

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DE PHYSIQUE**



**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister
en physique
Spécialité : Physique théorique**

Par

FODIL Aissa

THÈME

**Expression de la structure de la particule étendue au moyen
d'une courbure ou d'un champ de jauge**

Soutenu publiquement le 26 / 10 / 2009, devant le jury composé de :

Mr.	A. Bendib	Professeur	(USTHB)	Président
Mr.	A. Smida	Professeur	(USTHB)	Directeur de Thèse
Mme.	F. Chafa	Professeur	(USTHB)	Examinatrice
Mr.	M. Hachemane	Professeur	(USTHB)	Examinateur
Mme.	A. H. Hamici	Maître de conférences	(USTHB)	Examinatrice

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Physique Théorique de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene (USTHB). Il a été dirigé par Monsieur SMIDA Abdallah Professeur à l'USTHB. Je lui exprime ma très vive reconnaissance pour ses précieuses idées qui ont abouti à plusieurs travaux dont cet intéressant sujet. Monsieur BENDIB Abderrezeg, Professeur à l'USTHB, est vivement remercié pour avoir accepté de présider le jury de soutenance. Mes plus vifs remerciements s'adressent à Madame CHAFA Fawzia, Professeur à l'USTHB, pour avoir accepté de juger le présent travail et d'honorer le jury de soutenance. J'exprime ma reconnaissance et mes plus vifs remerciements à Monsieur HACHEMANNE Mahmoud, Professeur à l'USTHB, pour la lecture de la première version du manuscrit, ses corrections et ses remarques, qu'à Mme A-H HAMICI pour sa disponibilité, les conseils judicieux et toute la gentillesse dont elle a fait preuve à mon égard. J'adresse aussi mes sincères remerciements aux Professeurs F-Z IGHEZOU et A. CHOUCHAOUI pour avoir accepté de lire le manuscrit et de me faire part de leurs remarques. Je remercie également Melle R. YEKKEN pour son aide. Un remerciement spécial est destiné à Mr SLIMATNI Sami à qui je dois une partie de la documentation. Je remercie également tous ceux que je n'ai pas cités, et qui m'ont encouragé avant et pendant la réalisation de ce travail, en particulier mes amis. Enfin, sans oublier mes frères, mes soeurs, mes nièces et mes neveux, ma profonde reconnaissance s'adresse aux êtres les plus chers à mon coeur, mon père et ma mère, qui m'ont inlassablement encouragé lors de la préparation de ce mémoire.

Table des matières

Introduction	4
1 Les invariants dynamiques des particules ponctuelles	9
1.1 Introduction	9
1.2 Le lagrangien, l'action et le principe de moindre action	10
1.3 Notion de fonction de champ et covariance relativiste	13
1.4 Théorème de Noether et invariants dynamiques	14
1.4.1 Notion de symétrie en physique	14
1.4.2 Propriétés de transformation des fonctions de champ. Tenseurs et spineurs	15
1.4.3 Théorème de Noether	18
2 Application du théorème de Noether aux particules étendues	27
2.1 Introduction	27
2.2 Les Théories Quantiques Fonctionnelle et Géométro-Stochastique	28
2.2.1 La théorie quantique fonctionnelle	29
2.2.2 La Théorie Géométro-Stochastique sur l'espace des phases	30
2.3 Les Equations Euler-Lagrange pour la particule étendue	31
2.4 Le théorème de Noether pour la Particule étendue	32
2.5 Le champ bispinoriel	34
2.6 Conclusion	36
3 Théorie de jauge pour les particules étendues	37
3.1 Introduction	37
3.2 Invariance locale et champs de jauge pour le cas ponctuel	38
3.2.1 Lagrangien invariant local	38

3.2.2	Les champs de jauge	41
3.2.3	Le courant conservatif	44
3.3	Invariance de jauge locale du lagrangien décrivant la particule étendue	45
3.3.1	Le courant étendu	50
3.4	Application au cas du champ bispinoriel et au groupe $U(1)$	51
3.5	Conclusion	52
	Conclusion	54
	Annexe	56
	Bibliographie	75

Introduction

Grâce à l'étude des particules élémentaires, les physiciens ont pu approfondir leurs connaissances de la structure de la matière à des dimensions de plus en plus petites [1]. Actuellement, on conçoit encore en mécanique quantique relativiste et en théorie quantique des champs locaux [2], la particule élémentaire comme un point matériel de dimensions négligeables et qui peut être trouvée, sous certaines conditions et avec certitude, dans une région finie de l'espace. La particule est ainsi considérée comme ponctuelle et demeure parfaitement localisée. Ce point matériel peut être doté d'une structure interne décrite par des nombres quantiques tels que le spin, l'isospin et l'hypercharge. Le spin caractérise la symétrie spatio-temporelle de la particule, c'est le paramètre qui désigne les représentations irréductibles du groupe des rotations tri-dimensionnelles autour d'un point dans le cas non relativiste. Dans le cas relativiste, on note que la symétrie complète de l'espace-temps contient, en plus des rotations, les translations spatiales et temporelles de sorte que ce sont les groupes de Galilée et de Poincaré qui décrivent respectivement les symétries non relativiste et relativiste de l'espace-temps. L'isospin et l'hypercharge caractérisent la symétrie unitaire décrite par les groupes $SU(2)$ et $SU(3)$ de saveur. Pour ce dernier les représentations irréductibles fondamentales dérivent une symétrie interne correspondant aux différents états (saveurs) de la particule élémentaire (le quark). Cependant, assimiler la particule élémentaire à un point pose beaucoup de problèmes du fait que la mécanique quantique relativiste et la théorie quantique des champs locaux souffrent d'inconsistances internes [3]. Il est, par exemple, impossible de définir un opérateur de position covariant et une densité de courant définie positive en mécanique quantique relativiste. De même, la théorie quantique des champs possède des divergences dans la matrice S qui ne sont levées qu'au prix d'une renormalisation vivement critiquée par les fondateurs de la mécanique quantique et de la théorie des champs elles-mêmes. Plus encore, la gravitation est non renormalisable et ambiguë dans la définition des opérateurs de création et d'annihilation [4].

L'origine des difficultés de la théorie des champs est attribuée à son caractère local, autrement dit à la ponctualité des particules élémentaires. En effet, cette localité est incompatible avec le principe de causalité relativiste, et par conséquent avec la relativité restreinte. Ceci est un résultat fondamental qui demeure incontournable tant que les probabilités sont calculées par des opérateurs de projection orthogonaux et que la particule est décrite par un champ local réalisant une représentation irréductible du groupe de Lorentz. Ainsi pour remédier à ces inconsistances, il faudrait que les états de la particule ne soient pas localisés au sens strict. Ceci a amené certains physiciens à élaborer des méthodes avec lesquelles ils peuvent faire des approximations proches de la réalité physique et à proposer des modèles adéquats de manière à surmonter ces problèmes. De Broglie, vers l'année 1927 a imaginé la particule comme une singularité de la fonction d'onde physique représentant un objet étendu, le mouvement de cette singularité étant déterminé par les lois d'une certaine dynamique de guidage. Il trouva après qu'il n'était pas nécessaire qu'il y ait une singularité, il suffisait que l'onde physique soit répartie dans tout l'espace avec une faible amplitude sauf dans une petite région de forte concentration d'énergie, où cette amplitude devient très grande. Par la suite J.L. Destouches a développé une conception nouvelle de la notion de particule en proposant une généralisation de l'idée de De Broglie dans sa théorie quantique fonctionnelle du corpuscule [5]. C'est une ancienne théorie qui rejettent la notion de particule ponctuelle. Elle fut élaborée afin d'étudier la situation non physique que constitue le découpage du système physique (corpuscule) du reste de l'univers. Pour cela, il faut tenir compte de l'influence qu'exerce l'extérieur non seulement sur les actions auxquelles le système est soumis mais également sur ses caractéristiques propres. Pour cette raison, la représentation d'un corpuscule par un point géométrique ou par une figure géométrique invariable (corps solide) s'avère insuffisante. Pour qu'un corpuscule soit influençable dans ses propres caractéristiques, il faut qu'il soit déterminé par une infinité dénombrable d'éléments. Ce qui conduit à représenter un corpuscule par une fonction u à valeurs complexes appartenant à un espace fonctionnel séparable. Cette fonction u correspond à la représentation fonctionnelle de la particule. Le nombre de composante u_i de cette fonction u est fixé par les conditions de covariance et les caractéristiques internes. Les arguments de la fonction u sont déterminés à l'aide du principe du rattachement spatial. D'après ce principe, la fonction a pour arguments un point P désignant une variable libre qui parcourt l'espace et ne représente aucun objet ni corpuscule, et par une variable temporelle T parcourant l'ensemble des instants de l'horloge d'un observateur. Notons que ni P ni T n'ont de signification physique, seule la fonction u en possède, elle représente le corpuscule.

La représentation fonctionnelle ne supprime pas la représentation géométrique ponctuelle du corpuscule. Géométriquement, le corpuscule est représenté, dans cette théorie, par un point M qui doit être une fonctionnelle de u , soit $M = F[u]$ que nous désignerons par l'écriture $M = \text{sing } u$, (cette écriture a été introduite par M. Louis de Broglie [6] dans sa théorie de la double solution où le corpuscule était représenté par le point M qui correspondait à la singularité mathématique de la fonction u). La fonction u obéit à une équation de la forme $\mathcal{E}(u) = Q(u, \nabla, \frac{\partial}{\partial t})$ où $\mathcal{E}(\psi) = 0$ désigne une équation d'onde linéaire de la mécanique ondulatoire usuelle et Q une expression complexe non linéaire de u et de ses dérivées. Cette fonction peut être déterminée par un modèle physique spécifique (globule fluide). Comme le point x , présent dans l'argument de la fonction d'onde de la mécanique quantique conventionnelle, est remplacé par l'onde physique u , les prévisions sont alors calculées dans cette théorie par une fonctionnelle $X[u.t]$ qui obéit à la décomposition spectrale:

$$X[u.t] = \sum_i a_i(t) X_i[u]$$

et qui correspond à l'équivalent de l'onde de la mécanique quantique conventionnelle dans l'approximation ponctuelle. L'extension de la particule peut avoir une signification différente. Dans sa théorie géométrico-stochastique, E. Prugovečki prouve que cette extension pourrait être conçue en termes purement stochastiques liés aux imperfections irréductibles des appareils de mesures [7]. Ces deux théories ne sont en fait que des représentations différentes d'un même système physique, la particule étendue. Se basant sur ces deux théories, un modèle de particule étendue possédant une extension fonctionnelle a été élaboré au sein de notre laboratoire. La particule étendue est ainsi considérée comme composée d'un mode externe évoluant dans un espace-temps externe et d'un mode interne ponctuel confiné dans un espace-temps interne [8]. Les symétries des espace-temps externe et interne peuvent être quelconques et différentes. Notre travail consiste en la construction d'une théorie des champs liée à ces particules étendues. Les modes internes et externes étant ponctuels, il a fallu reprendre la démonstration du théorème de Noether dans le cas général, chercher les invariants dynamiques et les différents courants pour chaque type de transformation, mais en considérant un champ bilocal décrit par ses composantes $u_i(x, \xi)$ où $x = (x^k)$ est un quadri-vecteur de l'espace-temps de Minkowski externe et $\xi = (\xi^\alpha)$ un quadri-vecteur de l'espace-temps de Minkowski interne, ainsi les indices k et α varient tous les deux de 0 à 3. Nous avons choisi la densité lagrangienne, comme pour les théories locales, dépendant du champ et de ses diverses dérivées (interne et externe) au premier ordre.

Pour présenter notre travail nous commençons par un premier chapitre qui traite de la théorie classique des champs pour le modèle de la particule ponctuelle. Nous déduisons les équations du mouvement d'Euler-Lagrange et les courants conservés associés aux différentes symétries pour quelques types de champs.

Dans le second chapitre, nous nous proposons de construire, moyennant le formalisme lagrangien, une théorie des champs associée au modèle de la particule étendue. On a considéré, pour simplifier les calculs, que les espaces externe et interne sont du type de Minkowski (plats) et que toutes les interactions sont nulles. Le groupe de symétrie est alors réalisé comme le produit direct du groupe de symétrie interne de Poincaré et du groupe de symétrie externe de Poincaré. Les équations du champ sont obtenues à partir du lagrangien du système par application du principe variationnel [2]. Pour ce faire, nous commençons par présenter, dans un premier paragraphe, les théories fonctionnelle et géométrostochastique dont s'inspire le modèle de la particule étendue décrit par un champ bilocal $u(x, \xi)$ [15]. Dans le paragraphe suivant, nous déterminons les équations du mouvement d'un champ ayant pour composantes $u_i(x, \xi)$. Les équations obtenues sont celles d'Euler-Lagrange habituelles avec un terme supplémentaire correspondant au mouvement interne. Dans le paragraphe trois, nous utilisons le théorème de Noether afin de déterminer les courants associés à cette théorie. Nous obtenons des courants possédant des composantes internes et externes (dont l'expression est semblable à celle du courant des champs ponctuels [2]) plus des composantes additionnelles que nous appelons mixtes et qui contiennent des termes internes et externes. Dans le quatrième paragraphe, nous appliquons ce formalisme au cas particulier d'un champ bispinoriel. Puis nous achevons ce chapitre par une brève conclusion.

Dans le troisième chapitre, nous nous proposons d'étendre le formalisme lagrangien du chapitre précédent au cas des invariances sous les transformations de jauge locales. Pour cela, on considère le lagrangien décrivant un système de champs libres liés à la particule étendue précédemment étudiée, puis nous essayons de montrer que nous pouvons construire une théorie de jauge locale pour ce type de lagrangien décrivant des particules étendues. Comme pour le cas ponctuel, le lagrangien invariant local s'obtient en remplaçant les dérivées par rapport aux coordonnées de l'espace-temps externe par des dérivées covariantes dans les quelles interviennent des champs de jauge. Nous essayons également de mettre en évidence l'expression des courants qui satisfont une équation de continuité par rapport aux variables externe et interne.

Nous appliquons les résultats obtenus dans le cas concret d'un champ bispinoriel et de l'invariance sous les transformations du groupe $U(1)$, en vue d'obtenir des expressions pour

les courants interne et externe qui se ramènent à celle du cas ponctuel si nous négligeons les degrés de liberté interne.

Nous terminons notre travail par une conclusion. Dans les résultats que nous obtenons, nous remarquons que lorsque nous gelons les degrés de liberté internes liés à l'extension fonctionnelle, nous retrouvons les résultats de la théorie des champs locaux ce qui nous conforte dans notre démarche.

1

Les invariants dynamiques des particules ponctuelles

1.1 Introduction

En considérant le champ comme un système mécanique possédant un nombre infiniment grand de degrés de liberté, on peut construire une théorie des champs en utilisant l'analogie avec la mécanique classique du point⁽¹⁾. Le champ est alors caractérisé par ce qu'on appelle une fonction de champ qui correspond au nombre infiniment grand des degrés de liberté. On peut former les équations satisfaites par les fonctions de champ à partir de la fonction de Lagrange du système à l'aide du principe d'action stationnaire. Quand aux variables dynamiques, elles sont construites d'une manière tout à fait analogue aux grandeurs correspondantes dans le formalisme de la mécanique classique.

En fait, le contenu physique de la théorie est entièrement déterminé par le choix des champs et des systèmes, la forme de la fonctionnelle de l'action en découle. L'action elle-même n'a pas de signification physique propre. L'information physique se trouve dans la classification des champs [9] et le contenu en symétries, qu'elles soient exactes ou spontanément brisées. Un champ est une fonction de l'espace-temps. Par exemple, dans la théorie de Maxwell, le champ électromagnétique $F_{\mu\nu}(\vec{x}, t)$ est un champ classique. Sa dynamique, fixée par les équations de Maxwell, est conforme au principe de relativité restreinte (les équations de Maxwell sont qualifiées de "covariantes relativistes").

⁽¹⁾En mécanique classique, un système à N degrés de liberté est décrit par N coordonnées généralisées q_α et N vitesses généralisées $\dot{q}_\alpha = \frac{dq_\alpha}{dt}$.

Ce premier chapitre décrit brièvement certaines notions classiques qui sont à la base de la théorie des champs. Ainsi dans le premier paragraphe, nous présentons les notions de Lagrangien, de principe de moindre action, d'équations d'Euler-Lagrange pour un système mécanique constitué de points matériels, puis dans le second paragraphe, nous généralisons ces notions au cas d'un système mécanique continu (le champ). Enfin dans le dernier paragraphe, nous introduisons la notion de symétrie, le théorème de Noether ainsi que les lois de conservation qui s'en déduisent.

1.2 Le lagrangien, l'action et le principe de moindre action

Une des notions fondamentales de la mécanique est celle de *point matériel*⁽¹⁾. On désigne ainsi un corps dont on peut négliger les dimensions lorsqu'on décrit son mouvement. Bien entendu, cette possibilité dépend des conditions concrètes de tel ou tel problème [10]. Ainsi on peut considérer les planètes comme des points matériels lorsqu'on étudie leur mouvement autour du soleil.

La position d'un point matériel dans l'espace est déterminée par son rayon vecteur \vec{r} , dont les composantes coïncident avec ses coordonnées cartésiennes x, y, z .

Pour déterminer la position d'un système de N points matériels dans l'espace, il faut se donner N rayons vecteurs, c'est-à-dire $3N$ coordonnées. Le nombre de grandeurs indépendantes qu'il faut pour déterminer de façon univoque la position d'un système est appelé nombre de *degrés de liberté* du système. Dans le cas présent, ce nombre est égal à $3N$. Ce dernier n'est pas nécessairement lié au nombre de coordonnées cartésiennes du point. En effet, selon les conditions du problème, le choix d'un autre système de coordonnées peut être plus commode. Les s grandeurs quelconques q_1, q_2, \dots, q_s caractérisant complètement la position d'un système (à s degrés de liberté) sont appelées ses *coordonnées généralisées*, et les dérivées \dot{q}_i ses *vitesses généralisées*.

Du point de vue mathématique, cela signifie que la donnée des coordonnées q et des vitesses \dot{q} à un certain instant définit de façon univoque la valeur des accélérations \ddot{q} à cet instant.

Les relations qui lient les accélérations aux coordonnées et aux vitesses sont appelées *équations du mouvement*. Par rapport aux fonctions $q(t)$, ce sont des équations différentielles du sec-

⁽¹⁾Au lieu du terme « point matériel » nous emploierons souvent le mot « particule ».

ond ordre dont l'intégration permet en principe de déterminer ces fonctions, c'est-à-dire les trajectoires du mouvement du système mécanique. Ainsi, on est amené à introduire une fonction des coordonnées et des vitesses et éventuellement du temps, pour décrire le système:

$$L = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) \quad (1.1)$$

Cette fonction est appelée *lagrangien* du système.

On définit, à partir du lagrangien une fonction S , nommée action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) dt \quad (1.2)$$

Les coordonnées généralisées peuvent être interprétées comme étant les coordonnées d'un point Q d'un espace à s dimensions. Cet espace est appelé *espace de configuration*. Considérons alors un système tel qu'à l'instant t_1 il occupe la position $Q(1)$, de coordonnées $q_i(1)$ de l'espace de configuration. A mesure que le temps s'écoule à partir de t_1 , l'état du système change, son point représentatif de l'espace de configuration se déplace en décrivant une courbe. A l'instant t_2 , le système occupe la position $Q(2)$, de coordonnées $q_i(2)$ dans l'espace de configuration. Le *principe de moindre action* s'énonce alors ainsi: parmi toutes les trajectoires admissibles faisant passer d'une position $Q(1)$ à l'instant t_1 à une position $Q(2)$ à l'instant t_2 , une trajectoire naturelle[11] correspond à une valeur *stationnaire* de l'action, mathématiquement, le principe de moindre action s'exprime comme

$$\delta S = 0 \quad (1.3)$$

Nous allons maintenant déduire les équations de Lagrange du principe de moindre action⁽¹⁾ Pour cela considérons deux trajectoires admissibles, infiniment voisines, ayant même extrémités $Q(1)$ à l'instant t_1 et $Q(2)$ à l'instant t_2 , définies respectivement par les fonctions $q(t)$ et $q(t) + \delta q(t)$.

Les extrémités étant communes, nous avons $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Calculons la variation de l'action entre ces deux trajectoires,

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} [L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)] dt \quad (1.4)$$

En effectuant un développement limité au premier ordre de l'intégrand, nous obtenons:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt \quad (1.5)$$

⁽¹⁾Pour simplifier l'écriture, nous raisonnons sur un seul paramètre q c'est-à-dire sur la fonction $L(q, \dot{q}, t)$, et non sur $L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$.

Puis en transformant le deuxième terme du second membre:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \left(\frac{dq}{dt} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d(\delta q)}{dt} dt \quad (1.6)$$

nous obtenons

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt \quad (1.7)$$

où la dernière égalité résulte de l'identité:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d(\delta q)}{dt} dt \quad (1.8)$$

compte tenu de (1.7), l'équation (1.5) s'écrit

$$\delta S = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right)_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt \quad (1.9)$$

Le premier terme du second membre de (1.9) est nul puisque $\delta q(t_1) = \delta q(t_2)$.

