

N° d'ordre: 54/2012-M/PH

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE  
FACULTÉ DE PHYSIQUE



## MEMOIRE

*Présenté pour l'obtention du diplôme de* **MAGISTER**

**EN; PHYSIQUE**

Spécialité: Physique Théorique de la Matière et des Hautes Energies

*par :* **DAHBI Laid**

*THEME :*

**L'entropie d'intrication sur des espaces flous et  
espaces-réseaux.**

*soutenu publiquement le 04/07/2012, devant le jury composé de:*

<b>M. Mouloud Tribeche</b>	Professeur à l'USTHB	<i>Président</i>
<b>M. Djamal Dou</b>	Maître de Conférences /A, à l'univ.EL-Oued	<i>Directeur de Mémoire</i>
<b>M. Mahmoud Hachemane</b>	Professeur à l'USTHB	<i>Examinatrice</i>
<b>M. Badis Ydri</b>	Maître de Conférences /A, à l'univ. Annaba	<i>Examinateur</i>

# *Remerciements*

*Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au laboratoire de la Post-Graduation de Physique Théorique, Faculté de Physique, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne.*

*Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse **Djamal Dou**, Maître de conférences/A à Université. El-Oued qui par ses encouragements, pour sa patience sa disponibilité et le rôle de directeur qu'il a assumé à la perfection, son intégrité scientifique, sa franchise, ses conseils éclairés et sa vision objective et rationnelle de la problématique ainsi que sa bienveillante disponibilité a su m'accompagner lors de ces années de Magister.*

*J'exprime ma profonde et respectueuse gratitude à Monsieur **Mouloud Tibache**, Professeur à l'USTHB qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse.*

*J'adresse mes vifs et sincères remerciements à Monsieur **Mahmode Hachemane**, Professeur à l'USTHB pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'examiner ce travail et de participer au jury*

*J'adresse mes vifs et sincères remerciements à Monsieur **Badis Ydri**, Maître de conférences/A à Université. Annaba pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'examiner ce travail et de participer au jury*

*Mer remerciements les plus sincères vont aussi à R. Fermous, qui a partagé avec moi ses connaissances sur les complexités du travail. Ses encouragements et son aide m'ont été d'un grand soutien.*

*Je remercie aussi mes collègues du laboratoire de Physique Théorique de l'USTHB, étudiants et enseignants: D. Lababsa .B.Hamil.A .Djbarni F.mahbobe ..., pour leur aide et leur soutien.*

*Je n'oublierai pas tous mes amis pour leurs encouragements.*

## *Introduction*

---

*Enfin, mes remerciements les plus sincères vont à mes parents, mes sœurs, mes frères, mon épouse et tous mes proches qui m'ont toujours soutenu durant ces dernières années.*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Entropie de N-O.H couplés</b>	<b>6</b>
1.1 Thermodynamique du trou noir . . . . .	6
1.2 Entropie d'intrication: Concepts et définitions . . . . .	8
1.2.1 Entropie d'intrication . . . . .	8
1.2.2 L'entropie d'intrication pour N- O.H couplés . . . . .	9
<b>2 Espaces-Réseaux</b>	<b>21</b>
2.1 Le modèle $S^2 \times R$ . . . . .	21
2.2 Modèles 1+1 . . . . .	27
<b>3 L'entropie d'intrication sur les espaces flous</b>	<b>31</b>
3.1 La Sphère Floue . . . . .	33
3.2 Le plan de Moyal et le disque flou . . . . .	42
3.2.1 L'intégration sur un sous-disque . . . . .	46
3.2.2 L'ignorance de la moitié du disque flou . . . . .	48
3.3 Conclusion: . . . . .	53
<b>4 Appendices</b>	<b>55</b>
4.1 La sphère continue: Régularisation par réseau . . . . .	55
4.2 Évaluation perturbative . . . . .	60

*TABLE DES MATIÈRES*

---

4.3	La sphère floue . . . . .	64
4.4	Plan Moyen et le disque flou: . . . . .	70

## Introduction :

Indubitablement, l'un des développements les plus remarquables en physique, qui a eu lieu au cours des trois dernières décennies était la découverte d'une relation entre certaines lois physiques des trous noirs et les lois de la thermodynamique [1-7]. Il semble que ces lois des trous noirs et les lois ordinaires de la thermodynamique sont deux pièces majeures d'un puzzle qui vont parfaitement ensemble au point qu'il puisse y avoir un peu de doute que cette relation soit d'une signifiante profonde et puisse nous fournir une clé pour la compréhension de la nature fondamentale du trou noir en gravitation quantique, aussi bien que la compréhension de certains aspects de la thermodynamique elle-même [8-11] . Par exemple la finitude de l'entropie du trou noir est vue comme une manifestation directe de la discrétion de l'espace-temps à l'échelle de Planck, et pointe vers une réduction nécessaire du nombre de degrés de liberté sur l'horizon [11]. Cependant, malgré toutes les évidences pour une entropie associée avec l'horizon du trou noir, une compréhension complète de son origine statistique est encore manquante, et il reste incertain à quoi réfèrent ces degrés de liberté [11]. Idéalement nous chercherions la réponse dans une théorie quantique de l'espace-temps plus fondamentale, mais malheureusement aucune approche pour construire une telle théorie n'a suffisamment avancé au point qu'elle offre une réponse définitive. Néanmoins, il est presque indubitable que la thermodynamique du trou noir a ouvert un chemin pour une connaissance meilleure de la structure fondamentale de l'espace-temps. En effet, le rôle joué par la thermodynamique du trou noir est très semblable au rôle joué historiquement par la thermodynamique d'un gaz dans une boîte révélant l'atomicité et la nature quantique de la matière et la radiation. Cette analogie peut être mise en évidence en rappelant quelques faits concernant la thermodynamique en présence d'un horizon des événements. On pense souvent à l'entropie comme une mesure de l'information manquante ou indisponible sur

un système physique, et de ce point de vue, on attend qu'une certaine quantité d'entropie doive accompagner un horizon des événements, puisque par définition il est par excellence un dissimulateur d'information. En particulier, on peut associer à chaque champ quantique, en présence d'un horizon, l'entropie d'intrication résultant nécessairement de l'ignorance de modes intérieurs inaccessibles qui sont en corrélation (intriqués) avec ceux de l'extérieur [10, 13, 14]. Dans un espace classique continu, cette entropie d'intrication s'avère être infinie, au moins lorsqu'elle est calculée pour un champ quantique libre sur un espace-temps avec un background fixé. Cependant, si on impose un cutoff à courte distance sur les degrés de liberté du champ, on obtient plutôt une entropie finie, et si le cutoff est choisi de l'ordre de la distance de Planck alors cette entropie a la même grandeur que celle de l'horizon [11]. Basé sur ce résultat attrayant, il y a eu beaucoup de spéculations en attribuant l'entropie du trou noir à la somme des entropies de divers champs dans la nature [19, 3]. Indépendamment du fait que l'intrication des champs fournit toute l'entropie ou seulement une portion, les contributions de ce type doivent être présentes, et n'importe quelle théorie consistante doit rendre compte de ces entropies. L'entropie d'intrication a été explorée extensivement par plusieurs auteurs, cependant la plupart des travaux étaient consacrés au calcul de cette entropie en utilisant diverses méthodes de régularisation et l'étude du degré et l'universalité de la divergence [22-24]. Par exemple dans [18] il était démontré qu'à l'exception de l'espace-temps 1+1 le coefficient de divergence est non-universel et dépend de la méthode de régularisation. C'est pour cela qu'aucune comparaison quantitative n'était possible. Récemment l'entropie d'intrication a été étudiée sur des espaces flous [20]. Il y a beaucoup de motivations derrière la considération des espaces flous comme une alternative de réseaux. Une raison évidente est l'espoir que la non-commutativité pourrait atténuer les divergences UV et possiblement rendre finies certaines quantités qui sont UV divergentes dans les espaces classiques et au même temps préserver la symétrie de l'espace. Par exemple des résultats venant de la théorie des champs quantiques à température finie ont montré que les modèles non-commutatifs se comportent comme s'ils ont beaucoup moins (D.L)<sup>1</sup> en UV que les théories des champs conventionnels. Dans certains cas les D.L étaient si fortement

---

1. D.L =degrés de liberté

réduits que les divergences UV pourraient être évitées [21]. En effet, le cas d'entropie du trou noir, comme déjà signalé, est semblable à celle du gaz ordinaire dans une boîte, où nous savons que la finitude de l'entropie de gaz provient de la finitude du nombre de molécules et la nature quantique non-commutative de l'espace de phase. Un autre phénomène analogue qui pointe vers une nature floue de l'espace-temps vient de la combinaison de la mécanique quantique et de la gravitation qui nous conduisent indubitablement à une image floue de l'espace-temps. Une réalisation possible de cette image est fournie par la géométrie non-commutative et floue. Une autre motivation est l'émergence naturelle de géométrie non-commutative dans le cadre de la théorie des cordes en connexion avec les D-branes . En fait il a été suggéré récemment par plusieurs auteurs que le compte des états microscopiques pour un trou noir extrémal en utilisant une théorie des champs duale pourrait être interprété comme découlant de l'intrication [22-24].

Lorsqu'on considère l'entropie d'intrication sur les espaces flous ou non-commutatifs nous sommes obligés à confronter la question de la définition de la frontière par rapport à laquelle l'intrication doit être calculée. En effet, en vue de la non-localité des théories non-commutatives on s'attend que la frontière soit floue. Cela nous amène à poser la question comment on définit des régions disjointes dans un espace flou ou non-commutatif pour définir proprement l'entropie d'intrication. Dans [20] il était démontré que lorsque les variables des champs sont proprement choisies il y a presque une voie unique pour obtenir l'intrication entre les divers D.L dans des régions différentes. Dans [20] l'entropie d'intrication résultant de l'ignorance des D.L résidents dans une région donnée était calculée pour deux modèles d'espaces flous.

Dans tous les cas considérés l'entropie s'avère proportionnelle au surface de la borne qui sépare les deux régions, accessible et inaccessible. De plus, une interprétation intéressante des résultats , qui n'était pas possible dans le cadre des autres régularisations, était que l'entropie d'intrication pourrait être interprétée aussi comme étant proportionnelle au nombre des D.L sur l'horizon. Une autre question intéressante à la quelle on fait face lorsque on considère les espace flous ou non-commutatifs est la question de localisation des D.L qui donnent la contribution dominante à l'intrication. Dans le contexte du réseau il a été démontré

numériquement que la contribution dominante à l'entropie d'intrication provient de D.L qui sont situées au voisinage de l'horizon (la frontière de séparation) [25, 26]. La même question a été adressée dans dans le cadre de la régularisation floue [27]. Il a été trouvé que dans les espaces flous aussi l'entropie d'intrication est dominée par les D.L près des bornes de séparation, et dans la mesure où ce point est concerné par non-commutativité et la non-localité n'ont pas modifié l'image obtenu en utilisant le réseau comme régulateur. Des arguments étaient aussi données en faveur du fait que dans la limite macroscopique les D.L qui donnent la valeur essentielle de l'entropie d'intrication sont infiniment près au frontière de séparation. De plus, il a été démontré que lorsque seulement les D.L près au frontière sont inclus la loi de surface est facilement obtenue en utilisant la méthode  $1/N$  - expansion. Un autre point intéressant concernant cette dérivation et que la loi de surface est presque dictée par la forme du le potentiel flou et les propriétés générales de l'entropie d'intrication. En particulier plusieurs calculs numériques suggèrent que l'entropie d'intrication est contrôlée par la géométrie au voisinage de la frontière.

Dans cette dissertation nous nous concentrons sur l'entropie d'intrication sur les espaces flous et réseau-régularisés à basse dimensions . Cette dissertation est organisée comme suit : Dans le premier chapitre on commence par une revue brève de quelques aspects de la thermodynamique du trou noir, puis on introduit le concept de l'entropie d'intrication en connexion avec le trou noire et on présente une dérivation détaillée de la formule principale qui permet de calculer l'entropie d'intrication résultante de l'ignorance d'un sous-ensemble de  $N$ -oscillateurs harmoniques couplés. Dans le deuxième chapitre cette formule est appliquée à deux modèles de théorie des champs scalaires, le premier est une sphère et le deuxième est un linge (segment) où on adopte le réseau comme régulateur. Le troisième chapitre est consacré à l'espace-temps  $2+1$  avec des espaces flous, on considère deux modèles différents pour l'espace. Le premier cas est une sphère floue, les variables de champ sont décomposée sur une base où l'entropie d'intrication peut être définie sans ambiguïté, les résultats du [27] sont obtenus. Le deuxième modèle considéré est un disque flou. Dans le cas du disque il s'avère qu'il y a deux cas intéressants qui peuvent être investigues. Le premier cas résultera de l'ignorance d'un sous-disque et le deuxième résultera de l'ignorance de la moitié

du disque. Dans le premier cas la région ignorée restera finie lorsqu'on approche la limite du plan de Moyal, tandis que le deuxième cas explose et devient infini. Dans les deux cas l'entropie est proportionnelle à la surface de frontière de séparation et peut être aussi vue comme proportionnelle au nombre de D.L sur la frontière. Dans le deuxième cas l'entropie par unité de surface diverge à la limite du plan de Moyal et cette divergence est attribuée au phénomène du mélange IF-UV . Nous concluons par quelques remarques concernant la localisation de D.L qui donnent la contribution dominante à l'entropie d'intrication.

---

# Chapitre 1

## Entropie de N-O.H couplés

### 1.1 Thermodynamique du trou noir

Il était d'abord signalé par Benkenstein que des relations proches peuvent exister entre certaines lois satisfaites par les trous noirs en relativité générale et les lois ordinaires de la thermodynamique [1, 2, 3]. Le théorème de la surface de la relativité générale classique annonce que la surface  $A$  du trou noir ne peut qu'augmenter au cours de n'importe quel processus,

$$\Delta A \geq 0 \tag{1.1}$$

Benkenstein observait que ce résultat est très analogue à l'annonce de la deuxième loi de la thermodynamique : L'entropie totale  $S$  d'un système fermé (isolé) est une fonction monotone croissante.

$$\Delta S \geq 0 \tag{1.2}$$

En effet, Benkenstein proposait que la surface du trou noir (multipliée par une constante de l'ordre de l'unité de Planck) doit être interprétée comme l'entropie physique du trou noir. Un peu plus tard, l'analogie entre les deux ensembles de lois était systématiquement développé par Badrean, Carter et Hawking [6]. Ils ont démontré que dans le cadre de la relativité générale, la gravité de surface  $\kappa$ , pour un trou noir stationnaire doit être, constante

partout sur l'horizon. Ils signalaient que ce résultat est analogue à la loi zéro de la thermodynamique, i.e. la température  $T$  doit être uniforme sur un corps en équilibre thermique. Finalement, Badreen, Carter et Hawking ont démontré la première loi de la mécanique du trou noir. Dans le vide, cette loi assure que la différence de masse  $M$ , de surface  $A$  et de moment angulaire  $J$  pour deux trous noirs stationnaires proches sont reliés par l'équation suivante :

$$\delta M = \frac{1}{8\pi} \kappa \delta A + \Omega \delta J \quad (1.3)$$

où  $\Omega$  désigne la vitesse angulaire de l'horizon des évènements. Ils remarquèrent que cette loi est très analogue à la première loi de la thermodynamique, qui assure que la différence d'énergie,  $E$ , l'entropie  $S$  et d'autres paramètres d'état entre deux états d'équilibre thermique voisins pour un système est donnée par :

$$\delta E = T \delta S + \text{travail} \quad (1.4)$$

Si on compare les lois zéro, première et deuxième de la thermodynamique ordinaire avec les lois correspondant au trou noir, on observe que les quantités analogues sont,  $E \leftrightarrow M$ ,  $T \leftrightarrow \alpha \kappa$  et  $S \leftrightarrow \frac{A}{8\pi\alpha}$  où  $\alpha$  une constante indéterminée. Même dans le contexte de la relativité générale, un soupçon que cette relation puisse être de signification physique provient du fait que  $E$  et  $M$  représentent les mêmes quantités physiques, à savoir l'énergie totale du système. Cependant, dans le cadre de la relativité générale, la température physique d'un trou noir est zéro absolu, donc il ne peut y avoir aucune relation physique entre  $T$  et  $\kappa$ . Par conséquent, il serait inconsistant de supposer une relation physique entre  $S$  et  $A$ . Pour cette raison Badreen, Carter et Hawking et la plus part des chercheurs à l'époque voyaient l'analogie entre le trou noir et les lois de la thermodynamique comme une curiosité dépourvue de toute signification physique. Ce point de vue a changé après la découverte de Hawking, [4, 5], que dû aux effets quantiques le trou noir rayonne à l'infini toutes les espèces de particules avec un spectre du corps noir parfait à température ( dans les unités  $G = c = \hbar = k = 1$  )

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} \tag{1.5}$$

Donc  $\frac{\kappa}{2\pi}$  est effectivement la température physique du trou noir. Cela nous ramène à conclure que la mécanique du trou noir doit correspondre physiquement aux lois de la thermodynamique appliquées au système consistant du trou noir.

## 1.2 Entropie d'intrication : Concepts et définitions

L'intrication quantique est une corrélation non locale entre deux systèmes quantiques. Ce type de corrélation est purement quantique. L'intrication est un phénomène réel qui a été démontré à plusieurs reprises par l'expérimentation. Le mécanisme derrière ne peut pas être expliqué par une quelconque théorie existante. Dans cette section on va donner une revue détaillée sur l'entropie d'intrication résultant de l'intégration sur un sous-ensemble d'oscillateurs harmoniques couplés. La raison pour laquelle on considère les oscillateurs harmoniques couplés est que n'importe quelle théorie scalaire libre s'exprime dans l'espace de position comme un ensemble d'oscillateurs harmoniques couplés. En particulier on va donner une dérivation systématique des résultats de [14, 15].

### 1.2.1 Entropie d'intrication

On considère un système composé de deux sous-systèmes  $A$  et  $B$  et soit  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  l'espace d'Hilbert de ce système. On suppose que le système global est dans un état pur  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$  et que pour un observateur, les informations sur le sous-système  $B$  sont indisponibles. Pour cette raison l'observateur décrirait la situation avec un opérateur de densité réduit obtenu en faisant la moyenne sur le sous-système indisponible. L'opérateur de densité réduit  $\hat{\rho}_{red}$  est obtenu en faisant la trace sur la base  $\mathcal{H}_B$ ,

$$\hat{\rho}_{red} = Tr_B \hat{\rho} = \sum_a \langle a | \hat{\rho} | a \rangle \tag{1.6}$$

L'entropie associée à  $\hat{\rho}_{red}$  est donnée par l'entropie de Von Neumann

$$S_A = -Tr_A \hat{\rho}_{red} \ln \hat{\rho}_{red} \quad (1.7)$$

La caractéristique remarquable de  $S_A$  est qu'elle est différente de zéro lorsque l'état initial pur  $|\psi\rangle$  est un état intriqué. Un état est appelé intriqué s'il n'est pas séparable. Un état séparable est un état qui peut être écrit sous la forme suivante,

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle_A |\chi\rangle_B$$

Par conséquent l'entropie  $S_A$  est une mesure de l'intrication de l'état  $|\psi\rangle$  et pour cette raison l'entropie définie de cette manière est appelée *l'entropie d'intrication*. L'entropie d'intrication a plusieurs applications en physique quantique, allant des fondements de la mécanique quantique, le calcul quantique jusqu'à la physique du trou noir. Dans la suite nous serons intéressés par l'application de l'entropie d'intrication à la physique du trou noir.

## 1.2.2 L'entropie d'intrication pour N- O.H couplés

### L'entropie d'intrication pour deux O.H couplés

On considère deux O.H couplés dont l'Hamiltonien est donné par

$$H = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^2 (\delta_{ab} p_a p_b + V_{ab} q_a q_b) \quad (1.8)$$

$V$  est une matrice symétrique définie positive. La fonction d'onde de l'état fondamental est donnée par :

$$\psi_0(q_1, q_2) = \left( \det \frac{W}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}(Q^t W Q)} \quad (1.9)$$

où  $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$  et  $W = \sqrt{V} \Rightarrow W.W = V$ . Notons ici qu'on prend la racine carrée positive de  $V$ , i.e  $W$  est une matrice symétrique définie positive. Maintenant si les informations sur le premier O.H sont indisponibles on construit la matrice densité réduite en intégrant sur la

coordonnée correspondante ,

$$\rho_{red}(q_2, q'_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \psi_0(q_1, q_2) \psi_0^*(q_1, q'_2) \quad (1.10)$$

En utilisant (1.9) on trouve,

$$\rho_{red}(q_2, q'_2) = \frac{1}{\pi} (\det W)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 e^{-\frac{1}{2}(w_1 q_1^2 + w_2 q_2^2 + 2\varpi q_1 q_2)} e^{-\frac{1}{2}(w_1 q_1^2 + w_2 q_2'^2 + 2\varpi q_1 q'_2)} \quad (1.11)$$

où  $W$  est paramétrée comme suit

$$W = \begin{pmatrix} \omega_1 & \varpi \\ \varpi & \omega_2 \end{pmatrix}$$

En faisant l'intégration (1.11) on obtient,

$$\rho_{red}(q_2, q'_2) = \pi^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\det W}{w_1} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(w_2 - \frac{\varpi^2}{2w_1})(q_2^2 + q_2'^2) + \frac{\varpi^2}{2w_1} q_2 q_2'} \quad (1.12)$$

Soit  $\gamma \equiv (w_2 - \frac{\varpi^2}{2w_1})$  et  $\beta = \frac{\varpi^2}{2w_1}$ , alors la matrice densité de l'état fondamental devient

$$\rho_{red}(q_2, q'_2) = \pi^{-\frac{1}{2}} (\gamma - \beta)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\gamma(q_2^2 + q_2'^2) + \beta q_2 q'_2} \quad (1.13)$$

En notant que  $\gamma$ , et  $\gamma - \beta$  sont positifs car  $W$  est définie positive .

