N° d'ordre : 35/2005-M/PH

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE USTHB / ALGER
FACULTE DE PHYSIQUE

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

En

Physique Théorique

Spécialité : Physique Théorique des Basses et Moyennes Energies

Par

AMI ISMAHANE

SUJET

Contribution à l'étude de l'appariement isovectoriel

Soutenu publiquement le 14/12/2005, devant le jury composé de :

E. K. SI AHMED	Professeur (USTHB)	Président
M. FELLAH	Professeur (USTHB)	Directeur de thèse
N. H. ALLAL	Professeur (USTHB)	Examinatrice
A. CHOUCHAOUI	Professeur (USTHB)	Examinateur
M. R. OUDIH	Dr en Physique (USTHB)	Examinateur

À l’homme de ma vie mon très cher père

À la femme qui m’a portée et qui continue de le faire, ma très chère mère

À mes frères et sœurs pour leurs encouragements

À celle avec qui j’ai partagé tout les hauts et les bas de ma vie, à Nabila Aouattou.

Remerciements

J'exprime ma profonde gratitude à mon directeur de thèse Monsieur M. Fellah, Professeur à l'USTHB pour m'avoir accueillie au sein de l'équipe « structure nucléaire » du Laboratoire de Physique Théorique et d'avoir mis à ma disposition tous les moyens matériels. Je lui présente mes vifs remerciements pour m'avoir initiée à la recherche en me proposant ce sujet, pour la confiance précieuse qu'il m'a accordée et pour m'avoir guidée, formée et encouragée.

Je prie Monsieur E.K. Si Ahmed, Professeur à l'USTHB et Directeur du Laboratoire de Mécanique des Fluides Théorique et Appliquée de la Faculté de Physique, de bien vouloir trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour avoir accepté la présidence du jury de ce mémoire.

Je remercie chaleureusement Mlle N. H. Allal, Professeur à l'USTHB pour l'attention qu'elle m'a accordée durant mon travail, pour tous ses conseils et précieuses remarques qu'elle m'a faites, pour son soutien et son aide au quotidien et d'avoir acceptée de participer au jury de ce mémoire.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur A. Chouchaoui, Professeur à l'USTHB d'avoir accepté de participer au jury de ce mémoire.

Un grand merci également à Monsieur le Docteur M. R. Oudih, Maître Assistant à l'USTHB de s'être toujours montré disponible et serviable et d'avoir accepté de participer au jury de ce mémoire.

C'est avec un grand plaisir que je remercie Mlle le Docteur Naziha Benhamouda, Maître Assistant à l'USTHB pour son aide continue et spontanée et mon camarade et ami Slimane Kerrouchi. Mes remerciements s'adressent également à Mlle Djamila Mokhtari avec qui j'ai partagé de nombreuses séances de travail. Merci Djamila pour l'aide inestimable que tu m'as apportée avec beaucoup de générosité, partage et amitié.

Table des matières

Introduction

L'étude des corrélations d'appariement est très importante et est toujours d'actualité en physique de la structure nucléaire [1–19]. En effet, bien que le gain en énergie dû à ce type de corrélations reste modeste par rapport à l'énergie du noyau évaluée dans le cadre du modèle de la goutte liquide ou du modèle à particules indépendantes, il influence fortement un grand nombre de propriétés des noyaux atomiques [1, 20] comme les transitions électromagnétiques ou bêta, le moment d'inertie [21–23], les facteurs de spectroscopie [5], etc.

Initialement, Bohr, Mottelson et Pines [24] ont introduit l'interaction résiduelle d'appariement pour expliquer le gap en énergie entre l'état fondamental et le premier état excité des noyaux pair-pairs. Leur interprétation se basait sur une explication analogue à celle de la théorie de la supraconductivité de Bardeen, Cooper et Schrieffer [25]. En effet, aux basses températures les électrons d'un matériau supraconducteur se déplacent par paires occupant des états de même impulsion et ayant des projections de spin opposées au voisinage de la mer de Fermi.

Cette théorie a été étendue à la physique nucléaire pour l'étude des noyaux finis sphériques par Belyaev [26] qui supposa l'existence des corrélations d'appariement uniquement entre nucléons occupant des états se déduisant l'un de l'autre par renversement du sens du temps. Ainsi, les premières études ont traité essentiellement l'appariement entre particules identiques : proton-proton (p-p) et neutron-neutron (n-n). Il s'est avéré par la suite que ce traitement était incomplet et qu'il devait être généralisé pour inclure l'appariement neutron-proton (n-p) [27]. En effet, dans le cas des noyaux lourds les niveaux de Fermi des systèmes protons et neutrons sont bien séparés énergétiquement de sorte que l'appariement (n-p) est négligeable en comparaison à son homologue entre particules identiques. Par contre, dans le cas des noyaux dont le nombre de neutrons est voisin de celui des protons, les niveaux de Fermi des deux systèmes sont voisins, on s'attend donc à ce que l'appariement (n-p) soit au moins d'égale importance que l'appariement entre particules identiques [14, 16–18, 28, 29]. Cette généralisation s'est faite en plusieurs étapes en utilisant le formalisme du spin isotopique et la théorie BCS [30–32]. Même si cette dernière présente un défaut majeur qui est la non conservation du nombre de particules, elle reste néanmoins la plus utilisée en raison de sa simplicité et du mélange de configuration qu'elle induit. Contrairement à l'appariement entre particules identiques, l'appariement (n-p) existe aussi bien dans le cas isoscalaire (T=0) que dans le cas isovectoriel (T=1). Ainsi, des études ont été menées pour traiter indépendamment d'une part l'appariement isovectoriel (p-p, n-n, n-p) [33–35] et d'autre part l'appariement isoscalaire (n-p) [36]. Or, il se trouve qu'il y a compétition entre ces différents modes d'interaction (p-p ou n-n et n-p) d'où l'intérêt de traiter à la fois l'appariement isoscalaire et l'appariement isovectoriel [37–39] et de discuter l'apport et la compétition qui existent entre ces deux types d'appariement [14–18, 40]. Comme le principe de Pauli n'interdit pas à un proton et un neutron d'occuper le même état de spin s'ils sont couplés à (T=0), on a vu également apparaître des études qui traitent ce type d'appariement en plus de l'appariement (p-p, n-n, n-p) [41]. Le formalisme s'est généralisé afin de décrire les noyaux en rotation [14, 15, 18, 28, 42–46] suggérant ainsi une transition entre les têtes de bandes rotationnelles construites sur les états intrinsèques à (T=0) ou (T=1), notamment pour les états ayant un spin élevé [37, 47].

Le traitement des corrélations d'appariement neutron-proton a vu un net regain d'intérêt ces dernières années [15, 16] et a fait l'objet de plusieurs études théoriques, notamment après les récents progrès qu'a connus la spectroscopie nucléaire expérimentale. L'utilisation de détecteurs à très grande efficacité et le développement des faisceaux d'ions radioactifs ont fourni des données expérimentales qui étaient jusque là inconnues. Ainsi, les noyaux ayant N=Z jusqu'à l'étain (^{100}Sn) par exemple ont pu être étudiés ainsi que les noyaux de masse intermédiaire se trouvant loin de la vallée de stabilité et pour lesquels N est voisin de Z [18, 29]. Toutefois, il reste beaucoup à apprendre sur l'effet et le traitement de l'appariement neutron-proton.

Les conséquences de l'appariement (n-p) sont perceptibles sur les énergies de liaisons [12,15,20,28], la stabilité des noyaux pair-pairs par rapport à leurs voisins impair- impairs ou impairs ainsi que sur la structure des états à haut spin [13,15,17,28,42,43,45,48], et sur la structure des états excités des noyaux impair-impairs [12,40,46,49]. L'appariement (n-p) joue un rôle important dans la désintégration et la double désintégration β [15,19,28,42,43] ainsi que sur les propriétés des faibles densités de matière nucléaire [3]. Il a aussi un effet sur les bandes de rotations [15, 20, 42, 43, 47, 48, 50], sur la détermination du moment d'inertie [21, 22] et les propriétés de l'état fondamental des noyaux pair-pairs [1, 51] et impair-impairs [17, 45, 52].

Nous nous proposons dans le présent travail d'effectuer une étude théorique pour le traitement des corrélations d'appariement isovectoriel dans les noyaux pair-pairs. Le cas de l'appariement isoscalaire sera traité dans une étude ultérieure car la présente étude se prête facilement à sa prise en compte.

Dans le premier chapitre, on écrira l'hamiltonien du système qui sera diagonalisé approximativement par la méthode de linéarisation [53–55]. Cette dernière permet par simple diagonalisation de la matrice d'excitation de passer vers une nouvelle représentation dite de quasi-particule et ce par le biais de la transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin qui sera explicitée dans le deuxième chapitre. On écrira l'hamiltonien dans cette nouvelle représentation. Comme il ne s'écrit pas sous forme diagonale, on s'intéressera dans le troisième chapitre à sa diagonalisation et à l'écriture de la nouvelle transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin. On établira par la suite l'expression des états excités à deux particules et on calculera leurs énergies. Le dernier chapitre concerne l'étude de l'effet de ces corrélations sur le moment d'inertie qui est une grandeur physique très importante dans la mesure où elle donne des informations précieuses sur la déformation et le mouvement de rotation des noyaux.

Chapitre 1

Traitement de l'appariement par la méthode de linéarisation

1.1 Hamiltonien du système

On considère un noyau de masse $A = N + Z$, à N neutrons et Z protons, d'hamiltonien :

$$H = H_0 + V \tag{1.1}$$

où H_0 est un hamiltonien correspondant à un champ moyen local et dans lequel les nucléons (neutrons et protons) se déplacent indépendamment les uns des autres et V est une interaction résiduelle. H_0 est supposé maximal et est obtenu par un calcul d'Hartree-Fock ou est donné phénoménologiquement comme celui de Nilsson [56] ou de Woods-Saxon [57], par exemple. En supposant H_0 diagonalisé, ses états propres définissent une base de représentation. Dans le formalisme de la seconde quantification et du spin isotopique, en admettant que les protons et les neutrons occupent les mêmes états (i.e les états neutrons et protons sont identiques), l'hamiltonien H s'écrit :

$$H = \sum_{\nu t} \varepsilon_{\nu t} a_{\nu t}^{\dagger} a_{\nu t} + \frac{1}{4} \sum_{\substack{\nu\mu\eta\delta \\ tt't_1t_2}} \langle \nu t \mu t' \mid V \mid \eta t_1 \delta t_2 \rangle \, a_{\nu t}^{\dagger} a_{\mu t'}^{\dagger} a_{\delta t_2} a_{\eta t_1} \tag{1.2}$$

où l'on a noté par $a^\dagger_{\nu t}$ et $a_{\nu t}$ les opérateurs de création et d'annihilation d'une particule dans l'état $\mid \nu t >$ et la lettre $t = n,\, p$ caractérise la nature de la particule occupant cet état : proton (p) ou neutron (n). Ces opérateurs obéissent aux relations d'anti-commutation habituelles des fermions :

$$\begin{aligned}
&\left\{a_{\nu t}, \quad a^\dagger_{\nu' t'}\right\} = \delta_{\nu\nu'}\delta_{tt'} \\
&\left\{a_{\nu t}, \quad a_{\nu' t'}\right\} = \left\{a^\dagger_{\nu t}, \quad a^\dagger_{\nu' t'}\right\} = 0
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Les quantités $\varepsilon_{\nu t}$ et $\langle \nu t \mu t' \mid V \mid \eta t_1 \delta t_2 \rangle$ représentent les énergies du champ moyen et les éléments de matrice de l'interaction résiduelle respectivement. Comme on le sait, une partie importante de cette interaction est due aux corrélations d'appariement de l'interaction nucléon-nucléon. Dans le présent travail nous supposons que cette force ne s'exerce qu'entre nucléons occupant des états $\mid \nu t >$ et $\mid \tilde{\nu} t' >$ renversés l'un de l'autre par rapport au sens du temps. Rappelons brièvement les propriétés [58] de l'opérateur renversement du sens du temps $\mathbf{T}$. Ce dernier est défini par :

$$\mathbf{T} = \mathcal{R}\mathbf{K} = e^{-i\pi J_y}\mathbf{K} \qquad \text{(en unité } \hbar) \tag{1.4}$$

où $\mathcal{R}$ et $\mathbf{K}$ sont respectivement l'opérateur de rotation d'un angle π autour de l'axe Oy et l'opérateur de conjugaison complexe attaché à la représentation. L'opérateur $\mathbf{T}$ est antiunitaire ; il est à la fois antilinéaire car il transforme les fonctions d'ondes et les matrices de la représentation en leurs complexes conjugués et son inverse est égal à son propre adjoint :

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^\dagger \tag{1.5}$$

Dans le cas d'un noyau sphérique où l'état $\mid \nu >$ est entièrement caractérisé par les nombres quantiques habituels $n_\nu, l_\nu, j_\nu, m_\nu$, soit $\mid \nu > = \mid n_\nu l_\nu j_\nu m_\nu >$, son état renversé par rapport au temps s'écrit :

$$\mid \tilde{\nu} > = \mathbf{T} \mid \nu > = (-1)^{(j_\nu - m_\nu)} \mid n_\nu l_\nu j_\nu - m_\nu > \tag{1.6}$$

Dans le cas d'un noyau déformé, l'état $\mid \nu >$ peut toujours être développé sur la base des états $\mid n_\nu l_\nu j_\nu m_\nu >$, soit :

$$\mid \nu >= \sum_{n_\nu l_\nu j_\nu m_\nu} c^{\nu}_{nljm} \mid n_\nu l_\nu j_\nu m_\nu > \tag{1.7}$$

et dont le renversé par rapport au temps est :

$$\mid \tilde{\nu} >= \sum_{n_\nu l_\nu j_\nu m_\nu} \overline{c^{\nu}_{nljm}} \, (-1)^{(j_\nu - m_\nu)} \mid n_\nu l_\nu j_\nu - m_\nu > \tag{1.8}$$

où $\overline{c^{\nu}_{nljm}}$ désigne le complexe conjugué de c^{ν}_{nljm}.
Les relations (1.5), (1.6) et (1.8) conduisent à :

$$\mathbf{T}^2 = -\mathbf{1} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{T}^\dagger = -\mathbf{T} \tag{1.9}$$

Dans le formalisme du spin isotopique [30–32], l'appariement des nucléons existe pour $T = 0$ (appariement isoscalaire) et $T = 1$ (appariement isovectoriel). Le cas $(T = 0)$ décrit uniquement l'appariement neutron-proton alors que le cas $(T = 1)$ contient les deux types d'appariement : l'appariement entre particules identiques neutron-neutron (n-n) et proton-proton (p-p) et l'appariement neutron-proton (n-p). Les états $\mid \nu t, \tilde{\nu} t' >$ renversés et occupés par une paire de nucléons appariés sont caractérisés par les opérateurs de création de paires suivants :
pour $T = 1$:
$a^\dagger_{\nu p} a^\dagger_{\tilde{\nu} p}$ est l'opérateur de création d'une paire de protons appariés.
$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(a^\dagger_{\nu p} a^\dagger_{\tilde{\nu} n} + a^\dagger_{\nu n} a^\dagger_{\tilde{\nu} p} \right)$ est l'opérateur de création d'une paire proton-neutron appariés.
$a^\dagger_{\nu n} a^\dagger_{\tilde{\nu} n}$ est l'opérateur de création d'une paire de neutrons appariés.
pour $T = 0$:
$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(a^\dagger_{\nu n} a^\dagger_{\tilde{\nu} p} - a^\dagger_{\nu p} a^\dagger_{\tilde{\nu} n} \right)$ est l'opérateur de création d'une paire proton-neutron appariés.

En admettant que la force d'appariement est indépendante des états occupés par les paires de nucléons, la forme générale de l'interaction résiduelle d'appariement est, en seconde quantification, donnée par :

$$
\begin{aligned}
V = & -G_{pp}^{T=1} \sum_{\nu,\mu>0} a_{\nu p}^{\dagger} a_{\tilde{\nu} p}^{\dagger} a_{\tilde{\mu} p} a_{\mu p} - G_{nn}^{T=1} \sum_{\nu,\mu>0} a_{\nu n}^{\dagger} a_{\tilde{\nu} n}^{\dagger} a_{\tilde{\mu} n} a_{\mu n} \\
& - \frac{1}{2} G_{pn}^{T=1} \sum_{\nu,\mu>0} \left(a_{\nu p}^{\dagger} a_{\tilde{\nu} n}^{\dagger} + a_{\nu n}^{\dagger} a_{\tilde{\nu} p}^{\dagger} \right) \left(a_{\tilde{\mu} n} a_{\mu p} + a_{\tilde{\mu} p} a_{\mu n} \right) \\
& - \frac{1}{2} G_{pn}^{T=0} \sum_{\nu,\mu>0} \left(a_{\nu n}^{\dagger} a_{\tilde{\nu} p}^{\dagger} - a_{\nu p}^{\dagger} a_{\tilde{\nu} n}^{\dagger} \right) \left(a_{\tilde{\mu} p} a_{\mu n} - a_{\tilde{\mu} n} a_{\mu p} \right) \qquad (1.10)
\end{aligned}
$$

où les constantes réelles $G_{pp}^{T=1}$, $G_{nn}^{T=1}$, $G_{pn}^{T=1}$ et $G_{pn}^{T=0}$ caractérisent l'intensité de la force d'appariement. Le signe (-) indique que cette force est attractive.

L'expression (1.10) peut se mettre sous la forme compacte suivante :

$$
\begin{aligned}
V = & -\frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'}^{T=1} \sum_{\nu,\mu>0} \left(a_{\nu t}^{\dagger} a_{\tilde{\nu} t'}^{\dagger} a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} + a_{\nu t}^{\dagger} a_{\tilde{\nu} t'}^{\dagger} a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} \right) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'}^{T=0} \sum_{\nu,\mu>0} \left(a_{\nu t}^{\dagger} a_{\tilde{\nu} t'}^{\dagger} a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} - a_{\nu t}^{\dagger} a_{\tilde{\nu} t'}^{\dagger} a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} \right) \qquad (1.11)
\end{aligned}
$$

L'expression de l'hamitonien devient alors :

$$
\begin{aligned}
H = \sum_{\nu>0,t} \varepsilon_{\nu t} \left(a_{\nu t}^{\dagger} a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^{\dagger} a_{\tilde{\nu} t} \right) & - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'}^{T=1} \sum_{\nu,\mu>0} \left(a_{\nu t}^{\dagger} a_{\tilde{\nu} t'}^{\dagger} a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} + a_{\nu t}^{\dagger} a_{\tilde{\nu} t'}^{\dagger} a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} \right) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'}^{T=0} \sum_{\nu,\mu>0} \left(a_{\nu t}^{\dagger} a_{\tilde{\nu} t'}^{\dagger} a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} - a_{\nu t}^{\dagger} a_{\tilde{\nu} t'}^{\dagger} a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} \right) \quad (1.12)
\end{aligned}
$$

Dans ce travail nous nous intéressons à l'étude de la contribution de l'appariement neutron-proton dans le cas isovectoriel ($T = 1$). On notera, pour simplifier, par $G_{tt'}^{T=1} = G_{tt'}$ l'intensité de la force de ce type d'appariement.

L'hamiltonien de départ est alors le suivant :

$$
H = \sum_{\nu>0,t} \varepsilon_{\nu t} \left(a_{\nu t}^{\dagger} a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^{\dagger} a_{\tilde{\nu} t} \right) - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu,\mu>0} \left(a_{\nu t}^{\dagger} a_{\tilde{\nu} t'}^{\dagger} a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} + a_{\nu t}^{\dagger} a_{\tilde{\nu} t'}^{\dagger} a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} \right) \quad (1.13)
$$

Il s'agit à présent de trouver les fonctions propres de cet hamiltonien qui soient en même temps fonctions propres de l'opérateur nombre de particules $\hat{N}$. Ce problème n'admet pas en général de solution exacte, il est alors résolu approximativement en imposant la conservation en moyenne à la fois du nombre de protons et du nombre de neutrons [59]. La conservation de ces deux grandeurs se traduira par l'introduction de deux multiplicateurs de Lagrange λ_p, λ_n appelés également potentiels chimiques ou énergies des niveaux de Fermi pour les systèmes protons et neutrons respectivement. Ils représentent l'accroissement de l'énergie du système (protons ou neutrons) lorsque le nombre de particules (protons ou neutrons) augmente d'une unité [60].

On diagonalise alors l'hamiltonien auxiliaire H' :

$$H' = H - \lambda_p \hat{N}_p - \lambda_n \hat{N}_n \tag{1.14}$$

où $\hat{N}_p$ et $\hat{N}_n$ sont respectivement les opérateurs nombre de protons et de neutrons ; et sont définis par :

$$\begin{aligned} \hat{N}_p &= \sum_{\nu>0} \left(a^\dagger_{\nu p} a_{\nu p} + a^\dagger_{\tilde{\nu} p} a_{\tilde{\nu} p} \right) \\ \hat{N}_n &= \sum_{\nu>0} \left(a^\dagger_{\nu n} a_{\nu n} + a^\dagger_{\tilde{\nu} n} a_{\tilde{\nu} n} \right) \end{aligned} \tag{1.15}$$

Les équations (1.15) peuvent être rassemblées en une seule équation :

$$\hat{N}_t = \sum_{\nu>0} \left(a^\dagger_{\nu t} a_{\nu t} + a^\dagger_{\tilde{\nu} t} a_{\tilde{\nu} t} \right) \qquad t = n, p \tag{1.16}$$

Une conséquence directe de la conservation du nombre de particules pour les deux types de nucléons est la conservation de la troisième composante du spin isotopique T_z définie [30] comme :

$$T_z = \sum_{i=1}^{A} t_i \qquad \text{avec } t_i = \begin{cases} \frac{-1}{2} & \text{pour les protons} \\ \frac{1}{2} & \text{pour les neutrons} \end{cases} \tag{1.17}$$

ainsi,

$$\hat{T}_z \Psi(1,2,....,A) = \left\{ \underbrace{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.....-\frac{1}{2}}_{Z \text{ fois}} \underbrace{+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.....+\frac{1}{2}}_{N \text{ fois}} \right\} \Psi(1,2,...,A)$$
$$= \frac{1}{2}(N-Z)\Psi(1,2,....,A) \tag{1.18}$$

où $\Psi(1,2,....,A)$ représente la fonction d'onde des noyaux à A nucléons.
En utilisant l'équation (1.16) l'hamiltonien auxiliaire :

$$H' = H - \sum_t \lambda_t \hat{N}_t \tag{1.19}$$

s'écrit explicitement sous la forme :

$$H' = \sum_{\nu>0,t} (\varepsilon_{\nu t} - \lambda_t)\left(a^\dagger_{\nu t} a_{\nu t} + a^\dagger_{\tilde{\nu} t} a_{\tilde{\nu} t}\right) - \frac{1}{2}\sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu,\mu>0} \left(a^\dagger_{\nu t} a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} + a^\dagger_{\nu t} a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'}\right) \tag{1.20}$$

On remarque qu'en négligeant l'appariement neutron-proton, c'est à dire en posant $t = t'$, on retrouve l'hamiltonien de la théorie BCS pour des particules identiques [30–32].
Afin de diagonaliser approximativement l'hamiltonien auxiliaire H', nous allons utiliser la méthode de linéarisation formulée par Pal [53], Anderson [54] et Valatin [55].

1.2 Principe de la méthode de linéarisation

La méthode de linéarisation [33] est basée sur l'énoncé suivant :
Soit H un hamiltonien et $a^\dagger$ un opérateur qui satisfait à la relation linéaire suivante :

$$\left[H, a^\dagger\right] = \omega a^\dagger \tag{1.21}$$

où ω est un réel positif.

Si $\mid \Psi >$ est un état propre de H correspondant à la valeur propre E, il existe alors un autre état $\mid \Psi' >$ état propre de H correspondant à la valeur propre E' tel que :

$$\begin{cases} \mid \Psi' >= a^{\dagger} \mid \Psi > \\ E' = E + \omega \end{cases} \tag{1.22}$$

De même et puisque $[H, a] = -\omega a$, il existe en général un troisième état $\mid \Psi^{''} >$, aussi état propre de H correspondant à la valeur propre E'', tel que :

$$\begin{cases} \mid \Psi^{''} >= a \mid \Psi > \\ E'' = E - \omega \end{cases} \tag{1.23}$$

On note que dans le cas où $\mid \Psi >$ est l'état fondamental de H , $\mid \Psi^{''} >= 0$

Plus généralement soient $a_i^{\dagger}$ $(i = 1, ..n)$, un ensemble de n opérateurs, tels que :

$$\left[H, a_i^{\dagger}\right] = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} a_j^{\dagger} \qquad i = 1, ...n \tag{1.24}$$

où les P_{ij} sont des scalaires donnés.

On peut alors trouver un ensemble d'opérateurs $A_k^{\dagger}$ $(k = 1, ...n)$ tels que :

$$\left[H, A_k^{\dagger}\right] = \omega_k A_k^{\dagger} \qquad k = 1, ...n \tag{1.25}$$

Ces opérateurs sont combinaisons linéaires des $a_i^{\dagger}$:

$$A_k^{\dagger} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k a_i^{\dagger} \qquad k = 1, ...n \tag{1.26}$$

En utilisant les relations (1.24) et (1.26), le commutateur $\left[H, A_k^\dagger\right]$ devient :

$$\left[H, A_k^\dagger\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \sum_{j=1}^{n} P_{ij} a_j^\dagger \qquad k = 1, ...n \tag{1.27}$$

D'autre part, en utilisant les expressions (1.25) et (1.26), on aura :

$$\left[H, A_k^\dagger\right] = \omega_k \sum_{i=1}^{n} x_i^k a_i^\dagger \qquad k = 1, ...n \tag{1.28}$$

De (1.27) et (1.28), on obtient :

$$\sum_{ij=1}^{n} \left(P_{ij} - \omega_k \delta_{ij}\right) x_i^k a_j^\dagger = 0 \tag{1.29}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(P_{ij} - \omega_k \delta_{ij}\right) x_i^k = 0 \qquad \forall j = 1, n \tag{1.30}$$

Ce qui devient en notation matricielle :

$$\left(P - \omega_k I\right) X_k = 0 \tag{1.31}$$

Les ω_k sont les valeurs propres de la matrice $P = (P_{ij})$ et $X_k = \left(x_i^k\right)$, $i = 1, ...n$ sont les vecteurs propres correspondants. La matrice P est dite matrice d'excitation de la méthode de linéarisation.

Si $\mid \Psi >$ est l'état fondamental, alors $A_k^\dagger \mid \Psi >$ est un état excité d'énergie $E_k = E_0 + \omega_k$ et $A_k \mid \Psi >= 0$.

