

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et la recherche scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté de Physique



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER
En: PHYSIQUE
Spécialité: Physique Théorique des Basses et Moyennes Energies

Par

Mlle. BOUDALI Fahima

Sujet :

*Description statistique des noyaux chauds en
présence du moment angulaire*

Soutenu publiquement le **18 Mai 2008**, devant le jury composé de :

Mlle Z. MELIANI, Professeur, USTHB
Mr M. FELLAH, Professeur, USTHB
Mlle N. H. ALLAL, Professeur, USTHB
Mr M. R. OUDIH, Maître de Conférences, USTHB
Mr B. BOUZID, Maître de Conférences, USTHB

Présidente
Directeur de thèse
Examinatrice
Examineur
Examineur

Remerciements

Je présente mes sincères remerciements à mon directeur de thèse Monsieur M. Fellah, Professeur à l'USTHB pour m'avoir accueillie au sein de l'équipe « Structure Nucléaire » du Laboratoire de Physique Théorique, d'avoir mis à ma disposition tous les moyens matériels et m'avoir guidée tout au long de la réalisation de ce travail. Je le remercie pour sa confiance, l'attention qu'il m'a accordée et les conseils qu'il m'a prodigués et, surtout, pour m'avoir proposé ce sujet de travail.

Je prie Mlle Z. Meliani, Professeur à l'USTHB, de bien vouloir trouver ici l'expression de ma profonde gratitude pour avoir accepté la présidence du jury de ce mémoire.

J'adresse, également, mes profonds remerciements à Mlle N. H. Allal, Professeur à l'USTHB pour ses précieux conseils et ses remarques qui m'ont permis d'améliorer constamment ce travail, pour sa disponibilité et d'avoir accepté de participer au jury de ce mémoire.

Je tiens à remercier sincèrement Messieurs M. R. Oudih et B. Bouzid Maîtres de conférences à l'USTHB d'avoir accepté de participer au jury de ce mémoire.

C'est avec un grand plaisir que je remercie chaleureusement Mlle Naziha Benhamouda, Maître de conférences à l'USTHB pour sa précieuse aide continue et spontanée, d'avoir répondu à toutes mes questions avec beaucoup de gentillesse. Je remercie ma camarade et amie Mlle Ismahane Ami pour son aide concernant la confection des codes de calcul, la présentation de ce mémoire et la gentillesse dont elle a fait preuve tout au long de mon séjour au laboratoire. Mes remerciements vont également à Mr. Slimane Kerrouchi pour sa disponibilité et son aide inconditionnée ainsi qu'à mon camarade Mr. Mohamed Douici pour sa précieuse collaboration dans la résolution de certains problèmes rencontrés dans ce travail. Je n'oublierai pas enfin de remercier ma collègue Melle Djamila Mokhtari.

A ceux qui ont fait de moi ce que je suis, mes parents adorés.

A mes deux frères bien aimer pour leurs encouragements.

A l'homme avec qui je vais partager ma vie, mon mari.

A mon très cher petit frère Amine.

Table des matières

Introduction	6
1 Description statistique des corrélations d'appariement avec conservation du moment angulaire	7
1.1 Introduction	7
1.2 Effet d'appariement	8
1.2.1 Force d'appariement	10
1.3 Théorie BCS	11
1.3.1 Transformation de Bogoliubov-Valatin et l'état BCS	11
1.3.2 Valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules	12
1.3.3 Valeur moyenne de l'opérateur moment angulaire	13
1.4 Equations du gap	14
1.4.1 Diagonalisation de l'Hamiltonien	14
1.5 Grande fonction partition	21
1.6 Densité de niveaux et grandeurs statistiques	22
1.6.1 Cas où $\gamma \neq 0, T \neq 0$	22
1.6.2 Cas où $\gamma = 0, T \neq 0$	25
1.6.3 Cas où $\gamma = 0, T = 0$	26
1.6.4 Dérivées partielles du deuxième ordre	27
1.6.5 Dérivées de Δ par rapport aux multiplicateurs de Lagrange	29

2	Etude des corrélations d'appariement par le formalisme de l'intégrale fonctionnelle	30
2.1	Introduction	30
2.2	Hamiltonien du système	31
2.3	Grande fonction partition	32
2.3.1	Transformation de Hubbard-Stratonovich	38
2.4	Equation du gap	40
2.4.1	Approximation statique	40
2.4.2	Diagonalisation de l'opérateur H''	41
2.4.3	Approximation au point de selle-Equations du gap	47
3	Application au modèle uniforme	50
3.1	Le modèle uniforme	50
3.2	Grandeurs statistiques et équation du gap	51
3.2.1	Le moment angulaire	51
3.2.2	Le nombre de particules	51
3.2.3	L'équation du gap	52
3.2.4	Energie	57
3.2.5	Energie libre	60
4	Résultats numériques-Discussion	61
4.1	Introduction	61
4.2	Cas des modèles schématiques	61
4.2.1	Le modèle uniforme	61
4.2.2	Le modèle schématique de Richardson	65
4.3	Cas réaliste	81
4.3.1	L'énergie d'excitation	83
4.3.2	L'entropie	85
4.3.3	La capacité calorifique	85

Conclusion	92
A L'hamiltonien du système en représentation quasi particule	93
B Dérivées partielles du deuxième ordre	95
Bibliographie	99

Introduction

L'étude des corrélations d'appariement est très importante et est toujours d'actualité en physique de la structure nucléaire. L'observation que les noyaux ayant un nombre pair de nucléons sont systématiquement plus liés que ceux ayant un nombre impair conduit à proposer l'hypothèse de l'appariement nucléaire. L'idée, fort simple, est que chaque nucléon se lie avec un autre pour former une paire. Lorsque le noyau possède un nombre pair de nucléons, chacun d'entre eux profite de l'appariement. Pour exciter un tel système, il faut lui fournir une énergie au moins égale à l'énergie nécessaire pour briser une paire. Au contraire, dans le cas des noyaux impairs, il existe un nucléon célibataire, qui requiert moins d'énergie d'excitation.

Ce phénomène est très analogue à celui de la supraconductivité en physique du solide décrit par Bardeen, Cooper et Schrieffer [1]. La première description théorique de l'appariement nucléaire a été proposée à la fin des années cinquante par Bohr, Mottelson et Pines [2]. Ils se sont basés sur une explication analogue à celle de la théorie de la supraconductivité dans les métaux. Sur le plan théorique, le phénomène d'appariement tel que décrit par la théorie BCS se superpose à l'approximation du champ moyen. Autrement dit, les nucléons sont à la fois soumis au potentiel de champ moyen et à l'interaction d'appariement, mais l'un est indépendant de l'autre.

Or, l'interaction d'appariement est une interaction résiduelle. Il a été montré que dans l'approche Hartree-Fock, le potentiel de champ moyen est déterminé à partir de l'interaction nucléon-nucléon à deux corps. Plusieurs études concernant cette théorie ont traité en plus de l'appariement entre particules identiques : proton-proton et neutron-neutron, l'appariement neutron-proton [3,4].

Les corrélations d'appariement sont traitées généralement par la théorie BCS [1, 5–7] malgré que cette dernière présente un défaut majeur qui est la non conservation du nombre de particules [8–13]. Ceci entraîne des erreurs considérables dans le calcul des observables physiques. Par ailleurs, cette fonction d'onde ne décrit pas un état de moment angulaire déterminé et ne décrit donc pas convenablement un état du système physique [13].

Les noyaux chauds ont été étudiés dans la théorie "Finite Temperature BCS (FTBCS)" [14–19] par plusieurs auteurs en physique statistique pour déterminer les différentes grandeurs thermodynamiques. Ces dernières sont obtenues à partir de la fonction partition ou la grande fonction partition pour l'ensemble canonique ou grand canonique [20, 21]. Sano et Yamasaki [19] ont étudié l'interaction d'appariement dans les noyaux chauds en utilisant une approche dynamique statistique, afin de traiter le comportement des états excités notamment l'énergie d'excitation et l'entropie en fonction de la température. Morretto [17] a utilisé la même méthode en intégrant le moment angulaire dans l'hamiltonien du système. Il a ainsi déterminé les grandeurs statistiques et les a explicitées dans le cadre du modèle uniforme. En effet, le moment angulaire a été pris en compte par l'introduction dans l'hamiltonien d'un paramètre de Lagrange pour assurer sa conservation en moyenne.

L'approche du modèle en couche (Shell Model Monte Carlo (SMMC)) [22–24] a été aussi utilisée pour étudier la fonction partition et les grandeurs statistiques telles que l'entropie et la capacité calorifique ainsi que les transitions de phase et la densité des niveaux des noyaux chauds.

Les corrélations d'appariement ont été étudiées en physique statistique pour étudier l'effet de la température et du moment angulaire sur le paramètre de la densité de niveaux nucléaire par M. Rajasekaran [25]. De plus, la correction de couches en fonction du moment angulaire est également calculée en prolongeant la méthode thermodynamique. Par ailleurs, Rossignoli [26] a utilisé le moment angulaire pour étudier les fluctuations des observables physiques par l'approximation thermique du champ moyen.

Récemment, les corrélations d'appariement ont été étudiées par le formalisme des intégrales de chemin de Feynman [27–35]. Au cours de ces dernières années, il a été montré que le formalisme des intégrales de chemin est une alternative au moins aussi puissante

que l'approximation BCS.

Le but du présent travail est l'étude des effets de la conservation, en moyenne et simultanément, des opérateurs nombre de particules et moment angulaire dans les noyaux chauds. Afin d'étudier les corrélations d'appariement entre particules identiques et en vue de voir l'influence du moment angulaire des noyaux chauds, on utilise en première approche l'approximation BCS puis en seconde approche le formalisme des intégrales de chemin en explicitant les équations du gap et la grande fonction partition du système. Nous commencerons pour cela par rappeler dans le premier chapitre la théorie BCS à température finie qui a été déjà traitée par Moretto [17]. Le second chapitre est consacré à l'étude du même système décrit par le même hamiltonien par le formalisme de l'intégrale de chemin en explicitant la grande fonction partition du système. Une fois cette dernière établie, toutes les grandeurs thermodynamiques usuelles (énergie, nombre de particules, moment angulaire, chaleur spécifique, entropie) seront déduites. Le troisième chapitre concerne l'application d'un modèle schématique (modèle uniforme) dans lequel on suppose la densité des niveaux constante. Dans cette partie, les expressions lissées des différentes grandeurs thermodynamiques ont d'abord été établies. Ces dernières ont été évaluées numériquement dans le cadre de trois modèles : deux modèles schématiques (le modèle uniforme [36] et le modèle de Richardson [37]) et le modèle réaliste de Woods-Saxon [6]. Dans cette dernière partie, les résultats numériques sont présentés et discutés.

Chapitre 1

Description statistique des corrélations d'appariement avec conservation du moment angulaire

1.1 Introduction

L'étude microscopique de la structure nucléaire consiste en la prise en considération des interactions résiduelles à courtes portées négligées en première approximation dans la théorie du champ moyen. La plus importante de ces interactions est celle dûe aux effets d'appariement des nucléons dont l'importance est fondamentale en physique nucléaire.

La prise en compte de ce type d'interaction se fait le plus souvent dans le cadre de la théorie de la supraconductivité développée par Bardeen, Cooper et Schrieffer [1]. Cette théorie a été étendue à la physique nucléaire pour l'étude des noyaux finis sphériques par Belyaev [40]. En effet, ce dernier supposa l'existence des corrélations d'appariement uniquement entre nucléons occupant des états se déduisant l'un de l'autre par renversement du sens du temps [41].

Cependant, il est bien connu que l'approximation BCS présente une faiblesse majeure qui est la non conservation du nombre de particules et du moment angulaire ce qui entraîne

des erreurs dans les calculs des observables physiques tels que (moment d'inertie, transition béta,...). En dépit de cela, cette approximation reste la plus utilisée en raison de sa simplicité.

D'autre part, et dans le but de prendre en considération l'excitation du noyau et l'étude des noyaux chauds, il a été tenu compte explicitement de l'effet de la température [19].

Le présent chapitre a pour but d'étudier l'effet des corrélations d'appariement à température finie en tenant compte du moment angulaire M . La conservation en moyenne simultanée de ce dernier et de celle du nombre de particules N sera prise en considération par l'introduction de deux paramètres de Lagrange dans l'hamiltonien nucléaire. Les équations du gap et la grande fonction partition du système seront explicitées. Étant donné que toutes les propriétés thermodynamiques du système peuvent être déterminées à l'aide de la grande fonction partition Z et ses dérivées, les grandeurs usuelles comme le nombre de particules, la projection du moment angulaire, l'énergie du système, l'entropie et la chaleur spécifique seront déduits.

1.2 Effet d'appariement

Dans ce travail nous négligerons l'interaction d'appariement neutron-proton. Le noyau se présente alors comme un ensemble de deux sous-systèmes, un système de neutrons et un système de protons, indépendants.

L'hamiltonien nucléaire est donc la somme des hamiltoniens neutron et proton et la fonction d'onde nucléaire est le produit tensoriel des fonctions d'onde des deux sous-systèmes.

Soit un système de N particules identiques (neutrons ou protons) décrit par l'hamiltonien :

$$H = H_0 + V \tag{1.1}$$

où H_0 est un hamiltonien correspondant à un champ moyen local et dans lequel les nucléons (neutrons ou protons) se déplacent indépendamment les uns des autres. H_0 est

supposé maximal et est obtenu soit par un calcul d'Hartree-Fock, soit donné phénoménologiquement comme celui de Nilsson ou de Woods-Saxon. Dans le formalisme de la seconde quantification, il est donné dans sa propre base par :

$$H_0 = \sum_{\nu>0} \varepsilon_\nu (a_\nu^+ a_\nu + a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\nu}}) \quad , \quad (1.2)$$

et V est une interaction résiduelle. Dans le même formalisme l'hamiltonien H s'écrit :

$$H = \sum_{\nu>0} \varepsilon_\nu (a_\nu^+ a_\nu + a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\nu}}) + \frac{1}{4} \sum_{\nu\mu mn} \langle \nu\mu | V | mn \rangle a_\nu^+ a_\mu^+ a_n a_m \quad (1.3)$$

où l'on a noté par a_ν^+ et a_ν les opérateurs de création et d'annihilation d'une particule dans l'état $|\nu\rangle$. Ces opérateurs obéissent aux relations d'anti-commutation habituelles des fermions :

$$\{a_\nu, a_\mu\} = \{a_\nu^+, a_\mu^+\} = 0 \quad , \quad \{a_\nu^+, a_\mu\} = \delta_{\nu\mu} \quad (1.4)$$

Les quantités ε_ν et $\langle \nu\mu | V | mn \rangle$ représentent respectivement les énergies du champ moyen et les éléments de matrice antisymétrisés de l'interaction résiduelle. Il est connu qu'une partie importante de cette interaction est celle due aux corrélations d'appariement. Dans la présente étude, on admet que cette force ne s'exerce qu'entre nucléons occupant des états $|\nu\rangle$ et $|\tilde{\nu}\rangle$ renversés l'un de l'autre par rapport au sens du temps. Pour plus de clarté il conviendrait, de rappeler sommairement les propriétés de l'opérateur renversement du sens du temps \mathbf{T} [41]. Ce dernier est défini par [43] :

$$\mathbf{T} = \mathcal{R}\mathbf{K} = e^{-i\pi J_y} \mathbf{K} \quad (1.5)$$

où \mathcal{R} et \mathbf{K} sont respectivement l'opérateur de rotation d'un angle π autour de l'axe Oy et l'opérateur de conjugaison complexe attaché à la représentation. Dans le cas d'un noyau sphérique où l'état $|\nu\rangle$ est entièrement caractérisé par les nombres quantiques habituels

$n_\nu, l_\nu, j_\nu, m_\nu$, soit $|\nu\rangle = |n_\nu l_\nu j_\nu m_\nu\rangle$, son état renversé par rapport au temps s'écrit :

$$|\tilde{\nu}\rangle = \mathbf{T} |\nu\rangle = (-1)^{(j_\nu - m_\nu)} |n_\nu l_\nu j_\nu - m_\nu\rangle \quad (1.6)$$

Pour un noyau déformé, l'état $|\nu\rangle$ du nucléon peut toujours être développé sur la base des états $|n_\nu l_\nu j_\nu m_\nu\rangle$, soit :

$$|\nu\rangle = \sum_{n_\nu l_\nu j_\nu m_\nu} C_{n_\nu j l m}^\nu |n_\nu l_\nu j_\nu m_\nu\rangle \quad (1.7)$$

et son renversé par rapport au sens du temps s'écrira :

$$|\tilde{\nu}\rangle = \sum_{n_\nu l_\nu j_\nu m_\nu} C_{n_\nu j l m}^{*\nu} (-1)^{(j_\nu - m_\nu)} |n_\nu l_\nu j_\nu - m_\nu\rangle \quad (1.8)$$

où $C_{n_\nu j l m}^{*\nu}$ désigne le complexe conjugué de $C_{n_\nu j l m}^\nu$.

1.2.1 Force d'appariement

L'interaction d'appariement est l'une des composantes les plus importantes de l'interaction résiduelle. Pour en tenir compte, Belyaev [40] a introduit la notion d'interaction résiduelle entre deux états renversés l'un de l'autre par rapport au sens du temps. Cette force est définie par ses éléments de matrice :

$$\langle \nu\mu | V | m\bar{n} \rangle = -4G\delta_{\nu\bar{\mu}}\delta_{m\bar{n}} \quad (1.9)$$

où G est une constante positive appelée constante d'appariement. Le signe moins dans l'expression (1.9) signifie que l'ensemble des éléments de matrice sont négatifs, ce qui correspond à une interaction attractive.

L'hamiltonien (1.1) devient :

$$H = \sum_{\nu>0} \varepsilon_\nu (a_\nu^+ a_\nu + a_{\bar{\nu}}^+ a_{\bar{\nu}}) - G \sum_{\nu\mu>0} a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+ a_{\bar{\mu}} a_\mu \quad (1.10)$$

Il s'agit donc à présent de trouver les fonctions propres de cet l'hamiltonien qui soient en même temps fonctions propres de l'opérateur nombre de particules et du moment angulaire. Ce problème n'admet pas en général de solution exacte simple ; il a cependant été résolu approximativement dans le cadre de la théorie BCS.

1.3 Théorie BCS

1.3.1 Transformation de Bogoliubov-Valatin et l'état BCS

Dans le but de diagonaliser l'hamiltonien H , Bogoliubov et Valatin ont défini des nouveaux opérateurs α_ν^+ et α_ν qui sont des combinaisons linéaires des opérateurs de création et d'annihilation a_ν^+ , a_ν des vraies particules, définis par la transformation canonique suivante :

$$\begin{cases} \alpha_\nu = u_\nu a_\nu - v_\nu a_{\tilde{\nu}}^+ \\ \alpha_{\tilde{\nu}}^+ = u_\nu a_\nu^+ + v_\nu a_\nu \end{cases} \quad (1.11)$$

La quasi-particule créée par α_ν^+ est une vraie particule avec une amplitude de probabilité u_ν et un vrai trou avec une amplitude de probabilité v_ν . Les paramètres u_ν , v_ν sont des nombres positifs et satisfont aux conditions :

$$u_{\tilde{\nu}} = u_\nu \quad , \quad v_{\tilde{\nu}} = v_\nu \quad \forall \nu \quad (1.12)$$

La transformation (1.11) n'est rien d'autre que la transformation bien connue de Bogoliubov Valatin dont l'inverse est donné par :

$$\begin{cases} a_\nu = u_\nu \alpha_\nu + v_\nu \alpha_{\tilde{\nu}}^+ \\ a_{\tilde{\nu}}^+ = u_\nu \alpha_\nu^+ - v_\nu \alpha_\nu \end{cases} \quad (1.13)$$

La transformation (1.11) étant unitaire alors, les opérateurs α_ν^+ et α_ν doivent satisfaire aux relations d'anticommutation habituelles des fermions. Soit :

$$\{\alpha_\nu^+, \alpha_\mu\} = (u_\nu^2 + v_\nu^2) \delta_{\nu\mu} = \delta_{\nu\mu} \quad (1.14)$$

ce qui conduit à :

$$u_\nu^2 + v_\nu^2 = 1 \quad (1.15)$$

qui est la relation qui assure l'unitarité de la transformation de Bogoliubov-Valatin.

L'état BCS est le vide de quasi-particules. Il est obtenu du vrai vide de particules $|0\rangle$ en éliminant de ce dernier toutes les quasi-particules ; soit :

$$|BCS\rangle = \prod_{\nu>0} \alpha_\nu \alpha_{\tilde{\nu}} |0\rangle \quad (1.16)$$

En injectant les expressions de α_ν et $\alpha_{\tilde{\nu}}$ dans cette relation, le vide de BCS normalisé à l'unité prend la forme usuelle :

$$|BCS\rangle = \prod_{\nu>0} (u_\nu + v_\nu a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+) |0\rangle \quad (1.17)$$

1.3.2 Valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules

Afin de conserver en moyenne l'opérateur nombre de particules donné par :

$$N = \sum_{\nu} a_\nu^+ a_\nu = \sum_{\nu>0} (a_\nu^+ a_\nu + a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\nu}}) \quad (1.18)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$N = \sum_{\nu>0} n_\nu + \sum_{\nu>0} n_{\tilde{\nu}} \quad (1.19)$$

où l'on a noté par :

$$n_\nu = a_\nu^+ a_\nu \quad ; \quad n_{\tilde{\nu}} = a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\nu}} \quad (1.20)$$

$n_\nu, n_{\tilde{\nu}}$ sont les opérateurs nombre d'occupation des états $|\nu\rangle$ et $|\tilde{\nu}\rangle$ respectivement et dont les valeurs propres sont 0 et 1.

En utilisant la transformation donnée par l'équation (1.13), il vient :

$$N |BCS\rangle = \left(\sum_{\nu} v_{\nu}^2 \right) |BCS\rangle + \sum_{\nu} u_{\nu} v_{\nu} \alpha_{\nu}^+ \alpha_{\bar{\nu}}^+ |BCS\rangle \quad (1.21)$$

L'état $|BCS\rangle$ n'est donc pas état propre de l'opérateur N , il est combinaison linéaire de l'état $|BCS\rangle$ et d'états à deux quasi-particules. En effet, dans cette approximation, les fonctions BCS sont approximativement fonctions propres de l'hamiltonien H , mais le nombre de particules n'est conservé qu'en moyenne. La condition sur ce nombre est donnée, à température nulle, par :

$$\langle BCS | N | BCS \rangle = \sum_{\nu} v_{\nu}^2 = n_0 \quad (1.22)$$

où n_0 est le nombre réel de particules du système.

La même expression, avec température, sera donnée par la suite.

1.3.3 Valeur moyenne de l'opérateur moment angulaire

Une autre observable, indispensable pour caractériser les états nucléaires, et qui n'est pas conservée par la théorie BCS, est la composante J_z du moment angulaire total. Ce dernier étant un opérateur à un corps, il s'écrit dans la base de représentation de H_0 :

$$J_z = \sum_{\nu\mu} \langle \nu | J_z | \mu \rangle a_{\nu}^+ a_{\mu} = \sum_{\nu\mu>0} \langle \nu | J_z | \mu \rangle a_{\nu}^+ a_{\mu} + \sum_{\nu\mu>0} \langle \tilde{\nu} | J_z | \tilde{\mu} \rangle a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\mu}} \quad (1.23)$$

Si l'on tient compte du fait que le moment angulaire est impair par renversement du sens du temps :

$$\langle \tilde{\nu} | J_z | \tilde{\mu} \rangle = - \langle \mu | J_z | \nu \rangle \quad (1.24)$$

l'expression du moment angulaire J_z devient :

$$J_z = \sum_{\nu} m_{\nu} a_{\nu}^+ a_{\nu} = \sum_{\nu>0} m_{\nu} a_{\nu}^+ a_{\nu} - \sum_{\nu>0} m_{\nu} a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\nu}} \quad (1.25)$$

où l'on a tenu compte du fait que les états à particules indépendantes sont états propres de J_z , soit :

$$J_z |\nu\rangle = m_\nu |\nu\rangle \quad (1.26)$$

où m_ν est la valeur propre du moment angulaire pour l'état $|\nu\rangle$.

En substituant la transformation de Bogoliubov-Valatin donnée par l'équation (1.13) dans l'expression de l'opérateur J_z , on aboutit à :

$$J_z |BCS\rangle = \left(\sum_\nu m_\nu v_\nu^2 \right) |BCS\rangle + \sum_\nu m_\nu u_\nu v_\nu \alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\nu}}^+ |BCS\rangle \quad (1.27)$$

Nous voyons bien que l'état BCS, comme l'opérateur nombre de particules, n'est pas état propre de l'opérateur J_z . Il se présente comme une combinaison linéaire de l'état BCS et d'états à deux quasi-particules. L'opérateur moment angulaire J_z n'étant conservé qu'en moyenne, nous avons :

$$\langle BCS | J_z | BCS \rangle = \sum_\nu m_\nu v_\nu^2 = M \quad (1.28)$$

La conservation en moyenne de ces deux grandeurs (nombre de particules et moment angulaire) se traduira par l'introduction de deux multiplicateurs de Lagrange λ, γ dans l'expression de l'hamiltonien.

Le but à présent est donc de diagonaliser approximativement l'hamiltonien auxiliaire H' [16, 17] donné par :

$$H' = H - \lambda N - \gamma J_z \quad (1.29)$$

1.4 Equations du gap

1.4.1 Diagonalisation de l'Hamiltonien

Compte tenu de (1.10), (1.18) et (1.25) l'expression (1.29) devient :

$$H' = \sum_{\nu>0} \xi_\nu^+ a_\nu^+ a_\nu + \sum_{\nu>0} \xi_\nu^- a_{\bar{\nu}}^+ a_{\bar{\nu}} - G \sum_{\nu\mu>0} a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+ a_{\bar{\mu}} a_\mu \quad (1.30)$$

où l'on a noté par :

$$\xi_\nu^+ = (\varepsilon_\nu - \lambda - \gamma m_\nu) \quad ; \quad \xi_\nu^- = (\varepsilon_\nu - \lambda + \gamma m_\nu) \quad (1.31)$$

Il est nécessaire à présent de calculer la valeur moyenne d'un certain nombre de produits d'opérateurs de création et d'annihilation. Exprimons donc l'hamiltonien donné par l'équation (1.30) en fonction des opérateurs quasi-particules donnés par la transformation (1.13). En utilisant le théorème de Wick, H' admet la décomposition :

$$H' = E_0 + H_{11} + H_{20} + H_{02} + H_{22} + H_{13} + H_{31} + H_{40} + H_{04} \quad (1.32)$$

où E_0 contient les termes entièrement contractés et H_{ij} sont les termes contenant i opérateurs de création α^+ et j opérateurs de destruction α .