L'étape suivante pour trouver l'entropie correspondant à cette matrice densité réduite est de chercher les valeurs propres de  $\rho_{red}$ . L'équation aux valeurs propres est

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{red}(x, y) f_n(y) dy = \lambda_n f_n(x) \quad (1.14)$$

Maintenant, la forme gaussienne de  $\rho_{red}$  suggère qu'on cherche des fonctions propres sous forme gaussienne. Nous commençons par le choix le plus simple,  $f \sim e^{-\alpha \frac{x^2}{2}}$  et voyons si  $\alpha$

---

1. Cela résulte du fait que  $W$  soit définie positive.

peut être choisi tel que  $f$  soit une fonction propre.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\gamma - \beta)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}(x^2+y^2)+\beta xy} e^{-\frac{\alpha}{2}y^2} dy &= \lambda e^{-\frac{\alpha}{2}x^2} \Rightarrow \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\gamma - \beta)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma + \alpha}} e^{\frac{\beta^2}{2(\gamma+\alpha)}x^2 - \frac{\gamma}{2}x^2} &= \lambda e^{-\frac{\alpha}{2}x^2} \end{aligned} \quad (1.15)$$

La comparaison des arguments de l'exponentielle nous permet de fixer  $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}$ . Qu'en est-il du reste des fonctions propres? L'affaire ici est simple à deviner. Parce que le reste des fonctions propres doivent être orthogonales sur  $f = e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}$ , et on sait de la mécanique quantique d'un oscillateur harmonique que  $f = e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}$  est la fonction d'onde de l'état fondamental, et les autres états excités sont données par:  $f_n = H_n(\sqrt{\alpha}x)e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}$ ,  $H_n$  sont les polynômes d'Hermite. Les fonctions propres satisfont les conditions d'orthogonalité suivantes :

$$\langle f_n, f_{n'} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\sqrt{\alpha}x)e^{-\frac{\alpha}{2}x^2} H_{n'}(\sqrt{\alpha}x)e^{-\frac{\alpha}{2}x^2} dx = \delta_{n,n'}.$$

Nous démontrons maintenant que les  $f_n$  sont vraiment les fonctions propres de  $\rho_{red}$  et trouvons les valeurs propres correspondantes, à savoir, on démontre que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{red}(x,y) e^{-\frac{\alpha}{2}y^2} H_n(\sqrt{\alpha}y) dx = \lambda_n e^{-\frac{\alpha}{2}x^2} H_n(\sqrt{\alpha}x) \quad (1.16)$$

A cette fin on utilise l'identité suivante [28],

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x-y)^2} H_n(cy) = \sqrt{\pi}(1 - c^2)^{\frac{n}{2}} H_n\left[\frac{cx}{(1 - c^2)^{\frac{1}{2}}}\right] \quad (1.17)$$

Pour profiter de cette identité on fait un changement de variables, de  $x,y$  à  $\bar{x} = \sqrt{\frac{\gamma+\alpha}{2}}x$ ,  $\bar{y} = \beta\sqrt{\frac{1}{2(\gamma+\alpha)}}y$ . Avec ces nouvelles variables (1.16) devient:

$$\sqrt{\frac{\gamma - \beta}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\bar{x}-\bar{y})^2 + \bar{x}^2 - \frac{\gamma}{2}\bar{x}^2} H_n(\sqrt{\alpha}\bar{y}) d\bar{y} = e^{\bar{x}^2 - \frac{\gamma}{2}\bar{x}^2} \sqrt{\frac{2(\gamma - \beta)}{\pi(\gamma + \alpha)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\bar{x}-\bar{y})^2} H_n(c\bar{y}) d\bar{y} \quad (1.18)$$

où  $c \equiv \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma+\alpha}}$ . En utilisant l'identité (1.17) on trouve que

$$\sqrt{\frac{\gamma - \beta}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\bar{x}-\bar{y})^2 + \bar{x}^2 - \frac{\gamma}{2}x^2} H_n(\sqrt{\alpha}y) dy = e^{\bar{x}^2 - \frac{\gamma}{2}x^2} \sqrt{\frac{2(\gamma - \beta)}{\gamma + \alpha}} (1 - c^2)^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{c\bar{x}}{\sqrt{1 - c^2}}\right) \quad (1.19)$$

En utilisant le fait que  $c = \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma + \alpha}}$  et  $\gamma^2 - \beta^2 = \alpha^2$  il est facile de démontrer que

$$e^{\bar{y}^2 - \frac{\gamma}{2}y^2} H_n\left(\frac{c\bar{y}}{\sqrt{1 - c^2}}\right) = e^{\frac{-\alpha}{2}y^2} H_n(\sqrt{\alpha}y)$$

Donc les  $f_n(x)$  sont les fonctions propres de  $\rho_{red}$ , Les valeurs propres peuvent être lues de (1.19),

$$\lambda_n = (1 - c^2)^{\frac{n}{2}} (\gamma - \beta)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\gamma + \alpha}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty.$$

Avec quelques manipulations algébriques, les valeurs propres peuvent être écrites sous une forme plus simple

$$\lambda_n = \mu^n (1 - \mu), \quad \mu = \frac{z}{1 + \sqrt{1 - z^2}}, \quad z = \beta/\gamma \quad (1.20)$$

Ce n'est pas difficile de voir que  $z < 1$  et donc  $\mu < 1$ .

On note que  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = 1$ , qui signifie que l'ensemble des valeurs propres obtenues est exhaustif.

### CONCLUSION:

Soit  $\rho_{red}$  un opérateur dont les éléments de matrice sont donnés par,

$$\rho(x, y) = \sqrt{\frac{\gamma - \beta}{\pi}} e^{\frac{-\gamma}{2}(x^2 + y^2) + \beta xy} = \sqrt{\frac{\gamma - \beta}{\pi}} e^{-\frac{\gamma - \beta}{2}(x^2 + y^2) - \frac{\beta}{2}(x - y)^2} \quad (1.21)$$

Les fonctions propres sont données par

$$f_n(x) = f_n = H_n(\sqrt{\alpha}x) e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}, \quad \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}$$

D'où il découle que l'entropie d'intrication est donnée par

$$S_{ent} = -Tr \rho_{red} \log \rho_{red} = - \sum_n \lambda_n \log \lambda_n = \quad (1.22)$$

$$= -\log(1 - \mu) - \frac{\mu}{1 - \mu} \log \mu \quad (1.23)$$

Avant de considérer le cas général de  $N$  O.H couplés, il y a d'abord une propriété importante qui doit être mentionnée ici. Le fait que  $\mu$  ne dépend que du rapport entre  $\beta$  et  $\gamma$  signifie que les valeurs propres sont invariantes par rapport à une mise en échelle simultanée de  $\beta$  et  $\gamma$ , ce qui équivaut à une mise en échelle de  $V$ . Cette propriété restera valide même lorsque on considère le cas général de  $N$  O.H et elle nous sera utile.

### N-Oscillateurs Harmoniques Couplés.

Avant d'entrer dans le détail on commence par résumer le résultat principal. On considère un système de  $N$ -O.H couplés dont l' Hamiltonien est donné par

$$H = \frac{1}{2} \sum_{A=1}^N \delta_{AB} \hat{P}_B \hat{P}_A + \frac{1}{2} V_{AB} \hat{q}^A \hat{q}^B \quad (1.24)$$

où  $V$  est une matrice définie positive. Le cas où  $V$  a des valeurs propres nulles a besoin d'un traitement spécial. Il correspond au champ sans masse et nous allons le reconsidérer plus tard . La fonction d'onde de l'état fondamental est donnée par <sup>2</sup>

$$\psi_0 = \left( \det \frac{W}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2} W_{AB} q^A q^B}$$

et la matrice densité

$$\rho(Q, Q') = \left( \det \frac{W}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} W_{AB} (q^A q^B + q'^A q'^B)}$$

où  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$  et  $Q' = (q'_1, q'_2, \dots, q'_N)$ . Maintenant si les informations sur les degrés de libertés  $q^\alpha, \alpha = \overline{n, N}$  sont indisponibles, on forme la matrice densité réduite en intégrant sur

---

2. La convention de sommation d'Einstein sous-entendue.

$$q^\alpha, \alpha = \overline{n, N},$$

$$\rho_{red}(\{q^a\}, \{q^b\}) = \int \prod_{\alpha=n}^N dq_\alpha \rho[(q_1, \dots, q_{n-1}, q_n \dots q_N); (q'_1, \dots, q'_{n-1}, q_n \dots q_N)] \quad (1.25)$$

Ici on utilise la convention dont les indices latins  $(a, b, i, j, \dots)$  vont de 1 jusqu'à  $n - 1$  et les indices grecs  $(\alpha, \beta, \dots)$  vont de  $n + 1$  jusqu'à  $N$ . L'entropie d'intrication pour n'importe quel Hamiltonien de la forme (1.24) est donnée par

$$S_{ent} = \sum_i \left[ \log \left( \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_i} \right) + \sqrt{1 + \lambda_i} \log \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_i}} \right) \right] \quad (1.26)$$

où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de la matrice suivante,

$$\Lambda_{i,j} = - \sum_{\alpha=1}^n W_{i\alpha}^{-1} W_{\alpha j} \quad (1.27)$$

$W_{\alpha j}$  et  $W_{i\alpha}^{-1}$  sont les éléments de  $W$  et  $W^{-1}$  respectivement avec  $i, j$  allant de  $n+1$  jusqu'à  $N$  et  $\alpha$  allant de 1 jusqu'à  $n$ .  $\Lambda$  est une matrice  $(N-n) \times (N-n)$  et  $i, j$  varient de  $n+1$  jusqu'à  $N$ .

Passons à présent à la démonstration de (1.26). La démonstration est basée sur la diagonalisation de  $\rho_{red}$  en la réduisant à un produit tensoriel des opérateurs densité ayant la même forme que (1.21). A cette fin on commence par décomposer  $W$  comme suit,

$$W = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{ab} & B_{a\beta} \\ B_{a\beta}^T & D_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

Puis

$$W_{AB} q^A q^B = A_{ab} q^a q^b + 2B_{a\beta} q^\beta q^a + D_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta. \quad (1.29)$$

Donc la matrice réduite prend la forme

$$\rho_{red} = \left(\det \frac{W}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}A_{ab}(q^a q^b + q'^a q'^b)} \int dq_n \dots dq_N e^{-(D_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta + B_{\alpha\beta} q^\beta (q^a + q'^a))}$$

On a d'abord besoin de calculer l'intégrale précédente. Soit  $J_\beta \equiv B_{\beta\alpha}(q'^a + q^a)$  donc l'intégrale devient

$$I = \int dq_n \dots dq_N e^{-q^t D q - q^t J} \quad (1.30)$$

Cette intégrale peut être évaluée en diagonalisant  $D$ . On note que  $D$  est une matrice symétrique réelle et positive qui peut être diagonalisée par une transformation orthogonale avec un déterminant égal à 1 :  $D = T^t D_d T, \text{Det} T = 1$ .

En changeant les variables  $q' = Tq$  et en posant  $J' = TJ$ ,  $I$  prend la forme

$$\begin{aligned} I &= \int dq'_n \dots dq'_N e^{-q'^t D_d q' - q'^t J'} \\ &= \int dq'_n \dots dq'_N e^{-\sum_\alpha (d_\alpha q'^2_\alpha - q'_\alpha J'_\alpha)} \\ I &= e^{\sum_\alpha \frac{J'^2_\alpha}{4d_\alpha}} \int dq'_n \dots dq'_N e^{-\sum_\alpha (\sqrt{d_\alpha} J'_\alpha + \frac{J'_\alpha}{2\sqrt{d_\alpha}})^2} \\ &= e^{\sum \frac{J'^2_\alpha}{4d_\alpha}} (\det D^{-1})^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{N-n+1}{2}} \end{aligned}$$

Donc

$$\rho_{red} = \left(\det \frac{W}{\pi}\right) (\det D^{-1})^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{N-n+1}{2}} e^{-\frac{1}{2}A_{ab}(q^a q^b + q'^a q'^b)} e^{\sum \frac{J'^2_\alpha}{4d_\alpha}}$$

En utilisant  $J = TJ$  et  $T^t D_d^{-1} T = D^{-1}$  il est facile de démontrer que

$$\sum \frac{J'^2_\alpha}{d_\alpha} = (B(q + q'))^t D^{-1} B(q + q')$$

Remplaçant dans  $\rho_{red}$  et faisant quelques simples arrangements, on trouve :

$$\rho_{red} = (\det W D^{-1})^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{(n-1)}{2}} e^{[-\frac{1}{2}A_{ab} + \frac{1}{4}(B^t D^{-1} B)_{ab}](q^a q^b + q'^a q'^b)} e^{\frac{1}{4}(B^t D^{-1} B)_{ab}(q'^b q^b + q^a q'^b)} \quad (1.31)$$

L'étape suivante est de mettre (1.31) sous une forme analogue à (1.21). Ceci peut être achevé en utilisant l'identité suivante

$$(q^a q'^b + q'^a q^b) = (q^a q^b + q'^a q'^b) - (q^a - q'^a)(q^b - q'^b)$$

et en introduisant les deux matrices suivantes;

$$M_{ab} = A_{ab} - (B^t D^{-1} B)_{ab} \quad \text{et} \quad N_{ab} = (B^t D^{-1} B)_{ab}$$

La matrice densité réduite devient alors

$$\rho_{red} = (\det W D^{-1})^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{(n-1)}{2}} e^{-\frac{1}{2} M_{ab} (q^a q^b + q'^a q'^b)} e^{-\frac{1}{4} [N_{ab} (q^a - q'^a) (q^b - q'^b)]} \quad (1.32)$$

D'autre part, d'après la normalisation de  $\rho$ , il est aisé de démontrer que  $\det(W D^{-1}) = \det M$ , et nous nous retrouvons avec,

$$\rho_{red} = \left(\det \frac{M}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} [M_{ab} (q^a q^b + q'^a q'^b)]} e^{-\frac{1}{4} [N_{ab} (q^a - q'^a) (q^b - q'^b)]} \quad (1.33)$$

Pour se servir des résultats obtenus dans le cas de deux-O.H couplés on a besoin de diagonaliser  $\rho_{red}$ . cette fin, on passe à la base  $\{\tilde{q}^a\}$  dans laquelle  $M$  est diagonale. Soit  $U$  la matrice de diagonalisation de  $M$  ( $\det U = 1$ ) avec  $M = U^t M_d U$  et soit  $Uq \equiv \tilde{q}$ . Dans cette base  $\rho_{red}$  prend la forme

$$\rho_{red} = \left(\det \frac{M}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_i m_i (\tilde{q}_i^2 + \tilde{q}'_i{}^2) - \frac{1}{4} (\tilde{q} - \tilde{q}')^t Z (\tilde{q} - \tilde{q}')} \quad (1.34)$$

où  $Z = U N U^t$

Encore on passe aux nouvelles variables  $x_i = \tilde{q}_i \sqrt{m_i}$  et on définit  $F_{ij} \equiv \frac{Z_{ij}}{\sqrt{m_i} \sqrt{m_j}}$ , on trouve

$$\rho_{red} = c e^{-\frac{1}{2} \sum_i (x_i^2 + x'_i{}^2) - \frac{1}{4} \sum_{ij} (x - x')_i^t F_{ij} (x - x')_j}$$

En passant de  $\tilde{q}_i$  à  $x_i$  un jacobien est introduit. Il est égal à  $\det M^{-1/2}$  et il se simplifie avec  $\det M^{1/2}$  ; il nous reste  $c = \frac{1}{\sqrt{\pi}^{N-n}}$ .

On peut démontrer que la matrice  $F$  est positive et symétrique, donc elle est diagonalisable par une matrice orthogonale  $T$  avec  $\det T = 1$ . Soit  $z_i = T_{ij}x_j$  un nouvel ensemble de variables. Dans cette base  $\rho_{red}$  est complètement diagonalisée et prend la forme voulue

$$\rho_{red} = \prod_i \rho_{red}(\lambda_i) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z_i^2 + z_i'^2) - \frac{1}{4}\lambda_i(z - z')_i^2} \quad (1.35)$$

où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de la matrice  $F$ . Les valeurs propres de  $\rho_{red}$  peuvent être directement déduites des résultats de la section précédente. Cependant, avant de pouvoir le faire, nous devons nous débarrasser des matrices de diagonalisation avec lesquelles  $F$  est exprimée et lier les valeurs propres de  $\lambda_i$  directement à la matrice  $W$ . En utilisant la définition de  $F_{ij}$  et  $Z$  on trouve que

$$F_{ij} = \sum_{kl} \frac{U_{ik}}{\sqrt{m_i}} N_{kl} \frac{U_{lj}^t}{\sqrt{m_j}}$$

Combinant avec  $UM^{1/2} = M_d^{1/2}U$  on trouve

$$F = UM^{-\frac{1}{2}}NM^{-\frac{1}{2}}U^t$$

On note d'abord que les valeurs propres de  $F$  sont les mêmes que les valeurs propres de  $U^tFU$ , cela signifie qu'on peut utiliser la matrice  $\tilde{F} = M^{-\frac{1}{2}}NM^{-\frac{1}{2}}$  au lieu de  $F$ .

Une forme standard plus simple et équivalente à  $\tilde{F}$  peut être obtenue comme suit. On commence par l'équation caractéristique des valeurs propres  $\det(\tilde{F} - \lambda I) = 0$ .

$$\begin{aligned} \det(F - \lambda I) &= \det(M^{-\frac{1}{2}}NM^{-\frac{1}{2}} - \lambda I) \\ &= \det(M^{-\frac{1}{2}}NM^{-\frac{1}{2}} - \lambda M^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}) \\ &= \det(NM^{-\frac{1}{2}} - \lambda M^{\frac{1}{2}})M^{-\frac{1}{2}} = \det(NM^{-1} - \lambda I) \end{aligned} \quad (1.36)$$

Soit  $(M^{-1})^a_c N_b^c = \Lambda_b^a$ .

La matrice  $\Lambda$  peut être écrite en termes des éléments de  $W$  et son inverse. Pour ce faire, on commence par décomposer  $W$ , l'équation (1.29).

$$W = \begin{pmatrix} A_{ab} & B_{a\beta} \\ B_{a\beta}^T & D_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

On considère maintenant la décomposition analogue de  $W^{-1}$ .

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{ab} & \tilde{B}^{a\beta} \\ \tilde{B}^{b\alpha} & \tilde{D}^{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

avec

$$(W^{-1})^{AB} W_{BC} = \delta^A_C \quad (1.37)$$

$$\tilde{A}^{ab} A_{bc} + \tilde{B}^{a\beta} B_{\beta c}^T = \delta^a_c \quad (1.38)$$

et

$$\tilde{A}^{ab} B_{b\gamma} + \tilde{B}^{a\beta} D_{\beta\gamma} = 0 \Rightarrow \tilde{B}^{a\beta} = -\tilde{A}^{ab} B_{b\gamma} D_{\beta\gamma}^{-1}$$

Substituant l'équation (1.39) dans (1.38) on trouve

$$\tilde{A}^{ab} (A_{bc} - B_{b\gamma} D_{\gamma\beta}^{-1} B_{\beta c}^T) = \tilde{A}^{ab} M_{ac} = \delta^a_c \quad (1.39)$$

il s'ensuit que

$$\tilde{A}^{ab} = M_{ab}^{-1}$$

et

$$\Lambda = \tilde{A} B D^{-1} B^T \quad (1.40)$$

À partir de (1.39) on a  $B = -\tilde{A}^{-1}\tilde{B}D$ . Substituant dans (1.27) on trouve,

$$\Lambda = \tilde{A}B D^{-1}B^T = -\tilde{B}B^T \quad (1.41)$$

On conclut que

$$\Lambda_{ab} = \tilde{B}^{a\beta}B_{\beta b}^T = -\sum_{\beta} W_{a\beta}^{-1}W_{\beta b} \quad (1.42)$$

$W_{a,\beta}$  et  $W_{\beta,b}^{-1}$  sont les éléments de  $W$  et  $W^{-1}$  respectivement, avec  $a, b$  allant de  $n+1$  à  $N$  et  $\beta$  de 1 à  $n$ . Finalement, l'équation (1.35) nous informe que la matrice densité réduite peut être écrite comme un produit tensoriel de  $N - n$  opérateurs de densité,

$$\rho_{red} = \bigotimes_a \rho(\lambda_a) \quad (1.43)$$

Les valeurs propres de  $\rho(\lambda_a)$  peuvent être facilement déduites de l'équation (1.21) en substituant  $\beta = \frac{\lambda_a}{2}$  et  $\gamma = 1 + \frac{\lambda_a}{2}$ ; on trouve,

$$p_n(\lambda_a) = \mu_a^n(1 - \mu_a), \text{ avec } \mu_a = \frac{\lambda_a}{(1 + \sqrt{\lambda_a})^2} \quad (1.44)$$

À partir de (1.43) il découle que l'entropie est donnée par,

$$S = \sum_{a=1}^{N-n} S(\lambda_a) \quad (1.45)$$

D'autre part,

$$S(\lambda_a) = -\ln(1 - \mu_a) - \frac{\mu_a}{1 - \mu_a} \ln \mu_a$$

En substituant pour  $\mu_a$  et en utilisant (1.44) on trouve pour  $S(\lambda_a)$ ,

$$S(\lambda_a) = \log\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_a}\right) + \sqrt{1 + \lambda_a} \log\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_a}} + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_a}}\right) \quad (1.46)$$

Avec l'équation (1.46) nous avons démontré le résultat principal de cette section.

