes $[E]$ coïncide avec celui des probabilités $[\mathcal{P}_2]$. Cela signifie que le comportement du système correspond au résultat obtenu avec une probabilité raisonnable, bien qu'il existe une certaine probabilité d'erreur (le bruit de la mesure).

L'analyse numérique donne un résultat important : la visualisation d'une transition quantique par la mesure continue est possible pour un choix approprié de précision (précision moyenne). Dans ce cas, le résultat $E(t)$ décrit l'évolution réelle du système représentée par les courbes $[\mathcal{P}_2]$. Cependant, la mesure influence l'état du système, donc la probabilité de transition est moins que l'unité. Il n'est pas possible de prédire la transition avec certitude. Cette incertitude est le prix à payer pour la visualisation d'une transition quantique.

Après cette présentation de la mesure continue, on va établir la relation entre la description de la mesure approximative décrite dans le chapitre précédent et la description de la mesure dans la mécanique quantique stochastique.

Chapitre 5

Mesure dans la mécanique quantique stochastique

Selon la mécanique quantique conventionnelle, lorsque on effectue une mesure d'une grandeur physique, l'appareil de mesure donne un résultat précis α qui représente la valeur réelle de cette observable. Cependant, cette description ne prend pas en compte l'imperfection des appareils de mesure. Donc, au lieu de représenter le résultat de la mesure par une seule valeur α , on doit le représenter par une valeur stochastique (α, χ_α) [2], où $\chi_\alpha(x)$ est une fonction de confiance dont le maximum correspond à $x = \alpha$. Cette fonction représente la densité de probabilité pour que la valeur réelle soit x quand la mesure donne α . Dans ce cas, on peut introduire la mesure de probabilité [67]

$$\mu_\alpha(\Delta) = \int_{\Delta} \chi_\alpha(x) dx \quad (5.1)$$

appelée mesure de confiance. Elle représente la probabilité pour que la valeur réelle appartienne à l'intervalle Δ lorsque la mesure donne le résultat α . Si $\alpha = (q, p)$ est un point dans l'espace des phases Γ , les valeurs stochastiques $((q, p), \chi_{q,p})$ définissent un espace des phases stochastique [13]

$$\Gamma_\xi = \{(\zeta, \chi_\zeta), \zeta = (q, p) \in \Gamma\} \quad (5.2)$$

Dans le cas non relativiste, les points stochastiques peuvent être écrits sous la forme

$$((q, p), \chi_{q,p}) = ((q, \chi_q), (p, \chi_p)) \quad (5.3)$$

Autrement dit, on peut écrire la fonction de confiance $\chi_{q,p}$, définie sur l'espace des phases stochastique Γ_ξ , sous la forme d'un produit

$$\chi_{q,p}(x, k) = \chi_q(x) \chi_p(k) \quad (5.4)$$

La fonction de confiance ne dépend que de la différence entre la valeur réelle de la grandeur

physique et la valeur mesurée. Donc, elle reste invariante sous l'effet d'une translation

$$\chi_q(x) = \chi_0(x - q) \quad (5.5)$$

$$\chi_p(x) = \chi_0(k - p) \quad (5.6)$$

Pour la mesure de confiance, cette propriété s'écrit

$$\mu_q(\hat{\Delta}) = \mu_0(\hat{\Delta}_q), \quad \hat{\Delta}_q = \{x - q; x \in \hat{\Delta}\} \quad (5.7)$$

$$\mu_p(\tilde{\Delta}) = \mu_0(\tilde{\Delta}_p), \quad \tilde{\Delta}_p = \{k - p; k \in \tilde{\Delta}\} \quad (5.8)$$

L'invariance des mesures par rapport à la translation conduit à la considération de l'action du groupe de Galilée [29, 74] sur l'espace des phases stochastique. Dans ce qui suit, on va discuter ces représentations en détails.

5.1 Représentation espace des phases du groupe de Galilée

La représentation configuration du groupe de Galilée pour une particule scalaire, libre et de masse m est bien connue [67]

$$\hat{U}(b, a, v, R)\hat{\psi}(x, t) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[-\frac{mv^2}{2}(t-b) + mv(x-a)\right]\right\}\hat{\psi}(R^{-1}[x-a-v(t-b)]; t-b) \quad (5.9)$$

À la translation temporelle décrite par l'opérateur évolution $\hat{U}(b)$ correspond l'hamiltonien \hat{H} . À la translation spatiale $\hat{U}(a)$ correspond l'opérateur impulsion \hat{P} . À la transformation propre (boost) $\hat{U}(v)$ correspond un opérateur lié à la position $\hat{K} = m\hat{X}$. La rotation $\hat{U}(R)$ correspond au moment cinétique \hat{J} .