Les termes entièrement contractés conduisent à :

$$\begin{aligned} E_0 = & \sum_{\nu>0} v_\nu^2 (\xi_\nu^+ + \xi_\nu^-) + \sum_{\nu>0} \eta_\nu^+ (\xi_\nu^+ u_\nu^2 - \xi_\nu^- v_\nu^2) \\ & + \sum_{\nu>0} \eta_\nu^- (\xi_\nu^- u_\nu^2 - \xi_\nu^+ v_\nu^2) - G \left[\sum_{\nu>0} u_\nu v_\nu (1 - \eta_\nu^+ - \eta_\nu^-) \right]^2 \\ & - G \sum_{\nu>0} \{ [u_\nu^2 \eta_\nu^+ + v_\nu^2 (1 - \eta_\nu^-)] [u_\nu^2 \eta_\nu^- + v_\nu^2 (1 - \eta_\nu^+)] \} \end{aligned} \quad (1.33)$$

où :

$$\eta_\nu^+ = \langle \alpha_\nu^+ \alpha_\nu \rangle \quad ; \quad \eta_\nu^- = \langle \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\nu}} \rangle \quad (1.34)$$

qui devient :

$$\begin{aligned} E_0 = & \sum_{\nu>0} v_\nu^2 (\xi_\nu^+ + \xi_\nu^-) + \sum_{\nu>0} \eta_\nu^+ (\xi_\nu^+ u_\nu^2 - \xi_\nu^- v_\nu^2) + \sum_{\nu>0} \eta_\nu^- (\xi_\nu^- u_\nu^2 - \xi_\nu^+ v_\nu^2) \\ & - G \left[\sum_{\nu>0} u_\nu v_\nu (1 - \eta_\nu^+ - \eta_\nu^-) \right]^2 \end{aligned} \quad (1.35)$$

où l'on a négligé l'apport du dernier terme qui apparaît dans l'expression (1.33). En effet, ceci revient à négliger les termes de puissance quatre en u_ν et v_ν et qui sont en principe très petits devant les autres termes qui sont de puissance 2 en u_ν ou v_ν .

Après le calcul des différents produits normaux, H_{11} s'écrit :

$$\begin{aligned}
H_{11} = & \sum_{\nu>0} \{ (\xi_\nu^+ u_\nu^2 - \xi_\nu^- v_\nu^2) \alpha_\nu^+ \alpha_\nu + (\xi_\nu^- u_\nu^2 - \xi_\nu^+ v_\nu^2) \alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\nu}} \} \\
& - G \sum_{\nu>0} \left\{ v_\nu^2 [(u_\nu^2 - v_\nu^2)(1 - \eta_\nu^+ - \eta_\nu^-) - \eta_\nu^+ - \eta_\nu^-] - 2u_\nu v_\nu (1 - \eta_\nu^+ - \eta_\nu^-) \left(\sum_{\mu>0} u_\mu v_\mu \right) \right\} \\
& (\alpha_\nu^+ \alpha_\nu + \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\nu}}) \tag{1.36}
\end{aligned}$$

Les termes H_{02} et H_{20} , peuvent être mis sous la forme :

$$H_2 = H_{02} + H_{20} \tag{1.37}$$

avec

$$H_{20} = H_{02}^+ \tag{1.38}$$

qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
H_{20} = & \sum_{\nu>0} \{ [\xi_\nu^+ + \xi_\nu^- - G [(u_\nu^2 - v_\nu^2) (\eta_\nu^+ + \eta_\nu^- - 1) + 1]] u_\nu v_\nu \\
& - G(u_\nu^2 - v_\nu^2) \left[\sum_{\mu>0} u_\mu v_\mu (1 - \eta_\mu^+ - \eta_\mu^-) \right] \} \alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\nu}}^+ \tag{1.39}
\end{aligned}$$

Les cinq derniers termes de l'équation (1.32) forment la partie résiduelle de l'hamiltonien H' , que l'on note :

$$H_{res} = H_{22} + H_{13} + H_{31} + H_{04} + H_{40} \tag{1.40}$$

Nous avons pour H_{22} l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
H_{22} = & -G \sum_{\nu\mu>0} \{ (u_\nu^2 v_\mu^2 + v_\nu^2 v_\mu^2) \alpha_\nu^+ \alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\mu}}^+ \alpha_\mu \\
& + u_\nu v_\nu u_\mu v_\mu (\alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}}^+ \alpha_{\bar{\nu}} + \alpha_\nu^+ \alpha_\mu^+ \alpha_\mu \alpha_\nu + 2\alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\mu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}}^+ \alpha_\nu) \}
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Pour H_{13} et H_{31} on a :

$$H_3 = H_{31} + H_{13} \tag{1.42}$$

avec

$$H_{31} = H_{13}^+$$

qui prend la forme suivante :

$$H_{31} = G \sum_{\nu\mu>0} u_\mu v_\mu (u_\nu^2 - v_\nu^2) \alpha_\nu^+ \alpha_\nu^+ (\alpha_{\bar{\mu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}} + \alpha_\mu^+ \alpha_\mu) \tag{1.43}$$

Concernant H_{04} et H_{40} , ils sont tels que :

$$H_4 = H_{40} + H_{04} \tag{1.44}$$

où

$$H_{40} = H_{04}^+ \tag{1.45}$$

et :

$$H_{40} = G \sum_{\nu\mu>0} u_\nu^2 v_\mu^2 \alpha_\nu^+ \alpha_\nu^+ \alpha_\mu^+ \alpha_{\bar{\mu}}^+ \tag{1.46}$$

L'approximation BCS, appelée également approximation des quasi-particules indépendantes, consiste à négliger le terme H_{res} défini dans l'équation (1.40).

Par la suite, en remplaçant chaque terme dans l'équation (1.32) par son expression, puis

en calculant la valeur moyenne de H' , on aboutit à :

$$\begin{aligned}
H' = & \sum_{\nu>0} v_\nu^2 (\xi_\nu^+ + \xi_\nu^-) + \sum_{\nu>0} \eta_\nu^+ (\xi_\nu^+ u_\nu^2 - \xi_\nu^- v_\nu^2) + \sum_{\nu>0} \eta_\nu^- (\xi_\nu^- u_\nu^2 - \xi_\nu^+ v_\nu^2) \\
& - G \left[\sum_{\nu>0} u_\nu v_\nu (1 - \eta_\nu^+ - \eta_\nu^-) \right]^2
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Afin de déterminer les probabilités d'occupation et d'inoccupation des quasi-particules ainsi que les équations du gap, nous devons passer par une étape intermédiaire qui est la minimisation de la valeur moyenne de l'équation (1.47) par rapport à u_ν et v_ν . La minimisation de l'expression (1.47) conduit à l'équation :

$$u_i v_i (\xi_i^+ + \xi_i^-) - G (u_i^2 - v_i^2) \sum_{\nu>0} u_\nu v_\nu (1 - \eta_\nu^+ - \eta_\nu^-) = 0; \quad \forall i \tag{1.48}$$

où l'on a utilisé le fait que u_ν et v_ν sont liés par la relation (1.15) qui conduit à :

$$\frac{du_\nu}{dv_\nu} = -\frac{v_\nu}{u_\nu} \tag{1.49}$$

L'expression (1.48) devient alors :

$$u_\nu v_\nu (\xi_\nu^+ + \xi_\nu^-) = (u_\nu^2 - v_\nu^2) \Delta \quad \forall \nu \tag{1.50}$$

où l'on a noté par :

$$\Delta = G \sum_{\nu>0} u_\nu v_\nu (1 - \eta_\nu^+ - \eta_\nu^-) \tag{1.51}$$

celle-ci étant la demi-largeur du gap.

La résolution du système d'équations (1.15) et (1.50) ayant pour inconnues les u_ν et v_ν , conduit aux relations habituelles :

$$\left. \begin{array}{l} u_\nu^2 \\ v_\nu^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{E_\nu} \right) \quad \forall \nu \tag{1.52}$$

où :

$$E_\nu = \sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda)^2 + \Delta^2} \quad (1.53)$$

est l'énergie des quasi-particules d'un système de protons ou neutrons en l'absence de la prise en considération de la conservation en moyenne de la projection du moment angulaire sur l'axe Oz .

En substituant ces relations dans l'équation (1.50), nous obtenons :

$$u_\nu v_\nu = \frac{\Delta}{2E_\nu} \quad (1.54)$$

qui substituée à son tour dans l'équation (1.51) donne :

$$\frac{2}{G} = \sum_{\nu>0} \frac{(1 - \eta_\nu^+ - \eta_\nu^-)}{E_\nu} \quad (1.55)$$

L'équation (1.55) est l'équation du gap sous sa forme la plus générale et qui est la plus connue.

On peut à présent déduire les énergies des quasi-particules. La substitution des équations (1.52) et (1.55) dans l'équation (1.47), conduit à :

$$H' = \sum_{\nu>0} (\varepsilon_\nu - \lambda - E_\nu) + \sum_{\nu>0} \eta_\nu^+ E_\nu^+ + \sum_{\nu>0} \eta_\nu^- E_\nu^- + \frac{\Delta^2}{G} \quad (1.56)$$

où :

$$E_\nu^\pm = E_\nu \mp \gamma m_\nu \quad (1.57)$$

Les moyennes η_ν^+ et η_ν^- définies dans la représentation quasi-particules sont remplacées par les nombres d'occupations [52] donnés par la statistique de Fermi-Dirac, soit :

$$\begin{cases} \eta_\nu^+ = \frac{1}{1 + e^{\beta E_\nu^+}} \\ \eta_\nu^- = \frac{1}{1 + e^{\beta E_\nu^-}} \end{cases} \quad (1.58)$$

E_ν^+ et E_ν^- sont les énergies des quasi-particules et $\beta = \frac{1}{T}$ est l'inverse de la température.

Sachant que :

$$\frac{1}{1 + e^{\beta E_\nu^\pm}} = \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \frac{\beta}{2} E_\nu^\pm \right) \quad (1.59)$$

L'équation (1.55) devient :

$$f(\Delta, \lambda, \gamma, \beta) = \frac{2}{G} = \sum_{\nu>0} \frac{1}{2E_\nu} \left\{ \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) + \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) \right\} \quad (1.60)$$

Les quantités Δ , λ , γ et β sont reliées entre elles par l'équation du gap ci-dessus.

La valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules s'écrit :

$$n_0 = \sum_{\nu>0} \{ (u_\nu^2 - v_\nu^2) (\eta_\nu^+ + \eta_\nu^-) + 2v_\nu^2 \} \quad (1.61)$$

En remplaçant u_ν , v_ν et η_ν^+ , η_ν^- par leurs expressions, on obtient :

$$n_0 = \sum_{\nu>0} \left[1 - \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{2E_\nu} \left\{ \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) + \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) \right\} \right] \quad (1.62)$$

Concernant l'opérateur moment angulaire, sa valeur moyenne s'écrit :

$$M = \sum_{\nu>0} m_\nu \left[(u_\nu^2 + v_\nu^2) (\eta_\nu^+ - \eta_\nu^-) \right] \quad (1.63)$$

En substituant η_ν^+ , η_ν^- par leurs expressions données précédemment ainsi que celles de u_ν et v_ν , nous aboutissons à l'expression suivante de M :

$$M = \sum_{\nu>0} m_\nu \left(\frac{1}{1 + e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)}} - \frac{1}{1 + e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)}} \right) \quad (1.64)$$

qui prend la forme finale donnée par :

$$M = \sum_{\nu>0} \frac{m_\nu}{2} \left[\tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) - \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) \right] \quad (1.65)$$

1.5 Grande fonction partition

Dans le but de déterminer la grande fonction partition, nous devons utiliser l'équation (1.56). La grande fonction partition et ses dérivées peuvent être utilisées pour déterminer les quantités thermodynamiques et statistiques du système. Cette fonction est donnée par :

$$Z = e^{\Omega} = Tr e^{-\beta H'} \quad (1.66)$$

où Ω est le logarithme népérien de la grande fonction partition; Tr désigne la trace habituellement exprimée dans la base des états propres de H' .

Ω est donné par :

$$\Omega = Log e^{-\beta \left[\sum_{\nu>0} (\varepsilon_{\nu} - \lambda - E_{\nu}) + \frac{\Delta^2}{G} \right]} + Log Tr e^{-\beta \left[\sum_{\nu>0} \eta_{\nu}^{+}(E_{\nu} - \gamma m_{\nu}) + \sum_{\nu>0} \eta_{\nu}^{-}(E_{\nu} + \gamma m_{\nu}) \right]} \quad (1.67)$$

L'équation précédente peut être écrite sous la forme suivante :

$$\Omega = -\beta \left[\sum_{\nu>0} (\varepsilon_{\nu} - \lambda - E_{\nu}) + \frac{\Delta^2}{G} \right] + Log Tr e^{-\beta \sum_{\nu>0} \eta_{\nu}^{+}(E_{\nu} - \gamma m_{\nu})} + Log Tr e^{-\beta \sum_{\nu>0} \eta_{\nu}^{-}(E_{\nu} + \gamma m_{\nu})} \quad (1.68)$$

η_{ν}^{-} , η_{ν}^{+} sont respectivement les valeurs moyennes des opérateurs nombre d'occupation de l'état $|\nu\rangle$ et $|\tilde{\nu}\rangle$ par une quasi particule. Les seules valeurs possibles de ces valeurs moyennes sont donc les valeurs 0 et 1, alors l'équation (1.68) peut prendre la forme suivante :

$$\Omega = -\beta \sum_{\nu>0} (\varepsilon_{\nu} - \lambda - E_{\nu}) + \sum_{\nu>0} Log [1 + e^{-\beta(E_{\nu} - \gamma m_{\nu})}] + \sum_{\nu>0} Log [1 + e^{-\beta(E_{\nu} + \gamma m_{\nu})}] - \beta \frac{\Delta^2}{G} \quad (1.69)$$

1.6 Densité de niveaux et grandeurs statistiques

1.6.1 Cas où $\gamma \neq 0$, $T \neq 0$

La densité de niveaux du système est [17] :

$$\rho(E, N, M) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^3 \oint d\beta \oint d\alpha \oint d\mu e^S \quad (1.70)$$

où :

$$\alpha = \beta\lambda \quad ; \quad \mu = \beta\gamma \quad (1.71)$$

L'entropie S d'un système est une grandeur qui permet de caractériser sa capacité à subir des transformations spontanées : plus grande est la valeur de l'entropie, plus faible est la capacité de ce système à se transformer. Le second principe de la thermodynamique précise que l'entropie d'un système fermé ne peut qu'augmenter au cours du temps. Cela signifie qu'en évoluant il perd nécessairement de sa capacité à évoluer davantage. Un système fermé tend donc, naturellement, vers un état d'entropie maximale, dans lequel toute transformation spontanée lui deviendra impossible. L'entropie d'un système est donc une grandeur qui mesure le degré de désordre [55] d'un système par rapport à son état initial, et est donnée par :

$$S = \Omega - \alpha N - \mu M + \beta E \quad (1.72)$$

L'intégrale de Darwin-Fowler de l'équation (1.70) fixe l'énergie, le nombre de particules et la projection du moment angulaire dans la grande fonction partition. L'intégrale précédente peut être évaluée avec une bonne approximation au moyen de la méthode du col. L'exposant S a un point de selle lorsque :

$$n_0 = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} \quad ; \quad M = \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \quad ; \quad E' = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}\right)_{\alpha=cte} \quad (1.73)$$

La densité de niveaux est donnée par [17] :

$$\rho(N, E', M) = \frac{e^S}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}}} \quad (1.74)$$

où :

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha \partial \mu} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta \partial \mu} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta^2} \end{vmatrix} \quad (1.75)$$

S et D doivent être évalués au col.

Notons que les équations (1.72) et (1.73) définissent également les grandeurs thermodynamiques du système (le nombre de particules, la projection du moment angulaire, l'énergie du système et l'entropie du système). Elles peuvent être calculées explicitement comme suit :

$$n_0 = \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} \quad ; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = \frac{1}{\beta} \quad (1.76)$$

Or :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = \beta \sum_{\nu > 0} \left[1 - \frac{\partial E_\nu}{\partial \lambda} \left(1 - \frac{1}{1 + e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)}} - \frac{1}{1 + e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)}} \right) \right] \quad (1.77)$$

où :

$$\frac{\partial E_\nu}{\partial \lambda} = \frac{\lambda - \varepsilon_\nu}{E_\nu} \quad (1.78)$$

Les différents calculs conduisent au même résultat que celui donné par l'expression (1.62).

Concernant le moment angulaire, il devient :

$$M = \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} \frac{\partial \Omega}{\partial \gamma} \quad ; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \mu} = \frac{1}{\beta} \quad (1.79)$$

où :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma} = \beta \sum_{\nu > 0} m_\nu \left\{ \frac{1}{1 + e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)}} - \frac{1}{1 + e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)}} \right\} \quad (1.80)$$

Remarquons que l'expression de M obtenue (1.79) est identique à celle trouvée précédemment et est donnée par (1.65).

L'expression de l'énergie donnée par (1.73) prend la forme suivante :

$$E' = \sum_{\nu>0} \left[\varepsilon_\nu - \left(\frac{\partial \beta E_\nu}{\partial \beta} \right)_{\alpha=cte} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)}} - \frac{1}{1 + e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)}} \right\} \right] + \frac{\Delta^2}{G} \quad (1.81)$$

où :

$$\left(\frac{\partial \beta E_\nu}{\partial \beta} \right)_{\alpha=cte} = \frac{\varepsilon_\nu (\varepsilon_\nu - \lambda) + \Delta^2}{E_\nu} + \frac{\beta \Delta}{E_\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial \beta} \quad (1.82)$$

qui devient :

$$E' = \sum_{\nu>0} \left[\varepsilon_\nu - \frac{\varepsilon_\nu (\varepsilon_\nu - \lambda)}{2E_\nu} \left\{ \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) + \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) \right\} \right] - \frac{\Delta^2}{G} \quad (1.83)$$

Afin d'obtenir l'expression de l'entropie S , nous substituons les équations (1.62), (1.65) et (1.83) dans l'équation (1.72). On obtient :

$$S = \sum_{\nu>0} \text{Log} [1 + \exp(-\beta(E_\nu - \gamma m_\nu))] + \sum_{\nu>0} \text{Log} [1 + \exp(-\beta(E_\nu + \gamma m_\nu))] + \beta \sum_{\nu>0} \left[\frac{E_\nu - \gamma m_\nu}{1 + \exp(\beta(E_\nu - \gamma m_\nu))} + \frac{E_\nu + \gamma m_\nu}{1 + \exp(\beta(E_\nu + \gamma m_\nu))} \right] \quad (1.84)$$

La capacité calorifique d'un corps est une grandeur permettant de quantifier la possibilité qu'a un corps d'absorber ou restituer de l'énergie par échange thermique au cours d'une transformation pendant laquelle sa température varie. Elle est définie par [44] :

$$C = T \frac{dS}{dT} = -\beta \frac{dS}{d\beta} \quad (1.85)$$

$$= \frac{dE}{dT} \quad (1.86)$$

Tous calculs faits, cette dernière prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
C = & \frac{1}{4} \sum_{\nu>0} \frac{(E_\nu - \gamma m_\nu)}{\cosh^2 \frac{\beta}{2}(E_\nu - \gamma m_\nu)} \left[\beta^2 (E_\nu - \gamma m_\nu) + \beta^3 \frac{\partial E_\nu}{\partial \beta} \right] \\
& + \frac{1}{4} \sum_{\nu>0} \frac{(E_\nu + \gamma m_\nu)}{\cosh^2 \frac{\beta}{2}(E_\nu + \gamma m_\nu)} \left[\beta^2 (E_\nu + \gamma m_\nu) + \beta^3 \frac{\partial E_\nu}{\partial \beta} \right] \quad (1.87)
\end{aligned}$$

Après avoir dérivé l'équation du gap donnée par l'expression (1.60) par rapport à β , on aboutit à :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \beta} = \frac{\frac{1}{4} \sum_{\nu>0} \frac{1}{E_\nu} \left\{ \frac{E_\nu - \gamma m_\nu}{\cosh^2 \frac{\beta}{2}(E_\nu - \gamma m_\nu)} + \frac{E_\nu + \gamma m_\nu}{\cosh^2 \frac{\beta}{2}(E_\nu + \gamma m_\nu)} \right\}}{\frac{1}{2} \sum_{\nu>0} \frac{\Delta}{E_\nu^3} \left\{ \tanh \frac{\beta}{2}(E_\nu - \gamma m_\nu) + \tanh \frac{\beta}{2}(E_\nu + \gamma m_\nu) \right\} - \frac{1}{4} \sum_{\nu>0} \frac{\Delta \beta}{E_\nu^2} \Gamma} \quad (1.88)$$

où l'on a utilisé :

$$\frac{\partial E_\nu}{\partial \beta} = \frac{\Delta}{E_\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial \beta} \quad (1.89)$$

et :

$$\Gamma = \frac{1}{\cosh^2 \frac{\beta}{2}(E_\nu - \gamma m_\nu)} + \frac{1}{\cosh^2 \frac{\beta}{2}(E_\nu + \gamma m_\nu)} \quad (1.90)$$

1.6.2 Cas où $\gamma = 0$, $T \neq 0$

Les équations précédentes qui représentent les grandeurs thermodynamiques du système peuvent être étudiées de la manière suivante dans le cas où $\gamma = 0$.

L'équation (1.62) qui représente le nombre de particules devient :

$$n_0 = \sum_{\nu>0} \left[1 - \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{E_\nu} \tanh \left(\frac{\beta}{2} E_\nu \right) \right] \quad (1.91)$$

Concernant le moment angulaire donné par l'équation (1.65), il devient nul dans ce cas ($\gamma = 0$).

L'énergie du système, prend la forme :

$$E' = \sum_{\nu>0} \varepsilon_\nu \left[1 - \frac{(\varepsilon_\nu - \lambda)}{E_\nu} \tanh \left(\frac{\beta}{2} E_\nu \right) \right] - \frac{\Delta^2}{G} \quad (1.92)$$

Les expressions de la capacité calorifique et l'entropie du système données par les équations (1.84) et (1.87) respectivement deviennent :

$$S = 2 \sum_{\nu>0} \text{Log} [1 + \exp(-\beta E_\nu)] + 2\beta \sum_{\nu>0} \frac{E_\nu}{1 + \exp(\beta E_\nu)} \quad (1.93)$$

et

$$C = \frac{1}{2} \sum_{\nu>0} \frac{E_\nu}{\cosh^2 \left(\frac{\beta}{2} E_\nu \right)} \left[\beta^2 E_\nu + \beta^3 \frac{\partial E_\nu}{\partial \beta} \right] \quad (1.94)$$

où :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \beta} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{\nu>0} \frac{1}{\cosh^2 \left(\frac{\beta}{2} E_\nu \right)}}{\sum_{\nu>0} \frac{\Delta}{E_\nu^3} \tanh \left(\frac{\beta}{2} E_\nu \right) - \sum_{\nu>0} \frac{\Delta \beta}{2E_\nu^2} \frac{1}{\cosh^2 \left(\frac{\beta}{2} E_\nu \right)}} \quad (1.95)$$

L'équation du gap donnée par l'expression (1.60) prend la forme suivante :

$$\frac{2}{G} = \sum_{\nu>0} \frac{1}{E_\nu} \left\{ \tanh \left(\frac{\beta}{2} E_\nu \right) \right\} \quad (1.96)$$

1.6.3 Cas où $\gamma = 0$, $T = 0$

La condition sur le nombre de particules n_0 est donnée par :

$$n_0 = \sum_{\nu>0} \left[1 - \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{E_\nu} \right] \quad (1.97)$$

et l'énergie du système est donnée par l'expression :

$$E'_0 = \sum_{\nu>0} \varepsilon_\nu \left[1 - \frac{(\varepsilon_\nu - \lambda)}{E_\nu} \right] - \frac{\Delta^2}{G} \quad (1.98)$$

En ce qui concerne l'entropie et la capacité calorifique, elles deviennent nulles : $S = C = 0$.