---

# Chapitre 2

## Espaces-Réseaux

Dans ce chapitre on applique les résultats obtenus dans le chapitre précédent sur une théorie scalaire réelle définie sur un espace-temps ayant une topologie  $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^2$ , où  $\mathbf{R}$  est le temps et  $\mathbf{S}^2$  la partie spatiale, La raison pour laquelle on considère ce modèle est que cela nous sert comme une préparation pour aborder le modèle plus compliqué de la sphère floue. Effectivement, la sphère classique régularisée avec un réseau s'avère avoir beaucoup de similarité avec la sphère floue et cela renforcera nos arguments heuristiques sur le modèle de la sphère floue. Une autre application sera deux modèles 1+1, à savoir  $S^1 \times R$  et  $I \times R$  où  $I$  est un segment, dans ces modèles les bornes résultantes ne sont que des points discrets et donc ce sera intéressant de savoir la mise en échelle de l'entropie d'intrication. En effet, la gravitation avec dimension 1 + 1 a été toujours intéressante et spéciale.

### 2.1 Le modèle $S^2 \times R$

L'entropie d'intrication que nous sommes en train de calculer résulte de la considération suivante : On suppose que les D.L d'un champ scalaire qui résident dans l'hémisphère supérieure (ou de manière équivalente l'hémisphère inférieure) comme étant indisponibles. Si la sphère est vue comme étant plongée dans  $R^3$  par l'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , l'hémisphère supérieure correspond aux  $z > 0$  et l'inférieure aux  $z < 0$ , l'équateur est le cercle en  $z = 0$  et qui correspond à la borne de séparation (l'horizon). Le lagrangien de la théorie scalaire

avec masse  $m$  sur une sphère est donné par:

$$L = \frac{1}{2} \int d\Omega (\dot{\phi}^2 + \phi(\Delta - \mu^2)\phi) \quad (2.1)$$

Pour des raisons de calcul il s'avère que la régularisation est mieux faite dans les coordonnées cylindriques. Le Laplacien  $\Delta$  dans ces coordonnées est donné par:

$$\Delta = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial z} ((R^2 - z^2) \frac{\partial}{\partial z}) + \frac{1}{R^2 - z^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2.2)$$

où  $R$  est le rayon de la sphère. Cette relation peut être facilement démontrée comme suit :  
Le Laplacien dans les coordonnées sphériques (avec un rayon constant) est donné par :

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{R^2 (\sin \theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2.3)$$

En utilisant  $z = R \cos \theta \Rightarrow \partial_z = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}$ . L'équation (2.2) s'ensuit en substituant  $\partial_\theta$  dans (2.3).

Pour la partie angulaire du champ on utilise le développement de Fourier pour l'écrire sous la forme suivante,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m(z) e^{-im\varphi} \quad , \quad \phi_m^*(z) = \phi_{-m}(z)$$

En substituant dans (2.1) on trouve que le Lagrangien  $L$  est une somme directe des lagrangiens microscopiques  $L_m$  chacun associé avec une valeur possible du nombre azimutal  $m$ .

$$L = \sum_{-\infty}^{\infty} L_m \quad (2.4)$$

où

$$L_m = \frac{1}{2} \int_{-R}^R dz \left[ \dot{Q}_m^2 - \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) \left(\frac{\partial Q_m}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{m^2}{R^2 - z^2} + \mu^2\right) Q_m^2 \right] \quad (2.5)$$

où  $Q_0 = \phi(z)$  et  $Q_m = \sqrt{2}Re\phi_m$  pour  $m > 0$  et  $Q_m = \sqrt{2}Im\phi_m$  pour  $m < 0$ . Le calcul de (2.4) et (2.5) est donné dans les appendices.

Parce que l'entropie d'intrication est divergente en l'absence d'un cutoff UV la théorie doit être d'abord régularisée. On peut le faire par introduire un cutoff sur les énergies ou par mettre la théorie dans un réseau. Pour des raisons de calcul et l'analogie avec la sphère floue on va utiliser la régularisation avec réseau : régularisation. Dans notre régularisation l'axe des  $z$  est remplacé par un réseau unidimensionnel, i.e.  $z \rightarrow z_n = na$ , où  $a = \frac{R}{N} \rightarrow 0$  est la maille du réseau,  $n = -(N-1), \dots, (N-1)$ . La dérivation par rapport à  $z$  est remplacée par la différence finie. Le Lagrangien microscopique régularisé pour un secteur est donné par (voir l'appendice 1):

$$L_m = \frac{1}{2a} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \left[ (a\dot{Q}_{m,n})^2 + \left(1 - \frac{n^2}{N^2}\right)(Q_{m,n} - Q_{m,n-1})^2 + \left(\frac{m^2}{N^2 - n^2} + a^2\mu^2\right)Q_{m,n}^2 \right] \quad (2.6)$$

D'où l'Hamiltonien correspondant:

$$H_m = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \Pi_{m,n} \dot{Q}_{m,n} - L_m$$

où  $\Pi_{m,n}$  le moment conjugué de  $Q_{m,n}$  est donné par

$$\Pi_{m,n} = \frac{\partial L_m}{\partial \dot{Q}_{m,n}} = a\dot{Q}_{m,n} \Rightarrow$$

$$H_m = \frac{1}{2a} \sum_{n=-(N-1)}^{(N-1)} \left[ \Pi_{m,n}^2 + \left(1 - \frac{n^2}{N^2}\right)(Q_{m,n} - Q_{m,n-1})^2 + \left(\frac{m^2}{N^2 - n^2} + a^2\mu^2\right)Q_{m,n}^2 \right] \quad (2.7)$$

Par une redéfinition du champ ( $Q \rightarrow Q/\sqrt{a}$ ) et changement des variables de sommation ( $n \rightarrow A, B = n + N$ )  $H_m$  peut être porté à la forme standard de  $(2N-1)$ -O.H couplés.

$$H_m = \sum_{A,B=1}^{2N-1} [\delta_{A,B} \Pi^A \Pi^B + V_{A,B}^{(m)} Q_m^A Q_m^B]$$

où  $V_{A,B}^{(m)}$  est donnée par:

$$\begin{aligned} V_{AB}^{(m)} &= \left[ 2 - \frac{(N-A)^2}{N^2} - \frac{(N-A+1)^2}{N^2} + a^2 \mu^2 + \frac{m^2}{N^2 - (N-A)^2} \right] \delta_{A,B} \\ &- \left[ 1 - \frac{(N-A)^2}{N^2} \right] \delta_{B,A-1} - \left[ 1 - \frac{(N-B)^2}{N^2} \right] \delta_{A,B-1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

L'Hamiltonien macroscopique et donc donné par

$$H = \sum_{-\infty}^{\infty} H_m \quad (2.9)$$

Comme on a déjà mentionné dans le début de ce chapitre on va calculer l'entropie d'intrication résultant de l'ignorance des informations sur les D.L qui résident dans l'hémisphère supérieure. Donc nous allons intégrer sur tous les D.L  $Q_m^A$  pour  $A \geq N$ . Puisque l'Hamiltonien macroscopique est une somme directe des Hamiltoniens microscopiques  $H_m$ , les secteurs correspondant aux valeurs différentes de  $m$  ne se mélangent pas, et l'opérateur densité réduit sera le produit tensoriel direct des opérateurs densité résultant de chaque secteur,

$$\rho_{red} = \bigotimes_{m=-\infty}^{\infty} \rho_{red}^{(m)} \quad , \quad \rho_{red}^{(m)} = \rho_{red}^{(-m)} \quad (2.10)$$

L'entropie d'intrication totale est donc donnée par:

$$S_N = S_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} S_m \quad (2.11)$$

$S_m$  est calculée en appliquant les résultats du chapitre précédent, à savoir

$$S_m = \sum_{a=1}^N \left[ \log \left( \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_a^m} \right) + \sqrt{1 + \lambda_a^m} \log \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_a^m}} + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_a^m}} \right) \right] \quad (2.12)$$

où  $\lambda^m_a$  sont les valeurs propres de la matrice suivante,

$$\Lambda_{a,b}^{(m)} = - \sum_{\alpha} W_{a\alpha}^{(m)-1} W_{\alpha b}^{(m)} \quad (2.13)$$

Évidement n'importe quel calcul de  $S_N$  est impossible et on doit nécessairement faire appel aux méthodes numériques pour évaluer cette entropie. Mais on voit que  $S_N$  est donnée par une somme infinie qui rend aussi les méthodes numériques inutiles. Heureusement il s'avère que pour  $N$  donné la somme peut être toujours tronquée à une valeur maximale  $m_{max}$  de telle sorte que le reste de la somme soit calculable analytiquement et aussi montrer que ce reste est très petit et donc négligeable. Donc on commence d'abord par démontrer que pour  $m$  grand, l'entropie correspondante  $S_m$  est négligeable. Considérons maintenant  $V^m$  avec  $m \gg N$ . C'est facile de voir à partir de (2.8) que pour ces secteurs les termes diagonaux sont dominants par rapport aux termes non diagonaux, et sous ces conditions  $W^{(m)}$  et  $W^{(m)-1}$  peuvent être calculées perturbativement. Dans les appendices il est démontré que pour  $m \gg N$

$$\Lambda_{ab}^{(m)} = \delta_{ab} \delta_{bN} \frac{N^4}{4m^4} + O\left(\left(\frac{N}{m}\right)^6\right) \quad (2.14)$$

Cela signifie que si on néglige les termes d'ordre  $(N/m)^6$  toutes les valeurs propres sont nulles à l'exception des dernières valeurs. On a donc pour  $S_m$

$$S_m \approx \frac{N^4}{16m^4} \left(1 - \log \frac{N^4}{16m^4}\right) \quad (2.15)$$

Ce résultat montre d'abord que la somme (2.11) est convergente. Deuxièmement on peut utiliser ce résultat pour évaluer le reste de la somme et qui nous permet aussi de décider de la valeur de  $m_{max}$ . Soit  $\delta S$  la contribution du secteur  $m \geq m_{max}$ ,

$$\delta S = 2 \sum_{m=m_{max}}^{\infty} S_m = 2 \sum_{m=m_{max}}^{\infty} \frac{N^4}{16m^4} \left(1 - \log \frac{N^4}{16m^4}\right) \quad (2.16)$$

Au vu du fait que  $m/N \ll 1$ , la somme dans (2.16) peut être approximée par une intégrale

$$\delta S = 2N \int_{m_{max}/N}^{\infty} S(x) dx, S(x) = \frac{1}{16x^4}(1 + 4 \log(2x)) \quad (2.17)$$

L'intégrale est facilement évaluée et sa valeur essentielle est donnée par

$$\delta S/N = \frac{2N^3}{3m_{max}^3} \log \frac{m_{max}}{N} + o(N^3/m^3)$$

Par exemple pour  $N = 80$  et  $m_{max} = 2000$  on trouve pour  $\delta S/N \sim 10^{-4}$ .

Ayant démontré que la somme peut être tronquée pour  $N$  donné à un certain  $m_{max}$  de telle sorte que  $\delta S$  peut être rendu négligeable, nous nous tournons maintenant à l'évaluation de la partie pertinente de l'entropie, à savoir,

$$S_N = S_0 + 2 \sum_{m=1}^{m_{max}} S_m \quad (2.18)$$

Pour  $N$  donné on calcule numériquement l'entropie  $S_N$ . Cela implique l'évaluation des valeurs propres de  $\Lambda$  pour chaque paire  $(N, m)$  et puis le calcul de l'entropie en utilisant (2.12) et (2.18).

Le résultat obtenu pour l'entropie mise en échelle  $S = S_N/N, m_{max} = 2000$  et pour un champ sans masse est représenté sur la Figure 1. On observe que l'entropie converge rapidement vers la valeur  $0.465N$  et  $N = R/a$ . D'où l'entropie résultante est proportionnelle à la surface (circonférence) de la borne avec un coefficient de proportionnalité qui va comme  $1/\text{cutoff}$ , via

$$S_N = \frac{0.465}{2\pi a} A \quad (2.19)$$

où  $A = 2\pi R$ , qui est la loi de surface à 2 dimensions.

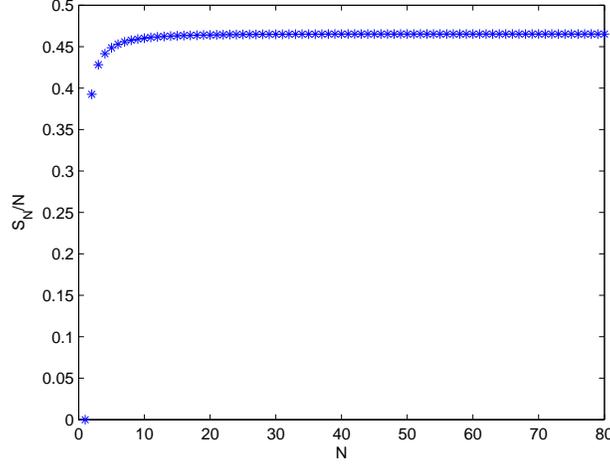


FIG. 2.1 – *L'entropie d'intrication mise en échelle  $S$  pour une théorie du champ sans masse sur une sphère, avec  $m_{max} = 2000$ .*

## 2.2 Modèles 1+1

Dans cette section on considère une théorie scalaire définie sur un espace-temps 1+1. Le cas à deux dimensions est intéressant parce que il a été démontré dans [18] que, contrairement aux dimensions supérieures le coefficient de divergence est universel, i.e il ne dépend pas de la méthode de la régularisation, donc ce sera intéressant de vérifier cette propriété dans le cas du réseau. On commence d'abord par considérer le cas dont l'espace est un segment de longueur  $2L$ . Le Lagrangien d'une théorie scalaire de masse  $m$  sur une ligne est donnée par :

$$L = \int_{-L}^L dx \left[ \dot{\phi}^2 - (\partial_x \phi)^2 - m^2 \phi^2 \right] \quad (2.20)$$

La ligne est récupérée dans la limite  $L \rightarrow \infty$ . Le modèle est régularisé en remplaçant le segment par un réseau unidimensionnel, i.e  $x_n = na$  où  $a = \frac{L}{N} \rightarrow 0$  est la maille du réseau et  $n = -N, \dots, N$ . La dérivée est remplacée par la différence finie, et l'intégrale par une sommation finie. Après quelques changements de variables le Lagrangien prend la forme suivante,

$$L = \sum_{n=0}^{2N} [\dot{\phi}_n^2 + (\phi_{n+1} - \phi_n)^2 - \mu^2 \phi_n^2] \quad (2.21)$$

où  $\mu$  est la masse mise en échelle et  $\phi_{na} \equiv \phi_n$ , avec les conditions au bornes  $\phi_0 = \phi_{2N} = 0$ . Dans le but de calculer l'entropie d'intrication on a seulement besoin du potentiel qui peut être lu a partir de l'équation (2.21)

$$V_{A,B} = [2 + a^2 m^2] \delta_{A,B} - \delta_{A,B-1} - \delta_{B,A-1} \quad (2.22)$$

Considèrerons maintenant l'entropie d'intrication résultant de l'ignorance des D.L résidants sur la partie négative de la ligne. L'évaluation de l'entropie peut être fait numériquement en utilisant le même formalisme. On note d'abord que la frontière dans ce cas n'est qu'un point et donc nous nous attendons la divergence soit plus "soft" que celui de la section précédente. Cependant il n'est pas difficile de deviner que l'entropie résultante doit avoir une divergence logarithmique. Dans la figure 2,  $S_N/\log(N)$  est représentée. On observe que les valeurs convergent vers la valeur suivante,

$$S_N = 0.16 \log(N) \quad (2.23)$$

Ce résultat peut être écrit sous la forme suivante,

$$S_N = 0.16 \log(L/a) \quad (2.24)$$

Ce résultat diverge à la limite continue et on note que la coefficient de divergence est le même obtenue dans [18], à savoir  $0.16 \simeq 1/6$ , ce qui confirme la universalité de ce coefficient dans 1 + 1. On remarque ici que l'entropie a aussi une divergence de type  $IR$  lorsque  $L \rightarrow \infty$ . Équation (2.24) est exactement le même le résultat obtenu par [18] en utilisant la méthode du Heat-Kernel.

Maintenant ,on considère la même théorie scalaire mais sur une cercle de rayon  $R$ . Le Lagrangien est donné par ,

$$L = \int_0^{2\pi} d\theta [\dot{\phi}^2 - \frac{1}{R^2}(\partial_\theta \phi)^2 - m^2 \phi^2] \quad (2.25)$$

La théorie est régularisée en remplaçant la variable angulaire  $\theta$  par  $\theta_n = \frac{n\pi}{N}$  avec  $n = 0 \dots 2N$ . Les variables dynamiques sont maintenant  $\phi_n$  avec la condition de périodicité  $\phi_0 = \phi_{2N}$ . En passant par les mêmes étapes que celles de la ligne on trouve que le potentiel est donné par

$$V_{A,B} = [2 + a^2 m^2] \delta_{A,B} - \delta_{A,B-1} - \delta_{B,A-1} - \delta_{A,2N+1} \delta_{B,2N+1} + \delta_{B,2N+1} \delta_{A,1} \quad (2.26)$$

Où  $a = \frac{n\pi R}{N}$ , L'entropie d'intrication résultante de l'ignorance de la moitié du cercle peut être facilement évaluée numériquement. Elle est égale à,

$$S_N = 0.1675 \log(N) \quad (2.27)$$

Ici aussi on retrouve le même coefficient bien que la frontière soit constituée de deux points. Ce résultat confirme encore l'universalité du coefficient de divergence en 1 + 1.

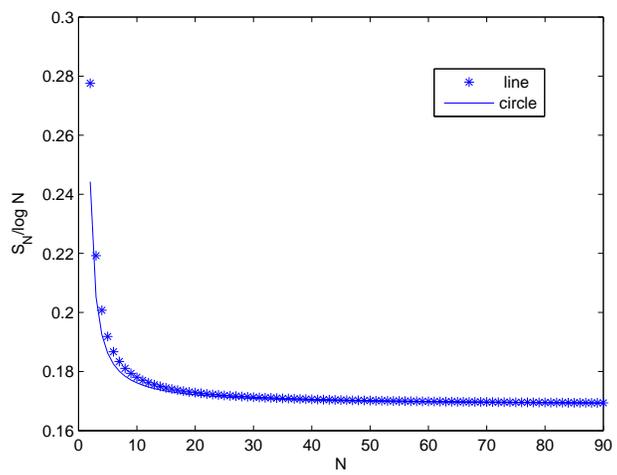


FIG. 2.2 – L'entropie mise en échelle  $S = S_N / \log(N)$  pour un champ scalaire sur deux réseaux unidimensionnels .

---

## Chapitre 3

# L'entropie d'intrication sur les espaces flous

D'une manière simple et intuitivement, la géométrie non - commutative est une géométrie dont les coordonnées ne commutent pas. Puisque les coordonnées ne peuvent pas être diagonalisées simultanément, la notion de point classique disparaît. Ce fait est déjà connu de la mécanique quantique où les relations des commutations canoniques dans l'espace des phases conduit au principe d'incertitude d'Heisenberg. L'espace des phases en mécanique est un exemple évident d'un espace non-commutatif. Une théorie des champs définie sur un espace non-commutatif est appelée une théorie des champs non-commutative [21, 31]. Il y a plusieurs arguments plus ou moins indépendants en faveur de l'usage de la géométrie non-commutative en physique des hautes énergies. Le besoin de remplacer la continuité et la structure commutative de l'espace-temps par la version non-commutative trouve ses origines dans le fait qu'en théorie des champs quantique les divergences UV se présentent lorsqu'on essaye de mesurer les amplitudes d'oscillation du champ en un point précis de l'espace-temps. Autrement dit, ce sont les infinités qui traçassent toutes les théories des champs renormalisables , lorsque nous essayons de faire des prédictions . Ces infinités peuvent être traitées avec la Renormalization, cependant ceci est vu par plusieurs physiciens comme insatisfaisant et n'est qu'une indication que quelque chose ne va pas à certaines énergies. Une façon de contourner ce problème serait de donner une structure additionnelle au

---

point qui rendrait telle mesure impossible. Par exemple, on peut modifier la structure de l'espace-temps avec l'hypothèse que à une échelle  $l_c$  suffisamment petite le point devient un opérateur non-commutatif. Ce signifie en particulier qu'il serait impossible de mesurer exactement la position d'une particule parce que ses coordonnées ne peuvent pas être diagonalisées simultanément. La position de particule n'aurait pas un sens bien définie. En effet, il a été postulé il y a quelques temps [30] que la structure non-commutative à petite échelle pouvait introduire une coupure effective en théorie des champs, similaire à celle du réseau mais préservant en même temps l'invariance de Lorentz. Une autre motivation pour la géométrie non-commutative est l'infinité qui entrave toute procédure de quantification de la gravitation, car dans ce cas la procédure de renormalisation est inapplicable. La troisième infinité, qui est généralement moins appréciée par rapport aux autres, est l'infinité qui se produit chaque fois qu'on essaye de tenir compte des contributions à l'entropie du trou noir, qui ne peuvent être exclues pour aucun motif physique. Ces contributions sont inévitablement infinies sauf si un cut-off à courte distance est introduit. Et il semble que cette infinité est assez liée à l'infinité rencontrée lorsqu'on essaye de quantifier la gravitation [34]. En effet, cette infinité est la motivation principale derrière la considération de l'entropie d'intrication sur les espaces-temps non-commutatifs. La quatrième infinité est la singularité en relativité générale classique qui est inévitable dans plusieurs contextes physiques raisonnables, à l'intérieur du trou noir ou dans le Big-Bang, aux singularités, nos lois ne sont plus valables et on s'abstient de faire une quelconque prédiction. En plus de ces infinités il y a d'autres raisons qui suggèrent la discrétisation et une nature floue. Le fait qu'on a une échelle avec une dimension de longueur, à savoir l'échelle de Planck, peut déjà être comprise comme une preuve d'une discontinuité sous-jacente à la structure fondamentale de l'espace-temps, cette échelle ne peut pas émerger d'une structure continue "variété lisse", (au moins dans le cas où l'espace a une topologie simple), une telle échelle s'avérerait nulle ou infinie. Les développements récents de la théorie des cordes et Loop-gravity suggèrent tous une sorte de discontinuité ou une nature floue de l'espace-temps. Le principe d'incertitude se combine avec la relativité général de telle sorte qu'il soit impossible de mesurer la métrique sous l'échelle de Planck sans risquer de créer un trou noir, conduisant à une nature

flou de l'espace, et l'image continue de la géométrie cesse d'avoir un sens. Bien que l'idée de remplacer les espaces commutatifs par des espaces non-commutatifs ait été proposée depuis des décennies, la formulation mathématique précise de la géométrie non-commutative n'est apparue qu'après les travaux de Connes [35]. Dans les deux dernières décennies, l'idée de la théorie des champs non-commutative a connu un renouveau et plusieurs modèles ont été étudiés. Récemment, l'émergence de la géométrie non-commutative dans la théorie des cordes a donné un grand coup de pouce à ce sujet. Une introduction mathématique précise à la géométrie non-commutative dépasse le cadre de ce mémoire et donc on va se limiter aux définitions heuristiques et intuitives des espaces flous considérés.