Comme l'action est stationnaire ($\delta S = 0$) quelque soit la variation arbitraire de la coordonnée δq , il vient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (1.10)$$

C'est l'équation de Lagrange à laquelle doit satisfaire le lagrangien L du système.

Plus généralement, pour un système à n degrés de liberté, on obtient les n équations différentielles du second ordre suivantes

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1.11)$$

Il faut, bien sûr, y adjoindre $2n$ "conditions initiales", par exemple les coordonnées et les vitesses à un instant donné. On détermine alors à l'aide des n équations (1.11) leurs valeurs ultérieures. Les équations de Lagrange constituent donc les *équations du mouvement* du système.

Une caractéristique très intéressante de ces équations est qu'elles gardent la même forme quelque soit le type de coordonnées utilisées.

De plus, si l'on ajoute au lagrangien du système la dérivée par rapport au temps d'une fonction des coordonnées et du temps, les équations du mouvement ne changent pas. En effet si L_1 et L_2 sont deux lagrangiens tels que:

$$L_2(q, \dot{q}, t) = L_1(q, \dot{q}, t) + \frac{dF'(q, t)}{dt}$$

Alors

$$S_2 = \int_{t_1}^{t_2} L_2(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L_1(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF'(q, t)}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} L_1(q, \dot{q}, t) dt + [F(q(t_2), t_2) - F(q(t_1), t_1)] \quad (1.12)$$

Les deux derniers termes disparaissent lors de la variation ($\delta S_2 = \delta S_1$), les équations du mouvement restent ainsi inchangées. En particulier l'addition d'une constante au lagrangien n'affecte pas les équations du mouvement.

1.3 Notion de fonction de champ et covariance relativiste

L'extension du formalisme précédent à la dynamique des champs est immédiate. Considérons le cas le plus simple du champ classique qui est une fonction $u(x)$ de l'espace-temps à valeur dans les corps des nombres réels ou complexes. Nous utilisons la notation suivante x dénote le quadri-vecteur de composantes x^k , avec $k = 0, 1, 2, 3$, $x^0 = ct$ et le choix d'unité $c = 1$. Le système physique a maintenant un nombre infini de degrés de libertés, au lieu de $3N$ coordonnées $q_i(t)$. On considère à chaque instant t les valeurs du champ en chaque point de l'espace et, comme auparavant, une action et une *fonction de Lagrange*.

Pour présenter les conditions fondamentales auxquelles doit satisfaire cette dernière fonction, nous allons insister sur l'importante place occupée par la condition de *covariance relativiste* ou condition d'invariance par rapport au groupe complet de Lorentz inhomogène [12] qui laisse invariante la forme quadratique du carré de l'intervalle à quatre dimensions (Annexe A)⁽¹⁾

$$s^2 = x_k x^k \equiv (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \quad (1.13)$$

Si les propriétés dynamiques d'un système varient de manière continue ainsi que le suppose la théorie des champs, la fonction $u(x)$ introduite, varie de façon continue avec x et il en est de même pour la *densité lagrangienne* $\mathcal{L}(x^0, \vec{x})$. Lorsqu'on impose à \mathcal{L} une condition d'invariance pour les transformations de Lorentz, il apparaît que la densité lagrangienne doit être un scalaire ne faisant intervenir que les composantes $u_i(x)$ du champ et ses dérivées $\frac{\partial u_i(x)}{\partial x^k}$ dans un espace-temps à quatre dimensions de Minkowski.

⁽¹⁾ On trouve également la convention $ds^2 = dx^2 - c^2 dt^2$ pour laquelle la métrique de Minkowski est $(-1, 1, 1, 1)$.

La fonction de Lagrange s'exprime donc pour un système mécanique sous la forme d'une somme étendue à tous les points matériels du système. Cette somme s'exprime, pour un système continu, par une intégrale de la densité de la fonction de Lagrange étendue à tout l'espace

$$\Lambda(x^0) = \int d\vec{x} \mathcal{L}(x^0, \vec{x}) \quad (1.14)$$

Cette dernière expression non covariante n'est, dans la réalité, qu'un intermédiaire dans le formalisme de Lagrange et il est suffisant de considérer la densité de la fonction de Lagrange

$$\mathcal{L}(x^0, \vec{x}) = \mathcal{L}(x), \quad (1.15)$$

Nous allons nous limiter aux théories, dites: *théories locales* [12], et prendre un Lagrangien \mathcal{L} qui ne dépend que de l'état des champs dans un voisinage infiniment petit du point x .

Ainsi nous pouvons écrire le Lagrangien local sous la forme

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L} \left(u_i(x), \frac{\partial u_i(x)}{\partial x^k} \right) \quad (1.16)$$

L'action A est l'intégrale du Lagrangien étendue à un certain volume de l'espace-temps

$$A = \int \mathcal{L}(x) dx; \quad dx = dx^0 d\vec{x} \quad (1.17)$$

Si nous appliquons le principe variationnel de l'action stationnaire

$$\delta A = 0 \quad (1.18)$$

et en supposant que les variations des fonctions de champs $\delta u_i(x)$ s'annulent à la limite du volume d'intégration à quatre dimensions, nous obtenons par un raisonnement analogue à celui du cas discret et après une intégration par partie les équations d'Euler-Lagrange suivantes:

$$\frac{\delta A}{\delta u_i(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial u_i(x)} - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial u_{i;k}(x)} = 0 \quad (1.19)$$

1.4 Théorème de Noether et invariants dynamiques

1.4.1 Notion de symétrie en physique

La symétrie apparaît sous forme de régularités dans les structures et propriétés des systèmes physiques et d'invariances dans les équations qui les régissent, elle est donc une transformation qui laisse l'action invariante.

L'un des plus grands exploits de la notion de symétrie est, sans doute en physique des particules élémentaires. L'utilisation de la théorie des groupes (Annexe B), qui est le langage mathématique de la symétrie, a permis de classer les particules élémentaires, de décrire leurs propriétés les plus fondamentales. Le lien entre la théorie des groupes et la physique (des particules) est réalisé par le biais des représentations des groupes.

Les symétries qui apparaissent dans les théories des champs et qui décrivent les interactions des particules élémentaires sont de plusieurs types. Certaines sont *discrètes*, d'autres sont *continues*. Les symétries continues sont des transformations dépendant de paramètres variant continûment. Ce sont elles qui conduisent aux *lois de conservation*.

1.4.2 Propriétés de transformation des fonctions de champ. Tenseurs et spineurs

Avant de passer à la construction des invariants dynamiques des champs, examinons les propriétés de transformations des fonctions de champ. En d'autres termes, nous devons établir les lois de transformation des fonctions de champs, pour une transformation appartenant au groupe de Lorentz inhomogène (Annexe C)

Sous ce type de transformation, les coordonnées d'espace-temps se transforment comme

$$x'^k = l^k_l x^l + a^k \quad (1.20)$$

Les quantités l^k_l et a^k sont respectivement les éléments de la matrice du groupe de Lorentz et un quadri-vecteur constant représentant les translations dans l'espace-temps de Minkowski caractérisé par la métrique $(g_{ik}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Lors du passage d'un système de référence x à un autre système x' , relié à x par une transformation de Lorentz L , il correspond une transformation linéaire homogène des composantes de la fonction de champ $u(x)$:

$$u(x) \rightarrow u'(x') = \Lambda_L u(x) \quad (1.21)$$

où Λ_L est la matrice de transformation de ces fonctions. Elle est entièrement déterminée par la matrice de la transformation de Lorentz L . Soulignons que la transformation (1.21) considérée, qui décrit non pas un déplacement d'un point de l'espace à un autre mais un changement du système de référence, ne se réduit pas au simple remplacement de l'argument x par x' .

Ainsi, à chaque transformation de Lorentz L correspond une transformation linéaire Λ_L et il est évident qu'à l'élément unité du groupe L correspond une transformation unité

$\Lambda = 1$, et au produit de deux éléments du groupe de Lorentz correspond le produit des deux transformations .

$$\Lambda_{L_1 L_2} = \Lambda_{L_1} \Lambda_{L_2} \quad (1.22)$$

En théorie des groupes, un système d'opérateurs Λ_L qui possède ces propriétés s'appelle une *représentation linéaire du groupe*. On peut représenter les opérateurs Λ_L sous la forme de matrices dont l'ordre est déterminé par le nombre de composantes du champ u .

Dans le cas où le nombre de composantes de u est fini, on dit que le groupe des transformations Λ_L constitue une représentation «*d'ordre fini*» du groupe de Lorentz [12]; dans le cas contraire nous avons une représentation «*d'ordre infini*» de ce groupe. Etant donné que les champs physiques fondamentaux sont décrits habituellement par des fonctions ayant un nombre fini de composantes, nous pouvons considérer les transformations Λ_L comme des opérateurs agissant dans l'espace de dimension finie des composantes des fonctions de champs et les représenter par des matrices carrées d'ordre fini.

Il peut arriver que l'espace des composantes des fonctions de champ, dans lequel agit la représentation Λ_L soit décomposable en sous-espaces invariants par rapport à toutes les transformations de la représentation donnée (c'est-à-dire en sous-espace qui sous l'action de Λ_L se transforment en eux-mêmes). Une telle représentation est dite *réductible*. Dans le cas contraire, la représentation est dite *irréductible*. Si on mène jusqu'au bout le processus de séparation des sous-espaces invariants dans l'espace de la représentation réductible, c'est-à-dire si on décompose cet espace en sous-espace invariants, qui, eux, n'en contiennent plus d'autres, la représentation initiale se décompose en représentations irréductibles, agissant chacune dans son «propre» sous-espace invariant. On peut ainsi ramener l'étude de toute représentation réductible à l'étude des représentations irréductibles du groupe donné. Les types possibles de fonctions d'onde et leurs lois de transformation (1.21) peuvent être obtenus en étudiant les représentations d'ordre fini du groupe de Lorentz.

Les représentations d'ordre fini du groupe de Lorentz peuvent être à simple ou à double détermination. Ceci est lié au fait que la correspondance $L \rightarrow \Lambda_L$ ne doit pas être nécessairement à détermination unique, car les fonctions de champ, en général, ne sont pas des grandeurs directement observables par l'expérience (cependant les grandeurs observables sont toujours des combinaisons bilinéaires des fonctions de champ). Les déterminations multiples de l'opérateur Λ_L correspondant à une transformation L doivent toujours être telles que les grandeurs observables se transforment d'une manière entièrement déterminée, pour n'importe quelle transformation tensorielle de Lorentz L , c'est-à-dire qu'à une transformation infiniment petite du système de référence corresponde une transformation infiniment

petite des fonctions de champs. L'ensemble des conditions indiquées conduit au fait que les représentations du groupe de Lorentz se divisent en deux catégories. La première est caractérisée par le fait que la correspondance $L \rightarrow \Lambda_L$ est à détermination *unique*. Ces représentations sont appelées *tensorielles* et *pseudotensorielles*⁽¹⁾. Les fonctions de champ qui se transforment suivant des représentations tensorielles (*tenseurs* ou *pseudotenseurs*) peuvent, dans certains cas, être observables directement (champs électromagnétiques) [12]. Dans le deuxième cas, cette correspondance est à double détermination : $L \rightarrow \pm\Lambda_L$. Les représentations à double détermination sont appelées *spinorielles* et les grandeurs correspondantes des *spineurs* (Annexe D).

La loi des transformations d'un tenseur du $N^{\text{ème}}$ ordre

$$T^{i_1, i_2 \dots i_N} \quad (1.23)$$

pour des transformations continues des coordonnées (les transformations de réflexion sont examinées plus bas séparément) est de la forme

$$T^{i_1, i_2, \dots, i_N}(x') = \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x'^{i_N}}{\partial x^{j_N}} T^{j_1, \dots, j_N}(x) \quad (1.24)$$

En tenant compte de 1.20, on obtient

$$T^{i_1, \dots, i_N}(x') = \Omega_{j_1}^{i_1} \dots \Omega_{j_N}^{i_N} T^{j_1, \dots, j_N}(x). \quad (1.25)$$

Notons que pour une translation seulement, $x' = x^k + a^k$, les grandeurs tensorielles, restent invariantes

$$u(x) \rightarrow u'(x') = u(x) \quad (1.26)$$

Enumérons maintenant les représentations tensorielles les plus simples et les grandeurs qui leurs correspondent.

Le tenseur d'ordre zéro, qui pour toutes les transformations d'espace-temps continues, est un invariant appelé scalaire (ou pseudo-scalaire)

$$u'(x') = u(x) \quad (1.27)$$

Le tenseur du premier ordre, qui se transforme par rotation des coordonnées [12] suivant la loi

$$u'^k(x') = \sum_m g^{mm} \Omega^{km} u^m(x), \quad (1.28)$$

⁽¹⁾La différence entre tenseurs et pseudotenseurs est liée aux transformations de réflexion des axes d'espace.

est appelé vecteur contra-variant (ou pseudo-vecteur). Le vecteur covariant qui lui est associé

$$u_k(x) = \sum_m g^{km} u^m(x) \quad (1.29)$$

se transforme suivant la loi [12]

$$u'_k(x') = g^{kk} \sum_m \Omega^{km} u_m(x). \quad (1.30)$$

On peut écrire sans difficulté les formules correspondantes pour les tenseurs de différentes variances du second ordre ou d'ordres plus élevés [12].

Comme on l'a indiqué précédemment, seules s'expriment par des relations du type 1.25-(1.30) les lois de transformations des grandeurs tensorielles pour des transformations du type continu. Pour une réflexion d'un nombre impair d'axes d'espace, les lois de transformation doivent être formulées séparément. Le carré de la transformation étant égale à l'identité, ainsi qu'il résulte de l'unicité de la détermination dans les représentations tensorielles, ces lois ne peuvent avoir que deux formes:

$$u'(x') = u(x) \quad (1.31)$$

ou

$$u'(x') = -u(x) \quad (1.32)$$

Les grandeurs qui changent de signe, par réflexion, c'est-à-dire qui se transforment suivant (1.32) sont alors appelées, pour les distinguer des grandeurs qui se transforment suivant (1.31) des *pseudograndeurs* (pseudo-scalaire, pseudo-vecteur, pseudo-tenseur, etc.)

La distinction entre les lois de transformation (1.31) et (1.32) présente, à première vue, un caractère un peu formel. Cependant la propriété de parité, définie par ces relations, joue un rôle essentiel dans la détermination des formes d'interaction possibles entre les différents champs [2].

1.4.3 Théorème de Noether

Le théorème de Noether est dû à une mathématicienne allemande, Emmy Noether (1881-1935), également célèbre pour ses travaux en algèbre moderne [13]. Ce théorème, qui appartient au calcul différentiel, est passé quelque peu inaperçu au moment de sa formulation en (1918) mais il jouit aujourd'hui d'un grand prestige auprès des physiciens. Bien que son domaine d'application soit naturellement la mécanique (classique et relativiste), il s'est

révélé extrêmement fécond dans la théorie des champs. Ce théorème fonde les lois de conservation, auxquelles obéit un système, sur les propriétés d'invariance des lois (Lagrangien) de ce système sous l'action de certaines transformations de symétries. Le théorème de Noether offre l'intérêt majeur de mettre en correspondance chaque principe de conservation d'une quantité physique avec une invariance formelle des lois de la physique. Plus précisément, il énonce que, pour toute symétrie continue du Lagrangien du système, il existe une quantité conservée au cours de l'évolution de ce système.

Il prend sa véritable dimension dans la théorie relativiste des champs. Dans ce cas, le Lagrangien doit être invariant sous les translations spatio-temporelles ainsi que sous les rotations de Lorentz dont l'ensemble forme le groupe de Lorentz inhomogène ou de Poincaré. Le théorème de Noether permet de déduire et de prédire l'existence de la conservation du quadri-vecteur énergie impulsion, ainsi que la conservation du moment cinétique.

Enoncé du théorème de Noether

A toute transformation continue des coordonnées, annulant la variation de l'action et pour laquelle la loi de transformation des fonctions de champ est également donnée, correspond un certain *invariant*, c'est-à-dire une combinaison des fonctions de champ et de leurs dérivées qui se conserve.

Démonstration:

Pour démontrer le théorème de Noether, considérons une transformation infinitésimale des coordonnées

$$x'^k = x^k + \delta x^k; \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (1.33)$$

où

$$\delta x^k = \sum_{1 \leq j \leq s} X_j^k \delta \omega^j \quad (1.34)$$

Dans le cas du groupe de Lorentz inhomogène, les transformations infinitésimales comportent une translation infiniment petite de paramètre δa^k et une rotation infiniment petite de paramètres $\delta \omega^k$ (Annexe C).

Sous ces transformations infinitésimales, les fonctions de champs $u(x)$ se transforment suivant

$$u_i(x) \longrightarrow u'_i(x') = u_i(x) + \delta u_i(x) \quad (1.35)$$

où

$$\delta u_i(x) = \sum_{1 \leq j \leq s} \Psi_{ij} \delta \omega^j \quad (1.36)$$

de paramètres infiniment petits

$$\delta \omega^i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, s), \quad (1.37)$$

qui, par exemple, dans le cas d'une transformation du groupe de Lorentz inhomogène comporte une translation infiniment petite δa^k et une rotation infiniment petite $\delta \omega^{ik}$.

Dans (1.34) et (1.36) les grandeurs X_j^k et Ψ_{ij} sont les matrices de transformations des coordonnées et des champs et $\delta u_i(x)$, la variation de la fonction de champ due aussi bien au changement de sa forme qu'au changement de son argument.

La variation de la forme de la fonction $\bar{\delta} u_i(x)$ est égale à la variation locale du champ:

$$\bar{\delta} u_i(x) = u'_i(x) - u_i(x) = \sum_j (\Psi_{ij} - \sum_k \frac{\partial u_i(x)}{\partial x^k} X_j^k) \delta \omega^j \quad (1.38)$$

On peut déterminer la variation de l'action

$$\delta A = \delta \int \mathcal{L}(x) dx. \quad (1.39)$$

Elle se compose de la variation du Lagrangien $\mathcal{L}(x)$ et de la variation du domaine d'intégration.

Dans l'étude à quatre dimension que nous allons faire, on peut écrire,

$$\delta A = \int \delta \mathcal{L}(x) dx + \int \mathcal{L}(x) \delta(dx) \quad (1.40)$$

où le symbole $\delta(dx)$ désigne la variation du domaine d'intégration [12]

$$\delta(dx) = \sum_i \frac{dx}{dx^i} \delta(dx^i) = dx \sum_i \frac{\partial \delta x^i}{\partial x^i} \quad (1.41)$$

La variation du Lagrangien donne

$$\delta \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x) = \bar{\delta} \mathcal{L} + \sum_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^n} \delta x^n, \quad (1.42)$$

où la variation de la forme de Lagrangien $\bar{\delta} \mathcal{L}(x)$ s'écrit

$$\bar{\delta} \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i(x)} \bar{\delta} u_i(x) + \sum_{i,k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;k}(x)} \bar{\delta}(u_{i;k}(x)) \quad (1.43)$$

En utilisant (1.19) et en permutant les opérateurs $\bar{\delta}$ et $\frac{\partial}{\partial x}$, on trouve que

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (u_{i;k})} \right) \bar{\delta}u_i + \sum_{i,k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (u_{i;k})} \partial_k(\bar{\delta}u_i) = \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;k}} \bar{\delta}u_i \right)$$

Après avoir rassemblé tous les termes, on obtient pour la variation de l'action l'expression

$$\delta A = \int dx \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;k}} \bar{\delta}u_i + \mathcal{L} \delta x^k \right\} = - \int dx \sum_{k,j} \frac{\partial \theta_j^k}{\partial x^k} \delta \omega^j \quad (1.44)$$

où le courant

$$\theta_i^k(x) = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j;k}} \left(\sum_n \frac{\partial u_j}{\partial x^n} X_i^n - \Psi_{ji} \right) - \mathcal{L} X_i^k \quad (1.45)$$

En utilisant le fait que la variation de l'action est nulle, on obtient, en égalant à zéro les dérivées fonctionnelles de l'action par rapport aux paramètres $\delta \omega^j$, les équations de conservation

$$\frac{\delta A}{\delta \omega^i} = - \sum_k \frac{\partial \theta_i^k}{\partial x^k} = 0. \quad (1.46)$$

A partir de cette dernière équation et grâce au théorème de Gauss, on peut obtenir les lois de conservation des intégrales de surface correspondantes pour cela, on intègre (1.46) à l'intérieur d'un volume qui s'étend à l'infini dans les directions du genre espace et qui est limité dans la direction du genre temps par les surfaces σ_1 et σ_2 à trois dimensions puis en supposant qu'aux limites du volume, dans les directions du genre espace, le champ est pratiquement nul, on obtient

$$\sum_k \int_{\sigma_1} d\sigma_k \theta_i^k - \sum_k \int_{\sigma_2} d\sigma_k \theta_i^k = 0 \quad (1.47)$$

L'équation obtenue montre que les intégrales de surface

$$C_i(\sigma) = \sum_k \int_{\sigma} d\sigma_k \theta_i^k \quad (1.48)$$

ne dépendent pas, en fait, de la surface σ .