La représentation espace des phases du groupe de Galilée est donnée par la relation

$$U(b, a, v, R)\psi(q, p, t) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[-\frac{mv^2}{2}(t-b) + mv(q-a)\right]\right\}\psi(R^{-1}(q-v(t-b)-a), R^{-1}(p-mv); t-b) \quad (5.10)$$

L'opérateur $U(b, a, v, R)$ définit une représentation unitaire du groupe de Galilée sur l'espace $L^2(\Gamma)$ (espace des fonctions de carrée sommable définies sur l'espace des phases) au même titre que l'opérateur $\hat{U}(b, a, v, R)$ définit une représentation unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^3)$. Cependant la représentation $U(b, a, v, R)$ est réductible alors que selon Wigner [36], la particule élémentaire ne peut être décrite que par des représentations irréductibles. Pour trouver cette représentation pour les parti-

cules de spin nul, on doit construire une transformation unitaire W_ξ qui transforme l'espace $L^2(\mathbb{R}^3)$ de la représentation configuration qui est irréductible en un sous-espace $W_\xi L^2(\mathbb{R}^3)$ de $L^2(\Gamma)$ qui reste invariant par l'action de $U(b, a, v, R)$. La transformation W_ξ est définie par

$$W_\xi : \hat{\psi}(x) \rightarrow \psi(q, p) = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\xi}_{q,p}^*(x) \hat{\psi}(x) dx, \quad (5.11)$$

$$\hat{\xi}_{q,p}(x) = \left(\hat{U} \left(0, q, \frac{p}{m}, I \right) \xi \right) (x) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} p \cdot (x - q) \right] \hat{\xi}(x - q) \quad (5.12)$$

La fonction $\hat{\xi}(x)$ détermine complètement la transformation W_ξ . Elle possède la propriété suivante

$$\|\xi\| = \langle \xi | \xi \rangle^{1/2} = (2\pi\hbar)^{-3/2} \quad (5.13)$$

qui résulte du fait que la transformation W_ξ est une application isométrique entre $L^2(\mathbb{R}^3)$ à $L^2(\Gamma)$, c'est-à-dire qu'elle conserve le produit scalaire

$$\langle W_\xi \psi_1 | W_\xi \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \quad (5.14)$$

Dans ce cas, l'image $W_\xi L^2(\mathbb{R}^3)$ est un espace fermé dans $L^2(\Gamma)$ dans lequel W_ξ possède un inverse W_ξ^{-1} défini par

$$W_\xi^{-1} : \psi(q, p) \rightarrow \hat{\psi}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\xi}_{q,p}(x) \psi(q, p) dq dp \quad (5.15)$$

Donc, pour chaque $\hat{\xi}(x)$, W_ξ et W_ξ^{-1} sont des transformations intégrales unitaires entre $L^2(\mathbb{R}^3)$ et $W_\xi L^2(\Gamma)$. En utilisant l'équation (5.11), on déduit que la relation (5.14) est équivalente à

$$\int_{\Gamma} |\xi_{q,p}\rangle \langle \xi_{q,p}| = I \quad (5.16)$$

où I est l'opérateur identité dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. L'opérateur $P_{q,p} = |\xi_{q,p}\rangle \langle \xi_{q,p}|$ est le projecteur qui projette l'état $|\psi\rangle$ en l'état $\psi(q, p)$ dans l'espace $W_\xi L^2(\mathbb{R}^3)$ [3, 67].

On peut déterminer la signification physique des fonctions $\psi(q, p)$ en utilisant les propriétés marginales

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(q, p)|^2 dp = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\chi}_q^\xi(x) |\hat{\psi}(x)|^2 dx \quad (5.17)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(q, p)|^2 dq = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\chi}_p^\xi(k) |\tilde{\psi}(k)|^2 dk \quad (5.18)$$

où

$$\hat{\chi}_q^\xi(x) = (2\pi\hbar)^3 |\hat{\xi}(x - q)|^2, \quad \tilde{\chi}_p^\xi(k) = (2\pi\hbar)^3 |\tilde{\xi}(k - p)|^2 \quad (5.19)$$

Les fonctions $\hat{\chi}_q^\xi(x)$ et $\tilde{\chi}_p^\xi(k)$ sont des distributions de probabilité normalisées sur \mathbb{R}^3 . Donc, on peut les interpréter comme les fonctions de confiances des points stochastiques

$$\underset{\sim}{q} = (q, \hat{\chi}_q^\xi) \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^3_{conf}, \quad \underset{\sim}{p} = (p, \tilde{\chi}_p^\xi) \in \underset{\sim}{\mathbb{R}}^3_{imp} \quad (5.20)$$

dans les espaces de configuration stochastique et impulsion stochastique, respectivement. Dans ce cas, on peut déterminer l'interprétation physique de la partie droite de l'équation (5.17). $\hat{\chi}_q^\xi(x)|\hat{\psi}(x)|^2 dx$ est la densité de probabilité pour qu'une mesure effectuée avec un appareil de mesure imprécis, donne le résultat q et que la particule soit en x . Si on prend $\hat{\chi}_q^\xi(x) = \delta^3(x - q)$, l'équation (5.17) donne $|\hat{\psi}(q)|^2$ ce qui donne l'interprétation conventionnelle de la mesure.