### 3.1 La Sphère Floue

La sphère floue est l'un des plus simples, plus canoniques et mieux des compris modèles de la géométrie non-commutative. Une construction explicite de sphère floue a été réalisée pour la première fois dans [36] et depuis lors, elle a été étudiée par plusieurs auteurs à partir de différents points de vue. Une description mathématique précise de la sphère floue est au-delà de la portée de ce mémoire, cependant, grosso modo la sphère floue peut être comprise comme suit. Considérons le plongement de la sphère dans 3-dimensions. L'équation du plongement est,

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{3.1}$$

On suppose maintenant qu'on veut remplacer les coordonnées par des opérateurs non-commutatifs et tout en gardant l'équation de plongement. C'est-à-dire on cherche trois opérateurs qui satisfont l'équation (3.1). Une supposition naturelle est de remplacer  $x, y, z$  par trois opérateurs qui satisfont l'algèbre du moment angulaire, à savoir l'algèbre de  $SU(2)$ .

$$x, y, z \longrightarrow \hat{x} = \theta_x, \hat{y} = \theta_y, \hat{z} = \theta_z \tag{3.2}$$

avec

$$[L_x, L_y] = L_z \Rightarrow [\hat{x}, \hat{y}] = i\theta\hat{z}$$

Donc,

$$\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2 = \theta^2 L^2 = \theta^2 l(l+1) \quad (3.3)$$

où  $L^2$  est l'opérateur du Casimir de  $SU(2)$  sont  $l(l+1)$ ,  $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2 \dots \infty$ . La dimension du paramètre  $\theta$  est celle d'une longueur et ce paramètre définit l'échelle de distance. Dans la limite  $\theta \rightarrow 0$  et  $l \rightarrow \infty$  avec  $R$  fini on retrouve la sphère classique. Les fonctions sur la sphère floue sont des matrices  $(2l+1) \times (2l+1)$ . On peut démontrer que l'algèbre de ces matrices sur la sphère floue se réduit à l'algèbre des fonctions classiques sur une sphère continue. L'intégrale sur la sphère floue est donnée par,

$$\int f_1 f_2 d\Omega \longrightarrow \frac{1}{N} Tr \phi_1 \phi_2$$

L'ingrédient important de la sphère floue est le Laplacien qui définit la métrique sur les espaces non-commutatifs. Il peut être démontré que le Laplacien sur la sphère floue est donné par,

$$\Delta = \mathcal{L}_i^2 = \mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{L}_3^2 \quad (3.4)$$

où l'action sur les fonctions est définie par l'action adjointe,  $\mathcal{L}_i(\phi) = [L_i, \phi]$  et  $\mathcal{L}_i^2(\phi) = [L_i, [L_i, \phi]]$ . Il peut être aussi démontré que ce Laplacien se réduit dans la limite commutative au Laplacien standard sur la sphère continue. Mathématiquement la géométrie de la sphère floue peut être spécifiée par un triplet ,

$$S_F \equiv S_N := \{H_N, \text{Mat}_N, \Delta_N\}, \quad N = 2l + 1 \quad (3.5)$$

où  $H_N$  est l'espace d'Hilbert de dimension  $N$  sur lequel l'algèbre des matrices  $\text{Mat}_N$  agit avec un produit scalaire  $\langle N, M \rangle = \frac{1}{N} Tr(N^+ M)$ , et  $\Delta_N$  est le Laplacien décrit ci-dessus. On considère maintenant une théorie du champ scalaire sur un espace-temps avec une topologie  $\mathbf{R} \times \mathbf{S}_N^2$  où  $\mathbf{S}_N^2$  est une sphère floue de dimension matricielle  $N = 2l + 1$ .

Un champ scalaire est représenté par une matrice  $\phi$  hermitienne  $N \times N$ . Le Lagrangien est donné par,

$$L = \frac{1}{2N} \text{Tr}(\dot{\phi}^2 - \phi[\mathcal{L}_i^2 + \mu^2]\phi). \quad (3.6)$$

$\mu$  étant le paramètre de masse. Pour définir l'entropie d'intrication on a besoin d'abord d'exprimer le Lagrangien (3.6) en utilisant des variables de champ où l'intrication entre les différents D.L est apparente. D'autre part, à cause de la non-commutativité des coordonnées on a besoin de choisir une base dans laquelle on peut parler des D.L résidents dans des régions différentes (des régions disjointes). En effet, il y a plusieurs possibilités pour le faire, cependant, un choix standard est la base sur laquelle la troisième composante  $L_3$  soit diagonale. Sur cette base on peut parler d'hémisphère inférieure et hémisphère supérieure, aussi le formalisme porte beaucoup de similitude avec la régularisation à réseau étudiée dans le chapitre précédent.

Maintenant, soit  $|a \rangle$  le vecteur propre de  $L_3$  associé à la valeur propre  $-a + l + 1$ ,  $a$  allant de 1 à  $N = 2l + 1$  i.e.  $L_3|a \rangle = (-a + l + 1)|a \rangle$ .

Décomposons maintenant le Lagrangien en termes des éléments de matrice  $\phi$ .

D'abord on observe que, voir Appendice 2,

$$\text{Tr}\phi\mathcal{L}_i^2\phi = 2\phi_{ab}M_{ab,cd}\phi_{cd} \quad (3.7)$$

Où

$$M_{ab,cd} = (L_i^2)_{bc}\delta_{da} - (L_i)_{bc}(L_i)_{da} = c_2\delta_{bc}\delta_{da} - (L_i)_{bc}(L_i)_{da}. \quad (3.8)$$

et  $c_2$  est le Casimir de spin  $l$  de la représentation irréductible de  $SU(2)$ , i.e.  $c_2 = l(l+1)$ . Pour mettre la théorie sous forme d'ensemble d'oscillateurs harmoniques couplés on introduit deux champs matriciels réels en divisant  $\phi$  comme suit  $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ . L'herméticité de  $\phi$  implique que  $\phi_1^T = \phi_1$  et  $\phi_2^T = -\phi_2$ , autrement dit  $\phi_1$  est une matrice  $N \times N$  réelle et symétrique,

tandis que  $\phi_2$  est réelle et antisymétrique. En utilisant aussi le fait que la matrice  $M_{ab,cd}$  satisfait  $M_{ba,dc} = M_{ab,cd}$ , il est facile de démontrer que, appendice 2,

$$Tr\phi\mathcal{L}_i^2\phi = 2(\phi_1 + \phi_2)_{ab}M_{ab,dc}(\phi_1 + \phi_2)_{cd} = 2\Phi_{ab}M_{ab,dc}\Phi_{cd}. \quad (3.9)$$

où  $\Phi \equiv \phi_1 + \phi_2$ . Dans la base où  $L_3$  est diagonal les éléments des matrices  $L_1, L_2$  et  $L_3$  sont donnés pour  $l$  arbitraire par,

$$(L_1)_{ab} = \frac{1}{2}[B_b\delta_{a,b+1} + B_a\delta_{a,b-1}], \quad (L_2)_{ab} = \frac{i}{2}[B_b\delta_{a,b+1} - B_a\delta_{a,b-1}], \quad (L_3)_{ab} = A_a\delta_{a,b} \quad (3.10)$$

avec  $B_a = \sqrt{a(N-a)}$  et  $A_a = -a + \frac{N+1}{2}$ . Les indices  $a, b$  vont de 1 à  $N = 2l + 1$ , les formules ci-dessus sont démontrées dans l'appendice 2. En substituant dans (3.9) on obtient,

$$Tr\phi\mathcal{L}_i^2\phi = 2\Phi_{ab}(c_2 - A_aA_b)\Phi_{ab} - \Phi_{ab}(B_{a-1}B_{b-1})\Phi_{a-1,b-1} - \Phi_{ab}(B_aB_b)\Phi_{a+1,b+1}. \quad (3.11)$$

Maintenant, cette expression suggère l'introduction des champs suivants :  $Q^{(m)}$  définis par  $Q_a^{(m)} = \Phi_{a,a+m}$  et  $Q_a^{(-m)} = \Phi_{a+m,m}$  pour  $m = 0, \dots, N-1$ . De façon plus explicite nous avons pour  $m = 0$  le champ  $Q^{(0)}$  avec  $N$  D.L donné par

$$Q^{(0)} = (\Phi^{11}, \Phi^{22}, \dots, \Phi^{NN}). \quad (3.12)$$

Pour  $m = +1$  on a les champs  $Q^{(+1)}$  et  $Q^{(-1)}$  chacun avec  $N-1$  D.L donnés par

$$Q^{(+1)} = (\Phi^{12}, \Phi^{23}, \Phi^{34}, \dots, \Phi^{N-1,N}), \quad Q^{(-1)} = (\Phi^{21}, \Phi^{32}, \Phi^{43}, \dots, \Phi^{N,N-1}) \quad (3.13)$$

Pour  $m$  positif on a les champs  $Q^{(+m)}$  et  $Q^{(-m)}$  chacun contient  $(N-m)$  D.L donnés par

$$Q^{(m)} = (\Phi^{11+m}, \Phi^{22+m}, \dots, \Phi^{N-m,N}), \quad Q^{(-m)} = (\Phi^{1+m,1}, \Phi^{2+m,2}, \dots, \Phi^{N,N-m}) \quad (3.14)$$

Les deux derniers champs  $Q^{(N-1)}$  et  $Q^{-(N-1)}$  contiennent un seul D.L chacun,

$$Q^{(N-1)} = (\Phi^{1N}), \quad Q^{-(N-1)} = (\Phi^{N1}). \quad (3.15)$$

En utilisant cette paramétrisation on peut démontrer que (Appendice 2)

$$\text{Tr} \phi \mathcal{L}_i^2 \phi = 2 \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \sum_{a=1}^{N-|m|} Q_a^{(m)} \left[ (c_2 - A_a A_{a+|m|}) \delta_{a,b} - \frac{1}{2} B_{a-1} B_{a-1+|m|} \delta_{a-1,b} - \frac{1}{2} B_a B_{a+|m|} \delta_{a+1,b} \right] Q_b^{(m)}. \quad (3.16)$$

De même, nous pouvons calculer

$$\text{Tr}(\dot{\phi}^2 - \mu^2 \phi^2) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \sum_{a=1}^{N-|m|} Q_a^{(m)} (-\partial_t^2 + \mu^2) Q_a^{(m)}. \quad (3.17)$$

D'où l'Hamiltonien  $H$  de la théorie scalaire prend la forme

$$H = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} H_m = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \sum_{a,b=1}^{N-|m|} \left[ \frac{1}{2} (\pi_a^{(m)})^2 + \frac{1}{2} V_{ab}^{(m)} Q_a^{(m)} Q_b^{(m)} \right]. \quad (3.18)$$

où

$$V_{ab}^{(m)} = 2 \left[ \left( c_2 + \frac{\mu^2}{2} - A_a A_{a+|m|} \right) \delta_{a,b} - \frac{1}{2} B_{a-1} B_{a-1+|m|} \delta_{a-1,b} - \frac{1}{2} B_a B_{a+|m|} \delta_{a+1,b} \right]. \quad (3.19)$$

Et  $\pi_a^{(m)} = \dot{Q}_a^{(m)}$ . Avec ce résultat on peut voir que la théorie libre se divise en  $2(2l)+1$  secteurs indépendants  $\{\mathcal{H}_m\}, m = -(N-1), \dots, (N-1)$ , chaque secteur  $\mathcal{H}_m$  ayant  $N - |m|$  D.L ( $(N - |m|)$ - oscillateurs harmoniques couplés) et décrit par l'Hamiltonien  $H_m$ . La matrice densité de l'état fondamental est donnée par

$$\rho = \bigotimes_{m=-(N-1)}^{N-1} \rho^{(m)}. \quad (3.20)$$

Il est à noter ici que le formalisme de la sphère floue porte beaucoup de similitude avec la régularisation à réseau présentée dans le chapitre précédent. Cependant la sphère floue fournit un cut-off naturel pour le nombre quantique  $m$  qui joue un rôle similaire au rôle joué par le nombre azimutal dans le cas de la sphère classique.

Ayant porté l'Hamiltonien sur la sphère floue à la forme de  $N$  oscillateurs harmoniques couplés nous sommes maintenant prêts à discuter l'entropie d'intrication. Pour introduire cette entropie il faut d'abord diviser les D.L du champ en deux ensembles résidents sur deux régions disjointes correspondantes, par exemple, l'hémisphère inférieure et supérieure. Pour ce faire rigoureusement on a besoin de donner un critère précis qui nous permet de décider quand un ensemble de deux champs donnés (deux matrices) aient deux supports disjoints. Nous ne sommes pas en train de donner un critère mathématique précis, mais on va se limiter à quelques arguments heuristiques [20]. On observe d'abord que le fait qu'on travaille dans la base où la troisième composante est diagonale nous permet de parler des D.L qui résident sur l'hémisphère inférieure et l'hémisphère supérieure. De l'autre côté, la forme de l'Hamiltonien suggère que l'on prenne chaque secteur  $\mathcal{H}_m$  et que l'on intègre sur la moitié des D.L<sup>1</sup>.

Pour  $N$  et  $m$  fixés, le nombre de D.L dans le secteur  $\mathcal{H}_m$  est  $N - |m|$ , si  $N - |m|$  est pair on intègre sur les D.L suivants,

$$Q_1^{(m)}, Q_2^{(m)}, \dots, Q_k^{(m)}, k = \frac{N - |m|}{2} \quad (3.21)$$

si  $N - |m|$  est impair on a deux options, soit on intègre sur

$$Q_1^{(m)}, Q_2^{(m)}, \dots, Q_k^{(m)}, k = \frac{N - |m| - 1}{2} \quad (3.22)$$

soit on intègre

$$Q_1^{(m)}, Q_2^{(m)}, \dots, Q_k^{(m)}, k = \frac{N - |m| + 1}{2} \quad (3.23)$$

---

1. Notons que les D.L dans les secteurs avec  $m$  différents sont découplés, une chose qui est analogue à la régularisation sur réseau.

Cependant les deux options donnent la même valeur de l'entropie lorsque  $N$  est grand et les D.L  $Q_{\frac{N-|m|+1}{2}}^{(m)}$  seront interprétés comme les D.L de borne et il y en a  $N$  de ces D.L. Cela correspond dans la notation matricielle originale à diviser la matrice  $\phi$  en deux parties, triangulaire supérieure gauche  $\phi_U$  et triangulaire inférieure droite  $\phi_L$  . Par exemple, la première option pour  $N = 5$  les matrices  $\phi_U$  et  $\phi_L$  sont comme suit,

$$\phi_U = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & 0 & 0 \\ \phi_{31} & \phi_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{15} \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{24} & \phi_{25} \\ 0 & 0 & \phi_{33} & \phi_{34} & \phi_{35} \\ 0 & \phi_{42} & \phi_{43} & \phi_{44} & \phi_{45} \\ \phi_{51} & \phi_{52} & \phi_{53} & \phi_{54} & \phi_{55} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Les composantes  $\phi_{51}, \phi_{42}, \phi_{33}, \phi_{24}, \phi_{15}$  sont les D.L de borne.  $\phi_U$  et  $\phi_L$  peuvent être interprétés comme correspondant aux fonctions avec des supports disjoints, l'un dans l'hémisphère supérieure et l'autre sur l'inférieure. Un soupçon pour cela découle de l'observation que  $Tr(\phi_U \phi_L) = 0$ ,  $\phi_U$  et  $\phi_L$  arbitraires, qui suggère fortement que  $\phi_U$  et  $\phi_L$  ont des supports disjoints. De plus, on a déjà motionné qu'on travaille dans la base sur laquelle  $L_3$  est diagonale et donc on peut parler de  $z$  négatif et positif (i.e. hémisphère supérieure et inférieure). En effet ceci est le choix unique où les D.L semblent être intriqués et donnent une entropie d'intrication différente de zéro. Maintenant, l'équation (3.18) nous dit que l'opérateur densité réduit résultante est donné par

$$\rho = \bigotimes_{m=-(N-1)}^{N-1} \rho_{\text{red}}^{(m)} \quad (3.25)$$

et l'entropie associée est

$$S_l = S_0 + 2 \sum_{m=1}^{2l} S_m, \quad N = 2l + 1. \quad (3.26)$$

où  $S_m$  sera évaluée en utilisant l'équation (2.12) avec  $\Lambda^{(m)}$  définie par  $\Lambda_{ij}^{(m)} = -\sum_{\alpha=1}^k W_{i\alpha}^{-1} W_{\alpha j}$  et  $W$  est la racine carrée de la matrice du potentiel  $V^{(m)}$  donnée par l'équation (3.19) . Les indices  $i, j$  allant de  $k + 1$  à  $N - m$  (la région disponible). Puisque nous nous attendons que notre entropie soit proportionnelle à la circonférence de l'équateur qui est une sorte de

cercle flou, on définit une entropie mise en échelle en divisant l'entropie par le racine carrée du Casimir  $c_2$ ,

$$S = \frac{S_N}{\sqrt{l(l+1)}} \quad (3.27)$$

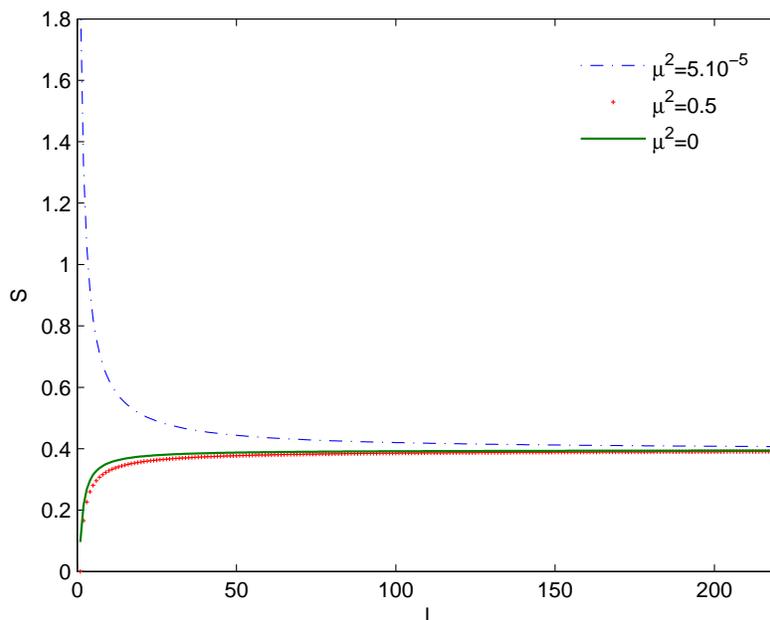


FIG. 3.1 – l'entropie scalaire résultante  $S$  pour le trace sur la moitié de sphère floue . .