Dans le cas particulier où les surfaces σ sont des plans $x^0 = t = C^{te}$, l'intégration dans (1.46) est étendue à l'espace de configuration à trois dimensions et les intégrales

$$C_i(x^0) = \int d\vec{x} \theta_i^0 \quad (1.49)$$

sont indépendantes du temps.

Ainsi, nous avons démontré qu'à chaque transformation continue à s paramètres des coordonnées et des champs correspond un invariant C_i indépendant du temps.

La quantité θ_i^k n'est pas déterminée d'une manière unique. On peut lui ajouter une expression de la forme $\sum_m \frac{\partial f_i^{mk}}{\partial x^m}$ à condition que $f_i^{mk} = -f_i^{km}$.

On utilise parfois cette propriété pour rendre θ_i^k symétriques. Cependant l'arbitraire indiqué n'influe pas sur la valeur des intégrales qui se conservent.

Passons maintenant aux exemples concrets de grandeurs θ_i^k et aux lois de conservation (1.48) qui leurs sont associées.

Le vecteur énergie-impulsion

Pour les translations infinitésimales d'espace-temps

$$x'^k = x^k + \delta x^k = x^k + \delta a^k \quad (1.50)$$

En tenant compte de la loi de transformation (1.26), on trouve,

$$X_l^k = \delta_l^k, \quad \Psi_{kl} = 0; \quad k, l = 0, 1, 2, 3 \quad (1.51)$$

et θ_i^k devient le tenseur

$$T_l^k = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;k}(x)} \frac{\partial u_i(x)}{\partial x^l} - \mathcal{L} \delta_l^k; \quad k, l = 0, 1, 2, 3 \quad (1.52)$$

Ce tenseur s'écrit sous forme entièrement contra-variante [12]

$$T^{kl} = g^{ll} \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;k}} \frac{\partial u_i(x)}{\partial x^l} - \mathcal{L} g^{kl} \quad (1.53)$$

Les intégrales de types 1.49 formées à partir de T^{kl} constituent un quadri-vecteur qui se conserve dans le temps

$$P^l = \int T^{0l} d\vec{x}. \quad (1.54)$$

La composante zéro de ce vecteur P^0 représente, dans la mécanique classique, la fonction de Hamilton, c'est-à-dire l'énergie. Il résulte alors des considérations de covariance, que le quadri-vecteur (1.54) représente l'énergie-impulsion, tandis que le tenseur (1.53) est le tenseur énergie-impulsion.

Remarquons ici que seules les grandeurs dynamiques intégrales semblables au quadri-vecteur d'énergie-impulsion P^l nous intéressent. La structure du tenseur T^{kl} qui, dans notre exposé, n'est pas définie de façon unique, n'est intéressante en elle-même que dans une théorie tenant compte des effets de gravitations[12].

Le tenseur du moment cinétique et le tenseur de spin:

Pour des rotations infinitésimales à quatre dimensions

$$x'^n = x^n + x_m \delta\Omega^{nm} \quad (1.55)$$

La propriété de l'antisymétrie de $\delta\Omega^{nm}$ nous permet d'écrire

$$\delta\Omega^{nm} = -\delta\Omega^{mn} \quad (1.56)$$

On choisit comme paramètres de transformation les six quantités linéairement indépendantes

$$\delta\omega^{nm}; \quad n < m \quad (1.57)$$

les indices n, m désignent ici le plan dans lequel s'effectue la rotation de paramètres $\delta\omega^{nm}$, nous voyons que dans la formule (1.34), l'indice inférieur j est remplacé par deux indices (n, m) .

Ainsi

$$\delta x^k = X_j^k \delta\omega^j = \sum_{n < m} X_{nm}^k \delta\omega^{nm} \quad (1.58)$$

En partant de l'identité

$$x_l \delta\omega^{kl} = x_l \delta\omega^{ml} \delta_m^k = \sum_{m < l} x_l \delta\omega^{ml} \delta_m^k + \sum_{m > l} x_l \delta\omega^{ml} \delta_m^k \quad (1.59)$$

puis en faisant la permutation

$$\begin{aligned} n &\rightarrow m \\ m &\rightarrow n \end{aligned} \quad (1.60)$$

dans respectivement le premier et le second terme, et en tenant compte de l'antisymétrie des paramètres de groupe $\delta\omega^{nm}$, on aura

$$\begin{aligned} \delta x^k &= \sum_{n < m} x_m \delta\omega^{nm} \delta_n^k - \sum_{n < m} x_n \delta\omega^{nm} \delta_m^k \\ &= \sum_{n < m} \delta\omega^{nm} (x_m \delta_n^k - x_n \delta_m^k) \end{aligned} \quad (1.61)$$

Ce qui permet d'identifier

$$X_{nm}^k = x_m \delta_n^k - x_n \delta_m^k \delta x^k \quad (1.62)$$

dans la relation

$$\delta x^k = \sum_{n < m} \delta \omega^{nm} X_{nm}^k \quad (1.63)$$

Notons que la variation totale de la fonction de champ sera écrite sous la forme

$$u'_i(x') = u_i(x) + \delta u_i(x); \quad \delta u_i(x) = \sum_{n,m} \Psi_{inm} \delta \omega^{nm} = \sum_{j,n,m} A_{ikl}^j u_j(x) \delta \omega^{kl}. \quad (1.64)$$

Pour un champ scalaire, $A_{ikl}^j = 0$ tandis que pour un champ vectoriel

$$A_{ikl}^j = g_{ik} \delta_l^j - g_{il} \delta_k^j \quad (k \leq l) \quad (1.65)$$

Si nous substituons les matrices de transformations

$$\begin{aligned} X_{nm}^k &= x_m \delta_n^k - x_n \delta_m^k \\ \Psi_{inm} &= A_{inm}^j u_j(x) \end{aligned} \quad (1.66)$$

dans (1.45), nous obtenons l'expression suivante du tenseur moment cinétique

$$M_{lm}^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;k}} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x^l} x_m - \frac{\partial u_i}{\partial x^m} x_l \right\} + \mathcal{L} (x_l \delta_m^k - x_m \delta_l^k) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;k}} A_{ilm}^j u_j(x) \quad (1.67)$$

Soit

$$M_{lm}^k = (x_m T_l^k - x_l T_m^k) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;k}} A_{ilm}^j u_j(x) \quad (1.68)$$

Remarquons que cette dernière expression fait apparaître explicitement le lien entre les propriétés de symétrie du tenseur d'énergie-impulsion T_l^k et la structure du tenseur de moment M_{lm}^k . Dans le cas d'un champ scalaire, le second terme de cette dernière expression est nul, et la relation entre M_{lm}^k et T_l^k prend une forme semblable à celle trouvée en mécanique du point.

Examinons le tenseur "moment cinétique orbital" $M_{orb}^{ml,k}$ dont la condition de conservation est de la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{orb}^{ml,k}}{\partial x^k} &= 0 \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} (x^m T^{lk} - x^l T^{mk}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^k} T^{lk} \right) x^m + T^{lk} \delta_k^m - \left(\frac{\partial}{\partial x^k} T^{mk} \right) x^l - T^{mk} \delta_k^l = 0 \end{aligned} \quad (1.69)$$

Etant donné que

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^{lk} = \frac{\partial}{\partial x^k} T^{mk} = 0 \quad (1.70)$$

La condition (1.69) est réalisée si

$$T^{lk} = T^{kl} \quad (1.71)$$

c'est-à-dire que le tenseur énergie-impulsion T^{lk} doit être symétrique. Inversement si T^{lk} est symétrique, on obtient immédiatement la condition (1.69) comme suit:

$$\frac{\partial M_{orb}^{ml,k}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} (x^m T^{lk} - x^l T^{mk}) = T^{ml} - T^{lm} = 0 \quad (1.72)$$

Finalement, dans le cas du champ scalaire, pour conserver le moment orbital $M_{orb}^{ml,k}$, il faut et il suffit que le tenseur énergie-impulsion soit symétrique. Dans le cas d'un champ vectoriel ou spinoriel à plusieurs composantes, l'expression de $M^{lm,k}$ est de la forme (1.68) et son second terme possède l'expression suivante

$$S_{lm}^k = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;k}} u_j A_{i,lm}^j \quad (1.73)$$

qui caractérise les propriétés de la polarisation du champ et correspond au moment de spin des particules décrites par le champ quantique $u_j(x)$.

A partir des densités d'espace des moments de spin

$$S_{lm}^0 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;0}} u_j A_{i,lm}^j$$

si nous contractons les composantes d'espace de cette dernière expression avec le tenseur de rang trois totalement antisymétrique de Levi-Civita, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$, nous obtenons les composantes du vecteur spin dans l'espace tridimensionnel [2]

$$S_a = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \int S_{\beta\gamma}^0 d\vec{x}; \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3.$$

Charge et vecteur courant

Dans le cas des champs complexes, le lagrangien est invariant par rapport à ce qu'on appelle la transformation de jauge de première espèce, qui ne concerne que les fonctions de champ et n'affecte pas les coordonnées.

A cause de la propriété de réalité (hermiticité), le lagrangien, tout comme les variables dynamiques, ne peut dépendre des champs complexes ou de leurs dérivées que par l'intermédiaire de forme quadratique du type $u^* u$, $\partial_k u^* \partial_k u$ où u^* et u sont des fonctions conjuguées l'une de l'autre. Il en résulte immédiatement que les fonctions de champ complexes u peuvent être multipliées par un facteur de phase arbitraire de la forme $\exp(i\alpha)$, qui laisse inchangée

la forme quadratique u^*u . En considérant u et u^* comme des fonctions linéairement indépendantes, on peut alors écrire la transformation de jauge de première espèce sous la forme

$$u_j \rightarrow e^{i\alpha} u_j; \quad u_j^* \rightarrow e^{-i\alpha} u_j^* \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.74)$$

Pour une valeur de α infiniment petite on aura

$$u_j \rightarrow u_j + i\alpha u_j; \quad u_j^* \rightarrow u_j^* - i\alpha u_j^* \quad (1.75)$$

Ainsi, les matrices de transformation du champ et de son conjugués sont respectivement:

$$\Psi_j = iu_j \quad (1.76)$$

$$\Psi_j^* = -iu_j^* \quad (1.77)$$

tandis que la matrice de transformation des coordonnées est

$$X_l^k = 0 \quad (1.78)$$

En substituant ces relations dans (1.45), on aboutit à une expression ayant la nature tensorielle d'un vecteur

$$J^k(x) = i \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial u_j^*}{\partial x^k} \right)} u_j^*(x) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial u_j}{\partial x^k} \right)} u_j(x) \right) \quad (1.79)$$

C'est un quadri-vecteur qui satisfait à l'équation de continuité

$$\sum_k \frac{\partial J^k}{\partial x^k} = -\frac{\delta A}{\delta \alpha} = 0 \quad (1.80)$$

Et qui est, pour cette raison, identifié habituellement au quadri-vecteur de courant, tandis que l'intégrale sur l'espace de sa composante temporelle qui, conformément à (1.49) ne dépend pas du temps est identifiée à la charge du champ⁽¹⁾.

$$Q = \int J^0(x) dx = i \int dx \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial u_j^*}{\partial x^0} \right)} u_j^*(x) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial u_j}{\partial x^0} \right)} u_j(x) \right) = C^{te}. \quad (1.81)$$

Soulignons qu'il serait inexact de dire que les champs libres « décrivent » les particules correspondantes, puisque seule une théorie des champs en interaction peut donner une description complètes des particules élémentaires avec toutes leurs caractéristiques physiques (par exemple, leurs moments magnétiques). Aussi est-il plus exact de dire, que les champs libres isolés « correspondent » aux différentes particules et constituent une base pour la description de ces particules dans le cadre de la théorie des champs en interaction.

⁽¹⁾Notons que la charge Q ne coïncide pas nécessairement avec la charge électrique.

Pour cela des formules de ce type peuvent décrire par exemple la charge nucléonique [12]

2

Application du théorème de Noether aux particules étendues

2.1 Introduction

Un modèle de particules étendues basé sur une structure en fibré ⁽¹⁾ a été précédemment élaboré au sein de notre laboratoire,

[8, 14] La particule étendue est représentée par un champ bilocal $\psi(x, \xi)$ où x appartient à la variété de base et ξ à la fibre. La base a été interprétée comme l'espace temps usuel (externe), qui peut être de type Riemannien. La fibre correspond à un espace-temps interne lié à l'extension de la particule et possède une symétrie définie (Galilée, Minkowski ou de Sitter). Le champ bilocal $\psi(x, \xi)$ décrit un mode quantique externe localisé en x et un mode quantique interne localisé ξ . Ces deux modes composent la particule. En faisant une analogie avec le problème à deux corps, x représenterait le centre de masse et ξ serait lié au mouvement relatif.

⁽¹⁾Selon [14]: «L'étude des espaces fibrés fait partie de la branche des mathématiques qu'on appelle topologie, mais les fibrés ont également été étudiés en géométrie différentielle à cause de leur parenté avec le concept géométrique de courbure. L'idée de connexion dans un espace fibré s'est développée lorsque on a tenté de généraliser la notion de courbure d'une surface à deux dimensions pour des espaces à trois dimensions ou plus. L'application de ces concepts en physique a donné naissance à des théories puissantes tel que la théorie des jauge et a permis de décrire aussi bien des phénomènes quantiques que macroscopiques.

Un espace fibré $E(M, F, \pi, G)$ est une structure mathématique constitué de trois variétés différentiables, l'espace de base M , l'espace total E et la fibre type F ; il est muni d'une loi de projection π qui associe un point de M à tout point de E , et d'un groupe Lie G appelé groupe structural. »

Ce modèle est fondé sur les idées de la théorie fonctionnelle [5] et sur la structure géométrique de la théorie géométo-stochastique [15].

Dans ce second chapitre, nous nous proposons de construire, moyennant le formalisme lagrangien, une théorie des champs associée à ce modèle de particule étendue. Les équations des champs et les courants sont obtenus à partir du lagrangien du système par application du principe variationnel [2]. Pour ce faire, nous commencerons par présenter brièvement, dans un premier paragraphe, le fondement des théories des théories fonctionnelles et géométo-stochastique dont s'inspire le modèle de particule étendue décrit par un champ bilocal $u(x, \xi)$. Dans le paragraphe suivant, nous déterminerons les équations du mouvement d'un champ ayant pour composantes $u_i(x, \xi)$. Les équations obtenues sont celles d'Euler-Lagrange habituelles avec un terme en plus correspondant au mouvement interne. Dans le paragraphe trois, nous utilisons le théorème de Noether afin de déterminer les courants associés à cette théorie. Nous obtenons des courants possédant des composantes internes et externes (dont l'expression est semblable à celle du courant des champs ponctuels [2]) plus des composantes additionnelles que nous appellerons mixtes qui contiennent des termes internes et externes. Dans le quatrième paragraphe, nous appliquerons ce formalisme au cas particulier d'un champ bispinoriel. Puis nous achèverons ce chapitre par une brève conclusion.

Dans ces deux derniers paragraphes, nous supposeront pour simplifier les calculs, que les espaces externe et interne sont du type de Minkowski (plats) et que toutes les connexions pouvant décrire les diverses interactions sont nulles. Le groupe de symétrie est alors réalisé comme le produit direct du groupe de symétrie interne de Poincaré et du groupe de symétrie externe de Poincaré.

2.2 Les Théories Quantiques Fonctionnelle et Géométo-Stochastique

Dans ce paragraphe, nous présentons brièvement quelques théories dont s'inspire le modèle de particule étendue. Toutes ces théories rejettent l'idée de ponctualité des particules mais ont des interprétations différentes quand à leur extension. La théorie géométo-stochastique [16] propose une extension géométrique irréductible, liée au processus de mesure. Dans la théorie quantique fonctionnelle du corpuscule de J.L. Destouches [5], la particule est représentée par une fonction d'onde physique qui peut subir l'influence de l'environnement

extérieur sur elle. Ces deux théories ne sont en fait que des représentations différentes d'un même système physique, la particule étendue.

Commençons par présenter la théorie quantique fonctionnelle, cette dernière considère que la dichotomie système physique reste de l'univers est impossible à réaliser. Selon son fondateur J.L. Destouches "L'univers forme un tout solidaire, en distinguer un système physique, c'est créer une situation fictive qui décrit imparfaitement la situation réelle" [17].

2.2.1 La théorie quantique fonctionnelle

C'est une des ancienne théorie qui rejette la notion de particule ponctuelle. Elle fut élaborée [5] afin d'étudier la situation non physique que constitue le découpage système physique (corpuscule) du reste de l'univers. Pour cela, il faut tenir compte de l'influence qu'exerce l'extérieur non seulement sur les actions auxquelles le système est soumis mais également sur ses caractéristiques propres.

Pour cette raison, la représentation d'un corpuscule par un point géométrique ou par une figure géométrique invariable (corps solide) s'avère insuffisante. Pour qu'un corpuscule soit influençable dans ses propres caractéristiques, il faut qu'il soit déterminé par une infinité dénombrable d'éléments. Ce qui conduit à représenter un corpuscule par une fonction u à valeurs complexes appartenant à un espace fonctionnel séparable. Cette fonction u constitue la représentation fonctionnelle de la particule. Le nombre de composante u_i de cette fonction u est fixé par les conditions de covariance et les caractéristiques internes. Les arguments de la fonction u sont déterminés à l'aide du principe du rattachement spatial. D'après ce principe, la fonction a pour arguments un point P désignant une variable libre qui parcourt l'espace et ne représente aucun objet ni corpuscule, et par une variable temporelle T parcourant l'ensemble des instants de l'horloge d'un observateur. Notons que ni P ni T n'ont de signification physique, seule la fonction u en possède une, elle représente le corpuscule.

La représentation fonctionnelle ne supprime pas la représentation géométrique ponctuelle du corpuscule. Géométriquement, le corpuscule est représenté, dans cette théorie, par un point M qui doit être une fonctionnelle de u , soit $M = F[u]$ que nous désignerons par l'écriture $M = \text{sing } u$, (cette écriture a été introduite par Louis de Broglie [6] dans sa théorie de la double solution où le corpuscule était représenté par le point M qui correspondait à la singularité mathématique de la fonction u). La fonction u obéit à une équation de la forme $\mathcal{E}(u) = Q(u, \nabla, \frac{\partial}{\partial t})$ où $\mathcal{E}(\psi) = 0$ désigne une équation d'onde linéaire de la mécanique ondulatoire usuelle et Q une expression complexe non linéaire de u et de ses dérivés. Cette fonction peut être déterminée par un modèle physique spécifique (globule fluide).

Comme le point x , présent dans l'argument de la fonction d'onde de la mécanique conventionnelle, est remplacé par l'onde physique u , les prévisions sont alors calculées dans cette théorie par une fonctionnelle

$$X[u.t]. \tag{2.1}$$

qui obéit à la décomposition spectrale

$$X[u.t] = \sum_i a_i(t) X_i [u] \tag{2.2}$$

et qui correspond à l'équivalent de l'onde de la mécanique quantique conventionnelle dans l'approximation ponctuelle.

2.2.2 La Théorie Géométo-Stochastique sur l'espace des phases

La théorie géométo-stochastique, proposée par Eduard Prugovečki, est fondée sur un principe opérationnel selon lequel une théorie physique doit définir les concepts en tenant compte des conditions expérimentales de leur observation [18]. Ainsi, les fluctuations, lors de la mesure de la position et de l'impulsion, dues aux imperfections inévitables des appareils de mesure, doivent être prises en compte dans le concept de localisation d'une particule. La mesure de la position d'une particule ponctuelle donne une distribution autour d'une de ses positions, d'un point de vue opérationnel la particule devient étendue stochastiquement.

La théorie géométo-stochastique est basée sur trois principes [16], celui de l'indétermination irréductible permettant d'introduire la composante stochastique liée à tout processus de mesures. La mesure d'une grandeur physique n'est plus représentée par un seul nombre x , mais par une valeur stochastique (x, χ_x) où χ_x est la fonction de confiance donnant la probabilité d'observer des fluctuations statistiques autour de la valeur x . Le principe de l'information quantique complète assure l'existence des processus de mesures qui déterminent de manière univoque l'état du système et le principe de la relativité générale quantique qui spécifie la structure géométrique en fibré de la géométrie quantique où la variété de base est du type Lorentzien, le groupe structural contient le groupe de Poincaré, et les fibres sont des espaces d'Hilbert des états liés aux repères quantiques locaux.

Ainsi, la théorie géométo-stochastique possède deux composantes. La composante stochastique, rattachée au processus de mesure, qui confère à toute particule une extension irréductible et la composante géométrique qui est basée sur la définition opérationnelle de l'espace-temps. Les repères d'inertie classiques sont remplacés par des repères quantiques locaux et une construction en fibré permet de définir un espace-temps quantique unifiant ainsi la mécanique quantique et la relativité générale [15].

2.3 Les Equations Euler-Lagrange pour la particule étendue

Considérons un champ bilocal décrit par ses composantes $u_i(x, \xi)$ où $x = (x^k)$ est un quadri-vecteur de l'espace-temps de Minkowski externe et $\xi = (\xi^\alpha)$ un quadri-vecteur de l'espace-temps de Minkowski interne [19], ainsi les indices k et α , varient tous les deux, de 0 à 3.