1.3 Application de la méthode

La méthode précédente nécessite le calcul des commutateurs suivants :

$$\left[H', a^{\dagger}_{\nu r}\right] = \left(\varepsilon_{\nu r} - \lambda_r\right) a^{\dagger}_{\nu r} - \sum_t G_{rt} \sum_{\mu>0} \left(a^{\dagger}_{\mu r} a^{\dagger}_{\tilde{\mu} t} + a^{\dagger}_{\mu t} a^{\dagger}_{\tilde{\mu} r}\right) a_{\tilde{\nu} t} \tag{1.32}$$

$$\left[H', a_{\tilde{\nu} r}\right] = -\left(\varepsilon_{\nu r} - \lambda_r\right) a_{\tilde{\nu} r} - \sum_t G_{rt} \sum_{\mu>0} a^{\dagger}_{\nu t} \left(a_{\tilde{\mu} r} a_{\mu t} + a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu r}\right) \tag{1.33}$$

Le calcul détaillé de ces différents commutateurs est donné en Annexe A.
Les équations (1.32) et (1.33) n'étant pas linéaires en fonction des opérateurs a et $a^{\dagger}$, on les remplace par des expressions approximatives linéaires par rapport à ces opérateurs. Pour cela, on utilise le théorème de Wick. Les détails de ce calcul se trouvent en Annexe B.
On obtient donc :

$$\left[H', a^{\dagger}_{\nu r}\right] = \tilde{\varepsilon}_{\nu r} a^{\dagger}_{\nu r} - \sum_t G_{rt} \sum_{\mu>0} \left(\overline{a^{\dagger}_{\mu r} a^{\dagger}_{\tilde{\mu} t}} + \overline{a^{\dagger}_{\mu t} a^{\dagger}_{\tilde{\mu} r}}\right) a_{\tilde{\nu} t} \tag{1.34}$$

$$\left[H', a_{\tilde{\nu} r}\right] = -\tilde{\varepsilon}_{\nu r} a_{\tilde{\nu} r} - \sum_t G_{rt} \sum_{\mu>0} a^{\dagger}_{\nu t} \left(\overline{a_{\tilde{\mu} r} a_{\mu t}} + \overline{a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu r}}\right) \tag{1.35}$$

où l'on a posé :

$$\tilde{\varepsilon}_{\nu r} = \varepsilon_{\nu r} - \lambda_r - \sum_t G_{tr} \left(1 + \delta_{tr}\right) \overline{a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t} a_{\tilde{\nu} t}} \tag{1.36}$$

Ces expressions deviennent :

$$\left[H', a^{\dagger}_{\nu r}\right] = \sum_t N_{rt}\ a^{\dagger}_{\nu t} - \sum_t \Delta_{rt}\ a_{\tilde{\nu} t} \tag{1.37}$$

$$\left[H', a_{\tilde{\nu} r}\right] = -\sum_t N_{rt}\ a_{\tilde{\nu} t} - \sum_t \Delta_{rt}\ a^{\dagger}_{\nu t} \tag{1.38}$$

où l'on a noté par :

$$\Delta_{rt} = \Delta_{tr} = G_{rt} \sum_{\nu>0} \left(\overline{a^{\dagger}_{\nu r} a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t}} + \overline{a^{\dagger}_{\nu t} a^{\dagger}_{\tilde{\nu} r}}\right) \tag{1.39}$$

$$N_{rt} = \tilde{\varepsilon}_{\nu t} \delta_{rt} \tag{1.40}$$

Les matrices N et Δ définies par :

$$N = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{\nu p} & 0 \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_{\nu n} \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{pp} & \Delta_{pn} \\ \Delta_{np} & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.41}$$

sont deux matrices 2×2 dans l'espace d'isospin. Elles sont symétriques et réelles. Les éléments de matrice de N représentent les énergies des particules protons et neutrons et les éléments de matrice de Δ représentent les effets dus à la force d'appariement.
Les expressions (1.37) et (1.38) s'écrivent suivant la nature du nucléon (t=n, p) :

$$\begin{aligned} \left[H', a^{\dagger}_{\nu p}\right] &= \tilde{\varepsilon}_{\nu p} a^{\dagger}_{\nu p} - \Delta_{pp} a_{\tilde{\nu} p} - \Delta_{np} a_{\tilde{\nu} n} \\ \left[H', a^{\dagger}_{\nu n}\right] &= \tilde{\varepsilon}_{\nu n} a^{\dagger}_{\nu n} - \Delta_{np} a_{\tilde{\nu} p} - \Delta_{nn} a_{\tilde{\nu} n} \\ \left[H', a_{\tilde{\nu} p}\right] &= -\Delta_{pp} a^{\dagger}_{\nu p} - \Delta_{np} a^{\dagger}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu p} a_{\tilde{\nu} p} \\ \left[H', a_{\tilde{\nu} n}\right] &= -\Delta_{np} a^{\dagger}_{\nu p} - \Delta_{nn} a^{\dagger}_{\nu n} - \tilde{\varepsilon}_{\nu n} a_{\tilde{\nu} n} \end{aligned} \tag{1.42}$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \left[H', a^{\dagger}_{\nu p}\right] \\ \left[H', a^{\dagger}_{\nu n}\right] \\ \left[H', a_{\tilde{\nu} p}\right] \\ \left[H', a_{\tilde{\nu} n}\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{\nu p} & 0 & -\Delta_{pp} & -\Delta_{np} \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_{\nu n} & -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} \\ -\Delta_{pp} & -\Delta_{np} & -\tilde{\varepsilon}_{\nu p} & 0 \\ -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} & 0 & -\tilde{\varepsilon}_{\nu n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{\dagger}_{\nu p} \\ a^{\dagger}_{\nu n} \\ a_{\tilde{\nu} p} \\ a_{\tilde{\nu} n} \end{pmatrix} \tag{1.43}$$

où l'on a tenu compte du fait que $\Delta_{np} = \Delta_{pn}$.

Afin de trouver les énergies des quasi-particules et les vecteurs propres correspondants définissant la transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin, on doit diagonaliser la matrice d'excitation.

1.4 Diagonalisation de la matrice d'excitation

D'après l'équation (1.43) et la définition (1.24) , la matrice d'excitation de la méthode de linéarisation est :

$$A_\nu = \begin{pmatrix} N & -\Delta \\ -\Delta & -N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{\nu p} & 0 & -\Delta_{pp} & -\Delta_{np} \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_{\nu n} & -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} \\ -\Delta_{pp} & -\Delta_{np} & -\tilde{\varepsilon}_{\nu p} & 0 \\ -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} & 0 & -\tilde{\varepsilon}_{\nu n} \end{pmatrix} \tag{1.44}$$

Vu la forme de la première ligne et la deuxième ligne de la matrice A_ν, on en déduit que si (X, Y) est vecteur propre de la matrice A_ν correspondant à la valeur propre E_ν, alors $(-Y, X)$ est aussi vecteur propre de la matrice A_ν correspondant à la valeur propre $-E_\nu$.

En effet, si : $\begin{pmatrix} N & -\Delta \\ -\Delta & -N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} NX - \Delta Y = EX \\ -\Delta X - NY = EY \end{cases}$
ou encore :

$$\begin{cases} N(-Y) - \Delta(X) = -E(-Y) \\ -\Delta(-Y) - N(X) = -E(X) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} N & -\Delta \\ -\Delta & -N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Y \\ X \end{pmatrix} = -E \begin{pmatrix} -Y \\ X \end{pmatrix}$$

Cette remarque [33] nous facilite la recherche des vecteurs propres. Par conséquent, on ne calculera qu'un couple de vecteurs propres, l'autre couple s'en déduit immédiatement.

1.4.1 Valeurs propres-Énergies des quasi-particules.

Le calcul des valeurs propres de la matrice A_ν, en annulant son polynôme caractéristique $\det(A_\nu - \lambda I)$, conduit à des expressions assez complexes, c'est pourquoi il est préférable de passer par le calcul de la forme réduite de A_ν [33].
On considère alors A_ν^2 telle que : $A_\nu^2 = \begin{pmatrix} N^2 + \Delta^2 & -N\Delta + \Delta N \\ -\Delta N + N\Delta & \Delta^2 + N^2 \end{pmatrix}$

dont la forme diagonale est :

$$\begin{pmatrix} N^2+\Delta^2+i\left(\Delta N-N\Delta\right) & 0 \\ 0 & N^2+\Delta^2-i\left(\Delta N-N\Delta\right) \end{pmatrix} \tag{1.45}$$

Comme les deux matrices qui apparaissent sur la diagonale s'obtiennent l'une de l'autre par conjugaison complexe, elles ont alors les mêmes valeurs propres réelles qui sont aussi valeurs propres réelles de la matrice A_ν^2. Les valeurs propres de A_ν sont les racines carrées positives des valeurs propres de A_ν^2. Les racines carrées négatives étant non physiques elles sont rejetées [30, 33]. Nous avons :

$$N^2+\Delta^2+i\left(\Delta N-N\Delta\right)= \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{\nu p}^2+\Delta_{pp}^2+\Delta_{pn}^2 & \Delta_{pn}\left(\Delta_{pp}+\Delta_{nn}\right)+i\Delta_{pn}\left(\tilde{\varepsilon}_{\nu n}-\tilde{\varepsilon}_{\nu p}\right) \\ \Delta_{pn}\left(\Delta_{pp}+\Delta_{nn}\right)+i\Delta_{pn}\left(\tilde{\varepsilon}_{\nu p}-\tilde{\varepsilon}_{\nu n}\right) & \tilde{\varepsilon}_{\nu n}^2+\Delta_{nn}^2+\Delta_{pn}^2 \end{pmatrix}$$

ses valeurs propres sont données par :

$$E'_{\nu 1,2}=\frac{1}{2}\left\{\left(\tilde{\varepsilon}_{\nu p}^2+\tilde{\varepsilon}_{\nu n}^2+\Delta_{pp}^2+\Delta_{nn}^2+2\Delta_{pn}^2\right)\pm \sqrt{\left(\tilde{\varepsilon}_{\nu p}^2-\tilde{\varepsilon}_{\nu n}^2+\Delta_{pp}^2-\Delta_{nn}^2\right)^2+4\Delta_{pn}^2\left(\Delta_{pp}+\Delta_{nn}\right)^2+4\Delta_{pn}^2\left(\tilde{\varepsilon}_{\nu n}-\tilde{\varepsilon}_{\nu p}\right)^2}\right\} \tag{1.46}$$

Les valeurs propres de la matrice A_ν sont alors :

$$E_{\upsilon 1,2}=\sqrt{\frac{1}{2}}\left\{\left(\tilde{\varepsilon}_{\nu p}^2+\tilde{\varepsilon}_{\nu n}^2+\Delta_{pp}^2+\Delta_{nn}^2+2\Delta_{pn}^2\right)\pm \sqrt{\left(\tilde{\varepsilon}_{\nu p}^2-\tilde{\varepsilon}_{\nu n}^2+\Delta_{pp}^2-\Delta_{nn}^2\right)^2+4\Delta_{pn}^2\left(\Delta_{pp}+\Delta_{nn}\right)^2+4\Delta_{pn}^2\left(\tilde{\varepsilon}_{\nu n}-\tilde{\varepsilon}_{\nu p}\right)^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{1.47}$$

On obtient ainsi deux types de quasi-particules. Nous remarquons qu'en négligeant l'interaction (n-p), en posant $\Delta_{pn}=0$ dans l'expression de $E_{\nu 1,2}$, on retrouve les énergies des quasi-particules relatives à la force d'appariement entre particules identiques [30–32]. En effet, $E_{\nu 1}=\left(\tilde{\varepsilon}_{\nu p}^2+\Delta_{pp}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est l'énergie des quasi-particules de type 1 qui correspondent aux protons et $E_{\nu 2}=\left(\tilde{\varepsilon}_{\nu n}^2+\Delta_{nn}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est l'énergie des quasi-particules de type 2 qui correspondent aux neutrons.

1.5 Vecteurs propres-Transformation quasi-particule

Nous allons expliciter les vecteurs propres de la matrice A_ν correspondant aux valeurs propres $E_{\nu 1,2}$.

Soient : ${}^t X_\nu^+ = \begin{pmatrix} u_{\nu 1p}, & u_{\nu 1n}, & v_{\nu 1p}, & v_{\nu 1n} \end{pmatrix}$ et ${}^t X_\nu^- = \begin{pmatrix} u_{\nu 2p}, & u_{\nu 2n}, & v_{\nu 2p}, & v_{\nu 2n} \end{pmatrix}$ les vecteurs propres associés aux valeurs propres $E_{\nu 1}$ et $E_{\nu 2}$ respectivement.

Pour X_ν^+ on a :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{\nu p} & 0 & -\Delta_{pp} & -\Delta_{np} \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_{\nu n} & -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} \\ -\Delta_{pp} & -\Delta_{np} & -\tilde{\varepsilon}_{\nu p} & 0 \\ -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} & 0 & -\tilde{\varepsilon}_{\nu n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\nu 1p} \\ u_{\nu 1n} \\ v_{\nu 1p} \\ v_{\nu 1n} \end{pmatrix} = E_{\nu 1} \begin{pmatrix} u_{\nu 1p} \\ u_{\nu 1n} \\ v_{\nu 1p} \\ v_{\nu 1n} \end{pmatrix} \tag{1.48}$$

et on a une équation similaire pour X_ν^-. Ces deux vecteurs sont normés à l'unité : $\| X_\nu^+ \|^2 = \| X_\nu^- \|^2 = 1$ et sont orthogonaux : $X_\nu^+ X_\nu^- = 0$. La relation de normalisation donne :

$$u_{\nu 1p}^2 + u_{\nu 1n}^2 + v_{\nu 1p}^2 + v_{\nu 1n}^2 = u_{\nu 2p}^2 + u_{\nu 2n}^2 + v_{\nu 2p}^2 + v_{\nu 2n}^2 = 1 \tag{1.49}$$

et l'orthogonalité conduit à :

$$u_{\nu 1p} u_{\nu 2p} + u_{\nu 1n} u_{\nu 2n} + v_{\nu 1p} v_{\nu 2p} + v_{\nu 1n} v_{\nu 2n} = 0 \tag{1.50}$$

On obtient ainsi un système homogène dont la solution peut être mise sous forme de déterminants d'ordre 3 : $T_{\nu i}$ $i = 1, ...4$ comme suit [33, 61] :

$$u_{\nu 1p} = \frac{T_{\nu 1}}{T_\nu} \quad , \quad u_{\nu 1n} = \frac{-T_{\nu 2}}{T_\nu} \quad , \quad v_{\nu 1p} = \frac{T_{\nu 3}}{T_\nu} \quad , \quad v_{\nu 1n} = \frac{-T_{\nu 4}}{T_\nu} \tag{1.51}$$

où :

$$T_{\nu 1} = \begin{vmatrix} (\tilde{\varepsilon}_{\nu n} - E_{\nu 1}) & -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} \\ -\Delta_{np} & -(\tilde{\varepsilon}_{\nu p} + E_{\nu 1}) & 0 \\ -\Delta_{nn} & 0 & -(\tilde{\varepsilon}_{\nu n} + E_{\nu 1}) \end{vmatrix} \tag{1.52}$$

$$T_{\nu 2}=\begin{vmatrix} 0 & -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} \\ -\Delta_{pp} & -\left(\tilde{\varepsilon}_{\nu p}+E_{\nu 1}\right) & 0 \\ -\Delta_{np} & 0 & -\left(\tilde{\varepsilon}_{\nu n}+E_{\nu 1}\right) \end{vmatrix} \tag{1.53}$$

$$T_{\nu 3}=\begin{vmatrix} 0 & \left(\tilde{\varepsilon}_{\nu n}-E_{\nu 1}\right) & -\Delta_{nn} \\ -\Delta_{pp} & -\Delta_{np} & 0 \\ -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} & -\left(\tilde{\varepsilon}_{\nu n}+E_{\nu 1}\right) \end{vmatrix} \tag{1.54}$$

$$T_{\nu 4}=\begin{vmatrix} 0 & \left(\tilde{\varepsilon}_{\nu n}-E_{\nu 1}\right) & -\Delta_{np} \\ -\Delta_{pp} & -\Delta_{np} & -\left(\tilde{\varepsilon}_{\nu p}+E_{\nu 1}\right) \\ -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} & 0 \end{vmatrix} \tag{1.55}$$

et

$$T_{\nu}=\sqrt{T_{\nu 1}^2+T_{\nu 2}^2+T_{\nu 3}^2+T_{\nu 4}^2} \tag{1.56}$$

En appelant par $T'_{\nu 1}$, $T'_{\nu 2}$, $T'_{\nu 3}$, $T'_{\nu 4}$ et T'_{ν} les expressions similaires à $T_{\nu 1}$, $T_{\nu 2}$, $T_{\nu 3}$, $T_{\nu 4}$ et T_{ν} où cette fois on remplace $E_{\nu 1}$ par $E_{\nu 2}$, on obtient :

$$u_{\nu 2p}=\frac{T'_{\nu 1}}{T'_{\nu}} \quad , \quad u_{\nu 2n}=\frac{-T'_{\nu 2}}{T'_{\nu}} \quad , \quad v_{\nu 2p}=\frac{T'_{\nu 3}}{T'_{\nu}} \quad , \quad v_{\nu 2n}=\frac{-T'_{\nu 4}}{T'_{\nu}} \tag{1.57}$$

et

$$T'_{\nu}=\sqrt{T'^2_{\nu 1}+T'^2_{\nu 2}+T'^2_{\nu 3}+T'^2_{\nu 4}} \tag{1.58}$$

On vérifie qu'en négligeant l'interaction neutron-proton, on retrouve les amplitudes de probabilité u_ν et v_ν de la théorie BCS pour un système de particules identiques [30–32]. En effet, pour $\Delta_{np}=0$, l'expression (1.43) devient :

$$\begin{pmatrix} \left[H', a^\dagger_{\nu p}\right] \\ \left[H', a_{\tilde{\nu} p}\right] \\ \left[H', a^\dagger_{\nu n}\right] \\ \left[H', a_{\tilde{\nu} n}\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{\nu p} & -\Delta_{pp} & 0 & 0 \\ -\Delta_{pp} & -\tilde{\varepsilon}_{\nu p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon}_{\nu n} & -\Delta_{nn} \\ 0 & 0 & -\Delta_{nn} & -\tilde{\varepsilon}_{\nu n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\dagger_{\nu p} \\ a_{\tilde{\nu} p} \\ a^\dagger_{\nu n} \\ a_{\tilde{\nu} n} \end{pmatrix} \tag{1.59}$$

On remarque que la matrice d'excitation A_ν se scinde en deux sous-matrices. L'une d'elles caractérise les protons et l'autre caractérise les neutrons.
Aussi, on a :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{\nu p} & -\Delta_{pp} & 0 & 0 \\ -\Delta_{pp} & -\tilde{\varepsilon}_{\nu p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon}_{\nu n} & -\Delta_{nn} \\ 0 & 0 & -\Delta_{nn} & -\tilde{\varepsilon}_{\nu n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\nu 1p} \\ v_{\nu 1p} \\ u_{\nu 1n} \\ v_{\nu 1n} \end{pmatrix} = E_{\nu 1} \begin{pmatrix} u_{\nu 1p} \\ v_{\nu 1p} \\ u_{\nu 1n} \\ v_{\nu 1n} \end{pmatrix} \tag{1.60}$$

Les expressions des différentes amplitudes de probabilité deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\nu 1p}^2 = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{\tilde{\varepsilon}_{\nu p}}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\nu p}^2 + \Delta_{pp}^2}}\right\} \\ v_{\nu 1p}^2 = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_{\nu p}}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\nu p}^2 + \Delta_{pp}^2}}\right\} \\ u_{\nu 1n}^2 = 0 \\ v_{\nu 1n}^2 = 0 \end{array} \right. \tag{1.61}$$

$u_{\nu 1p}^2$ et $v_{\nu 1p}^2$ sont identiques aux amplitudes de probabilité habituelles de BCS pour un système de protons [30–32] ; de même en changeant X_ν^+ par X_ν^- et en résolvant le système (1.60) en tenant compte des relations (1.49) et (1.50) , on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\nu 2p}^2 = 0 \\ v_{\nu 2p}^2 = 0 \\ u_{\nu 2n}^2 = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{\tilde{\varepsilon}_{\nu n}}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\nu n}^2 + \Delta_{nn}^2}}\right\} \\ v_{\nu 2n}^2 = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_{\nu n}}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\nu n}^2 + \Delta_{nn}^2}}\right\} \end{array} \right. \tag{1.62}$$

$u_{\nu 2n}^2$ et $v_{\nu 2n}^2$ correspondent aux amplitudes de probabilité habituelles de BCS pour un système de neutrons [30–32].

Chapitre 2

La représentation quasi-particule

Dans le chapitre précédent, la méthode de linéarisation a été utilisée afin de diagonaliser approximativement l'hamiltonien du système. Ceci a permis, par une simple diagonalisation de la matrice d'excitation, de trouver les valeurs propres qui sont les énergies de quasi-particules et les vecteurs propres correspondants définissant ainsi la transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin. Dans le présent chapitre, cette transformation ainsi que sa transformation inverse seront développées, l'hamiltonien du système sera exprimé dans cette nouvelle représentation dite quasi-particule. L'état vide de quasi-particules appelé état BCS et son énergie seront également établis.

2.1 Transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin

Nous avons déjà fait remarquer précédemment que si (U, V) est vecteur propre de la matrice d'excitation A_ν du chapitre précédent, alors $(-V, U)$ l'est aussi. Dans ce cas, la transformation de quasi-particule s'écrit en notant par $\alpha^\dagger_{\nu\tau}$ et $\alpha_{\tilde{\nu}\tau}$ les opérateurs de création et d'annihilation des quasi-particules :

$$\begin{pmatrix} \alpha^\dagger_{\nu 1} \\ \alpha^\dagger_{\nu 2} \\ \alpha_{\tilde{\nu} 1} \\ \alpha_{\tilde{\nu} 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\nu 1p} & u_{\nu 1n} & v_{\nu 1p} & v_{\nu 1n} \\ u_{\nu 2p} & u_{\nu 2n} & v_{\nu 2p} & v_{\nu 2n} \\ -v_{\nu 1p} & -v_{\nu 1n} & u_{\nu 1p} & u_{\nu 1n} \\ -v_{\nu 2p} & -v_{\nu 2n} & u_{\nu 2p} & u_{\nu 2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\dagger_{\nu p} \\ a^\dagger_{\nu n} \\ a_{\tilde{\nu} p} \\ a_{\tilde{\nu} n} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Cette transformation peut s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\begin{cases} \alpha^\dagger_{\nu\tau} = \sum_t \left(u_{\nu\tau t} a^\dagger_{\nu t} + v_{\nu\tau t} a_{\tilde{\nu} t} \right) \\ \alpha_{\tilde{\nu}\tau} = \sum_t \left(-v_{\nu\tau t} a^\dagger_{\nu t} + u_{\nu\tau t} a_{\tilde{\nu} t} \right) \end{cases} \quad \text{avec } t = p, n \quad \text{et} \quad \tau = 1, 2 \tag{2.2}$$

L'expression (2.2) est la transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin qui devient dans le cas où $\Delta_{np} = 0$:

$$\begin{pmatrix} \alpha^\dagger_{\nu 1} \\ \alpha_{\tilde{\nu} 1} \\ \alpha^\dagger_{\nu 2} \\ \alpha_{\tilde{\nu} 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\nu 1p} & v_{\nu 1p} & 0 & 0 \\ -v_{\nu 1p} & u_{\nu 1p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{\nu 2n} & v_{\nu 2n} \\ 0 & 0 & -v_{\nu 2n} & u_{\nu 2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\dagger_{\nu p} \\ a_{\tilde{\nu} p} \\ a^\dagger_{\nu n} \\ a_{\tilde{\nu} n} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Ceci nous amène à écrire :

$$\begin{pmatrix} \alpha^\dagger_{\nu 1} \\ \alpha_{\tilde{\nu} 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\nu 1p} & v_{\nu 1p} \\ -v_{\nu 1p} & u_{\nu 1p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\dagger_{\nu p} \\ a_{\tilde{\nu} p} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

qui est la transformation de Bogoliubov-Valatin usuelle [30–32] pour un système de protons. On voit bien que les quasi-particules de type 1 correspondent aux protons. On a de même :

$$\begin{pmatrix} \alpha^\dagger_{\nu 2} \\ \alpha_{\tilde{\nu} 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\nu 2n} & v_{\nu 2n} \\ -v_{\nu 2n} & u_{\nu 2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\dagger_{\nu n} \\ a_{\tilde{\nu} n} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

qui est la transformation de Bogoliubov-Valatin usuelle pour un système de neutrons, nous constatons que les quasi-particules de type 2 correspondent aux neutrons.

Les nouveaux opérateurs $\alpha^{\dagger}_{\nu\tau}$ et $\alpha_{\tilde{\nu}\tau}$ obéissent aux relations d'anti-commutation des fermions à savoir :

$$\begin{aligned} &\left\{\alpha_{\nu\tau}, \quad \alpha^{\dagger}_{\mu\tau'}\right\} = \delta_{\nu\mu}\delta_{\tau\tau'} \\ &\left\{\alpha_{\nu\tau}, \quad \alpha_{\mu\tau'}\right\} = \left\{\alpha^{\dagger}_{\nu\tau}, \quad \alpha^{\dagger}_{\mu\tau'}\right\} = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

En utilisant les relations (1.3), (2.2) et (2.6) on obtient la relation suivante :

$$\sum_t \left(u_{\nu\tau t}u_{\nu\tau' t} + v_{\nu\tau t}v_{\nu\tau' t}\right) = \delta_{\tau\tau'} \tag{2.7}$$

On vérifie bien que pour $\tau \neq \tau'$, on obtient la relation d'orthogonalité donnée par l'équation (1.50). L'expression (2.7) s'écrit aussi :

$$\sum_t \left(u^2_{\nu\tau t} + v^2_{\nu\tau t}\right) = 1 \qquad , \qquad \tau = 1, 2 \tag{2.8}$$

Cette expression assure l'unitarité de la transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin. En annulant l'appariement neutron-proton $(\Delta_{np} = 0)$, la relation (2.8) devient :

$$u^2_{\nu 1p} + v^2_{\nu 1p} = 1 \tag{2.9}$$

qui est la relation qui assure l'unitarité de la transformation de Bogoliubov-Valatin pour un système de protons [30–32]. On a de même pour les neutrons :

$$u^2_{\nu 2n} + v^2_{\nu 2n} = 1 \tag{2.10}$$

2.2 Transformation généralisée inverse de Bogoliubov-Valatin

En partant du système (2.2) et en prenant en considération la relation (2.8) ; les opérateurs de création et d'annihilation de particules sont donnés par :

$$\begin{cases} a^{\dagger}_{\nu t} = \sum\limits_{\tau} \left(u_{\nu\tau t} \alpha^{\dagger}_{\nu\tau} - v_{\nu\tau t} \alpha_{\tilde{\nu}\tau} \right) \\ a_{\tilde{\nu} t} = \sum\limits_{\tau} \left(v_{\nu\tau t} \alpha^{\dagger}_{\nu\tau} + u_{\nu\tau t} \alpha_{\tilde{\nu}\tau} \right) \end{cases} \tag{2.11}$$

De même, en utilisant les relations (1.3), (2.11) et (2.6) on obtient :

$$\sum_{\tau} \left(u_{\nu\tau t} u_{\nu\tau t'} + v_{\nu\tau t} v_{\nu\tau t'} \right) = \delta_{tt'} \tag{2.12}$$

Soit,

$$\sum_{\tau} \left(u^2_{\nu\tau t} + v^2_{\nu\tau t} \right) = 1 \qquad , \qquad t = n, p \tag{2.13}$$

Cette dernière expression assure l'unitarité de la transformation généralisée inverse de Bogoliubov-Valatin. Les expressions (2.8) et (2.13) conduisent à :

$$\begin{cases} u^2_{\nu 1n} + v^2_{\nu 1n} = u^2_{\nu 2p} + v^2_{\nu 2p} \\ u^2_{\nu 1p} + v^2_{\nu 1p} = u^2_{\nu 2n} + v^2_{\nu 2n} \end{cases} \tag{2.14}$$

2.3 L'état BCS

L'état BCS est le vide de quasi-particules. Il est obtenu du vrai vide de particules $|0\rangle$ en éliminant de ce dernier toutes les quasi-particules ; soit :

$$|BCS\rangle = K \prod_{\nu>0} \alpha_{\nu 1} \alpha_{\tilde{\nu} 1} \alpha_{\nu 2} \alpha_{\tilde{\nu} 2} |0\rangle \tag{2.15}$$

En se servant de la transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin et des relations d'anti-commutation (1.3), l'expression (2.15) devient :

$$|BCS\rangle = K\prod_{\nu>0}\left\{c_1^\nu a^\dagger_{\tilde{\nu}p}a^\dagger_{\nu p}a^\dagger_{\tilde{\nu}n}a^\dagger_{\nu n} + c_p^\nu a^\dagger_{\tilde{\nu}p}a^\dagger_{\nu p} + c_n^\nu a^\dagger_{\tilde{\nu}n}a^\dagger_{\nu n} + c_4^\nu\left(a^\dagger_{\tilde{\nu}p}a^\dagger_{\nu n} + a^\dagger_{\tilde{\nu}n}a^\dagger_{\nu p}\right) + c_5^\nu\right\}|0\rangle \tag{2.16}$$

où les coefficients c_1^ν, c_p^ν, c_n^ν, c_4^ν, c_5^ν sont donnés par :

$c_1^\nu = \left(v_{\nu 1p}v_{\nu 2n} - v_{\nu 1n}v_{\nu 2p}\right)^2$

$c_p^\nu = v_{\nu 1p}^2\left(u_{\nu 2p}v_{\nu 2p} + u_{\nu 2n}v_{\nu 2n}\right) + v_{\nu 2p}^2\left(u_{\nu 1n}v_{\nu 1n} - u_{\nu 1p}v_{\nu 1p}\right) - 2u_{\nu 1n}v_{\nu 1p}v_{\nu 2p}v_{\nu 2n}$

$c_n^\nu = v_{\nu 1n}^2\left(u_{\nu 2p}v_{\nu 2p} + u_{\nu 2n}v_{\nu 2n}\right) - v_{\nu 2n}^2\left(u_{\nu 1n}v_{\nu 1n} - u_{\nu 1p}v_{\nu 1p}\right) - 2u_{\nu 1p}v_{\nu 1n}v_{\nu 2p}v_{\nu 2n}$

$c_4^\nu = v_{\nu 1n}v_{\nu 1p}\left(u_{\nu 2p}v_{\nu 2p} + u_{\nu 2n}v_{\nu 2n}\right) - v_{\nu 2n}^2\left(u_{\nu 1n}v_{\nu 1p}\right) - v_{\nu 2p}^2\left(u_{\nu 1p}v_{\nu 1n}\right)$

$c_5^\nu = \left(u_{\nu 1n}v_{\nu 1n} + u_{\nu 1p}v_{\nu 1p}\right)\left(u_{\nu 2p}v_{\nu 2p} + u_{\nu 2n}v_{\nu 2n}\right) - \left(u_{\nu 1n}v_{\nu 2n} + u_{\nu 1p}v_{\nu 2p}\right)^2$

La normalisation à l'unité de cet état conduit à une constante de normalisation K telle que :

$$K = \left[\prod_{\nu>0}\left\{\left(c_1^\nu\right)^2 + \left(c_p^\nu\right)^2 + \left(c_n^\nu\right)^2 + 2\left(c_4^\nu\right)^2 + \left(c_5^\nu\right)^2\right\}\right]^{\frac{-1}{2}} \tag{2.17}$$

Nous constatons d'après l'expression (2.16) que l'état fondamental des noyaux pair-pairs correspond à l'appariement de toutes les particules deux à deux.