Par ailleurs, l'équation du gap prend la forme simple :

$$\frac{2}{G} = \sum_{\nu>0} \frac{1}{E_\nu} \quad (1.99)$$

Il est intéressant d'introduire l'énergie d'excitation. Pour cela, on définit cette grandeur par :

$$E' - E'_0 = \sum_{\nu>0} \varepsilon_\nu \frac{(\varepsilon_\nu - \lambda)}{E_\nu} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) + \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) \right] \right\} \quad (1.100)$$

et devient pour $\gamma = 0$:

$$E' - E'_0 = \sum_{\nu>0} \varepsilon_\nu \frac{(\varepsilon_\nu - \lambda)}{E_\nu} \left\{ 1 - \tanh \left(\frac{\beta}{2} E_\nu \right) \right\}$$

1.6.4 Dérivées partielles du deuxième ordre

Les différents calculs des dérivées secondes de Ω par rapport aux paramètres de Lagrange μ , α , β qui entrent dans le dénominateur de l'expression de la densité de niveaux donnée par l'équation (1.75) sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu^2} &= \frac{1}{4} \sum_{\nu>0} m_\nu^2 \left[\operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) + \operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) \right] \\ &\quad - \beta \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \mu} \sum_{\nu>0} \frac{m_\nu}{4E_\nu} \left[\operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) - \operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) \right] \end{aligned} \quad (1.101)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha^2} = \sum_{\nu>0} (\varepsilon_\nu - \lambda)^2 a_\nu + \Delta^2 \sum_{\nu>0} b_\nu - \beta \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} \sum_{\nu>0} (\varepsilon_\nu - \lambda) (a_\nu - b_\nu) \quad (1.102)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta^2} &= \lambda \Delta^2 \sum_{\nu > 0} \varepsilon_\nu b_\nu + \Delta^2 \sum_{\nu > 0} \varepsilon_\nu (\varepsilon_\nu - \lambda) a_\nu + \sum_{\nu > 0} \varepsilon_\nu^2 (\varepsilon_\nu - \lambda)^2 a_\nu \\
&\quad + \beta \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \beta} \sum_{\nu > 0} [\varepsilon_\nu (\varepsilon_\nu - \lambda) (a_\nu - b_\nu) + \frac{2}{\beta G}]
\end{aligned} \tag{1.103}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha \partial \mu} &= \frac{1}{4} \sum_{\nu > 0} \frac{m_\nu (\varepsilon_\nu - \lambda)}{E_\nu} [\operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) - \operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu)] \\
&\quad + \beta \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} \sum_{\nu > 0} \frac{m_\nu}{4 E_\nu} [\operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) - \operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu)]
\end{aligned} \tag{1.104}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta \partial \mu} &= \frac{1}{4} \sum_{\nu > 0} \frac{m_\nu}{E_\nu} \{ \varepsilon_\nu (\varepsilon_\nu - \lambda) + \Delta^2 \} [\operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) - \operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu)] \\
&\quad - \beta \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \beta} \sum_{\nu > 0} \frac{m_\nu}{4 E_\nu} [\operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) - \operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu)]
\end{aligned} \tag{1.105}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta \partial \alpha} &= -\lambda \Delta^2 \sum_{\nu > 0} b_\nu - \sum_{\nu > 0} \varepsilon_\nu (\varepsilon_\nu - \lambda)^2 a_\nu - \Delta^2 \sum_{\nu > 0} \varepsilon_\nu (\varepsilon_\nu - \lambda) a_\nu \\
&\quad - \beta \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \beta} \sum_{\nu > 0} (\varepsilon_\nu - \lambda) (a_\nu - b_\nu)
\end{aligned} \tag{1.106}$$

où $\frac{\partial \Delta}{\partial \beta}$, $\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial \Delta}{\partial \mu}$ sont donnée ci-dessous.

et les quantités a_ν et b_ν sont données par les expressions suivantes :

$$a_\nu = \frac{1}{4E_\nu^2} \left\{ \operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) + \operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) \right\} \tag{1.107}$$

$$b_\nu = \frac{1}{2\beta E_\nu^3} \left\{ \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) + \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) \right\} \tag{1.108}$$

Les détails de ces calculs se trouvent en Annexe B.

1.6.5 Dérivées de Δ par rapport aux multiplicateurs de Lagrange

Les dérivées de second ordre données par les équations (1.101) à (1.106) contiennent les dérivées du premier ordre de Δ par rapport aux paramètres de Lagrange. Nous procédons maintenant au calcul de ces dérivées. En effet, Δ est défini comme une fonction implicite en β , α et μ . Les dérivées partielles du premier ordre de Δ peuvent être donc calculées explicitement. Tous calculs faits, elles sont données par :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \beta} = \frac{\lambda \sum_{\nu > 0} (\varepsilon_\nu - \lambda) b_\nu - \sum_{\nu > 0} \varepsilon_\nu (\varepsilon_\nu - \lambda) a_\nu - \Delta^2 \sum_{\nu > 0} a_\nu}{\beta \Delta \sum_{\nu > 0} (a_\nu - b_\nu)} \quad (1.109)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \mu} = - \frac{\frac{1}{4} \sum_{\nu > 0} m_\nu E_\nu^{-1} \left\{ \operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) - \operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) \right\}}{\beta \Delta \sum_{\nu > 0} (a_\nu - b_\nu)} \quad (1.110)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = - \frac{\sum_{\nu > 0} (\varepsilon_\nu - \lambda) (a_\nu - b_\nu)}{\beta \Delta \sum_{\nu > 0} (a_\nu - b_\nu)} \quad (1.111)$$

où a_ν et b_ν sont donnés par les équations (1.107) et (1.108). Les détails de ce calcul se trouvent en Annexe B.

Chapitre 2

Etude des corrélations d'appariement par le formalisme de l'intégrale fonctionnelle

2.1 Introduction

A l'heure actuelle, deux méthodes de description des systèmes quantiques coexistent. La plus ancienne est la quantification canonique dont les principes fondamentaux ont été établis essentiellement entre 1922 et 1927 par Bohr, Dirac, de Broglie, Heisenberg, Jordan, Pauli et Schrödinger. Cette méthode a remporté un franc succès de par ses multiples utilisations par exemple pour expliquer le comportement de la matière condensée notamment la supraconductivité, la superfluidité,... etc.

Les notions de base de la mécanique quantique sont connues. Il s'agit de la notion d'espace de Hilbert sur lequel agissent des opérateurs correspondant aux différentes observables (opérateur position, d'impulsion, d'évolution ou la matrice densité) et des fonctions d'ondes.

A partir de l'opérateur d'évolution de la mécanique quantique, Feynman a développé en 1948 la seconde méthode dite d'intégrale de chemin [45–48] utilisée dans la mécanique

statistique. Cette dernière s'intéresse aux propriétés moyennes d'un système pris sur un ensemble d'états.

La représentation des éléments de matrice d'un opérateur d'évolution dans les intégrales de chemin est basée sur deux propriétés fondamentales qui sont : la propriété caractéristique des systèmes isolés ou sans influence sur leur environnement et la localité de l'évolution pour des intervalles de temps courts. Ces deux propriétés sont satisfaites à la fois par l'opérateur unitaire $e^{-itH/\hbar}$ qui décrit l'évolution en mécanique quantique et l'opérateur statistique $e^{-\beta H}$ qui est la matrice densité obtenue de la substitution de $\frac{it}{\hbar}$ par β .

Le formalisme d'intégrales de chemin [27–29] développé dans le cadre de la mécanique quantique conduit à représenter les quantités physiques par des moyennes.

Nous proposons dans le présent chapitre d'étudier l'effet de ces corrélations par le formalisme des intégrales de chemin à température finie. Pour cela nous considérerons l'hamiltonien du système en tenant compte de deux contraintes : l'une sur le nombre de particules N et l'autre sur le moment angulaire J_z . Après la diagonalisation de l'hamiltonien du système, on obtient la transformation de Bogoliubov-Valatin. Sachant que toutes les propriétés thermodynamiques du système peuvent être déterminées à l'aide de la grande fonction partition Z , cette dernière sera établie dans le cadre du formalisme des intégrales de chemin. Ceci nous permettra de déduire les équations du gap correspondantes.

2.2 Hamiltonien du système

On considère le même hamiltonien auxiliaire donné par l'équation (1.29), qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$H' = H'_0 + H_1 \tag{2.1}$$

où :

$$H'_0 = H_0 - \lambda N - \gamma J_z \tag{2.2}$$

H_0 est donné par l'équation (1.2) et H_1 est donnée par :

$$H_1 = -G \sum_{\nu\mu>0} a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+ a_{\bar{\mu}} a_\mu \quad (2.3)$$

qui représente le terme tenant compte des interactions résiduelles d'appariement.

L'hamiltonien H' s'écrit alors :

$$H' = \sum_{\nu>0} \xi_\nu^+ a_\nu^+ a_\nu + \sum_{\nu>0} \xi_\nu^- a_{\bar{\nu}}^+ a_{\bar{\nu}} - G \sum_{\nu\mu>0} a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+ a_{\bar{\mu}} a_\mu \quad (2.4)$$

avec les notations :

$$\xi_\nu^+ = (\varepsilon_\nu - \lambda - \gamma m_\nu) \quad ; \quad \xi_\nu^- = (\varepsilon_\nu - \lambda + \gamma m_\nu) \quad (2.5)$$

2.3 Grande fonction partition

La grande fonction partition de la statistique quantique contient toutes les informations sur les propriétés thermodynamiques du système. Toutes les observables du système quantique se déduisent de la grande fonction partition. Nous supposons que le système nucléaire chaud, en équilibre thermodynamique, est correctement décrit par la grande fonction partition Z définie par :

$$Z = Tr \left\{ e^{-\beta H'} \right\} \quad (2.6)$$

où $\beta = \frac{1}{T}$ est l'inverse de la température du système, et Tr désigne la trace habituellement exprimée dans la base des états propres de l'hamiltonien H' , ou dans n'importe quelle autre base.

Pour des raisons de simplicité, nous traitons la thermodynamique du gaz de Fermi-Dirac à partir de l'ensemble grand-canonique, vu que les formules des propriétés thermodynamiques du système s'écrivent en fonction de la trace.

On note par $\rho_{H'}$ la matrice densité définie par :

$$\rho_{H'} = e^{-\beta H'} \quad (2.7)$$

qu'on peut écrire également sous la forme :

$$\rho_{H'} = e^{-\beta H'_0} S(\beta) \quad (2.8)$$

où $S(\beta)$ est l'opérateur donné par :

$$S(\beta) = e^{\beta H'_0} e^{-\beta H'} \quad (2.9)$$

On a donc :

$$\rho_{H'} = \rho_{H'_0} S(\beta) \quad (2.10)$$

Compte-tenu de l'équation (2.8), la grande fonction partition s'écrit :

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H'_0} S(\beta) \quad (2.11)$$

$$= \text{Tr} \left\{ e^{-\beta H'_0} \right\} \frac{\text{Tr} \left\{ e^{-\beta H'_0} S(\beta) \right\}}{\text{Tr} \left\{ e^{-\beta H'_0} \right\}} \quad (2.12)$$

D'après la définition de la moyenne dans l'ensemble grand canonique, l'équation précédente s'écrit donc :

$$Z = Z_0 \langle S(\beta) \rangle_0 \quad (2.13)$$

avec la notation :

$$Z_0 = \text{Tr} \left\{ e^{-\beta H'_0} \right\} \quad (2.14)$$

qui est la grande fonction partition du système de particules sans interaction et

$$\langle S(\beta) \rangle_0 = \frac{\text{Tr} \left\{ e^{-\beta H'_0} S(\beta) \right\}}{\text{Tr} \left\{ e^{-\beta H'_0} \right\}} \quad (2.15)$$

est la valeur moyenne de l'opérateur $S(\beta)$ dans l'ensemble décrit par l'hamiltonien H_0 . On s'intéresse maintenant à l'équation d'évolution de $S(\beta)$. Pour cela, dérivons l'équation (2.9) par rapport à β , on obtient :

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = H'_0 S(\beta) - e^{\beta H'_0} H' e^{-\beta H'} \quad (2.16)$$

H'_0 et H' ne commutent pas, donc :

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = e^{\beta H'_0} (H'_0 - H') e^{-\beta H'} \quad (2.17)$$

D'après les équations (2.1) et (2.17), on obtient :

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = -e^{\beta H'_0} H_1 e^{-\beta H'_0} S(\beta) \quad (2.18)$$

d'où :

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = -H_1(\beta) S(\beta) \quad (2.19)$$

La notation $\mathcal{O}(\tau)$ désigne la représentation de Heisenberg de l'opérateur \mathcal{O} pour le temps imaginaire τ , soit :

$$\mathcal{O}(\tau) = \exp(\tau H'_0) \mathcal{O} \exp(-\tau H'_0) \quad (2.20)$$

En tenant compte de la condition initiale $S(0) = 1$, l'équation différentielle (2.19) admet pour solution :

$$S(\beta) = \mathbf{1} - \int_0^\beta H_1(\tau_1) S(\tau_1) d\tau_1 \quad (2.21)$$

On voit que $S(\beta)$ est donnée sous forme implicite par l'équation intégrale ci-dessus. La solution de cette équation est généralement obtenue par itération en utilisant la méthode des approximation successives.

En itérant, on obtient la série :

$$\begin{aligned}
S(\beta) &= \mathbf{1} - \int_0^\beta H_1(\tau_1) d\tau_1 + \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 H_1(\tau_1) H_1(\tau_2) \\
&\quad + \dots + (-1)^n \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n H_1(\tau_n) \dots H_1(\tau_{n-1})
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$= \mathbf{1} + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n H_1(\tau_1) \dots H_1(\tau_n) \tag{2.23}$$

Le deuxième terme de la somme de l'équation (2.22) :

$$I_2 = \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 H_1(\tau_1) H_1(\tau_2) \tag{2.24}$$

devient en tenant compte de la propriété suivante :

$$\int_a^b dx \int_a^x dy f(x, y) = \int_a^b dy \int_y^b dx f(x, y) \quad , \tag{2.25}$$

$$I_2 = \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 H_1(\tau_1) H_1(\tau_2) = \int_0^\beta d\tau_2 \int_{\tau_2}^\beta d\tau_1 H_1(\tau_1) H_1(\tau_2) \tag{2.26}$$

En changeant les variables d'intégration du second membre ($\tau_1 \rightarrow \tau_2, \tau_2 \rightarrow \tau_1$), on trouve :

$$I_2 = \int_0^\beta d\tau_1 \int_{\tau_1}^\beta d\tau_2 H_1(\tau_2) H_1(\tau_1) \tag{2.27}$$

Compte-tenu de (2.24) et (2.27) :

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau_1 \left[\int_0^{\tau_1} d\tau_2 H_1(\tau_1) H_1(\tau_2) + \int_{\tau_1}^\beta d\tau_2 H_1(\tau_2) H_1(\tau_1) \right] \tag{2.28}$$

On définit le produit chronologique T_τ par :

$$T_\tau \{A(\tau_1) . B(\tau_2)\} = \begin{cases} A(\tau_1) . B(\tau_2) & \text{si } \tau_1 > \tau_2 \\ -B(\tau_2) A(\tau_1) & \text{si } \tau_2 > \tau_1 \end{cases} \quad (2.29)$$

dont les facteurs sont rangés par ordre croissant en fonction du paramètre τ , de droite à gauche. L'expression (2.28) devient :

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 T_\tau \{H_1(\tau_1) . H_1(\tau_2)\} \quad (2.30)$$

L'équation (2.21) devient :

$$S(\beta) = \mathbf{1} - \int_0^\beta H_1(\tau_1) d\tau_1 + \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 T_\tau \{H_1(\tau_1) . H_1(\tau_2)\} S(\tau_2) \quad (2.31)$$

En généralisant ce résultat aux autres intégrales triple, quadruple, ...n-uple, l'équation (2.23) devient :

$$S(\beta) = \mathbf{1} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 \dots \int_0^\beta d\tau_n T_\tau \{H_1(\tau_1) . H_1(\tau_2) \dots H_1(\tau_n)\} \quad (2.32)$$

d'où :

$$S(\beta) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 \dots \int_0^\beta d\tau_n T_\tau \{H_1(\tau_1) . H_1(\tau_2) \dots H_1(\tau_n)\} \quad (2.33)$$

Ce développement est celui d'une exponentielle qu'on peut écrire de la manière suivante :

$$S(\beta) = T_\tau \left\{ \exp\left(-\int_0^\beta H_1(\tau) d\tau\right) \right\} \quad (2.34)$$

Afin de traiter l'interaction résiduelle H_1 , il est nécessaire d'utiliser la décomposition introduite précédemment donnée par l'équation (2.8) et comme H_0 et H_1 ne commutent pas, l'expression de l'opérateur densité ρ_H devient :

$$\rho_H = \exp(-\beta H'_0) T_\tau \exp \left[- \int_0^\beta d\tau H_1(\tau) \right] \quad (2.35)$$

Remplaçons, à présent, l'intégrale sur τ par une sommation discrète, en divisant l'intervalle $[0, \beta]$ en N intervalles égaux puis en faisant tendre N vers l'infini :

$$\int_0^\beta d\tau H_1(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\beta}{N} \sum_{i=1}^N H_1(\tau_i) \quad (2.36)$$

$S(\beta)$ devient alors :

$$S(\beta) = T_\tau \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left\{ - \frac{\beta}{N} \sum_{i=1}^N H_1(\tau_i) \right\} \quad (2.37)$$

Soit :

$$S(\beta) = T_\tau \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \exp \left\{ - \frac{\beta}{N} H_1(\tau_i) \right\} \right] \quad (2.38)$$

La grande fonction partition devient donc :

$$Z = Tr \left\{ \exp(-\beta H'_0) T_\tau \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \exp \left\{ - \frac{\beta}{N} H_1(\tau_i) \right\} \right] \right\} \quad (2.39)$$

Le but de cette partie est d'établir les équations du gap du modèle BCS par la méthode des intégrales de chemin. Pour une interaction de type (2.3), la grande fonction partition du système s'écrit :

$$Z = Tr \left\{ \exp(-\beta H'_0) T_\tau \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \exp \left\{ \beta G \sum_{v,\mu>0} \frac{a_\nu^+ a_\nu^+ a_{\bar{\mu}}^- a_\mu^-}{N} \right\} \right] \right\} \quad (2.40)$$

L'interaction d'appariement étant une interaction à deux corps, elle peut être remplacée par l'interaction d'un corps avec un champ externe, au moyen de la transformation de

Hubbard-Stratonovich [49].

2.3.1 Transformation de Hubbard-Stratonovich

L'approximation du champ moyen qui consiste à remplacer l'interaction entre particules par l'interaction d'une particule avec un potentiel moyen dû à la présence des autres particules, est l'approximation la plus utilisée dans la résolution des systèmes de particules en interaction. La transformation de Hubbard-Stratonovich constitue la base de la méthode générale du remplacement de l'interaction à deux particules par l'interaction d'une particule avec un champ externe. Cette transformation est donnée sous forme d'intégrale généralisée [49] :

$$e^{\theta^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\pi x^2 - 2\sqrt{\pi}x\theta} \quad (2.41)$$

où θ est un opérateur hermitique et borné ; et x un champ externe.

Supposons que $H_1(\tau_i)$ figurant dans l'équation (2.3) peut être écrit sous la forme :

$$H_1(\tau_i) = \theta_1(\tau_i) \cdot \theta_2(\tau_i) \quad (2.42)$$

En admettant que $\theta_1(\tau_i)$ et $\theta_2(\tau_i)$ commutent, on peut écrire :

$$\exp\left(-\frac{\beta\theta_1(\tau_i)\theta_2(\tau_i)}{N}\right) = \exp\left(-\frac{\beta(\theta_1(\tau_i) + \theta_2(\tau_i))^2}{4N}\right) \exp\left(\frac{\beta(\theta_1(\tau_i) - \theta_2(\tau_i))^2}{4N}\right) \quad (2.43)$$

Ainsi, la transformation de Hubbard-Stratonovich donnée par l'équation (2.41) peut être appliquée à chacun des deux termes du second membre de l'équation (2.43). Il est nécessaire de définir deux champs : un champ $x(\tau_i)$ pour le terme $[\theta_1(\tau_i) - \theta_2(\tau_i)]^2$ et un

champ $y(\tau_i)$ pour le terme $[\theta_1(\tau_i) + \theta_2(\tau_i)]^2$. On a donc les deux relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\frac{\beta [\theta_1(\tau_i) - \theta_2(\tau_i)]^2}{4N}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i e^{-\pi x_i^2 - \sqrt{\frac{\pi\beta}{N}} x_i [\theta_1(\tau_i) - \theta_2(\tau_i)]} \\ e^{\frac{-\beta [\theta_1(\tau_i) + \theta_2(\tau_i)]^2}{4N}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy_i e^{-\pi y_i^2 - i \sqrt{\frac{\pi\beta}{N}} y_i [\theta_1(\tau_i) + \theta_2(\tau_i)]} \end{array} \right. \quad (2.44)$$

En effectuant les changements de variables suivants : $X_i = \sqrt{\frac{N}{\beta}} x_i$ et $Y_i = \sqrt{\frac{N}{\beta}} y_i$ dans le système d'équations (2.44), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\frac{\beta [\theta_1(\tau_i) - \theta_2(\tau_i)]^2}{4N}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{N}{\beta}} dX_i e^{-\pi \frac{\beta}{N} X_i^2 - \sqrt{\pi} \frac{\beta}{N} X_i [\theta_1(\tau_i) - \theta_2(\tau_i)]} \\ e^{\frac{-\beta [\theta_1(\tau_i) + \theta_2(\tau_i)]^2}{4N}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{N}{\beta}} dY_i e^{-\pi \frac{\beta}{N} Y_i^2 - \sqrt{\pi} \frac{\beta}{N} Y_i i [\theta_1(\tau_i) + \theta_2(\tau_i)]} \end{array} \right. \quad (2.45)$$

Celles-ci substituées dans l'équation (2.39), conduisent à :

$$Z = Tr \left\{ e^{-\beta H'_0} T_\tau \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dX_i}{\sqrt{N}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dY_i}{\sqrt{N}} e^{-\frac{\beta}{N} \pi (X_i^2 + Y_i^2) - \sqrt{\pi} \frac{\beta}{N} [(X_i + iY_i)\theta_1(\tau_i) - (X_i - iY_i)\theta_2(\tau_i)]} \right] \right\} \quad (2.46)$$

Ensuite, on introduit les mesures suivantes :

$$\int DX = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{\beta}{N}} dX_i \quad ; \quad \int DY = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{\beta}{N}} dY_i \quad (2.47)$$

En remplaçant les sommations discrètes par des intégrales, l'équation (2.46) se réduit à :

$$Z = Tr \left\{ e^{-\beta H'_0} \int DXDY e^{-\pi \int_0^\beta [X^2(\tau) + Y^2(\tau)]} T_\tau \left[e^{-\int_0^\beta d\tau \sqrt{\pi} \{ [X(\tau) + iY(\tau)]\theta_1(\tau) - [X(\tau) - iY(\tau)]\theta_2(\tau) \}} \right] \right\} \quad (2.48)$$

Pour simplifier davantage l'équation précédente, on introduit la fonction complexe suivante :

$$z(\tau) = X(\tau) + iY(\tau) \quad (2.49)$$

L'équation (2.48) devient alors :

$$Z = Tr \left\{ e^{-\beta H'_0} \int Dz e^{-\pi \int_0^\beta d\tau |z(\tau)|^2} T_\tau \left[e^{-\int_0^\beta d\tau \sqrt{\pi} [z(\tau)\theta_1(\tau) - z^*(\tau)\theta_2(\tau)]} \right] \right\} \quad (2.50)$$

Cette dernière équation est une intégrale fonctionnelle représentant la grande fonction partition d'un système à particules indépendantes interagissant avec le champ complexe $z(\tau)$.

2.4 Equation du gap

2.4.1 Approximation statique

Le calcul de la grande fonction partition Z figurant dans l'équation (2.50) serait exact, si l'on tenait compte de tous les chemins complexes $z(\tau)$. Mais la complexité des calculs conduit à utiliser certaines approximations. L'une d'elles est l'approximation du chemin statique, qui consiste à supposer que les champs $X(\tau)$ et $Y(\tau)$ et par conséquent $z(\tau)$ sont indépendants du paramètre τ . La grande fonction partition devient :

$$Z = Tr \left\{ e^{-\beta H'_0} \int dz e^{-\pi\beta|z|^2} \left[e^{-\beta\sqrt{\pi}[z\theta_1 - z^*\theta_2]} \right] \right\} \quad (2.51)$$

Pour une interaction de type (2.3) et compte-tenu de l'équation (2.42), les opérateurs θ_1 et θ_2 indépendants de τ , s'écrivent :

$$\theta_1 = -\sqrt{G} \sum_{\nu>0} a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+ \quad \text{et} \quad \theta_2 = \sqrt{G} \sum_{\nu>0} a_{\bar{\nu}} a_\nu \quad (2.52)$$

de sorte que :

$$Z = \int dz e^{-\pi\beta|z|^2} \text{Tr} \left\{ e^{-\beta H'_0 + \beta \sqrt{\pi G} \sum_{\nu>0} [a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+ z + a_{\bar{\nu}} a_\nu z^*]} \right\} \quad (2.53)$$

Posons :

$$H'' = H'_0 - \sqrt{\pi G} \sum_{\nu>0} (a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+ z + a_{\bar{\nu}} a_\nu z^*) \quad (2.54)$$

L'équation (2.53) s'écrit également :

$$Z = \int dz e^{-\pi\beta|z|^2} \text{Tr} e^{-\beta H''} \quad (2.55)$$

Il est nécessaire de calculer la trace de $e^{-\beta H''}$ pour arriver à l'expression de la grande fonction partition. Pour cela il faut écrire H'' sous forme diagonale.