Ceci suggère que $|\psi(q, p)|^2$ possède une interprétation physique comme une densité de probabilité dans l'espace des phases stochastique

$$\Gamma_\xi = \underset{\sim}{\mathbb{R}}^3_{conf} \times \underset{\sim}{\mathbb{R}}^3_{imp} = \left\{ \underset{\sim}{\zeta} = (q, \hat{\chi}_q^\xi) \times (p, \tilde{\chi}_p^\xi) \mid (q, p) \in \Gamma \right\} \quad (5.21)$$

Au sens que c'est la densité de probabilité que la mesure simultanée de la position et de l'impulsion donne la valeur (q, p) . Cependant cette valeur ne correspond pas à la position et à l'impulsion réelles (x, k) de la particule. Ces dernières ne peuvent jamais être déterminées car on ne peut que connaître les distributions $\hat{\chi}_q(x)$ et $\tilde{\chi}_p(k)$ correspondantes. Par conséquent, la particule sera considérée comme stochastiquement étendue dans l'espace de configuration et l'espace des impulsions. Notons que les fonctions de confiance nous assure la validité du principe d'incertitude malgré la simultanéité de la mesure.

La question qu'on s'est posé dans ce travail est la suivante : existe-t-il un lien entre la mesure continue approximative et la théorie stochastique ? Nous allons maintenant établir cette relation entre la description de la mesure approximative décrite par les opérateurs R_q et la description de la mesure dans la mécanique quantique stochastique. Mais au préalable, on définit les opérateurs R_q en suivant la même procédure que celle qui a permis la détermination des opérateurs R_a du spectre discret (voir sous-section 3.1.2).

5.2 Les mesures approximatives

Considérons deux types de mesure : La première est précise (projective) [60] et décrite par les projecteurs $\{P_x\}$. Elle donne un résultat x bien précis. La seconde est grossière et décrite par un ensemble de projecteurs $\{P_q\}$. La mesure grossière, dénotée par $\{q\}$, ne donne pas une seule valeur mais un ensemble I_q de résultats x de la mesure projective $\{x\}$. Comme les deux ensembles I_q et $I_{q'}$ peuvent contenir des éléments communs, les projecteurs P_q ne satisfont pas obligatoirement la

condition d'orthogonalité. On peut les choisir sous la forme.

$$P_q = \int_{x \in I_q} dx P_x \quad (5.22)$$

Si on réalise une mesure grossière on obtient le résultat q avec la probabilité p_q et l'état du système $|\psi\rangle$ se réduit après la mesure à l'état $|\psi_q\rangle$. déterminons cette probabilité et cet état. Si une mesure projective $\{x\}$ est effectuée après cette mesure, on obtient l'un des résultats x contenus dans l'intervalle I_q avec la densité de probabilité

$$p_{qx} = \frac{\langle \psi_q | P_x | \psi_q \rangle}{\langle \psi_q | \psi_q \rangle} \quad (5.23)$$

L'idée principale est que si l'on réalise une mesure projective directement, la probabilité d'obtenir le résultat x est égale à la somme de toutes les probabilités conditionnelles d'avoir la même valeur x après une mesure approximative qui donne q

$$\langle \psi | P_x | \psi \rangle = \int \chi_{I_q}(x) p_q p_{qx} dq \quad (5.24)$$

où la fonction caractéristique $\chi_{I_q}(x)$ est égale à 1 si $x \in I_q$ et à 0 dans le cas contraire. Les vecteurs d'état, après la mesure précise directe et une autre donnant le même résultat x , mais après une mesure approximative qui a donné q , ne diffèrent en général que par une constante de normalisation

$$P_x | \psi_q \rangle \sim P_x | \psi \rangle \quad (5.25)$$

Cette norme peut être la même si l'on remplace les projecteurs P_q par les opérateurs $R_q = \mu P_q$, où μ est une constante de normalisation. Dans ce cas, la réduction de l'état du système suit la règle

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi_q\rangle = R_q |\psi\rangle \quad (5.26)$$