2.4 Expression de l'hamiltonien en représentation quasi-particule

Ayant défini une nouvelle représentation de quasi-particules, notre démarche à présent consiste à exprimer l'hamiltonien H à l'aide des nouveaux opérateurs de quasi-particules $\alpha^\dagger$, α. En effet, le théorème de Wick permet d'écrire H sous la forme suivante :

$$H = E_0 + \underbrace{H_{11} + H_{20} + H_{02} + H_{22} + H_{31} + H_{13} + H_{40} + H_{04}}_{H_{ij}} \tag{2.18}$$

où E_0 contient les termes entièrement contractés et H_{ij} est le terme contenant i opérateurs de création $\alpha^\dagger$ et j opérateurs de destruction α.

Sachant que :

$$
\begin{aligned}
a^\dagger_{\nu t} a_{\nu t} &= \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\nu t} a_{\nu t}} + : a^\dagger_{\nu t} a_{\nu t} : \\
a^\dagger_{\tilde{\nu} t} a_{\tilde{\nu} t} &= \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\tilde{\nu} t} a_{\tilde{\nu} t}} + : a^\dagger_{\tilde{\nu} t} a_{\tilde{\nu} t} : \\
a^\dagger_{\nu t} a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} &= \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\nu t} a^\dagger_{\tilde{\nu} t'}} \overset{\sqcap}{a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t}} - \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\nu t} a_{\tilde{\mu} t'}} \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\mu t}} + \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\nu t} a_{\mu t}} \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\tilde{\mu} t'}} \\
&\quad + : a^\dagger_{\nu t} a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} : \overset{\sqcap}{a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t}} + \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\nu t} a^\dagger_{\tilde{\nu} t'}} : a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} : - \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\nu t} a_{\tilde{\mu} t'}} : a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\mu t} : \\
&\quad - : a^\dagger_{\nu t} a_{\tilde{\mu} t'} : \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\mu t}} + \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\nu t} a_{\mu t}} : a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\tilde{\mu} t'} : + : a^\dagger_{\nu t} a_{\mu t} : \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\tilde{\mu} t'}} \\
&\quad + : a^\dagger_{\nu t} a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} : \\
a^\dagger_{\nu t} a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} &= \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\nu t} a^\dagger_{\tilde{\nu} t'}} \overset{\sqcap}{a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'}} - \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\nu t} a_{\tilde{\mu} t}} \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\mu t'}} + \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\nu t} a_{\mu t'}} \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\tilde{\mu} t}} \\
&\quad + : a^\dagger_{\nu t} a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} : \overset{\sqcap}{a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'}} + \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\nu t} a^\dagger_{\tilde{\nu} t'}} : a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} : - \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\nu t} a_{\tilde{\mu} t}} : a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\mu t'} : \\
&\quad - : a^\dagger_{\nu t} a_{\tilde{\mu} t} : \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\mu t'}} + \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\nu t} a_{\mu t'}} : a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\tilde{\mu} t} : + : a^\dagger_{\nu t} a_{\mu t'} : \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\tilde{\mu} t}} \\
&\quad + : a^\dagger_{\nu t} a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} :
\end{aligned}
$$

Les termes entièrement contractés conduisent à :

$$
\begin{aligned}
E_0 = {} & \sum_{\nu>0,t} \varepsilon_{\nu t} \left(\overset{\sqcap}{a^\dagger_{\nu t} a_{\nu t}} + \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\tilde{\nu} t} a_{\tilde{\nu} t}} \right) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu,\mu>0} \Big\{ \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\nu t} a^\dagger_{\tilde{\nu} t'}} \overset{\sqcap}{a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t}} - \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\nu t} a_{\tilde{\mu} t'}} \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\mu t}} + \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\nu t} a_{\mu t}} \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\tilde{\mu} t'}} \\
& \qquad + \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\nu t} a^\dagger_{\tilde{\nu} t'}} \overset{\sqcap}{a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'}} - \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\nu t} a_{\tilde{\mu} t}} \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\mu t'}} + \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\nu t} a_{\mu t'}} \overset{\sqcap}{a^\dagger_{\tilde{\nu} t'} a_{\tilde{\mu} t}} \Big\}
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Les termes à deux opérateurs donnent :

$$
\begin{aligned}
H_{11}+H_{20}+H_{02} = \sum_{\nu>0,t} \varepsilon_{\nu t}\Big(: a^{\dagger}_{\nu t}a_{\nu t} : + : a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t}a_{\tilde{\nu} t} :\Big) - \frac{1}{2}\sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu,\mu>0} \\
\Big\{ : a^{\dagger}_{\nu t}a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t'} : \overbracket{a_{\tilde{\mu} t'}a_{\mu t}} + \overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t'}} : a_{\tilde{\mu} t'}a_{\mu t} : - \overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\tilde{\mu} t'}} : a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t'}a_{\mu t} : \\
- : a^{\dagger}_{\nu t}a_{\tilde{\mu} t'} : \overbracket{a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t'}a_{\mu t}} + \overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\mu t}} : a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t'}a_{\tilde{\mu} t'} : + : a^{\dagger}_{\nu t}a_{\mu t} : \overbracket{a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t'}a_{\tilde{\mu} t'}} \\
+ : a^{\dagger}_{\nu t}a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t'} : \overbracket{a_{\tilde{\mu} t}a_{\mu t'}} + \overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t'}} : a_{\tilde{\mu} t}a_{\mu t'} : - \overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\tilde{\mu} t}} : a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t'}a_{\mu t'} : \\
- : a^{\dagger}_{\nu t}a_{\tilde{\mu} t} : \overbracket{a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t'}a_{\mu t'}} + \overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\mu t'}} : a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t'}a_{\tilde{\mu} t} : + : a^{\dagger}_{\nu t}a_{\mu t'} : \overbracket{a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t'}a_{\tilde{\mu} t}} \Big\}
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

et les termes $H_{22}+H_{13}+H_{31}+H_{40}+H_{04}$ sont contenus dans l'opérateur H_{res} tel que :

$$
H_{res} = -\frac{1}{2}\sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu,\mu>0} \Big\{ : a^{\dagger}_{\nu t}a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t'}a_{\tilde{\mu} t}a_{\mu t'} : + : a^{\dagger}_{\nu t}a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t'}a_{\tilde{\mu} t'}a_{\mu t} : \Big\} \tag{2.21}
$$

2.4.1 Calcul des contractions

On utilise la transformation généralisée inverse de Bogoliubov-Valatin pour calculer les différentes contractions. Tous calculs faits, on trouve :

$$
\begin{cases}
\overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\mu t'}} = \sum_{\tau} v_{\nu\tau t}v_{\nu\tau t'}\delta_{\nu\mu} \quad ; \quad \overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\mu t}} = \sum_{\tau} v^{2}_{\nu\tau t}\delta_{\nu\mu} \quad ; \quad \overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\nu t}} = \sum_{\tau} v^{2}_{\nu\tau t} \\
\overbracket{a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t}a_{\tilde{\nu} t}} = \sum_{\tau} v^{2}_{\nu\tau t} \quad ; \quad \overbracket{a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t'}a_{\tilde{\mu} t'}} = \sum_{\tau} v^{2}_{\nu\tau t'}\delta_{\nu\mu} \qquad (\nu,\mu>0) \\
\overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\tilde{\mu} t'}} = \overbracket{a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t'}a_{\mu t}} = \overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\tilde{\mu} t}} = \overbracket{a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t'}a_{\mu t'}} = 0 \quad ; \quad \overbracket{a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t'}a_{\tilde{\mu} t}} = \sum_{\tau} v_{\nu\tau t'}v_{\nu\tau t}\delta_{\nu\mu}
\end{cases}
\tag{2.22}
$$

De même :

$$
\overbracket{a_{\tilde{\mu} t}a_{\mu t'}} = -\sum_{\tau} u_{\mu\tau t}v_{\mu\tau t'} \; ; \; \overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t'}} = -\sum_{\tau} v_{\nu\tau t}u_{\nu\tau t'} \; ; \; \overbracket{a_{\tilde{\mu} t'}a_{\mu t}} = -\sum_{\tau} u_{\mu\tau t'}v_{\mu\tau t} \tag{2.23}
$$

Les expressions de $\tilde{\varepsilon}_{\nu r}$ et Δ_{rt} données respectivement par (1.36) et (1.39) deviennent :

$$\tilde{\varepsilon}_{\nu r} = \varepsilon_{\nu r} - \lambda_r - \sum_t G_{tr} \left(1 + \delta_{tr}\right) \sum_\tau v_{\nu\tau t}^2 \tag{2.24}$$

$$\Delta_{rt} = \Delta_{tr} = -G_{rt} \sum_{\nu>0,\tau} \left(u_{\nu\tau t} v_{\nu\tau r} + u_{\nu\tau r} v_{\nu\tau t}\right) \tag{2.25}$$

2.4.2 Calcul des produits normaux

Les différents produits normaux sont donnés par :

$$\begin{aligned} : a_{\nu t}^\dagger a_{\mu t'} :=& \sum_{\tau\tau'} u_{\nu\tau t} u_{\mu\tau' t'} \alpha_{\nu\tau}^\dagger \alpha_{\mu\tau'} - \sum_{\tau\tau'} v_{\nu\tau t} v_{\mu\tau' t'} \alpha_{\tilde{\mu}\tau'}^\dagger \alpha_{\tilde{\nu}\tau} + \sum_{\tau\tau'} u_{\mu\tau' t'} v_{\nu\tau t} \alpha_{\mu\tau'} \alpha_{\tilde{\nu}\tau} \\ & - \sum_{\tau\tau'} u_{\nu\tau t} v_{\mu\tau' t'} \alpha_{\nu\tau}^\dagger \alpha_{\tilde{\mu}\tau'}^\dagger \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} : a_{\nu t}^\dagger a_{\nu t} :=& \sum_{\tau\tau'} u_{\nu\tau t} u_{\nu\tau' t} \alpha_{\nu\tau}^\dagger \alpha_{\nu\tau'} - \sum_{\tau\tau'} v_{\nu\tau t} v_{\nu\tau' t} \alpha_{\tilde{\nu}\tau'}^\dagger \alpha_{\tilde{\nu}\tau} + \sum_{\tau\tau'} u_{\nu\tau' t} v_{\nu\tau t} \alpha_{\nu\tau'} \alpha_{\tilde{\nu}\tau} \\ & - \sum_{\tau\tau'} u_{\nu\tau t} v_{\nu\tau' t} \alpha_{\nu\tau}^\dagger \alpha_{\tilde{\nu}\tau'}^\dagger \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} : a_{\tilde{\nu} t}^\dagger a_{\tilde{\nu} t} :=& \sum_{\tau\tau'} u_{\nu\tau t} u_{\nu\tau' t} \alpha_{\tilde{\nu}\tau}^\dagger \alpha_{\tilde{\nu}\tau'} - \sum_{\tau\tau'} v_{\nu\tau t} v_{\nu\tau' t} \alpha_{\nu\tau'}^\dagger \alpha_{\nu\tau} - \sum_{\tau\tau'} u_{\nu\tau' t} v_{\nu\tau t} \alpha_{\tilde{\nu}\tau'} \alpha_{\nu\tau} \\ & + \sum_{\tau\tau'} u_{\nu\tau t} v_{\nu\tau' t} \alpha_{\tilde{\nu}\tau}^\dagger \alpha_{\nu\tau'}^\dagger \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} : a_{\nu t}^\dagger a_{\mu t} :=& \sum_{\tau\tau'} u_{\nu\tau t} u_{\mu\tau' t} \alpha_{\nu\tau}^\dagger \alpha_{\mu\tau'} - \sum_{\tau\tau'} v_{\nu\tau t} v_{\mu\tau' t} \alpha_{\tilde{\mu}\tau'}^\dagger \alpha_{\tilde{\nu}\tau} + \sum_{\tau\tau'} u_{\mu\tau' t} v_{\nu\tau t} \alpha_{\mu\tau'} \alpha_{\tilde{\nu}\tau} \\ & - \sum_{\tau\tau'} u_{\nu\tau t} v_{\mu\tau' t} \alpha_{\nu\tau}^\dagger \alpha_{\tilde{\mu}\tau'}^\dagger \end{aligned}$$

$$: a^\dagger_{\tilde{\nu}t'} a_{\tilde{\mu}t} := \sum_{\tau\tau'} u_{\nu\tau t'} u_{\mu\tau' t} \alpha^\dagger_{\tilde{\nu}\tau} \alpha_{\tilde{\mu}\tau'} - \sum_{\tau\tau'} v_{\nu\tau t'} v_{\mu\tau' t} \alpha^\dagger_{\mu\tau'} \alpha_{\nu\tau} + \sum_{\tau\tau'} u_{\mu\tau' t} v_{\nu\tau t'} \alpha_{\nu\tau} \alpha_{\tilde{\mu}\tau'}$$
$$+ \sum_{\tau\tau'} u_{\nu\tau t'} v_{\mu\tau' t} \alpha^\dagger_{\tilde{\nu}\tau} \alpha^\dagger_{\mu\tau'}$$

$$: a^\dagger_{\tilde{\nu}t'} a_{\tilde{\mu}t'} := \sum_{\tau\tau'} u_{\nu\tau t'} u_{\mu\tau' t'} \alpha^\dagger_{\tilde{\nu}\tau} \alpha_{\tilde{\mu}\tau'} - \sum_{\tau\tau'} v_{\nu\tau t'} v_{\mu\tau' t'} \alpha^\dagger_{\mu\tau'} \alpha_{\nu\tau} + \sum_{\tau\tau'} u_{\mu\tau' t'} v_{\nu\tau t'} \alpha_{\nu\tau} \alpha_{\tilde{\mu}\tau'}$$
$$+ \sum_{\tau\tau'} u_{\nu\tau t'} v_{\mu\tau' t'} \alpha^\dagger_{\tilde{\nu}\tau} \alpha^\dagger_{\mu\tau'}$$

$$: a^\dagger_{\nu t} a^\dagger_{\tilde{\nu}t'} := \sum_{\tau\tau'} u_{\nu\tau t} v_{\nu\tau' t'} \alpha^\dagger_{\nu\tau} \alpha_{\nu\tau'} + \sum_{\tau\tau'} v_{\nu\tau t} u_{\nu\tau' t'} \alpha^\dagger_{\tilde{\nu}\tau'} \alpha_{\tilde{\nu}\tau} + \sum_{\tau\tau'} v_{\nu\tau t} v_{\nu\tau' t'} \alpha_{\nu\tau'} \alpha_{\tilde{\nu}\tau}$$
$$+ \sum_{\tau\tau'} u_{\nu\tau t} u_{\nu\tau' t'} \alpha^\dagger_{\nu\tau} \alpha^\dagger_{\tilde{\nu}\tau'}$$

$$: a_{\tilde{\mu}t} a_{\mu t'} := \sum_{\tau\tau'} v_{\mu\tau t} u_{\mu\tau' t'} \alpha^\dagger_{\mu\tau} \alpha_{\mu\tau'} + \sum_{\tau\tau'} u_{\mu\tau t} v_{\mu\tau' t'} \alpha^\dagger_{\tilde{\mu}\tau'} \alpha_{\tilde{\mu}\tau} - \sum_{\tau\tau'} u_{\mu\tau t} u_{\mu\tau' t'} \alpha_{\mu\tau'} \alpha_{\tilde{\mu}\tau}$$
$$- \sum_{\tau\tau'} v_{\mu\tau t} v_{\mu\tau' t'} \alpha^\dagger_{\mu\tau} \alpha^\dagger_{\tilde{\mu}\tau'}$$

$$: a_{\tilde{\mu}t'} a_{\mu t} := \sum_{\tau\tau'} u_{\mu\tau t'} v_{\mu\tau' t} \alpha^\dagger_{\tilde{\mu}\tau'} \alpha_{\tilde{\mu}\tau} + \sum_{\tau\tau'} v_{\mu\tau t'} u_{\mu\tau' t} \alpha^\dagger_{\mu\tau} \alpha_{\mu\tau'} - \sum_{\tau\tau'} u_{\mu\tau t'} u_{\mu\tau' t} \alpha_{\mu\tau'} \alpha_{\tilde{\mu}\tau}$$
$$- \sum_{\tau\tau'} v_{\mu\tau t'} v_{\mu\tau' t} \alpha^\dagger_{\mu\tau} \alpha^\dagger_{\tilde{\mu}\tau'}$$

2.5 L'hamiltonien en représentation quasi-particule

2.5.1 Expression de $\mathbf{E}_0$

En utilisant les relations (2.22) et (2.23), l'expression (2.19) devient :

$$
\begin{aligned}
E_0 = {} & 2\sum_{\nu>0,t}\varepsilon_{\nu t}\left(\sum_{\tau} v_{\nu\tau t}^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{tt',\nu>0} G_{tt'}\left[\left(\sum_{\tau} v_{\nu\tau t}v_{\nu\tau t'}\right)^2 + \left(\sum_{\tau} v_{\nu\tau t}^2\right)\left(\sum_{\tau} v_{\nu\tau t'}^2\right)\right] \\
& - \frac{1}{2}\sum_{tt'} G_{tt'}\sum_{\nu,\mu>0}\left[\left(\sum_{\tau} v_{\nu\tau t}u_{\nu\tau t'}\right)\left(\sum_{\tau} v_{\mu\tau t}u_{\mu\tau t'}\right)\right] \\
& - \frac{1}{2}\sum_{tt'} G_{tt'}\sum_{\nu,\mu>0}\left[\left(\sum_{\tau} v_{\nu\tau t}u_{\nu\tau t'}\right)\left(\sum_{\tau} u_{\mu\tau t}v_{\mu\tau t'}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Soit,

$$
\begin{aligned}
E_0 = {} & 2\sum_{\nu>0,t}\left[\varepsilon_{\nu t} - \frac{1}{2}G_{tt}\left(\sum_{\tau} v_{\nu\tau t}^2\right)\right]\left(\sum_{\tau} v_{\nu\tau t}^2\right) \\
& - \frac{1}{2}G_{np}\sum_{\nu>0}\left[\left(\sum_{\tau} v_{\nu\tau n}^2\right)^2 + \left(\sum_{\tau} v_{\nu\tau p}^2\right)^2 + 2\left(\sum_{\tau} v_{\nu\tau n}v_{\nu\tau p}\right)^2\right] \\
& - \frac{\Delta_{nn}^2}{4G_{nn}} - \frac{\Delta_{pp}^2}{4G_{pp}} - \frac{\Delta_{np}^2}{2G_{np}}
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

où l'on a noté par :

$$
\begin{aligned}
\Delta_{pp} &= -2G_{pp}\sum_{\nu>0}\sum_{\tau} u_{\nu\tau p}v_{\nu\tau p} \\
\Delta_{nn} &= -2G_{nn}\sum_{\nu>0}\sum_{\tau} u_{\nu\tau n}v_{\nu\tau n} \\
\Delta_{pn} &= -G_{pn}\sum_{\nu>0}\sum_{\tau} (u_{\nu\tau p}v_{\nu\tau n} + u_{\nu\tau n}v_{\nu\tau p})
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

2.5.2 Expression de H_{11}

En utilisant les résultats de calcul des différents produits normaux, H_{11} s'écrit :

$$
\begin{aligned}
H_{11} = & \sum_{\nu>0,t} \varepsilon_{\nu t} \sum_{\tau\tau'} \left(u_{\nu\tau t}u_{\nu\tau' t} - v_{\nu\tau t}v_{\nu\tau' t}\right) \left(\alpha^{\dagger}_{\nu\tau}\alpha_{\nu\tau'} + \alpha^{\dagger}_{\tilde{\nu}\tau}\alpha_{\tilde{\nu}\tau'}\right) \\
& - \frac{1}{2}\sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu>0}\sum_{\tau\tau'} \left[\left(\sum_{\tau} v^2_{\nu\tau t}\right)\left(u_{\nu\tau t'}u_{\nu\tau' t'} - v_{\nu\tau t'}v_{\nu\tau' t'}\right) + \right. \\
& \left.\left(\sum_{\tau} v_{\nu\tau t}v_{\nu\tau t'}\right)\left(u_{\nu\tau t}u_{\nu\tau' t'} - v_{\nu\tau t}v_{\nu\tau' t'}\right)\right] \left(\alpha^{\dagger}_{\nu\tau}\alpha_{\nu\tau'} + \alpha^{\dagger}_{\tilde{\nu}\tau}\alpha_{\tilde{\nu}\tau'}\right) \\
& + \frac{1}{2}\sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu>0}\left(\sum_{\mu>0,\tau} u_{\mu\tau t'}v_{\mu\tau t}\right)\sum_{\tau\tau'}\left[u_{\nu\tau t}v_{\nu\tau' t'} + u_{\nu\tau' t}v_{\nu\tau t'} + \right. \\
& \left. v_{\nu\tau' t}u_{\nu\tau t'} + v_{\nu\tau t}u_{\nu\tau' t'}\right]\left(\alpha^{\dagger}_{\nu\tau}\alpha_{\nu\tau'} + \alpha^{\dagger}_{\tilde{\nu}\tau}\alpha_{\tilde{\nu}\tau'}\right)
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

qui se met sous la forme :

$$
H_{11} = \sum_{\nu>0,\tau\tau'} E_{\nu\tau\tau'}\left(\alpha^{\dagger}_{\nu\tau}\alpha_{\nu\tau'} + \alpha^{\dagger}_{\tilde{\nu}\tau}\alpha_{\tilde{\nu}\tau'}\right) \tag{2.30}
$$

avec la notation :

$$
\begin{aligned}
E_{\nu\tau\tau'} = & \sum_{t}\left[\varepsilon_{\nu t} - \frac{1}{2}\sum_{t'} G_{tt'}\sum_{\tau} v^2_{\nu\tau t'}\right]\left(u_{\nu\tau t}u_{\nu\tau' t} - v_{\nu\tau t}v_{\nu\tau' t}\right) \\
& - \frac{1}{2}\sum_{tt'} G_{tt'}\left[\left(\sum_{\tau} v_{\nu\tau t}v_{\nu\tau t'}\right)\left(u_{\nu\tau t}u_{\nu\tau' t'} - v_{\nu\tau t}v_{\nu\tau' t'}\right)\right] \\
& - \sum_{tt'} \Delta_{tt'}\left[u_{\nu\tau t}v_{\nu\tau' t'} + u_{\nu\tau' t}v_{\nu\tau t'}\right]
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

et

$$
\Delta_{tt'} = -G_{tt'}\sum_{\nu>0,\tau}\left(u_{\nu\tau t}v_{\nu\tau t'} + u_{\nu\tau t'}v_{\nu\tau t}\right) \tag{2.32}
$$

2.5.3 Expression de H_2

Concernant le terme H_2, on peut le mettre sous la forme :

$$H_2 = H_{02} + H_{20} \tag{2.33}$$

Il s'écrit :

$$H_2 = \sum_{\nu>0,\tau\tau'} H_2^{\nu\tau\tau'} \left(\alpha^\dagger_{\tilde{\nu}\tau} \alpha^\dagger_{\nu\tau'} + \alpha_{\nu\tau'} \alpha_{\tilde{\nu}\tau} \right) \tag{2.34}$$

où l'on a noté par :

$$\begin{aligned}
H_2^{\nu\tau\tau'} = & \left[\sum_t \varepsilon_{\nu t} - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \left(\sum_\tau v^2_{\nu\tau t'} \right) \right] \left(u_{\nu\tau t} v_{\nu\tau' t} + u_{\nu\tau' t} v_{\nu\tau t} \right) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \left(\sum_\tau \left(v_{\nu\tau t} v_{\nu\tau t'} \right) \right) \left(u_{\nu\tau t'} v_{\nu\tau' t} + u_{\nu\tau' t} v_{\nu\tau t'} \right) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu>0,\tau} \left(u_{\nu\tau t} v_{\nu\tau t'} + u_{\nu\tau t'} v_{\nu\tau t} \right) \left(u_{\nu\tau' t} u_{\nu\tau t'} \right) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \left(\sum_{\nu>0,\tau} \left(v_{\nu\tau t} v_{\nu\tau' t'} \right) \right) \left(u_{\nu\tau t'} v_{\nu\tau t} + u_{\nu\tau t} v_{\nu\tau t'} \right)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

qu'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}
H_2^{\nu\tau\tau'} = & \sum_t \left[\varepsilon_{\nu t} - \frac{1}{2} \sum_{t'} G_{tt'} \left(\sum_\tau v^2_{\nu\tau t'} \right) \right] \left(u_{\nu\tau t} v_{\nu\tau' t} + u_{\nu\tau' t} v_{\nu\tau t} \right) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \left(\sum_\tau \left(v_{\nu\tau t} v_{\nu\tau t'} \right) \right) \left(u_{\nu\tau t'} v_{\nu\tau' t} + u_{\nu\tau' t} v_{\nu\tau t'} \right) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{tt'} \Delta_{tt'} \left(u_{\nu\tau' t} u_{\nu\tau t'} - v_{\nu\tau t} v_{\nu\tau' t'} \right)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

2.5.4 Expression de H_{res}

H_{res} se met sous la forme :

$$H_{res} = H_{22} + H_3 + H_4 \tag{2.37}$$

où H_{22} regroupe les termes en $\alpha^\dagger\alpha^\dagger\alpha\alpha$, H_3 regroupe les termes en $\alpha^\dagger\alpha^\dagger\alpha^\dagger\alpha$ et $\alpha^\dagger\alpha\alpha\alpha$ et H_4 regroupe les termes en $\alpha^\dagger\alpha^\dagger\alpha^\dagger\alpha^\dagger$ et $\alpha\alpha\alpha\alpha$.

a/Expression de H_{22} :