La densité Lagrangienne est choisie, comme pour les théories locales, dépendant du champ et de ses diverses dérivées (interne et externe)

$$L = L(u_i(x, \xi), u_{i;k}(x, \xi), u_{i;\alpha}(x, \xi)) \quad (2.3)$$

$$u_{i;k} = \partial_k u_i = \partial u_i / \partial x^k ; \quad u_{i;\alpha} = \partial_\alpha u_i = \partial u_i / \partial \xi^\alpha \quad (2.4)$$

L'action associée à ce système sera alors

$$A = \int L dx d\xi \quad (2.5)$$

Les équations d'Euler-Lagrange correspondent à un extremum de cette action pour une variation du champ en un point fixe de l'espace-temps

$$\delta A = \int \bar{\delta} L dx d\xi = 0 \quad (2.6)$$

Pour ce type de transformation, le champ se transforme comme

$$u'_i(x, \xi) = u_i(x, \xi) + \bar{\delta} u_i(x, \xi) \quad (2.7)$$

où $\bar{\delta} u_i$ est la variation de forme de la fonction u_i .

La variation de la densité Lagrangienne est alors

$$\bar{\delta} L = \bar{\delta} u_i \partial L / \partial u_i + \bar{\delta} u_{i;k} \partial L / \partial u_{i;k} + \bar{\delta} u_{i;\alpha} \partial L / \partial u_{i;\alpha} \quad (2.8)$$

En remplaçant l'expression de $\bar{\delta} L$ dans l'équation $\delta A = 0$, nous obtenons

$$\int (\bar{\delta} u_i \partial L / \partial u_i + \bar{\delta} u_{i;k} \partial L / \partial u_{i;k} + \bar{\delta} u_{i;\alpha} \partial L / \partial u_{i;\alpha}) dx d\xi = 0 \quad (2.9)$$

L'intégration de cette expression par partie donne

$$\int \bar{\delta} u_i [\partial L / \partial u_i - \partial_k (\partial L / \partial u_{i;k}) - \partial_\alpha (\partial L / \partial u_{i;\alpha})] dx d\xi + [\partial_k (\bar{\delta} u_i \partial L / \partial u_{i;k}) + \partial_\alpha (\bar{\delta} u_i \partial L / \partial u_{i;\alpha})] dx d\xi = 0$$

En supposant que les variations du champ $\bar{\delta}u_i$ s'annulent à la limites du domaine d'intégration, nous obtenons alors les équations d'Euler-Lagrange

$$\partial L / \partial u_i - \partial_k [\partial L / \partial u_{i;k}] - \partial_\alpha [\partial L / \partial u_{i;\alpha}] = 0 \quad (2.10)$$

Ces équations du champ sont similaires aux équations ordinaires d'Euler-Lagrange avec un terme additionnel $\partial_\alpha [\partial L / \partial u_{i;\alpha}]$ dû aux degrés de liberté internes.

Pour construire les invariants des champs, nous allons utiliser le théorème de Noether.

2.4 Le théorème de Noether pour la Particule étendue

Ce théorème exprime que l'invariance de l'action par rapport à un groupe à n paramètres, conduit à l'existence de n quantités conservées si les équations du mouvement sont vérifiées. Pour redémontrer ce théorème dans le cas d'un champ bilocal, considérons les transformations infinitésimales des variables externes et internes

$$x'^k = x^k + \delta x^k; \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (2.11)$$

$$\xi'^\alpha = \xi^\alpha + \delta \xi^\alpha; \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (2.12)$$

Sous ces transformations, la loi de transformation des fonctions de champs s'écrit

$$u'_i(x', \xi') = u_i(x, \xi) + \delta u_i(x, \xi) \quad (2.13)$$

$$\delta u_i = \bar{\delta}u_i + \delta x^k u_{i;k} + \delta \xi^\alpha u_{i;\alpha} \quad (2.14)$$

où il est tenu compte aussi bien de la variation de forme $\bar{\delta}u_i$ de la fonction $u_i(x, \xi)$ que de la variation due au changement de son argument.

La variation de la densité Lagrangienne correspondante est alors

$$\delta L = \bar{\delta}L + \delta x^k \partial L / \partial x^k + \delta \xi^\alpha \partial L / \partial \xi^\alpha \quad (2.15)$$

L'invariance de l'action sera donc

$$\delta A = \int \delta L dx d\xi + \int L \delta (dx d\xi) = 0 \quad (2.16)$$

où la variation de la mesure d'intégration [19]

$$\delta (dx d\xi) = (|J| - 1) dx d\xi \quad (2.17)$$

est exprimée au moyen du Jacobien

$$|J| \approx 1 + \frac{\partial \delta x^k}{\partial x^k} + \frac{\partial \delta \xi^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \quad (2.18)$$

En remplaçant toutes les quantités précédentes dans la condition d'invariance, sans utiliser les équations du mouvement, nous trouvons les équations suivantes

$$\frac{\delta L}{\delta u_i} \bar{\delta} u_i = \partial_k (\delta \omega^n \Theta_n^k) + \partial_\alpha (\delta \omega^n \Theta_n^\alpha) \quad (2.19)$$

où $\delta \omega^n$ sont les paramètres de symétrie

et

$$\partial_k (\Theta_n^k) + \partial_\alpha (\Theta_n^\alpha) = 0 \quad (2.20)$$

Les dérivées Lagrangiennes sont données par

$$\frac{\delta L}{\delta u_i} = \partial L / \partial u_i - \partial_k [\partial L / \partial u_{i;k}] - \partial_\alpha [\partial L / \partial u_{i;\alpha}] \quad (2.21)$$

et les courants obtenus sont

$$\Theta_n^k = \frac{-1}{\delta \omega^n} [\bar{\delta} u_i \partial L / \partial u_{i;k} + \delta x^k L] \quad (2.22)$$

$$\Theta_n^\alpha = \frac{-1}{\delta \omega^n} [\bar{\delta} u_i \partial L / \partial u_{i;\alpha} + \delta \xi^\alpha L] \quad (2.23)$$

C'est à ce niveau que la symétrie de la particule étendue entre en jeu, dans le cas le plus général [19], nous avons

$$\delta x^k = \delta \omega^n \left([I_n]_l^k x^l + [I_n]_\alpha^k \xi^\alpha \right) \quad (2.24)$$

$$\delta \xi^\alpha = \delta \omega^n \left([I_n]_l^\alpha x^l + [I_n]_\beta^\alpha \xi^\beta \right) \quad (2.25)$$

Dans la représentations des champs, les générateurs (Annexe B) de la symétrie sont notés T

$$\delta u_i = \delta \omega^n [T_n] u_i \quad (2.26)$$

$$\bar{\delta} u_i = \delta \omega^n \left\{ [T_n] u_i - u_{i;k} \left([I_n]_l^k x^l + [I_n]_\alpha^k \xi^\alpha \right) - u_{i;\alpha} \left([I_n]_l^\alpha x^l + [I_n]_\beta^\alpha \xi^\beta \right) \right\} \quad (2.27)$$

Les courants peuvent être décomposés en deux parties [19]

$$\Theta_n^k = \theta_n^k + \sigma_n^k \quad (2.28)$$

$$\Theta_n^\alpha = \theta_n^\alpha + \sigma_n^\alpha \quad (2.29)$$

Les composantes

$$\theta_n^k = -\partial L / \partial u_{i;k} \left([T_n] u_i - u_{i;j} [I_n]_l^j x^l \right) - L [I_n]_l^k x^l \quad (2.30)$$

$$\theta_n^\alpha = -\partial L / \partial u_{i;\alpha} \left([T_n] u_i - u_{i;\lambda} [I_n]_\beta^\lambda \xi^\beta \right) - L [I_n]_\beta^\alpha \xi^\beta \quad (2.31)$$

possèdent une expression identique à celle du courant correspondant à des particules externe ou interne ponctuelles. Selon l'indice n , ces expressions peuvent correspondre à des composantes internes ou externes (il faut noter que ces composantes ne sont pas purement interne ou externe car elles contiennent les termes L , $\partial L / \partial u_{i;k}$, et $\partial L / \partial u_{i;\alpha}$ qui possèdent une partie externe et interne).

Les autres composantes que l'on nommera mixtes

$$\sigma_n^k = -\partial L / \partial u_{i;k} \left(-u_{i;j} [I_n]_\alpha^j \xi^\alpha - u_{i;\alpha} \left([I_n]_l^\alpha x^l + [I_n]_\beta^\alpha \xi^\beta \right) \right) - L [I_n]_\alpha^k \xi^\alpha \quad (2.32)$$

$$\sigma_n^\alpha = -\partial L / \partial u_{i;\alpha} \left(-u_{i;k} \left([I_n]_l^k x^l + [I_n]_\beta^k \xi^\beta \right) - u_{i;\beta} [I_n]_l^\beta x^l \right) - L [I_n]_l^\alpha x^l \quad (2.33)$$

contiennent explicitement un mélange de composantes spatio-temporelles internes et externes.

Si nous considérons le cas où les symétries interne et externe agissent séparément, alors les expressions précédentes se simplifient

$$\sigma_n^k = \partial L / \partial u_{i;k} \left(u_{i;\alpha} [I_n]_\beta^\alpha \xi^\beta \right) \quad (2.34)$$

$$\sigma_n^\alpha = \partial L / \partial u_{i;\alpha} \left(u_{i;k} [I_n]_l^k x^l \right) \quad (2.35)$$

2.5 Le champ bispinoriel

Supposant que les champs $u(x, \xi)$ sont des bispineurs $u(x, \xi) = u^{AA'}(x, \xi)$ où le premier indice A se transforme selon la représentation du groupe de Lorentz externe et le second (A') selon le groupe Lorentz interne. Les champs conjugués $\bar{u} = u^* (\gamma^0 \otimes \Gamma^0)$ sont exprimés

à l'aide des matrices de Dirac interne et externe γ et Γ , respectivement. Nous choisissons l'expression suivante pour le Lagrangien

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{i}{2} [\bar{u}\gamma^k\partial_k u - \partial_k\bar{u}\gamma^k u] \\
 &+ \frac{i}{2} [\bar{u}\Gamma^\alpha\partial_\alpha u - \partial_\alpha\bar{u}\Gamma^\alpha u] \\
 &- \frac{1}{2} [\partial_k\bar{u}\gamma^k\Gamma^\alpha\partial_\alpha u + \partial_\alpha\bar{u}\gamma^k\Gamma^\alpha\partial_k u] \\
 &- m\bar{u}u
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Nous avons utilisé une notation simplifiée telle que $\gamma^k = \gamma^k \otimes 1$, $\Gamma^\alpha = 1 \otimes \Gamma^\alpha$, et $\gamma^k\Gamma^\alpha = \gamma^k \otimes \Gamma^\alpha$.

Les équations du mouvement sont

$$[i(\gamma^k\partial_k + \Gamma^\alpha\partial_\alpha) - m + (\gamma^k\partial_k \otimes \Gamma^\alpha\partial_\alpha)] u = 0 \tag{2.37}$$

$$\bar{u} \left[-i \left(\overleftarrow{\partial}_k \gamma^k + \overleftarrow{\partial}_\alpha \Gamma^\alpha \right) - m + \left(\overleftarrow{\partial}_k \gamma^k \otimes \overleftarrow{\partial}_\alpha \Gamma^\alpha \right) \right] = 0 \tag{2.38}$$

Elles contiennent en plus des termes cinématiques interne et externe, un terme mixte $(\gamma^k\partial_k \otimes \Gamma^\alpha\partial_\alpha)$ due à la forme précédente de la densité Lagrangienne [19].

En ce qui concerne les courants, commençons par l'étude de l'invariance sous les translations dans les espaces internes et externes. Dans ce cas, n peut être identifié à l ou β . Les générateurs sont tels que $[I_l]^k_j x^j$ et $[I_\beta]^\alpha_\lambda \xi^\lambda$ peuvent être remplacés par δ_l^k et δ_β^α et $T_n = 0$. Les composantes interne et externe du tenseur energie-impulsion ont alors une forme usuelle

$$\theta_l^k = \partial L / \partial u_{i;k} (u_{i;l}) - L \delta_l^k \tag{2.39}$$

$$\theta_\beta^\alpha = \partial L / \partial u_{i;\alpha} (u_{i;\beta}) - L \delta_\beta^\alpha \tag{2.40}$$

Les composantes mixtes deviennent ainsi

$$\theta_\beta^k = \theta_k^\alpha = 0 \tag{2.41}$$

$$\sigma_\beta^k = \frac{i}{2} [\bar{u}\gamma^k + i\partial_\alpha\bar{u}(\gamma^k \otimes \Gamma^\alpha)] \partial_\beta u \tag{2.42}$$

$$\sigma_k^\alpha = \frac{i}{2} [\bar{u}\Gamma^\alpha + i\partial_k\bar{u}(\gamma^k \otimes \Gamma^\alpha)] \partial_k u \tag{2.43}$$

Dans le cas particulier des rotations de Lorentz dans le plan externe (m, n) et le plan interne (μ, ν) , les générateurs possèdent la forme suivantes [19]

$$[I_{(n,m)}]_j^k x^j = x_m \delta_n^k - x_n \delta_m^k \quad (2.44)$$

$$[I_{(\nu,\mu)}]_\beta^\alpha \xi^\beta = \xi_\mu \delta_\nu^\alpha - \xi_\nu \delta_\mu^\alpha \quad (2.45)$$

Les composantes mixtes sont alors [19]

$$\theta_{(\nu,\mu)}^k = \frac{i}{2} [\bar{u} \gamma^k + i \partial_\alpha \bar{u} (\gamma^k \otimes \Gamma^\alpha)] [1 \otimes (\Gamma_\nu \Gamma_\mu / 2)] u \quad (2.46)$$

$$\theta_{(n,m)}^\alpha = \frac{i}{2} [\bar{u} \Gamma^\alpha + i \partial_k \bar{u} (\gamma^k \otimes \Gamma^\alpha)] [(\gamma_n \gamma_m / 2) \otimes 1] u \quad (2.47)$$

$$\sigma_{(\nu,\mu)}^k = \frac{i}{2} [\bar{u} \gamma^k + i \partial_\alpha \bar{u} (\gamma^k \otimes \Gamma^\alpha)] (\xi_\mu \partial_\nu - \xi_\nu \partial_\mu) u \quad (2.48)$$

$$\sigma_{(n,m)}^\alpha = \frac{i}{2} [\bar{u} \Gamma^\alpha + i \partial_k \bar{u} (\gamma^k \otimes \Gamma^\alpha)] (x_m \partial_n - x_n \partial_m) u \quad (2.49)$$

2.6 Conclusion

En supposant que le Lagrangien associé au champ bilocal était invariant sous des transformations du groupe de symétrie réalisé comme le produit direct du groupe de symétrie interne et externe, nous avons obtenu des expressions compliquées du courant avec des composantes interne externe et mixtes. Le Lagrangien que nous avons choisi, nous a permis d'avoir des expressions plus concrètes mais ces résultats ne nous permettent pas d'avancer des conclusions plus générales, en effet, le courant total ainsi que les composantes satisfont à une équation qui ressemble à une équation de conservation mais en fait, n'en ai pas une, car elle contient des dérivées externe et interne. Nous espérons dans un prochain travail pouvoir donner des résultats physiques plus précis.

3

Théorie de jauge pour les particules étendues

3.1 Introduction

Dans les chapitres précédents nous avons étudié les groupes globaux de transformations et les lagrangiens invariants par rapport à ces groupes. Le lagrangien invariant globale peut ne pas être invariant par rapport au groupe correspondant à des transformations de jauge locales. Pour obtenir le lagrangien invariant local, il faut introduire de nouveaux champs dits de jauge.

Dans ce chapitre nous passons à l'étude des transformations de jauge locales dans le cas de la particule ponctuelle $u_i(x)$ [20] et tenterons d'étendre cette étude à celle de la particule étendue. Dans une première partie, nous montrons, comment un lagrangien décrivant un champ de particule étendue libre invariant local peut s'obtenir du lagrangien invariant global et nous présentons les propriétés principales des champs de jauge. Dans une seconde partie, nous appliquons les résultats précédents à la particule étendue, puis nous illustrons les résultats obtenus par l'exemple du champ bispinoriel et du groupe $U(1)$.

3.2 Invariance locale et champs de jauge pour le cas ponctuel

3.2.1 Lagrangien invariant local

Le groupe des transformations globales est caractérisé par le fait que les paramètres des transformations ne dépendent pas des coordonnées spatio-temporelles; dans ces conditions les fonctions du champ par rapport au groupe de symétrie global se transforment de la façon suivante

$$u'_i(x) = u_i(x) + \delta u_i(x) \quad (3.1)$$

et

$$\delta u_i(x) = T_{ij}^k \varepsilon_k u_j(x) \quad (3.2)$$

où T_{ij}^k sont les générateurs de ce groupe et ε_k le paramètre de la transformation. Supposons maintenant que les paramètres du groupe dépendent de la coordonnée spatio-temporelle, les fonctions du champ se transforment alors comme suit:

$$\delta u_i(x) = T_{ij}^k \varepsilon_k(x) u_j(x) \quad (3.3)$$

le groupe des transformations de ce type est dit local (ou de jauge). La condition d'invariance du lagrangien par rapport au groupe global de symétrie interne s'écrit⁽¹⁾

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial u_i} T_{ij}^k u_j(x) + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u_i)} T_{ij}^k \partial_\mu u_j(x) = 0 \quad (3.4)$$

On peut voir sans peine dans la suite de ce raisonnement que le lagrangien invariant global peut ne pas être invariant par rapport au groupe des transformations locales. En effet, si l'on tient compte du fait que $\delta(\partial_\mu u_j(x)) = T_{ij}^k \varepsilon_k \partial_\mu u_j(x) + T_{ij}^k u_j(x) \partial_\mu \varepsilon_k(x)$ la variation du lagrangien s'écrit:

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial u_i} \delta u_i(x) + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u_i)} \delta(\partial_\mu u_i(x)) = \\ &= \frac{\partial L}{\partial u_i} T_{ij}^k \varepsilon_k(x) u_j(x) + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u_i)} T_{ij}^k \varepsilon_k \partial_\mu u_j(x) + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u_i)} T_{ij}^k u_j(x) \partial_\mu \varepsilon_k(x) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Les relations (3.4) sont respectées en vertu de l'invariances globale et de ce fait (3.5) peut s'écrire:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu u_i)} T_{ij}^k u_j(x) \partial_\mu \varepsilon_k(x) \neq 0 \quad (3.6)$$

⁽¹⁾Dans cette section L désigne la densité du lagrangien global, et \mathcal{L} , la densité du lagrangien local.

c'est que $L(x)$ n'est plus invariant par transformations locales (3.3). Pour assurer l'invariance du lagrangien ($\delta L = 0$) par rapport à ces transformations, ajoutons au champ $u_j(x)$, un champ nouveau

$$A'_l(x); \quad l = 1, 2, 3, \dots, M \quad (3.7)$$

appelé champ compensateur ou champ de jauge, de manière à compenser le deuxième membre de (3.6). Cela conduit à un nouveau lagrangien $\mathcal{L}(x)$ invariant par les transformations de jauge locales. Nous allons supposer dans cette partie que le nouveau lagrangien $\mathcal{L}(x)$ ne contient que les champs de jauge $A'_l(x)$ eux-mêmes [20] et non leurs dérivées, $\mathcal{L}(u_i, \partial u_i, A'_l)$. Les transformations infinitésimales des champs se présentent alors sous la forme

$$\delta u_i(x) = T_{ij}^k \varepsilon_k(x) u_j(x), \quad (3.8)$$

$$\delta A'_l(x) = P_{li}^k A'_i \varepsilon_k(x) + R_{l\mu}^k \partial_\mu \varepsilon_k(x). \quad (3.9)$$

ici $P_{li}^k, R_{l\mu}^k$ sont des matrices constantes inconnues [20] qui seront calculées par la suite, et reprises dans le cas de la particule étendue. La condition de l'invariance locale du lagrangien $\mathcal{L}(u_i(x), \partial_\mu u_i(x), A'_l(x))$ s'écrit donc

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \delta u_i(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_i)} \delta (\partial_\mu u_i(x)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A'_l} \delta A'_l = 0 \quad (3.10)$$

où après y avoir porté (3.8) et (3.9),

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} T_{ij}^k u_j(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_i)} T_{ij}^k \partial_\mu u_j(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A'_l} P_{lm}^k A'_m \right) \varepsilon_k(x) + \\ & + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_i)} T_{ij}^k u_j(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A'_l} R_{l\mu}^k \right) \partial_\mu \varepsilon_k(x) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

étant donné que $\varepsilon_k(x)$ et $\partial_\mu \varepsilon_k(x)$ sont des fonctions arbitraires, le coefficient affecté à chacune d'elles dans l'expression précédente s'annule:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} T_{ij}^k u_j(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_i)} T_{ij}^k \partial_\mu u_j(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A'_l} P_{lm}^k A'_m \right) = 0 \quad (3.12)$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_i)} T_{ij}^k u_j(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A'_l} R_{l\mu}^k \right) = 0 \quad (3.13)$$

Le système (3.13) se compose de $4n$ équations; puisque $\mu = 0, 1, 2, 3$ et $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Pour définir sans ambiguïté la dépendance de \mathcal{L} par rapport à $A'_l(x)$, le nombre de composantes de $A'_l(x)$ (où $l = 1, 2, \dots, M$) doit être égale au nombre d'équations du système, c'est-à-dire

$M = 4n$. D'autre part, supposons que les matrices $R_{l\mu}^k$ sont non singulières et qu'il existe des matrices inverses⁽¹⁾ déterminées par les conditions [20]:

$$(R_{l\mu}^k)^{-1} R_{m\mu}^k = \delta_{lm}, \quad (R_{l\mu}^k)^{-1} R_{l\nu}^i = \delta_{ki} g_{\mu\nu}. \quad (3.14)$$

où $g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique de Minkowsky et $(R_{l\mu}^k)^{-1}$ est l'élément inverse de $R_{m\mu}^k$.