2.4.2 Diagonalisation de l'opérateur H''

Compte tenu de l'équation (2.54), l'opérateur H'' s'écrit :

$$H'' = \sum_{\nu>0} \xi_\nu^+ a_\nu^+ a_\nu + \sum_{\nu>0} \xi_\nu^- a_{\bar{\nu}}^+ a_{\bar{\nu}} - \sqrt{\pi G} \sum_{\nu>0} (a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}^+ z + a_{\bar{\nu}} a_\nu z^*) \quad (2.56)$$

Définissons l'opérateur vectoriel suivant :

$$\Phi_\nu^+ = (a_\nu^+, -a_{\bar{\nu}}) \quad , \quad \text{et son conjugué} \quad \Phi_\nu^- = \begin{pmatrix} a_\nu \\ -a_{\bar{\nu}}^+ \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

ainsi que la matrice :

$$A(\nu) = \begin{pmatrix} \xi_\nu^+ & \sqrt{\pi G} z \\ \sqrt{\pi G} z^* & -\xi_\nu^- \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Nous constatons que :

$$\begin{aligned} \Phi_\nu^+ A(\nu) \Phi_\nu &= (a_\nu^+, -a_\nu^-) \begin{pmatrix} \xi_\nu^+ & \sqrt{\pi G} z \\ \sqrt{\pi G} z^* & -\xi_\nu^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\nu \\ -a_\nu^+ \end{pmatrix} \\ &= \xi_\nu^+ a_\nu^+ a_\nu - \xi_\nu^- a_\nu^- a_\nu^+ - \sqrt{\pi G} z a_\nu^+ a_\nu^+ - \sqrt{\pi G} z^* a_\nu^- a_\nu \end{aligned} \quad (2.59)$$

et par conséquent :

$$\Phi_\nu^+ A(\nu) \Phi_\nu = \xi_\nu^+ a_\nu^+ a_\nu + \xi_\nu^- a_\nu^- a_\nu^+ - \sqrt{\pi G} (z a_\nu^+ a_\nu^+ + z^* a_\nu^- a_\nu) - \xi_\nu^- \quad (2.60)$$

L'exposant dans l'équation (2.55) s'écrit :

$$-\beta H'' = -\beta \sum_{\nu > 0} [\Phi_\nu^+ A(\nu) \Phi_\nu + \xi_\nu^-] \quad (2.61)$$

d'où :

$$Z = \int dz e^{-\pi\beta|z|^2} e^{-\beta \sum_{\nu > 0} \xi_\nu^-} Tr e^{-\beta \sum_{\nu > 0} \Phi_\nu^+ A(\nu) \Phi_\nu} \quad (2.62)$$

Le calcul de la trace étant indépendant de la base utilisée, il est intéressant d'utiliser la base dans laquelle la matrice $A(\nu)$ est diagonale. Cherchons ses valeurs propres et les vecteurs propres correspondants. Pour cela, résolvons l'équation aux valeurs propres suivante :

$$\det(A(\nu) - \alpha I) = 0 \quad (2.63)$$

Soit :

$$\begin{vmatrix} \xi_\nu^+ - \alpha & \sqrt{\pi G} z \\ \sqrt{\pi G} z^* & -\xi_\nu^- - \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad (2.64)$$

Le calcul du déterminant conduit aux deux valeurs propres, qu'on note :

$$\begin{cases} E_\nu^+ = E_\nu - \gamma m_\nu \\ E_\nu^- = -E_\nu - \gamma m_\nu \end{cases} \quad (2.65)$$

où :

$$E_\nu = \sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda)^2 + |\Delta|^2} \quad (2.66)$$

est l'énergie de quasi-particules habituelle de la théorie BCS.

et :

$$|\Delta|^2 = \pi G |z|^2 \quad (2.67)$$

Notons par V_1 et V_2 les vecteurs propres normalisés à l'unité correspondants à ces valeurs propres. Soit $V_1 = \begin{pmatrix} x_\nu \\ y_\nu \end{pmatrix}$ le vecteur propre associé à la valeur propre E_ν^+ :

$$A(\nu)V_1 = E_\nu^+ V_1 \quad (2.68)$$

avec :

$$|x_\nu|^2 + |y_\nu|^2 = 1 \quad (2.69)$$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} \xi_\nu^+ & \Delta \\ \Delta^* & -\xi_\nu^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\nu \\ y_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_\nu^+ x_\nu \\ E_\nu^+ y_\nu \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

ou encore :

$$\begin{cases} (E_\nu^+ - \xi_\nu^+)x_\nu = \Delta y_\nu & \text{(A)} \\ (E_\nu^+ + \xi_\nu^-)y_\nu = \Delta^* x_\nu & \text{(B)} \end{cases} \quad (2.71)$$

On obtient à partir de l'équation (A) :

$$y_\nu = \frac{E_\nu^+ - \xi_\nu^+}{\Delta} x_\nu \quad (2.72)$$

En remplaçant y_ν par l'expression (2.72) dans l'équation (2.69), nous obtenons la relation suivante :

$$|x_\nu| = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{E_\nu}\right)} \quad (2.73)$$

A partir des deux équations(2.69) et (2.73), on déduit que :

$$|y_\nu| = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{E_\nu}\right)} \quad (2.74)$$

La composante x_ν s'écrit, en posant :

$$|x_\nu| = u_\nu = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{E_\nu}\right)} \quad (2.75)$$

On peut donc écrire :

$$x_\nu = |x_\nu| e^{i\varphi_\nu} \quad (2.76)$$

où φ_ν est un facteur de phase arbitraire.

Nous avons de même :

$$\Delta = |\Delta| e^{i\alpha} \quad (2.77)$$

Ensuite, en remplaçant Δ et x_ν par leurs expressions respectives dans l'équation (2.72), on obtient :

$$y_\nu = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{E_\nu}\right)} e^{i(\varphi_\nu - \alpha)} \quad (2.78)$$

En posant :

$$v_\nu = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{E_\nu}\right)} \quad (2.79)$$

Le vecteur V_1 peut s'écrire comme suit :

$$V_1 = \begin{pmatrix} u_\nu e^{i\varphi_\nu} \\ v_\nu e^{i(\varphi_\nu - \alpha)} \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

où u_ν et v_ν sont donnés par les expressions (2.75) et (2.79).

On obtient de même le second vecteur propre V_2 :

$$V_2 = \begin{pmatrix} x_\nu \\ -y_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\nu e^{i(\varphi_\nu - \alpha)} \\ -u_\nu e^{i\varphi_\nu} \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

La matrice $A(\nu)$ se met donc sous cette forme :

$$A(\nu) = T_\nu D(\nu) T_\nu^{-1} \quad (2.82)$$

où l'on a noté par :

$$D(\nu) = \begin{pmatrix} E_\nu^+ & 0 \\ 0 & E_\nu^- \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

et

$$T_\nu = \begin{pmatrix} u_\nu e^{i\varphi_\nu} & v_\nu e^{i(\varphi_\nu - \alpha)} \\ v_\nu e^{i(\varphi_\nu - \alpha)} & -u_\nu e^{i\varphi_\nu} \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

On voit que nous avons une infinité de transformations T_ν diagonalisant la matrice $A(\nu)$, puisque T_ν dépend de deux facteurs de phase arbitraires φ_ν et α .

Afin de trouver les équations du gap habituelles, fixons arbitrairement les phases φ_ν et α à : $\varphi_\nu = \alpha = 0$. La matrice T_ν se réduit à :

$$T_\nu = \begin{pmatrix} u_\nu & v_\nu \\ v_\nu & -u_\nu \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

D'après les équations (2.83) et (2.85), on déduit que :

$$\Phi_\nu^+ A(\nu) \Phi_\nu = (u_\nu a_\nu^+ - v_\nu a_{\bar{\nu}}, u_\nu a_{\bar{\nu}} + v_\nu a_\nu^+) \begin{pmatrix} E_\nu^+ & 0 \\ 0 & E_\nu^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\nu a_\nu - v_\nu a_{\bar{\nu}}^+ \\ u_\nu a_{\bar{\nu}}^+ + v_\nu a_\nu \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

Définissons à présent la transformation linéaire suivante :

$$\begin{cases} \alpha_{\bar{\nu}} = u_{\nu} a_{\bar{\nu}} + v_{\nu} a_{\nu}^+ \\ \alpha_{\nu}^+ = u_{\nu} a_{\nu}^+ - v_{\nu} a_{\bar{\nu}} \end{cases} \quad (2.87)$$

où u_{ν} , v_{ν} sont donnés par les expressions (2.75) et (2.79). Les opérateurs α_{ν} et α_{ν}^+ ne sont autres que les opérateurs de création et d'annihilation de quasi-particules habituelles de la théorie BCS. La transformation correspondante est donc la transformation de Bogoliubov-Valatin dont la transformation inverse est donnée par :

$$\begin{cases} a_{\bar{\nu}} = u_{\nu} \alpha_{\bar{\nu}} - v_{\nu} \alpha_{\nu}^+ \\ a_{\nu}^+ = u_{\nu} \alpha_{\nu}^+ + v_{\nu} a_{\bar{\nu}} \end{cases} \quad (2.88)$$

L'équation (2.86) devient :

$$\Phi_{\nu}^+ A(\nu) \Phi_{\nu} = (\alpha_{\nu}^+, \alpha_{\bar{\nu}}) \begin{pmatrix} E_{\nu}^+ & 0 \\ 0 & E_{\nu}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\nu} \\ \alpha_{\bar{\nu}}^+ \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

Posons :

$$\Psi_{\nu}^+ = \Phi_{\nu}^+ T_{\nu}^- \quad ; \quad \Psi_{\nu} = T_{\nu} \Phi_{\nu} \quad (2.90)$$

soit :

$$\Psi_{\nu}^+ = (\alpha_{\nu}^+, \alpha_{\bar{\nu}}) \quad ; \quad \Psi_{\nu} = \begin{pmatrix} \alpha_{\nu} \\ \alpha_{\bar{\nu}}^+ \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

Compte-tenu de ceci, l'expression (2.62) devient :

$$\begin{aligned} Z &= \int dz e^{-\pi\beta|z|^2} e^{-\beta \sum_{\nu>0} \xi_{\nu}^-} Tr e^{-\beta \sum_{\nu>0} \Psi_{\nu}^+ D(\nu) \Psi_{\nu}} \\ &= \int dz e^{-\pi\beta|z|^2} e^{-\beta \sum_{\nu>0} \xi_{\nu}^-} Tr \prod_{\nu>0} e^{-\beta(E_{\nu}^+ \alpha_{\nu}^+ \alpha_{\nu} - E_{\nu}^- \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\nu}} + E_{\nu}^-)} \end{aligned} \quad (2.92)$$

Or, α_{ν}^+ et α_{ν} sont les opérateurs de création et d'annihilation de quasi-particules, l'opérateur $\alpha_{\nu}^+ \alpha_{\nu}$ est donc l'opérateur nombre d'occupations de l'état $|\nu\rangle$ par une quasi-particule.

Les seules valeurs propres possibles de cet opérateur, et celles de l'opérateur $\alpha_{\nu}^+ \alpha_{\nu}^-$, sont les valeurs 0 et 1. L'équation (2.92) devient :

$$Z = \int dz e^{-\pi\beta|z|^2} e^{-\beta \sum_{\nu>0} \xi_{\nu}^-} \prod_{\nu>0} e^{-\beta E_{\nu}^-} (1 + e^{-\beta E_{\nu}^+})(1 + e^{+\beta E_{\nu}^-}) \quad (2.93)$$

ou encore :

$$Z = \int dz e^{-\pi\beta|z|^2 - \beta \sum_{\nu>0} \xi_{\nu}^- + \sum_{\nu>0} \text{Log} [e^{-\beta E_{\nu}^-} (1 + e^{-\beta E_{\nu}^+})(1 + e^{+\beta E_{\nu}^-})]} \quad (2.94)$$

En introduisant l'énergie libre du système $F(z)$, Z est donnée par :

$$Z = \int dz e^{-\beta F(z)} \quad (2.95)$$

avec :

$$F(z) = \pi |z|^2 + \sum_{\nu>0} \{ \xi_{\nu}^- + E_{\nu}^- - \frac{1}{\beta} [\text{Log} [(1 + e^{-\beta E_{\nu}^+})(1 + e^{+\beta E_{\nu}^-})]] \} \quad (2.96)$$

2.4.3 Approximation au point de selle-Equations du gap

L'approximation au point de selle [57] consiste à déterminer la valeur minimale que peut prendre l'exposant dans l'équation (2.95) (dans notre cas c'est l'énergie libre du système). Ce qui nous permet de déterminer les valeurs les plus probables (demi largeur du gap,...) cette méthode conduit dans ce qui suit à l'expression de l'équation du gap, soit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(z)}{\partial z^*} &= 2\pi z - \sum_{\nu>0} \frac{\partial E_{\nu}}{\partial z^*} - \frac{1}{\beta} \sum_{\nu>0} \frac{\partial}{\partial z^*} [\text{Log}(1 + e^{-\beta(E_{\nu} - \gamma m_{\nu})}) + \text{Log}(1 + e^{-\beta(E_{\nu} + \gamma m_{\nu})})] \\ &= 2\pi z + \sum_{\nu>0} \left[\frac{1}{1 + e^{\beta(E_{\nu} - \gamma m_{\nu})}} + \sum_{\nu>0} \frac{1}{1 + e^{\beta(E_{\nu} + \gamma m_{\nu})}} - 1 \right] \frac{\partial E_{\nu}}{\partial z^*} \end{aligned} \quad (2.97)$$

qui s'écrit également :

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z^*} = 2\pi z - \frac{1}{2} \sum_{\nu>0} \left[\tanh \frac{\beta}{2} (E_{\nu} - \gamma m_{\nu}) + \tanh \frac{\beta}{2} (E_{\nu} + \gamma m_{\nu}) \right] \frac{\partial E_{\nu}}{\partial z^*} \quad (2.98)$$

où :

$$\frac{\partial E_\nu}{\partial z^*} = \frac{\pi G z}{E_\nu} \quad (2.99)$$

et E_ν donné par l'expression(2.66).

En annulant l'équation (2.98), puis en remplaçant le résultat donné par l'équation (2.99) dans cette dernière, on obtient :

$$\frac{2}{G} = \sum_{\nu>0} \frac{1}{2E_\nu} \left[\tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) + \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) \right] \quad (2.100)$$

L'équation (2.100) est l'équation du gap généralisée de la théorie BCS où G est la force de l'interaction d'appariement et Δ la demi largeur du gap.

On voit que, dans la prise en compte du moment angulaire, la seule différence réside dans l'expression des énergies de quasi-particules.

En substituant les expressions données par (2.65) dans l'équation (2.96), on trouve également l'expression suivante de l'énergie libre de système :

$$F(z) = \pi |z|^2 + \sum_{\nu>0} \left\{ \varepsilon_\nu - \lambda - E_\nu - \frac{1}{\beta} \text{Log}(1 + e^{-\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)}) - \frac{1}{\beta} \text{Log}(1 + e^{-\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)}) \right\} \quad (2.101)$$

où $|z|^2$ donné par l'équation (2.67).

La valeur z_0 qui minimise $F(z)$ est donnée par $|z_0|^2 = \frac{|\Delta|^2}{\pi G}$, et la grande fonction partition prend la forme :

$$Z = e^{-\beta F(z_0)} \quad (2.102)$$

ce qui conduit à :

$$\Omega = -\beta F(z_0) \quad (2.103)$$

La forme finale de l'énergie libre est :

$$F(z_0) = \frac{\Delta^2}{G} + \sum_{\nu>0} \left\{ \varepsilon_\nu - \lambda - E_\nu - \frac{1}{\beta} \text{Log}(1 + e^{-\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)}) - \frac{1}{\beta} \text{Log}(1 + e^{-\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)}) \right\} \quad (2.104)$$

qui s'écrit alors dans le cas où $\gamma = 0$ sous la forme suivante :

$$F(z_0) = \frac{\Delta^2}{G} + \sum_{\nu>0} (\varepsilon_\nu - \lambda - E_\nu) - 2 \sum_{\nu>0} \text{Log}(1 + e^{-\beta E_\nu}) \quad (2.105)$$

On retrouve ainsi l'expression de l'énergie libre du système lorsque le moment angulaire est conservé ($\gamma = 0$).

Chapitre 3

Application au modèle uniforme

3.1 Le modèle uniforme

Le modèle uniforme est constitué d'un ensemble de niveaux à particules indépendantes doublement dégénéré d'égal espacement énergétique ayant une densité de niveaux g et un moment angulaire constant $m_\nu = m$. Pour des raisons de commodité et de symétrie, l'échelle des énergies est choisie de sorte que le potentiel chimique soit égal à zéro ($\lambda = 0$) pour toute température, bien qu'en toute généralité, le potentiel chimique λ varie en fonction de la température [17]. Il sera supposé ci-dessous, que les corrélations d'appariement ne sont effectives que dans un intervalle d'énergie de largeur 2ω ($-\omega \leq \varepsilon \leq +\omega$) au-dessus et en-dessous du niveau de Fermi. Par conséquent, toutes les sommations discrètes dans les expressions déduites précédemment peuvent être remplacées par des intégrales dans les limites $\pm\omega$ [56]. Pour cela, on introduit une densité de niveaux lissée g que l'on suppose constante au voisinage du niveau de Fermi.

Le lissage consiste alors en la substitution suivante [36, 54] :

$$\sum_{\nu} f(\varepsilon_{\nu} - \lambda) \rightarrow g \int_a^b f(x) dx \quad \Rightarrow \quad \sum_{\nu} f(\varepsilon_{\nu}) \rightarrow g \int_a^b f(x) dx \quad (3.1)$$

où l'on a posé : $x = \varepsilon$ et où : $a = -\omega$ et $b = +\omega$

Dans le but de lisser quelques quantités statistiques [44] qui ont été déduites dans le

premier chapitre, on utilisera la substitution (3.1) dans les expressions de ces quantités.

3.2 Grandeurs statistiques et équation du gap

3.2.1 Le moment angulaire

Dans le cas d'une distribution uniforme de niveaux et dans le but d'obtenir l'expression de la demi largeur du gap en fonction du moment angulaire M , nous intégrons d'abord l'équation (1.64) :

$$M = 2mg \left[\int_0^{\omega} \frac{d\varepsilon}{1 + \exp \beta (E - \gamma m)} - \int_0^{\omega} \frac{d\varepsilon}{1 + \exp \beta (E + \gamma m)} \right] \quad (3.2)$$

où :

$$E = \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2} \quad (3.3)$$

Calculons les deux intégrales lorsque $\beta \rightarrow +\infty$. La seconde intégrale de l'équation (3.2) tend vers zéro, alors que dans la première intégrale, la fonction à intégrer, est égale à l'unité si $E < \gamma m$. Ceci conduit à l'expression suivante :

$$-\sqrt{(\gamma m)^2 - \Delta^2} < \varepsilon < +\sqrt{(\gamma m)^2 - \Delta^2} \quad (3.4)$$

L'équation (3.2) devient en tenant compte de (3.4) :

$$M = 2mg \int_0^{\sqrt{(\gamma m)^2 - \Delta^2}} d\varepsilon = 2mg ((\gamma m)^2 - \Delta^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

3.2.2 Le nombre de particules

L'expression du nombre de particules pour une température nulle et un moment angulaire nul donnée par l'équation (1.97) s'écrit dans le cas d'une distribution uniforme de

niveaux, comme suit :

$$N = g \int_{-\infty}^{-\omega} d\varepsilon + g \int_{-\omega}^{+\omega} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}} \right) d\varepsilon \quad (3.6)$$

la première intégrale du second membre vaut $(1 - \frac{N}{2})$, et l'expression précédente devient :

$$N = g\omega - g \left(1 - \frac{N}{2} \right) \quad (3.7)$$

3.2.3 L'équation du gap

En remplaçant la somme discrète par une somme continue, l'équation du gap donnée par l'expression (1.60) s'écrit :

$$f(\Delta, \lambda, \gamma, \beta) = \frac{2}{G} = g \int_{-\omega}^{+\omega} \frac{1}{2E} \left\{ \tanh \frac{\beta}{2} (E - \gamma m) + \tanh \frac{\beta}{2} (E + \gamma m) \right\} d\varepsilon \quad (3.8)$$

et pour $\gamma = 0$:

$$f(\Delta, \lambda, \gamma = 0, \beta) = \frac{1}{Gg} = \int_0^{+\omega} \frac{1}{E} \tanh \frac{\beta}{2} E d\varepsilon \quad (3.9)$$

Afin d'exprimer le paramètre du gap Δ_0 à moment angulaire nul et après avoir fait tendre β vers $+\infty$, on obtient :

$$\frac{1}{Gg} = \int_0^{+\omega} \frac{d\varepsilon}{\Delta_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\Delta_0} \right)^2}} = \text{Argsh} \left(\frac{\omega}{\Delta_0} \right) \quad (3.10)$$

qui s'écrit également sous la forme :

$$\Delta_0 = \frac{\omega}{\sinh \left(\frac{1}{gG} \right)} \quad (3.11)$$

où l'on a utilisé le fait que :

$$\int \frac{f'(x) dx}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \text{Argsh } f(x) + C \quad (3.12)$$

En tenant compte de l'approximation $gG \ll 1$, (3.11) devient :

$$\Delta_0 \approx 2\omega \exp\left(-\frac{1}{gG}\right) \quad (3.13)$$

a) Expression de Δ en fonction du moment angulaire

Revenons à l'équation du gap donnée par l'expression (3.8). Cette dernière peut être exprimée sous la forme suivante :

$$f(\Delta, \gamma = 0) = f(\Delta, \gamma) \quad (3.14)$$

ce qui conduit à :

$$\int_{-\omega}^{+\omega} \frac{1}{E} \tanh \frac{\beta}{2} E d\varepsilon = \int_{-\omega}^{+\omega} \frac{1}{2E} \left\{ \tanh \frac{\beta}{2} (E - \gamma m) + \tanh \frac{\beta}{2} (E + \gamma m) \right\} d\varepsilon \quad (3.15)$$

Dans le cas où $\beta \rightarrow +\infty$, on aboutit à :

$$\int_0^{\omega} \frac{d\varepsilon}{\Delta_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\Delta_0}\right)^2}} = \int_0^{\omega} \frac{d\varepsilon}{\Delta \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\Delta}\right)^2}} - \int_0^{\sqrt{(\gamma m)^2 - \Delta^2}} \frac{d\varepsilon}{\Delta \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\Delta}\right)^2}} \quad (3.16)$$

Tous calculs faits, nous obtenons :

$$\text{Argsh} \left(\frac{\omega}{\Delta_0} \right) = \text{Argsh} \left(\frac{\omega}{\Delta} \right) - \text{Argsh} \left(\frac{(\gamma m)^2 - \Delta^2}{\Delta^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{G} \quad (3.17)$$

D'après l'équation (3.5), on déduit que :

$$\left(\frac{(\gamma m)^2 - \Delta^2}{\Delta^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{M}{2mg\Delta} \quad (3.18)$$

Sachant que :

$$\text{Argsh}(x) = \text{Log} \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right) \quad (3.19)$$

L'équation (3.17) devient :

$$\text{Log} \left(\frac{\frac{\omega}{\Delta} + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^2}}{\frac{\omega}{\Delta_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\Delta_0}\right)^2}} \right) = \text{Log} \left(\frac{M}{2mg\Delta} + \sqrt{1 + \frac{M^2}{4m^2g^2\Delta^2}} \right) \quad (3.20)$$

Considérons l'approximation $\frac{\omega}{\Delta_0} \gg 1$, nous obtenons :

$$\frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{M}{2mg\Delta} + \sqrt{1 + \frac{M^2}{4m^2g^2\Delta^2}} \quad (3.21)$$

on encore

$$\frac{\Delta_0^2}{\Delta^2} \left(1 - \frac{M}{2mg\Delta_0} \right)^2 = 1 + \frac{M^2}{4m^2g^2\Delta^2}$$

expression qui conduit à :

$$\Delta = \Delta_0 \left(1 - \frac{M}{M_c} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.22)$$

où l'on a noté par :

$$M_c = gm\Delta_0 \quad (3.23)$$

le moment angulaire critique correspondant à $\Delta = 0$.

Dérivons Δ par rapport à M , pour $M = 0$. Nous obtenons :

$$\left(\frac{d\Delta}{dM} \right)_{M=0} = \frac{-1}{2mg} \quad (3.24)$$

Calculons la limite de la dérivée de Δ par rapport à M lorsque $M \rightarrow M_c$. Cela donne :

$$\lim_{M \rightarrow M_c} \left(\frac{d\Delta}{dM} \right) = -\infty \quad (3.25)$$

Ceci montre que la tangente, pour $M = M_c$, à la courbe $\Delta(M)$ est perpendiculaire à l'axe OM .

b) Expression du paramètre du gap Δ en fonction de la température T

Afin d'étudier l'évolution du paramètre du gap Δ en fonction de la température à moment angulaire nul ; on remplace l'expression donnée par l'équation (3.8) dans la condition suivante :

$$f(\Delta_0, T = 0) = f(\Delta, T) \quad (3.26)$$

Ce qui conduit à l'expression suivante :

$$\int_0^{+\omega} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2}} = \int_0^{+\omega} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}} \tanh \frac{\beta}{2} \left(\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2} \right) \quad (3.27)$$

où l'on a tenu compte du fait que les deux fonctions à intégrer sur un même domaine, sont positives, et donc :

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a g(x) dx \quad , \forall a \quad (3.28)$$

entraîne par dérivation par rapport à a , que :

$$f(a) = g(a) \quad (3.29)$$

L'équation (3.27) conduit alors à :

$$\frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \Delta_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}} \tanh \frac{\beta}{2} \left(\sqrt{\omega^2 + \Delta^2} \right) \quad , \forall \omega \quad (3.30)$$

Pour $\omega = 0$, on obtient :

$$T = \frac{\Delta}{2} \frac{1}{\text{Argtanh} \left(\frac{\Delta}{\Delta_0} \right)} \quad (3.31)$$

sachant que

$$\text{Argtanh} x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \quad (3.32)$$

L'expression (3.31) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$T = \frac{\Delta}{\ln \left| \frac{1 + \frac{\Delta}{\Delta_0}}{1 - \frac{\Delta}{\Delta_0}} \right|} \quad (3.33)$$

c) Température critique T_c

Les corrélations d'appariement disparaissent lorsque le gap $\Delta(T)$ s'évanouit. La température critique T_c est alors définie par :

$$\frac{1}{Gg} = \int_0^{+\omega} \frac{1}{\varepsilon} \tanh \frac{1}{2T_c} \varepsilon \, d\varepsilon \quad (3.34)$$

En supposant que $T_c \ll \omega$ et dans la limite de l'approximation $Gg \ll 1$. La température critique est donnée par [17, 19] :

$$T_c = 1.14\omega \exp(-1/gG) \quad (3.35)$$

Remplaçons cette expression dans l'équation (3.11), on aboutit à [44] :

$$\frac{2\Delta_0}{T_c} = 3.50 \quad (3.36)$$

Cette dernière prend la valeur :

$$T_c \simeq 0.571\Delta_0 \quad (3.37)$$

Si on traite les noyaux de la région des terres rares Δ_0 est de l'ordre de 1 MeV [53], ce qui entraîne que $T_c \simeq 0.571 \text{ MeV}$.