Nous avons :

$$\begin{aligned}
H_{22} = -\frac{1}{2}\sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu,\mu>0} \sum_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4} \\
&\Big\{\left(u_{\nu\tau_1 t}u_{\nu\tau_2 t'}u_{\mu\tau_3 t'}u_{\mu\tau_4 t} + u_{\nu\tau_1 t}u_{\nu\tau_2 t'}u_{\mu\tau_3 t}u_{\mu\tau_4 t'}\right)\alpha^\dagger_{\nu\tau_1}\alpha^\dagger_{\tilde{\nu}\tau_2}\alpha_{\tilde{\mu}\tau_3}\alpha_{\mu\tau_4} \\
&+ \left(u_{\nu\tau_1 t}v_{\nu\tau_2 t'}v_{\mu\tau_3 t'}u_{\mu\tau_4 t} + u_{\nu\tau_1 t}v_{\nu\tau_2 t'}v_{\mu\tau_3 t}u_{\mu\tau_4 t'}\right)\alpha^\dagger_{\nu\tau_1}\alpha^\dagger_{\mu\tau_3}\alpha_{\mu\tau_4}\alpha_{\nu\tau_2} \\
&+ \left(u_{\nu\tau_1 t}v_{\nu\tau_2 t'}u_{\mu\tau_3 t'}v_{\mu\tau_4 t} + u_{\nu\tau_1 t}v_{\nu\tau_2 t'}u_{\mu\tau_3 t}v_{\mu\tau_4 t'}\right)\alpha^\dagger_{\nu\tau_1}\alpha^\dagger_{\tilde{\mu}\tau_4}\alpha_{\tilde{\mu}\tau_3}\alpha_{\nu\tau_2} \\
&+ \left(v_{\nu\tau_1 t}u_{\nu\tau_2 t'}u_{\mu\tau_3 t'}v_{\mu\tau_4 t} + v_{\nu\tau_1 t}u_{\nu\tau_2 t'}u_{\mu\tau_3 t}v_{\mu\tau_4 t'}\right)\alpha^\dagger_{\tilde{\nu}\tau_2}\alpha^\dagger_{\tilde{\mu}\tau_4}\alpha_{\tilde{\mu}\tau_3}\alpha_{\tilde{\nu}\tau_1} \\
&+ \left(v_{\nu\tau_1 t}u_{\nu\tau_2 t'}v_{\mu\tau_3 t'}u_{\mu\tau_4 t} + v_{\nu\tau_1 t}u_{\nu\tau_2 t'}v_{\mu\tau_3 t}u_{\mu\tau_4 t'}\right)\alpha^\dagger_{\mu\tau_3}\alpha^\dagger_{\tilde{\nu}\tau_2}\alpha_{\tilde{\nu}\tau_1}\alpha_{\mu\tau_4} \\
&+ \left(v_{\nu\tau_1 t}v_{\nu\tau_2 t'}v_{\mu\tau_3 t'}v_{\mu\tau_4 t} + v_{\nu\tau_1 t}v_{\nu\tau_2 t'}v_{\mu\tau_3 t}v_{\mu\tau_4 t'}\right)\alpha^\dagger_{\mu\tau_3}\alpha^\dagger_{\tilde{\mu}\tau_4}\alpha_{\tilde{\nu}\tau_1}\alpha_{\nu\tau_2}\Big\}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

b/Expression de H_3

H_3 peut se mettre sous la forme :

$$H_3 = H_{31} + H_{13} \tag{2.39}$$

Il s'écrit, alors :

$$
\begin{aligned}
H_3 = -\frac{1}{2}\sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu,\mu>0} \sum_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4} & \{u_{\nu\tau_1 t} u_{\nu\tau_2 t'} \left(u_{\mu\tau_3 t} v_{\mu\tau_4 t'} + u_{\mu\tau_3 t'} v_{\mu\tau_4 t}\right) \\
& \left(\alpha^{\dagger}_{\nu\tau_1}\alpha^{\dagger}_{\tilde{\nu}\tau_2}\alpha^{\dagger}_{\tilde{\mu}\tau_4}\alpha_{\tilde{\mu}\tau_3} + \alpha^{\dagger}_{\tilde{\mu}\tau_3}\alpha_{\tilde{\mu}\tau_4}\alpha_{\tilde{\nu}\tau_2}\alpha_{\nu\tau_1}\right) + u_{\nu\tau_1 t} u_{\nu\tau_2 t'} \left(u_{\mu\tau_4 t'} v_{\mu\tau_3 t} + u_{\mu\tau_4 t} v_{\mu\tau_3 t'}\right) \\
& \left(\alpha^{\dagger}_{\nu\tau_1}\alpha^{\dagger}_{\tilde{\nu}\tau_2}\alpha^{\dagger}_{\mu\tau_3}\alpha_{\mu\tau_4} + \alpha^{\dagger}_{\mu\tau_4}\alpha_{\mu\tau_3}\alpha_{\tilde{\nu}\tau_2}\alpha_{\nu\tau_1}\right) - v_{\nu\tau_2 t'} u_{\nu\tau_1 t} \left(v_{\mu\tau_4 t} v_{\mu\tau_3 t'} + v_{\mu\tau_4 t'} v_{\mu\tau_3 t}\right) \\
& \left(\alpha^{\dagger}_{\nu\tau_1}\alpha^{\dagger}_{\mu\tau_3}\alpha^{\dagger}_{\tilde{\mu}\tau_4}\alpha_{\nu\tau_2} + \alpha^{\dagger}_{\nu\tau_2}\alpha_{\tilde{\mu}\tau_4}\alpha_{\mu\tau_3}\alpha_{\nu\tau_1}\right) - v_{\nu\tau_1 t} u_{\nu\tau_2 t'} \left(v_{\mu\tau_3 t} v_{\mu\tau_4 t'} + v_{\mu\tau_3 t'} v_{\mu\tau_4 t}\right) \\
& \left(\alpha^{\dagger}_{\tilde{\nu}\tau_2}\alpha^{\dagger}_{\mu\tau_3}\alpha^{\dagger}_{\tilde{\mu}\tau_4}\alpha_{\tilde{\nu}\tau 1} + \alpha^{\dagger}_{\tilde{\nu}\tau 1}\alpha_{\tilde{\mu}\tau_4}\alpha_{\mu\tau_3}\alpha_{\tilde{\nu}\tau_2}\right)\}
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

c/Expression de H_4

H_4 se met sous la forme :

$$H_4 = H_{40} + H_{04} \tag{2.41}$$

Il devient :

$$
\begin{aligned}
H_4 = -\frac{1}{2}\sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu,\mu>0} \sum_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4} & \{\left(u_{\nu\tau_1 t} u_{\nu\tau_2 t'} v_{\mu\tau_3 t} v_{\mu\tau_4 t'} + u_{\nu\tau_1 t} u_{\nu\tau_2 t'} v_{\mu\tau_3 t'} v_{\mu\tau_4 t}\right) \\
& \left(\alpha^{\dagger}_{\nu\tau_1}\alpha^{\dagger}_{\tilde{\nu}\tau_2}\alpha^{\dagger}_{\tilde{\mu}\tau_4}\alpha^{\dagger}_{\mu\tau_3} + \alpha_{\mu\tau_3}\alpha_{\tilde{\mu}\tau_4}\alpha_{\tilde{\nu}\tau_2}\alpha_{\nu\tau_1}\right)\}
\end{aligned} \tag{2.42}
$$

2.6 Énergie BCS dans la représentation quasi-particule

L'énergie de l'état fondamental des noyaux pair-pairs E_{BCS} est l'énergie d'un système où toutes les particules sont appariées. Elle est définie par :

$$E_{BCS} = \langle BCS \left| H \right| BCS \rangle \tag{2.43}$$

où H est l'hamiltonien exprimé dans la représentation quasi-particule dont le vide est l'état $|BCS\rangle$ donné par l'expression (2.16).

L'expression (2.43) devient alors :

$$E_{BCS} \equiv E_0 \tag{2.44}$$

où E_0 est donnée par l'expression (2.27) .

L'apport des termes $\left(G_{tr}\sum_{\tau} v_{\nu\tau t}^2\right)$ et $\left(G_{tt'}\left(\sum_{\tau} v_{\nu\tau t}^2\right)^2\right)$ qui apparaissent dans les expressions de $\tilde{\varepsilon}_{\nu r}$ et E_0 données respectivement par (2.24) et (2.26) est petit comparé à celui des autres termes, on peut alors les négliger dans une première approximation.
Si de plus $\Delta_{pn} = 0$, les expressions des différentes amplitudes de probabilité s'écrivent :

$$\left.\begin{array}{c} v_{\nu 1p}^2 \\ u_{\nu 1p}^2 \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\left\{1 \mp \frac{\varepsilon_{\nu p}-\lambda_p}{\sqrt{\left(\varepsilon_{\nu p}-\lambda_p\right)^2+\Delta_{pp}^2}}\right\} \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{c} v_{\nu 2n}^2 \\ u_{\nu 2n}^2 \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\left\{1 \mp \frac{\varepsilon_{\nu n}-\lambda_n}{\sqrt{\left(\varepsilon_{\nu n}-\lambda_n\right)^2+\Delta_{nn}^2}}\right\} \tag{2.45}$$

Par ailleurs, si $\Delta_{pp} = \Delta_{nn} = 0$, ces amplitudes de probabilité deviennent :

$$\left.\begin{array}{c} v_{\nu 1p}^2 \\ u_{\nu 1p}^2 \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\left\{1 \mp \frac{\varepsilon_{\nu p}-\lambda_p}{\mid \varepsilon_{\nu p}-\lambda_p \mid}\right\} \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{c} v_{\nu 2n}^2 \\ u_{\nu 2n}^2 \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\left\{1 \mp \frac{\varepsilon_{\nu n}-\lambda_n}{\mid \varepsilon_{\nu n}-\lambda_n \mid}\right\} \tag{2.46}$$

On distingue deux cas, suivant que l'on soit en dessous ou au dessus des niveaux de Fermi respectifs pour les protons et les neutrons.
En conclusion, lorsqu'on annule les effets d'appariement les amplitudes d'occupation et d'inoccupation se réduisent à :

$$\left\{\begin{array}{lll} v_{\nu 1p}^2 = 1 & u_{\nu 1p}^2 = 0 & \varepsilon_{\nu p}-\lambda_p < 0 \\ v_{\nu 1p}^2 = 0 & u_{\nu 1p}^2 = 1 & \varepsilon_{\nu p}-\lambda_p > 0 \end{array}\right. \tag{2.47}$$

et

$$\left\{\begin{array}{lll} v_{\nu 2n}^2 = 1 & u_{\nu 2n}^2 = 0 & \varepsilon_{\nu n}-\lambda_n < 0 \\ v_{\nu 2n}^2 = 0 & u_{\nu 2n}^2 = 1 & \varepsilon_{\nu n}-\lambda_n > 0 \end{array}\right. \tag{2.48}$$

Dans ce cas l'énergie E_{BCS} devient :

$$\begin{aligned} E_{BCS}\left(\Delta=0\right) = {} & 2\sum_{\nu>0}{}' \varepsilon_{\nu p} - G_{pp}\sum_{\nu>0}{}' 1 - \frac{1}{2}G_{np}\sum_{\nu>0}{}' 1 \\ & + 2\sum_{\nu>0}{}'' \varepsilon_{\nu n} - G_{nn}\sum_{\nu>0}{}'' 1 - \frac{1}{2}G_{np}\sum_{\nu>0}{}'' 1 \end{aligned} \tag{2.49}$$

où les deux sommations $\sum\limits_{\nu>0}{}^{'}$ et $\sum\limits_{\nu>0}{}^{''}$ portent respectivement sur tous les niveaux occupés par les protons et les neutrons (en dessous de leurs niveaux de Fermi respectifs). Or, dans la théorie BCS habituelle pour un système de particules identiques, l'énergie de l'état fondamental [30–32] est donnée par :

$$E_{BCS}\left(\Delta\right) = 2\sum_{\nu>0}\varepsilon_{\nu}v_{\nu}^{2} - G\sum_{\nu>0}v_{\nu}^{4} - \frac{\Delta^{2}}{G} \tag{2.50}$$

qui devient :

$$E_{BCSp}\left(\Delta=0\right) = 2{\sum_{\nu>0}}'\varepsilon_{\nu p} - G_{pp}{\sum_{\nu>0}}'1 \qquad \text{pour le système protons} \tag{2.51}$$

et

$$E_{BCSn}\left(\Delta=0\right) = 2{\sum_{\nu>0}}''\varepsilon_{\nu n} - G_{nn}{\sum_{\nu>0}}''1 \qquad \text{pour le système neutrons} \tag{2.52}$$

où les signes sommes $\sum\limits_{\nu>0}{}^{'}$ et $\sum\limits_{\nu>0}{}^{''}$ portent sur tout les niveaux occupés par le système de particules identiques (protons ou neutrons). En utilisant les expressions (2.51) et (2.52), l'expression (2.49) devient :

$$\begin{aligned} E_{BCS}\left(\Delta=0\right) &= E_{BCSp}\left(\Delta=0\right) + E_{BCSn}\left(\Delta=0\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}G_{np}\left({\sum_{\nu>0}}'1 + {\sum_{\nu>0}}''1\right) \end{aligned} \tag{2.53}$$

En conclusion, on vérifie bien que lorsqu'on annule l'appariement, l'énergie de l'état $|BCS\rangle$ du noyau (protons+neutrons) est égale à la somme des énergies des systèmes protons et neutrons pris séparément et du terme $\left(-\frac{1}{2}G_{np}\left({\sum\limits_{\nu>0}}'1 + {\sum\limits_{\nu>0}}''1\right)\right)$ qui traduit la coexistence des deux systèmes protons et neutrons.

L'énergie de corrélation due à l'appariement des nucléons est donc :

$$E_{p} = E_{BCS}\left(\Delta_{pp},\Delta_{nn},\Delta_{pn}\right) - E_{BCS}\left(\Delta_{pp}=\Delta_{nn}=\Delta_{pn}=0\right) \tag{2.54}$$

En ce qui concerne l'état $|BCS\rangle$ donné par l'expression (2.16), il devient en absence d'appariement (n-p) :

$$|BCS\rangle = \prod_{\nu>0} \left\{ \left(u_{\nu 1p} + v_{\nu 1p} a_{\tilde{\nu}p}^{\dagger} a_{\nu p}^{\dagger}\right) \left(u_{\nu 2n} + v_{\nu 2n} a_{\tilde{\nu}n}^{\dagger} a_{\nu n}^{\dagger}\right) \right\} |0\rangle \tag{2.55}$$

L'expression (2.55) peut se mettre sous la forme :

$$|BCS\rangle = |BCS\rangle_p \, |BCS\rangle_n \tag{2.56}$$

où $|BCS\rangle_p$ et $|BCS\rangle_n$ sont respectivement les états fondamentaux des systèmes protons et neutrons pris séparément [30–32].

2.7 Équations du gap

Compte tenu de l'expression (2.25) , les paramètres du gap pour les différents systèmes sont donnés par :

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_{pp} &= -2G_{pp} \sum_{\nu>0} \left(u_{\nu 1p} v_{\nu 1p} + u_{\nu 2p} v_{\nu 2p}\right) \\ \Delta_{nn} &= -2G_{nn} \sum_{\nu>0} \left(u_{\nu 1n} v_{\nu 1n} + u_{\nu 2n} v_{\nu 2n}\right) \\ \Delta_{np} &= -G_{np} \sum_{\nu>0} \left(u_{\nu 1p} v_{\nu 1n} + u_{\nu 1n} v_{\nu 1p+} u_{\nu 2p} v_{\nu 2n} + u_{\nu 2n} v_{\nu 2p}\right) \end{aligned} \right. \tag{2.57}$$

Les potentiels chimiques λ_p et λ_n sont obtenus en fixant en moyenne le nombre de protons et de neutrons c'est-à-dire $\left\langle BCS \left| \hat{N}_p \right| BCS \right\rangle$ et $\left\langle BCS \left| \hat{N}_n \right| BCS \right\rangle$.
En utilisant l'expression (1.15) et le calcul des contractions donné par (2.22) et (2.23) , on obtient :

$$\begin{aligned} \left\langle BCS \left| \hat{N}_p \right| BCS \right\rangle &= 2 \sum_{\nu>0,\tau} v_{\nu\tau p}^2 = 2 \sum_{\nu>0} \left(v_{\nu 1p}^2 + v_{\nu 2p}^2\right) \\ \left\langle BCS \left| \hat{N}_n \right| BCS \right\rangle &= 2 \sum_{\nu>0,\tau} v_{\nu\tau n}^2 = 2 \sum_{\nu>0} \left(v_{\nu 1n}^2 + v_{\nu 2n}^2\right) \end{aligned} \tag{2.58}$$

En imposant à la fois la conservation du nombre de protons et du nombre de neutrons, ceci entraîne à la fois la conservation du nombre total de particules et la troisième composante de l'isospin. Soit, en utilisant l'expression (2.58) :

$$\begin{cases} \left\langle BCS \left| \hat{N} \right| BCS \right\rangle = 2 \sum\limits_{\substack{\nu>0 \\ \tau,t}} v_{\nu\tau t}^2 & \text{avec } \tau = 1,2 \text{ et } t = p,n \\ \left\langle BCS \left| \hat{T}_z \right| BCS \right\rangle = \dfrac{1}{2} \left\langle BCS \left| \left(\hat{N}_n - \hat{N}_p \right) \right| BCS \right\rangle = \sum\limits_{\nu>0,\tau} \left(v_{\nu\tau n}^2 - v_{\nu\tau p}^2 \right) & \end{cases} \tag{2.59}$$

Les équations du gap (2.57) et (2.58) forment un système non linéaire de cinq équations à cinq inconnues : $\Delta_{pp}, \Delta_{nn}, \Delta_{pn}, \lambda_p$ et λ_n. Ce système a été résolu numériquement dans le cas où l'appariement isovectoriel concerne des paires de nucléons renversées par rapport au sens du temps [11, 16, 18, 62]. Pour une forme d'hamiltonien plus générale telle que la notre, cette solution reste valable.

Chapitre 3

Nouvelle transformation de Bogoliubov-Valatin

Dans le chapitre précédent, l'hamiltonien du système a été écrit dans la représentation quasi-particule à l'aide de la transformation généralisée inverse de Bogoliubov-Valatin. Ceci a permis de mettre H sous la forme donnée par l'expression (2.18) où le terme constant représente l'énergie du fondamental, H_{11} est l'hamiltonien des quasi-particules indépendantes sous forme non diagonale. H_2 représente l'interaction entre quasi-particules, il sera inclus dans le terme d'interaction résiduelle H_{res}. L'approximation des quasi-particules indépendantes consiste à négliger H_{res}.
Il s'agit maintenant de diagonaliser H_{11} et de trouver la nouvelle transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin. Ainsi, on définira de nouveaux opérateurs $\beta^{\dagger}_{\nu\tau}$ et $\beta_{\nu\tau}$ qui seront combinaisons linéaires des opérateurs de création et d'annihilation de vraies particules. Nous utiliserons par la suite cette nouvelle transformation pour écrire l'état fondamental des systèmes pair-pairs ainsi que les états excités à deux particules et leurs énergies.

3.1 Les nouvelles quasi-particules et leurs énergies

Nous constatons qu'avec la transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin donnée par l'expression (2.2) H_{11} n'est pas diagonal. En effet,

$$H_{11} = \sum_{\nu\tau\tau'} E_{\nu\tau\tau'} \alpha^{\dagger}_{\nu\tau} \alpha_{\nu\tau'} \tag{3.1}$$

expression dans laquelle $E_{\nu\tau\tau'}$ est donnée par l'expression (2.31) où on a remplacé $(\varepsilon_{\nu t})$ par $(\varepsilon_{\nu t} - \lambda_t)$. Dans le même ordre d'idée, comme en première approximation le terme $\left(G_{tr} \sum_{\tau} v^2_{\nu\tau t} \right)$ est négligeable devant les autres termes dans l'expression de $\tilde{\varepsilon}_{\nu r}$ alors de même, l'apport du terme $\left(\sum_{t'} G_{tt'} \sum_{\tau} v^2_{\nu\tau t'} \right)$ est négligeable devant les autres termes qui apparaissent dans l'expression de $E_{\nu\tau\tau'}$.
Comme $\tau, \tau' = 1, 2$, l'expression (3.1) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$H_{11} = \sum_{\nu} \left\{ \left(\alpha^{\dagger}_{\nu 1}, \alpha^{\dagger}_{\nu 2} \right) \begin{pmatrix} E_{\nu 11} & E_{\nu 12} \\ E_{\nu 21} & E_{\nu 22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\nu 1} \\ \alpha_{\nu 2} \end{pmatrix} \right\} \tag{3.2}$$

Notre but à présent est de trouver la transformation qui diagonalise H_{11}. Cherchons les valeurs propres de la matrice $\mathcal{A}_\nu$ en annulant son polynôme caractéristique $\det\left(\mathcal{A}_\nu - \lambda^\nu I\right)$ où la matrice $\mathcal{A}_\nu$ est définie par :

$$\mathcal{A}_\nu = \begin{pmatrix} E_{\nu 11} & E_{\nu 12} \\ E_{\nu 21} & E_{\nu 22} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

L'hamiltonien étant hermitique : $E_{\nu 12} = E_{\nu 21}$. Les valeurs propres de $\mathcal{A}_\nu$ sont :

$$\lambda^{\nu}_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(E_{\nu 11} + E_{\nu 22}) \pm \sqrt{(E_{\nu 11} - E_{\nu 22})^2 + 4E^2_{\nu 12}} \right] \tag{3.4}$$

Les vecteurs propres normés correspondant respectivement à λ_1^ν et λ_2^ν sont :

$$\begin{pmatrix} x_{11}^\nu \\ x_{12}^\nu \end{pmatrix} \text{et} \begin{pmatrix} x_{21}^\nu \\ x_{22}^\nu \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

avec :

$$\begin{cases} x_{11}^\nu = \frac{E_{\nu 12}}{\sqrt{E_{\nu 12}^2+(\lambda_1^\nu - E_{\nu 11})^2}} \\ x_{12}^\nu = \frac{\lambda_1^\nu - E_{\nu 11}}{\sqrt{E_{\nu 12}^2+(\lambda_1^\nu - E_{\nu 11})^2}} \end{cases} , \qquad \begin{cases} x_{21}^\nu = \frac{(\lambda_2^\nu - E_{\nu 22})}{\sqrt{E_{\nu 12}^2+(\lambda_2^\nu - E_{\nu 22})^2}} \\ x_{22}^\nu = \frac{E_{\nu 12}}{\sqrt{E_{\nu 12}^2+(\lambda_2^\nu - E_{\nu 22})^2}} \end{cases} \tag{3.6}$$

La transformation T qui diagonalise H_{11} est :

$$T = \begin{pmatrix} x_{11}^\nu & x_{21}^\nu \\ x_{12}^\nu & x_{22}^\nu \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11}^\nu & x_{12}^\nu \\ x_{21}^\nu & x_{22}^\nu \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

L'opérateur H_{11} s'écrit donc :

$$H_{11} = \sum_\nu \left\{ \left(\alpha_{\nu 1}^\dagger, \alpha_{\nu 2}^\dagger \right) T \begin{pmatrix} \lambda_1^\nu & 0 \\ 0 & \lambda_2^\nu \end{pmatrix} T^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_{\nu 1} \\ \alpha_{\nu 2} \end{pmatrix} \right\} \tag{3.8}$$

qui devient :

$$H_{11} = \sum_\nu \left\{ \left(\alpha_{\nu 1}^\dagger, \alpha_{\nu 2}^\dagger \right) \begin{pmatrix} \lambda_1^\nu x_{11}^{\nu 2} + \lambda_2^\nu x_{21}^{\nu 2} & \lambda_1^\nu x_{12}^\nu x_{11}^\nu + \lambda_2^\nu x_{21}^\nu x_{22}^\nu \\ \lambda_1^\nu x_{12}^\nu x_{11}^\nu + \lambda_2^\nu x_{21}^\nu x_{22}^\nu & \lambda_1^\nu x_{12}^{\nu 2} + \lambda_2^\nu x_{22}^{\nu 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\nu 1} \\ \alpha_{\nu 2} \end{pmatrix} \right\} \tag{3.9}$$

Cette expression s'écrit alors :

$$H_{11} = \sum_\nu \sum_\tau \lambda_\tau^\nu \left(\sum_j x_{\tau j}^\nu \alpha_{\nu j}^\dagger \right) \left(\sum_k x_{\tau k}^\nu \alpha_{\nu k} \right) \tag{3.10}$$

Si l'on pose :

$$\beta_{\nu\tau} = \sum_k x_{\tau k}^\nu \alpha_{\nu k} \quad \text{de même} \quad \beta_{\nu\tau}^\dagger = \sum_k x_{\tau k}^\nu \alpha_{\nu k}^\dagger \tag{3.11}$$

H_{11} s'écrit :

$$H_{11} = \sum_{\nu\tau} \lambda_\tau^\nu \beta_{\nu\tau}^\dagger \beta_{\nu\tau} \tag{3.12}$$

D'après l'expression (3.12) H_{11} qui décrit un système de quasi-particules indépendantes est sous forme diagonale. Les valeurs propres λ_τ^ν représentent les énergies de ces quasi-particules et les vecteurs propres correspondant définissent ainsi la nouvelle transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin. Elle est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \beta_{\nu 1}^\dagger \\ \beta_{\nu 2}^\dagger \\ \beta_{\tilde{\nu} 1} \\ \beta_{\tilde{\nu} 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{\nu 1p} & U_{\nu 1n} & V_{\nu 1p} & V_{\nu 1n} \\ U_{\nu 2p} & U_{\nu 2n} & V_{\nu 2p} & V_{\nu 2n} \\ -V_{\nu 1p} & -V_{\nu 1n} & U_{\nu 1p} & U_{\nu 1n} \\ -V_{\nu 2p} & -V_{\nu 2n} & U_{\nu 2p} & U_{\nu 2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\nu p}^\dagger \\ a_{\nu n}^\dagger \\ a_{\tilde{\nu} p} \\ a_{\tilde{\nu} n} \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

où l'on a noté par :

$$\begin{cases} U_{\nu\tau t} = \sum_j x_{\tau j}^\nu u_{\nu j t} \\ V_{\nu\tau t} = \sum_j x_{\tau j}^\nu v_{\nu j t} \end{cases} \qquad \tau = 1,2 \ ; \ t = n,p \ \text{ et } \ j = 1,2 \tag{3.14}$$

L'expression (3.13) se met sous la forme compacte suivante :

$$\begin{cases} \beta_{\nu\tau}^\dagger = \sum_t \left(U_{\nu\tau t} a_{\nu t}^\dagger + V_{\nu\tau t} a_{\tilde{\nu} t} \right) \\ \beta_{\tilde{\nu}\tau} = \sum_t \left(-V_{\nu\tau t} a_{\nu t}^\dagger + U_{\nu\tau t} a_{\tilde{\nu} t} \right) \end{cases} \qquad \tau = 1,2 \quad \text{et} \quad t = n,p \tag{3.15}$$

La transformation inverse de la nouvelle transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin est :

$$\begin{cases} a_{\nu t}^\dagger = \sum_\tau \left(U_{\nu\tau t} \beta_{\nu\tau}^\dagger - V_{\nu\tau t} \beta_{\tilde{\nu}\tau} \right) \\ a_{\tilde{\nu} t} = \sum_\tau \left(V_{\nu\tau t} \beta_{\nu\tau}^\dagger + U_{\nu\tau t} \beta_{\tilde{\nu}\tau} \right) \end{cases} \qquad \tau = 1,2 \quad \text{et} \quad t = n,p \tag{3.16}$$

Les relations qui expriment l'unitarité de la nouvelle transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin et de sa transformation inverse ont des formes analogues à celles données par les expressions (2.8) et (2.13) où il faut remplacer les u et v par les U et V respectivement.

3.2 L'état fondamental des systèmes pair-pairs

L'état fondamental des noyaux pair-pairs est obtenu quand toutes les particules sont appariées et occupent les niveaux de plus basses énergies. Un tel état a une énergie plus petite comparée à un autre état où les particules sont non appariées ou appariées en partie.

En utilisant la nouvelle transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin, l'état fondamental des systèmes pair-pairs est représenté par l'état $|\Psi\rangle$ qui s'écrit :

$$|\Psi\rangle = C \prod_{\nu>0} \beta_{\nu 1} \beta_{\tilde{\nu} 1} \beta_{\nu 2} \beta_{\tilde{\nu} 2} |0\rangle \tag{3.17}$$

où C est la constante de normalisation.