A cause de l'orthogonalité des projecteurs P_x , les opérateurs P_q satisfont la relation

$$P_x P_q = \begin{cases} P_x & \text{si } x \in I_q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.27)$$

Il en découle que, si l'on remplace la relation (5.23) dans l'équation (5.24) en utilisant la relation (5.26), on obtient

$$\mu^2 \int \chi_{I_q}(x) \frac{p_q}{\langle \psi | R_q^\dagger R_q | \psi \rangle} dq = 1 \quad (5.28)$$

Cette condition sera satisfaite si l'on pose

$$p_q = \langle \psi_q | \psi_q \rangle = \langle \psi | R_q^\dagger R_q | \psi \rangle \quad (5.29)$$

$$\mu^{-2} = d$$

où d est la longueur l'intervalle I_q .

On a décrit la mesure par l'ensemble des opérateurs $\{R_q\}$ avec la loi de réduction (5.26) et la densité de probabilité (5.29). Dans une autre description où les points $x \in I_q$ n'ont pas le même poids, on utilise les opérateurs R_q avec la fonction poids $\mu_q(x)$. Les règles (5.26) et (5.29) restent valables mais cette fois-ci avec

$$R_q = \int_{x \in I_q} dx \mu_q(x) P_x \quad (5.30)$$

Cherchons maintenant, ces opérateurs pour décrire la mesure dans la théorie stochastique.

5.3 Mesure dans l'espace de configuration

On considère un opérateur positif P_q qui décrit la mesure de la position. On peut écrire cet opérateur en fonction du projecteur $P_{q,p} = |\xi_{q,p}\rangle \langle \xi_{q,p}|$ dans l'espace des phases stochastique comme suit

$$P_q = \int_{\mathbb{R}^3} dp |\xi_{q,p}\rangle \langle \xi_{q,p}| \quad (5.31)$$

En effet, la densité de probabilité pour que la mesure de la position donne le résultat q est donnée par

$$P_q = \langle \psi | P_q | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(q,p)|^2 dp = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\chi}_q^\xi(x) |\hat{\psi}(x)|^2 dp \quad (5.32)$$

On cherche à trouver une relation entre les opérateurs R_q racines de P_q , qui représentent l'effet de la mesure approximative de q , et les fonctions ξ caractéristiques de la mesure dans la théorie stochastique.

L'action des opérateurs $P_{q'}$ sur les fonctions $\psi(q,p)$ de l'espace $L^2(L_\xi)$ est représenté par

$$\begin{aligned} (P_{q'} \psi)(q,p) &= \langle \xi_{q,p} | P_{q'} | \psi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} dp' dx dx' \hat{\xi}_{q,p}^*(x) \hat{\xi}_{q',p'}(x) \hat{\xi}_{q',p'}^*(x') \hat{\psi}(x) \end{aligned} \quad (5.33)$$

En utilisant le fait que

$$\int_{\mathbb{R}^3} dp' \hat{\xi}_{q',p'}(x) \hat{\xi}_{q',p'}^*(x') = (2\pi\hbar)^3 \delta(x-x') \hat{\xi}(x-q') \hat{\xi}^*(x'-q') \quad (5.34)$$

on obtient

$$[P_{q'}\psi](q,p) = (2\pi\hbar)^3 \int_{\mathbb{R}^3} dx \hat{\xi}_{q,p}^*(x) |\hat{\xi}(x-q')|^2 \hat{\psi}(x) \quad (5.35)$$

Le même opérateur $\hat{P}_{q'}$, mais dans la représentation configuration, se définit par

$$[P_{q'}\psi](q,p) = (2\pi\hbar)^3 \int_{\mathbb{R}^3} dx \hat{\xi}_{q,p}^*(x) [\hat{P}_{q'}\psi](x) \quad (5.36)$$

En comparant cette dernière relation avec (5.35), on en déduit

$$[P_q\psi](x) = (2\pi\hbar)^3 |\hat{\xi}(x-q)|^2 \hat{\psi}(x) \quad (5.37)$$

L'opérateur \hat{P}_q est un opérateur positif, donc on peut l'écrire sous la forme

$$P_q = R_q^\dagger R_q \quad (5.38)$$

avec

$$[R_q\psi](x) = (2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}} \hat{\xi}(x-q) \hat{\psi}(x) \quad (5.39)$$

$$[R_q^\dagger\psi](x) = (2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}} \hat{\xi}^*(x-q) \hat{\psi}(x) \quad (5.40)$$

Il en découle que

$$R_q = (2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}} \int dx |x\rangle \hat{\xi}(x-q) \langle x| \quad (5.41)$$