On évalue l'entropie mise en échelle  $S$  numériquement pour  $N = 4 \dots \dots, 200$  et pour des valeurs différentes de la masse. Les résultats sont représentés sur la figure 3.1. On voit immédiatement que les diverses courbes avec masses  $\mu^2 = 0,5 \times 10^{-5}, 0.5$  convergent vers la même valeur pour  $N$  grand. Par exemple pour  $l = 600$  l'entropie pour les diverses masses est égale à 0.39 et les différences ne sont que dans le troisième chiffre. Donc on peut sans risque extrapoler à des valeurs très grandes de  $l$  ou  $N$  et conclure que l'entropie d'intrication est donnée par,

$$S_N = 0.39\sqrt{l(l+1)}. \quad (3.28)$$

Puisque le rayon de la sphère floue peut être mis en échelle avec  $l$  en gardant le paramètre  $\theta = \frac{R}{\sqrt{l(l+1)}}$  fixé, nous pouvons écrire l'entropie sous la forme suivante,

$$S_l = 0.39 \frac{R}{\theta} = \frac{0.39A}{2\pi\theta} \quad (3.29)$$

Ceci est exactement la loi de surface en deux dimensions. Bien que l'établissement de la loi de surface dans le contexte de régularisation floue ait un intérêt en soi, le résultat obtenu est plus simple, intéressant et a une interprétation naturelle. Notant d'abord que la loi de surface est valable seulement pour des valeurs grandes de  $l$  ou  $N$ , donc l'équation (3.28) peut être écrite comme suit,

$$S_l = 0.19(2l + 1) \sim \log 2^{2l+1} \quad (3.30)$$

Par conséquent l'entropie est directement proportionnelle au nombre de D.L sur la frontière qui est dans ce cas " un cercle flou ". Ce résultat s'adapte avec l'image de l'horizon (simulé ici par l'équateur) comme étant quantifié en petites cellules du volume Planckien et chaque cellule portant à peu près un bit d'information[11]. Cette image s'adapte aussi avec l'ancienne suggestion que la surface de l'horizon du trou noir a un spectre quantifié. Voir par exemple [36]. Avant de passer aux autres modèles flous, il y a un point important concernant le comportement de l'entropie d'intrication pour des petites valeurs de  $N$  et  $l$ . On peut facilement observer qu'il y a une dépendance claire de la masse qui domine le comportement de l'entropie pour des valeurs petites de  $l$ . L'entropie est une fonction décroissante comme on peut le voir à partir de la figure 3.1. Cependant elle montre une discontinuité pour la masse nulle où elle passe des valeurs grandes pour des petites masses aux petites valeurs pour des grandes masses. Cependant, ce comportement discontinu disparaît pour des grandes valeurs de  $l$ . Pour comprendre cette discontinuité nous devons revoir le potentiel original. C'est facile d'observer à partir de l'équation (3.19) que le potentiel  $V^{(0)}$  du secteur  $\mathcal{H}_0$  est une matrice singulière dans le cas de la masse nulle et donc le formalisme développé dans le premier chapitre n'est pas directement applicable à ce cas<sup>2</sup>. Donc ce cas a besoin d'un traitement spécial. Cet effet nous revenons à la dérivation originale de la formule principale

---

<sup>2</sup>. Le fait que, la matrice  $V^{(0)}$  où  $W^{(0)}$  soit singuliers est dû aux modes zéros qui se manifestent dans le Laplacien dans la limite de masse nulle.

d'entropie d'intrication pour deux oscillateurs couplés. On note que le fait que la matrice  $W$  soit singulière puisse être exprimé par  $\text{Det}(W) = 0$ , ou en utilisant la notation de la section 2  $\gamma = \beta$ , donc  $\mu = 1$ . Cependant la formule (1.22) a été déduite avec la supposition  $\mu < 1$ , et donc on ne peut pas simplement prendre la valeur  $\mu = 1$ . Mais c'est facile de voir que dans la limite  $\gamma = \beta$  les valeurs propres deviennent nulles et donc la somme est identiquement nulle dans le cas où  $\mu = 1$ . Effectivement, ce qui se passe est un comportement typique d'une série qui est convergente point par point mais pas uniformément convergente. D'où nous concluons que le secteur  $\mathcal{H}_0$  donne une contribution nulle à l'entropie d'intrication dans la limite de la masse nulle et donc ce secteur doit être exclu de la somme de l'équation (3.26). Donc dans le cas de la masse nulle l'entropie associée est donnée par

$$S_l(\mu = 0) = 2 \sum_{m=1}^{2l} S_m \quad (3.31)$$

où les termes  $S_m$  sont évalués en utilisant le formalisme de la section précédente puisque aucun potentiel n'est singulier. Dans la limite des grands  $l$  (macroscopique) nous nous attendons naturellement à obtenir le même résultat que celui du cas massif, parce que la différence relative serait de l'ordre de  $S_0/l$  qui devient très petite à la limite de  $l$  grand, ce qui explique le comportement régulier de l'entropie à cette limite. Par exemple déjà à  $l = 400$  et pour  $\mu^2 = 0.1$  les deux équations (3.26) et (3.31) donnent la même valeur pour  $S_N$ ,  $S = 0.396$ . Maintenant la raison pour laquelle dans le calcul sur réseau, celui qui a été présenté dans le chapitre précédent ou le calcul de [15], on n'a pas vu le problème des modes zéros est due au fait que les régularisations sur réseau brisent la symétrie de translation ou de rotation auxquelles les modes zéros sont liés.

## 3.2 Le plan de Moyal et le disque flou

Dans cette section nous allons considérer la même théorie scalaire définie sur  $R \times R_\theta^2$  où  $R_\theta^2$  est maintenant le plan de Moyal. Le plan de Moyal est peut-être le modèle concret le plus ancien des espaces non-commutatifs. Le plan de Moyal est construit simplement en

remplaçant les coordonnées cartésiennes par des opérateurs,

$$[\hat{x}, \hat{y}] = i\theta \quad (3.32)$$

$\theta$  a la dimension d'une longueur au carré. L'algèbre du plan de Moyal est mieux étudié en utilisant les opérateurs de création et d'annulation définis par,

$$a = \hat{x} + i\hat{y} \quad \text{and} \quad a^+ = \hat{x} - i\hat{y} \Rightarrow [a, a^+] = \theta \quad (3.33)$$

Cette algèbre admet seulement une représentation de dimension infinie qui reflète le fait que le plan de Moyal est une version non-commutative d'un espace non-compact. On peut construire un opérateur qui représente le rayon comme suit,

$$\hat{R}^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2 = a^+a + \theta \quad (3.34)$$

Les valeurs propres de  $\hat{R}^2$  sont  $(n+1)\theta$  avec  $n = 0, 1, 2 \cdot \infty$ . Les états propres forment l'espace standard de Fock,  $\{|n\rangle\}$  avec,

$$a|0\rangle = 0, \quad a^+|n\rangle = \sqrt{(n+1)\theta}|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{n\theta}|n-1\rangle$$

Maintenant, du fait que l'algèbre est de dimension infinie l'usage des méthodes numériques pour calculer l'entropie d'intrication n'est pas possible. Donc on a besoin de tronquer l'algèbre à une certaine dimension finie. Notons qu'il a été montré dans [37] qu'en tronquant l'algèbre à une dimension finie  $N-1$  on obtient naturellement un espace flou correspondant à un disque flou avec un rayon  $R^2 = N\theta$ . Ceci peut être déduit de l'équation (3.34), si on tronque l'algèbre à une certaine valeur propre maximale  $N-1$ ,  $\hat{R}^2$  ne dépassera pas  $N\theta$  et l'algèbre représenterait un disque flou  $D_N$  du rayon  $R = \sqrt{N\theta}$ . On retrouve le plan de Moyal à la limite, quand  $N \rightarrow \infty$  tandis que le disque classique est recouvert en prenant la

limite  $\theta \rightarrow 0$  et  $N \rightarrow \infty$  en gardant  $R$  fixé. Pour ce faire, on considère les matrices  $N \times N$   $\phi$ ,

$$\phi = \sum_{n,m=0}^{N-1} \phi_{mn} |m\rangle\langle n|, \quad \phi^+ = \phi, \quad \phi_{nm}^* = \phi_{mn}. \quad (3.35)$$

Le Laplacien sur le plan est donné en termes d'opérateurs de création et d'annulation comme suit,

$$\nabla^2 \phi := -\frac{4}{\theta^2} [a^+, [a, \phi]] = -\frac{4}{\theta^2} [a, [a^+, \phi]]. \quad (3.36)$$

Si on tronque l'algèbre à  $N - 1$  il n'est pas difficile de voir que l'action du Laplacien défini dans (3.36) est toujours bien définie sur les matrices  $N \times N$  et ne nous fait pas sortir de l'algèbre tronquée. Considérons maintenant une théorie scalaire définie sur  $\mathbf{R} \times \mathbf{D}_N^2$ . L'action est donnée par,

$$S = \frac{1}{2} \int dt Tr_N (\dot{\phi}^2 + \phi (\nabla^2 - \mu^2) \phi). \quad (3.37)$$

De même, ici on a aussi besoin d'écrire la théorie sous forme d'oscillateurs harmoniques couplés. Une base naturelle à choisir est la base où l'opérateur  $\hat{R}^2 = a^+ a + \theta$  est diagonal. En effet, cette base nous permettra d'étudier deux cas, intéressants. Le premier cas est de calculer l'entropie d'intrication résultant de l'ignorance d'un sous-disque de rayon  $r < R$  correspondant à  $n < N$ . Le deuxième cas est d'intégrer la moitié du disque flou, dans ce cas le diamètre joue le rôle de frontière. Les deux cas ont deux comportements différents lorsque ( $N \rightarrow \infty$ ), à savoir lorsque on retrouve le plan de Moyal. Dans le premier cas la région intégrée restera finie une fois la limite du Plan de Moyal est prise, tandis que dans le deuxième cas, la région intégrée explose et devient infinie. Décomposons maintenant le potentiel de l'action. La partie pertinente de l'action est donnée par

$$V = -Tr_N \phi (\nabla^2 - \mu^2) \phi = (\mu^2 + \frac{4}{\theta}) Tr_N \phi^2 + \frac{8}{\theta^2} Tr_N \phi^2 a^+ a - \frac{8}{\theta^2} Tr_N \phi a \phi a^+ \quad (3.38)$$

En utilisant (3.35), il est montré dans l' Appendice 2 que

$$\frac{\theta}{2}V = 2 \sum_{n,m=0}^{N-1} \left[ \left(1 + \frac{\mu^2\theta}{4} + n + m\right) \phi_{nm} \phi_{mn} - \sqrt{nm} \phi_{nm} \phi_{m-1n-1} + \sqrt{(n+1)(m+1)} \phi_{nm} \phi_{m+1n+1} \right] \quad (3.39)$$

où d'une manière équivalente ( avec  $\tilde{\phi}_{nm} = \phi_{n-1m-1}$  )

$$\frac{\theta}{2}V = 2 \sum_{n,m=1}^N \left[ \left(-1 + \frac{\mu^2\theta}{4} + n + m\right) \tilde{\phi}_{nm} \tilde{\phi}_{mn} - \sqrt{(n-1)(m-1)} \tilde{\phi}_{nm} \tilde{\phi}_{m-1n-1} + \sqrt{nm} \tilde{\phi}_{nm} \tilde{\phi}_{m+1n+1} \right]. \quad (3.40)$$

En utilisant la même astuce que nous avons utilisée dans le cas de la sphère floue, à savoir on divise les champs en une partie symétrique  $\phi_{mn}^{(1)} = \phi_{nm}^{(1)}$  et une autre antisymétrique  $\phi_{mn}^{(2)} = -\phi_{nm}^{(2)}$ , en mettant  $(\tilde{\phi})_{mn} = \phi_{mn}^{(1)} + i\phi_{mn}^{(2)}$ , et puis on recombine les deux en un champ réel  $\Phi_{mn} = \phi_{mn}^{(1)} + \phi_{mn}^{(2)}$ , on peut mettre l'action sous la forme suivante,

$$\begin{aligned} -\frac{\theta}{2}Tr_N \phi(\nabla^2 - \mu^2)\phi &= 2 \sum_{n,m=1}^N \Phi_{nm} \left( -1 + \frac{\mu^2\theta}{4} + A_n + A_m \right) \Phi_{nm} \\ &- \sum_{n,m=1}^N \left[ \Phi_{nm} (B_{n-1} B_{m-1}) \Phi_{n-1m-1} + \Phi_{nm} (B_n B_m) \Phi_{n+1m+1} \right] \end{aligned} \quad (3.41)$$

où  $A_n$  et  $B_n$  sont maintenant définis par  $A_n = n$  et  $B_n = \sqrt{2n}$ . Les éléments non diagonaux ont exactement la même structure que ceux sur la sphère floue, tandis que les éléments diagonaux impliquent la somme  $A_n + A_m$  au lieu du produit  $-A_n A_m$  sur  $\mathbf{S}_N^2$ . En suivant les mêmes étapes faites dans le cas de la sphère floue on peut écrire l'action ci-dessus sous la forme, voir préciser la formule l'appendice 4.4,

$$-\frac{\theta}{2}Tr_N \phi(\nabla^2 - \mu^2)\phi = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \sum_{a,b=1}^{N-|m|} V_{ab}^{(m)} Q_a^{(m)} Q_b^{(m)} \quad (3.42)$$

où

$$\begin{aligned}
 V_{ab}^{(m)} &= 2 \left[ \left( -1 + \frac{\mu^2 \theta^2}{4} + A_a + A_{a+|m|} \right) \delta_{a,b} - \frac{1}{2} B_{a-1} B_{a-1+|m|} \delta_{a-1,b} - \frac{1}{2} B_a B_{a+|m|} \delta_{a+1,b} \right] \\
 &= 2 \left[ \left( 2a + |m| - 1 + \frac{\mu^2 \theta}{4} \right) \delta_{a,b} - \sqrt{(a-1)(a-1+|m|)} \delta_{a-1,b} - \sqrt{a(a+|m|)} \delta_{a+1,b} \right].
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Les champs  $Q_a^{(m)}$  et  $Q_a^{(-m)}$  ( $m \geq 0$ ) sont définis de la même façon que dans  $\mathbf{S}_N^2$ , i.e.

$$\begin{aligned}
 2Q_a^{(m)} &= 2\Phi_{a,a+m} = (1-i)\phi_{a-1,a+m-1} + (1+i)\phi_{a-1,a+m-1}^* \\
 2Q_a^{(-m)} &= 2\Phi_{a+m,a} = (1-i)\phi_{a+m-1,a-1} + (1+i)\phi_{a+m-1,a-1}^*.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

En tout nous obtenons  $2N-1$  secteurs indépendants  $\mathcal{H}_m$ ,  $m = -N+1, -N+2, \dots, N-2, N-1$ .

### 3.2.1 L'intégration sur un sous-disque

Comme on a déjà signalé le disque flou nous permet d'étudier deux cas intéressants concernant l'entropie d'intrication. Le premier est de prendre un disque flou et supposer que les D.L résidents à l'intérieur d'un sous-disque  $D_n$  de rayon  $r$  sont indisponibles. Ce n'est pas difficile de voir que les D.L correspondant à ce sous-disque de rayon  $r$  (ou un nombre quantique  $n$ ) sont donnés par les sous-matrices  $(n+1) \times (n+1)$  avec  $n < N$

$$\begin{pmatrix} \phi_{00} & \phi_{01} & \phi_{02} & \dots & \phi_{0n} \\ \phi_{10} & \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \dots \\ \phi_{20} & \phi_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{n0} & \dots & \dots & \dots & \phi_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

Les D.L représentés par cette matrice ont un support sur un sous-disque  $\mathbf{D}_n$  avec  $r^2 = n\theta$ . Nous allons supposer que cette région est inaccessible pour un observateur extérieur et par conséquent on va intégrer sur les D.L résidents dans cette région. On peut facilement vérifier

que les secteurs  $\mathcal{H}_{\pm m}$  ne seront pas concernés par cette opération si  $|m| > n$ . Cela est dû au fait que les D.L de ces secteurs ne sont pas concernés par l'opération d'intégration et par conséquent leur contribution est identiquement nulle. L'entropie d'intrication dans ce cas aura des contributions seulement des secteurs  $\mathcal{H}_m$  avec  $|m| \leq n$  et sera une fonction de  $N$  et  $n$ . D'où l'opérateur densité réduit ,

$$\rho_{\text{red}} = \bigotimes_{m=-n}^n \rho_{\text{red}}^{(m)} \quad (3.46)$$

Et l'entropie correspondante est donnée par ( aussi avec  $\rho_{\text{red}}^{(m)} = \rho_{\text{red}}^{(-m)}$  )

$$S_N(n) = S_0 + 2 \sum_{m=1}^n S_m \quad (3.47)$$

où  $S_m$  est calculé en utilisant la matrice  $\Lambda^{(m)}$  donnée par

$$\Lambda_{ij}^{(m)} = - \sum_{\alpha=1}^{n+1-m} W_{i\alpha}^{-1(m)} W_{\alpha j}^{(m)}. \quad (3.48)$$

Les indices disponibles  $i, j$  vont de  $n + 1 - m$  à  $n$ . Définit encore l'entropie mise en échelle  $S$  par

$$S = \frac{S_N(n)}{2n + 1}. \quad (3.49)$$

Pour  $N$  fixé, on calcule  $S$  numériquement pour  $n = 2 \dots, N - 1$ . Les résultats pour  $N = 400$  sont représentés sur la Figure 3. Pour toutes les valeurs de  $n$  avec  $30 \leq n \leq 370$  l'entropie mise en échelle est presque constante:  $S = 0.235$  pour  $n = 75$  et décroît très lentement jusqu'à ce qu'elle atteigne  $S = 0.230$  pour  $n = 350$ . Le fait que  $S$  ne peut pas être constante tout le temps est dû à la finitude du rapport  $n/N$ , qui est lié au fait que l'entropie ne peut pas être constante sur tout le chemin à  $n = N$ , puisque à ce point on aurait l'intégré sur tout le disque et le résultat devrait être nul. Lorsque  $n$  approche  $N$  i.e.  $n > 380$  l'entropie commence

à diminuer plus rapidement jusqu'à ce qu'elle atteigne zéro. Donc pour  $N \gg n \gg 1$  on peut sans risque conclure que,

$$S_N(n) = 0.23(2n + 1) \tag{3.50}$$

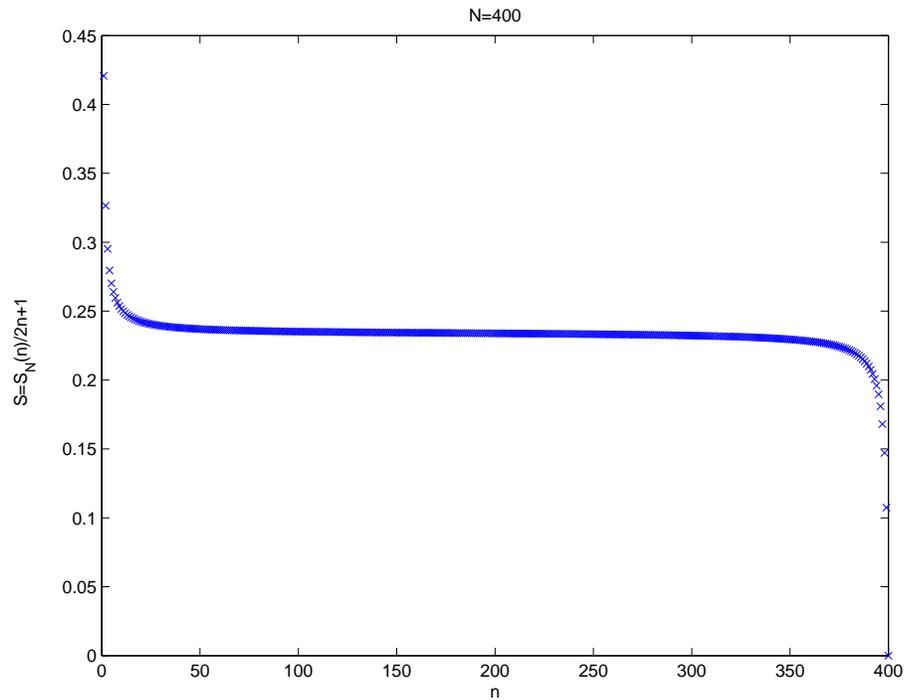


FIG. 3.2 – *l'entropie résultante d'ignorance d'un saus-disqe flou*

La condition  $N \gg n$  ne sera pas nécessaire, bien qu'il soit difficile de décider, en utilisant seulement des calculs numériques, à quel point  $n$  pourrait être proche de  $N$ . Ici on trouve aussi que l'entropie est directement proportionnelle au nombre des D.L sur la frontière, ce nombre est  $2n + 1$ . Il est intéressant de noter que la contribution principale à  $S_N(n)$  est indépendante de  $N$ .

### 3.2.2 L'ignorance de la moitié du disque flou

Considérons maintenant le deuxième cas. Dans le cas précédent nous avons supposé que les D.L représentés par une sous-matrice  $n \times n$  sont indisponibles et c'était clair que ces

D.L ont un support sur un sous-disque  $D_n$ . Cependant, la forme du Lagrangien suggère une autre possibilité pour introduire l'entropie d'intrication: nous réalisons la même opération que pour la sphère floue. C'est-à-dire que l'on calcule l'entropie résultant de l'ignorance de la moitié du disque. On prend chaque secteur et on intègre sur la moitié des D.L. La procédure est exactement similaire au cas de la sphère floue où on distingue entre les secteurs qui contiennent un nombre pair et ceux qui contiennent un nombre impair. L'opérateur densité réduit est donc donné par,

$$\rho_{\text{red}} = \bigotimes_{m=-N}^N \rho_{\text{red}}^{(m)}$$

Et l'entropie d'intrication

$$S_N = S_0 + 2 \sum_{m=-N}^N S_m$$

Encore, parce que nous nous attendons que l'entropie d'intrication soit proportionnelle au nombre de D.L sur la frontière, on définit  $S = S_N/N$  et on calcule numériquement l'entropie résultante pour un champ scalaire sans masse pour chaque  $N$ . Les résultats sont représentés sur Figure 3.3. On observe que  $S$  converge rapidement vers une valeur constante indépendante de  $N$  égale à 0.341, à savoir,

$$S_N = 0.34N. \tag{3.51}$$

Au vu de la discussion précédente ce résultat est prévu. L'entropie d'intrication est proportionnelle au nombre de D.L sur la borne qui est dans ce cas  $N + 1$ .