3.2.4 Energie

Il est bien connu que la notion de température est très importante dans l'étude des noyaux chauds. Il s'avère plus intéressant de parler plutôt de noyaux en termes d'énergie d'excitation donnée plutôt qu'en terme de température donnée. L'expression de l'énergie du système étant donnée par l'équation (1.83), en remplaçant la somme discrète par une somme continue, cette dernière donne :

$$E' = g \int_{-\omega}^{+\omega} \varepsilon \left[1 - \frac{\varepsilon}{2E} \left\{ \tanh \frac{\beta}{2}(E - \gamma m) + \tanh \frac{\beta}{2}(E + \gamma m) \right\} \right] d\varepsilon - \frac{\Delta^2}{G} \quad (3.38)$$

$$E' = g \int_{-\omega}^{+\omega} \varepsilon d\varepsilon - g \int_{-\omega}^{+\omega} \frac{\varepsilon^2}{E} d\varepsilon + \int_{-\frac{M}{2mg}}^{+\frac{M}{2mg}} \frac{\varepsilon^2}{E} d\varepsilon - \frac{\Delta^2}{G} \quad (3.39)$$

Dans le cas où $\gamma = 0$, l'équation ci-dessus devient :

$$E' = g \int_{-\omega}^{+\omega} \varepsilon \left[1 - \frac{\varepsilon}{E} \tanh \frac{\beta}{2} E \right] d\varepsilon - \frac{\Delta^2}{G} \quad (3.40)$$

a) Energie en fonction du moment angulaire

Dans le but de traiter la variation de l'énergie en fonction du moment angulaire M et après avoir fait tendre β vers ∞ , l'expression donnée par l'équation (3.39) se réduit à :

$$E' = g \int_{-\omega}^{+\omega} \varepsilon d\varepsilon - g \int_{-\omega}^{-\frac{M}{2mg}} \frac{\varepsilon^2}{E} d\varepsilon - g \int_{+\frac{M}{2mg}}^{+\omega} \frac{\varepsilon^2}{E} d\varepsilon - \frac{\Delta^2}{G} \quad (3.41)$$

qui s'écrit également :

$$E' = -2g \int_{+\frac{M}{2mg}}^{+\omega} \frac{\varepsilon^2}{E} d\varepsilon - \frac{\Delta^2}{G} \quad (3.42)$$

Dans le but de calculer l'intégrale ci-dessous on procède au changement de variable $\varepsilon = \Delta \sinh x$, ce qui conduit à :

$$\int_{+\frac{M}{2mg}}^{+\omega} \frac{\varepsilon^2}{E} d\varepsilon = \Delta^2 \int_{\text{Argsh } \frac{M}{2\Delta mg}}^{\text{Argsh } \frac{\omega}{\Delta}} \sinh^2 x dx \quad (3.43)$$

Tous calculs faits on obtient le résultat suivant :

$$\int_{\text{Argsh } \frac{M}{2\Delta mg}}^{\text{Argsh } \frac{\omega}{\Delta}} \sinh^2 x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon}{\Delta} \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\Delta}\right)^2} - \text{Argsh } \frac{\varepsilon}{\Delta} \right]_{+\frac{M}{2mg}}^{+\omega} \quad (3.44)$$

D'après l'équation (3.17) et le résultat donné par l'équation ci-dessus, on obtient :

$$E' = -g\omega^2 - \frac{1}{2}g\Delta^2 + \frac{M}{2m} \left(\frac{M^2}{4m^2g^2} + \Delta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.45)$$

Pour $\beta \rightarrow \infty$ et $\gamma = 0$, l'expression de l'énergie est égale à :

$$E'_0 = -g\omega^2 - \frac{1}{2}g\Delta_0^2$$

où E'_0 c'est la valeur de l'énergie la plus basse, c'est-à-dire l'énergie du fondamental.

b) L'énergie d'excitation :

L'expression de l'énergie d'excitation $E' - E'_0$ peut être écrite comme suit :

$$E' - E'_0 = \frac{1}{2}g(\Delta_0^2 - \Delta^2) + \frac{M}{2m} \left(\frac{M}{4m^2g^2} + \Delta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.46)$$

Pour $\gamma = 0$, cette dernière prend la forme suivante :

$$E' - E'_0 = \frac{1}{2}g(\Delta_0^2 - \Delta^2) \quad (3.47)$$

En utilisant les équations (3.46) et (3.22), ainsi que l'approximation suivante :

$$(1 - \epsilon)^n = 1 - n\epsilon \quad \text{pour } \epsilon \text{ petit,} \quad (3.48)$$

nous arrivons à l'expression de $E' - E'_0$ en fonction de M dans le cas où $M < M_c$:

$$E' - E'_0 = \frac{1}{2}g\Delta_0^2 \frac{M}{M_c} + \frac{1}{2}g\Delta_0^2 \frac{M}{M_c} \left(1 - \frac{M}{M_c} + \frac{M^2}{4M_c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.49)$$

qui s'écrit également :

$$E' - E'_0 = \frac{1}{2}g\Delta_0^2 \frac{M}{M_c} \left(2 - \frac{M}{2M_c} \right) \quad (3.50)$$

Dans le cas où $M > M_c$, l'équation (3.46) devient :

$$E' - E'_0 = \frac{1}{2}g(\Delta_0^2 - \Delta^2) + \frac{M^2}{4m^2g} \left(1 + \frac{2m^2g^2\Delta^2}{M_c^2} \right) \quad (3.51)$$

qui prend la forme finale suivante :

$$E' - E'_0 = \frac{1}{2}g(\Delta_0^2 - \Delta^2) + \frac{M^2}{4m^2g} \quad (3.52)$$

3.2.5 Energie libre

L'expression de l'énergie libre du système donnée par l'équation (2.105) devient dans le cas d'une distribution uniforme des niveaux :

$$F = g \int_{-\omega}^{+\omega} (\varepsilon - E) d\varepsilon - 2g \int_{-\omega}^{+\omega} \text{Log}(1 + e^{-\beta E}) d\varepsilon + \frac{\Delta^2}{G} \quad (3.53)$$

ou encore :

$$F = -g \int_{-\omega}^{+\omega} E d\varepsilon - 2g \int_{-\omega}^{+\omega} \text{Log}(1 + e^{-\beta E}) d\varepsilon + g \int_{-\omega}^{+\omega} \frac{\Delta^2}{2E} \tanh\left(\frac{\beta}{2} E\right) d\varepsilon \quad (3.54)$$

On fait tendre β vers l'infini. L'expression (3.54) prend la forme suivante :

$$F = -2g \int_0^{+\omega} \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2} d\varepsilon + g \int_0^{+\omega} \frac{\Delta^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}} d\varepsilon \quad (3.55)$$

où :

$$\int_0^{+\omega} \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2} d\varepsilon = \frac{\Delta^2}{2} \left[\frac{\omega}{\Delta} \sqrt{\frac{\omega^2}{\Delta^2} + 1} + \text{Argsh} \left(\frac{\omega}{\Delta} \right) \right] \quad (3.56)$$

Le calcul de ces intégrales conduit à l'expression suivante :

$$F = -\omega \Delta g \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\Delta^2}} \quad (3.57)$$

En tenant compte de l'approximation d'ordre $\frac{\omega}{\Delta} \gg 1$, l'équation (3.57) devient :

$$F = -g\omega^2 \quad (3.58)$$

Les différentes grandeurs évaluées dans le cadre du modèle uniforme seront étudiées numériquement et discutées dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Résultats numériques-Discussion

4.1 Introduction

Afin d'étudier l'impact de la température du noyau et du moment angulaire sur la variation des grandeurs thermodynamiques déduites précédemment, nous allons dans ce qui suit évaluer ces grandeurs en utilisant deux modèles schématiques : le modèle uniforme [16,17] et le modèle de Richardson [37] puis le modèle réaliste de Woods-Saxon. Ce dernier sera appliqué à deux noyaux : le Gadolinium (${}_{64}^{142}Gd$) et l'Hafnium (${}_{72}^{154}Hf$). Le but est d'étudier le comportement de certaines grandeurs thermodynamiques données par les trois modèles, en fonction de la température et du moment angulaire.

4.2 Cas des modèles schématiques

4.2.1 Le modèle uniforme

Nous avons utilisé ce modèle avec les valeurs ($g = 7 \text{ MeV}^{-1}$, $\Delta_0 = 1 \text{ MeV}$, $m = 2 \hbar$) qui correspondent approximativement à celles des terres rares.

L'équation (3.22) nous permet d'obtenir l'allure illustrée par la figure (4-1) qui représente les variations du paramètre du gap Δ en fonction du moment angulaire pour une température nulle.

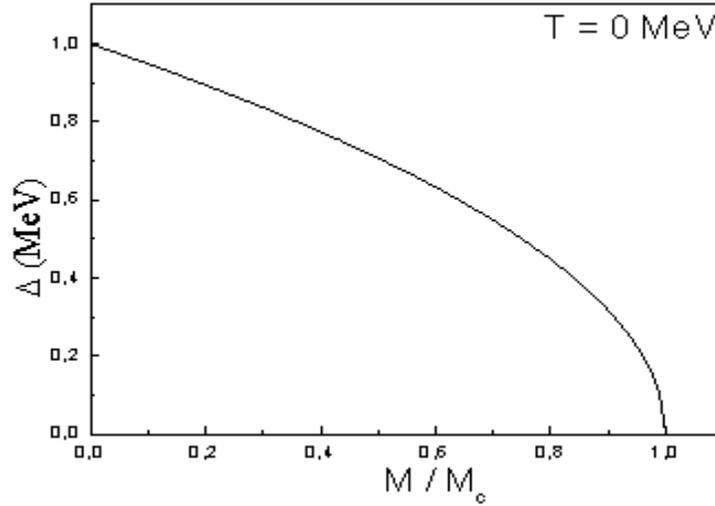


FIG. 4-1 – Variation du paramètre du gap en fonction du moment angulaire pour une température nulle.

Les équations (3.24) et (3.25) donnent les pentes de la fonction donnée par l'équation (3.22) pour un moment angulaire nul ($\gamma = 0$) et pour un moment angulaire ayant sa valeur critique ($M = M_c$) respectivement.

Lorsque $M = 0$, le paramètre du gap atteint sa valeur maximale. Il diminue lorsque le moment angulaire augmente et s'annule pour $M = M_c$. Les corrélations d'appariement s'annulent au delà de $M = M_c = 14\hbar$. Le paramètre du gap s'annule également avec une pente infinie (voir la figure 4-1).

Nous constatons que, plus le moment angulaire augmente, plus les corrélations d'appariement diminuent jusqu'à s'annuler. En fait, quand le moment angulaire atteint sa valeur critique, toutes les particules se regroupent autour du niveau de Fermi.

Les variations de la demi largeur du gap en fonction de la température, pour un moment angulaire nul, sont données par l'équation (3.33). Cette dernière nous permet de tracer la courbe de Δ en fonction de T représentée par la figure (4-2). Elle est monotone

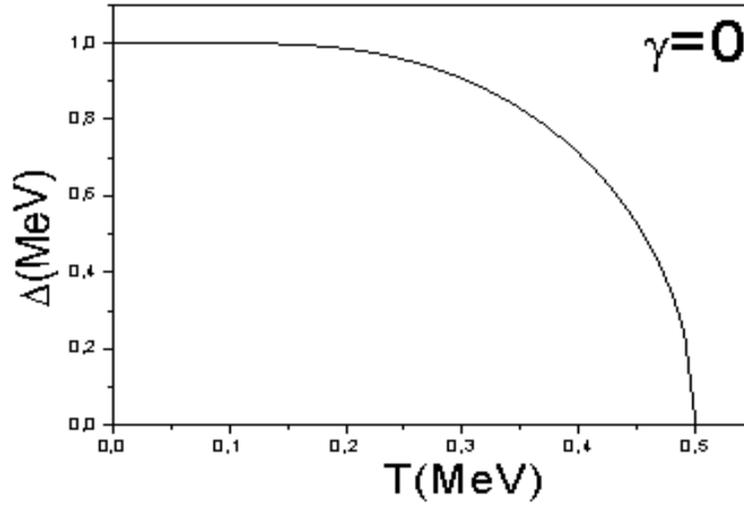


FIG. 4-2 – Variation du paramètre du gap en fonction de la température pour un moment angulaire nul ($\gamma = 0$).

décroissante et s'annule pour $T = T_c$. Par ailleurs elle atteint son maximum Δ_0 pour $T = 0$.

L'équation (3.47) nous permet d'étudier l'évolution de la demi largeur du gap en fonction de l'énergie d'excitation ; ceci est illustré par la figure (4-3). Cette dernière montre que la demi largeur du gap est inversement proportionnelle à l'énergie. Δ diminue lorsque l'énergie augmente et s'annule pour la valeur $E' - E'_0 = \frac{1}{2}g\Delta_0^2$ qui est l'énergie à partir de laquelle le système devient un gaz de Fermi.

La figure (4-4) est obtenue par la résolution des équations (3.50) et (3.52). Pour $M < M_c$, comme on l'a déjà constaté, la demi largeur du gap est positive et s'annule pour $M = M_c$ (voir figure (4-1)). Ceci correspond a une énergie d'excitation correspondant à un regroupement des particules autour du niveau de Fermi. Par ailleurs, pour $M > M_c$, l'énergie d'excitation à ce stade permet aux particules de quitter le niveau de Fermi.

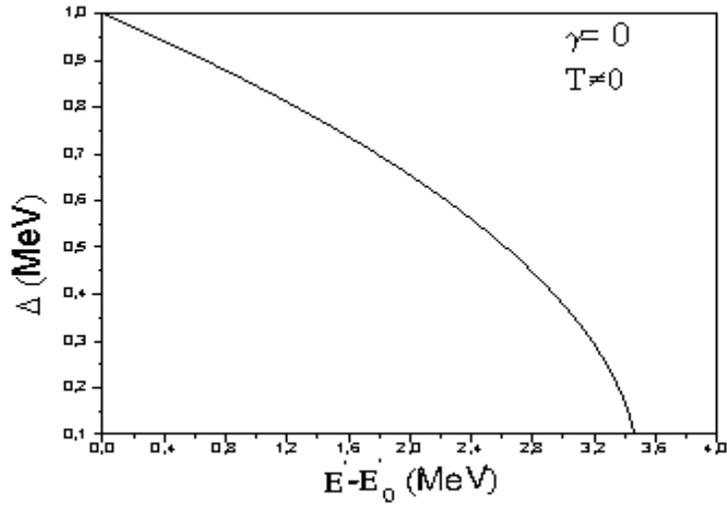


FIG. 4-3 – Variation de la demi largeur du gap en fonction de l'énergie d'excitation pour un moment angulaire nul.

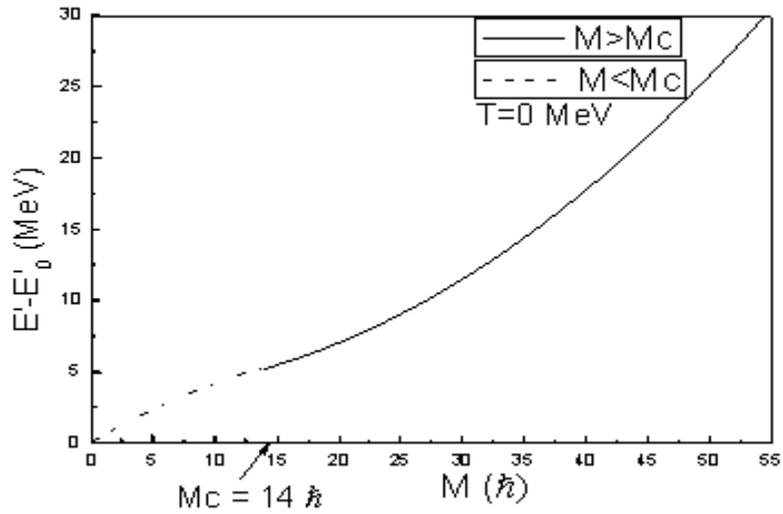


FIG. 4-4 – Evolution de l'énergie d'excitation en fonction du moment angulaire pour une température nulle.

4.2.2 Le modèle schématique de Richardson

Dans le but de tester la validité des équations établies dans le premier chapitre, nous avons utilisé le modèle schématique de Richardson. Il s'agit d'un modèle simple consistant en un spectre discret de niveaux d'énergie équidistants $\varepsilon_\nu = \nu$; avec $1 \leq \nu \leq N$ doublement dégénéré, où N est le nombre de particules.

Les équations du gap (1.60), (1.62) et (1.65) se présentent sous forme d'un système non linéaire de trois équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{G} = \sum_{\nu>0} \frac{1}{2E_\nu} \left\{ \tanh \frac{\beta}{2}(E_\nu - \gamma m_\nu) + \tanh \frac{\beta}{2}(E_\nu + \gamma m_\nu) \right\} \\ n_0 = \sum_{\nu>0} \left[1 - \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{2E_\nu} \left\{ \tanh \frac{\beta}{2}(E_\nu - \gamma m_\nu) + \tanh \frac{\beta}{2}(E_\nu + \gamma m_\nu) \right\} \right] \\ M = \sum_{\nu>0} \frac{m_\nu}{2} \left\{ \tanh \frac{\beta}{2}(E_\nu + \gamma m_\nu) - \tanh \frac{\beta}{2}(E_\nu - \gamma m_\nu) \right\} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

à trois inconnues λ , Δ et γ .

Nous avons élaboré un code de calcul pour résoudre numériquement ce système. Dans une première étape nous avons étudié le cas $\gamma = 0$ ce qui permet de réduire le système précédent à un système de deux équations données ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} n_0 = \sum_{\nu>0} \left[1 - \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{E_\nu} \tanh \left(\frac{\beta}{2} E_\nu \right) \right] \\ \frac{2}{G} = \sum_{\nu>0} \frac{1}{E_\nu} \left\{ \tanh \left(\frac{\beta}{2} E_\nu \right) \right\} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

les inconnues étant λ et Δ .

La résolution de ce système a été réalisée par un code de calcul basé sur la méthode de Newton-Raphson. Le modèle de Richardson correspondant à un nombre de particules valant 8, 10, 16 et 32 respectivement ainsi que pour $N = 10$ [59], a été utilisé. Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau ci-dessous :

N	G (MeV)	λ (MeV)	Δ (MeV)
8	0.8	4.5	2.501
10	0.4	5.5	0.822
16	0.475	8.5	1.979
32	0.375	16.5	2.234

(4.3)

Afin d'obtenir la température critique, on pose $\Delta = 0$ dans le système (4.2). Ce dernier se réduit à deux équations données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \sum_{\nu>0} \left[1 - \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{|\varepsilon_\nu - \lambda|} \tanh \left(\frac{\beta}{2} |\varepsilon_\nu - \lambda| \right) \right] \\ \frac{2}{G} = \sum_{\nu>0} \frac{1}{|\varepsilon_\nu - \lambda|} \left\{ \tanh \left(\frac{\beta}{2} |\varepsilon_\nu - \lambda| \right) \right\} \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Pour les mêmes valeurs de N (8, 16, 10 et 32 particules) nous obtenons les résultats suivants :

N	G (MeV)	λ (MeV)	T_c (MeV)
8	0.8	4.5	1.335
10	0.4	5.5	0.466
16	0.475	8.5	1.105
32	0.375	16.5	1.260

(4.5)

La prise en compte du moment angulaire nécessite la résolution du système (4.1). La résolution de ce type de systèmes est généralement traitée en utilisant la méthode de Newton qui est, rappelons-le, un procédé itératif consistant à calculer, pour chaque itération, la matrice jacobienne, ce qui nécessite l'évaluation de n^2 dérivées, où n est le nombre des inconnues du système.

Cependant, la méthode de Newton présente un inconvénient majeur, car la matrice jacobienne obtenue ne peut être inversée systématiquement. C'est pourquoi, l'utilisation des méthodes quasi-Newton, qui sont des méthodes dérivées de la méthode de Newton, est

privilégée et parmi ces dernières, on trouve la méthode de Broyden [50]. Cette méthode permet de calculer un nombre plus important de dérivées parce qu'elle utilise des approximations successives pour calculer et inverser la matrice jacobienne en effectuant des mises à jour de rang un dans la direction de progression de l'algorithme [51]. Notons toutefois que cette méthode est très sensible au choix des valeurs initiales des paramètres. Si ces dernières sont bien choisies, la méthode converge rapidement vers les solutions physiques du problème.

En tenant compte du moment angulaire, nous avons résolu le système (4.1) par la méthode de Broyden.

Les résultats obtenus, par cette méthode, pour les trois systèmes à 8, 16 et 32 particules sont donnés dans le tableau suivant :

N	G (MeV)	λ (MeV)	Δ (MeV)	γ (MeV/ \hbar)
8	0.8	4.401	1.819	3.036
16	0.475	8.482	1.357	6.620
32	0.375	16.485	3.208	10.891

Nous remarquons sur la figure (4-5) que la valeur du niveau de Fermi reste pratiquement constante avec l'inclusion du moment angulaire. Par contre, on note une influence notable sur les valeurs de la demi largeur du gap. La prise en compte du moment angulaire diminue la valeur de Δ pour $N = 8$ et 16 et l'augmente pour $N = 32$.

Pour obtenir la température critique pour les trois systèmes de particules, on résoud le système (4.1) en annulant Δ . On obtient les valeurs :

N	G (MeV)	λ (MeV)	γ (MeV/ \hbar)	T_c (MeV)
8	0.8	4.411	2.981	0.873
16	0.475	8.512	6.567	0.753
32	0.375	16.421	10.980	0.8124

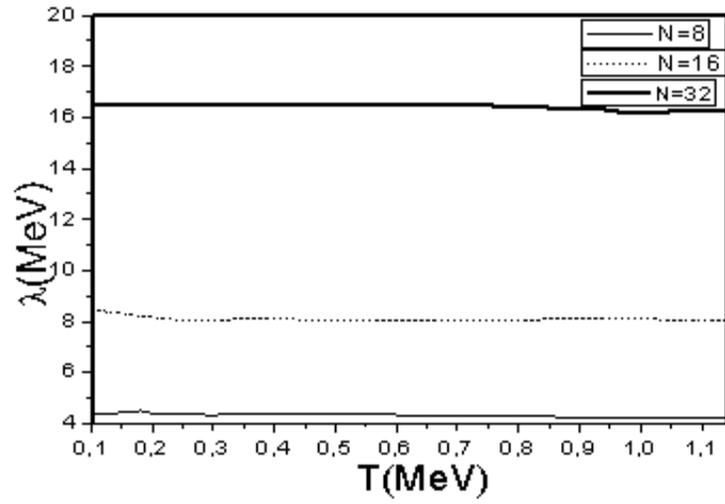


FIG. 4-5 – Variations du niveau de Fermi en fonction de la température pour différentes valeurs du nombre de particules.

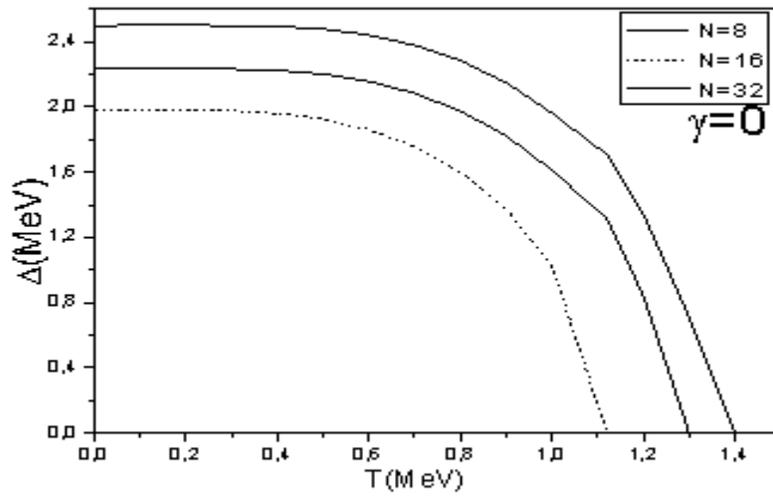


FIG. 4-6 – Evolution de la demi largeur du gap en fonction de la température pour un moment angulaire nul.

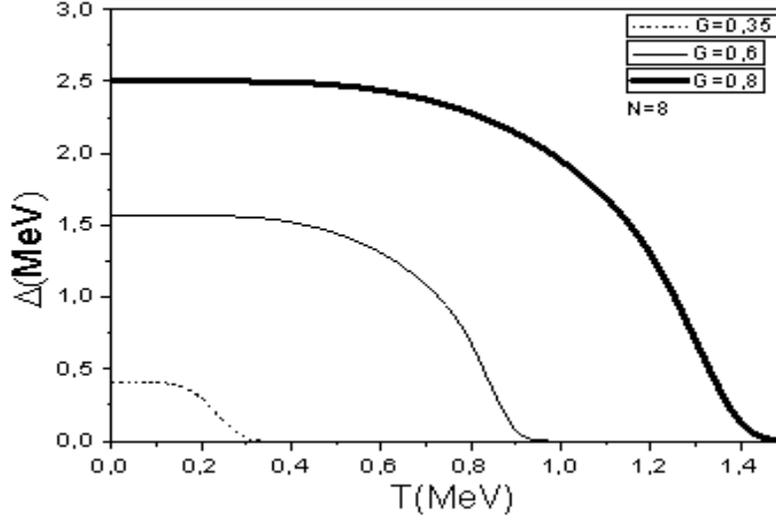


FIG. 4-7 – Variation de la demi largeur du gap en fonction de la température pour un moment angulaire nul et pour différentes valeurs de G dans le cas $N = 8$.

Lorsque $\gamma = 0$, la résolution du système (4.2) nous permet d'obtenir les variations de la demi largeur du gap en fonction de la température pour différentes valeurs de N ($N = 8, 16, 32$). Nous avons représenté dans les figures (4-7) et (4-8) l'allure de la demi-largeur du gap en fonction de la température pour différentes valeurs du nombre de particules puis différentes valeurs de l'intensité de la force d'appariement. Le comportement des courbes (4-6), (4-7) et (4-8) est semblable à celui obtenu avec le modèle uniforme.

La figure (4-6) nous montre l'influence du nombre de particules ainsi que la constante d'appariement G sur la température critique. Ces derniers permettent, par leur accroissement, d'augmenter la température critique et la demi largeur du gap comme l'indiquent respectivement les figures (4-7) et (4-8).

L'intégration du moment angulaire comme le montre la figure (4-9), diminue la demi-largeur du gap. En effet la température critique a diminué, pour $N = 8$, de $T \simeq 0.46 \text{ MeV}$ par rapport à la première situation (Lorsque $\gamma = 0$). La figure confirme également la conclusion concernant l'influence du nombre de particules. Il apparaît clairement que

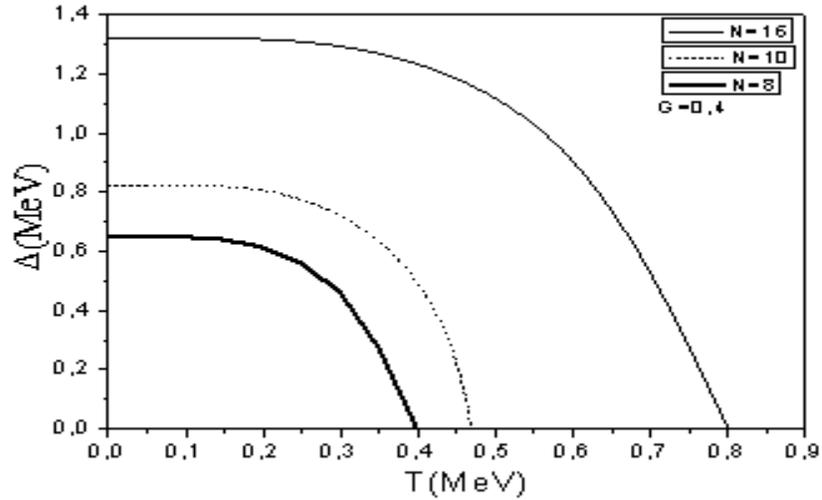


FIG. 4-8 – Comportement de le demi largeur du gap en fonction de la température pour un moment angulaire nul et pour différentes valeurs de N avec $G = 0.4$.

l'accroissement du moment angulaire s'accompagne d'un accroissement de brisure de paires appariées.