Introduisons une nouvelle notation du champ compensateur [20]

$$A_\mu^k = (R_{l\mu}^k)^{-1} A'_l, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A'_l} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^k} \frac{\partial A_\mu^k}{\partial A'_l} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^k} (R_{l\mu}^k)^{-1} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A'_l} R_{l\mu}^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu^k} (R_{l\nu}^k)^{-1} R_{l\mu}^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu^k} g_{\mu\nu} \quad (3.17)$$

le système (3.13) se mettra alors sous la forme

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u_i)} T_{ij}^k u_j(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^k} = 0 \quad (3.18)$$

Ce système qui compte $4n$ composantes de champs inconnus A_μ^k se décompose en quatre systèmes d'équations indépendantes, dont chacun est caractérisé par la valeur de $\mu = 0, 1, 2, 3$ et contient n composantes des champs inconnus, on obtient que les champs $A'_l(x)$ interviennent dans le lagrangien sous la forme de la combinaison

$$\nabla_\mu u_i \equiv \partial_\mu u_i - T_{ij}^k u_j(x) A_\mu^k \quad (3.19)$$

appelée habituellement dérivée covariante. Ainsi, le lagrangien invariant local doit être de la forme

$$\mathcal{L}(u_i(x), \partial_\mu u_i(x), A'_l(x)) = \mathcal{L}'(u_i(x), \nabla u_i(x)) = L(u_i(x), \nabla u_i(x)) \quad (3.20)$$

Donc les relations suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_i} &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u_i} \Big|_{\nabla u_i = \text{const}} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \nabla_\mu u_i} \Big|_{u_i = \text{const}} T_{ij}^k A_\mu^k, \\ \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu u_i)} &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \nabla_\mu u_i} \Big|_{u_i = \text{const}}; \\ \frac{\partial L}{\partial A'_l} &= - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \nabla_\mu u_i} \Big|_{u_i = \text{const}} T_{ij}^k u_j(x) (R_{\mu l}^k)^{-1} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Par conséquent, la prescription de l'invariance locale conduit à la substitution dans le lagrangien invariant global des dérivées ordinaires par des dérivées covariantes, dont le deuxième terme s'exprime à l'aide d'un champ A_μ^k qu'on nommera champ de jauge

⁽¹⁾Nous adoptons, concernant les indices, la même notation que notre référence de base [20].

3.2.2 Les champs de jauge

Examinons comment se transforment ces champs de jauge ainsi que la dérivée covariante. Compte tenu de (3.9), (3.14) et (3.15) on obtient [20]

$$\delta A_\mu^k(x) = (C_\mu^k)_{jm}^\nu A_\nu^m \varepsilon_j(x) + \partial_\mu \varepsilon_k(x) \quad (3.22)$$

où

$$(C_\mu^k)_{jm}^\nu = (R_{i\mu}^k)^{-1} (P_{il}^j) (R_{m\nu}^l) \quad (3.23)$$

est une matrice inconnue[20]. Pour trouver la forme explicite de la matrice $(C_\mu^k)_{jm}^\nu$, utilisons les identités (3.12),(3.21). En portant (3.21) dans (3.12) et en tenant compte de (3.19) et (3.22), on trouve

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u_i} T_{ij}^k u_j + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \nabla_\mu u_i} T_{ij}^k \nabla_\mu u_j + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \nabla_\mu u_i} \left\{ -T_{ij}^l T_{jn}^k A_\mu^l u_n + T_{ij}^k T_{jn}^l u_n A_\mu^l - (C_\mu^l)_{km}^\nu T_{ij}^l u_j A_\nu^m \right\} = 0 \quad (3.24)$$

Le lagrangien $\mathcal{L}'(u_i(x), \nabla_\mu u_i(x))$ vérifie les conditions d'invariance analogue à (3.4)

$$\frac{\partial \mathcal{L}'(u_i, \nabla_\mu u_i)}{\partial u_i} T_{ij}^k u_j + \frac{\partial \mathcal{L}'(u_i, \nabla_\mu u_i)}{\partial \nabla_\mu u_i} T_{ij}^k \nabla_\mu u_j = 0 \quad (3.25)$$

Il ne reste donc dans (3.24) que les termes suivants

$$\frac{\partial \mathcal{L}'(u_i, \nabla_\mu u_i)}{\partial \nabla_\mu u_i} \left\{ f_{kml} T_{ij}^l u_j A_\mu^m - (C_\mu^l)_{km}^\nu T_{ij}^l u_j A_\nu^m \right\} = 0, \quad (3.26)$$

et f_{kml} est la constante de structure de groupe (Annexe B), donc

$$f_{kml} T_{ij}^l u_j A_\mu^m - (C_\mu^l)_{km}^\nu T_{ij}^l u_j A_\nu^m = 0, \quad (3.27)$$

Où

$$(C_\mu^l)_{km}^\nu = f_{kml} g_{\mu\nu}. \quad (3.28)$$

En portant cette expression dans (3.22), on obtient l'expression cherchée de la transformation infinitésimale des champs de jauge:

$$\delta A_\mu^k = A_\mu'^k - A_\mu^k = f_{kml} A_\mu^m \varepsilon_l(x) + \partial_\mu \varepsilon_k(x). \quad (3.29)$$

Pour trouver la forme des transformations infinitésimales des dérivées covariantes, utilisons les formules (3.29) et (3.19), il en résultera

$$\delta(\nabla_\mu u_i) = T_{ij}^k \varepsilon_k(x) \nabla_\mu u_j \quad (3.30)$$

Le lagrangien $L(u_i(x), \nabla u_i(x))$ contient les lagrangiens des champs de matière libres u_i et le lagrangien d'interaction des champs de la matière avec les champs de jauge A_μ^k . Il reste donc à déterminer l'expression du lagrangien des champs de jauge, invariant par rapport au groupe local de symétrie interne.

Ce lagrangien dépendra des champs de jauge et de leurs dérivées $\mathcal{L}_0(A_\mu^k, \partial_\mu A_\mu^k)$ et devra être invariant par transformations (3.29) du champ de jauge.

La condition d'invariance de \mathcal{L}_0 s'écrit:

$$\delta\mathcal{L}_0 = \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A_\mu^k} \delta A_\mu^k + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A_\mu^k)} \delta(\partial_\nu A_\mu^k) = 0 \quad (3.31)$$

Si nous tenons compte de la transformation du champ de jauge, cette expression sera

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A_\mu^k} f_{lmk} A_\mu^m + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A_\mu^k)} f_{lmk} \partial_\nu A_\mu^m \right\} \varepsilon_l(x) + \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A_\nu^l} + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A_\mu^k)} f_{lmk} A_\mu^m \right\} \partial_\nu \varepsilon_l(x) + \\ & + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A_\mu^k)} \partial_\nu \partial_\mu \varepsilon_k(x) = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Les fonctions $\varepsilon_k(x)$ étant arbitraires, l'égalité précédente conduit aux identités suivantes

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A_\mu^k} f_{lmk} A_\mu^m + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A_\mu^k)} f_{lmk} (\partial_\nu A_\mu^m) \equiv 0, \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A_\nu^l} + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A_\mu^k)} f_{lmk} A_\mu^m \equiv 0, \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A_\nu^k)} + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A_\mu^k)} \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad \nu = 0, 1, 2, 3. \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (3.35)$$

Pour obtenir la dernière identité, nous avons tenu compte de la relation

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A_\mu^k)} \partial_\nu \partial_\mu \varepsilon_k(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A_\mu^k)} + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A_\nu^k)} \right) \partial_\mu \partial_\nu \varepsilon_k(x). \quad (3.36)$$

Les identités (3.33)-(3.35) déterminent la forme explicite du lagrangien \mathcal{L}_0 . La relation (3.35) implique que la dérivée du champ A_μ^k ne peut intervenir dans le lagrangien que sous la forme de la combinaison

$$A_{\mu\nu}^k = \partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k; \quad (3.37)$$

de plus,

$$A_{\mu\nu}^k = -A_{\nu\mu}^k \quad (3.38)$$

En tenant compte du fait que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A_\mu^k)} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A_{\mu\nu}^k}, \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A_\nu^k)} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A_{\mu\nu}^k} \quad (3.40)$$

et en passant à aux nouvelles variables $A_{\mu\nu}^k$, nous obtenons alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A_\mu^k} f_{lmk} A_\mu^m - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A_{\mu\nu}^k} f_{lmk} \partial_\nu A_\mu^m = 0, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A_\mu^k} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A_{\nu\mu}^k} f_{lmk} A_\nu^l = 0 \quad (3.42)$$

En résolvant cette dernière égalité, on obtient que le lagrangien des champs de jauge dépend d'une combinaison déterminée des champs A_μ^k :

$$F_{\mu\nu}^k = A_{\mu\nu}^k - \frac{1}{2} f_{lmk} (A_\mu^l A_\nu^m - A_\nu^l A_\mu^m); k = 1, \dots, n; \quad \mu \neq \nu \quad (3.43)$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}_0(A_\mu^k, \partial_\mu A_\mu^k) = \mathcal{L}'_0(F_{\mu\nu}^k) \quad (3.44)$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A_\nu^k)} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}'_0}{\partial F_{\mu\nu}^k}, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A_\mu^k} = \frac{\partial \mathcal{L}'_0}{\partial A_\mu^k} - \frac{\partial \mathcal{L}'_0}{\partial F_{\mu\nu}^l} f_{klm} A_\nu^m. \quad (3.46)$$

Avec la condition imposée au lagrangien des champs de jauges

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_0}{\partial F_{\mu\nu}^l} f_{lmk} \cdot F_{\mu\nu}^l = 0; \quad m = 1, \dots, n \quad (3.47)$$

Le choix du lagrangien qui satisfait à ces prescriptions est ambigu. Le lagrangien le plus simple, quadratique en $F_{\mu\nu}^k$ a été proposé par Yang et Mills [20]:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^k F_{\mu\nu}^k, \quad (3.48)$$

où

$$F_{\mu\nu}^k = \partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k - \frac{1}{2} f_{lmk} (A_\mu^l A_\nu^m - A_\nu^l A_\mu^m). \quad (3.49)$$

Satisfait aux transformations infinitésimales selon la loi

$$\delta F_{\mu\nu}^k = f_{lmk}\varepsilon_l(x)F_{\mu\nu}^m \quad (3.50)$$

Le lagrangien total \mathcal{L} du système de champs de matière $u_i(x)$ et des champs de jauge sera la somme du lagrangien des champs de jauge \mathcal{L}'_0 et du lagrangien local des champs de matière \mathcal{L}' , contenant le lagrangien des champs de matière et le lagrangien d'interaction des champs de matière avec les champs de jauge:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}'_0 + \mathcal{L}' \quad (3.51)$$

3.2.3 Le courant conservatif

D'après le théorème de Noether, à l'invariance du lagrangien par rapport au groupe des transformations continues correspond une grandeur conservative. L'invariance du lagrangien par transformations locales conduit aux courants conservatifs. Pour obtenir l'expression de ces courants, inspirons-nous du lagrangien total. La condition de son invariance par rapport au groupe de transformation locale s'écrit:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu^k}\delta A_\mu^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu A_\mu^k}\delta(\partial_\nu A_\mu^k) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i}\delta u_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu u_i}\delta(\partial_\mu u_i) = 0 \quad (3.52)$$

Si l'on prend en considération les équations des champs $u_i(x)$ et A_μ^k sous la forme d'équations d'Euler-Lagrange, (3.52) se réécrit comme suit

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^k)}\delta A_\nu^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u_i)}\delta u_i \right) = 0 \quad (3.53)$$

En passant aux nouvelles variables $u_i, \nabla_\mu u_j, A_\mu^k, F_{\mu\nu}^k$, on obtient au lieu de (3.53) l'expression suivante

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = & \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_\mu u_i} T_{ij}^k u_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}^m} f_{klm} A_\nu^l \right) \varepsilon^k(x) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}^k} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\nu\mu}^k} \right\} \partial_\mu \partial_\nu \varepsilon^k(x) \\ & + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_\mu u_i} T_{ij}^k u_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}^m} f_{klm} A_\nu^l + \partial_\nu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\nu\mu}^k} \right) \right] \partial_\mu \varepsilon^k(x) = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Les fonctions $\varepsilon^k(x)$ étant arbitraires, et l'égalité précédente n'est vérifiée que si

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_\mu u_i} T_{ij}^k u_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}^m} f_{klm} A_\nu^l \right) = 0; \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_\mu u_i} T_{ij}^k u_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}^m} f_{klm} A_\nu^l + \frac{1}{2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu^k} = 0 \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}^k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\nu\mu}^k} = 0, \quad (3.57)$$

or nous pouvons montrer que

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\nu\mu}^m} = \frac{1}{2} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu A_\mu^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^k}. \quad (3.58)$$

Ainsi(3.56) s'écrit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^k(x)} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu u_i} T_{ij}^k u_j - 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}^m} f_{klm} A_\nu^l \quad (3.59)$$

En tenant compte de (3.59) nous voyons que la quantité somme est à divergence nulle, appelons courant, cette quantité

$$J_\mu^k(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^k(x)} \quad (3.60)$$

Qui aura l'expression suivante

$$J_\mu^k = -2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\mu u_i} T_{ij}^k u_j - 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}^m} f_{klm} A_\nu^l \quad (3.61)$$

ainsi que sa loi de conservation

$$\partial_\mu J_\mu^k = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.62)$$

3.3 Invariance de jauge locale du lagrangien décrivant la particule étendue

Considérons le lagrangien $L(u_i(x, \xi); \partial_k u_i(x, \xi); \partial_\alpha u_i(x, \xi))$ décrivant un système de champs libres liés à la particule étendue précédemment étudiée (chapitre 2). Nous voulons calculer les courants qui apparaissent lorsque le lagrangien précédent est rendu invariant sous des transformations de jauge locales externes associées à un groupe de symétrie donné.

Considérons la transformation du groupe de symétrie de jauge globale sous laquelle la fonction du champ se transforme comme

$$\delta u_i(x, \xi) = (T_{ij})^l \varepsilon_l u_j(x, \xi) \quad (3.63)$$

où $i, j=1, 2, 3, \dots, N$ est le nombre de composantes du champ et $l = 1, 2, \dots, n$ le nombre de paramètres de la transformation et T_{ij} est le générateur de groupe de symétrie⁽¹⁾

⁽¹⁾Nous avons pour des raisons de commodité de calcul; changer de notation par rapport aux paragraphes précédents.

Cette transformation est supposée n'affecter ni les coordonnées spatio-temporelles externes, ni les coordonnées spatio-temporelles internes de la particule étendue, le paramètre de la transformation est une constante ε . La variation de forme du fonction de champ est identique à la variation totale de cette fonction $\bar{\delta}u_i = \delta u_i$

La condition d'invariance du lagrangien $L(u_i(x, \xi); \partial_k u_i(x, \xi); \partial_\alpha u_i(x, \xi))$ sous les transformations globales s'écrit

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial L}{\partial (\partial_k u_i)} \delta (\partial_k u_i) + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha u_i)} \delta (\partial_\alpha u_i) = 0 \quad (3.64)$$

Notons que dans ce paragraphe k est un indice spatio-temporelle externe et α est un indice spatio-temporelle interne.

Pour une transformation globale, les variations totales des différentes dérivées s'expriment comme

$$\delta (\partial_k u_i(x, \xi)) = (T_{ij})^l \varepsilon_l \partial_k u_j(x, \xi) \quad (3.65)$$

$$\delta (\partial_\alpha u_i(x, \xi)) = (T_{ij})^l \varepsilon_l \partial_\alpha u_j(x, \xi) \quad (3.66)$$

en injectant ce résultat dans (3.64), il vient, que la condition d'invariance globale du lagrangien s'écrit

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} (T_{ij})^l \varepsilon_l u_j(x, \xi) + \frac{\partial L}{\partial (\partial_k u^i)} (T_{ij})^l \varepsilon_l \partial_k u_j(x, \xi) + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha u^i)} (T_{ij})^l \varepsilon_l \partial_\alpha u_j(x, \xi) = 0 \quad (3.67)$$

Pour une transformation de jauge locale; le paramètre de transformation ε_l devient dépendant des coordonnées x^k du champs externes et dans ce cas (3.65) et (3.66) se réécrivent.

$$\delta (\partial_k u_i(x, \xi)) = (T_{ij})^l \partial_k \varepsilon_l(x) u_j(x, \xi) + (T_{ij})^l \varepsilon_l(x) \partial_k u_j(x, \xi) \quad (3.68)$$

$$\delta (\partial_\alpha u_i(x, \xi)) = (T_{ij})^l \partial_\alpha \varepsilon_l(x) u_j(x, \xi) + (T_{ij})^l \varepsilon_l(x) \partial_\alpha u_j(x, \xi) = (T_{ij})^l \varepsilon_l(x) \partial_\alpha u_j(x, \xi) \quad (3.69)$$

La condition d'invariance de jauge locale du lagrangien s'écrit

$$\begin{aligned} \delta L = 0 &= \frac{\partial L}{\partial u_i} ((T_{ij})^l \varepsilon_l(x) u_j(x, \xi)) + \frac{\partial L}{\partial (\partial_k u_i)} (T_{ij})^l \varepsilon_l(x) \partial_k u_j(x, \xi) + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha u_i)} (T_{ij})^l \varepsilon_l(x) \partial_\alpha u_j(x, \xi) \\ &+ \frac{\partial L}{\partial (\partial_k u_i)} (T_{ij})^l \partial_k \varepsilon_l(x) u_j(x, \xi) \end{aligned} \quad (3.70)$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_k u_i)} (T_{ij})^l \partial_k \varepsilon_l(x) u_j = 0 \quad (3.71)$$

Ce dernier terme étant différent de zéro, $L(u_i(x, \xi); \partial_k u_i(x, \xi); \partial_\alpha u_i(x, \xi))$ n'est pas donc invariant par rapport aux transformations locales. Ajoutons au champ $u_i(x, \xi)$, un nouveau champ de jauge $A'_m(x)$ tel qu'il compense le terme (3.71) et conduit à un lagrangien invariant par les transformations locales. Précisons que le choix de faire dépendre ce champ de jauge de la variable externe x seulement, est dicté par le fait que les photons (liés aux champ électromagnétique) par exemple sont considérés comme ponctuels. Ecrivons donc

$$\delta u_i(x, \xi) = (T_{ij})^l \varepsilon_l(x) u_j(x, \xi) \quad (3.72)$$

Posons

$$\delta A'_m(x) = P_{mn}^l A'_n \varepsilon_l(x) + R_{mk}^l \partial_k \varepsilon_l(x) \quad (3.73)$$

où P_{mn}^l et R_{mk}^l sont, comme dans le paragraphe précédent (§: 3.1.1), deux matrices régulières à déterminer. La condition d'invariance locale du lagrangien $\mathcal{L}(u_i(x, \xi), \partial_k u_i(x, \xi), \partial_\alpha u_i(x, \xi), A'_m)$ devient alors:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k u_i} \delta \partial_k u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\alpha u_i} \delta \partial_\alpha u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A'_m} \delta A'_m = 0 \quad (3.74)$$

en remplaçant chacune des variations, nous obtenons:

$$\delta L = \left(\begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} ((T_{ij})^l \varepsilon_l(x) u_j(x, \xi)) \\ + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k u_i)} (T_{ij})^l \varepsilon_l(x) \partial_k u_j(x, \xi) \\ + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha u_i)} (T_{ij})^l \varepsilon_l(x) \partial_\alpha u_j(x, \xi) \\ + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k u_i)} (T_{ij})^l \partial_k \varepsilon_l(x) u_j(x, \xi) \end{array} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A'_m} (P_{mn}^l A'_n \varepsilon_l(x) + R_{mk}^l \partial_k \varepsilon_l(x)) = 0 \quad (3.75)$$

En considérant que les fonctions $\varepsilon_l(x)$ et $\partial_k \varepsilon_l(x)$ sont arbitraires, nous obtenons:

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} ((T_{ij})^l u_j(x, \xi)) \\ + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k u_i)} (T_{ij})^l \partial_k u_j(x, \xi) \\ + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha u_i)} (T_{ij})^l \partial_\alpha u_j(x, \xi) \\ + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A'_m} (P_{mn}^l A'_n) \end{array} \right) \varepsilon_l(x) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k u_i)} (T_{ij})^l u_j(x, \xi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A'_m} R_{mk}^l \right) \partial_k \varepsilon_l(x) = 0 \quad (3.76)$$

Adoptons les notations suivantes :

$$A_k^l = (R_{mk}^l)^{-1} A'_m; \quad k = 0, 1, 2, 3 \text{ et } l = 1, 2, \dots, n \quad (3.77)$$

l un indice relatif au paramètre de groupe, $k; k'$ des indices d'espace-temps externe

$$\begin{aligned} [R_{mk}^l]^{-1} [R_{nk}^l] &= \delta_{mn} \\ [R_{mk}^l]^{-1} [R_{nk'}^s] &= \delta_{ls} g_{kk'} \end{aligned}$$

Avec cette nouvelle notation⁽¹⁾, la condition d'invariance du lagrangien $\mathcal{L}(u_i, \partial_k u_i, \partial_\alpha u_i, A_m')$ (3.76) se réduit à:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k u_i)} (T_{ij})^l u_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k^l} = 0 \quad (3.78)$$

En résolvant le système précédent, on obtient la dérivée covariante,

$$D_k u_i \equiv \partial_k u_i - (T_{ij})^l u_j A_k^l$$

Cela permet de dire que le lagrangien invariant local doit être de la forme.

$$\mathcal{L}(u_i(x, \xi), \partial_k u_i(x, \xi), \partial_\alpha u_i(x, \xi), A_m'(x)) = \mathcal{L}'(u_i(x, \xi), D_k u_i(x, \xi), \partial_\alpha u_i(x, \xi)) \equiv$$

$$L(u_i, D_k u_i, \partial_\alpha u_i) \quad (3.79)$$

L'égalité précédente se justifie en observant les règles suivantes (établies au §3.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u_i} \Big|_{D^i u_i = \text{const}} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(D_k u_j)} \Big|_{u_i = \text{const}} (T_{ij})^l A_k^l \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k u_i)} &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(D_k u_i)} \Big|_{u_i = \text{const}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_m^l} &= - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(D_k u_i)} \Big|_{u_i = \text{const}} (T_{ij})^l [R_{km}^l]^{-1} u_j \end{aligned} \quad (3.80)$$

Ainsi l'invariance locale, conduit à substituer dans le lagrangien de jauge globale $L(x, \xi)$ les dérivées ordinaires externes par des dérivées covariantes.