Maintenant, la seule différence entre l'équation (3.50) et l'équation (3.51) est le coefficient de proportionnalité, cette différence peut être attribuée à la forme de borne. Lorsque on a intégré sur un sous-disque  $\mathbf{D}_n$  la borne était une sorte de sphère floue avec  $2n + 1$  D.L, tandis que l'intégration sur la moitié intérieure ou inférieure du disque la borne était linéaire avec  $N$  D.L. Avant de considérer l'interprétation de nos résultats, on note que dans le cas du disque flou on a limité notre calcul au cas sans masse. Cela est dû au fait que contrairement à la sphère floue aucune des matrices  $W^{(m)}$  n'est singulière, et cela vient de l'absence des

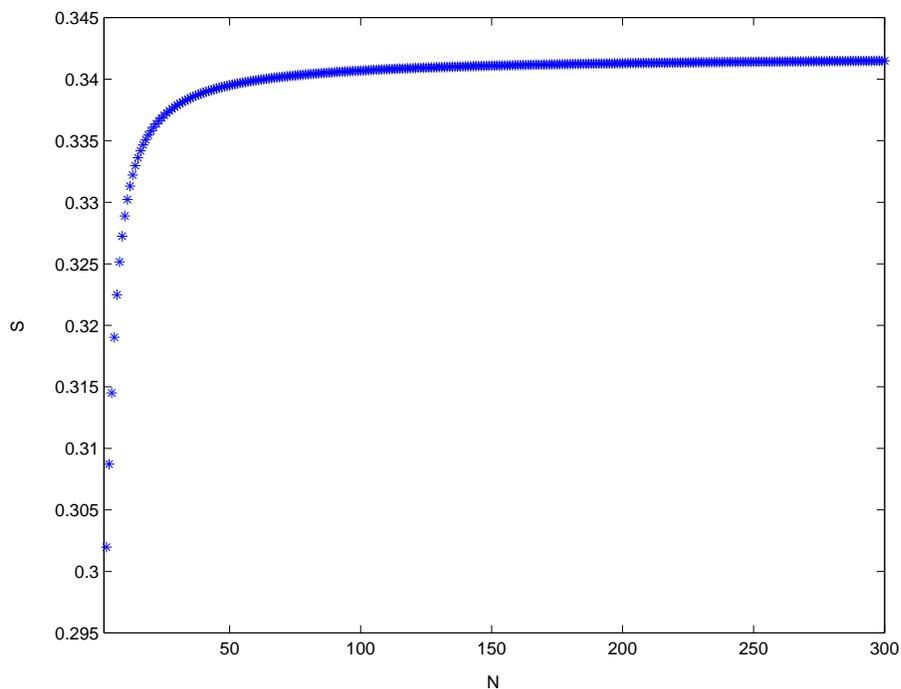


FIG. 3.3 – l'entropie résultante de l'ignorance de la moitié du disque flou  $S$ .

modes zéros pour le Laplacien, parce que l'invariance par translation est brisée, et par conséquent il ne faut pas un traitement spécial pour le cas sans masse. En outre pour le cas massif on peut facilement montrer numériquement qu'à moins que la masse soit de l'ordre du cutoff  $\mu^2\theta \sim 1$ , l'entropie a la même valeur que dans le cas sans masse. Cependant, si  $\mu^2\theta \sim 1$  l'entropie résultante diffère légèrement du cas sans masse mais elle commence à converger vers la valeur du cas sans masse pour  $N$  grand. Nous passons maintenant à l'interprétation de nos résultats. D'abord nous devons noter que malgré le travail de [37], le disque flou n'est pas encore un objet bien compris et donc notre discussion se situe au niveau qualitatif. Le rayon du disque flou est défini à travers l'équation  $R^2 = N\theta$ . Pour interpréter l'équation (3.51) comme la loi de surface à deux dimensions, nous définissons le cut-off effectif de distance pour le disque<sup>3</sup> comme  $\lambda_N = R/N = \sqrt{\frac{\theta}{N}}$ . D'où l'équation (3.51)

---

3. En effet, l'entropie est sans dimension (unité) et pour une théorie libre sans masse, notre action ne dépend pas de l'échelle  $\theta$  et tout ce que nous pouvons obtenir est un nombre pur. Cependant le fait que l'entropie est proportionnelle au nombre de D.L sur la frontière rend l'interprétation des résultats comme étant une surface naturelle.

devient (  $D = 2R$  étant le diamètre du disque).

$$S_N = 0.17 \frac{D}{\lambda_N}. \quad (3.52)$$

Dans la limite continue  $N \rightarrow \infty$  avec  $R$  fixé (la limite du disque continu de rayon  $R$ ) on retrouve la divergence UV usuelle puisque dans cette limite  $\lambda_N \rightarrow 0$ .

De même nous pouvons réécrire l'équation (3.50) (avec  $r^2 = n\theta$ ,  $\lambda_n = R/\sqrt{Nn} = \sqrt{\frac{\theta}{n}}$  et  $C$  est la circonférence du disque donnée par  $C = 2\pi r$  ) comme suit

$$S_N(n) = \frac{0.23}{\pi} \frac{C}{\lambda_n}. \quad (3.53)$$

Encore dans la limite commutative  $n \rightarrow \infty$  avec  $r$  fixé on retrouve la divergence UV usuelle. Bien que les deux entropies obtenues dans le cas du disque flou divergent dans les limites commutatives, elles ont des limites différentes lorsque  $N \rightarrow \infty$  avec  $\theta$  fixée, i.e. la limite non-commutative du plan de Moyal. Dans le cas de l'équation (3.53) si on garde la taille du sous-disque finie, i.e.  $n$  fini, le résultat reste fini même dans la limite  $N \rightarrow \infty$ . En prenant notre calcul comme étant une régularisation du plan de Moyal, nous nous attendons que l'entropie d'intrication résultant de l'ignorance d'une région finie (disque) soit finie et proportionnelle au nombre de D.L sur la frontière de la région ignorée. Pour le cas de l'équation (3.52), la prise de la limite  $N \rightarrow \infty$  revient aussi au recouvrement du plan de Moyal. Cependant, la région que nous sommes maintenant en train d'ignorer est la moitié du plan de Moyal. On voit dans l'équation (3.52) que l'entropie par unité de longueur qui est donnée par  $S/D = 0.17\sqrt{\frac{N}{\theta}}$  diverge lorsque  $N$  approche l'infinité. Mais cette divergence n'est pas d'origine UV puisque elle se manifeste comme conséquence de l'explosion de la région, i.e. la divergence est une conséquence de l'intégration d'un nombre infini de D.L. En outre on observe que quel que soit  $N$  l'entropie par unité de longueur diverge dans la limite  $\theta \rightarrow 0$  qui est la divergence UV. En effet, dans le cas continu l'entropie (par unité de surface) peut être rendue finie en introduisant simplement un cut-off à courte distance dans la direction normale, et aucun cut-off IR n'est nécessaire. Donc la divergence de l'entropie dans la limite

du plan de Moyal peut être interprétée comme due au mélange UV-IR plutôt que d'origine UV.

### 3.3 Conclusion:

Dans cette dissertation nous avons considéré l'entropie d'intrication pour une théorie scalaire définie sur divers espace-temps où les espaces sont modélés soit par des espaces flous à deux dimensions soit par des réseaux à deux dimensions ou unidimensionnels. Dans tous les modèles flous étudiés l'entropie d'intrication est proportionnelle au nombre de D.L sur les bornes. Une fois l'échelle de dimension est restaurée on obtient la loi de surface en deux dimensions. Pour les modèle 1+1 (réseaux unidimensionnels) l'universalité du coefficient de divergence est confirmée et les résultats de [18] sont obtenus. Des questions naturelles que se posent : D'où vient la contribution pertinente à l'entropie d'intrication ? Quelle est la pertinence de D.L loin de borne pour l'entropie d'intrication ? Cette question de la localisation de D.L pertinents était discutée dans le contexte du réseau dans [25, 26]. Il a été constaté que la contribution pertinente provient de D.L qui sont à la proximité de la borne. Récemment la même question était adressée dans [27] dans le contexte de régularisation floue. En particulier il a été montré que pour les trois modèles que nous avons discutés dans cette dissertation aussi la contribution pertinente provient de D.L interprétés comme étant résidents à proximité de la borne. En outre, il a été soutenu que dans la limite macroscopique les D.L pertinents sont infiniment proches de la borne. Dans telle limite et lorsqu'on inclut seulement les D.L infiniment proches de la borne il a été montré que la loi de surface pourrait être dérivée analytiquement en utilisant le développement  $1/N$ . En particulier il a été trouvé que la loi de surface est presque dictée par la forme du potentiel flou et les propriétés générales de l'entropie d'intrication. En outre, des preuves numériques ont été données pour mettre en évidence le fait que l'approximation " near-horizon " est suffisante pour capturer l'entropie d'intrication dans la limite macroscopique. Notons que des remarques tout à fait semblables s'appliquent aussi pour le cas de la sphère régularisée avec réseau ; les secteurs avec  $m$  beaucoup plus grand que  $N$  ont des contributions infimes [20]. Cependant dans la régularisation avec réseau aucun calcul analytique n'était possible pour montrer la loi de surface dans la limite  $d \ll N$ . La validité de l'approximation " near-boundary " montre que pour l'entropie d'intrication tout ce qui compte est la géométrie de la région proche de la

borne (near horizon ou near boundary). Ce résultat va en accord avec les résultats standard et le paradigme concernant la thermodynamique des trous noirs et les théories des champs en présence des trous noirs [34, 38]. Finalement, il est intéressant de signaler que malgré la non-localité et le phénomène de " UV-IR mixing " sur les espaces flous et non-commutatifs, l'entropie d'intrication est toujours contrôlée par la géométrie de la région proche à l'horizon.

---

# Chapitre 4

## Appendices

### 4.1 La sphère continue: Régularisation par réseau

$$L = \frac{1}{2} \int d\Omega (\dot{\phi}^2 + \phi(\Delta - \mu^2)\phi) \quad (4.1)$$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \sum_{-\infty}^{\infty} \phi_m(z) e^{-im\varphi}$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \sum_m \dot{\phi}_m(z) e^{-im\varphi}$$

$$\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{m,k} \dot{\phi}_m \dot{\phi}_k^* e^{-i(m-k)\varphi}$$

$$\begin{aligned} I &= \sum_{m,k} \int_0^{2\pi} d\varphi \dot{\phi}_m \dot{\phi}_k^* e^{-i(m-k)\varphi} \\ &= 2\pi \delta_{m,k} \frac{1}{2\pi} \sum_{m,k} \dot{\phi}_m(z) \dot{\phi}_k^*(z) \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \dot{\phi}^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\dot{\phi}_m|^2$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \mu^2 \phi^2 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m,k} \int_0^{2\pi} \mu^2 \phi_m^* \phi_k e^{-i(m-k)\varphi} d\varphi \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mu^2 |\phi_m|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2 - Z^2} \phi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \phi &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-1}{R^2 - Z^2} \int_0^{2\pi} \sum_{k,m} m^2 \phi_k^* \phi_m e^{-i(m-k)\varphi} d\varphi \\ &= -\sum_m \frac{m^2}{R^2 - Z^2} |\phi_m|^2 \end{aligned}$$

$$I = \int_{-R}^R dZ \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\phi}{R} \frac{\partial}{\partial z} ((R^2 - Z^2) \partial z \phi).$$

En intégrant par partie  $u = \phi \implies du = dz \phi$

$$dv = \partial z \left[ \left( \frac{R^2 - Z^2}{R^2} \right) \partial \phi \right] dz$$

$$v = \frac{(R^2 - Z^2)}{R^2} \partial z \phi$$

$$\begin{aligned} I &= \phi \frac{(R^2 - Z^2)}{R^2} \partial z \phi \Big|_{-R}^R - \int dz \int d\phi (\partial z \phi) (R^2 - Z^2) \partial z \phi \\ &= - \int_{-R}^R \int_0^{2\pi} d\phi (\partial z \phi) \left(1 - \frac{Z^2}{R^2}\right) (\partial z \phi) \\ &= - \int_{-R}^R dz \left(1 - \frac{Z^2}{R^2}\right) \sum_m |\partial z \phi_m|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} \int_{-R}^R dz \sum_m \left( |\dot{\phi}|^2 - \left(1 - \frac{Z^2}{R^2}\right) |\partial z \phi_m|^2 - \left(\frac{m^2}{(R^2 - Z^2)} + \mu^2\right) |\phi_m|^2 \right) \\
 &= \sum_m \frac{1}{2} \int_{-R}^R dz \left( |\dot{\phi}|^2 - \left(1 - \frac{Z^2}{R^2}\right) (\partial z \phi_m)^2 - \left(\frac{m^2}{(R^2 - Z^2)} + \mu^2\right) |\phi|^2 \right) \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} L_m
 \end{aligned} \tag{4.-3}$$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m(z) e^{-im\varphi}.$$

$$\phi_m^*(z) = \phi_{-m}(z).$$

$$\begin{aligned}
 \phi^* &= \phi_{-m}(z). \\
 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_m \phi_m(z) e^{-im\varphi}\right)^* &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_m \phi_m(z) e^{-im\varphi} \\
 \sum_m \phi_m^*(z) e^{im\varphi} &= \sum_m \phi_m(z) e^{-im\varphi} \\
 \sum_m \phi_m^*(z) e^{im\varphi} &= \sum_m \phi_{-m}(z) e^{im\varphi} \\
 \implies \phi_m^*(z) &= \phi_{(-m)}(z).
 \end{aligned}$$

$$\phi_0^*(z) = \phi_0(z)$$

$$\phi_m(z) = \text{Re}\phi_m + i\text{Im}\phi_m$$

$$\phi_m^*(z) = \text{Re}\phi_m^* + i\text{Im}\phi_m^*$$

$$\text{Re}\phi_m^* = \text{Re}\phi_{-m}^*$$

$$= \text{Re}\phi_m$$

$$\text{Im}\phi_m^* = \text{Im}\phi_{-m}^*$$

$$= -\text{Im}\phi_m$$

$$|\dot{\phi}_m|^2 = Re\dot{\phi}_m^2 + Im\dot{\phi}_m^2.$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} Re\dot{\phi}_m^2 = \sum_{m=-\infty}^{-1} Re\dot{\phi}_m^2 + \dot{\phi}_0^2 + \sum_1^{\infty} Re\dot{\phi}_m^2.$$

$$\begin{aligned} \sum_m Re\dot{\phi}_m^2 &= \sigma_1^{\infty} Re\dot{\phi}_{(-m)}^2 + \dot{\phi}_0^2 + \sum_1^{\infty} Re\dot{\phi}_m^2 \\ &= 2\sum_1^{\infty} Re\dot{\phi}_m^2 + \dot{\phi}_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_m Im\dot{\phi}_m^2 &= \sum_{-\infty}^{-1} Im\dot{\phi}_m^2 + \dot{\phi}_0^2 + \sum_1^{\infty} Im\dot{\phi}_m^2 \\ &= 2\sum_{-\infty}^{-1} Im\dot{\phi}_m^2 \end{aligned}$$

$$\sum |\dot{\phi}_m|^2 = 2\sum_{-\infty}^{-1} Im\dot{\phi}_m^2 + 2\sum_1^{\infty} Re\dot{\phi}_m^2 + \dot{\phi}_0^2$$

Define :  $Q_m \equiv \sqrt{2}Im\dot{\phi}_m \quad m < 0$

$Q_m \equiv \sqrt{2}Re\dot{\phi}_m \quad m > 0$

$Q_0 \equiv \dot{\phi}_0 \quad m = 0$

$$\sum_{(m=-\infty)}^{\infty} |\dot{\phi}_m|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} Q_m^2$$

$$L_m = \frac{1}{2} \int_{-R}^R dz \left[ \dot{Q}_m^2 - \left(1 - \frac{Z^2}{R^2}\right) \partial_z Q_m - \left(\frac{m^2}{R^2 - Z^2} + \mu^2\right) Q_m \right] \quad (4.-19)$$

$z \longrightarrow z_n = na \implies dz = adn$ , where  $a = \frac{R}{N} \longrightarrow 0$

$$\frac{dQ_n(z)}{dz} \Big|_{n=} = \frac{Q_m(n)a - Q_m(n-1)a}{a} \quad a \longrightarrow 0$$

$$Q_{m,n} \equiv Q_m(na)$$

$$\frac{\partial Q_m(na)}{\partial z} = \frac{Q_{m,n} - Q_{m,n-1}}{a}$$

$$\begin{aligned} L_m &= \frac{1}{2} a \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \left[ \dot{Q}_{m,n}^2 - \left(1 - \frac{n^2 a^2}{N^2 a^2}\right) \left(\frac{Q_{m,n} - Q_{m,n-1}}{a}\right)^2 - \left(\frac{m^2}{a^2 N^2 - n^2 a^2} + \mu^2\right) Q_{m,n}^2 \right] \\ &= \frac{a}{2a^2} \sum_n \left[ (a\dot{Q}_{m,n})^2 - \left(1 - \frac{n^2}{N^2}\right) (Q_{m,n} - Q_{m,n-1})^2 + \left(\frac{m^2}{N^2 - n^2} + a^2 \mu^2\right) Q_{m,n}^2 \right] \\ &= \frac{1}{2a} \sum_{n=-(n-1)}^{N-1} \left[ (a\dot{Q}_{m,n})^2 + \left(1 - \frac{n^2}{N^2}\right) (Q_{m,n} - Q_{m,n-1})^2 + \left(\frac{m^2}{N^2 - n^2} + a^2 \mu^2\right) Q_{m,n}^2 \right] \quad (4.20) \end{aligned}$$

$$H_m = \sum_n \Pi_{m,n} \dot{Q}_{m,n} - L_m$$

(où  $\pi_{m,n} = \frac{\partial L_m}{\partial \dot{Q}_{m,n}}$  le moment est conjugué, ) mais

$$\pi_{m,n} = \frac{\partial L_m}{\partial \dot{Q}_{m,n}} = \frac{2a^2}{2a} \dot{Q}_{m,n} = a\dot{Q}_{m,n}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H_m &= \sum_n a\dot{Q}_{m,n}^2 - \frac{1}{2a} \sum \left[ (a\dot{Q}_{m,n})^2 - \left(1 - \frac{n^2}{N^2}\right) (Q_{m,n} - Q_{m,n-1})^2 - \left(\frac{m^2}{N^2 - n^2} + a^2 \mu^2\right) Q_{m,n}^2 \right] \\ &= \frac{1}{2a} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \left[ \pi_{m,n}^2 + \left(1 - \frac{n^2}{N^2}\right) (Q_{m,n} - Q_{m,n-1})^2 + \left(\frac{m^2}{N^2 - n^2} + a^2 \mu^2\right) Q_{m,n}^2 \right] \quad (4.20) \end{aligned}$$

## 4.2 Évaluation perturbative

Considérons un potentiel avec des éléments de matrice :

$$V_{AB} = F_A \delta_{A,B} + \alpha_A \delta_{B,A-1} + \alpha_B \delta_{A,B-1}$$

On utilisera la condition ,On sait que  $F_A \gg \alpha_A, \alpha_B$ . On sait que  $W_{AB} = \sqrt{V_{AB}} \Rightarrow W_{AB} = \sqrt{F_A} \delta_{A,B} + \delta W_{AB}$  La valeur de  $\delta W_{AB}$  est très faible, donc:

$$W_{AB} = \sqrt{F_A} \delta_{A,B} + \beta_A \delta_{B,A-1} + \beta_B \delta_{A,B-1}$$

On néglige tous les termes contenant  $O(\delta W_{AB}^2) \rightarrow (\alpha_A^2, \alpha_B^2)$  Par conséquent,

$$\begin{aligned} W_{Ac} W_{cB} &= V_{AB} \\ (\sqrt{F_A} \delta_{Ac} + \beta_A \delta_{c,A-1} + \beta_c \delta_{A,c-1})(\sqrt{F_A} \delta_{cB} + \beta_B \delta_{c,B-1} + \beta_c \delta_{B,c-1}) &= F_A \delta_{AB} + \alpha_A \delta_{B,A-1} + \alpha_B \delta_{A,B-1} \\ \sqrt{F_A} \beta_A \delta_{B,A-1} + \sqrt{F_A} \beta_B \delta_{A,B-1} + \sqrt{F_B} \beta_A \delta_{B,A-1} + \sqrt{F_B} \beta_B \delta_{A,B-1} &= \alpha_A \delta_{B,A-1} + \alpha_B \delta_{A,B-1} \end{aligned}$$

Comparant chaque terme, on trouve :

$$\beta_A = \frac{\alpha_A}{\sqrt{F_A} + \sqrt{F_{A-1}}}$$

et

$$\beta_B = \frac{\alpha_B}{\sqrt{F_B} + \sqrt{F_{B-1}}}$$

à propos de terme  $W_{AB}^{-1}$ ? supposons que

$$W = A + B \quad \text{and} \quad B \ll A$$

donc

$$W^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BA^{-1}$$

$$W_{AB}^{-1} = A_{AB}^{-1} - A_{Ac}^{-1}B_{cd}A_{dB}^{-1}$$

On a:

$$B_{AB} = \beta_A \delta_{B,A-1} + \beta_B \delta_{A,B-1}$$

et

$$A_{AB}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{F_A}} \delta_{A,B}$$