Dans ce cas, la mesure donne le résultat q avec la probabilité

$$p_q = \langle \psi | R_q^\dagger R_q | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_q^\xi(x) |\hat{\psi}(x)|^2 dx \quad (5.42)$$

On retrouve bien l'expression de la théorie stochastique. La réduction du paquet d'ondes s'écrit

$$|\psi\rangle \rightarrow R_q |\psi\rangle = (2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}} \int dx \hat{\xi}(x-q) \hat{\psi}(x) |x\rangle \quad (5.43)$$

En faisant la projection, on peut trouver l'action de $R_{q'}$ sur les fonctions $\psi(q,p)$. Le résultat est

$$\begin{aligned}
[R_{q'}\psi](q, p) &= \langle \xi_{q,p} | R_{q'} | \psi \rangle \\
&= (2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}} \int dq'' dp'' dx \exp\left(-\frac{i}{\hbar} [p(x-q) - p''(x-q'')]\right) \hat{\xi}^*(x-q) \hat{\xi}(x-q') \\
&\quad \times \hat{\xi}(x-q'') \hat{\psi}(q'', p'')
\end{aligned} \tag{5.44}$$

5.4 Mesure dans l'espace des impulsions

La description de la mesure de l'impulsion peut être obtenue de la même manière en remplaçant la position q par l'impulsion p dans les formules précédentes, on obtient

$$[R_p\psi](k) = (2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}} \tilde{\xi}(k-p) \tilde{\psi}(k) \tag{5.45}$$

$$[R_p^\dagger\psi](k) = (2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}} \tilde{\xi}^*(k-p) \tilde{\psi}(k) \tag{5.46}$$

Alors

$$R_p = (2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}} \int dk |k\rangle \tilde{\xi}(k-p) \langle k| \tag{5.47}$$

La mesure de l'impulsion donne le résultat p avec la densité de probabilité

$$p_p = \langle \psi | R_p^\dagger R_p | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\chi}_p^\xi(k) |\tilde{\psi}(k)|^2 dk \tag{5.48}$$

et la réduction de l'état du système s'écrit

$$|\psi\rangle \rightarrow R_p |\psi\rangle = (2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}} \int dx \tilde{\xi}(k-p) \tilde{\psi}(k) |k\rangle \tag{5.49}$$

En procédant de la même manière que précédemment, on peut obtenir l'action de $R_{p'}$ sur les fonctions $\psi(q, p)$

$$\begin{aligned}
[R_{q'}\psi](q, p) &= \langle \xi_{q,p} | R_{p'} | \psi \rangle \\
&= (2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}} \int dq'' dp'' dk \exp\left(-\frac{i}{\hbar} [kq - kq'']\right) \tilde{\xi}^*(k-p) \tilde{\xi}(k-p') \\
&\quad \times \tilde{\xi}(k-p'') \tilde{\psi}(q'', p'')
\end{aligned} \tag{5.50}$$

$$\times \tilde{\xi}(k-p'') \tilde{\psi}(q'', p'') \tag{5.51}$$

5.5 Mesures séquentielles approximatives dans la théorie stochastique

On peut décrire les mesures séquentielles approximatives (sous-section 3.1.3), en utilisant les opérateurs $R_{q'}$ dans leur nouvelle représentation

$$R_{q'} = (2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}} \int dx |x\rangle \hat{\xi}(x - q') \langle x|$$

Si la mesure de la position donne le résultat q' , l'état du système $|\psi\rangle$ se réduit à l'état $|\psi'\rangle$ défini par

$$|\psi'\rangle = (2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}} \int dx |x\rangle \hat{\xi}(x - q') \hat{\psi}(x)$$

avec la densité de probabilité

$$p(q') = (2\pi\hbar)^3 \int dx |\hat{\xi}(x - q')|^2 |\hat{\psi}(x)|^2$$

On suppose maintenant que le système a subi une série de mesures imprécises appliquées pendant un temps $T = [t_0, t_N]$ et séparées par des intervalles d'évolutions libres. Le système évolue librement de l'état $|\psi_0\rangle$, à l'instant initial $t_0 = 0$, à l'état $|\psi_1\rangle$ (à l'instant t_1) défini par

$$|\psi_1\rangle = U(t_1, t_0) |\psi_0\rangle$$

Si la mesure de la position à l'instant t_1 donne le résultat q_1 , l'état du système se réduit à

$$|\psi'\rangle = (2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}} \int dx_1 |x_1\rangle \hat{\xi}(x_1 - q_1) \langle x_1| U(t_1, t_0) |\psi_0\rangle$$

et la densité de probabilité correspondante est

$$p(q_1) = (2\pi\hbar)^3 \int dx_1 |\hat{\xi}(x_1 - q_1)|^2 |\langle x_1| U(t_1, t_0) |\psi_0\rangle|^2$$