En utilisant la relation (3.15) , l'expression de l'état normé $|\Psi\rangle$ devient :

$$|\Psi\rangle = \prod_{\nu>0} \left\{ B_1^\nu a_{\tilde{\nu}p}^\dagger a_{\nu p}^\dagger a_{\tilde{\nu}n}^\dagger a_{\nu n}^\dagger + B_p^\nu a_{\tilde{\nu}p}^\dagger a_{\nu p}^\dagger + B_n^\nu a_{\tilde{\nu}n}^\dagger a_{\nu n}^\dagger + B_4^\nu \left(a_{\tilde{\nu}p}^\dagger a_{\nu n}^\dagger + a_{\tilde{\nu}n}^\dagger a_{\nu p}^\dagger \right) + B_5^\nu \right\} |0\rangle \tag{3.18}$$

où les coefficients B_1^ν, B_p^ν, B_n^ν, B_4^ν et B_5^ν sont tels que :

$B_1^\nu = b_1^\nu.C$; $B_p^\nu = b_p^\nu.C$; $B_n^\nu = b_n^\nu.C$; $B_4^\nu = b_4^\nu.C$ et $B_5^\nu = b_5^\nu.C$

où l'on a noté par :

$b_1^\nu = \left(V_{\nu 1p} V_{\nu 2n} - V_{\nu 1n} V_{\nu 2p}\right)^2$

$b_p^\nu = \left(V_{\nu 1p}^2 \left(U_{\nu 2p} V_{\nu 2p} + U_{\nu 2n} V_{\nu 2n}\right) + V_{\nu 2p}^2 \left(U_{\nu 1n} V_{\nu 1n} - U_{\nu 1p} V_{\nu 1p}\right) - 2U_{\nu 1n} V_{\nu 1p} V_{\nu 2p} V_{\nu 2n}\right)$

$b_n^\nu = \left(V_{\nu 1n}^2 \left(U_{\nu 2p} V_{\nu 2p} + U_{\nu 2n} V_{\nu 2n}\right) - V_{\nu 2n}^2 \left(U_{\nu 1n} V_{\nu 1n} - U_{\nu 1p} V_{\nu 1p}\right) - 2U_{\nu 1p} V_{\nu 1n} V_{\nu 2p} V_{\nu 2n}\right)$

$b_4^\nu = \left(V_{\nu 1n} V_{\nu 1p} \left(U_{\nu 2p} V_{\nu 2p} + U_{\nu 2n} V_{\nu 2n}\right) - V_{\nu 2n}^2 \left(U_{\nu 1n} V_{\nu 1p}\right) - V_{\nu 2p}^2 \left(U_{\nu 1p} V_{\nu 1n}\right)\right)$

$b_5^\nu = \left(\left(U_{\nu 1n} V_{\nu 1n} + U_{\nu 1p} V_{\nu 1p}\right) \left(U_{\nu 2p} V_{\nu 2p} + U_{\nu 2n} V_{\nu 2n}\right) - \left(U_{\nu 1n} V_{\nu 2n} + U_{\nu 1p} V_{\nu 2p}\right)^2\right)$

et $C = \left[\prod_{\nu>0} \left\{ \left(b_1^\nu\right)^2 + \left(b_p^\nu\right)^2 + \left(b_n^\nu\right)^2 + 2\left(b_4^\nu\right)^2 + \left(b_5^\nu\right)^2 \right\} \right]^{\frac{-1}{2}}$

Dans le but d'alléger notre notation, l'expression (3.18) se met sous la forme :

$$|\Psi\rangle = \prod_{\nu>0} |\Psi_\nu\rangle \tag{3.19}$$

avec

$$|\Psi_\nu\rangle = \left[B_1^\nu a_{\tilde{\nu}p}^\dagger a_{\nu p}^\dagger a_{\tilde{\nu}n}^\dagger a_{\nu n}^\dagger + B_p^\nu a_{\tilde{\nu}p}^\dagger a_{\nu p}^\dagger + B_n^\nu a_{\tilde{\nu}n}^\dagger a_{\nu n}^\dagger + B_4^\nu \left(a_{\tilde{\nu}p}^\dagger a_{\nu n}^\dagger + a_{\tilde{\nu}n}^\dagger a_{\nu p}^\dagger\right) + B_5^\nu\right] |0\rangle \tag{3.20}$$

L'énergie E_0 de cet état aura une forme analogue à celle donnée par l'expression (2.27) où nous remplacerons les u et v par leurs expressions en fonctions des U et V.

3.3 Calcul de l'énergie BCS dans la représentation particule

L'hamiltonien H peut être mis sous la forme suivante :

$$H = H_0 - \frac{1}{2}\left(H_{ap1} + H_{ap2}\right) \tag{3.21}$$

où

$$H_0 = \sum_{j>0,t} \varepsilon_{jt} \left(a_{jt}^\dagger a_{jt} + a_{\tilde{j}t}^\dagger a_{\tilde{j}t}\right) \tag{3.22}$$

$$H_{ap1} = \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{j,k>0} a_{jt}^\dagger a_{\tilde{j}t'}^\dagger a_{\tilde{k}t'} a_{kt} \tag{3.23}$$

et

$$H_{ap2} = \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{j,k>0} a_{jt}^\dagger a_{\tilde{j}t'}^\dagger a_{\tilde{k}t} a_{kt'} \tag{3.24}$$

La valeur moyenne $E_0 = \langle\Psi\,|H|\,\Psi\rangle$ avec $|\Psi\rangle$ donné par l'expression (3.18) est alors :

$$E_0 = \langle\Psi\,|H_0|\,\Psi\rangle - \frac{1}{2}\left[\langle\Psi\,|H_{ap1}|\,\Psi\rangle + \langle\Psi\,|H_{ap2}|\,\Psi\rangle\right] \tag{3.25}$$

3.3.1 Calcul de $\langle \Psi | H_0 | \Psi \rangle$

Nous avons :

$$\langle \Psi | H_0 | \Psi \rangle = \prod_{\nu>0} \langle \Psi_\nu | \left[\sum_{j>0,t} \varepsilon_{jt} \left(a_{jt}^\dagger a_{jt} + a_{\tilde{j}t}^\dagger a_{\tilde{j}t} \right) \right] \prod_{\mu>0} |\Psi_\mu\rangle \tag{3.26}$$

qu'on réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle \Psi | H_0 | \Psi \rangle = & \prod_{\nu>0} \langle \Psi_\nu | \left[\sum_{j>0,t} \varepsilon_{jt} \left(a_{jt}^\dagger a_{jt} + a_{\tilde{j}t}^\dagger a_{\tilde{j}t} \right) \right] \\ & \left[B_1^j a_{\tilde{j}p}^\dagger a_{jp}^\dagger a_{\tilde{j}n}^\dagger a_{jn}^\dagger + B_p^j a_{\tilde{j}p}^\dagger a_{jp}^\dagger + B_n^j a_{\tilde{j}n}^\dagger a_{jn}^\dagger + B_4^j \left(a_{\tilde{j}p}^\dagger a_{jn}^\dagger + a_{\tilde{j}n}^\dagger a_{jp}^\dagger \right) + B_5^j \right] \\ & \prod_{\mu>0,\mu\neq j} |\Psi_\mu\rangle \end{aligned} \tag{3.27}$$

En utilisant les relations d'anti-commutation entre les opérateurs de création et d'annihilation de particules, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \Psi | H_0 | \Psi \rangle = & \prod_{\nu>0,\nu\neq j} \langle \Psi_\nu | \left[B_1^j a_{jn} a_{\tilde{j}n} a_{jp} a_{\tilde{j}p} + B_p^j a_{jp} a_{\tilde{j}p} + B_n^j a_{jn} a_{\tilde{j}n} + B_4^j \left(a_{jn} a_{\tilde{j}p} + a_{jp} a_{\tilde{j}n} \right) + B_5^j \right] \\ & \sum_{j>0} \left[B_4^j \left(\varepsilon_{jn} + \varepsilon_{jp} \right) \left(a_{\tilde{j}p}^\dagger a_{jn}^\dagger + a_{\tilde{j}n}^\dagger a_{jp}^\dagger \right) + 2 B_n^j \varepsilon_{jn} a_{\tilde{j}n}^\dagger a_{jn}^\dagger + 2 B_p^j \varepsilon_{jp} a_{\tilde{j}p}^\dagger a_{jp}^\dagger \right. \\ & \left. + 2 B_1^j \left(\varepsilon_{jp} + \varepsilon_{jn} \right) a_{\tilde{j}p}^\dagger a_{jp}^\dagger a_{\tilde{j}n}^\dagger a_{jn}^\dagger \right] \prod_{\mu>0,\mu\neq j} |\Psi_\mu\rangle \end{aligned} \tag{3.28}$$

qui devient :

$$\langle \Psi | H_0 | \Psi \rangle = 2 \sum_{j>0} \left[\left(B_4^{j2} + B_1^{j2} \right) \left(\varepsilon_{jn} + \varepsilon_{jp} \right) + B_n^{j2} \varepsilon_{jn} + B_p^{j2} \varepsilon_{jp} \right] \tag{3.29}$$

3.3.2 Calcul de $\langle \Psi | H_{ap1} | \Psi \rangle$

D'après l'expression (3.23) , H_{ap1} peut se mettre sous la forme :

$$H_{ap1} = H_n + H_p + H_{pn} \tag{3.30}$$

où l'on a noté par :

$$\begin{aligned} H_p &= G_{pp} \sum_{j,k>0} a_{jp}^{\dagger} a_{\tilde{j}p}^{\dagger} a_{\tilde{k}p} a_{kp} \\ H_n &= G_{nn} \sum_{j,k>0} a_{jn}^{\dagger} a_{\tilde{j}n}^{\dagger} a_{\tilde{k}n} a_{kn} \\ H_{pn} &= G_{pn} \sum_{j,k>0} \left(a_{jp}^{\dagger} a_{\tilde{j}n}^{\dagger} a_{\tilde{k}n} a_{kp} + a_{jn}^{\dagger} a_{\tilde{j}p}^{\dagger} a_{\tilde{k}p} a_{kn} \right) \end{aligned} \tag{3.31}$$

On obtient alors :

$$\langle \Psi | H_{ap1} | \Psi \rangle = \langle \Psi | H_p | \Psi \rangle + \langle \Psi | H_n | \Psi \rangle + \langle \Psi | H_{pn} | \Psi \rangle \tag{3.32}$$

a/ Calcul de $\langle \Psi | H_p | \Psi \rangle$

Le terme H_p peut se mettre sous la forme :

$$H_p = H_{p1} + H_{p2} \tag{3.33}$$

où :

$$H_{p1} = G_{pp} \sum_{j>0} a_{jp}^{\dagger} a_{\tilde{j}p}^{\dagger} a_{\tilde{j}p} a_{jp} \qquad \text{et} \qquad H_{p2} = G_{pp} \sum_{\substack{j,k>0 \\ j \neq k}} a_{jp}^{\dagger} a_{\tilde{j}p}^{\dagger} a_{\tilde{k}p} a_{kp} \tag{3.34}$$

On obtient alors :

$$\langle \Psi | H_{p1} | \Psi \rangle = G_{pp} \sum_{j>0} \left(B_1^{j2} + B_p^{j2} \right) \tag{3.35}$$

et

$$\langle \Psi | H_{p2} | \Psi \rangle = G_{pp} \sum_{\substack{j,k>0 \\ j \neq k}} \left(B_1^j B_n^j + B_5^j B_p^j \right) \left(B_1^k B_n^k + B_5^k B_p^k \right) \tag{3.36}$$

et par conséquent :

$$\langle \Psi | H_p | \Psi \rangle = G_{pp} \left[\sum_{j>0} \left(B_1^{j2} + B_p^{j2} \right) + \sum_{\substack{j,k>0 \\ j \neq k}} \left(B_1^j B_n^j + B_5^j B_p^j \right) \left(B_1^k B_n^k + B_5^k B_p^k \right) \right] \tag{3.37}$$

b/ Calcul de $\langle\Psi\left|H_n\right|\Psi\rangle$

Le terme H_n se met sous la forme :

$$H_n = H_{n1} + H_{n2} \tag{3.38}$$

où l'on a noté par :

$$H_{n1} = G_{nn}\sum_{j>0} a^{\dagger}_{jn}a^{\dagger}_{\tilde{j}n}a_{\tilde{j}n}a_{jn} \qquad \text{et} \qquad H_{n2} = G_{nn}\sum_{\substack{j,k>0\\ j\neq k}} a^{\dagger}_{jn}a^{\dagger}_{\tilde{j}n}a_{\tilde{k}n}a_{kn} \tag{3.39}$$

Comme :

$$\langle\Psi\left|H_{n1}\right|\Psi\rangle = G_{nn}\sum_{j>0}\left(B_1^{j2} + B_n^{j2}\right) \tag{3.40}$$

et

$$\langle\Psi\left|H_{n2}\right|\Psi\rangle = G_{nn}\sum_{\substack{j,k>0\\ j\neq k}}\left(B_1^jB_p^j + B_5^jB_n^j\right)\left(B_1^kB_p^k + B_5^kB_n^k\right) \tag{3.41}$$

il vient :

$$\langle\Psi\left|H_n\right|\Psi\rangle = G_{nn}\left[\sum_{j>0}\left(B_1^{j2} + B_n^{j2}\right) + \sum_{\substack{j,k>0\\ j\neq k}}\left(B_1^jB_p^j + B_5^jB_n^j\right)\left(B_1^kB_p^k + B_5^kB_n^k\right)\right] \tag{3.42}$$

c/Calcul de $\langle\Psi\left|H_{pn}\right|\Psi\rangle$

De la même manière, nous mettons H_{pn} sous la forme :

$$H_{pn} = H_{pn1} + H_{pn2} \tag{3.43}$$

avec la notation :

$$H_{pn1} = G_{pn} \sum_{j>0} \left(a^{\dagger}_{jp} a^{\dagger}_{\tilde{j}n} a_{\tilde{j}n} a_{jp} + a^{\dagger}_{jn} a^{\dagger}_{\tilde{j}p} a_{\tilde{j}p} a_{jn} \right) \tag{3.44}$$

$$H_{pn2} = G_{pn} \sum_{\substack{j,k>0 \\ j\neq k}} \left(a^{\dagger}_{jp} a^{\dagger}_{\tilde{j}n} a_{\tilde{k}n} a_{kp} + a^{\dagger}_{jn} a^{\dagger}_{\tilde{j}p} a_{\tilde{k}p} a_{kn} \right) \tag{3.45}$$

Étant donné que :

$$\langle \Psi \left| H_{pn1} \right| \Psi \rangle = 2G_{pn} \sum_{j>0} \left(B_4^{j2} + B_1^{j2} \right) \tag{3.46}$$

et

$$\langle \Psi \left| H_{pn2} \right| \Psi \rangle = 2G_{pn} \sum_{\substack{j,k>0 \\ j\neq k}} B_4^j \left(B_1^j - B_5^j \right) B_4^k \left(B_1^k - B_5^k \right) \tag{3.47}$$

On aboutit à :

$$\langle \Psi \left| H_{pn} \right| \Psi \rangle = 2G_{np} \left[\sum_{j>0} (B_4^{j2} + B_1^{j2}) + \sum_{\substack{j,k>0 \\ j\neq k}} B_4^j \left(B_1^j - B_5^j \right) B_4^k \left(B_1^k - B_5^k \right) \right] \tag{3.48}$$

Finalement, l'expression (3.32) devient :

$$\begin{aligned} \langle \Psi \left| H_{ap1} \right| \Psi \rangle = G_{pp} & \left[\sum_{j>0} \left(B_1^{j2} + B_p^{j2} \right) + \sum_{\substack{j,k>0 \\ j\neq k}} \left(B_1^j B_n^j + B_5^j B_p^j \right) \left(B_1^k B_n^k + B_5^k B_p^k \right) \right] \\ + G_{nn} & \left[\sum_{j>0} \left(B_1^{j2} + B_n^{j2} \right) + \sum_{\substack{j,k>0 \\ j\neq k}} \left(B_1^j B_p^j + B_5^j B_n^j \right) \left(B_1^k B_p^k + B_5^k B_n^k \right) \right] \\ + 2G_{np} & \left[\sum_{j>0} \left(B_4^{j2} + B_1^{j2} \right) + \sum_{\substack{j,k>0 \\ j\neq k}} B_4^j \left(B_1^j - B_5^j \right) B_4^k \left(B_1^k - B_5^k \right) \right] \end{aligned} \tag{3.49}$$

3.3.3 Calcul de $\langle \Psi | H_{ap2} | \Psi \rangle$

Comme dans le cas précédent, on a :

$$\langle \Psi | H_{ap2} | \Psi \rangle = \langle \Psi | H_p | \Psi \rangle + \langle \Psi | H_n | \Psi \rangle + \left\langle \Psi \left| H'_{pn} \right| \Psi \right\rangle \tag{3.50}$$

où les termes $\langle \Psi | H_p | \Psi \rangle$ et $\langle \Psi | H_n | \Psi \rangle$ sont donnés par les expressions (3.37) et (3.42). Le seul terme que l'on doit calculer à présent est $\left\langle \Psi \left| H'_{pn} \right| \Psi \right\rangle$.

En adoptant la même démarche, le terme H'_{pn} se met sous la forme :

$$H'_{pn} = H'_{pn1} + H'_{pn2} \tag{3.51}$$

où :

$$H'_{pn1} = G_{pn} \sum_{j>0} \left(a^{\dagger}_{jp} a^{\dagger}_{\tilde{j}n} a_{\tilde{j}p} a_{jn} + a^{\dagger}_{jn} a^{\dagger}_{\tilde{j}p} a_{\tilde{j}n} a_{jp} \right) \tag{3.52}$$

$$H'_{pn2} = G_{pn} \sum_{\substack{j,k>0 \\ j \neq k}} \left(a^{\dagger}_{jp} a^{\dagger}_{\tilde{j}n} a_{\tilde{k}p} a_{kn} + a^{\dagger}_{jn} a^{\dagger}_{\tilde{j}p} a_{\tilde{k}n} a_{kp} \right) \tag{3.53}$$

On obtient donc :

$$\left\langle \Psi \left| H'_{pn1} \right| \Psi \right\rangle = 2 G_{pn} \sum_{j>0} B_4^{j2} \tag{3.54}$$

et

$$\left\langle \Psi \left| H'_{pn2} \right| \Psi \right\rangle = 2 G_{pn} \sum_{\substack{j,k>0 \\ j \neq k}} B_4^j \left(B_1^j - B_5^j \right) B_4^k \left(B_1^k - B_5^k \right) \tag{3.55}$$

soit :

$$\left\langle \Psi \left| H'_{pn} \right| \Psi \right\rangle = 2 G_{pn} \left[\sum_{j>0} B_4^{j2} + \sum_{\substack{j,k>0 \\ j \neq k}} B_4^j \left(B_1^j - B_5^j \right) B_4^k \left(B_1^k - B_5^k \right) \right] \tag{3.56}$$

et donc :

$$\langle \Psi \left| H_{ap2} \right| \Psi \rangle = G_{pp} \left[\sum_{j>0} \left(B_1^{j2} + B_p^{j2} \right) + \sum_{\substack{j,k>0 \\ j\neq k}} \left(B_1^j B_n^j + B_5^j B_p^j \right) \left(B_1^k B_n^k + B_5^k B_p^k \right) \right]$$
$$+ G_{nn} \left[\sum_{j>0} \left(B_1^{j2} + B_n^{j2} \right) + \sum_{\substack{j,k>0 \\ j\neq k}} \left(B_1^j B_p^j + B_5^j B_n^j \right) \left(B_1^k B_p^k + B_5^k B_n^k \right) \right]$$
$$+ 2G_{pn} \left[\sum_{j>0} B_4^{j2} + \sum_{\substack{j,k>0 \\ j\neq k}} B_4^j \left(B_1^j - B_5^j \right) B_4^k \left(B_1^k - B_5^k \right) \right] \tag{3.57}$$

En utilisant les expressions (3.29), (3.49) et (3.57) la valeur moyenne E_0 est alors donnée par :

$$E_0 = 2 \sum_{j>0} \left[\left(B_4^{j2} + B_1^{j2} \right) \left(\varepsilon_{jn} + \varepsilon_{jp} \right) + B_n^{j2} \varepsilon_{jn} + B_p^{j2} \varepsilon_{jp} - \frac{1}{2} G_{pp} \left(B_1^{j2} + B_p^{j2} \right) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} G_{nn} \left(B_1^{j2} + B_n^{j2} \right) - G_{np} \left(B_4^{j2} + \frac{1}{2} B_1^{j2} \right) \right]$$
$$- \sum_{k,j>0, k\neq j} \left[G_{nn} \left(B_1^j B_p^j + B_5^j B_n^j \right) \left(B_1^k B_p^k + B_5^k B_n^k \right) \right.$$
$$+ G_{pp} \left(B_1^j B_n^j + B_5^j B_p^j \right) \left(B_1^k B_n^k + B_5^k B_p^k \right)$$
$$\left. + 2G_{np} B_4^j \left(B_1^j - B_5^j \right) B_4^k \left(B_1^k - B_5^k \right) \right] \tag{3.58}$$

3.4 Les états excités à deux particules

Afin de trouver l'état excité à deux particules, nous allons d'abord donner l'expression de l'état excité à une quasi-particule que l'on utilisera pour trouver l'état excité à deux quasi-particules non appariées. Finalement, nous utiliserons ce dernier pour obtenir l'expression de l'état excité à deux particules non appariées.

3.4.1 L'état à une quasi-particule

En utilisant l'expression (3.15) , l'état à une quasi-particule s'écrit :

$$\begin{aligned}\beta^{\dagger}_{\nu\tau}\left|\Psi\right\rangle = &\left(U_{\nu\tau p}a^{\dagger}_{\nu p} + U_{\nu\tau n}a^{\dagger}_{\nu n} + V_{\nu\tau p}a_{\tilde{\nu}p} + V_{\nu\tau n}a_{\tilde{\nu}n}\right)\\ &\left(B^{\nu}_{1}a^{\dagger}_{\tilde{\nu}p}a^{\dagger}_{\nu p}a^{\dagger}_{\tilde{\nu}n}a^{\dagger}_{\nu n} + B^{\nu}_{p}a^{\dagger}_{\tilde{\nu}p}a^{\dagger}_{\nu p} + B^{\nu}_{n}a^{\dagger}_{\tilde{\nu}n}a^{\dagger}_{\nu n} + B^{\nu}_{4}\left(a^{\dagger}_{\tilde{\nu}p}a^{\dagger}_{\nu n} + a^{\dagger}_{\tilde{\nu}n}a^{\dagger}_{\nu p}\right) + B^{\nu}_{5}\right)\\ &\prod_{j>0,j\neq\nu}\left|\Psi_{j}\right\rangle \end{aligned} \tag{3.59}$$

qui devient :

$$\beta^{\dagger}_{\nu\tau}\left|\Psi\right\rangle = \left[B^{p,n}_{3\nu\tau}A^{\dagger}_{\nu p}a^{\dagger}_{\nu n} + B^{n,p}_{3\nu\tau}A^{\dagger}_{\nu n}a^{\dagger}_{\nu p} + \gamma_{\nu\tau p}a^{\dagger}_{\nu p} + \gamma_{\nu\tau n}a^{\dagger}_{\nu n}\right]\prod_{j>0,j\neq\nu}\left|\Psi_{j}\right\rangle \tag{3.60}$$

où l'on a noté par :

$$\begin{aligned} A^{\dagger}_{\nu t} &= a^{\dagger}_{\tilde{\nu}t}a^{\dagger}_{\nu t} \qquad\qquad t = p,n\\ B^{p,n}_{3\nu\tau} &= B^{\nu}_{p}U_{\nu\tau n} + B^{\nu}_{1}V_{\nu\tau n} - B^{\nu}_{4}U_{\nu\tau p}\\ B^{n,p}_{3\nu\tau} &= B^{\nu}_{n}U_{\nu\tau p} + B^{\nu}_{1}V_{\nu\tau p} - B^{\nu}_{4}U_{\nu\tau n}\\ \gamma_{\nu\tau p} &= B^{\nu}_{5}U_{\nu\tau p} + B^{\nu}_{p}V_{\nu\tau p} + B^{\nu}_{4}V_{\nu\tau n}\\ \gamma_{\nu\tau n} &= B^{\nu}_{5}U_{\nu\tau n} + B^{\nu}_{n}V_{\nu\tau n} + B^{\nu}_{4}V_{\nu\tau p}\end{aligned} \tag{3.61}$$

On constate alors que l'état à une quasi-particule correspond à une superposition d'états ayant un nombre impair de particules. En effet, le niveau d'énergie ε_{ν} peut être occupé soit par un neutron ou un proton célibataire ou bien par une paire de protons appariés et un neutron célibataire ou encore par une paire de neutrons appariés et un proton célibataire. Quant aux autres niveaux, ils sont occupés par des particules appariées.

3.4.2 L'état à deux quasi-particules

a/L'état à deux quasi-particules appariées

En utilisant la relation (3.15), l'état à deux quasi-particules appariées s'écrit :

$$\begin{aligned}\beta^{\dagger}_{\nu\tau}\beta^{\dagger}_{\tilde{\nu}\tau'}\left|\Psi\right\rangle = &\left(U_{\nu\tau p}a^{\dagger}_{\nu p}+U_{\nu\tau n}a^{\dagger}_{\nu n}+V_{\nu\tau p}a_{\tilde{\nu}p}+V_{\nu\tau n}a_{\tilde{\nu}n}\right)\\ &\left(-V_{\nu\tau' p}a_{\nu p}-V_{\nu\tau' n}a_{\nu n}+U_{\nu\tau' p}a^{\dagger}_{\tilde{\nu}p}+U_{\nu\tau' n}a^{\dagger}_{\tilde{\nu}n}\right)\\ &\left[B^{\nu}_{1}a^{\dagger}_{\tilde{\nu}p}a^{\dagger}_{\nu p}a^{\dagger}_{\tilde{\nu}n}a^{\dagger}_{\nu n}+B^{\nu}_{p}a^{\dagger}_{\tilde{\nu}p}a^{\dagger}_{\nu p}+B^{\nu}_{n}a^{\dagger}_{\tilde{\nu}n}a^{\dagger}_{\nu n}+B^{\nu}_{4}\left(a^{\dagger}_{\tilde{\nu}p}a^{\dagger}_{\nu n}+a^{\dagger}_{\tilde{\nu}n}a^{\dagger}_{\nu p}\right)+B^{\nu}_{5}\right]\\ &\prod_{j>0,j\neq\nu}\left|\Psi_j\right\rangle \end{aligned} \tag{3.62}$$

En utilisant les relations (1.3) , cette expression devient :

$$\beta^{\dagger}_{\nu\tau}\beta^{\dagger}_{\tilde{\nu}\tau'}\left|\Psi\right\rangle = \left[C^{\nu}_{1}A^{\dagger}_{\nu p}A^{\dagger}_{\nu n}+C^{\nu}_{p}A^{\dagger}_{\nu p}+C^{\nu}_{n}A^{\dagger}_{\nu n}+C^{\nu,n,p}_{4}a^{\dagger}_{\tilde{\nu}n}a^{\dagger}_{\nu p}+C^{\nu,p,n}_{4}a^{\dagger}_{\tilde{\nu}p}a^{\dagger}_{\nu n}+C^{\nu}_{5}\right]\prod_{\substack{j>0\\ j\neq\nu}}\left|\Psi_j\right\rangle \tag{3.63}$$

où l'on noté par :

$$\begin{aligned} A^{\dagger}_{\nu t} &= a^{\dagger}_{\tilde{\nu}t}a^{\dagger}_{\nu t} \qquad\qquad t=n,p\\ C^{\nu}_{1} &= -U_{\nu\tau p}B^{n,p}_{3\nu\tau'}-U_{\nu\tau n}B^{p,n}_{3\nu\tau'} &(3.64)\\ C^{\nu}_{p} &= -U_{\nu\tau p}\gamma_{\nu\tau' p}+V_{\nu\tau n}B^{p,n}_{3\nu\tau'}\\ C^{\nu}_{n} &= -U_{\nu\tau n}\gamma_{\nu\tau' n}+V_{\nu\tau p}B^{n,p}_{3\nu\tau'} &(3.65)\\ C^{\nu,n,p}_{4} &= -\gamma_{\nu\tau' n}U_{\nu\tau p}-B^{p,n}_{3\nu\tau'}V_{\nu\tau p}\\ C^{\nu,p,n}_{4} &= -\gamma_{\nu\tau' p}U_{\nu\tau n}-B^{n,p}_{3\nu\tau'}V_{\nu\tau n}\\ C^{\nu}_{5} &= V_{\nu\tau p}\gamma_{\nu\tau' p}+\gamma_{\nu\tau' n}V_{\nu\tau n} \end{aligned}$$

Ainsi l'état à deux quasi-particules appariées est une superposition d'états à nombre pair de particules. Le niveau d'énergie ε_ν peut ne comprendre aucune particule, tous les autres niveaux sont occupés par des particules appariées ; comme il peut être occupé soit par une paire de protons appariés, soit par une paire de neutrons appariés ou bien une paire mixte, ou encore deux paires homogènes. Quant aux autres niveaux, ils sont occupés par des particules appariées.

b/L'état à deux quasi particules non appariées

En utilisant l'expression (3.60), l'état à deux quasi-particules non appariées s'écrit :

$$\beta^{\dagger}_{\nu\tau}\beta^{\dagger}_{\tilde{\mu}\tau'}\left|\Psi\right\rangle = \left[B^{p,n}_{3\nu\tau}A^{\dagger}_{\nu p}a^{\dagger}_{\nu n} + B^{n,p}_{3\nu\tau}A^{\dagger}_{\nu n}a^{\dagger}_{\nu p} + \gamma_{\nu\tau p}a^{\dagger}_{\nu p} + \gamma_{\nu\tau n}a^{\dagger}_{\nu n}\right] \left[B^{p,n}_{3\mu\tau'}A^{\dagger}_{\mu p}a^{\dagger}_{\tilde{\mu}n} + B^{n,p}_{3\mu\tau'}A^{\dagger}_{\mu n}a^{\dagger}_{\tilde{\mu}p} + \gamma_{\mu\tau' p}a^{\dagger}_{\tilde{\mu}p} + \gamma_{\mu\tau' n}a^{\dagger}_{\tilde{\mu}n}\right] \prod_{\substack{j>0 \\ j\neq\nu\neq\mu}} \left|\Psi_j\right\rangle \tag{3.66}$$

Comme dans le cas précédent, l'état à deux quasi-particules non appariées correspond à une superposition d'états à nombre pair de particules.