Les résultats précédemment établis nous permettent à présent d'étudier les variations de quelques observables du système de particules en fonction de la température.

Il s'agit en particulier de :

a) L'énergie d'excitation

Pour un moment angulaire nul, nous avons représenté dans la figure (4-10), l'énergie d'excitation. Cette dernière est d'abord nulle sur un premier intervalle de température. Sur cet intervalle, la demi largeur du gap est stable autour d'une certaine valeur (voir figure (4-6)). Au delà de celle-ci, on enregistre un accroissement parabolique de l'énergie d'excitation jusqu'à la température critique. Sur le même intervalle, la demi largeur du gap diminue significativement jusqu'à s'annuler. A partir de la température critique, la courbe est monotone croissante avec une allure quasi-linéaire.

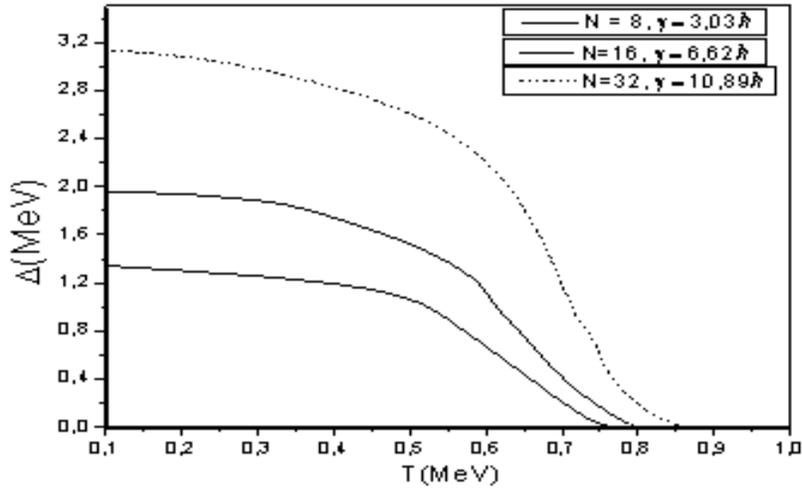


FIG. 4-9 – Même commentaire que celui de la figure 4-6 dans le cas $\gamma \neq 0$.

L'inclusion du moment angulaire, comme le montre la figure (4-11) augmente significativement l'énergie d'excitation par rapport à la situation précédente lorsque la température est en dessous de la température critique. Au delà de celle-ci, l'énergie d'excitation décroît presque linéairement.

En fait, à partir de la température critique, la chaleur annihile graduellement les effets du moment angulaire comme le montre la figure (4-12) pour $N = 8, 16$ et 32 .

Pour $N = 8$ nous remarquons une décroissance de l'énergie d'excitation en fonction de la température presque à la valeur 0.3 MeV , puis croit de nouveau jusqu'à T_c . Ceci s'explique par le fait que l'effet du moment angulaire a été diminué par le fort couplage ($G = 0.8$) des particules appariées.

b) La capacité calorifique

La figure (4-13) montre l'évolution en fonction de la température de la capacité calorifique pour un moment angulaire nul. Celle-ci augmente rapidement pour une température $T < T_c$ et atteint son maximum pour $T = T_c$. Elle diminue significativement par la suite

sur un petit intervalle donné. Au delà de cet intervalle, l'allure de la courbe dépend de la valeur de la constante d'appariement utilisée. Plus cette dernière est petite plus la courbe a tendance à prendre une forme parabolique avec une pente plus élevée comme c'est indiqué dans la figure (4-14).

Après inclusion du moment angulaire, les résultats obtenus sont présentés dans la figure (4-15). Cette dernière montre que dans le cas $T < T_c$, les deux courbes qui correspondent à $N = 8, G = 0.35$ et $N = 16, G = 0.475$ nous donnent une capacité calorifique négative. En effet, pour cet intervalle de température, le système change d'état pour une température inférieure à la température critique (passage à l'état liquide ou vapeur).

Pour $N = 8, G = 0.8$ la courbe suit le même comportement que celui dans la figure (4-14) qui correspond à $\gamma = 0$, cependant on observe une diminution dans les valeurs de la capacité calorifique. Par contre, pour le même nombre de particules ($N = 8$) et $G = 0.35$, la capacité calorifique devient négative, le système change donc d'état.

c) L'entropie

En ce qui concerne l'entropie, la figure (4-16) montre que la variation de l'entropie suit les mêmes tendances que l'énergie d'excitation pour un moment angulaire nul (voir commentaire ci-dessus). En effet, pour $T < T_c$, l'entropie est plus faible que dans le cas $T > T_c$. Ce qui prouve que les particules sont plus ordonnées dans l'état supraconducteur que dans l'état normal (gaz de Fermi).

Par contre, en incluant le moment angulaire, comme le montre la figure (4-17), l'entropie croît à partir d'une valeur quasi-nulle sous forme concave jusqu'à la température critique. Le degré de concavité augmente avec la diminution de la constante d'appariement. Ensuite, elle continue son ascension sous forme linéaire. Le désordre du système est alors plus important pour $T < T_c$ (évolution parabolique) à cause de l'effet de la température et du moment angulaire. Au delà de celle-ci, l'effet du moment angulaire est diminué par la température et le désordre s'accroît moins vite (évolution linéaire). Contrairement au cas précédent, les particules sont moins ordonnées dans le cas supraconducteur que dans le cas d'un gaz de Fermi.

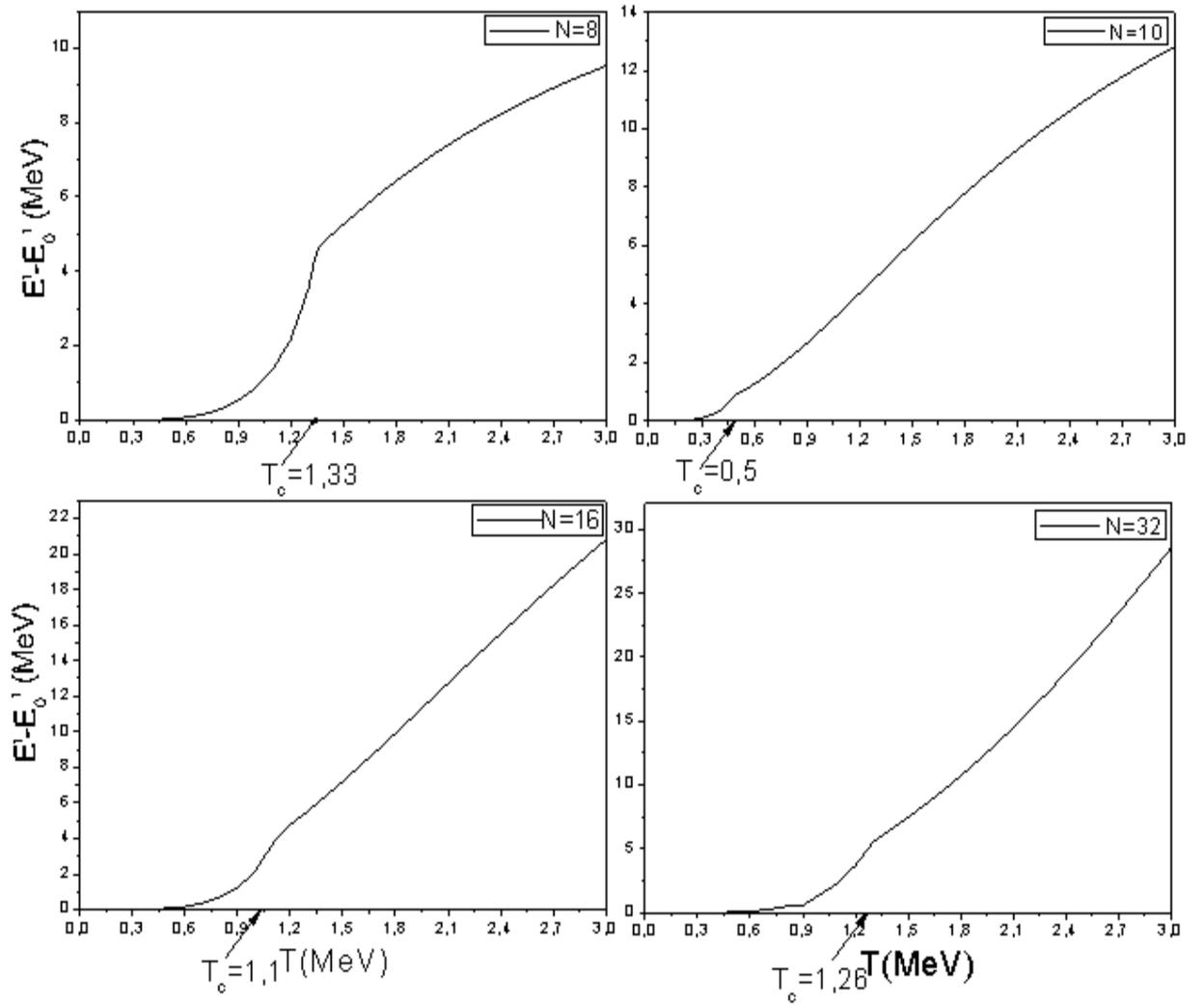


FIG. 4-10 – Variation de l'énergie d'excitation en fonction de la température pour différentes valeurs du nombre de particules et pour un moment angulaire nul.

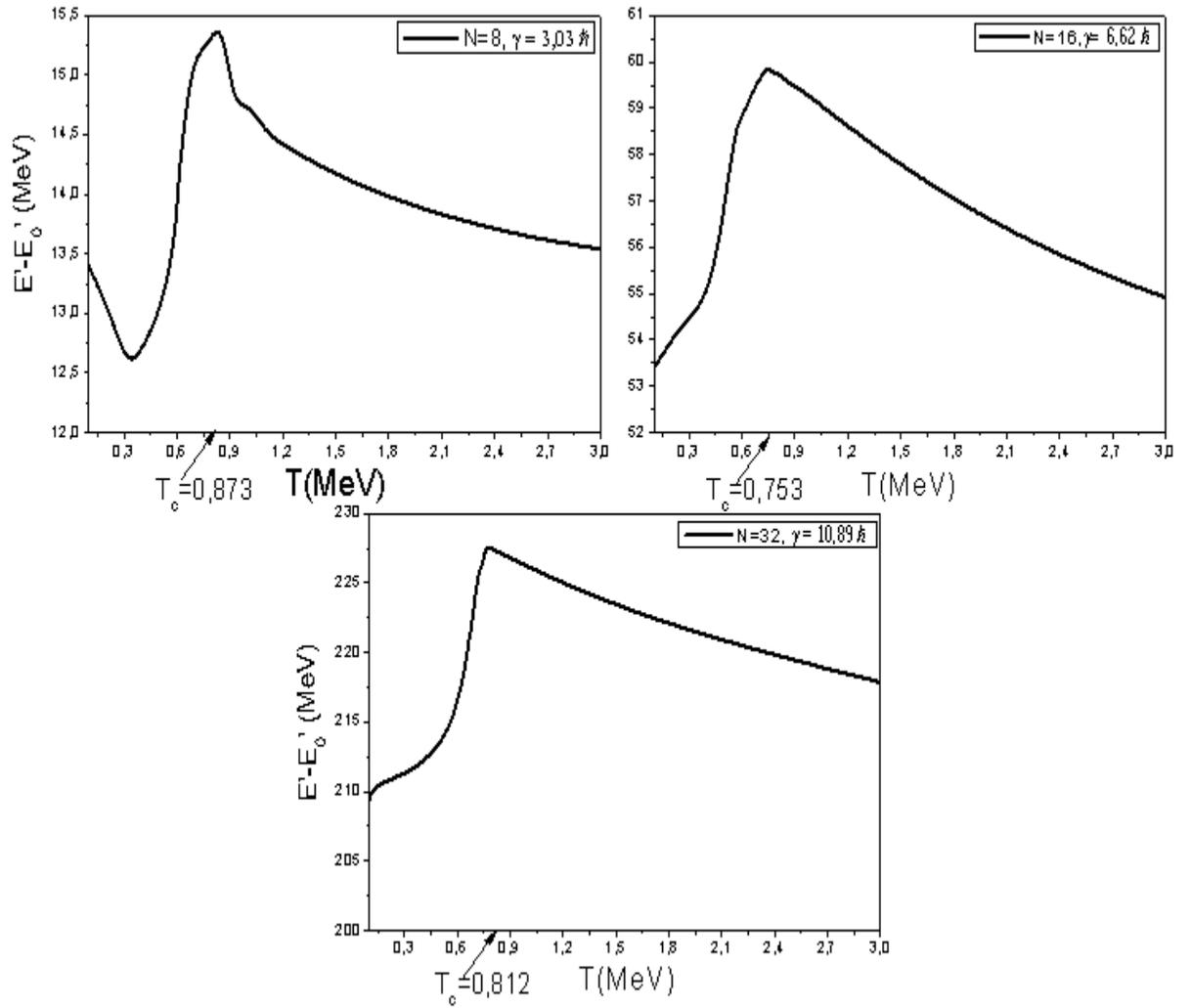


FIG. 4-11 – Même commentaire que celui de la figure 4-10 en tenant compte du moment angulaire.

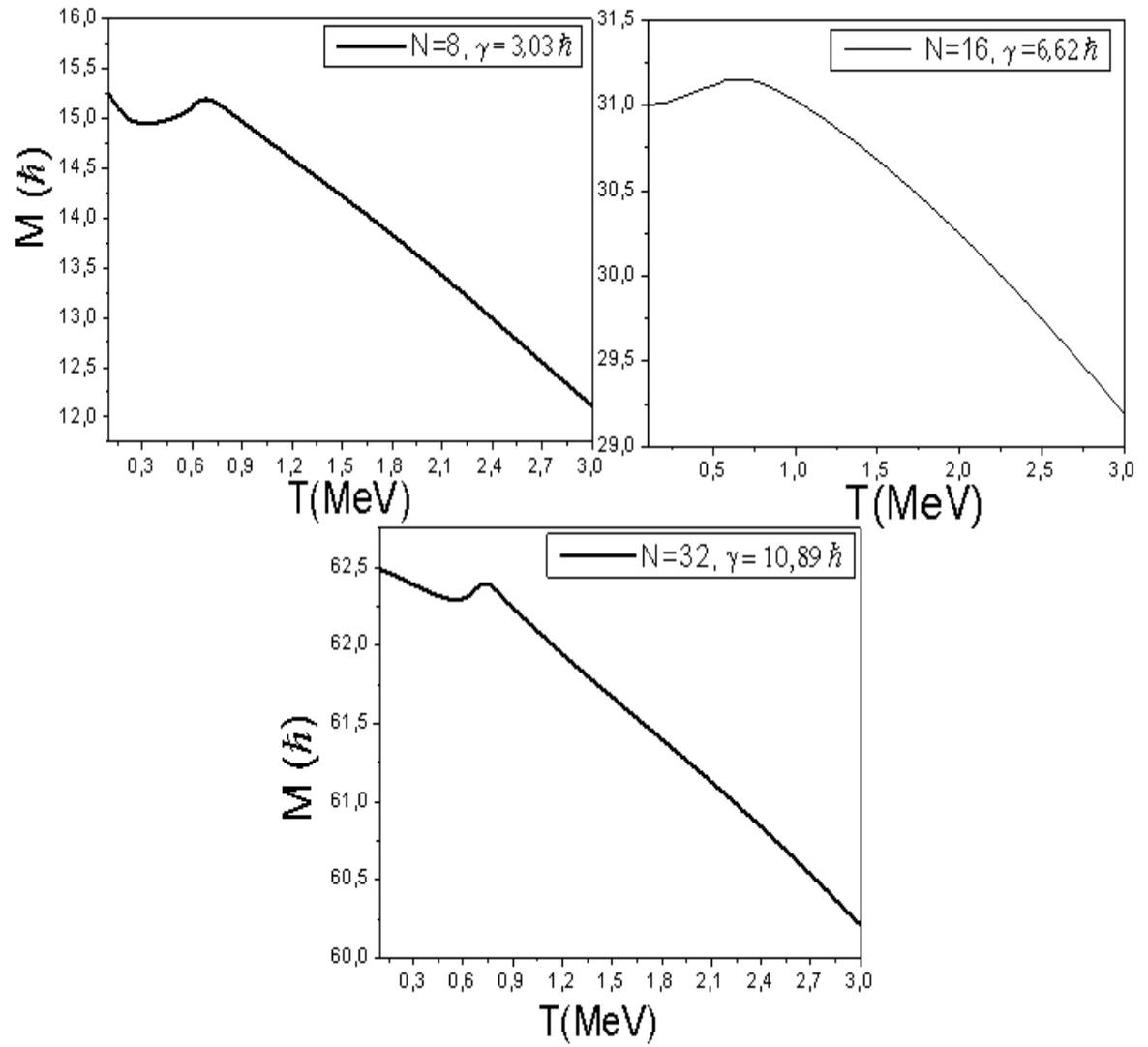


FIG. 4-12 – Variations du moment angulaire en fonction de la température pour différentes valeurs du nombre de particules.

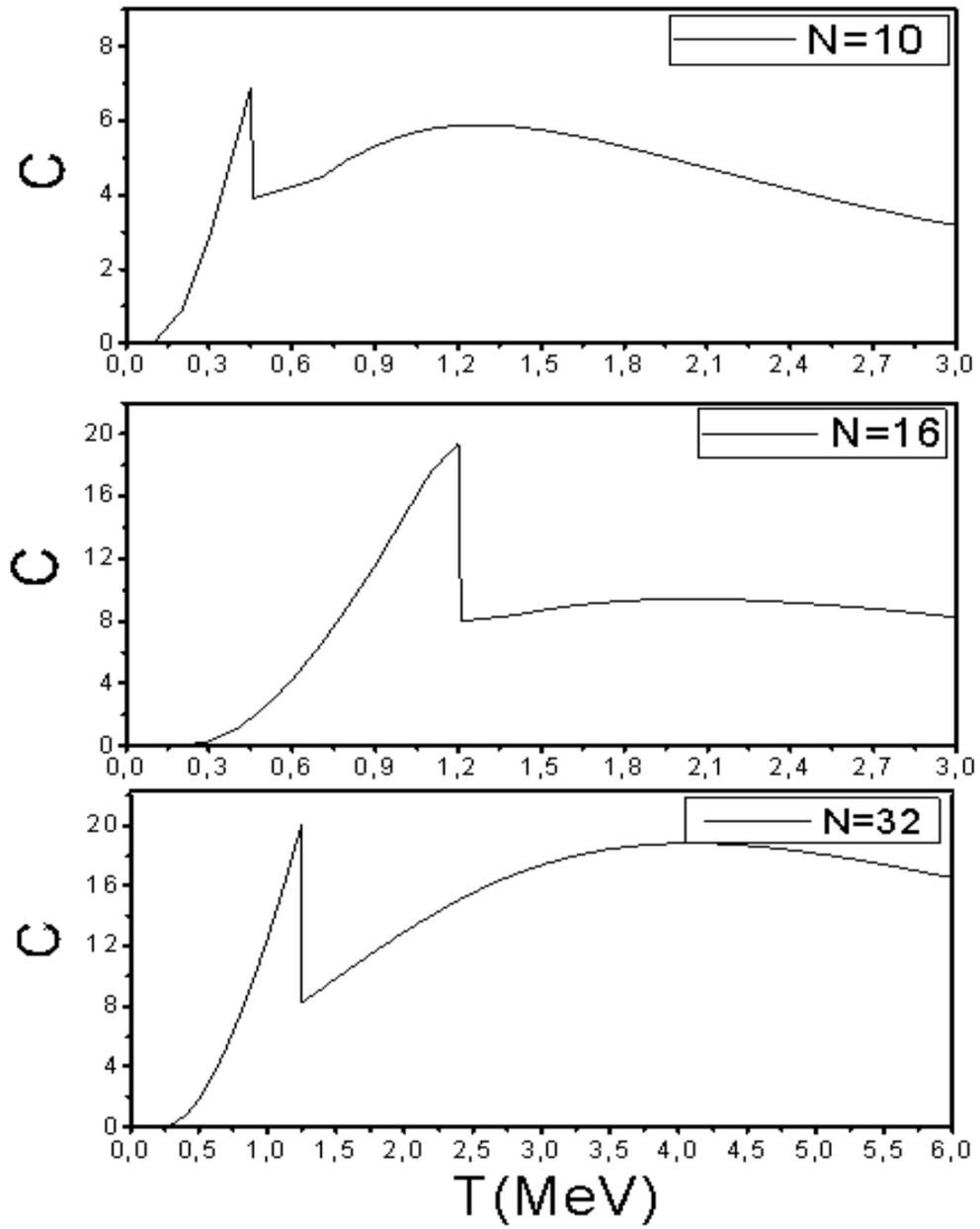


FIG. 4-13 – Capacité calorifique en fonction de la température pour différentes valeurs du nombre de particules lorsque $\gamma = 0$.

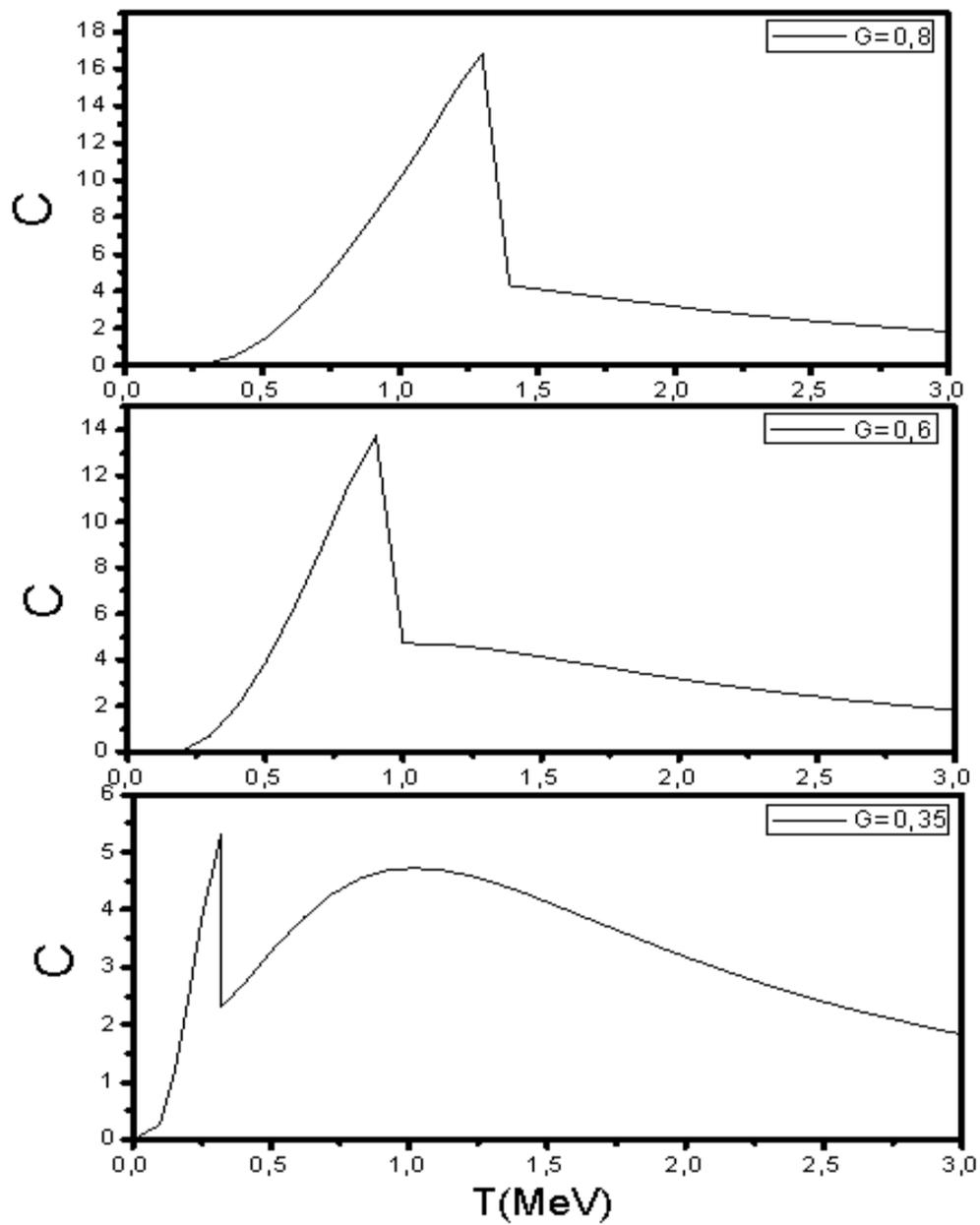


FIG. 4-14 – Capacité calorifique en fonction de la température pour $N = 8$ et pour différentes valeurs de G et un moment angulaire nul. Notons que $G_c = 0.26$.