À l'instant t_2 , l'état du système devient

$$|\psi_2\rangle = U(t_2, t_1) |\psi'\rangle$$

Si une autre mesure est effectuée à l'instant t_2 donnant le résultat q_2 , l'état du système se réduit à l'état

$$|\psi'\rangle = (2\pi\hbar) \int dx_1 dx_2 |x_2\rangle \hat{\xi}(x_1 - q_1) \hat{\xi}(x_2 - q_2) \langle x_2| U(t_2, t_1) |x_1\rangle \langle x_1| U(t_1, t_0) |\psi_0\rangle$$

Cette procédure va se répéter pendant l'intervalle T , on obtient à l'instant t_N l'état

$$|\psi_N\rangle = U_{q_1 q_2 \dots q_{N-1}} |\psi_0\rangle \quad (5.52)$$

où $U_{q_1 q_2 \dots q_{N-1}}$ est défini par

$$\begin{aligned} U_{q_1 q_2 \dots q_{N-1}} &= (2\pi\hbar)^{\frac{3(N-1)}{2}} \int dx_{N-1} dx_{N-2} \dots dx_1 \left(U(t_N - t_{N-1}) | x_{N-1} \rangle \prod_{n=1}^{N-1} \left(\hat{\xi}(x_n - q_n) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{n=2}^{N-1} (\langle x_n | U(t_n, t_{n-1}) | x_{n-1} \rangle) \langle x_1 | U(t_1, t_0) \rangle \right) \end{aligned}$$

Dans la limite ($N \rightarrow +\infty$), on obtient une série infinie de mesures pendant l'intervalle T . Comme on a déjà vu dans la sous-section (3.1.3), cette procédure représente un modèle de la mesure continue. La limite de l'équation (5.52) donne

$$|\psi_\alpha\rangle = U_\alpha |\psi_0\rangle$$

où

$$U_\alpha = \lim_{N \rightarrow +\infty} U_{q_1 q_2 \dots q_{N-1}}$$

En prenant l'élément de matrice de cet opérateur entre les états $x' = x_0$ et $x'' = x_N$, on obtient le propagateur d'une particule soumise à une mesure continue de sa position

$$\langle x'' | U_\alpha | x' \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} (2\pi\hbar)^{\frac{3(N-1)}{2}} \int dx_{N-1} dx_{N-2} \dots dx_1 \prod_{n=1}^{N-1} \left(\hat{\xi}(x_n - q_n) \right) \prod_{n=1}^N (\langle x_n | U(t_n, t_{n-1}) | x_{n-1} \rangle) \quad (5.53)$$

C'est une expression formelle dans laquelle il faut remplacer ξ et U par des expressions concrètes. Cette étude ainsi que d'autres en relation avec l'intégrale de chemin restreinte seront citées comme perspectives dans la conclusion du présent travail.

Conclusion

Notre travail a été consacré à la présentation de la théorie de la mesure continue développée par Mensky et son application à la mesure continue de l'énergie. Nous avons présenté au deuxième chapitre, la théorie de la décohérence comme résultat de l'interaction d'un système quantique avec son environnement expliquant la réduction du paquet d'ondes. L'intensité de cette interaction permet d'identifier les différents régimes de la décohérence. La formulation mathématique de cette théorie a été établie en termes de l'équation maîtresse de Born-Markov et celle de Lindblad. Par la suite, nous avons illustré la théorie de la mesure continue basée sur l'intégrale de chemin restreinte (au troisième chapitre). Cette dernière détermine l'amplitude de la mesure continue dont la norme donne les probabilités des différents résultats. Au cours du quatrième chapitre, nous avons appliqué la méthode des intégrales de chemin restreintes à la mesure continue de l'énergie d'un système à plusieurs niveaux. Dans le cas libre (sans potentiel), on a trouvé que la mesure continue conduit à une décohérence graduelle de l'état du système. Par conséquent, la théorie de la mesure continue, basée sur les intégrales de chemin restreintes et l'hamiltonien complexe, constitue un modèle phénoménologique de la décohérence. Dans le cas d'un potentiel non nul, qui induit la transition entre les niveaux d'énergies, on a identifié trois régimes de mesure suivant sa précision. Dans le premier régime, avec une petite précision, on a obtenu des oscillations de Rabi modifiées. Dans le deuxième régime, caractérisé par une grande précision, le système reste au même état d'énergie (l'effet Zénon). Les résultats obtenus dans le troisième régime où la précision est moyenne sont les plus intéressants. Ce choix de précision permet de visualiser une transition quantique. Dans ce cas, les courbes obtenues, représentant les résultats de la mesure, indiquent le comportement réel du système. A la fin (au cours du dernier chapitre), nous avons exprimé la mesure continue dans le cadre stochastique. Nous avons trouvé une relation entre la description de la mesure approximative en terme des opérateurs R_q et la description de la mesure en terme des fonctions ξ caractéristiques de la mesure en théorie stochastique. Par la suite, nous avons appliqué cette relation aux mesures séquentielles approximatives de la position. Enfin, nous avons obtenu l'expression formelle du propagateur d'une particule stochastique soumise à une mesure continue. Nous espérons que cette application nous ouvrira une large gamme de travaux en perspective. Nous pourrions essayer de reformuler l'intégrale de chemin restreinte dans la théorie stochastique. Un cas intéressant est l'étude de l'évolution du système sous l'effet de la mesure continue dans la représentation espace des phases stochastique. Dans ce contexte, on étudiera la mesure