3.4.3 L'état excité à deux particules

Les états excités des systèmes à nombre pair de particules dont l'une est bloquée dans l'état $\left|kT\right\rangle$ et l'autre dans l'état $\left|\tilde{l}T'\right\rangle$ où $k \neq l$ et T, $T' = n$, p ont pour expression :

$$\left|kT\ \tilde{l}T'\right\rangle = K^{TT'}_{kl}a^{\dagger}_{kT}a^{\dagger}_{\tilde{l}T'} \prod_{\substack{j>0, \\ j\neq k\neq l}} \left|\Psi_j\right\rangle \tag{3.67}$$

où $K^{TT'}_{kl}$ est la constante de normalisation.

Nous allons distinguer successivement les états :

$$\left|kn\tilde{l}p\right\rangle = K^{np}_{kl}a^{\dagger}_{kn}a^{\dagger}_{\tilde{l}p} \prod_{\substack{j>0 \\ j\neq k\neq l}} \left|\Psi_j\right\rangle \quad , \quad \left|kp\tilde{l}n\right\rangle = K^{pn}_{kl}a^{\dagger}_{kp}a^{\dagger}_{\tilde{l}n} \prod_{\substack{j>0 \\ j\neq k\neq l}} \left|\Psi_j\right\rangle \tag{3.68}$$

$$\left|kp\tilde{l}p\right\rangle = K^{pp}_{kl}a^{\dagger}_{kp}a^{\dagger}_{\tilde{l}p} \prod_{\substack{j>0 \\ j\neq k\neq l}} \left|\Psi_j\right\rangle \quad , \quad \left|kn\tilde{l}n\right\rangle = K^{nn}_{kl}a^{\dagger}_{kn}a^{\dagger}_{\tilde{l}n} \prod_{\substack{j>0 \\ j\neq k\neq l}} \left|\Psi_j\right\rangle \tag{3.69}$$

Afin de trouver les états physiques à deux particules, nous allons d'abord écrire la relation de fermeture dans la base des états de quasi-particules.

Soient $\mathcal{P}_{|\Psi\rangle}$, $\mathcal{P}_{|\nu\tau\rangle}$, $\mathcal{P}_{|\nu\tau\tilde{\nu}\tau'\rangle}$ et $\mathcal{P}_{|\nu\tau\mu\tau'\rangle}$ les opérateurs projection sur les sous espaces engendrés respectivement par les états $|\Psi\rangle$, $|\nu\tau\rangle$, $|\nu\tau\tilde{\nu}\tau'\rangle$ et $|\nu\tau\mu\tau'\rangle$ tels que :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{|\Psi\rangle} = |\Psi\rangle\langle\Psi| \\ \mathcal{P}_{|\nu\tau\rangle} = a\sum_{\nu\tau}|\nu\tau\rangle\langle\nu\tau| = a\sum_{\nu\tau}\beta^{\dagger}_{\nu\tau}|\Psi\rangle\langle\Psi|\beta_{\nu\tau} \\ \mathcal{P}_{|\nu\tau\tilde{\nu}\tau'\rangle} = b\sum_{\nu\tau\tau'}|\nu\tau\tilde{\nu}\tau'\rangle\langle\nu\tau\tilde{\nu}\tau'| = b\sum_{\nu\tau\tau'}\beta^{\dagger}_{\nu\tau}\beta^{\dagger}_{\tilde{\nu}\tau'}|\Psi\rangle\langle\Psi|\beta_{\tilde{\nu}\tau'}\beta_{\nu\tau} \\ \mathcal{P}_{|\nu\tau\mu\tau'\rangle} = c\sum_{\substack{\nu,\mu,\nu\neq\mu \\ \tau\tau'}}|\nu\tau\mu\tau'\rangle\langle\nu\tau\mu\tau'| = c\sum_{\substack{\nu,\mu,\nu\neq\mu \\ \tau\tau'}}\beta^{\dagger}_{\nu\tau}\beta^{\dagger}_{\mu\tau'}|\Psi\rangle\langle\Psi|\beta_{\mu\tau'}\beta_{\nu\tau} \end{cases} \tag{3.70}$$

où a, b et c sont des constantes de normalisation.

La relation de fermeture dans la représentation quasi-particule est :

$$1 = |\Psi\rangle\langle\Psi| + a\sum_{\nu,\tau}\beta^{\dagger}_{\nu\tau}|\Psi\rangle\langle\Psi|\beta_{\nu\tau} + b\sum_{\nu,\tau\tau'}\beta^{\dagger}_{\nu\tau}\beta^{\dagger}_{\tilde{\nu}\tau'}|\Psi\rangle\langle\Psi|\beta_{\tilde{\nu}\tau'}\beta_{\nu\tau} + c\sum_{\substack{\nu\neq\mu \\ \tau\tau'}}\beta^{\dagger}_{\nu\tau}\beta^{\dagger}_{\mu\tau'}|\Psi\rangle\langle\Psi|\beta_{\mu\tau'}\beta_{\nu\tau} + .. \tag{3.71}$$

Dans le but de déterminer les coefficients a, b et c, on utilise le fait que les opérateurs $\mathcal{P}$ sont des projecteurs et en particulier :

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \tag{3.72}$$

et sachant que :

$$\begin{aligned} \left\langle\Psi\left|\beta_{\nu\tau}\beta^{\dagger}_{\mu\tau'}\right|\Psi\right\rangle &= \delta_{\nu\mu}\delta_{\tau\tau'} \\ \left\langle\Psi\left|\beta_{\tilde{\nu}\tau'}\beta_{\nu\tau}\beta^{\dagger}_{\mu\tau1}\beta^{\dagger}_{\tilde{\mu}\tau2}\right|\Psi\right\rangle &= \delta_{\tilde{\nu}\mu}\delta_{\tau'\tau1}\delta_{\tau\tau2} + \delta_{\nu\mu}\delta_{\tau'\tau2}\delta_{\tau\tau1} \\ \left\langle\Psi\left|\beta_{\mu\tau'}\beta_{\nu\tau}\beta^{\dagger}_{\gamma\tau1}\beta^{\dagger}_{\eta\tau2}\right|\Psi\right\rangle &= -\delta_{\nu\eta}\delta_{\mu\gamma}\delta_{\tau'\tau1}\delta_{\tau\tau2} + \delta_{\nu\gamma}\delta_{\mu\eta}\delta_{\tau'\tau2}\delta_{\tau\tau1} \end{aligned} \tag{3.73}$$

On obtient : $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{2}$

La relation de fermeture est donc :

$$1 = |\Psi\rangle\langle\Psi| + \sum_{\nu>0,\tau}\left[\beta^{\dagger}_{\nu\tau}|\Psi\rangle\langle\Psi|\beta_{\nu\tau} + \beta^{\dagger}_{\tilde{\nu}\tau}|\Psi\rangle\langle\Psi|\beta_{\tilde{\nu}\tau}\right] +$$
$$\sum_{\nu>0,\tau\tau'}\beta^{\dagger}_{\nu\tau}\beta^{\dagger}_{\tilde{\nu}\tau'}|\Psi\rangle\langle\Psi|\beta_{\tilde{\nu}\tau'}\beta_{\nu\tau} + \sum_{\substack{\nu,\mu>0\\ \nu\neq\mu,\tau\tau'}}\beta^{\dagger}_{\nu\tau}\beta^{\dagger}_{\tilde{\mu}\tau'}|\Psi\rangle\langle\Psi|\beta_{\tilde{\mu}\tau'}\beta_{\nu\tau}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\substack{\nu,\mu>0\\ \nu\neq\mu,\tau\tau'}}\left(\beta^{\dagger}_{\nu\tau}\beta^{\dagger}_{\mu\tau'}|\Psi\rangle\langle\Psi|\beta_{\mu\tau'}\beta_{\nu\tau} + \beta^{\dagger}_{\tilde{\nu}\tau}\beta^{\dagger}_{\tilde{\mu}\tau'}|\Psi\rangle\langle\Psi|\beta_{\tilde{\mu}\tau'}\beta_{\tilde{\nu}\tau}\right) + .. \tag{3.74}$$

L'état à deux particules $\left|kn\tilde{l}p\right\rangle$ s'écrivant :

$$\left|kn\tilde{l}p\right\rangle = K^{np}_{kl}a^{\dagger}_{kn}a^{\dagger}_{\tilde{l}p}\prod_{\substack{j>0\\ j\neq k\neq l}}|\Psi_j\rangle$$

devient :

$$\left|kn\tilde{l}p\right\rangle = K^{np}_{kl}\Bigg\{|\Psi\rangle\langle\Psi|a^{\dagger}_{kn}a^{\dagger}_{\tilde{l}p}\prod_{\substack{j>0\\ j\neq k\neq l}}|\Psi_j\rangle + \sum_{\nu>0,\tau}[\beta^{\dagger}_{\nu\tau}|\Psi\rangle\langle\Psi|\beta_{\nu\tau}\, a^{\dagger}_{kn}a^{\dagger}_{\tilde{l}p}\prod_{\substack{j>0\\ j\neq k\neq l}}|\Psi_j\rangle +$$
$$\beta^{\dagger}_{\tilde{\nu}\tau}|\Psi\rangle\langle\Psi|\beta_{\tilde{\nu}\tau}a^{\dagger}_{kn}a^{\dagger}_{\tilde{l}p}\prod_{\substack{j>0\\ j\neq k\neq l}}|\Psi_j\rangle] + \sum_{\nu>0,\tau\tau'}\beta^{\dagger}_{\nu\tau}\beta^{\dagger}_{\tilde{\nu}\tau'}|\Psi\rangle\langle\Psi|\beta_{\tilde{\nu}\tau'}\beta_{\nu\tau}a^{\dagger}_{kn}a^{\dagger}_{\tilde{l}p}\prod_{\substack{j>0\\ j\neq k\neq l}}|\Psi_j\rangle$$
$$+\sum_{\substack{\nu,\mu>0\\ \nu\neq\mu\\ \tau\tau'}}\beta^{\dagger}_{\nu\tau}\beta^{\dagger}_{\tilde{\mu}\tau'}|\Psi\rangle\langle\Psi|\beta_{\tilde{\mu}\tau'}\beta_{\nu\tau}a^{\dagger}_{kn}a^{\dagger}_{\tilde{l}p}\prod_{\substack{j>0\\ j\neq k\neq l}}|\Psi_j\rangle +$$
$$\frac{1}{2}\sum_{\substack{\nu,\mu>0\\ \nu\neq\mu\\ \tau\tau'}}\Big[\beta^{\dagger}_{\nu\tau}\beta^{\dagger}_{\mu\tau'}|\Psi\rangle\langle\Psi|\beta_{\mu\tau'}\beta_{\nu\tau}a^{\dagger}_{kn}a^{\dagger}_{\tilde{l}p}\prod_{\substack{j>0\\ j\neq k\neq l}}|\Psi_j\rangle +$$
$$\beta^{\dagger}_{\tilde{\nu}\tau}\beta^{\dagger}_{\tilde{\mu}\tau'}|\Psi\rangle\langle\Psi|\beta_{\tilde{\mu}\tau'}\beta_{\tilde{\nu}\tau}\, a^{\dagger}_{kn}a^{\dagger}_{\tilde{l}p}\prod_{\substack{j>0\\ j\neq k\neq l}}|\Psi_j\rangle] + ...\Bigg\} \tag{3.75}$$

On doit à présent calculer les différents produits scalaires qui apparaissent dans cette expression.

1/Calcul de $\langle\Psi|\, a^{\dagger}_{kn} a^{\dagger}_{\tilde{l}p} \prod\limits_{\substack{j>0 \\ j\neq k\neq l}} |\Psi_j\rangle$

On a :

$$\langle\Psi|\, a^{\dagger}_{kn} a^{\dagger}_{\tilde{l}p} \prod_{\substack{j>0 \\ j\neq k\neq l}} |\Psi_j\rangle = \prod_{\nu>0} \langle\Psi_\nu|\, a^{\dagger}_{kn} a^{\dagger}_{\tilde{l}p} \prod_{\substack{j>0 \\ j\neq k\neq l}} |\Psi_j\rangle \tag{3.76}$$

Étant donné que l'on s'intéresse au niveau d'énergie où une particule est bloquée dans un état $|k\rangle$ et l'autre est bloquée dans un état $|l\rangle$ où $k \neq l$ et en utilisant le théorème de Wick pour le calcul de l'expression (3.76), on obtient :

$$\langle\Psi|\, a^{\dagger}_{kn} a^{\dagger}_{\tilde{l}p} \prod_{\substack{j>0 \\ j\neq k\neq l}} |\Psi_j\rangle = 0 \tag{3.77}$$

2/Calcul de $\langle\Psi|\, \beta_{\nu\tau} a^{\dagger}_{kn} a^{\dagger}_{\tilde{l}p} \prod\limits_{\substack{j>0 \\ j\neq k\neq l}} |\Psi_j\rangle$ et $\langle\Psi|\, \beta_{\tilde{\nu}\tau} a^{\dagger}_{kn} a^{\dagger}_{\tilde{l}p} \prod\limits_{\substack{j>0 \\ j\neq k\neq l}} |\Psi_j\rangle$

En procédant de la même manière et en utilisant l'expression (3.60), on aboutit à :

$$\begin{aligned} \langle\Psi|\, \beta_{\nu\tau} a^{\dagger}_{kn} a^{\dagger}_{\tilde{l}p} \prod_{\substack{j>0 \\ j\neq k\neq l}} |\Psi_j\rangle \quad = \quad & \prod_{\substack{j>0 \\ j\neq \nu}} \langle\Psi_j|\, \left[B^{p,n}_{3\nu\tau} A_{\nu p} a_{\nu n} + B^{n,p}_{3\nu\tau} A_{\nu n} a_{\nu p} + \gamma_{\nu\tau p} a_{\nu p} + \gamma_{\nu\tau n} a_{\nu n}\right] \\ & a^{\dagger}_{kn} a^{\dagger}_{\tilde{l}p} \prod_{\substack{j>0 \\ j\neq k\neq l}} |\Psi_j\rangle \end{aligned} \tag{3.78}$$

Comme l'état $\beta^{\dagger}_{\nu\tau} |\Psi\rangle$ est une superposition d'états à nombre impair de particules, il est donc orthogonal à l'état à deux particules non appariées $a^{\dagger}_{kn} a^{\dagger}_{\tilde{l}p} \prod\limits_{\substack{j>0 \\ j\neq k\neq l}} |\Psi_j\rangle$. En utilisant le théorème de Wick, on trouve :

$$\langle\Psi|\, \beta_{\nu\tau} a^{\dagger}_{kn} a^{\dagger}_{\tilde{l}p} \prod_{\substack{j>0 \\ j\neq k\neq l}} |\Psi_j\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle\Psi|\, \beta_{\tilde{\nu}\tau} a^{\dagger}_{kn} a^{\dagger}_{\tilde{l}p} \prod_{\substack{j>0 \\ j\neq k\neq l}} |\Psi_j\rangle = 0 \tag{3.79}$$

3/Calcul de $\langle\Psi|\,\beta_{\tilde{\nu}\tau'}\beta_{\nu\tau}a^{\dagger}_{kn}a^{\dagger}_{\tilde{l}p}\prod\limits_{j>0,j\neq k\neq l}|\Psi_j\rangle$

On s'intéresse dans notre calcul aux états excités à deux particules non appariées c'est à dire occupant des niveaux d'énergie distincts. Or, comme on l'a déjà vu précédemment, l'état $\beta^{\dagger}_{\nu\tau}\beta^{\dagger}_{\tilde{\nu}\tau'}|\Psi\rangle$ est une superposition d'états à nombre pair de particules appariées. Par conséquent, l'état $a^{\dagger}_{kn}a^{\dagger}_{\tilde{l}p}\prod\limits_{\substack{j>0\\ j\neq k\neq l}}|\Psi_j\rangle$ lui est perpendiculaire. D'où :

$$\langle\Psi|\,\beta_{\tilde{\nu}\tau'}\beta_{\nu\tau}a^{\dagger}_{kn}a^{\dagger}_{\tilde{l}p}\prod_{\substack{j>0\\ j\neq k\neq l}}|\Psi_j\rangle = 0 \tag{3.80}$$

4/Calcul de $\langle\Psi|\,\beta_{\tilde{\mu}\tau'}\beta_{\nu\tau}a^{\dagger}_{kn}a^{\dagger}_{\tilde{l}p}\prod\limits_{\substack{j>0\\ j\neq k\neq l}}|\Psi_j\rangle$

En utilisant l'état à deux quasi-particules non appariées donné par l'expression (3.66), on obtient :

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\,\beta_{\tilde{\mu}\tau'}\beta_{\nu\tau}a^{\dagger}_{kn}a^{\dagger}_{\tilde{l}p}\prod_{\substack{j>0\\ j\neq k\neq l}}|\Psi_j\rangle = \prod_{\substack{j>0\\ j\neq\nu\neq\mu}}\langle\Psi_j|\left[B^{p,n}_{3\mu\tau'}A_{\mu p}a_{\tilde{\mu}n}+B^{n,p}_{3\mu\tau'}A_{\mu n}a_{\tilde{\mu}p}+\gamma_{\mu\tau' p}a_{\tilde{\mu}p}+\gamma_{\mu\tau' n}a_{\tilde{\mu}n}\right]\\ \left[B^{p,n}_{3\nu\tau}A_{\nu p}a_{\nu n}+B^{n,p}_{3\nu\tau}A_{\nu n}a_{\nu p}+\gamma_{\nu\tau p}a_{\nu p}+\gamma_{\nu\tau n}a_{\nu n}\right]a^{\dagger}_{kn}a^{\dagger}_{\tilde{l}p}\prod_{\substack{j>0\\ j\neq k\neq l}}|\Psi_j\rangle\end{aligned} \tag{3.81}$$

Le seul terme qui a une contribution non nulle est :

$$\prod_{\substack{j>0\\ j\neq\nu\neq\mu}}\langle\Psi_j|\left(\gamma_{\mu\tau' p}a_{\tilde{\mu}p}+\gamma_{\mu\tau' n}a_{\tilde{\mu}n}\right)\left(\gamma_{\nu\tau p}a_{\nu p}+\gamma_{\nu\tau n}a_{\nu n}\right)a^{\dagger}_{kn}a^{\dagger}_{\tilde{l}p}\prod_{\substack{j>0\\ j\neq k\neq l}}|\Psi_j\rangle \tag{3.82}$$

qui se réduit à :

$$\gamma_{k\tau n}\gamma_{l\tau' p}\delta_{k\nu}\delta_{\mu l} \tag{3.83}$$

5/Calcul de $\langle\Psi|\,\beta_{\mu\tau'}\beta_{\nu\tau}a^{\dagger}_{kn}a^{\dagger}_{\tilde{l}p}\prod\limits_{\substack{j>0\\ j\neq k\neq l}}|\Psi_j\rangle$ **et** $\langle\Psi|\,\beta_{\tilde{\mu}\tau'}\beta_{\tilde{\nu}\tau}a^{\dagger}_{kn}a^{\dagger}_{\tilde{l}p}\prod\limits_{\substack{j>0\\ j\neq k\neq l}}|\Psi_j\rangle$

En suivant le même raisonnement, on montre aisément que la contribution de ces deux termes est nulle.

En conclusion, l'état excité à deux particules non appariées donné par l'expression (3.75) prend la forme suivante :

$$\left|kn\tilde{l}p\right\rangle = K^{np}_{kl}\sum_{\tau\tau'}\gamma_{k\tau n}\gamma_{l\tau' p}\beta^{\dagger}_{k\tau}\beta^{\dagger}_{\tilde{l}\tau'}\left|\Psi\right\rangle \tag{3.84}$$

où

$$K^{np}_{kl} = \left(\sum_{\tau\tau'}\gamma^2_{k\tau n}\gamma^2_{l\tau' p}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.85}$$

D'une manière générale, les états excités à deux particules normés sont donnés par :

$$\left|kT\tilde{l}T'\right\rangle = K^{TT'}_{kl}\sum_{\tau\tau'}\gamma_{k\tau T}\gamma_{l\tau' T'}\beta^{\dagger}_{k\tau}\beta^{\dagger}_{\tilde{l}\tau'}\left|\Psi\right\rangle \tag{3.86}$$

avec :

$$K^{TT'}_{kl} = \left(\sum_{\tau\tau'}\gamma^2_{k\tau T}\gamma^2_{l\tau' T'}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.87}$$

D'après l'expression (3.86) , nous remarquons que les états excités à deux particules se présentent comme combinaisons linéaires d'états à deux quasi-particules.

3.5 Énergie des états excités à deux particules

L'énergie de l'état excité à deux particules défini précédemment est :

$$\begin{aligned} E^{TT'}_{kl} &= \left\langle kT\tilde{l}T'\right|H\left|kT\tilde{l}T'\right\rangle \\ &= \left(K^{TT'}_{kl}\right)^2\sum_{\tau 1\tau 2\tau 3\tau 4}\gamma_{k\tau_1 T}\gamma_{l\tau_2 T'}\gamma_{k\tau_3 T}\gamma_{l\tau_4 T'}\left\langle\Psi\mid\beta_{\tilde{l}\tau_4}\beta_{k\tau_3}H\beta^{\dagger}_{k\tau_1}\beta^{\dagger}_{\tilde{l}\tau_2}\mid\Psi\right\rangle \end{aligned} \tag{3.88}$$

L'approximation des quasi-particules indépendantes consiste à négliger le terme d'interaction résiduelle H_{res} [26]. L'hamiltonien H s'écrit alors :

$$H = E_0 + \sum_{\nu\tau} \lambda_\tau^\nu \beta_{\nu\tau}^\dagger \beta_{\nu\tau} \tag{3.89}$$

En injectant cette équation dans l'expression (3.88) et en utilisant le théorème de Wick, on obtient :

$$E_{kl}^{TT'} = E_0 + \left(K_{kl}^{TT'}\right)^2 \left[\left(\sum_\tau \lambda_\tau^k \gamma_{k\tau T}^2 \right) \left(\sum_\tau \gamma_{l\tau T'}^2 \right) + \left(\sum_\tau \lambda_\tau^l \gamma_{l\tau T'}^2 \right) \left(\sum_\tau \gamma_{k\tau T}^2 \right) \right] \tag{3.90}$$

où λ_τ^ν et E_0 sont donnés respectivement par les expressions (3.4) et (3.58).

En conclusion, nous avons écrit dans le présent chapitre la transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin qui diagonalise l'hamiltonien du système H définissant ainsi une base de représentation pour les états sur lesquels il est diagonal. Ceci nous a permis par la suite de trouver les états excités à deux particules des systèmes pair-pairs et leurs énergies dans le cadre de l'approximation des quasi-particules indépendantes. Ces derniers se présentent comme combinaisons linéaires d'états à deux quasi-particules contrairement à leurs homologues de la méthode BCS, pour un système de particules identiques, qui se réduisent aux états à deux quasi-particules [30–32].

Chapitre 4

Le moment d'inertie

Le moment d'inertie est une grandeur physique très importante qui joue un rôle primordial dans la description des mouvements de rotation des noyaux. Du fait qu'il est sensible à la déformation, sa mesure peut donner des indications précieuses sur la forme du noyau [30–32]. Or, son évaluation n'a pas donné les résultats espérés compte tenu des grands écarts existant entre les valeurs théoriques et les données expérimentales correspondantes et ceci malgré les différentes méthodes utilisées pour les réduire. Afin d'évaluer le moment d'inertie plusieurs modèles furent élaborés tels que : le modèle du flux irrotationnel, rotationnel et le modèle du cranking. Des améliorations ont été apportées à ces modèles et cela en introduisant les interactions résiduelles dont la composante la plus importante est celle due aux corrélations d'appariement [60, 63].

Dans le présent chapitre nous allons étudier l'effet de l'interaction d'appariement sur le moment d'inertie dans l'approximation BCS. Aussi, le moment de l'état fondamental sera calculé par la méthode du cranking d'Inglis [21–23].

4.1 Modèle du cranking d'Inglis

Dans le modèle du cranking d'Inglis (1954), les nucléons ne suivent pas d'une manière rigide le mouvement global de rotation. En effet, le noyau est considéré comme un ensemble de nucléons se déplaçant indépendamment les uns des autres dans un champ moyen et l'effet de rotation est traité comme perturbation du système. Ce modèle admet que le processus étudié est approximativement adiabatique [30,60,63] c'est-à-dire que les vitesses collectives sont petites comparées aux vitesses du mouvement intrinsèque des nucléons. Cette approximation permet de justifier le découplage entre le mouvement des particules indépendantes dans le champ moyen et les modes collectifs du noyau.

Si l'on désigne par ω la vitesse angulaire de rotation du système de coordonnées autour d'un axe fixe dans l'espace, généralement l'axe Ox, l'axe de symétrie Oz lui sera perpendiculaire, alors les nucléons qui sont considérés comme des particules indépendantes se meuvent dans un potentiel moyen qui tourne avec le repère. La méthode du cranking consiste à chercher les fonctions d'onde intrinsèques stationnaires dans le repère en rotation.

4.1.1 Formule d'Inglis

La fonction d'onde pour le système en rotation exprimée dans le repère fixe est solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps :

$$H\varphi_\omega\left(\overrightarrow{r},t\right) = i\hbar\frac{\partial\varphi_\omega\left(\overrightarrow{r},t\right)}{\partial t} \tag{4.1}$$

Cette solution est de la forme :

$$\varphi'_\omega\left(\overrightarrow{r},t\right) = e^{i\omega t j_x}\varphi_\omega\left(\overrightarrow{r},t\right) \tag{4.2}$$

où j_x représente la projection sur l'axe Ox du moment angulaire.

Les expressions (4.1) et (4.2) conduisent à :

$$\left(H - \hbar\omega j_x\right)\varphi'_\omega\left(\overrightarrow{r},t\right) = i\hbar\frac{\partial\varphi'_\omega\left(\overrightarrow{r},t\right)}{\partial t} \tag{4.3}$$

La fonction d'onde $\varphi'_\omega(\overrightarrow{r},t)$ est stationnaire dans le repère en rotation, elle s'écrit alors sous la forme :

$$\varphi'_\omega(\overrightarrow{r},t) = e^{-\frac{iE'_\omega t}{\hbar}}\phi_\omega(\overrightarrow{r}) \tag{4.4}$$

L'expression (4.3) devient donc :

$$(H - \hbar\omega j_x)\,\phi_\omega(\overrightarrow{r}) = E'_\omega\phi_\omega(\overrightarrow{r}) \tag{4.5}$$

qui se met sous la forme :

$$H_\omega\phi_\omega(\overrightarrow{r}) = E'_\omega\phi_\omega(\overrightarrow{r}) \tag{4.6}$$

où l'on a noté par :

$$H_\omega = H - \hbar\omega j_x \tag{4.7}$$

H_ω représente l'hamiltonien du cranking pour un système de particules indépendantes.