Etudions, maintenant, les propriétés de transformation de ce champ de jauge; comme pour le cas ponctuel, nous avons

$$\delta A_m' = P_{mn}^l A_n' \varepsilon_l(x) + R_{mk}^l \partial_k \varepsilon_l(x) \quad (3.81)$$

on obtient

$$\delta A_k^l = (C_k^l)_{mn}^{k'} A_{k'}^m \varepsilon_n(x) + \partial_k \varepsilon_l \quad (3.82)$$

⁽¹⁾ On a adopté la notation [20] suivante, pour la covariance relativiste, déjà mentionnée au premier chapitre
 $s^2 = a_\mu b_\mu \equiv a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$
 $\equiv a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$

En remplaçant cette dernière expression dans la condition d'invariance de lagrangien, il vient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u_i} \left((T_{ij})^l u_j \right) + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (D_k u_i)} (T_{ij})^l D_k u_j + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\alpha u_i)} \partial_\alpha u_j (T_{ij})^l + \\ & \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (D_k u_i)} \left\{ - (T_{jt})^m (T_{ij})^l A_k^m u_t + (T_{ij})^l (T_{jt})^m u_t A_k^m - (C_k^m)_{lp}^{k'} (T_{ij})^m u_j A_{k'}^p \right\} = \end{aligned} \quad (3.83)$$

Comme le lagrangien $\mathcal{L}'(u_i, D_k u_i, \partial_\alpha u_i)$ doit satisfaire à :

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u_i} (T_{ij})^l u_j + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (D_k u_i)} (T_{ij})^l D_k u_j = 0, \quad (3.84)$$

il reste donc,

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (D_k u_i)} \left\{ - (C_k^m)_{lp}^{k'} (T_{ij})^m u_j A_{k'}^p + \left[(T_{ij})^l, (T_{jt})^m \right] A_k^m u_t \right\} = 0 \quad (3.85)$$

Or,

$$\left[(T_{ij})^l, (T_{jt})^m \right] = f_{lmn} (T_{it})^n \quad (3.86)$$

donc

$$(C_k^m)_{lp}^{k'} (T_{ij})^m u_j A_{k'}^p = f_{lmn} (T_{it})^n A_k^m u_t \quad (3.87)$$

$$(C_k^l)_{mn}^{k'} (T_{ij})^l u_j A_{k'}^n = f_{nml} (T_{ij})^l A_{k'}^n u_j \delta_k^{k'} \quad (3.88)$$

d'où

$$(C_k^l)_{mn}^{k'} = f_{nml} \delta_k^{k'} \quad (3.89)$$

Ainsi l'expression de la transformation infinitésimale des champs de jauge est

$$\delta A_k^l = f_{nml} A_k^m \varepsilon_n(x) + \partial_k \varepsilon_l \quad (3.90)$$

et celle de la dérivée covariante

$$\delta (D_k u_i) = (T_{ij})^l \varepsilon_l(x) D_k u_j \quad (3.91)$$

Le lagrangien du champ de jauge sera alors identique à celui du cas ponctuel.

$$\mathcal{L}_0(A_k^l, \partial_{k'} A_k^l) = \mathcal{L}'_0(F_{kk'}^l); \quad k, k' = 0, 1, 2, 3 \quad (3.92)$$

et le choisir comme celui de Yang-Mills [20]

$$\mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}'_0 = -\frac{1}{4} F_{kk'}^l \cdot F_l^{kk'} \quad (3.93)$$

où

$$F_{kk'}^l = \partial_k A_{k'}^l - \partial_{k'} A_k^l - \frac{1}{2} f_{lmn} (A_k^m A_{k'}^n - A_{k'}^m A_k^n) \quad (3.94)$$

Le lagrangien total de système sera de la forme

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}'_0 + \mathcal{L}' \quad (3.95)$$

3.3.1 Le courant étendu

En appliquant le théorème de Noether au lagrangien total décrivant le système, la condition de son invariance par rapport aux transformations locales s'écrit:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_k^l} \delta A_k^l + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{k'} A_k^l)} \delta(\partial_{k'} A_k^l) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k u_i)} \delta(\partial_k u_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha u_i)} \delta(\partial_\alpha u_i) = 0 \quad (3.96)$$

En tenant compte des équations du champs u^i et A_k^l (voir respectivement chapitre 2 et [20]), il vient

$$\delta\mathcal{L} = \partial_k \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{k'} A_k^l)} \delta(A_k^l) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k u_i)} \delta(u_i) \right) + \partial_\alpha \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha u_i)} \delta(u_i) \right) = 0 \quad (3.97)$$

En remplaçant les variations des champs par leurs expressions et en supposant l'indépendance de ε et $\partial_k \varepsilon$ il vient

$$\partial_k \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D_k u_i)} (T_{ij})^l u_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{kk'}^m} f_{lrm} A_{k'}^r \right) + \partial_\alpha \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha u_i)} (T_{ij})^l u_j \right) = 0 \quad (3.98)$$

et

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D_k u_i)} (T_{ij})^l u_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{kk'}^m} f_{lrm} A_{k'}^r + \frac{1}{2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_k^l} = 0 \quad (3.99)$$

Par analogie au cas ponctuel la quantité suivante sera nommée courant externe

$$J_k^l(x, \xi) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_k^l} = -2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D_k u_i)} (T_{ij})^l u_j - 2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{kk'}^m} f_{lrm} A_{k'}^r \quad (3.100)$$

et nous appelons courant interne la quantité

$$J_\alpha^l(x, \xi) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha u_i)} (T_{ij})^l u_j \quad (3.101)$$

Ces deux quantités satisfont l'équation (3.98) qui a la forme d'une *équation de continuité*

$$\partial_k (J_k^l) + \partial_\alpha (J_\alpha^l) = 0 \quad (3.102)$$

C'est une équation de continuité pour chaque courant à part avec un terme de source provenant du second.

Notons que le courant interne $J_\alpha^l(x, \xi)$ est semblable au courant Θ_n^α obtenu au deuxième chapitre (§ 2). Quand au courant externe $J_k^l(x, \xi)$ il ne peut s'identifier au courant Θ_n^k que si le lagrangien \mathcal{L} est local.

3.4 Application au cas du champ bispinoriel et au groupe $U(1)$

Illustrons, ces résultats généraux sur l'exemple de l'interaction du champ de matière bispinoriel du chapitre deux et du champ électromagnétique. Considérons donc le lagrangien du champ $u^{AA'}(x, \xi)$ bispinoriel de masse m défini précédemment (chapitre 2)

$$\begin{aligned} L(u, \bar{u}, \partial_k u, \partial_k \bar{u}, \partial_\alpha u, \partial_\alpha \bar{u}) &= \frac{i}{2} [\bar{u} \gamma^k \partial_k u - \partial_k \bar{u} \gamma^k u] + \frac{i}{2} [\bar{u} \Gamma^\alpha \partial_\alpha u - \partial_\alpha \bar{u} \Gamma^\alpha u] \\ &\quad - \frac{1}{2} [\partial_k \bar{u} \gamma^k \Gamma^\alpha \partial_\alpha u + \partial_\alpha \bar{u} \gamma^k \Gamma^\alpha \partial_k u] - m \bar{u} u \end{aligned} \quad (3.103)$$

Ce lagrangien est invariant sous la transformation de phase globale

$$\delta u^{AA'} = i\alpha u^{AA'}, \quad \delta \bar{u}^{AA'} = -i\alpha \bar{u}^{AA'}; \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (3.104)$$

Notant que pour garder la même notation que celle du (§2.5); nous avons dû adopter pour les indices du chapitre une notation différentes de celle du paragraphe précédent ($i \rightarrow AA'$). Le groupe $U(1)$ lié à ces transformations à un paramètre est commutatif, les constantes de structure f_{ABC} sont donc nulles

$$f_{ABC} = 0 \quad (3.105)$$

et les générateurs sont respectivement donnés pour le champ $u^{AA'}$ et son conjugué $\bar{u}^{AA'}$ par

$$T_{AB} = i\delta_{AB}; \quad A, B = 1, 2, 3, 4 \quad (3.106)$$

et

$$T_{AB} = -i\delta_{AB}; \quad A, B = 1, 2, 3, 4 \quad (3.107)$$

Notons que dans cette partie, nous ne considérons que les transformations qui affectent la partie externe du champ bispinoriel, les indices A, B (non primés) sont relatifs à cette partie.

Si nous remplaçons la constante α par une fonction scalaire $\epsilon(x)$, alors conformément aux résultats du paragraphe précédent, un champ vectoriel $A_k(x)$ est introduit. Ce dernier se transforme comme

$$\delta A_k = \partial_k \epsilon(x); \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (3.108)$$

Le nouveau lagrangien local sera de la forme

$$\mathcal{L}' = L(u, \bar{u}, D_k u, D_k \bar{u}, \partial_\alpha u, \partial_\alpha \bar{u}) \quad (3.109)$$

où les dérivées covariantes sont données par

$$D_k u^{AA'} = \partial_k u^{AA'} - i A_k u^{AA'} \quad (3.110)$$

et

$$D_k \bar{u}^{AA'} = \partial_k \bar{u}^{AA'} + i A_k \bar{u}^{AA'} \quad (3.111)$$

Le lagrangien du champ libre A_k est:

$$\mathcal{L}'_0 = -\frac{1}{4} F_{kk'} \cdot F^{kk'}; \quad k, k' = 0, 1, 2, 3 \quad (3.112)$$

où $F_{kk'}$ est le tenseur de Faraday

$$F_{kk'} = \frac{\partial A_k}{\partial x^{k'}} - \frac{\partial A_{k'}}{\partial x^k} \quad (3.113)$$

Dans ce cas, les courants locaux externe et interne s'écrivent alors:

$$J^k = -i \left(\frac{\partial L}{\partial (D_k u^{AA'})} u^{AA'} - \frac{\partial L}{\partial (D_k \bar{u}^{AA'})} \bar{u}^{AA'} \right) \quad (3.114)$$

$$J^\alpha = -i \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha u^{AA'})} u^{AA'} - \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha \bar{u}^{AA'})} \bar{u}^{AA'} \right) \quad (3.115)$$

En utilisant le lagrangien (3.103) avec des dérivées covariantes, ces courants ont alors pour expressions

$$J^k = \bar{u} \gamma^k u + \frac{i}{2} (\partial_\alpha \bar{u} \gamma^k \Gamma^\alpha u - \bar{u} \gamma^k \Gamma^\alpha \partial_\alpha u) \quad (3.116)$$

$$J^\alpha = \bar{u} \Gamma^\alpha u + \frac{i}{2} (D_k \bar{u} \gamma^k \Gamma^\alpha u - \bar{u} \gamma^k \Gamma^\alpha D_k u) \quad (3.117)$$

Nous remarquons que lorsque nous réduisons notre bispineur à la partie externe seulement, nous retrouvons le courant conventionnel [21] qui entre dans le terme d'interaction entre le champ électromagnétique et le champ spinoriel

3.5 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que nous pouvions construire une théorie de jauge locale pour des lagrangiens décrivant des particules étendues. Comme pour le cas ponctuel, le lagrangien invariant local s'obtient en remplaçant les dérivées par rapport aux coordonnées

de l'espace-temps externes par des dérivées covariantes dans lesquelles interviennent des champs de jauge. Nous avons mis également en évidence l'expression de courants qui satisfaisaient une équation de type conservation.

Lorsque nous appliquons les résultats obtenus dans le cas concret d'un champ bispinoriel et de l'invariance sous les transformations du groupe $U(1)$, nous obtenons des expressions pour les courants externe et interne qui se ramènent à celle du cas ponctuel si nous négligeons les degrés de liberté interne.

Dans ce travail nous n'avons tenu compte que des transformations pour lesquelles le paramètre dépendait des coordonnées externes, dans une prochaine étape, il serait intéressant de reprendre les calculs pour des paramètres de transformations qui dépendent des coordonnées externes et internes.

Conclusion

Dans le présent travail nous avons abordé dans un aspect général le modèle de la particule étendue, précédemment élaboré au sein de notre laboratoire [8]. Ce modèle est fondé - principalement- sur les idées de la théorie fonctionnelle [5]. Dans ce contexte, nous avons contribué à la construction, moyennant le formalisme lagrangien, d'une théorie des champs associée à ce modèle de particule étendue; où l'on a considéré dans un premier temps un champ bilocal décrit par ses composantes $u_i(x, \xi)$ où $x = (x^k)$ est un quadri-vecteur de l'espace-temps de Minkowski externe et $\xi = (\xi^\alpha)$ un quadri-vecteur de l'espace-temps de Minkowski interne. La densité Lagrangienne est choisie, comme pour les théories locales, dépendant du champ et de ses diverses dérivées premières (interne et externe).

Avant de présenter les différents résultats obtenus dans le cadre de cette thèse, rappelons que nous avons consacré le premier chapitre à l'étude de la théorie classique des champs pour le modèle de la particule élémentaire, nous avons déduit les équations du mouvement d'Euler-Lagrange et les courants conservés associés aux différentes symétries pour quelques types de champs classiques.

Dans le deuxième chapitre, après avoir rappelé quelques théories dont s'inspire le modèle de la particule étendue, nous avons utilisé le formalisme lagrangien et le principe variationnel [2], pour obtenir les équations du champs à partir d'un lagrangien décrivant la particule étendue. Les équations ainsi obtenues sont celles d'Euler-Lagrange habituelles avec un terme en plus correspondant au mouvement interne. L'utilisation du théorème de Noether nous a permis d'obtenir les courants associés à cette théorie, ces courants possédant des composantes internes et externes (dont l'expression est semblable à celle du courant des champs ponctuels [2]) plus des composantes additionnelles que nous avons appelé mixtes qui contiennent des termes internes et externes. Notons que l'on a considéré pour simplifier les calculs, que les espaces externe et interne sont du type de Minkowski (plats) et que toutes les connexions pouvant décrire les diverses interactions sont nulles. Le groupe de symétrie est alors réalisé comme le produit direct du groupe de symétrie interne de Poincaré

et du groupe de symétrie externe de Poincaré, en fin de chapitre nous avons appliqué ce formalisme au cas particulier d'un champ bispinoriel.

Dans le troisième chapitre on a repris le formalisme lagrangien du chapitre précédent en tenant compte de l'interaction avec un champ de jauge.

Pour cela, partant du lagrangien décrivant un système de champ libre lié à la particule étendue précédemment étudiée, nous avons montré que nous pouvions construire une théorie de jauge locale. Comme pour le cas ponctuel, le lagrangien invariant local s'obtient en remplaçant les dérivées par rapport aux coordonnées de l'espace-temps externe par des dérivées covariantes dans lesquelles interviennent des champs de jauge. Nous avons mis également en évidence l'expression de courants qui satisfont une équation de continuité par rapport aux variables externe et interne.

Lorsque nous appliquons les résultats obtenus dans le cas concret d'un champ bispinoriel et d'une invariance sous les transformations, du groupe $U(1)$, nous obtenons des expressions pour les courants interne et externe qui se ramènent à celle du cas ponctuel si nous négligeons les degrés de liberté interne.

Dans notre travail, nous avons tenu compte du cas simple où le paramètre des transformations ne dépend que des coordonnées externes, dans une prochaine étape, il serait intéressant de reprendre les calculs pour des paramètres de transformation qui dépendent des coordonnées externe et interne et de considérer d'autres groupes de jauge par exemple les groupes ($SU(2)$ et $SU(3)$), nous pouvons également étudier l'invariance sous $SU(2) \otimes U(1)$ liée à l'interaction électrofaible et sous $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$.

Annexe

ANNEXE A

Tenseur métrique et forme quadratique fondamentale

Considérons un repère orthonormé $(x^{(0)i})$ [11] et un repère curviligne (x^i) . Soient alors $A^{(0)i}, B^{(0)i}$ les composantes contravariantes dans $(x^{(0)i})$ de deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} , et A^i, B^i leurs composantes contravariantes dans (x^i) , Elles sont liées entre elles par les relations :

$$A^{(0)k} = \frac{\partial x^{(0)k}}{\partial x^i} A^i \quad (3.118)$$

et

$$B^{(0)l} = \frac{\partial x^{(0)l}}{\partial x^j} B^j \quad (3.119)$$

Formons le produit scalaire des vecteurs \vec{A} et \vec{B} en tenant compte des relations:

$$\vec{e}_k^{(0)} \cdot \vec{e}_l^{(0)} = \delta_{kl} \quad (3.120)$$

exprimant que le repère $(x^{(0)i})$ est orthonormé, et utilisons les égalités (3.118) et (3.119) $\vec{A} \cdot \vec{B} = A^{(0)k} B^{(0)l} \vec{e}_k^{(0)} \cdot \vec{e}_l^{(0)} = A^{(0)k} B^{(0)l} \delta_{kl} = \delta_{kl} \frac{\partial x^{(0)k}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{(0)l}}{\partial x^j} A^i \cdot B^j = g_{ij} A^i \cdot B^j$. où l'on a posé;

$$g_{ij} = \delta_{kl} \frac{\partial x^{(0)k}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{(0)l}}{\partial x^j} \quad (3.121)$$

Finalement :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = g_{ij} A^i \cdot B^j. \quad (3.122)$$

avec

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad (3.123)$$

l'égalité (3.123) provient de l'application de (3.122) au cas où $\vec{A} = \vec{e}_i$ et $\vec{B} = \vec{e}_j$.

Les g_{ij} forment les composantes d'un tenseur d'ordre 2, il est appelé *tenseur métrique*.