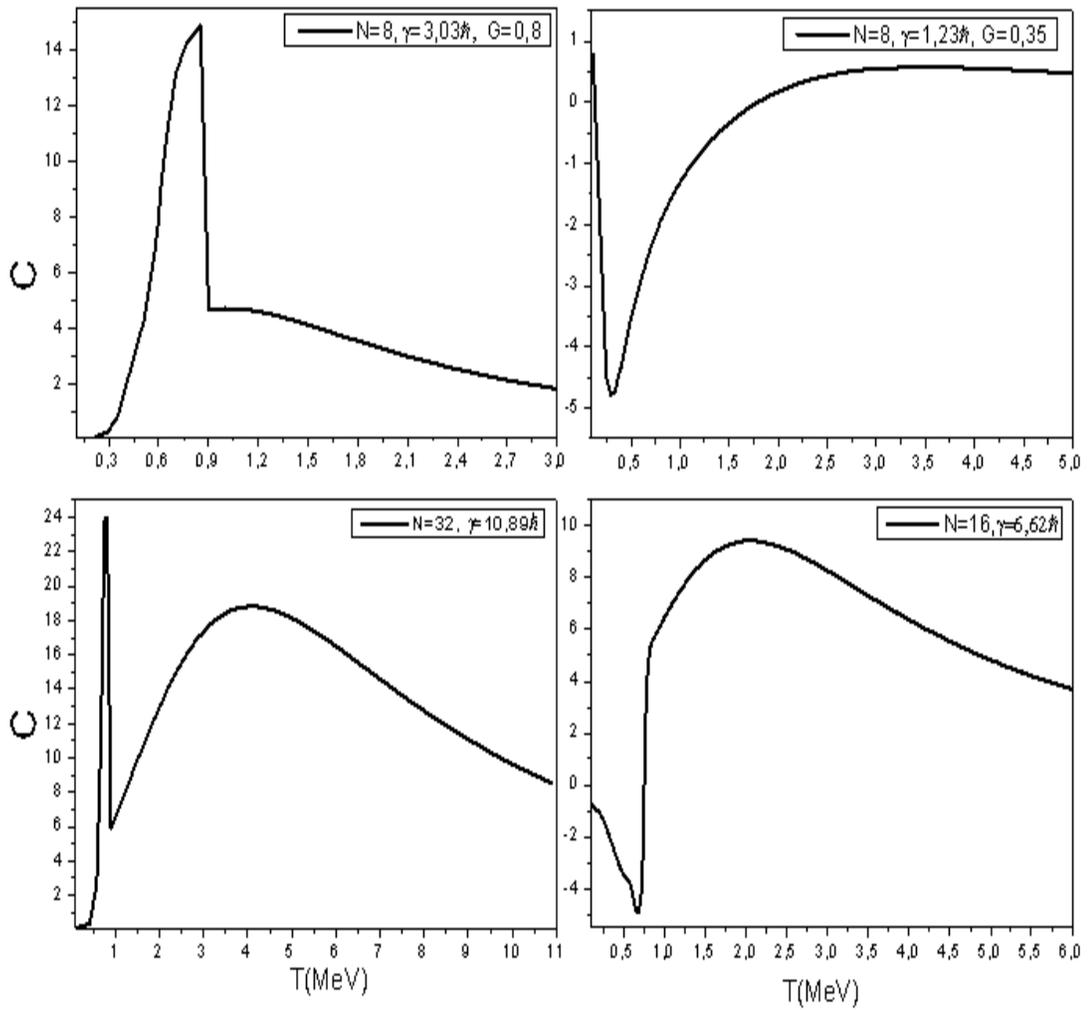


FIG. 4-15 – Même commentaire que celui de la figure 4-13 avec prise en compte du moment angulaire.

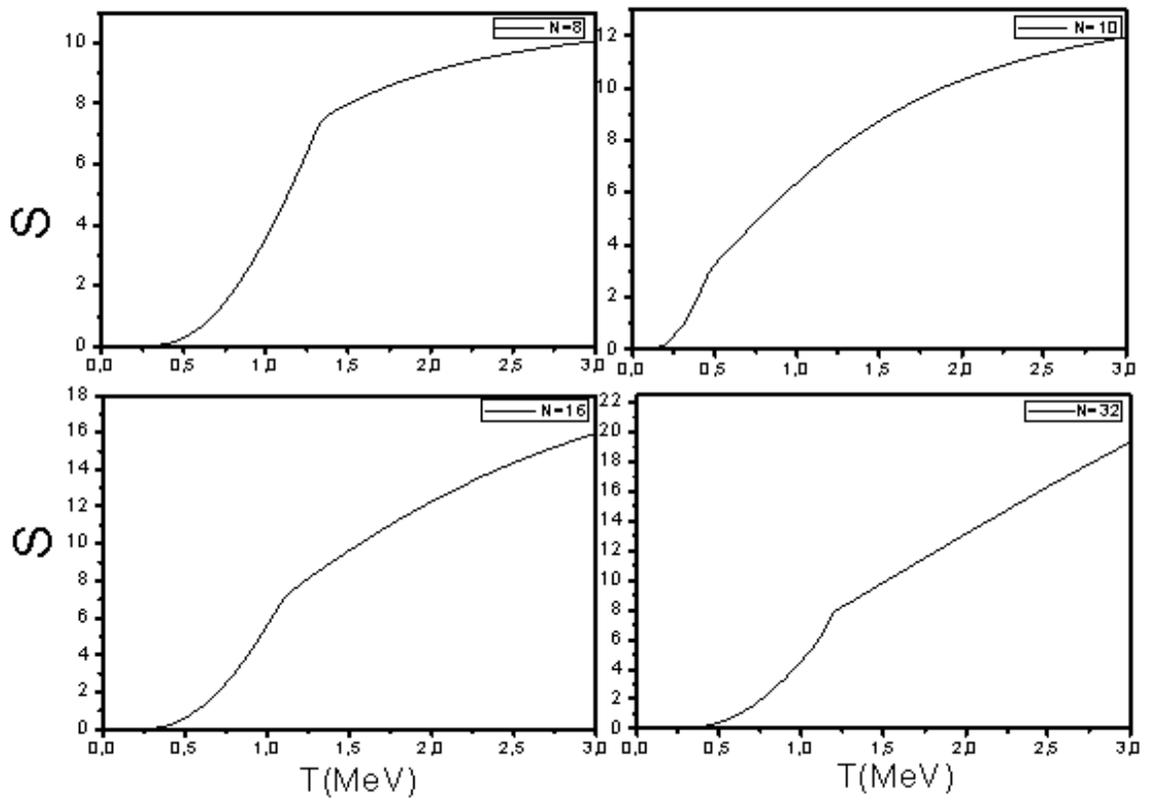


FIG. 4-16 – Evolution de l'entropie en fonction de la température pour différentes valeurs de N et un moment angulaire nul.

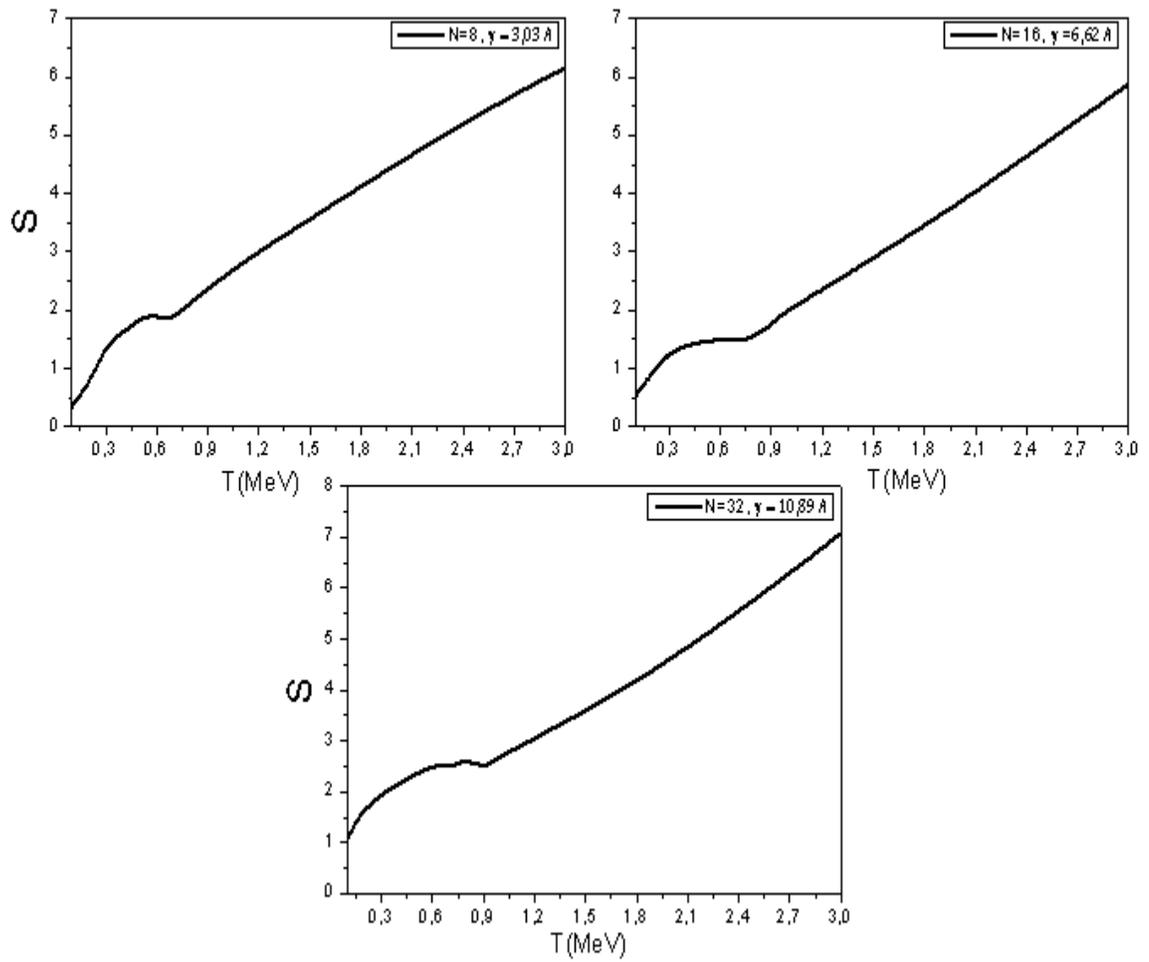


FIG. 4-17 – Même commentaire que celui de la figure 4-16 avec prise en compte du moment angulaire.

4.3 Cas réaliste

Après avoir étudié ces modèles schématiques, nous avons tenté de nous intéresser au cas réaliste. Nous avons pour cela opté pour les énergies et états propres d'un champ moyen déformé de Woods-Saxon en prenant en compte les niveaux d'énergie correspondant à un nombre de couches maximal égal à 12 ($N_{\max} = 12$). Les paramètres de ce modèle sont ceux des références [38, 39]

A titre d'exemple, nous avons choisi deux noyaux : le Gadolinium (${}^{142}_{64}Gd$) et l'Hafnium (${}^{154}_{72}Hf$). Le premier est un noyau du début de la table des noyaux des terres rares et le second est en fin de la table. Nous avons étudié séparément les système neutrons et protons pour chaque noyau, car nous avons supposé que ces systèmes n'interagissent pas.

N'ayant pas pu résoudre le système non linéaire (4.1) nous nous sommes limité au cas $\gamma = 0$, c'est à dire à la résolution du système habituel (4.2) sans la prise en compte du moment angulaire. En effet, la méthode itérative de Broyden ne converge pas lors de la résolution (4.1) et ce malgré le changement fréquent des valeurs initiales, contrairement aux cas schématiques.

Dans le présent travail, nous avons choisi de déduire les valeurs de G_{pp} et G_{nn} directement à partir des valeurs expérimentales des paramètres du gap Δ_{pp} et Δ_{nn} . Ces dernières sont déterminées à partir des différences de masse pair-impair définies par [4] :

$$\begin{aligned}\Delta_{pp}^{\text{exp}} &= -\frac{1}{8} [M(Z+2, N) - 4M(Z+1, N) + 6M(Z, N) - 4M(Z-1, N) \\ &\quad + M(Z-2, N)] \\ \Delta_{nn}^{\text{exp}} &= -\frac{1}{8} [M(Z, N+2) - 4M(Z, N+1) + 6M(Z, N) - 4M(Z, N-1) \\ &\quad + M(Z, N-2)]\end{aligned}$$

où M est la masse expérimentale déduite de la table de Moller [58].

Les valeurs des constantes d'appariement correspondant aux différents noyaux considérés sont données dans le tableau ci-dessous pour la théorie BCS habituelle dans le cas

de l'appariement entre particules identique.

Noyaux	G_n	G_p
${}^{142}_{64}Gd$	0,0782	0,0797
${}^{154}_{72}Hf$	0,0786	0,078

Nous avons représenté dans les tableaux ci-dessous les valeurs du paramètre du gap, (pour les systèmes protons et neutrons), et les valeurs des niveaux de Fermi pour le noyau Gadolinium en fonction de la température.

$T(MeV)$	$\Delta_n(MeV)$	$\lambda_n(MeV)$
0	0.974	-11.805
0.1	0.974	-11.805
0.2	0.967	-11.806
0.3	0.919	-11.808
0.4	0.787	-11.806
0.5	0.487	-11.797
0.55	9.2×10^{-3}	-11.788
0.6	5.3×10^{-3}	-11.758
0.61	0	-11.751

$T(MeV)$	$\Delta_p(MeV)$	$\lambda_p(MeV)$
0	1.428	-2.2
0.1	1.428	-2.2
0.2	1.427	-2.2
0.3	1.411	-2.198
0.4	1.361	-2.193
0.5	1.257	-2.182
0.55	1.178	-2.175
0.6	1.07	-2.166
0.7	0.76	-2.144
0.75	0.476	-2.13
0.8	4.3×10^{-4}	-2.123
0.82	0	-2.119

La même étude pour le Hafnium donne les valeurs :

$T(MeV)$	$\Delta_n(MeV)$	$\lambda_n(MeV)$
0	0.923	-11.995
0.1	0.923	-11.995
0.2	0.918	-11.991
0.3	0.886	-11.977
0.4	0.805	-11.955
0.5	0.64	-11.927
0.6	0.242	-11.894
0.61	0.13	-11.891
0.63	5×10^{-3}	-11.888
0.64	0	-11.872

$T(MeV)$	$\Delta_p(MeV)$	$\lambda_p(MeV)$
0	1.295	-0.0296
0.1	1.295	-0.0296
0.2	1.294	-0.0296
0.3	1.273	-0.0275
0.4	1.213	-0.0189
0.5	1.092	1.3×10^{-2}
0.6	0.88	3.1×10^{-2}
0.7	0.462	7.6×10^{-2}
0.74	6.7×10^{-4}	0.097
0.75	0	0.091

A partir de ces valeurs, nous obtenons les graphes donnant les variations de la demi largeur du gap en fonction de la température pour les systèmes neutrons et protons donnés par la figure (4-18) ci-dessous. Nous remarquons que l'allure des courbes est semblable à celle obtenue par les modèle uniforme et de Richardson.

Aussi, il apparaît clairement que la demi largeur du gap s'annule plus vite pour les neutrons que pour les protons et ce pour les deux noyaux considérés. La température critique est de $0,8MeV$ pour les protons du Gadolinium et de $0,6MeV$ pour les neutrons alors qu'elle est de $0,74MeV$ pour les protons de l'Hafnium et de $0,63MeV$ pour les neutrons. Ceci signifie que les paires de neutrons nécessitent moins d'énergie pour se briser en comparaison aux paires de protons.

4.3.1 L'énergie d'excitation

La courbe (4-19) donne l'évolution, pour chacun des noyaux, de l'énergie d'excitation en fonction de la température. Cette courbe conserve la même allure que celle obtenue dans le cas du modèle de Richardson pour les systèmes neutrons et protons. Pour le Hafnium, l'énergie d'excitation est plus importante pour les neutrons que pour les protons lorsque $T < T_c$. Au-delà de la température critique, la tendance s'inverse. L'énergie d'excitation

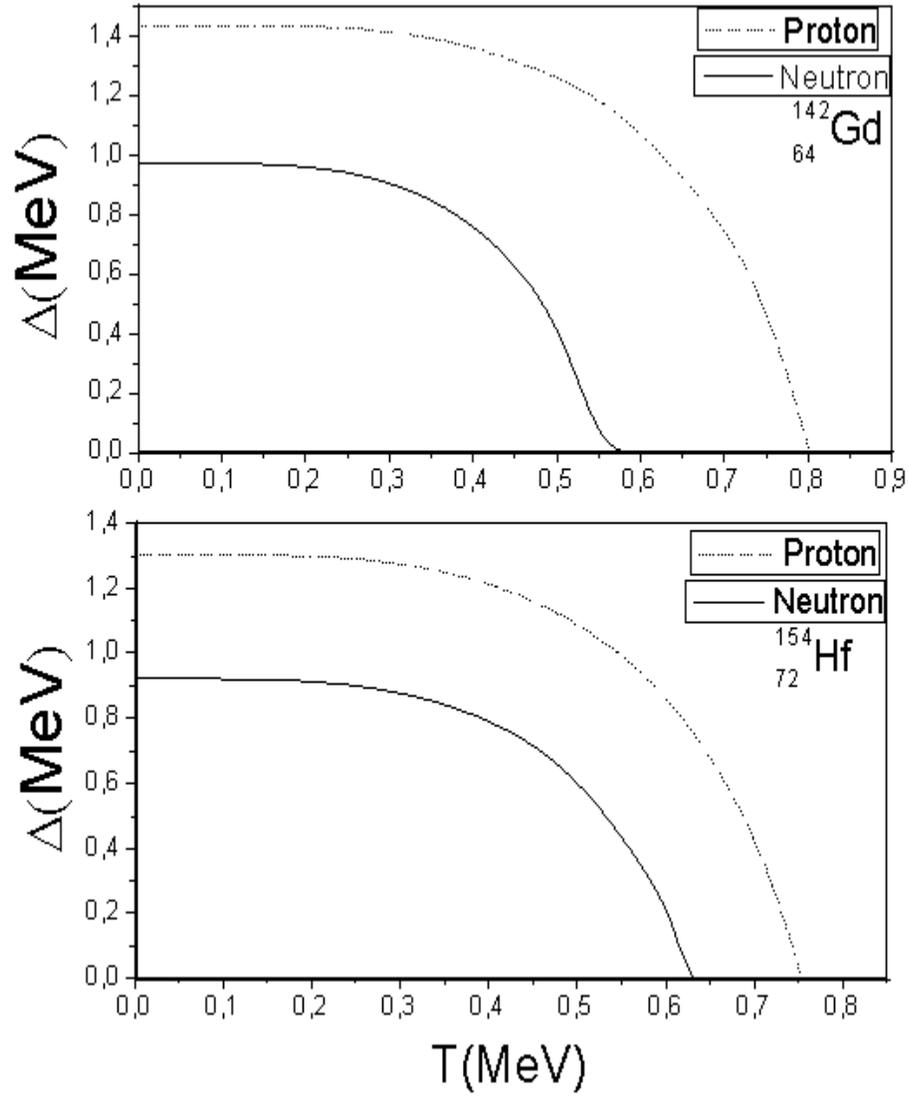


FIG. 4-18 – Evolution de la demi largeur du gap pour les deux systèmes protons et neutrons, en fonction de la température, pour le Gadolinium ($^{142}_{64}\text{Gd}$) et le Hafnium ($^{154}_{72}\text{Hf}$).

des protons du ${}^{142}_{64}Gd$ est plus petite que celle pour le noyau ${}^{154}_{72}Hf$. On a une situation inverse pour les neutrons.

4.3.2 L'entropie

Le comportement de l'entropie en fonction de la température pour ces deux noyaux est semblable à celui du modèle de Richardson (voir figure(4-20)). Toutefois, il convient de préciser que le désordre atteint les neutrons plus vite que les protons parce que les neutrons perdent leur appariement avant les protons, donc l'énergie requise pour leur excitation est plus faible.

4.3.3 La capacité calorifique

La figure (4-21) montre que le pic au point $T = T_c$ pour les neutrons et les protons des deux noyaux est plus élevé pour les protons que pour les neutrons. Ce comportement peut s'expliquer par le fait que les paires de protons ont besoin de plus d'énergie pour se briser que les paires de neutrons (voir figure(4-18)).

Pour $T > T_c$, les deux courbes ont des comportements différents que ceux relatifs au modèle schématique de Richardson et ce pour le même intervalle de température. Ceci confirme notre conclusion concernant l'effet de la constante d'appariement sur la capacité calorifique dans le cas du modèle de Richardson. Le fait que la constante d'appariement soit petite, la capacité calorifique ne diminue pas sur l'intervalle considéré mais pour une température plus grande. Le comportement observé dans le cas du modèle de Richardson pourra ainsi être observé dans ce cas.

En conclusion , l'utilisation des trois modèles nous a permis de dégager des résultats analogues concernant l'appariement des particules. Ce dernier diminue avec l'augmentation de la température et du moment angulaire. Cette diminution est accompagnée par l'excitation des particules qui, sans moment angulaire, est plus importante au dessus de la température critique. Dans le cas contraire, la situation est inversée du fait que l'effet du moment angulaire diminue au delà de cette température. A partir de la température

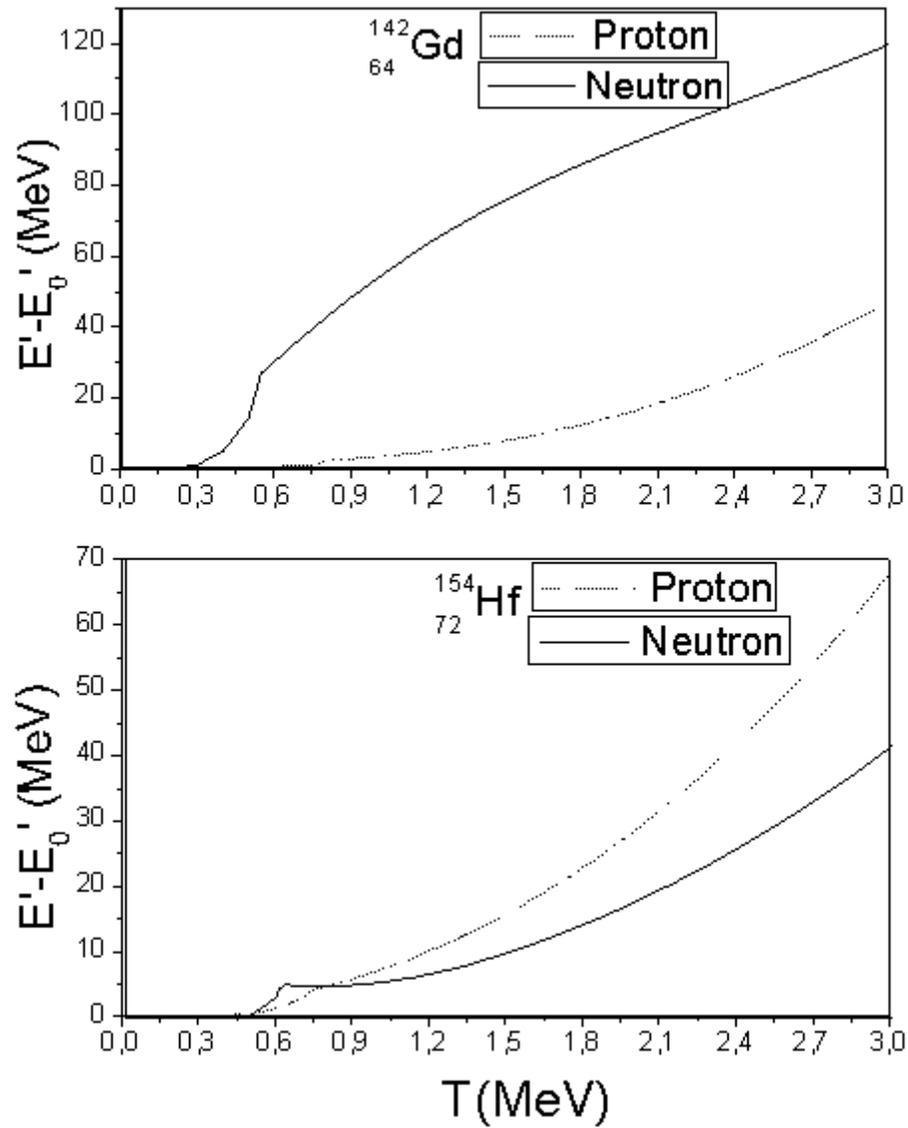


FIG. 4-19 – Comportement de l'énergie d'excitation pour les deux systèmes protons et neutrons, en fonction de la température, pour le Gadolinium ($^{142}_{64}\text{Gd}$) et le Hafnium ($^{154}_{72}\text{Hf}$).

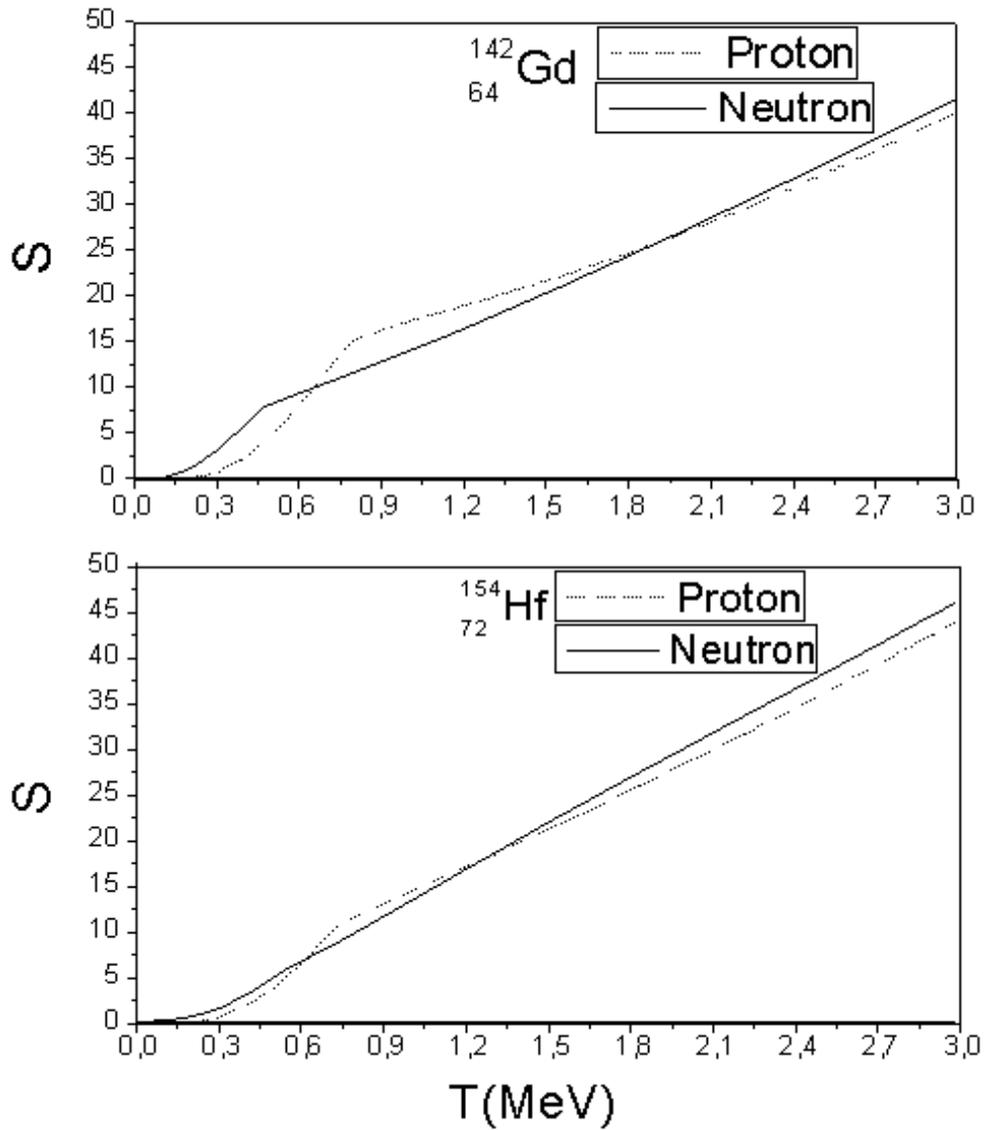


FIG. 4-20 – Variation de l'entropie pour les deux systèmes protons et neutrons, en fonction de la température pour le Gadolinium ($^{142}_{64}\text{Gd}$) et le Hafnium ($^{154}_{72}\text{Hf}$).

critique le système se transforme en gaz de Fermi.