On remplace ces termes dans l'équation ci-dessus, on aura:

$$\begin{aligned} W_{AB}^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{F_A}} \delta_{A,B} - \frac{1}{\sqrt{F_A}} \delta_{Ac} (\beta_c \delta_{d,c-1} + \beta_d \delta_{c,d-1}) \frac{1}{\sqrt{F_d}} \delta_{dB} \\ &= \frac{1}{\sqrt{F_A}} \delta_{A,B} - \frac{1}{\sqrt{F_A}} \delta_{Ac} \beta_c \delta_{d,c-1} \frac{1}{\sqrt{F_d}} \delta_{dB} - \frac{1}{\sqrt{F_A}} \delta_{Ac} \beta_d \delta_{c,d-1} \frac{1}{\sqrt{F_d}} \delta_{dB} \\ &= \frac{1}{\sqrt{F_A}} \delta_{A,B} - \frac{1}{\sqrt{F_A}} \beta_A \delta_{B,A-1} \frac{1}{\sqrt{F_B}} - \frac{1}{\sqrt{F_A}} \beta_B \delta_{A,B-1} \frac{1}{\sqrt{F_B}} \\ W_{AB}^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{F_A}} \delta_{A,B} - \frac{1}{\sqrt{F_A}} \beta_A \delta_{B,A-1} \frac{1}{\sqrt{F_B}} - \frac{1}{\sqrt{F_A}} \beta_B \delta_{A,B-1} \frac{1}{\sqrt{F_B}} \end{aligned} \quad (4.-27)$$

On remplace  $W_{AB}$  et  $W_{AB}^{-1}$  dans l'équation (2.6.10), notons que (2.6.10) notons que  $i, j : 1 \rightarrow N$   $\alpha : N + 1 \rightarrow 2N - 1$  ce qui implique que tous les termes vont disparaître, sauf le terme qui satisfait la relation

$$\alpha = N + 1 \rightarrow i = N \text{ and } j = N$$

comme suit:

$$\begin{aligned} \Lambda_{i,j}^m &= - \sum_{\alpha=N+1}^{2N-1} W_{i,\alpha}^{-1} W_{\alpha,j} \\ &= - \sum_{\alpha=N+1}^{2N-1} \left( \frac{1}{\sqrt{F_i}} \delta_{i,\alpha} - \frac{1}{\sqrt{F_i}} \beta_i \delta_{\alpha,i-1} \frac{1}{\sqrt{F_\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{F_i}} \beta_\alpha \delta_{i,\alpha-1} \frac{1}{\sqrt{F_\alpha}} \right) \times (\sqrt{F_\alpha} \delta_{\alpha,j} + \beta_\alpha \delta_{j,\alpha-1} + \beta_j \delta_{\alpha,j-1}) \\ &= \frac{\beta_\alpha \beta_j}{\sqrt{F_i} \sqrt{F_\alpha}} \delta_{i,\alpha-1} \delta_{j,\alpha-1} \end{aligned}$$

on applique la condition :

$$\Lambda_{i,j}^m = \frac{\beta_{N+1}\beta_N}{\sqrt{F_N}\sqrt{F_{N+1}}}\delta_{i,N}\delta_{j,N}$$

et on utilise la relation entre  $\beta$  et  $F_a$  qui nous ont été construits avant .

$$\beta_A = \frac{\alpha_A}{\sqrt{F_A} + \sqrt{F_{A-1}}}$$

et

$$F_A = \left(2 - \frac{(N-A)^2}{N^2} - \frac{(N-A+1)^2}{N^2} + a^2\mu^2 + \frac{m^2}{N^2 - (N-A)^2}\right)$$

pour les grandes valeurs de  $m$ ;  $m \gg N \gg 1$  les termes qui dépendent de ce dernier vont dominer.

$$F_A \simeq \frac{m^2}{N^2 - (N-A)^2}$$

$$\alpha_A = -\left(1 - \frac{(N-A)^2}{N^2}\right) = \frac{(N-A)^2}{N^2} - 1$$

On calcule la quantité :

$$\beta_N = \frac{\alpha_N}{\sqrt{F_N} + \sqrt{F_{N-1}}}$$

On remplace dans les équations de  $\alpha$  et  $F$  avec  $A = N$  et on aura:

$$\beta_N \simeq \frac{-1}{2\frac{m}{N}} = \frac{-N}{2m}$$

On utilise encore la même approximation, on trouve:

$$\beta_{N+1} \simeq \frac{-N}{2m}$$

On met tous les termes dans l'expression de  $\Lambda$ , et on change les indices  $i \rightarrow a$  and  $j \rightarrow b$  le résultat final aura la forme:

$$\begin{aligned}\Lambda_{a,b}^m &\simeq \frac{\left(\frac{-N}{2m}\right)\left(\frac{-N}{2m}\right)}{\frac{m^2}{N^2}}\delta_{a,N}\delta_{b,N} + O\left(\left(\frac{N}{m}\right)^6\right) \\ &= \frac{N^4}{4m^4}\delta_{a,N}\delta_{b,N} + O\left(\left(\frac{N}{m}\right)^6\right)\end{aligned}\tag{4.-30}$$

la forme de matrice  $\Lambda$  est:

$$\Lambda_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{N^4}{4m^4} \end{pmatrix}$$

C'est une matrice diagonale avec zéro valeurs propres à l'exception du terme non nul  $N^{th}$  qui contribue à l'entropie d'intrication, c'est un résultat très important puisque, selon Von Neumann, la relation d'une entropie suffit de connaître les valeurs propres de l'opérateur. Les sortes de calcul de l'entropie d'intrication devenues faciles maintenant:

$$S_{ent} = \log\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_N}\right) + (\sqrt{1 + \lambda_N})\left(\log\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_N}} + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda_N}}\right)\right)$$

avec  $\lambda = \frac{N^4}{4m^4} \rightarrow \sqrt{\lambda_N} = \frac{N^2}{2m^2}$  nous élargissons la quantité  $(\sqrt{1 + \lambda_N})$  comme:

$$(1 + \lambda_N)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\lambda_N$$

depuis  $\lambda_N$  est très petite, aussi nous utilisons:

$$\log(1 + x) \simeq x$$

pour  $x$  très petite .

$$\begin{aligned}
 S_{ent} &= \log\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_N}\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\lambda_N\right) \log\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_N}}(1 + \sqrt{1 + \lambda_N})\right) \\
 &= \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log(\sqrt{\lambda_N}) + \log\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_N}}\right) + \log\left(1 + 1 + \frac{\lambda_N}{2}\right) + \frac{\lambda_N}{2} \log\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_N}}\right) + \frac{\lambda_N}{2} \log\left(2 + \frac{\lambda_N}{2}\right) \\
 &\simeq \frac{\lambda_N}{4} - \frac{\lambda_N}{4} \log(\lambda_N) + \frac{\lambda_N}{2} \log 2 + O(\lambda_N^2) \\
 &\simeq \frac{N^4}{16m^4} \left(1 - \log \frac{N^4}{16m^4}\right)
 \end{aligned}$$

### 4.3 La sphère floue

Nous commençons par un scalaire  $\mathbf{R} \times \mathbf{S}_N^2$  où  $\mathbf{S}_N^2$  est une sphère floue de dimension de la matrice  $N = 2l + 1$ . l'action est donnée :

$$S_N = \frac{1}{N} \int dt L$$

avec  $L = \frac{1}{2}Tr(\dot{\phi}^2 - \phi[\mathcal{L}_i^2 + \mu^2]\phi)$ . le champ scalaire  $\phi$  est  $N \times N$  la matrice hermitienne avec le paramètre de masse  $\mu$ . le Laplacien  $\mathcal{L}_i^2$  et le  $SU(2)$  l'opérateur de casimir est donné par  $\mathcal{L}_i^2 = \mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{L}_3^2$  l'action de  $\mathcal{L}_i^2(\phi) = [L_i, \phi]$  et  $\mathcal{L}_i^2(\phi) = [L_i, [L_i, \phi]]$ . les  $L_i$  satisfont  $[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k$  ils génèrent de  $SU(2)$  représentation irréductible de spin  $l = \frac{N-1}{2}$ . D'abord, nous observons que:

$$Tr(\phi \mathcal{L}_i^2 \phi) = 2(\phi)_{ab} \mathcal{M}_{ab,cd}(\phi)_{cd} \quad (4.-34)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{ab,cd} &= ((L_i^2)_{bc} \delta_{da} - (L_i)_{bc} (L_i)_{da}) \\
 &= (c_2 \delta_{bc} \delta_{da} - (L_i)_{bc} (L_i)_{da}).
 \end{aligned} \quad (4.-34)$$

où  $c_2$  est le casimir de spin  $l$  de  $SU(2)$ , i.e  $c_2 = l(l+1)$ . Maintenant . On introduit deux matrices réelles des scalaires champs par un fractionnement  $\phi$  comme suit  $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ . hermitienne par  $\phi$  implique que  $\phi_1^T = \phi_1$  et  $\phi_2^T = -\phi_2$ , en d'autres termes  $\phi_1$  est une matrice réelle

symétrique  $N \times N$  où  $\phi_2$  est une matrice antisymétrique  $N \times N$  .en utilisant aussi le fait que la matrice  $\mathcal{M}_{ab,cd}$  ,satisfaisante est  $\mathcal{M}_{ba,dc} = \mathcal{M}_{ad,cd}$ il est facile de montrer que

$$\begin{aligned}
 Tr(\phi \mathcal{L}_i^2 \phi) &= 2(\phi_i + i\phi_2)_{ab} \mathcal{M}_{ab,cd} (\phi_1 + i\phi_2)_{cd} \\
 &= 2[\phi_{1ab} \mathcal{M}_{ab,cd} \phi_{1cd} + i\phi_{1ab} \mathcal{M}_{ab,cd} \phi_{2cd} + i\phi_{2ab} \mathcal{M}_{ab,cd} \phi_{1cd} - \phi_{2ab} \mathcal{M}_{ab,cd} \phi_{2cd}] \\
 &= 2[\phi_{1ab} \mathcal{M}_{ab,cd} \phi_{1cd} - \phi_{2ab} \mathcal{M}_{ab,cd} \phi_{2cd}] \tag{4.-35}
 \end{aligned}$$

Les termes deuxième, troisième et quatrième sont égaux à zéro selon l'une des conditions de symétrie, qui est::

$$\begin{aligned}
 \phi_{1ab} \mathcal{M}_{ab,cd} \phi_{2cd} &= -\phi_{1ba} \mathcal{M}_{ba,dc} \phi_{2dc} \quad (\text{change } b \text{ with } a \text{ and } c \text{ with } d) \\
 &= -\phi_{1ab} \mathcal{M}_{ab,cd} \phi_{2cd} \quad (\text{and this is valid only when the left hand said equals to zero}) \\
 &= \text{Zero}
 \end{aligned}$$

On peut ajouter ces termes ( $\phi_{2ab} \mathcal{M}_{ab,cd} \phi_{1cd}$ ) et ( $\phi_{1ab} + \phi_{2ab} \mathcal{M}_{ab,cd} \phi_{2cd}$ ) ) à l'équation (4.4), car ils sont égaux à zéro.

$$\begin{aligned}
 Tr(\phi \mathcal{L}_i^2 \phi) &= 2[\phi_{1ab} \mathcal{M}_{ab,cd} \phi_{1cd} + \phi_{2ab} \mathcal{M}_{ab,cd} \phi_{1cd} + (\phi_1 + \phi_2)_{ab} \mathcal{M}_{ab,cd} \phi_{2cd}] \\
 &= 2(\phi_1 + \phi_2)_{ab} \mathcal{M}_{ab,cd} (\phi_1 + \phi_2)_{cd} \\
 &= 2\Phi_{ab} \mathcal{M}_{ab,cd} \Phi_{cd}. \tag{4.-39}
 \end{aligned}$$

où  $\Phi \equiv \phi_1 + \phi_2$ .pour le calcul explicite, nous utilisons la forme d'une matrice de  $L_1$  et  $L_2$  dans la base  $L_3$  est diagonale, est donnée pour l'arbitraire  $l$  par:

$$\begin{aligned}
 (L_1)_{ab} &= \frac{1}{2}[B_b \delta_{a,b+1} + B_a \delta_{a,b-1}], \\
 (L_2)_{ab} &= \frac{i}{2}[B_b \delta_{a,b+1} - B_a \delta_{a,b-1}], \\
 (L_3)_{ab} &= A_a \delta_{a,b}. \tag{4.-40}
 \end{aligned}$$

Pour prouver les relations de  $L_1$  et  $L_2$  exprimer sous la forme de l'easing et en abaissant opérateurs  $L_+$  et  $L_-$  comme suit::

$$\begin{aligned}
 (L_1)_{ab} &= \frac{1}{2} \langle a | \hat{L}_+ + \hat{L}_- | b \rangle \\
 &= \frac{1}{2} (\langle a | \hat{L}_+ | b \rangle + \langle \hat{L}_- | b \rangle) \\
 &= \frac{1}{2} (\langle l+1-a | \hat{L}_+ | l+1-b \rangle + \langle l+1-a | \hat{L}_- | l+1-b \rangle) \\
 &= \frac{1}{2} (B_a \langle l+1-a, l+1+1-b \rangle + B_b \langle l+1-a, l+1-1-b \rangle) \\
 &= \frac{1}{2} [B_a \delta_{a,b-1} + B_b \delta_{a,b+1}]
 \end{aligned}$$

En utilisant le même traitement nous obtenons  $(L_2)_{ab}$

$$\begin{aligned}
 (L_2)_{ab} &= \langle a | \hat{L}_2 | b \rangle \\
 &= \frac{1}{2i} \langle a | \hat{L}_+ - \hat{L}_- | b \rangle \\
 &= \frac{1}{2i} (\langle \hat{L}_+ | b \rangle - \langle a | \hat{L}_- | b \rangle) \\
 &= \frac{1}{2i} (B_a \langle l+1-a | l+1+1-b \rangle - B_- \langle l+1-a | l+1-1-b \rangle) \\
 &= \frac{1}{2i} (B_a \delta_{a,b-1} - B_- \delta_{a,b+1}) \\
 &= -\frac{1}{2i} (B_b \delta_{a,b+1} - B_a \delta_{a,b-1}) \\
 &= \frac{i}{2} [B_b \delta_{a,b+1} - B_a \delta_{a,b-1}]
 \end{aligned}$$

pour identifier  $B_a$  le paramètre que l'on applique les conditions de la normalisation sur  $L_+$ :

$$\hat{L}_+ | l+1-a \rangle = B_a | (l+1-a) + 1 \rangle$$

$$\begin{aligned}
 B_a^2 &= \langle \hat{L}_+ l + 1 - a + 1 | \hat{L}_+ l + 1 - a + 1 \rangle \\
 &= \langle l + 1 - a | \hat{L}_- \hat{L}_+ | l + 1 - a \rangle \\
 &= \langle l + 1 - a | \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hat{L}_z | \hat{L}_z | l + 1 - a \rangle \\
 &= l(l + 1) - \left(-a + \frac{(N + 1)}{2}\right)^2 + \left(-a + \frac{N + 1}{2}\right) \\
 \Rightarrow B_a^2 &= \frac{(N^2 - 1)}{4} - \left(-a + \frac{(N + 1)}{2}\right)^2 + \left(-a + \frac{(N + 1)}{2}\right) \\
 &= \frac{(N^2 - 1)}{4} - \left(a^2 - a(N + 1) + \frac{(N + 1)^2}{4}\right) - a + \frac{(N + 1)}{2} \\
 &= \frac{(N^2 - 1)}{4} - \frac{(N + 1)^2}{4} - a^2 + a(N + 1) - a + \frac{(N + 1)}{2} \\
 &= -a^2 + a(N + 1) - a \\
 &= -a^2 + aN
 \end{aligned}$$

ici la quantité  $l(l + 1) = \frac{(N^2 - 1)}{4}$

$$\Rightarrow B_a = \sqrt{a(-a + N)}$$

Par la même manière que nous pouvons  $B_b$ . indices a, b vont de 1 à  $N = 2l + 1$ . puis substituer le résultat de l'équation (??) comme suit :

$$\begin{aligned}
 Tr \phi \mathcal{L}_i^2 \phi &= 2\Phi_{ab}(c_2 \delta_{bc} \delta_{da} - (L_i)_{bc} (L_i)_{da}) \Phi_{cd} \\
 &= 2\Phi_{ab}(c_2 \delta_{bc} \delta_{da} - (L_1)_{bc} (L_1)_{da} - (L_2)_{bc} (L_2)_{da} - (L_3)_{bc} (L_3)_{da}) \Phi_{cd}
 \end{aligned} \tag{4.-62}$$

substituer sur le côté gauche de l'équation (??) on obtient:

$$\begin{aligned}
 Tr\phi\mathcal{L}_i^2\phi &= 2\Phi_{ab}(c_2 - (L_3)_{bb}(L_3)_{aa})\Phi_{ab} \\
 &- 2\Phi_{ab}\left[\frac{1}{4}(B_c\delta_{b,c+1} + B_b\delta_{b,c-1})(B_a\delta_{d,a+1} + B_d\delta_{d,a-1})\right. \\
 &- \left.\frac{1}{4}(B_c\delta_{b,c+1} - B_b\delta_{b,c-1})(B_a\delta_{d,a+1} - B_d\delta_{d,a-1})\right]\Phi_{cd}
 \end{aligned} \tag{4.-64}$$

nous utilisons également le fait que  $\delta_{b,c+1} = \delta_{b-1,c}$  et ainsi de suite, substituer et simplifier la relation ci-dessus nous obtenons:

$$\begin{aligned}
 Tr\phi\mathcal{L}_i^2\phi &= 2\Phi_{ab}(c_2 - A_aA_b)\Phi_{ab} \\
 &- \Phi_{ab}(B_{b-1}B_{a-1})\Phi_{b-1,a-1} \\
 &- \Phi_{ab}(B_bB_a)\Phi_{b+1,a+1}.
 \end{aligned} \tag{4.-65}$$

ceci nous amène à introduire le texte suivant le champ:  $Q^{(m)}$  défini par  $Q_a^{(m)} = \Phi_{a,a+m}$  et  $Q_a^{(-m)} = \Phi_{a+m,a}$  pour  $m = 0, \dots, N-1$ . Plus explicitement que nous avons pour  $m = 0$  le champ  $Q^{(0)}$  avec  $N$  degrés de liberté donnés par:

$$Q^{(0)} = (\Phi^{11}, \Phi^{22}, \dots, \Phi^{NN}) \tag{4.-65}$$

Pour  $m = +1$ , nous avons les champs  $Q^{(+1)}$  et  $Q^{(-1)}$  chacun  $N-1$  degrés de liberté donnés par:

$$\begin{aligned}
 Q^{(+1)} &= (\Phi^{12}, \Phi^{23}, \dots, \Phi^{N-1,N}), \\
 Q^{(-1)} &= (\Phi^{21}, \Phi^{32}, \dots, \Phi^{N,N-1})
 \end{aligned} \tag{4.-65}$$

en général pour  $m$  positive nous avons les champs  $Q^{(+m)}$  et  $Q^{(-m)}$  qui contiennent chacun  $(N - m)$  degrés de liberté donnés par:

$$\begin{aligned} Q^{(m)} &= (\Phi^{1,1+m}, \Phi^{2,2+m}, \dots, \Phi^{N-m,N}) \\ Q^{(-m)} &= (\Phi^{1+m,1}, \Phi^{2+m,2}, \dots, \Phi^{N,N-m}) \end{aligned} \quad (4-65)$$

Les deux Champs derniers  $Q^{(N-1)}$  et  $Q^{-(N-1)}$  contiennent 1 degré de liberté de chacun,

$$Q^{(N-1)} = (\Phi^{1N}) \quad , \quad Q^{-(N-1)} = (\Phi^{N1}). \quad (4-65)$$

Par l'utilisation de ce paramétrage on peut montrer que:

$$\Phi_{ab}(B_a B_b) \Phi_{a+1,b+1} = \sum_{m=-(N-1)}^{(N-1)} \sum_{a,b=1}^{N-|m|-1} Q_a^{(m)} B_a B_{a+|m|} Q_b^{(m)} \delta_{a+1,b}$$

(Nous pouvons ajouter un terme qui  $a = N - |m|$  à la sommation parce que  $(B_N = 0)$ . ce qui signifie

$$\Phi_{ab}(B_a B_b) \Phi_{a+1,b+1} = \sum_{m=-(N-1)}^{(N-1)} \sum_{a,b=1}^{N-|m|} Q_a^{(m)} B_a B_{a+|m|} Q_b^{(m)} \delta_{a+1,b} \quad (4-65)$$

$$\Phi_{ab}(B_{a-1} B_{b-1}) \Phi_{a-1,b-1} = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \sum_{a,b=1}^{N-|m|} Q_a^{(m)} B_{a-1} B_{a-1+|m|} Q_b^{(m)} \delta_{a-1,b}. \quad (4-65)$$