On peut former à partir du tenseur métrique la forme quadratique fondamentale ds^2 . Soit

O l'origine d'un repère orthonormé $(x^{(0)i})$. Considérons un point infiniment voisin de O de coordonnées $(dx^{(0)i})$. La distance ds de ce point à l'origine est telle que :

$$ds^2 = (x^{(0)1})^2 + (x^{(0)2})^2 + \dots + (x^{(0)n})^2 = \delta_{kl} dx^{(0)k} dx^{(0)l} \quad (3.124)$$

En tenant compte des relations $dx^{(0)k} = \frac{\partial x^{(0)k}}{\partial x^i} dx^i$ et $dx^{(0)l} = \frac{\partial x^{(0)l}}{\partial x^j} dx^j$ il vient :

$$ds^2 = \delta_{kl} dx^{(0)k} dx^{(0)l} = \delta_{kl} \frac{\partial x^{(0)k}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{(0)l}}{\partial x^j} dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j \quad (3.125)$$

Ainsi la forme quadratique fondamentale ds^2 s'exprime à partir du tenseur métrique g_{ij} par la relation:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (3.126)$$

Espace de RIEMANN

Dans un espace vectoriel euclidien, on peut toujours rapporter l'ensemble de l'espace à un système d'axes rectilignes orthonormés. Dans un tel système d'axes, le tenseur métrique est δ_{ij} ($ds^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j$). On peut, bien sûr, également y définir un système d'axes curvilignes. Le tenseur métrique n'est plus alors δ_{ij} mais g_{ij} . Toutefois, on peut toujours rapporter l'espace euclidien à un système d'axes rectilignes on a alors les relations précédentes;

$$g_{ij} = \delta_{kl} \frac{\partial x^{(0)k}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{(0)l}}{\partial x^j} \quad (3.127)$$

En fait il est possible de définir un espace plus général, muni d'une métrique définie par un tenseur symétrique g_{ij} , où les composantes g_{ij} sont des fonctions des coordonnées x_i non astreintes à vérifier (3.127). Un tel espace est un espace de Riemann. L'intervalle élémentaire ds entre deux points infiniment voisins est (par définition) tel que :

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (3.128)$$

Pour munir un espace de Riemann de propriétés géométriques, le plus simple, est de l'identifier localement avec un espace euclidien⁽¹⁾. On introduit alors les notions de représentations du premier ordre et de métrique euclidienne tangente (qui présentent un caractère intrinsèque), ce qui permet d'étendre aux espaces riemanniens un certain nombre de notions géométriques d'origine euclidiennes.

⁽¹⁾Plus précisément, à un point M de coordonnées x^i de l'espace riemannien, on fait correspondre un point m_0 et un repère (m_0, \vec{e}_i) de l'espace euclidien tangent astreints aux seules conditions $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = (g_{ij})_0$ où $(g_{ij})_0$ désigne la valeur en m_0 du coefficient g_{ij} .

ANNEXE B

Notions de base de la théorie des groupes

Généralités

Considérons un ensemble $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ muni d'une loi de multiplication *interne* notée (\cdot) . Si cette loi est *associative* et si elle admet un élément *neutre* e et un *inverse* de chaque élément de G , on dit que G forme un *groupe* noté (G, \cdot) . Si de plus, cette loi est *commutative*, on dit que le groupe est *abélien* ou *commutatif*.

Un groupe est *discret* si ses éléments sont dénombrables, *l'ordre* d'un groupe discret est le nombre de ses éléments, si l'ordre est *fini* on parle d'un *groupe fini*, sinon il est *infini*.

Un groupe est *continu* si ses éléments sont des fonctions d'un ensemble de variables continues

$$G = \{g_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n), g_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots\} \quad (3.129)$$

Les variables α_i sont appelées *paramètres* du groupe. Un groupe continu est forcément infini [22]. Un sous-ensemble H de G remplissant les critères d'un groupe sous la même loi de multiplication est dit *sous-groupe* de G . Le sous-groupe *conjugué* de H est $H' = gHg^{-1}$ où g est un élément de G . Un sous-groupe H est dit *invariant* s'il est identique à tous ses conjugués

$$\forall g \in G : gHg^{-1} = H \quad (3.130)$$

Le groupe G est dit *simple* s'il ne contient pas un sous-groupe invariant. Si G contient un sous-groupe invariant non abélien, on dit qu'il est *semi-simple*. Deux éléments g_1 et g_2 sont *conjugués* s'il existe un autre élément g tel que $g_1 = gg_2g^{-1}$. La *classe de conjugaison* est l'ensemble des éléments de G qui sont conjugués entre eux. Chaque élément de G appartient à une seule classe de conjugaison, c'est-à-dire que deux classes de conjugaison sont soit identiques soit disjointes. L'ensemble qui a comme éléments les classes de conjugaison est appelé *l'ensemble quotient*, on le note par G/H .

La *classe à droite* (à gauche) est l'ensemble obtenu par la multiplication d'un élément de G , à droite (à gauche), par $H : Hg(gH)$, ou H est un sous-groupe de G . Deux classes à droite (à gauche) sont soit identiques soit disjointes. Si H est invariant alors les classes à droite et à gauche se confondent $Hg = gH$ quelque soit l'élément g de G . Alors, l'ensemble G/H de ces classes forme un groupe (*groupe quotient*) muni de la loi de multiplication $(g_1H)(g_2H) = ((g_1g_2)H)$ qui admet H comme élément neutre.

Un *homomorphisme* d'un groupe (G, \cdot) dans un groupe $(D, *)$ est une application f qui préserve la loi de multiplication du groupe, autrement dit elle vérifie la condition

$$f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) * f(g_2) \quad (3.131)$$

pour tout couple d'éléments de G . Si de plus cette application est *bijective* alors il y a correspondance *un-à-un* entre les éléments de G et ceux de D , on parle alors d'un *isomorphisme*.

Le groupe G est un *groupe de transformations* d'un ensemble \mathbf{E} si à tout élément g de G correspond une transformation : $x \mapsto gx$ de \mathbf{E} , qui vérifie:

- $ex \equiv x$, où e est l'élément neutre de G et x un élément quelconque de \mathbf{E} .
- $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$ quelque soit les éléments g_1 et g_2 de G .

Si, de plus pour tout couple x, y d'éléments de \mathbf{E} il existe une transformation g de G qui fait passer d'un élément à l'autre, le groupe G est *transitif* sur \mathbf{E} qui est alors un *espace homogène* de G . Un *sous-groupe H stabilisateur* d'un point x_o de l'espace homogène \mathbf{E} est un sous-groupe qui laisse le point x_o invariant [23]. Dans ce cas, l'ensemble quotient G/H est isomorphe à \mathbf{E} et il peut être alors considéré comme un espace homogène du groupe G .

Pour étudier l'action du groupe G sur les classes de l'ensemble quotient, on prend de chaque classe x un élément x_G qu'on appelle *représentant de la classe* et on restreint l'étude à ces représentants. En général, l'action d'un élément g sur le représentant x_G de la classe x ne donne pas le représentant $(gx)_G$ de la classe gx . Pour remédier à cette situation on définit un *système de facteurs* $(g, x)_H$ appartenant au sous-groupe H et dépendant de l'élément g et de la classe x par la relation $gx_G = (gx)_G \cdot (g, x)_H$

Le système de facteurs vérifie les relations suivantes [24]

$$(1, x)_H = 1, \quad (g_1g_2, x)_H = (g_1, g_2x)_H \cdot (g_2, x)_H, \quad (g, x)_H^{-1} = (g^{-1}, gx)_H \quad (3.132)$$

Groupes de Lie

Les *groupes de Lie* sont un cas particulier très important des groupes qu'on utilise fréquemment en physique. Ce sont des groupes munis d'une *variété différentiable*. Cela signifie qu'il sont des groupes continus dont les éléments $g(\alpha^1, \dots, \alpha^m)$ sont des fonctions infiniment différentiables de leurs m paramètres. Ces paramètres α^i représentent les coordonnées des points dans un espace appelé *la variété du groupe*, il y a une correspondance directe entre les éléments du groupe et les points de cet espace. On fait correspondre à l'origine de la variété l'élément neutre du groupe $g(0, \dots, 0) = e$.

Les groupes de Lie sont des composantes connexes des groupes continus dont les éléments sont continûment liés à la transformation unie. On dit qu'un groupe est *connexe* si, pour tout couple de points de sa variété il existe un ou plusieurs chemins continus appartenant à la variété qui les relient; sinon il est non connexe. Si tous les chemins qui relient deux éléments du groupe peuvent être transformés les uns aux autres de façon continue, le groupe

est *simplement connexe*. S'il y a un nombre n de chemins distincts (qu'on ne peut pas transformer continûment les uns aux autres) qui relie deux éléments, le groupe est *n-fois connexe* ou *multiplement connexe* [25].

Un groupe de Lie est *compacte* si tous ses éléments peuvent être spécifiés par des points (paramètres) à l'intérieur d'une région finie de la variété, si cette région n'est pas finie le groupe est *non compacte* [22].

Les notions de connexité et de compacité sont fondamentales en topologie. Leur utilisation en théorie des groupes est due à l'existence d'un espace topologique associé au groupe de Lie et qui a, dans le cas des groupes de Lie une structure de variété.

Un élément du groupe de Lie peut être écrit au voisinage de l'identité sous la forme⁽¹⁾

$$g(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^m) = 1 - i\varepsilon^i J_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.133)$$

$$J_i = i \left(\frac{\partial g(\alpha^1, \dots, \alpha^m)}{\partial \alpha^i} \right)_{\alpha_i=0} \quad (3.134)$$

Les générateurs J_i sont au nombre des paramètres du groupe et forment la base d'une algèbre de commutateurs fermée appelée *algèbre de Lie*

$$[J_i, J_j] = J_i J_j - J_j J_i = C_{ij}^k J_k \quad (3.135)$$

Les coefficients C_{ij}^k détiennent toutes les informations concernant l'algèbre de Lie d'où leur nom de *constantes de structure*. L'algèbre de Lie nous renseigne sur les propriétés *locales* du groupe, ce genre d'information est généralement suffisant pour décrire la majorité des propriétés du groupe associé. Il est permis que plusieurs groupes partagent la même algèbre de Lie, cependant il n'existe parmi eux qu'un seul qui soit simplement connexe, le *groupe de recouvrement universel* [26].

Le *rang* de l'algèbre est le nombre maximale des générateurs qui commutent entre eux. Ces derniers forment une algèbre appelée *sous-algèbre de Cartan* et engendrent un sous-groupe abélien. S'il n'y a pas de générateurs qui commutent entre eux alors l'algèbre est de rang un. Il existe des opérateurs qui commutent avec tous les générateurs du groupe et qui s'écrivent comme fonction de ces derniers, ce sont donc des opérateurs invariants par rapport au groupe appelés *opérateurs de Casimir*. Pour un groupe semi-simple de rang r , il existe r opérateurs de Casimir indépendants⁽²⁾.

⁽¹⁾On somme sur les indices selon la convention d'Einstein.

⁽²⁾C'est le théorème de Racah [22].

Ces opérateurs ont une grande importance en physique; lorsqu'un système physique est invariant par rapport à un groupe de symétrie donné, les opérateurs de Casimir de ce groupe représentent des grandeurs physiques invariantes, et par conséquent fondamentales, par lesquelles le système physique sera désigné. Des exemples concrets seront donnés lors de l'étude du groupe de symétrie de Poincaré.

Propriétés des générateurs du groupe G

Définition

Un commutateur est défini par :

$$[J_i, J_j] = J_i J_j - J_j J_i = C_{ij}^k J_k \quad (3.136)$$

où les coefficients C_{ij}^k sont les constantes de structure du groupe G

Antisymétrie :

Elle se traduit par :

$$[J_i, J_j] = -[J_j, J_i] \quad (3.137)$$

Linéarité

Elle s'exprime par:

$$[J_i, \alpha J_j + \beta J_k] = \alpha [J_i, J_j] + \beta [J_i, J_k] \quad (3.138)$$

pour des nombres α, β réels ou complexes .

L'identité de Jacobi;

Elle est donnée par :

$$[[J_i, J_j], J_k] = [[J_k, J_i], J_j] = [[J_j, J_k], J_i] \quad (3.139)$$

En conséquence directe des propriétés (3.137) et (3.139) les constantes de structure doivent elles-mêmes être antisymétriques:

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k \quad (3.140)$$

et doivent vérifier l'identité de Jacobi:

$$C_{ij}^k C_{km}^l + C_{mi}^k C_{kj}^l + C_{jm}^k C_{ki}^l = 0 \quad (3.141)$$

ANNEXE C

Etude du groupe de Poincaré

Le groupe de Poincaré est formé par l'ensemble des transformations reliant les systèmes de référence entre eux, il apparaît comme une conséquence du principe de la relativité: l'invariance de la vitesse de la lumière qui conduit à établir les formules de transformation de Lorentz entre les coordonnées d'espace et de temps de référentiels en mouvement de translation uniforme les uns par rapport aux autres [27].

Le groupe de Poincaré est alors le produit du groupe de Lorentz par le groupe des translations de l'espace-temps

Groupe de Lorentz

Le groupe de Lorentz L est l'ensemble des transformations linéaires et homogènes des coordonnées $x'^i = f^i(x^k)$ qui laissent invariant le produit scalaire entre les quadri-vecteurs de l'espace-temps de Minkowski⁽¹⁾ [28]

$$x'^i y'_i = x^i y_i \quad (3.142)$$

Ce sont des transformations qui lient les coordonnées des systèmes de références dont les origines coïncident au temps initial (à $t = 0$). La transformation des coordonnées des quadri-vecteurs s'écrit sous la forme⁽²⁾

$$x'^i = l^i_k x^k$$

où les composantes l^i_k sont celles des matrices 4×4 réelles qui représentent les transformations du groupe de Lorentz et qui vérifient la relation de pseudo-orthogonalité

$$\eta[l]^t \eta^{-1} = l^{-1} \quad ; \quad \eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (3.143)$$

ou sous la forme indicelle

$$\eta^{ik} [l]^t_k {}^l \eta_{lj} = [l^{-1}]^i_j \quad ; \quad [l]^t_k = [l]_k^l \quad (3.144)$$

cette relation est une généralisation de la relation d'orthogonalité ($M^t = M^{-1}$) des matrices de l'espace euclidien. La relation de pseudo-orthogonalité est une contrainte sur les matrices l qui limite le nombre de composantes (l^{ik}) indépendantes à six, en effet, le groupe de Lorentz est paramétré par six variables continues ($l \equiv l(\alpha^\alpha, \xi^\beta)$) qui varient dans les intervalles⁽³⁾ suivants $-\pi < \alpha^\alpha \leq \pi$ et $0 < \xi^\beta \leq 1$.

⁽¹⁾ Les indices en lettres grecques ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$) varient de 1 à 3, alors que les indices latins (i, j, k, \dots) varient de 0 à 3.

⁽²⁾ L'indice i désigne la ligne de la matrice et k désigne sa colonne. La transposée de la matrice est définie par $[l]^t_k = [l]_k^i$, et comme pour le cas des vecteurs, ces indices sont élevés et abaissés par la métrique η .

⁽³⁾ L'intervalle sur le quel varient les paramètres dépend de la paramétrisation utilisée [29].

Le groupe de Lorentz ainsi défini est appelé groupe de *Lorentz complet* car il inclut l'ensemble des transformations continues et discrètes de l'espace-temps, on le désigne par⁽¹⁾ $L=O(3, 1)$. Ce groupe peut être décomposé, en fonction du signe du déterminant des matrices l et du signe de la composante l_0^0 qui agit sur la composante temporelle des quadri-vecteurs, en quatre sous-ensembles. En utilisant la relation de pseudo-orthogonalité on trouve que le carré du déterminant de l est égale à l'unité $(\det(l))^2 = 1$ ce qui donne deux possibilités $\det(l) = \pm 1$. On trouve également que le carré de la composante l_0^0 est supérieur ou égal à un : $(l_0^0)^2 = 1 + \sum_i (l_i^i)^2 \geq 1$ on aura donc soit $l_0^0 \geq 1$ de sorte que le signe de la composante temporelle des quadri-vecteurs reste inchangée après la transformation, soit $l_0^0 \leq -1$ et alors le signe de la coordonnée temporelle est inversé.

Dans le cas où le déterminant est égale à l'unité, les transformations l laissent invariant les éléments de volume dans l'espace de configuration et des impulsions ainsi que les angles entre les vecteurs. Les éléments de volume sont appelés dans ce cas des mesures invariantes. Si de plus la composante l_0^0 est positive, alors les transformations l sont des composantes continûment liées à la transformation identité I , et forment un groupe désigné par⁽²⁾ $L_+^\dagger = SO(3, 1)$ et appelé groupe de Lorentz propre. Par contre si le signe du déterminant et celui de la composante l_0^0 sont tous les deux négatifs Les transformations l ne sont pas liées à l'identité mais incluent l'inversion du temps qui change la coordonnée temporelle x^0 des quadri-vecteurs en $-x^0$, l'ensemble de ces transformations est désigné par $L_-^\dagger = TL_+^\dagger$. L'inversion du temps est représentée par une matrice 4×4

$$T = \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \mathbf{0}^t = (0, 0, 0), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.145)$$

Dans le cas où le signe du déterminant est négatif et la composante l_0^0 est positive, les transformations l incluent les réflexions spatiales, ces dernières se traduisent par une symétrie miroir suivie d'une rotation de 180° autour la normale du miroir qui changent donc le vecteur \mathbf{x} en $-\mathbf{x}$. L'ensemble de ces transformations est désigné par $L_-^\dagger = PL_+^\dagger$. Les réflexions spatiales sont représentées par la matrice 4×4 suivante

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (3.146)$$

⁽¹⁾En général, $O(p, q)$ est le groupe matriciel réel pseudo-orthogonal ($\eta[l]^t \eta^{-1} = l^{-1}$) agissant sur un espace de dimension $(p + q)$ muni d'une métrique $\eta_{ij} = \text{diag}(1, \dots, (q \text{ fois}), \dots, -1, \dots, (p \text{ fois}))$.

⁽²⁾La flèche \uparrow (dirigé vers le haut) indique que le signe de la composante l_0^0 , est positif, le signe \downarrow (indice en bas) est celui du déterminant. En général, $SO(p, q)$ est le groupe pseudo-orthogonal spécial ($\det(l) = 1$).

Le dernier sous-ensemble est désigné par $L_+^\downarrow = PTL_+^\uparrow$, il correspond au cas où le signe du déterminant est positif et celui de la composante l_0^0 est négatif. Ces transformations incluent simultanément l'inversion du temps et les réflexions spatiales. Le groupe de Lorentz complet est l'union de ces quatre sous-ensembles [29]

$$L = L_+^\uparrow \cup TL_+^\uparrow \cup PL_+^\uparrow \cup PTL_+^\uparrow \quad (3.147)$$

On s'intéresse dans ce qui suit aux représentations du groupe de Lorentz propre⁽¹⁾ L_+^\uparrow qui est en fait le seul parmi ces quatre sous-ensembles à avoir la structure d'un groupe. Il contient les rotations spatiales et les transformations propres de Lorentz (les boosts de vitesse). La transformation de Lorentz qui représente une rotation à la forme générale suivante

$$l_r \equiv r = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \quad (3.148)$$

où le bloc \mathbf{R} est la matrice 3×3 qui représente les rotations tridimensionnelles⁽²⁾ dans l'espace euclidien E_3 , par conséquent la transformation l_r n'affecte que les coordonnées spatiales des quadri-vecteurs. Les paramètres de cette transformation sont les angles de rotations ω^α autour des axes ox^α .

Les boosts de vitesses sont des transformations qui mélangent les coordonnées spatiales et la coordonnée temporelle des quadri-vecteurs, ce sont en fait des dilatations paramétrées par des fonctions ξ^α dépendant du rapport des v^α , de la vitesse du système de référence en mouvement, sur la vitesse de la lumière c [26]

$$\xi(v^\alpha) = \xi^\alpha = \operatorname{arctanh}(v^\alpha/c) \quad (3.149)$$

Ces paramètres s'interprètent comme des angles de rotations hyperboliques dans les plans (x^0x^α) . Dans le cas où la vitesse est dirigée suivant l'axe oz , le boost de Lorentz

$$l_{vz} \equiv (v_\xi)_L = \begin{pmatrix} ch(\xi) & 0 & 0 & sh(\xi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ sh(\xi) & 0 & 0 & ch(\xi) \end{pmatrix} \quad (3.150)$$

ne mélange que les coordonnées x^3 et x^0

⁽¹⁾Dans tout ce qui suit, seul le groupe de Lorentz L_+^\uparrow sera considéré. Pour simplifier la notation, on le désignera par L .

⁽²⁾L'ensemble de ces rotations est représenté par le groupe spécial orthogonal $SO(3)$.

Lorsque la direction de la vitesse est quelconque le boost de Lorentz s'écrit sous la forme générale [29]

$$l_v \equiv v_L = \begin{pmatrix} v^0 & \mathbf{v}^t \\ \mathbf{v} & \mathbf{1} + \mathbf{v}\mathbf{v}^t/(v^0 + 1) \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} v^0 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\xi) \\ sh(\xi).\mathbf{n} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad (3.151)$$

où $v^0 = l_0^0 = ch(\xi) \geq 1$ et $(v)^2 = (v^0)^2 - \mathbf{v}^2 = (l_0^0)^2 - \sum_i (l_0^i)^2 = 1$. Ainsi, le boost de Lorentz est représenté en fonction des quadri-vitesses appartenant à la nappe positive de l'hyperboloïde de masse unité

$$C_1^+ = \left\{ v / (v^0)^2 - \mathbf{v}^2 = 1, v^0 > 0 \right\}$$

Notons que l'ensemble des boosts ne forme pas un groupe. Ceci est dû à la relation d'addition des vitesses d'Einstein qui fait que la condition d'associativité du groupe n'est pas vérifiée que dans le cas de la limite non relativiste. Alors cet ensemble est dit *faiblement associatif* [29]

Le développement de la transformation de Lorentz au voisinage de l'identité donne la forme infinitésimale suivante

$$l(\delta\omega) = 1 - (i/2) \delta\omega^{mn} M_{mn} \quad (3.152)$$

où les $\omega^{mn} = -\omega^{nm}$ sont les paramètres anti-symétriques du groupe qui correspondent à des rotations dans les plans (x^m, x^n) et les

$$M_{mn} = -M_{nm} = i(\partial L(\omega) / \partial \omega^{mn})_{\omega=0} \quad (3.153)$$

sont les générateurs covariants. Dans cette notation les générateurs des rotations sont identifiés à $M_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} M_{\beta\gamma}$ où les $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ sont les composantes du tenseur anti-symétrique et les angles de rotation autour des axes de l'espace sont $\omega^\alpha = \omega^{\beta\gamma}$ (les indices α, β et γ sont dans l'ordre cyclique), la forme matricielle des générateurs est la suivante

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.154)$$

il peuvent être également s'écrire sous la forme différentielle

$$M_{\beta\gamma} = -i [x_\beta (\partial/\partial x^\gamma) - x_\gamma (\partial/\partial x^\beta)]$$

$$M_\alpha = -i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta (\partial/\partial x^\gamma) \quad (3.155)$$

Lorsqu'un système physique est invariant par rotation, les générateurs M_α sont identifiés aux composantes de l'opérateur moment cinétique \mathbf{J} du système, qui devient une quantité conservée.