continue simultanée de la position et de l'impulsion et son lien avec la diffusion par le milieu de la mesure. L'application à la mesure de l'énergie nécessite une réflexion plus approfondie à cause du spectre discret dont la formulation stochastique ne nous semble pas facile.

Bibliographie

- [1] Y. Aharonov, M. Vardi, Phys. Rev. D. 21, 2235 (1980).
- [2] S. T. Ali, E. Prugovecki, J. Math. Phys. 18, 219 (1977).
- [3] S. T. Ali, Nuovo Cimento. 8, 11 (1985)
- [4] R. Alicki, K. Lendi : Quantum Dynamical Semigroups and Applications (Springer, Berlin, 2007)
- [5] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, Phys. Rev. Lett. 49, 91 (1982).
- [6] J. Audretsch , M. B. Mensky , Phys .Rev. A. 56, 44 (1997).
- [7] J. Audretsch, M. Mensky, V. Namiot, Phys. Lett A. 237, 1 (1997).
- [8] J. Audretsch, M. Mensky, quantu-ph/9808062. 1998.
- [9] A. Barchielli, L. Lanz, G. Prosperi, Nuovo Cimento B 72, 79 (1982).
- [10] K. Blum : Density Matrix Theory and Applications (Plenum Press, New York, 1981)
- [11] H. P. Breuer and F. Petruccione : The Theory of Open Quantum Systems (Oxford University Press, Oxford, 2002)
- [12] T. Calarco, Nuovo Cimento B. 110, 1451 (1995).
- [13] C. Carmeli, G. Cassinelli, E. De Vito, A. Toigo, B. Vacchini, J. Phys. A. 37, 5057 (2004).
- [14] H. Carmichael : An Open Systems Approach to Quantum Optics (Springer, Berlin, 1993)
- [15] C. M. Caves , Phys.Rev.D 33, 1643 (1986).
- [16] C. M. Caves, Phys. Rev. D 35, 1815 (1987).
- [17] L. Davies , Quantum Theory of Open Systems (Academic Press, London, 1976).
- [18] L. Diosi, Phys. Lett. A 129, 419 (1988).
- [19] R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 20, 367 (1948).
- [20] Feynman and Vernon, Ann. Phys. 24, 118 (1963).
- [21] Feynman and Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integral (MCGraw-Hill Book Company, New York, 1965)