Tout ensemble, on obtient:

$$Tr \phi \mathcal{L}_i^2 \phi = 2 \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \sum_{a,b=1}^{N-|m|} Q_a^{(m)} [(c_2 - A_a A_{a+1}) \delta_{a,b} - \frac{1}{2} B_{a-1} B_{a-1+|m|} \delta_{a-1,b} - \frac{1}{2} B_a B_{a+|m|} \delta_{a+1,b}] Q_b^{(m)} \quad (4-65)$$

Maintenant, en calculant les parties restantes du lagrangien::

$$\frac{1}{2} Tr(\dot{\phi}^2 - \phi \mu^2 \phi) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N-|m|} (\dot{\phi}_{aa}^2 - \phi_{aa} \mu^2 \phi_{aa}) \quad (4-65)$$

*Plan Moyen et le disque flou:*

---

où  $\dot{\phi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^2}$ ,  $\pi_a^{(m)} = \dot{\phi}_{aa}$ . l'hamiltonien  $H$  de la théorie libre prend la forme suivante:

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} H_m \\
&= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \sum_{a,b=1}^{N-|m|} (\dot{\pi}_a^{(m)})^2 - \frac{1}{2}(\dot{\pi}_a^{(m)})^2 + \frac{1}{2}Q_a^{(m)}\mu^2Q_b^{(m)}\delta_{a,b} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \sum_{a,b=1}^{N-|m|} Q_a^{(m)}[(c_2 - A_a A_{a+|m|})\delta_{a,b} - \frac{1}{2}B_{a-1}B_{a-1+|m|}\delta_{a-1,b} - \frac{1}{2}B_a B_{a+|m|}\delta_{a+1,b}]Q_b^{(m)} \\
&= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \sum_{a,b=1}^{N-|m|} \frac{1}{2}(\pi_a^{(m)})^2 + \frac{1}{2}V_{a,b}^{(m)}Q_a^m Q_b^m \tag{4.-67}
\end{aligned}$$

où  $V_{ab}^{(m)}$  prend la forme:

$$\begin{aligned}
V_{ab}^{(m)} &= ([\mu^2 + 2(c_2 - A_a A_{a+|m|})]\delta_{a,b} - B_a B_{a+|m|}\delta_{a+1,b} - B_{a-1} B_{a-1+|m|}\delta_{a-1,b}) \\
&= 2([\frac{\mu^2}{2} + (c_2 - A_a A_{a+|m|})]\delta_{a,b} \\
&- \frac{1}{2}B_a B_{a+|m|}\delta_{a+1,b} - \frac{1}{2}B_{a-1} B_{a-1+|m|}\delta_{a-1,b}) \tag{4.-68}
\end{aligned}$$

## 4.4 Plan Moyen et le disque flou:

Nous considérons maintenant une théorie mise à l'échelle sur  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_\theta^2$  ou  $\mathbf{R}_\theta^2$  est l'action de plan Moyen est donné par::

$$S = \frac{1}{2} \int dt Tr(\dot{\phi}^2 + \phi(\nabla^2 - \mu^2)\phi). \tag{4.-68}$$

La trace est une infinité de dimensions et le Laplacien est donné par les opérateurs de création et d'annihilation  $a$  et  $a^+$  par l'expression:

$$\nabla^2 \phi := -\frac{4}{\theta^2}[a^+, [a, \phi]] = -\frac{4}{\theta^2}[a[a, \phi] - [a, \phi]a^+] \tag{4.-68}$$

En rappelant que  $[a, a^+] = \theta$  où  $\theta$  est le paramètre non-commutatif. On utilise cette commutation par rapport à prouver l'équation (4.4) comme suit:

$$aa^+ - a^+a = \theta \Rightarrow aa^+ = \theta + a^+a \quad (4-68)$$

substituer sur le côté gauche de l'équation (4.4):

$$\begin{aligned} [a^+, [a, \phi]] &= a[a, \phi] - [a, \phi]a^+ \\ &= a^+(a\phi - \phi a) - (a\phi - \phi a)a^+ \\ &= a^+a\phi - a^+\phi a - a\phi a^+ - \phi a a^+ \\ &= a^+a\phi + \phi a a^+ - a^+\phi a - a\phi a^+ \\ &= (aa^+ - \theta)\phi + \phi(\theta + a^+a) - a^+\phi a - a\phi a^+ \\ &= aa^+\phi - \theta\phi + \theta\phi + \phi a^+a - a^+\phi a - a\phi a^+ \\ &= aa^+\phi + \phi a^+a - a^+\phi a - a\phi a^+ \\ &= a(a^+\phi - \phi a^+) - (a^+\phi - \phi a^+)a \\ &= a[a^+, \phi] - [a^+, \phi]a \\ &= [a, [a^+, \phi]] \end{aligned}$$

Nous considérons la dimension finie  $N \times N$  matrice  $\phi$ :

$$\phi = \sum_{m,n=0}^{N-1} |m\rangle\langle m|\phi|n\rangle\langle n| \quad , \quad \phi^+ = \phi \quad (4-78)$$

On peut prouver cette équation en utilisant la relation de complétude de telle sorte que

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{N-1} |m\rangle\langle m| \sum_{n=0}^{N-1} |n\rangle\langle n| &= 1 \\ \Rightarrow \sum_{m,n=0}^{N-1} |m\rangle\langle m||n\rangle\langle n| &= 1 \end{aligned}$$

$$\phi = \sum_{m,n=0}^{N-1} |m\rangle\langle m|\phi|n\rangle\langle n| \quad (4-80)$$

depuis  $\langle m|\phi|n\rangle$  est  $\phi_{mn}$  l'élément de matrice, on obtient :

$$\phi = \sum_{m,n=0}^{N-1} \phi_{mn} |m\rangle\langle n| \quad (4-80)$$

en utilisant la condition hermitienne on obtient :

$$\begin{aligned} \phi^+ &= \phi \\ \phi^+ &= \sum_{m,n=0}^{N-1} ((\phi_{mn}|m\rangle\langle n|)^t)^* \\ &= \sum_{m,n=0}^{N-1} (|m\rangle\langle n|)^t (\phi_{mn}^t)^* \\ &= \sum_{m,n=0}^{N-1} |n\rangle\langle m| \phi_{nm}^* \\ \Rightarrow \phi_{nm}^* &= \phi_{mn} \end{aligned}$$

Ensuite, il peut être démontré que le Laplacien  $\nabla^2$  est une action sur la matrice  $(N+1) \times (N+1)$ . l'action dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{D}_N^2$  est donc donnée par(4.4)où la trace  $Tr_N$  est tout simplement coupée  $N$ . On désigne cette trace :

$$R^2 = N\theta$$

En d'autres termes lorsque  $N \rightarrow \infty$  nous devons prendre  $\theta \rightarrow 0$  à récupérer un disque commutatif. Aux fins du calcul de l'entropie d'enchevêtrement sur cet espace de la pièce concernée de l'action est donnée par:

$$\begin{aligned} V &= -Tr_N \phi (\nabla^2 - \mu^2) \phi \\ &= (\mu^2 + \frac{4}{\theta}) Tr_N \phi^2 + \frac{8}{\theta^2} Tr_N (\phi^2 a^+ a) - \frac{8}{\theta^2} Tr_N (\phi a \phi a^+). \end{aligned} \quad (4-85)$$

qui peut prouver que:

$$\begin{aligned}
V &= -Tr_N \phi (\nabla^2 - \mu^2) \phi \\
&= -Tr_N \phi \nabla^2 \phi + \mu^2 Tr_N \phi^2 \\
&= \mu^2 Tr_N \phi^2 - Tr_N \phi \left( \frac{4}{\theta^2} \right) (\phi [a, [a^+, \phi]]) \\
&= \mu^2 Tr_N \phi^2 + \frac{4}{\theta^2} Tr_N \phi (a(a^+ \phi - \phi a^+) - (a^+ \phi - \phi a^+) a) \\
&= \mu^2 Tr_N \phi^2 + \frac{4}{\theta^2} Tr_N (\phi a a^+ \phi - \phi a \phi a^+ - \phi a^+ \phi a + \phi^2 a^+ a) \\
&= \left( \mu^2 + \frac{4}{\theta} \right) Tr_N \phi^2 + \frac{4}{\theta^2} Tr_N (\phi a^+ a \phi + \phi^2 a^+ a) - \frac{4}{\theta^2} Tr_N (\phi a \phi a^+ + \phi a^+ \phi a) \\
&= \left( \mu^2 + \frac{4}{\theta} \right) Tr_N \phi^2 + \frac{8}{\theta^2} Tr_N (\phi^2 a^+ a) - \frac{8}{\theta^2} Tr_N (\phi a \phi a^+)
\end{aligned}$$

Explicitement, nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned}
V &= \left( \mu^2 + \frac{4}{\theta} \right) Tr_N \phi^2 + \frac{8}{\theta^2} Tr_N \phi^2 a^+ a - \frac{8}{\theta^2} Tr_N \phi a \phi a^+ \\
&= \frac{4}{\theta} \left[ \left( 1 + \frac{\theta \mu^2}{4} \right) Tr_N \phi^2 + \frac{2}{\theta} Tr_N \phi^2 a^+ a - \frac{2}{\theta} Tr_N \phi a \phi a^+ \right] \\
\frac{\theta}{2} V &= 2 \left[ \left( 1 + \frac{\theta \mu^2}{4} \right) Tr_N \phi^2 + \frac{2}{\theta} Tr_N \phi^2 a^+ a - \frac{2}{\theta} Tr_N \phi a \phi a^+ \right]
\end{aligned}$$

$$Tr_N \phi^2 a^+ a = Tr_N a^+ a \phi^2$$

$$Tr_N \phi^2 a^+ a = \frac{1}{2} (Tr_N \phi^2 a^+ a + Tr_N a^+ a \phi^2) \quad (4-95)$$

nous avons aussi

$$a|m\rangle = \sqrt{\theta} \sqrt{m} |m-1\rangle$$

et

$$a^+|m\rangle = \sqrt{\theta} \sqrt{m+1} |m+1\rangle$$

$$\begin{aligned}
 \phi^2 &= \sum_{m,n} \phi_{mn} |m\rangle \langle n| \cdot \sum_{jk} \phi_{jk} |j\rangle \langle k| \\
 &= \sum_{mn} \sum_{jk} \phi_{mn} \phi_{jk} |m\rangle \langle n| |j\rangle \langle k| \\
 &= \sum_{mn} \sum_{jk} \phi_{mn} \phi_{jk} |m\rangle \langle k| \delta_{n,j} \\
 \Rightarrow \phi^2 &= \sum_{mn} \sum_k \phi_{mn} \phi_{nk} |m\rangle \langle k|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a^+ a \phi^2 &= \sum_{mn} \sum_k \phi_{mn} \phi_{nk} a^+ a |m\rangle \langle k| \\
 &= \theta \sum_{mn} \sum_k \phi_{mn} \phi_{nk} m |m\rangle \langle k|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Tr_N a^+ a \phi^2 &= \theta \sum_{mn} \sum_k \phi_{mn} \phi_{nk} m \langle i|m\rangle \langle k|i\rangle \\
 &= \theta \sum_{mn} \sum_k \phi_{mn} \phi_{nk} m \delta_{i,m} \delta_{k,i} \\
 &= \theta \sum_{mn} \sum_k \phi_{mn} \phi_{nm} m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi^2 a^+ a &= \sum_{mn} \sum_k \phi_{mn} \phi_{nk} |m\rangle \langle k| a^+ a \\
 &= \theta \sum_{mn} \sum_k \phi_{mn} \phi_{nk} k |m\rangle \langle k| a^+ a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tr_N \phi^2 a^+ a &= \theta \sum_{mn} \sum_k \phi_{mn} \phi_{nk} k \langle i|m \rangle \langle k|i \rangle \\ &= \theta \sum_{mn} \phi_{mn} \phi_{nm} m \end{aligned}$$

nous avons une symétrie dans  $m$  et  $n$

$$\Rightarrow Tr_N \phi^2 a^+ a = \theta \sum_{mn} \phi_{mn} \phi_{nm} n$$

$$\Rightarrow Tr_N \phi^2 a^+ a = \frac{1}{2} \theta \sum_{mn} (m+n) \phi_{mn} \phi_{nm}$$

$$\frac{\theta}{2} V = 2 \sum_{n,m=0}^{N-1} \left( 1 + \frac{\mu^2 \theta}{4} + n + m \right) \phi_{nm} \phi_{mn} - \sqrt{nm} \phi_{nm} \phi_{m-1,n-1} - \sqrt{(n+1)(m+1)} \phi_{nm} \phi_{m+1,n+1}. \quad (4.108)$$

Maintenant on décale vers le haut à partir de la sommation:  $n, m : 0 \Rightarrow N-1$  jusque  $n, m : 1 \Rightarrow N$  avec ( $\tilde{\phi}_{nm} = \phi_{n-1,m-1}$ ), nous obtenons:

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{2} V &= 2 \sum_{n,m=1}^N \left( 1 + \frac{\mu^2 \theta}{4} + (n-1) + (m-1) \right) \phi_{n-1,m-1} \phi_{m-1,n-1} \\ &\quad - \sqrt{(n-1)(m-1)} \phi_{n-1,m-1} \phi_{m-2,n-2} - \sqrt{nm} \phi_{n-1,m-1} \phi_{mn} \\ &= 2 \sum_{m,n=1}^N \left( -1 + \frac{\mu^2 \theta}{4} + n + m \right) \phi_{n-1,m-1} \phi_{m-1,n-1} \\ &\quad - \sqrt{(n-1)(m-1)} \phi_{n-1,m-1} \phi_{m-2,n-2} - \sqrt{nm} \phi_{n-1,m-1} \phi_{mn} \\ \Rightarrow \frac{\theta}{2} V &= 2 \sum_{m,n=1}^N \left( -1 + \frac{\mu^2 \theta}{4} + n + m \right) \tilde{\phi}_{nm} \tilde{\phi}_{mn} \\ &\quad - \sqrt{(n-1)(m-1)} \tilde{\phi}_{nm} \tilde{\phi}_{n-1,m-1} - \sqrt{nm} \tilde{\phi}_{nm} \tilde{\phi}_{m+1,n+1}. \quad (4.112) \end{aligned}$$

En utilisant la même astuce que nous avons utilisée sur la sphère floue, à savoir, nous avons divisé les champs en  $\phi_{mn}^{(1)} = \phi_{nm}^{(1)}$  et partie symétrique  $\phi_{mn}^{(2)} = -\phi_{nm}^{(2)}$  par écrit  $(\tilde{\phi})_{mn} = \phi_{mn}^{(1)} + i\phi_{mn}^{(2)}$ , nous pouvons organiser l'action qui prend la forme :

$$-\frac{\theta}{2}Tr_N\phi(\nabla^2 - \mu^2)\phi = 2 \sum_{n,m=1}^N \Phi_{nm}(1 + \frac{\mu^2\theta}{4} + A_n + A_m)\Phi_{nm} - \sum_{n,m=1}^N [\Phi_{nm}(B_{n-1}B_{m-1})\Phi_{n-1,m-1} + \Phi_{nm}(B_nB_m)\Phi_{n+1,m+1}] \quad (4.-112)$$

où  $A_n$  et  $B_n$  sont maintenant définis par  $A_n = n$  et  $B_n = \sqrt{2n}$ . les mêmes étapes que nous ont prises dans le cas de sphère floue, on peut écrire l'action ci-dessus sous la forme:

$$-\frac{\theta}{2}Tr_N\phi(\nabla^2 - \mu^2)\phi = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \sum_{a,b=1}^{N-|m|} V_{ab}^{(m)} Q_a^{(m)} Q_b^{(m)}. \quad (4.-112)$$

ou:

$$\begin{aligned} V_{ab}^{(m)} &= 2[(-1 + \frac{\mu^2\theta}{4} + A_a + A_{a+|m|})\delta_{ab} - \frac{1}{2}B_{a-1}B_{a-1+|m|}\delta_{a-1,b} - \frac{1}{2}B_aB_{a+|m|}\delta_{a+1,b}] \\ &= 2[(2a + |m| - 1 + \frac{\mu^2\theta}{4})\delta_{a,b} - \sqrt{(a-1)(a-1+|m|)}\delta_{a-1,b} - \sqrt{a(a+|m|)}\delta_{a+1,b}] \end{aligned} \quad (4.-112)$$

les champs  $Q^{(m)}$  et  $Q^{(-m)}$  ( $m \geq 0$ ) sont définis par la même manière que tous les  $\mathbf{S}_N^2$ .

# Bibliographie

- [1] J.D.Bekenstein, Lett.Nuov.Cimento **4** (1972) 737.
- [2] J.D.Bekenstein, phys.Rev.**D 7**(1973) 2333.
- [3] J.D.Bekenstein, Plenary talk at Seventh Marcel Grossman meeting at Stanford University, gr-qc/9409015.
- [4] S.Hawking, *Nature* (physical Science) **248** (1974) 30.
- [5] S.W.Hawking, Commun.Math.Phy **43**(1975) 199.
- [6] J.W.Bardeen, B.Carter, S.W.Hawking . (1973) *Commun.Math.Phy.***31**, 161.
- [7] G.Gibbons and S.W.Hawking, Phys.Rev.**D 15**, 2752 (1977)
- [8] R.Wald, Black Holes and Thermodynamics, in Black Holes and Relativistic Stars, edited by R.Wald (University of Chicago Press, 1998).
- [9] R.Sorkin, The Stistical Mechanics of Black Hole Thermodynamics,in Black Holes and Relativistic Stars, edited by R.Wald (University of Chicago Press, 1998).
- [10] R.Sorkin, "On the Entropy of the Vacuum Outside a Horizon", in B.Bertotti, F.de Felice, Pascolini, (eds.), *Tenth International Conference on General Relativity and Gravitation (held Padova, 4-9 July, 1983), Contributed Papers*, Vol.2 pp.734-736 (Roma, Consiglio Nazionale Delle Ricerche, 1983)
- [11] Rafael Sorkin, Ten Theses on Black Hole Entropy, [hep-th/0504037].
- [12] Daniela Bigatti, Leonard Susskind, TASI lectures on the Holographic Principle, [hep-th/0002044]
- [13] G.'t Hooft, *Nucl.Phys.* **B 256** 727 (1985).
- [14] L.Bombelli, R.K.Koul, J.Lee, and R.Sorkin, *Phys.Rev.* **D34**,373 (1986).

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [15] M.Srednicki, *Phys.Rev.Lett* **71** 666 (1993)
- [16] C.Callan and F.Wilczek, *Phys.Lett.* **B333** 55-61 (1994), [arXiv:hep-th/9401072].
- [17] L.Susskind and J.Uglum, *Phys.Rev.* **D50** 2700-2711 (1994) , [arXiv:hep-th/9401070].
- [18] D. Kabat, M. J. Strassler, *Phys.Lett.* **B329** (1994) 46-52 [arXiv:hep-th/9401125].
- [19] Ted Jacobson, Black Hole Entropy and Induced Gravity Authors, [gr-qc/9404039].
- [20] D. Dou, B.Ydri, Entanglement Entropy on Fuzzy Spaces, *Phys.Rev.* **D74** 044014 (2006) , [ arXiv:gr-qc/0605003].
- [21] Michael R. Douglas, Nikita A. Nekrasov, *Rev.Mod.Phys.* **73** (2001) 977-1029.
- [22] Ram Brustein, Martin B. Einhorn, Amos Yarom, *JHEP* **0601** (2006) 098,[arXiv: hep-th/0508217].
- [23] Roberto Emparan, Black hole entropy as entanglement entropy: a holographic derivation, [arXiv:hep-th/060308].
- [24] Shinsei Ryu, Tadashi Takayanagi, Holographic Derivation of Entanglement Entropy from AdS/CFT , [arXiv: hep-th/0603001].
- [25] S.Das,S. Shankaranarayanan, *Class.Quant.Grav* **24** 5299-5306,(2007), [gr-qc/0703082].
- [26] S. Das, S. Shankaranarayanan, S.Sur, *Can.J.Phys* **86**,653-658, (2008), [gr-qc/07102013].
- [27] D.Dou, Comments on the Entanglement Entropy on Fuzzy Spaces, *Mod.Phys.Lett.A* **24**: 2467-2480 (2009), [ arXiv:0903.3731]. .
- [28] Table of Integrals, Series, and Products, by I. S. Gradshteyn , I. M. Ryzhik, Alan Jeffrey , D. Zwillinger.
- [29] Noncommutative Field Theory Michael R. Douglas<sup>1, 2</sup>, . and Nikita A. Nekrasov<sup>2, 3</sup>
- [30] Snyder, H. S., 1947, Quantized space-time, *Phys. Rev.* **71**, 38.
- [31] hep-th/9912072 S. Minwalla, M.Van Raamsdonk, N.Seiberg,
- [32] T. Filk, "Divergences in a Field Theory on Quantum Space," *Phys. Lett.* **B376** (1996) 53.
- [33] J.C. Varilly and J.M. Gracia-Bondia, "On the ultraviolet behavior of quantum fields over noncommutative manifolds," *Int. J. Mod. Phys. A***14** (1999) 1305, hep- th/9804001

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [34] L.Susskind and J.Uglum, *Phys.Rev.* **D50** 2700-2711 (1994) , [arXiv:hep-th/9401070].
- [35] Connes A 1990 Non-commutative Geometry (Paris: InterEditions)
- [36] J.Madore, The fuzzy sphere, *Class.Quant.Grav* **9** 69-87,(1992).
- [37] F. Lizzi, P. Vitale, A. Zampini, *JHEP* **0308** (2003) 057,[arXiv:hep-th/0306247] .
- [38] A.Strominger, *JHEP* **9802** (1998) 009,[arXiv:hep-th/9712251]