Les générateurs des boosts de vitesses sont notés par $K_\alpha = -M_{\alpha 0}$ et les paramètres ξ^α correspondent aux angles de rotations hyperboliques dans les plans (x^0, x^α) donc $\xi^\alpha = \omega^{\alpha 0}$. Les matrices représentant les générateurs de boosts sont

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.156)$$

dans la représentation différentielle ils prennent la forme suivante

$$K_\alpha = -i [x_0 (\partial/\partial x^\alpha) - x_\alpha (\partial/\partial x^0)] \quad (3.157)$$

Les générateurs des boosts de vitesse ne sont pas des quantités conservées à la différence des générateurs des rotations.

Les six générateurs du groupe de Lorentz peuvent être rassemblés sous la forme covariante

$$M_{ij} = -i [x_i (\partial/\partial x^j) - x_j (\partial/\partial x^i)] \quad (3.158)$$

Une transformation quelconque du groupe de Lorentz propre peut être écrite en fonctions des paramètres et des générateurs du groupe sous la forme exponentielle

$$l(\omega) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega^{mn}M_{mn}\right) \quad (3.159)$$

c'est là une forme d'écriture très pratique et très utilisée pour la représentation des éléments d'un groupe continu.. Ainsi, la forme générale(3.151) d'un boost de vitesse s'écrit tout simplement [26]

$$V(\xi) = \exp(-i\xi^\alpha K_\alpha) \quad (3.160)$$

De la même façon, on obtient la forme exponentielle d'une rotation quelconque

$$R(\omega) = \exp(-i\omega^\alpha J_\alpha) \quad (3.161)$$

L'ensemble des six générateurs forme l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz vérifiant les relations de commutation suivantes

$$[M_{ij}, M_{kl}] = i (\eta_{ik}M_{lj} - \eta_{il}M_{kj} + \eta_{jk}M_{il} - \eta_{jl}M_{ik}) \quad (3.162)$$

Groupe des quadri-translations

Le groupe des translations quadri-dimensionnelles T est l'ensemble des transformations inhomogène de l'espace-temps de Minkowski, les paramètres de ce groupe sont les composantes du quadri-vecteur de translation $a = (a^0, a^1, a^2, a^3)^t$, l'action du groupe sur les quadri-vecteurs est donnée par la relation suivante

$$T(a) x = x' = x + a \iff x'^i = x^i + a^i \quad (3.163)$$

la loi de multiplication du groupe

$$T(a) T(b) = T(a + b) = T(b) T(a) \quad (3.164)$$

montre qu'il est abélien

La translation infinitésimale s'écrit sous la forme suivante

$$T(\delta a) = 1 - i\delta a^i P_i \quad (3.165)$$

d'où la représentation exponentielle des translations

$$T(a) = \exp(-ia^i P_i) \quad (3.166)$$

les générateurs $P_i = i(\partial T(a)/\partial a^i)_{a^i=0}$ des translations peuvent être représentés, selon l'espace de représentation, par des matrices colonnes

$$P_0 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \quad (3.167)$$

ou par des opérateurs différentiels agissant sur les fonctions de coordonnées [26]

$$P_i = -i(\partial/\partial x^i) \quad (3.168)$$

Le caractère abélien du groupe des translations implique que son algèbre de Lie est commutative

$$[P_i, P_j] = 0 \quad (3.169)$$

Lorsque le groupe des translations est le groupe de symétrie d'un système physique les générateurs des translations spatiales P_α correspondent aux composantes de l'opérateur impulsion \mathbf{P} et le générateur des translations temporelles P_0 coïncide avec l'opérateur de l'énergie; (l'hamiltonien) H .

Groupe de Poincaré

Le groupe de Poincaré propre ⁽¹⁾ \mathcal{P} est l'ensemble des transformations de l'espace-temps plan de Minkowski qui laisse invariant la différence quadratique entre deux quadri-vecteurs

$$(x' - y')^2 = (x - y)^2 \quad (3.170)$$

Il est réalisé par le produit semi-directe⁽²⁾ du groupe de Lorentz et celui des translations, on le désigne par $\mathcal{P} \equiv T \otimes L \equiv ISO(3, 1)$. L'action du groupe Poincaré sur les quadri-vecteurs est définie comme suit

$$x' = g(a, l)x \iff x'^i = l^i_j x^j + a^i \quad (3.171)$$

où les éléments de \mathcal{P} sont notés par $g(a, l)$ où $g(a, l) = a_T l$. Comme les quadri-impulsions sont des quadri-vecteurs libres, c'est-à-dire qu'il ne sont pas liés à l'origine, l'action des translations devient sur cet espace triviale et le groupe de Poincaré est réduit au groupe de Lorentz

$$p' = g(a, l)p \iff p'^i = l^i_j p^j \quad (3.172)$$

La loi de multiplication du groupe est donnée par le produit de deux éléments quelconques

$$g(a, l)g(a', l') = g(la' + a, ll') \quad (3.173)$$

L'algèbre de Lie du groupe de Poincaré est formée par l'ensemble des générateurs du groupe de Lorentz et du groupe des translations et vérifiant, en plus des relations (3.162) et (3.169), la relation de commutation

$$[P_i, M_{jk}] = i(\eta_{ij}P_k - \eta_{ik}P_j) \quad (3.174)$$

qui exprime le fait que l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz ne commute pas avec l'algèbre de Lie du groupe des translations ce qui implique le caractère semi-directe du groupe de Poincaré [29].

Le groupe de Poincaré admet deux opérateurs de Casimir, l'opérateur de masse $(P)^2$ et l'opérateur de Pauli-Lubansky $(W)^2$, leurs valeurs propres définissent respectivement, la

⁽¹⁾Le groupe de Poincaré complet inclut les transformations discrètes et continues de l'espace-temps, il est formé par l'union $L = L_+^\uparrow \cup TL_-^\uparrow \cup PL_-^\downarrow \cup PTL_+^\downarrow$ de quatre sous-ensembles correspondants à ceux du groupe de Lorentz. Aussi seul le groupe de Poincaré propre \mathbf{P}_+^\uparrow sera considéré dans la suite et sera noté \mathbf{P} .

⁽²⁾Le produit est semi-direct a cause des relations 3.173 et 3.174 qui exprime le fait que l'algèbre de Lie du groupe du Lorentz ne commute pas avec celle du groupe des quadri-translations. La notation $ISO(3, 1)$ est une abréviation de transformation Inhomogène Spéciale et (pseudo-)orthogonale.

masse et le spin des particules élémentaires

$$\begin{aligned} (P)^2 &= P_i P^i \longrightarrow m^2 \\ (W)^2 &= W_i W^i \longrightarrow -s(s+1)m^2; \quad W_i = (1/2) \varepsilon_{ljki} M^{lj} P^k \end{aligned} \quad (3.175)$$

Le groupe de Poincaré est un groupe continu, non compact et doublement connexe. Cette dernière propriété rend impossible l'utilisation de représentation de ce groupe pour l'étude des particules de spin demi-entier. Dans ce cas, on utilise les représentations du groupe de recouvrement universel du groupe de Poincaré qui est simplement connexe et qu'on note⁽¹⁾ \tilde{P} . Ce type de représentations est appelé représentations spinorielles du groupe de Poincaré. Dans ce qui suit nous présentons brièvement la théorie des spineurs, relativistes et non relativistes, pour mettre en évidence les représentations spinorielles du groupe de Poincaré et celui des rotations.

ANNEXE D

La théorie des spineurs

Le Concept de spineur a émergé en 1916 suite aux travaux de E. Cartan sur les représentations des algèbres de Lie simples. Cependant, ce n'est qu'en 1930 que cette notion a pris la forme connue aujourd'hui en physique mathématique, et ce-ci lorsque P.A.M. Dirac l'a utilisé pour la construction d'une équation relativiste décrivant l'électron qui est doté d'un moment cinétique intrinsèque, le "spin". La fonction d'onde relativiste qui représente cette particule est un spineur à quatre composantes appelé, spineur de Dirac.

Spineurs non relativistes et groupe SU(2)

Le groupe des rotations est l'ensemble des transformations linéaires et continues de l'espace Euclidien laissant invariant la norme des vecteurs

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} \implies \mathbf{x}'^2 = \mathbf{x}^2 \quad (3.176)$$

Il est représenté par le groupe matriciel $SO(3)$ composé par les matrices (3×3) réelles, orthogonales ($R^{-1} = R^t$) dont les déterminants sont égaux à un ($\det R = +1$). La représentation exponentielle de ce groupe est écrite en fonction des trois générateurs J^β et les angles de rotation⁽²⁾ [30]

$$R(\theta) = \exp(-i\theta_\beta J^\beta) \quad ; \quad \beta = \{\theta = \theta_\beta; \beta = 1, 2, 3\} \quad (3.177)$$

⁽¹⁾Dans la notation de la théorie des groupes, on écrit $\tilde{P} \equiv ISL(2, \mathbb{C}) = T \otimes SL(2, \mathbb{C})$, où $SL(2, \mathbb{C})$ est le groupe des matrices complexes (2×2) de déterminant égal à un. Ce dernier est le groupe de recouvrement universel du groupe de Lorentz $SO(3, 1)$

⁽²⁾Dans le cas de l'espace Euclidien à trois dimensions, ils sont représentés par des matrices 3×3 .

Du point de vue topologie, ce groupe est continu, compacte et doublement connexe. Il admet alors le groupe $SU(2)$ comme groupe de recouvrement universel. Effectivement ce dernier qui est représenté par des matrices (2×2) complexes, unitaires et de déterminant unité est simplement connexe. Sa représentation exponentielle agissant sur l'espace complexe à deux dimensions \mathbb{C}^2 est

$$U(\zeta) = \exp\left(-\frac{i}{2}\zeta_\alpha\sigma^\alpha\right); \quad \zeta = \{\zeta_\alpha; \alpha = 1, 2, 3\} \quad (3.178)$$

où les ζ_α sont des paramètres réels et les σ^α sont les matrices de Pauli.

Il est possible de représenter les vecteurs de l'espace euclidien E_3 par des matrices complexes X exprimées en fonction des matrices de Pauli σ_α

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \longrightarrow X = x^\alpha\sigma_\alpha = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix} \quad (3.179)$$

Alors, lorsque le vecteur \mathbf{x} se transforme par la représentation R de $SO(3)$ la matrice X se transforme par la représentation U de $SU(2)$ comme suit

$$x' = Rx \rightarrow X' = UXU^\dagger \quad (3.180)$$

ce qui implique un "homomorphisme" 2 à 1 de $SU(2)$ vers $SO(3)$

$$\begin{aligned} SU(2) &\rightarrow SO(3) \\ \pm U &\rightarrow R \end{aligned} \quad (3.181)$$

Ce homomorphisme est appelé représentation doublement valuée du groupe des rotations R par les matrices U de $SU(2)$. Exprimées en fonction des angles d'Euler, ces matrices U ne sont autres que les représentations irréductibles $D^{j=1/2}$ bien connues et très utilisées en mécanique quantique. On peut alors définir les spineurs d'ordre 1 comme étant les objets mathématiques (tenseurs d'ordre 1/2) dont la forme matricielle est celle des vecteurs à deux composantes $\eta = (\eta_1, \eta_2)^\dagger$ qui se transforme par le groupe $SU(2)$

$$\eta' = U\eta$$

$$\eta'^\alpha = U^\alpha_b \eta^b; \quad a, b = 1, 2$$

Spineurs relativistes et groupe $SL(2, \mathbb{C})$

Les quadri-vecteurs de l'espace de Minkowski M_4 peuvent être, eux aussi, représentés par des matrices (2×2)

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \longrightarrow X = x^i \sigma_i = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \quad (3.182)$$

où $\sigma_0 = I$ et les σ_α sont les matrices de Pauli. On remarque que le déterminant de X est égale au carré du quadri-vecteur x , i.e. $\det(X) = x^i x_i$. L'ensemble de transformations des coordonnées

$$x'^l = l x \rightarrow X' = \Lambda X \Lambda^\dagger \quad (3.183)$$

qui laissent invariant le déterminant de la matrice X

$$\det X' = \det X \Leftrightarrow x'^i x'_i = x^i x_i \quad (3.184)$$

forme un groupe désigné par⁽¹⁾ $SL(2, \mathbb{C})$ et représenté par des matrices Λ complexes de déterminant unité $\det(\Lambda) = 1$. A chaque transformation Λ de ce groupe correspond une transformation unique l du groupe de Lorentz dont les composantes sont obtenues par la relation suivante [31, 29]

$$l^i_k = \frac{1}{2} \text{Tr}(\Lambda \sigma_k \Lambda^\dagger \tilde{\sigma}^i); \quad \tilde{\sigma}^i \equiv \sigma_i \quad (3.185)$$

où les matrices $\tilde{\sigma}^i$ sont introduites pour préserver la covariance des indices.

Les relations (3.183) et (3.185) montrent l'existence d'un "homomorphisme" 2 à 1 du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ vers le groupe de Lorentz propre⁽²⁾ L

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbb{C}) &\rightarrow L \\ \pm \Lambda &\mapsto l \end{aligned} \quad (3.186)$$

Dans le cas de groupe $SL(2, \mathbb{C})$ à la différence de groupe $SU(2)$, il existe deux types de spineurs: le premier se transforme par la représentation Λ alors que le second se transforme par la reorésentation $\bar{\Lambda}$ conjuguée complexe de Λ . Ces deux représentations du groupe

⁽¹⁾En général, $SL(n, \mathbb{C})$ est le groupe des matrices (transformations linéaires) $n \times n$ complexe et spéciales (déterminant égal à un).

⁽²⁾Du fait que $l^0_0 = (\frac{1}{2}) \text{Tr}(\Lambda \Lambda^\dagger) \succ 0$ la correspondance est avec le groupe de Lorentz propre et non pas avec le groupe de Lorentz complet.

$SL(2, \mathbb{C})$ ne sont pas équivalentes. Le premier type de spineurs est noté par $\dot{\eta}$, leur transformation par le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ s'écrit sous la forme

$$\eta' = \Lambda \eta \Leftrightarrow \eta'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} \eta^{\beta}$$

$$\dot{\eta}' = \bar{\Lambda} \dot{\eta} \Leftrightarrow \dot{\eta}'^{\dot{\alpha}} = \bar{\Lambda}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \dot{\eta}^{\dot{\beta}}; \quad \eta^{\dot{\alpha}} \equiv \dot{\eta}^{\alpha} \equiv \bar{\eta}^{\alpha}$$

Les deux représentations Λ et $\bar{\Lambda}$ s'écrivent sous forme exponentielle en fonction des générateurs et des paramètres du groupe [32]

$$\Lambda = \exp[-i(\theta_{\alpha} S^{\alpha} + \eta_{\alpha} N^{\alpha})] \quad (3.187)$$

$$\bar{\Lambda} = \exp[-i(\theta_{\alpha} \bar{S}^{\alpha} + \eta_{\alpha} \bar{N}^{\alpha})]$$

$$S^{\alpha} = (1/2) \sigma^{\alpha}; \quad N^{\alpha} = (i/2) \sigma^{\alpha} \quad (3.188)$$

Les générateurs S^{α} du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ correspondent aux générateurs des rotations et les N^{α} s'identifient aux générateurs des boosts de vitesses du groupe de Lorentz.

Ces deux types de spineurs, de même que les spineurs euclidiens, n'ont pas d'intérêt en mécanique classique. C'est en théorie des champs lorsqu'on utilise l'espace de Hilbert que les spineurs de groupe $SL(2, \mathbb{C})$ ont de l'importance. Les deux types de spineurs η et $\dot{\eta}$ qui se transforment respectivement par les représentations irréductibles $D^{(\frac{1}{2}, 0)}$ et $D^{(0, \frac{1}{2})}$ qui s'identifient avec Λ et $\bar{\Lambda}$ [33].

$$D^{(\frac{1}{2}, 0)}(\Lambda) = \Lambda$$

$$D^{(0, \frac{1}{2})}(\Lambda) = \bar{\Lambda}$$

Ces représentations sont les plus simples et les plus importantes des représentations non triviales de ce groupe. [22, 29]

Bibliographie

- [1] L'O.C.D.E. "Le Forum de l'O.C.D.E, physique des particules" (organisation de coopération et de développement économique) (1995).
- [2] Bogoliubov N.N and Shirkov D V, "*Introduction to the Theory of Quantized Fields*" (Wiley) (1980).
- [3] Lifchitz E, "Théorie quantique relativiste", première partie. Edition Mir, Moscou (1972).
- [4] Fulling S. T, Phys. Rev. 7D, 2850 (1973)
- [5] Destouches J.L, "*La Quantification en Théorie Fonctionnelle des Corpuscules*" Gauthier-Villars, Paris (1956).
- [6] De Broglie L, "*La Réinterprétation de la Mécanique Ondulatoire*". Gauthier- Villars, Paris (1971).
- [7] Prugovečki E, J. Math. Phys **17**, 517. (1977)
- [8] Hachemane M, Smida A and Djelid R, *Found. Phys* **29** 1479 (1999).
- [9] Derendinger J.P, "Théorie quantique des champs", Presse polytechniques et universitaires romandes. France (2001).
- [10] Landau L et Lifchit E, "Théorie des champs" (T: 2) Edition de la paix, Moscou (1982).
- [11] Boudenot J.C, "Electromagnétisme et gravitation relativistes", Ellipses, France (1989).
- [12] Bogolioubov N.N, "Introduction à la théorie quantique des champs", traduit par A. Bloch. Dunod Paris (1960).
- [13] Boutot A, La Recherche N^o 215. Novembre 1989 France (1989).

-
- [14] Oualili Y, "La stochasticité pour la particule étendue". Thèse de Magister USTHB Alger (2006).
- [15] Prugovečki E, "*Quantum Geometry*". (Dordrecht: Kluwer) (1992).
- [16] Prugovečki E, "*Stochastic Quantum Mechanics and Quantum Space-Time*". Reidel, Dordrecht (1984).
- [17] Destouches J.L, "*Corpuscules et Champs en Théorie Fonctionnelle*". Gauthier-Villars, Paris (1958).
- [18] Ali S. T.E., Prugovečki E, Acta Appl. Math. **6**, 1. (1986).
- [19] Smida A, Hachemane M and Hamici A H, Journal of Physics: Conference Series, 128 (2008).
- [20] Nelipa N, "Physique des particules élémentaires", Edition Mir Moscou (1981).
- [21] Utiyama R., Physical Review ,Vol 101,No 5 (1956).
- [22] Greiner W, Muller B, "Mécanique quantique - Symétries. Springer". Berlin (1999).
- [23] Vilenkin. N, "Fonctions spéciales et theorie de la représentation des groupes". Dunod, Paris (1969)
- [24] Mensky, M, B, "The method of induced representations : space-time and the concept of particles" [en russe], Nauka, Moscow (1976)
- [25] Joshi. A M, "Elements of group theory for physicists". 2 Ed, Wiley eastern limited. New Delhi (1977)
- [26] Noz. Marilyn. E. & Y. S. Kim, "Theory and application of Poincaré group". Reidel publishing company, Dordrecht (1986)
- [27] Mehra, Jadish, "The physicist's conception of nature". (Jurgen Ehlers : The nature and structure of spacetime). D.Reidel publishing company. Dordrecht (1973).
- [28] Naber Gregory L, "The geometry of Minkowski space-time". In applied mathematical sciences 92. Springer-Verlag. N.Y. inc. (1992).
- [29] Roman S.U, Urbantke H.K. "Relativity, groups, particles - Special relativity and relativistic symmetry in field and particle physics". Springer-Wien. N.Y (1992).

- [30] Hladik J, "Les spineurs en physique". Masson. Paris (1996).
- [31] Barut A. O, Raçzka R : "Theory of group representations and application". World scientific publishing. Co ltd (1986).
- [32] Kim Y.S, Noz M. E, "Theory and application of Poincaré group". Reidel publishing company, Dordrecht (1986).
- [33] Bogolubov N. N, Logunov A. A, Oksak A. I, Todorov I. T, "General principles of quantum field theory". Kluwer academic publishers. Dordrecht (1990).