- [22] L. Fonda, G. C. Ghirardi, and A. Rimini, *Rep. Prog. Phys.* 41, 587 (1978).
- [23] M. J. Gagen, G. J. Milburn : *Phys. Rev. A* 47, 1467 (1993)
- [24] A. O. Galdeira and Leggett, *Physica A* 121, 587 (1983).
- [25] B. M. Garraway and P. Knight, *Phys. Rev. A* 50, 2548 (1994).
- [26] M. Gell-Mann and J. Hartle, *Quantum Mechanics in The Light of Quantum Cosmology*. In W. H. Zurek, Editor, *Complexity, Entropy, and the Physics of Information*, pages 425-458. Addison-Wesley, Reading, 1990.
- [27] M. Gell-Mann and J. B. Hartle. *Phys. Rev. D* 47, 3345 (1993).
- [28] D. Giulini, E. Joos, Zeh, *Decoherence and The Appearance of a Classical World in Quantum Theory* (Springer, Berlin, 1996).
- [29] D. Giulini, *Ann. Phys.* . 249, 222 (1996)
- [30] R. B. Griffiths, *J. Stat. Phys.* 36, 219 (1984).
- [31] S. Habib et R. Laflamme, *Phys. Rev .D.* 42, 4056 (1990).
- [32] H. Haken, *Rev. Mod. Phys.* 47, 67 (1975).
- [33] K. Hornberger, *Introduction to Decoherence Theory* (Springer, Berlin, 2009).
- [34] B. L. Hu, Paz, and Zhang, *Phys. Rev. D* 45, 2843 (1992)
- [35] B. L. Hu. and A. Matacz, *Phys.Rev.* 9, 991 (1994).
- [36] E. P. Wigner, *Annals of Mathematics.* 40 , 149 (1939).
- [37] W. M. Itano, D. J. Heinzein, J. J. Bollinger, and D. J. Wieneand, *Phys.Rev.A.* 41, 2295 (1990).
- [38] K. Jacobs, D. A. Steck, *Contemporary Physics* 47, 279 (2006).
- [39] L. A. Khalfin, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 33, 1371 (1957).
- [40] F. Ya. Khalili, *Vestn. Mosk. Univ, Ser. 3, Phiz, Astron,* 22, 37 (1981)
- [41] F. Ya. Khalili, *Vestn. Mosk. Univ.Ser. 3, Fiz. Astron.* 29, 13 (1988)
- [42] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets* (World Scientific Publishing, London, 2004).
- [43] P. Knight , *Nature.* 357, 438 (1992).
- [44] A. Konetchnyi, M. Mensky, V. Namiot, *Phys. Lett. A* 177, 283 (1993)
- [45] K. Kraus : *States, Effects and Operations, Fundamental Notions of Quantum Theory* (Springer, Berlin, 1983)
- [46] G. Lindblad, *Comm. Math Phys.* 48, 119 (1976).
- [47] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Proprieties of Radiation* (Wiley, 1973)

- [48] M. Mensky, Phys. Rev. D, 20, 384 (1979).
- [49] M. Mensky, Sov .Phys. 50, 667 (1979).
- [50] M. Mensky, The Path Group : Measurements, Fields, Particles (Nauka, Moscow, 1983).
- [51] M. Mensky, Theor. Math. Phys. 75, 357 (1988).
- [52] M. Mensky, General Relativity and Gravitation, Vol. 23, No. 2, 1991
- [53] M. Mensky, Foundations of Physics. 22, 1173 (1992).
- [54] M. Mensky :Continuous Quantum Measurement and Path Integrals, (IOP Publishing Ltd, 1993).
- [55] M. Mensky, Phys. Lett. A. 196, 159 (1994).
- [56] M. Mensky, Foundations of Physics. 27, 1637 (1997).
- [57] M. Mensky, Applied Physics B.64, 125 (1997).
- [58] M. Mensky, International Journal of Theoretical Physics 21, 219 (1998).
- [59] M. Mensky, Physics Uspekhi. 73, 153 (1998).
- [60] M. Mensky, Quantum Measurement and Decoherence Models and Phenomology (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2000).
- [61] B. Misra and E. Sudarshan, J. Math. Phys. 18, 756 (1977).
- [62] J. V. Neumann, Mathematical Foundations of Quantum Mechanics (Princeton University Press, Princeton U.S.A., 1955).
- [63] Omnes, From, Ann.Phys . 201, 354 (1990).
- [64] R. Onofrio, C. Presilla, U. Tambini, Phys .Lett .A. 183, 135 (1993).
- [65] J. Paz , W. H. Zurek, Phys. Rev. D. 47, 488 (1993).
- [66] A. Peres, Am. J. Phys. 48, 931 (1980).
- [67] E. Prugovécki, Stochastic Quantum Mechanics and Quantum Space-Time (Kluwer Academic Publishers, 1984).
- [68] A. Shimony, Phys. Rev. D. 10, 526 (1974).
- [69] M. Schlosshauer, Decoherence and The Quantum -To -Classical Transition (Springer, Berlin, 2007).
- [70] U. Tambini, C. Presilla, R. Onorfio, Phys.Rev.A.51, 967 (1995).
- [71] G. C. Tannoudji : La matière-espace-temps (Poche, 1990).
- [72] C. Tesche, Phys Rev Lett. 64, 2358 (1990).
- [73] D. F. Walls, G. J. Milburn : Phys. Rev. A 31, 2403 (1985)

- [74] W. F. Tung : Group Theory in Physics (World Scientific, 1985).
- [75] Zeh (1971). In Enrico Fermi School of Physics (Academic Press, New York, P.263).
- [76] W. H. Zurek, Physics.Rev. 24, 1516 (1981).
- [77] W. H. Zurek and Paz, Phys Rev Letts 82, 5181 (1999).
- [78] W. H. Zurek, Physics.Today, 44, 36 (1982).
- [79] W. H. Zurek, Reviews of Modern Physics, 75, 715 (2003)