D'après l'équation (4.5) nous constatons que les fonctions $\phi_\omega(\overrightarrow{r})$ ne sont pas états propres de l'hamiltonien du système H ni du moment angulaire j_x et c'est là le principal défaut du modèle du cranking. Étant donné que la composante j_x du moment angulaire total commute avec l'hamiltonien H et comme toute valeur moyenne est indépendante de la représentation utilisée, nous avons :

$$E(\omega) = \langle\varphi_\omega(\overrightarrow{r},t)\,|H|\,\varphi_\omega(\overrightarrow{r},t)\rangle = \langle\varphi'_\omega(\overrightarrow{r},t)\,|H|\,\varphi'_\omega(\overrightarrow{r},t)\rangle \tag{4.8}$$

L'expression (4.4) nous permet d'écrire :

$$E(\omega) = \langle\phi_\omega(\overrightarrow{r})\,|H|\,\phi_\omega(\overrightarrow{r})\rangle \tag{4.9}$$

Nous considérons le terme ωj_x comme terme perturbatif à l'hamiltonien H. La vitesse angulaire de rotation étant petite, nous développons $E(\omega)$ en série de puissance de ω jusqu'à l'ordre 2. L'équation aux valeurs propres pour le système perturbé s'écrit alors :

$$H_\omega\,|\phi_\omega\rangle = E(\omega)\,|\phi_\omega\rangle \tag{4.10}$$

Nous avons jusqu'au deuxième ordre en ω :

$$E(\omega) = E_0 + \omega E_1 + \omega^2 E_2 \tag{4.11}$$

$$|\phi_\omega\rangle = |\Psi\rangle + \omega \left|\Psi_{(1)}\right\rangle + \omega^2 \left|\Psi_{(2)}\right\rangle \tag{4.12}$$

Sachant que $|\Psi\rangle$ et E_0 représentent respectivement la fonction d'onde et l'énergie du système non perturbé. Nous supposons que les états propres de H_ω sont orthonormés :

$$\left\langle \Psi_{(i)} \mid \Psi_{(j)} \right\rangle = \delta_{ij} \quad \text{d'où} \quad \langle \Psi \mid \phi_\omega \rangle = 1 \tag{4.13}$$

En remplaçant les expressions (4.11) et (4.12) dans l'expression (4.10) et par identification nous aboutissons à :

$$|\Psi\rangle = E_0 |\Psi\rangle \tag{4.14}$$

$$H \left|\Psi_{(1)}\right\rangle - j_x |\Psi\rangle = E_0 \left|\Psi_{(1)}\right\rangle + E_1 |\Psi\rangle \tag{4.15}$$

$$H \left|\Psi_{(2)}\right\rangle - j_x \left|\Psi_{(1)}\right\rangle = E_2 |\Psi\rangle + E_1 \left|\Psi_{(1)}\right\rangle + E_0 \left|\Psi_{(2)}\right\rangle \tag{4.16}$$

En multipliant les deux membres de l'équation (4.15) par le bras $\langle\Psi|$ et en tenant compte de la relation d'orthonormalisation donnée par l'expression (4.13) nous aboutissons à :

$$E_1 = 0 \tag{4.17}$$

Pour déterminer l'état $\left|\Psi_{(1)}\right\rangle$, nous développons ce dernier sur la base $\{|\Psi_k\rangle\}$:

$$\left|\Psi_{(1)}\right\rangle = \sum_k a_k |\Psi_k\rangle \tag{4.18}$$

L'équation (4.15) devient :

$$(H - E_0) \sum_k a_k |\Psi_k\rangle = j_x |\Psi\rangle \tag{4.19}$$

En multipliant les deux membres de l'équation (4.19) par le bras $\langle \Psi_\mu|$ où $\langle \Psi_\mu| \neq \langle \Psi|$, nous obtenons :

$$a_\mu = \hbar \frac{\langle \Psi_\mu |j_x| \Psi\rangle}{E_\mu - E_0}$$

où les E_μ sont les énergies propres de H.

L'expression (4.18) devient :

$$\left|\Psi_{(1)}\right\rangle = \hbar \sum_{\mu\neq 0} \frac{\langle \Psi_\mu |j_x| \Psi\rangle}{E_\mu - E_0} \left|\Psi_\mu\right\rangle \tag{4.20}$$

En procédant de la même manière et en injectant ce résultat dans l'expression (4.16), nous obtenons :

$$E_2 = \hbar^2 \sum_{\mu\neq 0} \frac{\left|\langle \Psi |j_x| \Psi_\mu\rangle\right|^2}{E_0 - E_\mu} \tag{4.21}$$

Les expressions (4.11) et (4.12) deviennent :

$$E(\omega) = E_0 + \omega^2\hbar^2 \sum_{\mu\neq 0} \frac{\left|\langle \Psi |j_x| \Psi_\mu\rangle\right|^2}{E_0 - E_\mu} \tag{4.22}$$

$$|\phi_\omega\rangle = |\Psi\rangle + \omega^2 \left|\Psi_{(2)}\right\rangle \tag{4.23}$$

Sachant que :

$$E(\omega) = E_0 + \frac{1}{2} I\omega^2 \tag{4.24}$$

où I est le moment d'inertie du système en rotation. Par identification, on obtient :

$$I = 2\hbar^2 \sum_{\mu\neq 0} \frac{\left|\langle \Psi_\mu |j_x| \Psi\rangle\right|^2}{E_\mu - E_0} \tag{4.25}$$

L'expression (4.25) représente le moment d'inertie statique.

Posons :

$$|\Psi_\mu\rangle = |\mu\rangle \qquad \text{et} \qquad |\Psi\rangle = |0\rangle \tag{4.26}$$

L'expression (4.25) s'écrit alors :

$$I = 2\hbar^2 \sum_{\substack{\mu \\ \mu \neq 0}} \frac{|\langle \mu \,| j_x |\, 0 \rangle|^2}{(E_\mu - E_0)} \tag{4.27}$$

4.2 L'effet de l'appariement isovectoriel sur le moment d'inertie

Nous nous intéressons dans ce qui suit à l'effet des corrélations d'appariement dans le cas isovectoriel sur le moment d'inertie. Pour cela, l'hamiltonien qui apparaît dans l'expression (4.7) est notre hamiltonien sous sa forme diagonale donnée par l'expression (3.89) et l'état fondamental $|0\rangle$ est représenté par l'état fondamental des noyaux pair-pairs $|\Psi\rangle$ donné par l'expression (3.18) d'énergie E_{BCS}. Le moment d'inertie donné par l'expression (4.27) prend alors la forme suivante :

$$I = 2\hbar^2 \sum_{\substack{i \\ i \neq 0}} \frac{|\langle i \,| j_x |\, \Psi \rangle|^2}{E_i - E_{BCS}} \tag{4.28}$$

où l'état $|i\rangle$ est différent de l'état $|BCS\rangle$

L'opérateur moment angulaire étant un opérateur à un corps, il s'écrit dans le formalisme de la seconde quantification comme :

$$j_x = \sum_{\substack{kl \\ tt'}} \langle kt \,| j_x |\, lt' \rangle \, a^\dagger_{kt} a_{lt'} \tag{4.29}$$

et compte tenu de la transformation généralisée inverse de Bogoliubov-Valatin donnée par (3.16), j_x prend la forme :

$$j_x = \sum_{\substack{kl,tt' \\ \tau\tau'}} \langle kt \,| j_x |\, lt' \rangle \left(U_{k\tau t} \beta^\dagger_{k\tau} - V_{k\tau t} \beta_{\tilde{k}\tau} \right) \left(U_{l\tau' t'} \beta_{l\tau'} - V_{l\tau' t'} \beta^\dagger_{\tilde{l}\tau'} \right) \tag{4.30}$$

L'élément de matrice $\langle i\,|j_x|\,\Psi\rangle$ s'écrit alors :

$$\langle i\,|j_x|\,\Psi\rangle = \sum_{\substack{kl,tt'\\ \tau\tau'}} \langle kt\,|j_x|\,lt'\rangle \left\langle i \left| \left[-U_{k\tau t}V_{l\tau' t'}\beta^{\dagger}_{k\tau}\beta^{\dagger}_{\tilde{l}\tau'} + V_{k\tau t}V_{l\tau' t'}\beta_{\tilde{k}\tau}\beta^{\dagger}_{\tilde{l}\tau'} \right] \right| \Psi \right\rangle \tag{4.31}$$

Le seul terme ayant une contribution non nulle dans l'expression (4.31) est le terme :

$$-\sum_{\substack{kl,tt'\\ \tau\tau'}} \langle kt\,|j_x|\,lt'\rangle\, U_{k\tau t}V_{l\tau' t'} \left\langle i \left| \beta^{\dagger}_{k\tau}\beta^{\dagger}_{\tilde{l}\tau'} \right| \Psi \right\rangle \tag{4.32}$$

où l'état $|i\rangle$ ne peut être que l'état à deux particules donné par l'expression (3.86) d'énergie $E^{TT'}_{\nu\mu}$ donnée par l'expression (3.90) . L'expression (4.31) s'écrit alors :

$$\langle \nu T \mu T'\,|j_x|\,\Psi\rangle = -\sum_{\substack{kl,tt'\\ \tau\tau'\tau_1\tau_2}} \langle kt\,|j_x|\,lt'\rangle\, K^{TT'}_{\nu\mu}\gamma_{\nu\tau_1 T}\gamma_{\mu\tau_2 T'}U_{k\tau t}V_{l\tau' t'} \left\langle \Psi \left| \beta_{\tilde{\mu}\tau_2}\beta_{\nu\tau_1}\beta^{\dagger}_{k\tau}\beta^{\dagger}_{\tilde{l}\tau'} \right| \Psi \right\rangle \tag{4.33}$$

Or, en utilisant le théorème de Wick nous avons :

$$\left\langle \Psi \left| \beta_{\tilde{\mu}\tau_2}\beta_{\nu\tau_1}\beta^{\dagger}_{k\tau}\beta^{\dagger}_{\tilde{l}\tau'} \right| \Psi \right\rangle = \delta_{k\tilde{\mu}}\delta_{l\tilde{\nu}}\delta_{\tau\tau_2}\delta_{\tau'\tau_1} + \delta_{l\mu}\delta_{k\nu}\delta_{\tau'\tau_2}\delta_{\tau\tau_1} \tag{4.34}$$

L'expression (4.33) se met sous la forme :

$$\langle \nu T \mu T'\,|j_x|\,\Psi\rangle = -\sum_{\substack{tt'\\ \tau\tau'}} K^{TT'}_{\nu\mu}\gamma_{\nu\tau T}\gamma_{\mu\tau' T'} \left[U_{\mu\tau' t'}V_{\nu\tau t}\,\langle \tilde{\mu}t'\,|j_x|\,\tilde{\nu}t\rangle + U_{\nu\tau t}V_{\mu\tau' t'}\,\langle \nu t\,|j_x|\,\mu t'\rangle \right] \tag{4.35}$$

L'opérateur j_x étant impair par renversement par rapport au sens du temps :

$$\langle \nu t\,|j_x|\,\mu t'\rangle = -\,\langle \tilde{\mu}t'\,|j_x|\,\tilde{\nu}t\rangle \tag{4.36}$$

L'expression (4.35) devient :

$$\langle \nu T \mu T' | j_x | \Psi \rangle = \sum_{\substack{tt' \\ \tau\tau'}} K_{\nu\mu}^{TT'} \gamma_{\nu\tau T} \gamma_{\mu\tau' T'} \left[U_{\mu\tau' t'} V_{\nu\tau t} - U_{\nu\tau t} V_{\mu\tau' t'} \right] \langle \nu t | j_x | \mu t' \rangle \tag{4.37}$$

On obtient alors pour l'expression du moment d'inertie dans le cadre de notre étude où l'effet d'appariement entre particules identiques et l'appariement neutron-proton sont pris en compte la formule suivante :

$$I = 2\hbar^2 \sum_{\substack{\nu,\mu \\ \nu \neq \mu \\ TT'}} \frac{\left| \sum_{\substack{tt' \\ \tau\tau'}} K_{\nu\mu}^{TT'} \gamma_{\nu\tau T} \gamma_{\mu\tau' T'} \langle \nu t | j_x | \mu t' \rangle \left[U_{\mu\tau' t'} V_{\nu\tau t} - U_{\nu\tau t} V_{\mu\tau' t'} \right] \right|^2}{E_{\nu\mu}^{TT'} - E_{BCS}} \tag{4.38}$$

Dans le cas où l'appariement neutron-proton est nul ($\Delta_{np} = 0$) et compte tenu du résultat donné par les expressions (1.61) et (1.62) , les éléments de la matrice $\mathcal{A}_\nu$ donnée par l'expression (3.3) s'écrivent en première approximation :

$$\begin{aligned} E_{\nu 11} &= [\varepsilon_{\nu p} - \lambda_p] \left(u_{\nu 1p}^2 - v_{\nu 1p}^2 \right) - 2\Delta_{pp} u_{\nu 1p} v_{\nu 1p} \\ E_{\nu 22} &= [\varepsilon_{\nu n} - \lambda_n] \left(u_{\nu 2n}^2 - v_{\nu 2n}^2 \right) - 2\Delta_{nn} u_{\nu 2n} v_{\nu 2n} \\ E_{\nu 12} &= 0 \qquad ; \qquad E_{\nu 21} = 0 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Dans ces expressions les demi-largeurs du gap Δ_{pp} et Δ_{nn} sont données par :

$$\Delta_{pp} = -\Delta_{pBCS} \qquad ; \qquad \Delta_{nn} = -\Delta_{nBCS} \tag{4.40}$$

où Δ_{pBCS} et Δ_{nBCS} sont les demi-largeurs du gap des systèmes protons et neutrons pris séparément [30–32]. Notons que dans le présent travail, nous avons :

$$G_{pBCS} = 2G_{pp} \qquad \text{et} \qquad G_{nBCS} = 2G_{nn} \tag{4.41}$$

où G_{pBCS} et G_{nBCS} sont les constantes d'appariement habituellement utilisées dans la théorie BCS pour un système de particules identiques [30–32].

En utilisant les expressions (2.45) , nous obtenons pour le système protons :

$$u_{\nu 1p}^2 - v_{\nu 1p}^2 = \frac{[\varepsilon_{\nu p} - \lambda_p]}{\sqrt{[\varepsilon_{\nu p} - \lambda_p]^2 + [\Delta_{pBCS}]^2}} \tag{4.42}$$

et

$$2u_{\nu 1p}v_{\nu 1p} = \frac{[\Delta_{pBCS}]}{\sqrt{[\varepsilon_{\nu p} - \lambda_p]^2 + [\Delta_{pBCS}]^2}} \tag{4.43}$$

et des relations analogues pour le système neutrons.

L'expression (4.39) s'écrit :

$$E_{\nu 11} = \sqrt{[\varepsilon_{\nu p} - \lambda_p]^2 + [\Delta_{pBCS}]^2} \qquad \text{et} \qquad E_{\nu 22} = \sqrt{[\varepsilon_{\nu n} - \lambda_n]^2 + [\Delta_{nBCS}]^2} \tag{4.44}$$

$E_{\nu 11}$, $E_{\nu 22}$ sont respectivement les énergies des quasi-particules de type 1 qui correspondent aux protons et de type 2 qui correspondent aux neutrons. Par conséquent, l'hamiltonien diagonal H_{11} donné par l'expression (3.1) se met sous la forme :

$$H_{11} = \sum_{\nu} \left(E_{\nu p}\alpha_{\nu 1}^{\dagger}\alpha_{\nu 1} + E_{\nu n}\alpha_{\nu 2}^{\dagger}\alpha_{\nu 2} \right) \tag{4.45}$$

où l'on a noté par : $E_{\nu p} = E_{\nu 11}$ et $E_{\nu n} = E_{\nu 22}$.

Ainsi, les opérateurs $\beta_{\nu\tau}$ et $\beta_{\nu\tau}^{\dagger}$ donnés par l'expression (3.11) se réduisent aux opérateurs $\alpha_{\nu\tau}$ et $\alpha_{\nu\tau}^{\dagger}$ respectivement.

Aussi, nous pouvons conclure que lorsque l'appariement neutron-proton est nul, les amplitudes de probabilité $U_{\nu\tau t}$, $V_{\nu\tau t}$ qui apparaissent dans l'expression (3.13) sont identiques aux amplitudes de probabilité $u_{\nu\tau t}$, $v_{\nu\tau t}$ donnés par (1.61) et (1.62) respectivement.

L'expression (4.38) du moment d'inertie s'écrit :

$$I\left(\Delta_{pn}=0\right)=2\hbar^{2}\sum_{\substack{\nu,\mu\\ \nu\neq\mu\\ TT'}}\frac{1}{\left(E_{\nu\mu}^{TT'}-E_{BCS}\right)}\Big|K_{\nu\mu}^{TT'}\left[\gamma_{\nu1T}\gamma_{\mu1T'}\left\langle\nu p\left|j_{x}\right|\mu p\right\rangle\left[u_{\mu1p}v_{\nu1p}-u_{\nu1p}v_{\mu1p}\right]\right.$$
$$+\gamma_{\nu1T}\gamma_{\mu2T'}\left\langle\nu p\left|j_{x}\right|\mu n\right\rangle\left[u_{\mu2n}v_{\nu1p}-u_{\nu1p}v_{\mu2n}\right]$$
$$+\gamma_{\nu2T}\gamma_{\mu1T'}\left\langle\nu n\left|j_{x}\right|\mu p\right\rangle\left[u_{\mu1p}v_{\nu2n}-u_{\nu2n}v_{\mu1p}\right]$$
$$\left.+\gamma_{\nu2T}\gamma_{\mu2T'}\left\langle\nu n\left|j_{x}\right|\mu n\right\rangle\left[u_{\mu2n}v_{\nu2n}-u_{\nu2n}v_{\mu2n}\right]\right]\Big|^{2} \qquad (4.46)$$

où $T,\,T'=n,\,p$

Or, dans le cas où l'appariement neutron-proton est nul, les coefficients $\gamma_{\nu1T}$ et $\gamma_{\nu2T}$ donnés par l'expression (3.61) deviennent :

$$\begin{aligned}\gamma_{\nu1p}&=B_{5}^{\nu}u_{\nu1p}+B_{p}^{\nu}v_{\nu1p}\\ \gamma_{\nu1n}&=B_{4}^{\nu}v_{\nu1p}\\ \gamma_{\nu2p}&=B_{4}^{\nu}v_{\nu2n}\\ \gamma_{\nu2n}&=B_{5}^{\nu}u_{\nu2n}+B_{n}^{\nu}v_{\nu2n}\end{aligned} \qquad (4.47)$$

De même, les coefficients B_{5}^{ν}, B_{p}^{ν}, B_{n}^{ν} et B_{4}^{ν} qui apparaissent dans l'expression (3.18) s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned}B_{5}^{\nu}&=C\left(u_{\nu1p}v_{\nu1p}\right)\left(u_{\nu2n}v_{\nu2n}\right)\\ B_{p}^{\nu}&=C\left(v_{\nu1p}^{2}u_{\nu2n}v_{\nu2n}\right)\\ B_{n}^{\nu}&=C\left(v_{\nu2n}^{2}u_{\nu1p}v_{\nu1p}\right)\\ B_{4}^{\nu}&=0\end{aligned} \qquad (4.48)$$

où la constante C vaut :

$$C=\left(\prod_{\nu>0}v_{\nu1p}^{2}v_{\nu2n}^{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (4.49)$$

En remplaçant les expressions (4.48) et (4.49) dans les expressions notées par (4.47) , on obtient :

$$\begin{aligned}
\gamma_{\nu 1p} &= (u_{\nu 2n} v_{\nu 2n} v_{\nu 1p}) \left(\prod_{\nu > 0} v_{\nu 1p}^2 v_{\nu 2n}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\
\gamma_{\nu 2n} &= (u_{\nu 1p} v_{\nu 1p} v_{\nu 2n}) \left(\prod_{\nu > 0} v_{\nu 1p}^2 v_{\nu 2n}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\
\gamma_{\nu 1n} &= \gamma_{\nu 2p} = 0
\end{aligned} \tag{4.50}$$

En ce qui concerne la constante de normalisation des états à deux particules non appariées donnée par l'expression (3.87), elle devient pour $T,\, T' = n,\, p$:

$$\begin{aligned}
K_{\nu\mu}^{pp} &= \left(\gamma_{\nu 1p} \gamma_{\mu 1p}\right)^{-1} \\
K_{\nu\mu}^{nn} &= \left(\gamma_{\nu 2n} \gamma_{\mu 2n}\right)^{-1} \\
K_{\nu\mu}^{pn} &= \left(\gamma_{\nu 1p} \gamma_{\mu 2n}\right)^{-1} \\
K_{\nu\mu}^{np} &= \left(\gamma_{\nu 2n} \gamma_{\mu 1p}\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Quant à l'énergie de l'état excité à deux particules par rapport à l'énergie du fondamental donnée par l'expression (3.90), elle devient toujours pour $T,\, T' = n,\, p$:

$$\begin{aligned}
E_{\nu\mu}^{pp}(\Delta_{np} = 0) - E_{BCS}(\Delta_{np} = 0) &= \left(K_{\nu\mu}^{pp}\right)^2 (E_{\nu p} + E_{\mu p})\, \gamma_{\nu 1p}^2 \gamma_{\mu 1p}^2 \\
E_{\nu\mu}^{nn}(\Delta_{np} = 0) - E_{BCS}(\Delta_{np} = 0) &= \left(K_{\nu\mu}^{nn}\right)^2 (E_{\nu n} + E_{\mu n})\, \gamma_{\nu 2n}^2 \gamma_{\mu 2n}^2 \\
E_{\nu\mu}^{pn}(\Delta_{np} = 0) - E_{BCS}(\Delta_{np} = 0) &= \left(K_{\nu\mu}^{pn}\right)^2 (E_{\nu p} + E_{\mu n})\, \gamma_{\nu 1p}^2 \gamma_{\mu 2n}^2 \\
E_{\nu\mu}^{np}(\Delta_{np} = 0) - E_{BCS}(\Delta_{np} = 0) &= \left(K_{\nu\mu}^{np}\right)^2 (E_{\nu n} + E_{\mu p})\, \gamma_{\nu 2n}^2 \gamma_{\mu 1p}^2
\end{aligned} \tag{4.52}$$

En injectant les expressions (4.51) dans (4.52), on obtient :

$$\begin{aligned}
E_{\nu\mu}^{pp}\left(\Delta_{np}=0\right)-E_{BCS}\left(\Delta_{np}=0\right) &= \left(E_{\nu p}+E_{\mu p}\right) \\
E_{\nu\mu}^{nn}\left(\Delta_{np}=0\right)-E_{BCS}\left(\Delta_{np}=0\right) &= \left(E_{\nu n}+E_{\mu n}\right) \\
E_{\nu\mu}^{pn}\left(\Delta_{np}=0\right)-E_{BCS}\left(\Delta_{np}=0\right) &= \left(E_{\nu p}+E_{\mu n}\right) \\
E_{\nu\mu}^{np}\left(\Delta_{np}=0\right)-E_{BCS}\left(\Delta_{np}=0\right) &= \left(E_{\nu n}+E_{\mu p}\right)
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Ce qui conduit à l'expression suivante du moment d'inertie :

$$\begin{aligned}
I\left(\Delta_{pn}=0\right) &= 2\hbar^2 \sum_{\substack{\nu,\mu \\ \nu\neq\mu}} \frac{1}{\left(E_{\nu p}+E_{\mu p}\right)} \left|\left\langle \nu p\left|j_x\right|\mu p\right\rangle \left[u_{\mu 1p}v_{\nu 1p}-u_{\nu 1p}v_{\mu 1p}\right]\right|^2 \\
&+2\hbar^2 \sum_{\substack{\nu,\mu \\ \nu\neq\mu}} \frac{1}{\left(E_{\nu n}+E_{\mu n}\right)} \left|\left\langle \nu n\left|j_x\right|\mu n\right\rangle \left[u_{\mu 2n}v_{\nu 1p}-u_{\nu 1p}v_{\mu 2n}\right]\right|^2 \\
&+4\hbar^2 \sum_{\substack{\nu,\mu \\ \nu\neq\mu}} \frac{1}{\left(E_{\nu p}+E_{\mu n}\right)} \left|\left\langle \nu n\left|j_x\right|\mu p\right\rangle \left[u_{\mu 1p}v_{\nu 2n}-u_{\nu 2n}v_{\mu 1p}\right]\right|^2
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Or, dans la théorie BCS habituelle pour un système de particules identiques le moment d'inertie [21, 60, 63] est donné par l'expression suivante :

$$I = 2\hbar^2 \sum_{\substack{\nu,\mu \\ \nu\neq\mu}} \frac{\left|\left\langle \nu\left|j_x\right|\mu\right\rangle \left(u_\nu v_\mu - u_\mu v_\nu\right)\right|^2}{E_\nu + E_\mu} \tag{4.55}$$

L'expression (4.54) devient alors :

$$I\left(\Delta_{pn}=0\right) = I_p + I_n + I_{pn} \tag{4.56}$$

où l'on a noté par :

$$I_p = 2\hbar^2 \sum_{\substack{\nu,\mu \\ \nu\neq\mu}} \frac{1}{(E_{\nu p}+E_{\mu p})} \left|\langle \nu p\,|j_x|\,\mu p\rangle \left[u_{\mu 1p}v_{\nu 1p} - u_{\nu 1p}v_{\mu 1p}\right]\right|^2 \tag{4.57}$$

$$I_n = 2\hbar^2 \sum_{\substack{\nu,\mu \\ \nu\neq\mu}} \frac{1}{(E_{\nu n}+E_{\mu n})} \left|\langle \nu n\,|j_x|\,\mu n\rangle \left[u_{\mu 2n}v_{\nu 1p} - u_{\nu 1p}v_{\mu 2n}\right]\right|^2 \tag{4.58}$$

$$I_{pn} = 4\hbar^2 \sum_{\substack{\nu,\mu \\ \nu\neq\mu}} \frac{1}{(E_{\nu p}+E_{\mu n})} \left|\langle \nu n\,|j_x|\,\mu p\rangle \left[u_{\mu 1p}v_{\nu 2n} - u_{\nu 2n}v_{\mu 1p}\right]\right|^2 \tag{4.59}$$

Nous remarquons que le moment d'inertie du système (neutrons+protons) lorsqu'on annule l'appariement (n-p) ne se réduit pas à la somme des moments d'inertie des systèmes respectifs. En effet, le terme I_{pn} n'est nul que si les éléments de matrice $\langle \nu n\,|j_x|\,\mu p\rangle$ sont nuls.

En conclusion, nous avons commencé dans le présent chapitre par établir à titre de rappel le moment d'inertie d'Inglis dans le modèle du cranking. Par la suite, nous avons calculé le moment d'inertie pour les noyaux pair-pairs dans le cas où les corrélations d'appariement qui sont prises en considération sont celles qui s'exercent entre particules identiques ou non, sachant qu'on s'est limité au cas isovectoriel ($T = 1$). Finalement, nous avons utilisé le résultat concernant la forme que prennent les différentes amplitudes de probabilité lorsqu'on annule l'appariement neutron-proton ($\Delta_{np} = 0$) et on a constaté que le moment d'inertie se présente comme la somme du moment d'inertie du système protons, du système neutrons ainsi que d'une autre quantité qui dépend de l'élément de matrice $\langle \nu n\,|j_x|\,\mu p\rangle$ qui exprime l'existence des deux systèmes en commun. Rappelons que nous avons supposé dans le premier chapitre que les niveaux protons et neutrons sont identiques donc cet élément de matrice est à priori non nul. Toutefois, s'il est nul, alors le moment d'inertie se présente sous la forme d'une somme de moment d'inertie du système protons I_p et du système neutrons I_n, ce cas se présente lorsque les orbitales "neutrons" et "protons" sont différentes.

Conclusion

Dans la présente étude une méthode de traitement des corrélations d'appariement du type isovectoriel (T=1), incluant à la fois l'appariement entre particules identiques et une partie de l'appariement neutron-proton, a été développée.

L'expression de l'hamiltonien nucléaire a été d'abord établie. Cette observable a été diagonalisée approximativement en utilisant la méthode de linéarisation après avoir explicité la matrice d'excitation correspondante.

La transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin qui décrit la nouvelle représentation de quasi-particule a été formulée. En exprimant l'hamiltonien dans cette représentation, il a été noté que contrairement à la théorie BCS habituelle pour un système de particules identiques, il n'était pas sous forme diagonale. Il était alors naturel de le diagonaliser, trouvant ainsi la nouvelle transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin. Ceci a permis de définir de nouvelles amplitudes d'occupation et d'inoccupation des états. Les nouveaux opérateurs, dans cette représentation, sont combinaisons linéaires des opérateurs de création et d'annihilation de particules.

Dans une deuxième étape, les états fondamental et excités à deux particules ont été déterminés. Ces derniers se présentent comme combinaisons linéaires d'états à deux quasi-particules contrairement à leurs homologues de la méthode BCS pour un système de particules identiques, qui se réduisent aux états à deux quasi-particules. Leurs énergies ont été calculées dans le cadre de l'approximation des quasi-particules indépendantes.

Nous nous sommes intéressés par la suite à l'expression du moment d'inertie calculé dans le cadre du modèle du cranking d'Inglis en présence des corrélations d'appariement isovectoriel. L'expression du moment d'inertie du système (neutrons+protons) a alors été établie. Il a été constaté que lorsqu'on ne tient pas compte de l'appariement (n-p), en annulant Δ_{np}, le moment d'inertie du système (neutrons+protons) ne se réduit pas, en général, à la somme des moments d'inertie des systèmes pris séparément. Ce cas ne se présente que si l'on suppose que les neutrons et protons se meuvent dans des champs moyens différents car le moment cinétique ne connecte pas les orbitales de ces deux types de particules.

Annexe A

Calcul des commutateurs $\left[H', a^{\dagger}_{\nu r}\right]$ et $\left[H', a_{\tilde{\nu} r}\right]$

A.1 Calcul de $\left[H', a^{\dagger}_{\nu r}\right]$

L'hamiltonien auxiliaire s'écrit :

$$H' = \sum_{\gamma,t} \left(\varepsilon_{\gamma t} - \lambda_t\right) a^{\dagger}_{\gamma t} a_{\gamma t} - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\gamma,\mu>0} \left(a^{\dagger}_{\gamma t} a^{\dagger}_{\tilde{\gamma} t'} a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} + a^{\dagger}_{\gamma t} a^{\dagger}_{\tilde{\gamma} t'} a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} \right) \tag{A.1}$$

d'où :

$$\left[H', a^{\dagger}_{\nu r}\right] = \sum_{\gamma>0,t} \left(\varepsilon_{\gamma t} - \lambda_t\right) \left[a^{\dagger}_{\gamma t} a_{\gamma t}, a^{\dagger}_{\nu r}\right] - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\gamma,\mu>0} \left[\left(a^{\dagger}_{\gamma t} a^{\dagger}_{\tilde{\gamma} t'} a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} + a^{\dagger}_{\gamma t} a^{\dagger}_{\tilde{\gamma} t'} a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} \right), a^{\dagger}_{\nu r} \right] \tag{A.2}$$

On est alors amené à calculer les différents commutateurs qui apparaissent dans l'expression $(A.2)$

A.1.1 Calcul de $\left[a^{\dagger}_{\gamma t} a_{\gamma t}, a^{\dagger}_{\nu r}\right]$

On a : $\left[a^{\dagger}_{\gamma t} a_{\gamma t}, a^{\dagger}_{\nu r}\right] = a^{\dagger}_{\gamma t} a_{\gamma t} a^{\dagger}_{\nu r} - a^{\dagger}_{\nu r} a^{\dagger}_{\gamma t} a_{\gamma t}$

En tenant compte des relations d'anti-commutation des opérateurs $a, a^{\dagger}$ données par les relations (1.3) , on obtient :

$$\left[a^{\dagger}_{\gamma t}a_{\gamma t}, a^{\dagger}_{\nu r}\right] = a^{\dagger}_{\nu r}\delta_{\gamma\nu}\delta_{tr} \tag{A.3}$$

A.1.2 Calcul de $\left[\left(a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t'}a_{\mu t} + a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t}a_{\mu t'}\right), a^{\dagger}_{\nu r}\right]$

On a :

$$\left[\left(a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t'}a_{\mu t} + a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t}a_{\mu t'}\right), a^{\dagger}_{\nu r}\right] = \left[a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t'}a_{\mu t}, a^{\dagger}_{\nu r}\right] + \left[a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t}a_{\mu t'}, a^{\dagger}_{\nu r}\right]$$

Or,

$$\begin{aligned}
\left[a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t}a_{\mu t'}, a^{\dagger}_{\nu r}\right] &= a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t}a_{\mu t'}a^{\dagger}_{\nu r} - a^{\dagger}_{\nu r}a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t}a_{\mu t'} \\
&= a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t}\delta_{\nu\mu}\delta_{t'r} - a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t}a^{\dagger}_{\nu r}a_{\mu t'} - a^{\dagger}_{\nu r}a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t}a_{\mu t'} \\
&= a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t}\delta_{\nu\mu}\delta_{t'r} - \delta_{\nu\tilde{\mu}}\delta_{tr}a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\mu t'} \qquad \text{(A.4)} \\
&= a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}r}a_{\tilde{\nu}t}\delta_{\nu\mu}\delta_{t'r} + \delta_{\mu\tilde{\nu}}\delta_{tr}a^{\dagger}_{\gamma r}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\nu}t'} \qquad (\delta_{\nu\tilde{\mu}} = -\delta_{\tilde{\nu}\mu})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left[a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t'}a_{\mu t}, a^{\dagger}_{\nu r}\right] &= a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t'}a_{\mu t}a^{\dagger}_{\nu r} - a^{\dagger}_{\nu r}a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t'}a_{\mu t} \\
&= a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t'}\delta_{\nu\mu}\delta_{tr} - a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t'}a^{\dagger}_{\nu r}a_{\mu t} - a^{\dagger}_{\nu r}a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t'}a_{\mu t} \\
&= a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t'}\delta_{\nu\mu}\delta_{tr} - \delta_{\nu\tilde{\mu}}\delta_{t'r}a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\mu t} \qquad \text{(A.5)} \\
&= a^{\dagger}_{\gamma r}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\nu}t'}\delta_{\nu\mu}\delta_{tr} + \delta_{\mu\tilde{\nu}}\delta_{t'r}a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}r}a_{\tilde{\nu}t} \qquad (\delta_{\nu\tilde{\mu}} = -\delta_{\tilde{\nu}\mu})
\end{aligned}$$

En utilisant $(A.3)$, $(A.4)$, $(A.5)$ et comme t, t' sont des indices muets l'expression $(A.2)$ devient :

$$\left[H', a^{\dagger}_{\nu r}\right] = \left(\varepsilon_{\nu r} - \lambda_r\right) a^{\dagger}_{\nu r} - \sum_t G_{tr} \sum_{\gamma>0} \left(a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}r} + a^{\dagger}_{\gamma r}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t}\right) a_{\tilde{\nu}t} \tag{A.6}$$

A.2 Calcul de $[H', a_{\tilde{\nu}r}]$

On a :

$$[H', a_{\tilde{\nu}r}] = \sum_{\gamma>0,t} (\varepsilon_{\gamma t} - \lambda_t) \left[a^\dagger_{\gamma t} a_{\gamma t}, a_{\tilde{\nu}r}\right] - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\gamma,\mu>0} \left[\left(a^\dagger_{\gamma t} a^\dagger_{\tilde{\gamma}t'} a_{\tilde{\mu}t'} a_{\mu t} + a^\dagger_{\gamma t} a^\dagger_{\tilde{\gamma}t'} a_{\tilde{\mu}t} a_{\mu t'}\right), a_{\tilde{\nu}r}\right] \tag{A.7}$$

A.2.1 Calcul de $\left[a^\dagger_{\gamma t} a_{\gamma t}, a_{\tilde{\nu}r}\right]$

On a : $\left[a^\dagger_{\gamma t} a_{\gamma t}, a_{\tilde{\nu}r}\right] = a^\dagger_{\gamma t} a_{\gamma t} a_{\tilde{\nu}r} - a_{\tilde{\nu}r} a^\dagger_{\gamma t} a_{\gamma t}$

En suivant les mêmes étapes de calcul, on trouve :

$$\left[a^\dagger_{\gamma t} a_{\gamma t}, a_{\tilde{\nu}r}\right] = -a_{\tilde{\nu}r} \delta_{\gamma\tilde{\nu}} \delta_{tr} \tag{A.8}$$

Ce résultat est prévisible à partir du moment où :

$$\left[a^\dagger_{\gamma t} a_{\gamma t}, a^\dagger_{\nu r}\right]^\dagger = -\left[a^\dagger_{\gamma t} a_{\gamma t}, a_{\nu r}\right] \tag{A.9}$$

En utilisant $(A.3)$, on obtient :

$$\left[a^\dagger_{\gamma t} a_{\gamma t}, a_{\nu r}\right] = -a_{\nu r} \delta_{\gamma\nu} \delta_{tr} \tag{A.10}$$

d'où,

$$\left[a^\dagger_{\gamma t} a_{\gamma t}, a_{\tilde{\nu}r}\right] = -a_{\tilde{\nu}r} \delta_{\gamma\tilde{\nu}} \delta_{tr} \tag{A.11}$$

A.2.2 Calcul de $\left[\left(a^\dagger_{\gamma t} a^\dagger_{\tilde{\gamma}t'} a_{\tilde{\mu}t'} a_{\mu t} + a^\dagger_{\gamma t} a^\dagger_{\tilde{\gamma}t'} a_{\tilde{\mu}t} a_{\mu t'}\right), a_{\tilde{\nu}r}\right]$

On a :

$\left[\left(a^\dagger_{\gamma t} a^\dagger_{\tilde{\gamma}t'} a_{\tilde{\mu}t'} a_{\mu t} + a^\dagger_{\gamma t} a^\dagger_{\tilde{\gamma}t'} a_{\tilde{\mu}t} a_{\mu t'}\right), a_{\tilde{\nu}r}\right] = \left[a^\dagger_{\gamma t} a^\dagger_{\tilde{\gamma}t'} a_{\tilde{\mu}t'} a_{\mu t}, a_{\tilde{\nu}r}\right] + \left[a^\dagger_{\gamma t} a^\dagger_{\tilde{\gamma}t'} a_{\tilde{\mu}t} a_{\mu t'}, a_{\tilde{\nu}r}\right]$

Or,

$$\begin{aligned}
\left[a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t}a_{\mu t'},a_{\tilde{\nu}r}\right] &= a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t}a_{\mu t'}a_{\tilde{\nu}r}-a_{\tilde{\nu}r}a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t}a_{\mu t'} \\
&= a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\nu}r}a_{\tilde{\mu}t}a_{\mu t'}-a_{\tilde{\nu}r}a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t}a_{\mu t'} \\
&= a^{\dagger}_{\gamma t}a_{\tilde{\mu}t}a_{\mu t'}\delta_{\nu\gamma}\delta_{t'r}-\delta_{\gamma\tilde{\nu}}\delta_{tr}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t}a_{\mu t'} \qquad \text{(A.12)} \\
&= a^{\dagger}_{\nu t}a_{\tilde{\mu}t}a_{\mu r}\delta_{\nu\gamma}\delta_{t'r}+\delta_{\gamma\tilde{\nu}}\delta_{tr}a^{\dagger}_{\nu t'}a_{\tilde{\mu}r}a_{\mu t'} \qquad \left(a_{\tilde{\gamma}}=a_{\tilde{\tilde{\nu}}}=-a_{\nu}\right)
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\left[a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t'}a_{\mu t},a_{\tilde{\nu}r}\right] &= a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t'}a_{\mu t}a_{\tilde{\nu}r}-a_{\tilde{\nu}r}a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t'}a_{\mu t} \\
&= a^{\dagger}_{\gamma t}a_{\tilde{\mu}t'}a_{\mu t}\delta_{\gamma\nu}\delta_{t'r}-a^{\dagger}_{\gamma t}a_{\tilde{\nu}r}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t'}a_{\mu t}-a_{\tilde{\nu}r}a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t'}a_{\mu t} \\
&= a^{\dagger}_{\gamma t}a_{\tilde{\mu}t'}a_{\mu t}\delta_{\gamma\nu}\delta_{t'r}-a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t'}a_{\tilde{\mu}t'}a_{\mu t}\delta_{\gamma\tilde{\nu}}\delta_{tr} \qquad \text{(A.13)} \\
&= a^{\dagger}_{\nu t}a_{\tilde{\mu}r}a_{\mu t}\delta_{\gamma\nu}\delta_{t'r}+a^{\dagger}_{\nu t'}a_{\tilde{\mu}t'}a_{\mu r}\delta_{\gamma\tilde{\nu}}\delta_{tr} \qquad \left(a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}}=a^{\dagger}_{\tilde{\tilde{\nu}}}=-a^{\dagger}_{\nu}\right)
\end{aligned}$$

En utilisant $(A.8)$, $(A.12)$ et $(A.13)$ et comme t, t' sont des indices muets l'expression $(A.7)$ devient :

$$[H',a_{\tilde{\nu}r}]=-\left(\varepsilon_{\nu r}-\lambda_r\right)a_{\tilde{\nu}r}-\sum_t G_{tr}\sum_{\mu>0}a^{\dagger}_{\nu t}\left(a_{\tilde{\mu}r}a_{\mu t}+a_{\tilde{\mu}t}a_{\mu r}\right) \qquad \text{(A.14)}$$

γ et μ étant des indices muets, on retrouve les expressions données par (2.22) et (2.23).

Annexe B

Application du théorème de Wick

Les expressions $(A.6)$ et$(A.14)$ étant non linéaires par rapport à a et $a^{\dagger}$, nous allons appliquer le théorème de Wick pour les linéarisées.
pour l'expression$(A.6)$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma} r}a_{\tilde{\nu} t} = \overbrace{a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma} r}}a_{\tilde{\nu} t} - \overbrace{a^{\dagger}_{\gamma t}a_{\tilde{\nu} t}}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma} r} + \overbrace{a^{\dagger}_{\tilde{\gamma} r}a_{\tilde{\nu} t}}a^{\dagger}_{\gamma t} + :a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma} r}a_{\tilde{\nu} t}: \\ a^{\dagger}_{\gamma r}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma} t}a_{\tilde{\nu} t} = \overbrace{a^{\dagger}_{\gamma r}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma} t}}a_{\tilde{\nu} t} - \overbrace{a^{\dagger}_{\gamma r}a_{\tilde{\nu} t}}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma} t} + \overbrace{a^{\dagger}_{\tilde{\gamma} t}a_{\tilde{\nu} t}}a^{\dagger}_{\gamma r} + :a^{\dagger}_{\gamma r}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma} t}a_{\tilde{\nu} t}: \end{array}\right. \tag{B.1}$$

De même, pour l'expression $(A.14)$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} a^{\dagger}_{\nu t}a_{\tilde{\mu} r}a_{\mu t} = \overbrace{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\tilde{\mu} r}}a_{\mu t} - \overbrace{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\mu t}}a_{\tilde{\mu} r} + \overbrace{a_{\tilde{\mu} r}a_{\mu t}}a^{\dagger}_{\nu t} + :a^{\dagger}_{\nu t}a_{\tilde{\mu} r}a_{\mu t}: \\ a^{\dagger}_{\nu t}a_{\tilde{\mu} t}a_{\mu r} = \overbrace{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\tilde{\mu} t}}a_{\mu r} - \overbrace{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\mu r}}a_{\tilde{\mu} t} + \overbrace{a_{\tilde{\mu} t}a_{\mu r}}a^{\dagger}_{\nu t} + :a^{\dagger}_{\nu t}a_{\tilde{\mu} t}a_{\mu r}: \end{array}\right. \tag{B.2}$$

La linéarisation consiste à négliger les produits normaux [27,33] à savoir : $a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma} r}a_{\tilde{\nu} t}$: et : $a^{\dagger}_{\gamma r}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma} t}a_{\tilde{\nu} t}$: dans l'expression $(B.1)$ ainsi que : $a^{\dagger}_{\nu t}a_{\tilde{\mu} r}a_{\mu t}$: et : $a^{\dagger}_{\nu t}a_{\tilde{\mu} t}a_{\mu r}$: dans l'expression $(B.2)$.
En ce qui concerne les différentes contractions qui apparaissent dans les expressions $(B.1)$

et $(B.2)$, elles sont non nulles [33] si :

$$\left\{\begin{array}{l} \overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a^{\dagger}_{\mu t'}} = \delta_{\nu\tilde{\mu}}\overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a^{\dagger}_{\tilde{\nu}t'}} \\ \overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\mu t'}} = \delta_{\nu\mu}\overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\nu t'}} \\ \overbracket{a_{\nu t}a_{\mu t'}} = \delta_{\nu\tilde{\mu}}\overbracket{a_{\nu t}a_{\tilde{\nu}t'}} \end{array}\right. \tag{B.3}$$

En utilisant l'expression $(B.3)$, on obtient pour les contractions de l'expression $(B.1)$:

$$\left\{\begin{array}{lll} \overbracket{a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}r}} \neq 0 \quad , & \overbracket{a^{\dagger}_{\gamma r}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t}} \neq 0 & \\ \overbracket{a^{\dagger}_{\gamma t}a_{\tilde{\nu}t}} = 0 \quad , \quad \overbracket{a^{\dagger}_{\gamma r}a_{\tilde{\nu}t}} = 0 & & (\gamma,\nu > 0) \\ \overbracket{a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}r}a_{\tilde{\nu}t}} = \delta_{\gamma\nu}\delta_{tr}\overbracket{a^{\dagger}_{\tilde{\nu}r}a_{\tilde{\nu}r}} \quad , & \overbracket{a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t}a_{\tilde{\nu}t}} = \delta_{\gamma\nu}\overbracket{a^{\dagger}_{\tilde{\nu}t}a_{\tilde{\nu}t}} & \end{array}\right. \tag{B.4}$$

En ce qui concerne ceux de l'expression $(B.2)$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lll} \overbracket{a_{\tilde{\mu}r}a_{\mu t}} \neq 0 \quad , & \overbracket{a_{\tilde{\mu}t}a_{\mu r}} \neq 0 & \\ \overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\tilde{\mu}r}} = 0 \quad , \quad \overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\tilde{\mu}t}} = 0 & & (\nu,\mu > 0) \\ \overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\mu t}} = \delta_{\nu\mu}\overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\nu t}} \quad , & \overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\mu r}} = \delta_{\nu\mu}\delta_{tr}\overbracket{a^{\dagger}_{\nu r}a_{\nu r}} & \end{array}\right. \tag{B.5}$$

En tenant compte de ces résultats, les expressions $(B.1),(B.2)$ deviennent respectivement :

$$\left\{\begin{array}{l} \left(a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}r} + a^{\dagger}_{\gamma r}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t}\right)a_{\tilde{\nu}t} = \left(\overbracket{a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}r}} + \overbracket{a^{\dagger}_{\gamma r}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t}}\right)a_{\tilde{\nu}t} + \delta_{\gamma\nu}\delta_{tr}\overbracket{a^{\dagger}_{\tilde{\nu}r}a_{\tilde{\nu}r}}a^{\dagger}_{\nu r} + \delta_{\gamma\nu}\overbracket{a^{\dagger}_{\tilde{\nu}t}a_{\tilde{\nu}t}}a^{\dagger}_{\nu r} \\ a^{\dagger}_{\nu t}\left(a_{\tilde{\mu}r}a_{\mu t} + a_{\tilde{\mu}t}a_{\mu r}\right) = \left(\overbracket{a_{\tilde{\mu}r}a_{\mu t}} + \overbracket{a_{\tilde{\mu}t}a_{\mu r}}\right)a^{\dagger}_{\nu t} - \delta_{\nu\mu}\overbracket{a^{\dagger}_{\nu t}a_{\nu t}}a_{\tilde{\nu}r} - \delta_{\nu\mu}\delta_{tr}\overbracket{a^{\dagger}_{\nu r}a_{\nu r}}a_{\tilde{\nu}r} \end{array}\right. \tag{B.6}$$

Les expressions $(A.6)$ et $(A.14)$ s'écrivent respectivement :

$$\left[H', a^{\dagger}_{\nu r}\right] = \left((\varepsilon_{\nu r} - \lambda_r) - \sum_t G_{tr}\left(1 + \delta_{tr}\right)\overbracket{a^{\dagger}_{\tilde{\nu}t}a_{\tilde{\nu}t}}\right)a^{\dagger}_{\nu r} - \sum_t G_{tr}\sum_{\gamma>0}\left(\overbracket{a^{\dagger}_{\gamma t}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}r}} + \overbracket{a^{\dagger}_{\gamma r}a^{\dagger}_{\tilde{\gamma}t}}\right)a_{\tilde{\nu}t} \tag{B.7}$$

$$[H', a_{\tilde{\nu} r}] = -\left((\varepsilon_{\nu r} - \lambda_r) - \sum_t G_{tr}\,(1+\delta_{tr})\, \overset{\sqcap}{a^{\dagger}_{\nu t} a_{\nu t}}\right) a_{\tilde{\nu} r} - \sum_t G_{tr} \sum_{\mu>0} \left(\overset{\sqcap}{a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu r}} + \overset{\sqcap}{a_{\tilde{\mu} r} a_{\mu t}}\right) a^{\dagger}_{\nu t} \tag{B.8}$$

Or,

$$\begin{cases} \overset{\sqcap}{a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t} a_{\tilde{\nu} t}} = \overset{\sqcap}{a^{\dagger}_{\nu t} a_{\nu t}} \\ \overset{\sqcap}{a^{\dagger}_{\gamma t} a^{\dagger}_{\tilde{\gamma} r}} = \overset{\sqcap}{a_{\tilde{\gamma} r} a_{\gamma t}} \quad \text{et} \quad \overset{\sqcap}{a^{\dagger}_{\gamma r} a^{\dagger}_{\tilde{\gamma} t}} = \overset{\sqcap}{a_{\tilde{\gamma} t} a_{\gamma r}} \end{cases} \tag{B.9}$$

Par conséquent, les expressions $(B.7)$ et $(B.8)$ deviennent respectivement :

$$\left[H', a^{\dagger}_{\nu r}\right] = \tilde{\varepsilon}_{\nu r} a^{\dagger}_{\nu r} - \sum_t \Delta_{tr} a_{\tilde{\nu} t} \tag{B.10}$$

$$[H', a_{\tilde{\nu} r}] = -\tilde{\varepsilon}_{\nu r} a_{\tilde{\nu} r} - \sum_t \Delta_{tr} a^{\dagger}_{\nu t} \tag{B.11}$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_{\nu r} = (\varepsilon_{\nu r} - \lambda_r) - \sum_t G_{tr}\,(1+\delta_{tr})\, \overset{\sqcap}{a^{\dagger}_{\tilde{\nu} t} a_{\tilde{\nu} t}} \\ \Delta_{rt} = \sum_{\gamma>0} \left(\overset{\sqcap}{a^{\dagger}_{\gamma t} a^{\dagger}_{\tilde{\gamma} r}} + \overset{\sqcap}{a^{\dagger}_{\gamma r} a^{\dagger}_{\tilde{\gamma} t}}\right) = G_{rt} \sum_{\mu>0} \left(\overset{\sqcap}{a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu r}} + \overset{\sqcap}{a_{\tilde{\mu} r} a_{\mu t}}\right) \end{cases} \tag{B.12}$$

γ, μ étant des indices muets, on retrouve les expressions (1.34) et (1.35).

Bibliographie

[1] F. Šimkovic, Ch. C. Moustakidis, L. Pacearescu and A. Faessler, Phys. Rev. **C68** (2003) 054319.

[2] K. Kaneko and M. Hasegawa, Phys. Rev. **C60** (1999) 024301.

[3] D. J. Dean and M. Hjorth-Jensen, Rev. Mod. Phys. **75** (2003) 607.

[4] R. R. Chasman, Phys. Lett. **B553** (2003) 204.

[5] R. R. Chasman, Phys. Lett. **B577** (2003) 47.

[6] E. Perlińska, S. G. Rohoziński, J. Dobaczewski and W. Nazarewicz, Phys. Rev. **C69** (2004) 014316.

[7] A. V. Afanasjev and S. Frauendorf, Nucl. Phys. **A746** (2004) 575c.

[8] A. V. Afanasjev and S. Frauendorf, Phys. Rev. **C71** (2005) 064318.

[9] K. Hagino and H. Sagawa, Phys. Rev. **C71** (2005) 044302.

[10] J. Jänecke and T. W. O'Donnell, Phys. Lett. **B605** (2005) 87.

[11] D. Mokhtari, N. H. Allal and M. Fellah, Heavy Ion Phys. **19** (2004) 187.

[12] S. Glowacz, W. Satula and R. Wyss, Eur. Phys. J. **A19** (2004) 33.

[13] J. Dobaczewski, J. Dudek and R. Wyss, Phys. Rev. **C67** (2003) 034308.

[14] J. Engel, K. Langanke and P. Vogel, Phys. Lett. **B389** (1996) 211.

[15] W. Satula and R. Wyss, Phys. Lett. **B393** (1997) 1.

[16] O. Civitarese, M. Reboiro and P. Vogel, Phys. Rev. **C56** (1997) 1840.

[17] A. Petrovici, K. W. Schmid and A. Faessler, Nucl. Phys. **A647** (1999) 197.

[18] O. Civitarese and M. Reboiro, Phys. Rev. **C56** (1997) 1179.

[19] G. Pantis. F. Šimkovic, J. D. Vergados and A. Faessler, Phys. Rev. **C53** (1996) 695.

[20] W. Satula et al., Phys. Lett. **B407** (1997) 103.

[21] M. Gerceklioğlu and A. E. Calik, Acta Phys. Slo. **55** (2005) 197.

[22] E. Meftunoğlu et al., J. Phy. G : Part. Phys. **24** (1998) 107.

[23] S. Frauendorf et al., Phys. Rev. **C61** (2000) 064324.

[24] A. Bohr, B. R. Mottelson and D. Pines, Phys. Rev. **110** (1958) 936.

[25] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108** (1957) 1175.

[26] S. T. Belyav, Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vid. Selsk. **31** (1959) 11.

[27] A. M. Lane "Nuclear Theory "(W. A. Benjamin, New york, 1964).

[28] W. Satula and R. Wyss, Nucl. Phys. **A676** (2000) 120.

[29] S. Pittel and J. Dobeš, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. **25** (1999) 661.

[30] P. Ring and P. Schuk "The Nuclear Many Body Problem" (Springer, Berlin Heidelberg, 2000).

[31] S. G. Nilsson and I. Ragnarsson "Shapes and Shells in Nuclear Structure" (Cambridge University Press, 1995).

[32] W. Greiner and J. A. Maruhn "Nuclear Models" (Springer, Berlin Heidelberg, 1996).

[33] A. Goswami, Nucl. Phys. **60** (1964) 228.

[34] J. C. Parikh, Nucl. Phys. **63** (1965) 214.

[35] H. T. Chen and A. Goswami, Nucl. Phys. **88** (1966) 208.

[36] A. Goswami and L. S. Kisslinger, Phys. Rev. **140** (1965) B26.

[37] A. L. Goodman, G. L. Struble and A. Goswami, Phys. Lett. **26B** (1968) 260.

[38] H. T. Chen and A. Goswami, Phys. Lett. **24B** (1967) 257.

[39] H. H. Wolter, A. Faessler and P. U. Sauer, Nucl. Phys. **A167** (1971) 108.

[40] G. Martínez-Pinedo, K. Langanke and P. Vogel, Nucl. Phys. **A651** (1999) 379.

[41] A. L. Goodman, Nucl. Phys. **A186** (1972) 475.

[42] S. G. Frauendorf and J. A. Sheikh, Nucl. Phys. **A645** (1999) 509.

[43] A. L. Goodman, Phys. Rev. **C63** (2001) 044325.

[44] J. A. Sheikh and R. Wyss, Phys. Rev. **C62** (2001) 051302.

[45] W. Satula and R. Wyss, Acta Pys. Pol. **B32** (2001) 2441.

[46] W. Satula and R. Wyss, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 4488.

[47] A. L. Goodman, Phys. Rev. **C60** (1999) 014311.

[48] N. S. Kelsall et al., Phys. Rev. **C64** (2001) 024309.

[49] P. Vogel, Nucl. Phys. **A662** (2000) 148.

[50] S. G. Frauendorf and J. A. Sheikh, nucl-th / 0001039.

[51] D. R. Bes, O. Civitarese, E. E. Maqueda and N. N. Scoccola, Phys. Rev. **C61** (2000) 024315.

[52] P. Vogel, Czech. J. Phys. **48** (1998) 2.

[53] M. K. Pal and M. K. Banerjee, Phys. Lett. **13** (1964) 155.

[54] P. W. Anderson, Phys. Rev. **122** (1958) 1900.

[55] J. G. Valatin, Phys. Rev. **122** (1961) 1012.

[56] R. Bengtsson, J. Dudek, W. Nazarewicz and P. Olanders Phy. Scripta **39** (1989) 196.

[57] J. R. Nix, Annu. Rev of Nucl Sci **22** (1972) 65.

[58] A. Messiah "Mécanique Quantique, Tome 2" (Dunod, Paris, 1995).

[59] M. Fellah, Thèse de doctorat de troisième cycle, Université d'Alger (1969).

[60] N. H. Allal, Thèse de doctorat, U.S.T.H.B (1994).

[61] C. Scouarnec, "Algèbre Spectrale, Tome1" (Publisud, Toulouse, 1987).

[62] D. Mokhtari, Thèse de magister, U.S.T.H.B (2002).

[63] H. Athimene, Thèse de magister, U.S.T.H.B (1981).