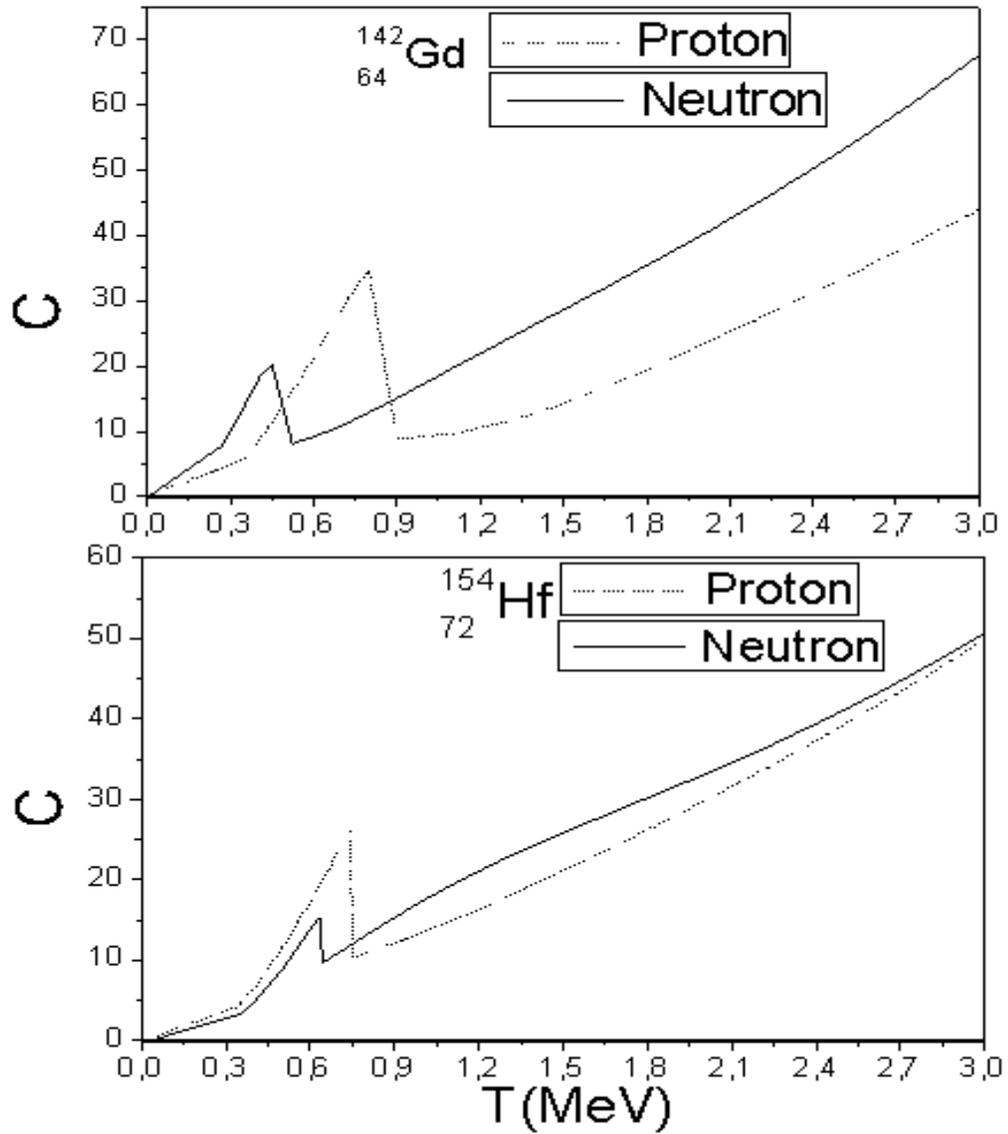


FIG. 4-21 – Evolution de la capacité calorifique pour les deux systèmes protons et neutrons, en fonction de la température pour le Gadolinium ($^{142}_{64}\text{Gd}$) et le Hafnium ($^{154}_{72}\text{Hf}$).

Conclusion

A travers ce travail, nous avons d'étudié les effets simultanés des corrélations d'appariement et du moment angulaire sur les noyaux chauds.

Pour ce faire, nous avons établi dans le cadre de la méthode FTBCS (méthode BCS à température finie) l'expression de la grande fonction partition, à partir de laquelle nous avons explicité les équations du gap et les expressions des grandeurs statistiques usuelles comme le nombre de particules, le moment angulaire, l'énergie du système, la capacité calorifique et l'entropie.

Nous avons par la suite repris l'étude en utilisant la méthode des intégrales de chemin. La théorie des perturbations nous a permis de reformuler la grande fonction partition. Cette dernière a été écrite sous forme d'intégrale de chemin par le biais de la matrice densité. Le calcul de la grande fonction partition est difficile du fait qu'elle contient une interaction à deux particules. Ce problème a été contourné par l'utilisation de la transformation de Hubbard-Stratonovich. L'interaction à deux corps a été remplacée par une interaction à un corps avec un champ moyen. Cette méthode est l'équivalent du champ moyen d'Hartree-Fock. L'évaluation approximative de l'intégrale de chemin a été ensuite établie dans le cadre de l'approximation statique qui consiste à supposer que les chemins d'intégration sont indépendants du temps imaginaire. On a pu ainsi obtenir un nouvel hamiltonien dont la diagonalisation a mené à l'établissement de la transformation de Bogoliubov-Valatin et de l'énergie libre du système. Cette dernière a été minimisée par la méthode du col afin d'obtenir l'équation du gap. Les résultats obtenus sont identiques à ceux de la précédente méthode (FTBCS).

Nous avons appliqué les équations précédemment obtenues ainsi que les grandeurs

statistiques à un modèle schématique uniforme. Ceci nous a permis de lisser l'ensemble des équations et, donc, de passer des expressions discrètes à des expressions continues à l'aide d'une densité de niveaux supposée constante dans un domaine contenant le niveau de Fermi. Ainsi, nous avons obtenu l'expression de la demi largeur du gap en fonction de la température puis du moment angulaire. Nous avons aussi exprimé l'énergie d'excitation en fonction de la demi largeur du gap puis du moment angulaire.

La résolution de ces équations a été effectuée par un code de calcul que nous avons confectionné. Il nous a permis de comprendre le comportement des corrélations d'appariement par rapport aux variations de la température et du moment angulaire.

En effet, ces corrélations disparaissent à partir d'une température critique ce qui permet de générer une énergie d'excitation transformant le système en un gaz de Fermi. Le moment angulaire a le même effet que la température sur les noyaux car pour un moment angulaire critique, le système adopte l'état normal c'est à dire celui de gaz de Fermi et dans lequel les particules deviennent excitées.

Nous avons, enfin, appliqué ces équations au modèle schématique de Richardson et comparé le comportement des grandeurs statistiques en fonction de la température avec et sans moment angulaire. Le même travail a été réalisé pour le modèle réaliste de Woods-Saxon. Ce dernier a été effectué sans prise en compte du moment angulaire du fait de la difficulté de la résolution du système non linéaire, en utilisant la méthode itérative de Broyden. Les résultats obtenus ont confirmé nos conclusions précédentes concernant le comportement des corrélations d'appariement par rapport à la température. Aussi, nous avons constaté que le moment angulaire a tendance à détruire l'appariement. De plus, l'effet de ce dernier s'estompe graduellement une fois que la température tend vers la température critique. L'énergie d'excitation est plus importante en présence du moment angulaire et ce pour une température inférieure à la température critique. Au delà de cette température, l'énergie diminue. Ces conclusions nous ont permis de comprendre les variations de l'entropie c'est à dire le degré de désordre du système avant et après la température critique. En fait, en l'absence du moment angulaire, le degré du désordre est plus important pour une température supérieure à la température critique alors que s'il

existe, la tendance s'inverse.

Nous avons finalement étudié l'effet de la température sur les systèmes neutrons et protons des noyaux Gadolinium(${}^{142}_{64}Gd$) et Hafnium(${}^{154}_{72}Hf$) en utilisant le champ moyen réaliste de Woods-Saxon. Cette étude nous a montré que la brisure des paires de neutrons nécessite moins d'énergie que celle des paires protons. Globalement, le comportement général de toutes les grandeurs statistiques est identique à celui étudié dans le modèle schématique de Richardson sans prise en compte du moment angulaire.

En conclusion, la température et le moment angulaire sont des facteurs qui brisent les corrélations d'appariement existant entre les nucléons du fait qu'ils aident à générer une énergie d'excitation capable de transformer le système nucléaire en un gaz de nucléons de Fermi.

Annexe A

L'hamiltonien du système en représentation quasi particule

Soit l'hamiltonien donné par l'équation (1.30) auquel nous appliquons le théorème de Wick. Le premier terme de l'hamiltonien s'écrit comme suit :

$$a_\nu^+ a_\nu = \langle a_\nu^+ a_\nu \rangle + : a_\nu^+ a_\nu : \quad (\text{A.1})$$

$$a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\nu}} = \langle a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\nu}} \rangle + : a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\nu}} : \quad (\text{A.2})$$

Considérons maintenant le terme correspondant à la deuxième partie de l'hamiltonien. Il s'écrit :

$$\begin{aligned} a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\mu}} a_\mu &= \langle a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ \rangle \langle a_{\tilde{\mu}} a_\mu \rangle - \langle a_\nu^+ a_{\tilde{\mu}} \rangle \langle a_{\tilde{\nu}}^+ a_\mu \rangle + \langle a_\nu^+ a_\mu \rangle \langle a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\mu}} \rangle \\ + \langle a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ \rangle &: a_{\tilde{\mu}} a_\mu : - \langle a_\nu^+ a_{\tilde{\mu}} \rangle : a_{\tilde{\nu}}^+ a_\mu : + \langle a_\nu^+ a_\mu \rangle : a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\mu}} : \\ + &: a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ : \langle a_{\tilde{\mu}} a_\mu \rangle - : a_\nu^+ a_{\tilde{\mu}} : \langle a_{\tilde{\nu}}^+ a_\mu \rangle + : a_\nu^+ a_\mu : \langle a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\mu}} \rangle \\ + &: a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\mu}} a_\mu : \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Appliquons la transformation donnée par l'équation (1.13) aux différents opérateurs. On obtient pour les termes entièrement contractés les résultats suivants :

$$\langle a_k^+ a_l^+ \rangle = \delta_{k\bar{l}} u_k v_l \langle \alpha_k^+ \alpha_{\bar{l}} \rangle - \delta_{\bar{k}l} u_l v_k \langle \alpha_l^+ \alpha_{\bar{k}} \rangle + \delta_{kl} u_k v_k \quad (\text{A.4})$$

$$\langle a_k a_l \rangle = \delta_{k\bar{l}} u_l v_k \langle \alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_l \rangle - \delta_{\bar{k}l} u_k v_l \langle \alpha_l^+ \alpha_{\bar{k}} \rangle + \delta_{kl} u_k v_k \quad (\text{A.5})$$

$$\langle a_k^+ a_l \rangle = u_k u_l \langle \alpha_k^+ \alpha_l \rangle - v_l v_k \langle \alpha_l^+ \alpha_{\bar{k}} \rangle + \delta_{kl} v_k^2 \quad (\text{A.6})$$

$$\langle a_k a_l^+ \rangle = v_k v_l \langle \alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_{\bar{l}} \rangle - u_k v_l \langle \alpha_l^+ \alpha_k \rangle + \delta_{kl} u_k^2 \quad (\text{A.7})$$

Le calcul des différents produits normaux conduit à :

$$: a_k^+ a_l^+ := u_k u_l \alpha_k^+ \alpha_l^+ + u_k v_l \alpha_k^+ \alpha_{\bar{l}} - u_l v_k \alpha_l^+ \alpha_{\bar{k}} + v_k v_l \alpha_{\bar{k}} \alpha_{\bar{l}} \quad (\text{A.8})$$

$$: a_k^+ a_l := u_k v_l \alpha_k^+ \alpha_l^+ + u_k u_l \alpha_k^+ \alpha_l - v_k v_l \alpha_l^+ \alpha_{\bar{k}} + u_l v_k \alpha_{\bar{k}} \alpha_l \quad (\text{A.9})$$

$$: a_k a_l := v_l v_k \alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_{\bar{l}}^+ - u_k v_l \alpha_l^+ \alpha_k + u_l v_k \alpha_k^+ \alpha_l + u_k u_l \alpha_k \alpha_l \quad (\text{A.10})$$

$$: a_k a_l^+ := u_l v_k \alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_l^+ - u_k u_l \alpha_l^+ \alpha_k + v_k v_l \alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_{\bar{l}} + u_k v_l \alpha_k \alpha_{\bar{l}} \quad (\text{A.11})$$

Le produit normal de quatre opérateurs s'écrit :

$$\begin{aligned} : a_k^+ a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{l}} a_l := & (u_{\bar{k}}^2 u_l^2 + v_{\bar{k}}^2 v_l^2) \alpha_k^+ \alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_{\bar{l}} \alpha_l + u_k v_k u_l v_l (\alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_{\bar{l}}^+ \alpha_{\bar{l}} \alpha_{\bar{k}} + \alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_l^+ \alpha_l \alpha_{\bar{k}} \\ & + 2\alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_l^+ \alpha_{\bar{l}} \alpha_{\bar{k}} - u_l v_l (u_k^2 + v_k^2) \left[\alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_{\bar{k}}^+ \left(\alpha_{\bar{l}}^+ \alpha_{\bar{l}} + \alpha_l^+ \alpha_l \right) + \left(\alpha_l^+ \alpha_l + \alpha_{\bar{l}}^+ \alpha_{\bar{l}} \right) \alpha_{\bar{l}} \alpha_l \right] \\ & - u_{\bar{k}}^2 v_l^2 \left(\alpha_k^+ \alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_l^+ \alpha_{\bar{l}}^+ + \alpha_{\bar{l}} \alpha_l \alpha_{\bar{k}} \alpha_k \right) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

L'hamiltonien, donné par l'équation (1.30), devient :

$$H' = E_0 + H_{11} + H_{20} + H_{02} + H_{22} + H_{13} + H_{31} + H_{40} + H_{04} \quad (\text{A.13})$$

où E_0 , H_{11} , (H_{20} et H_{02}), H_{22} , (H_{13} et H_{31}), (H_{40} et H_{04}) sont donnés respectivement par les équations (1.33), (1.36), (1.39), (1.41), (1.43) et (1.46).

Annexe B

Dérivées partielles du deuxième ordre

L'expression du dénominateur de la densité de niveaux donnée par l'équation (1.75) contient des dérivées partielles du premier et deuxième ordre de Ω par rapport aux paramètres α , λ et β que l'on doit expliciter.

En tenant compte de l'équation (1.65), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu^2} = \sum_{\nu > 0} m_\nu \left\{ -\frac{\partial}{\partial \mu} (\beta (E_\nu - \gamma m_\nu)) \frac{e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)})^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} (\beta (E_\nu + \gamma m_\nu)) \frac{e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)})^2} \right\} \quad (\text{B.1})$$

Sachant que :

$$\frac{\partial}{\partial \mu} (\beta (E_\nu \pm \gamma m_\nu)) = \beta \frac{\Delta}{E_\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial \mu} \pm m_\nu \quad ; \quad \frac{\partial E_\nu}{\partial \mu} = \frac{\Delta}{E_\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial \mu} \quad (\text{B.2})$$

il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu^2} &= -\beta \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \mu} \sum_{\nu > 0} \frac{m_\nu}{E_\nu} \left\{ \frac{e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)})^2} - \frac{e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)})^2} \right\} \\ &\quad + \sum_{\nu > 0} m_\nu^2 \left\{ \frac{e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)})^2} + \frac{e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)})^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

En tenant compte du fait que :

$$\frac{e^{ex}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{1}{4 \cosh^2 x} = \frac{1}{4} \operatorname{sech}^2 x \quad (\text{B.4})$$

l'expression (B.3) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu^2} &= \frac{1}{4} \sum_{\nu > 0} m_\nu^2 \left[\operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) + \operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) \right] \\ &\quad - \beta \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \mu} \sum_{\nu > 0} \frac{m_\nu}{4E_\nu} \left[\operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) - \operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

La condition de conservation du nombre de particules donnée par l'équation (1.62) nous permet de calculer $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha^2}$. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha^2} &= -\frac{1}{2\beta} \sum_{\nu > 0} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\beta \varepsilon_\nu - \alpha}{E_\nu} \right) \left\{ \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) + \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) \right\} \\ &\quad - \sum_{\nu > 0} \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{E_\nu} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\beta E_\nu) \left\{ \frac{e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)})^2} + \frac{e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)})^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

En tenant compte de :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (\beta E_\nu) = -\frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{E_\nu} + \frac{\beta \Delta}{E_\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} \quad (\text{B.7})$$

et de :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\beta \varepsilon_\nu - \alpha}{E_\nu} \right) = -\frac{1}{E_\nu^3} \left(\Delta^2 + (\varepsilon_\nu - \lambda) \beta \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} \right) \quad (\text{B.8})$$

on arrive à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha^2} &= \sum_{\nu > 0} \left(\frac{\Delta^2}{2\beta E_\nu^3} + \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{4E_\nu^3} \beta \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} \right) \left\{ \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) + \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) \right\} \\ &\quad + \sum_{\nu > 0} \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{4E_\nu^2} \left(\varepsilon_\nu - \lambda - \beta \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} \right) \left\{ \operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) + \operatorname{sech}^2 \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Pour le calcul de $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta^2}$ on utilise l'équation (1.83) donnant l'énergie du système.

Cette dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta^2} &= \frac{1}{2\beta} \sum_{\nu>0} \varepsilon_\nu \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\beta(\varepsilon_\nu - \lambda)}{E_\nu} \right) \left\{ \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) + \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) \right\} \\
&+ \sum_{\nu>0} \frac{\varepsilon_\nu (\varepsilon_\nu - \lambda)}{2E_\nu} \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta E_\nu) \left\{ \frac{e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)})^2} + \frac{e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)})^2} \right\} \\
&+ \frac{2\Delta}{G} \frac{\partial \Delta}{\partial \beta}
\end{aligned} \tag{B.10}$$

expression dans laquelle :

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\beta(\varepsilon_\nu - \lambda)}{E_\nu} \right) = \frac{1}{E_\nu^3} \left[\lambda \Delta^2 - \beta \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \beta} (\varepsilon_\nu - \lambda) \right] \tag{B.11}$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (\beta E_\nu) = \frac{1}{E_\nu} \left[\varepsilon_\nu (\varepsilon_\nu - \lambda) + \Delta^2 + \beta \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \beta} \right] \tag{B.12}$$

En remplaçant les dérivées partielles ci-dessus dans l'équation (B.10), on obtient l'équation donnée par l'expression (1.103).

En dérivant par rapport à α l'équation (1.65) donnant la condition de conservation du moment angulaire, on aboutit à :

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha \partial \mu} = \sum_{\nu>0} m_\nu \frac{\partial}{\partial \alpha} (\beta E_\nu) \left\{ \frac{e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)})^2} - \frac{e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)})^2} \right\} \tag{B.13}$$

En tenant compte de l'équation (B.7) on obtient l'expression (1.104).

En dérivant la même équation (1.65) par rapport à β , on trouve :

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta \partial \mu} = \sum_{\nu>0} m_\nu \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta E_\nu) \left\{ \frac{e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)})^2} - \frac{e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)})^2} \right\} \tag{B.14}$$

En tenant compte de l'équation (B.12), on établit l'équation (1.105).

Concernant le terme $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta \partial \alpha}$, la dérivée seconde par rapport à β de la condition de conser-

vation du nombre de particules donnée par l'équation (1.62) conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta \partial \alpha} &= -\frac{1}{2\beta} \sum_{\nu > 0} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\beta(\varepsilon_\nu - \lambda)}{E_\nu} \right) \left\{ \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) + \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) \right\} \\ &\quad - \sum_{\nu > 0} \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{E_\nu} \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta E_\nu) \left\{ \frac{e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)})^2} + \frac{e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)})^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

En substituant les équations (B.11) et (B.12) dans l'équation (B.15), on obtient l'équation (1.106).

Les dérivées de Δ par rapport aux multiplicateurs de Lagrange sont obtenues à partir de l'équation du gap donnée par l'expression (1.60). En dérivant cette dernière par rapport à β , on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\beta} \sum_{\nu > 0} \frac{1}{E_\nu^2} \left(E_\nu - \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta E_\nu) \right) \left\{ \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) + \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) \right\} \\ &\quad + \sum_{\nu > 0} \frac{1}{E_\nu} \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta E_\nu) \left\{ \frac{e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)})^2} + \frac{e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)})^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

L'équation (B.12) nous permet de passer à l'expression donnée par l'équation (1.109).

En dérivant l'équation (1.60) par rapport à μ , on aboutit à :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\nu > 0} \frac{1}{2E_\nu^2} \frac{\partial E_\nu}{\partial \mu} \left\{ \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) + \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) \right\} \\ &\quad + \sum_{\nu > 0} \frac{1}{E_\nu} \left(\frac{\partial}{\partial \mu} (\beta (E_\nu - \gamma m_\nu)) \frac{e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)})^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \mu} (\beta (E_\nu + \gamma m_\nu)) \frac{e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)})^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

En tenant compte des deux expressions données par l'équation (B.2), on arrive à l'équation (1.110).

En dérivant l'équation (1.60) par rapport à α , on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\nu>0} \frac{1}{2\beta E_\nu^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\beta E_\nu) \left\{ \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu - \gamma m_\nu) + \tanh \frac{\beta}{2} (E_\nu + \gamma m_\nu) \right\} \\
&+ \sum_{\nu>0} \frac{1}{E_\nu} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\beta E_\nu) \left\{ \frac{e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu + \gamma m_\nu)})^2} + \frac{e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)}}{(1 + e^{\beta(E_\nu - \gamma m_\nu)})^2} \right\} \quad (\text{B.18})
\end{aligned}$$

En remplaçant l'équation (B.7) dans l'équation (B.18) on trouve l'expression (1.111).

Bibliographie

- [1] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108** (1957)1175.
- [2] A. Bohr, B. R. Mottelson and D. Pines, Phys. Rev. **110** (1958)936.
- [3] M. Fellah, N.H.Allal, M.Belabbas, M.R.Oudih et N.Benhamouda, Phys. Rev. **C 76** (2007)047306.
- [4] F. Šimkovic, Ch. C. Moustakidis, L. Pacearescu and A. Faessler, Phys. Rev. **C68** (2003)054319.
- [5] P. Ring and P. Schuk "The Nuclear Many Body Problem" (Springer, Berlin Heidelberg, 2000).
- [6] S. G. Nilsson and I. Ragnarsson "Shapes and Shells in Nuclear Structure" (Cambridge University Press, USA, 1995).
- [7] W. Greiner and J. A. Maruhn "Nuclear Models" (Springer, Berlin, Heidelberg, 1996).
- [8] M. R. Oudih, M. Fellah, N. H. Allal, and N. Benhamouda, Phys. Rev. **C 76** (2007)047307.
- [9] M. Fellah, N. H. Allal, M.R. Oudih and N. Benhamouda. Alg. Rev. Sci. **2** (1998)59.
- [10] M.R. Oudih, N. Benhamouda, M. Fellah and N.H. Allal. Acta Phys. Hung. A : Heavy Ion Phys. **19** (2004)217.
- [11] N. Benhamouda, N.H. Allal, M. Fellah and M.R. Oudih, Int. J. Mod. Phys. **E14** (2005)197.
- [12] M. Fellah, N.H. Allal, M.R. Oudih and N. Benhamouda, Eur. phys. J. **A27** (2006)301.

- [13] M. R. Oudih, M. Fellah, N.H. Allal and N. Benhamouda, *Int. J. Mod. Phys.* **E15** (2006)643.
- [14] N. Sandulescu, R. Rossignoli and R. J. Liotta, *Phys. Rev.* **C61** (2000)044317.
- [15] O. Civitarese, G. G. Dussel and R. P. J. Perazzo, *Nucl. Phys.* **A404** (1983)15.
- [16] L. G. Moretto, *Phys. Lett.* **B35** (1971)379.
- [17] L. G. Moretto, *Nucl. Phys.* **A185** (1972)145.
- [18] A. Goodman, *Nucl. Phys.* **A352** (1981)30.
- [19] M. Sano and S. Yamasaki, *Prog. Theor. Phys.* **29** (1963)397.
- [20] C. Ngô et H. Ngô, "Physique statistique à l'équilibre et hors d'équilibre" (Masson, Paris 1995).
- [21] R. Balian, "Du microscopique au macroscopique". Tome1 (Ellipses, Paris , 1982).
- [22] Y. Alhassid, G.F. Bertsch, L. Frang, and S. Liu, *Phys. Rev.* **C72** (2005)064326.
- [23] S. Liu and Y. Alhassid, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001)022501.
- [24] S. Rombouts, K. Heyde and N. Jachowicz, *Phys. Rev. Lett.* **C58** (1998)3295.
- [25] M. Rajasekaran, T. R. Rajasekaran, and N. Arunachalam, *Phys. Rev.* **C37** (1988)314.
- [26] R. Rossignoli and A. Plastino, *Phys. Rev.* **C37** (1988)307.
- [27] M. Marinus, H.G. Miller, R.M. Quick, F. Solms, and D.M. Van der Walt, *Phys. Rev.* **C48** (1993)1713.
- [28] G. Puddu, *Phys. Rev.* **C59** (1999)2500.
- [29] K. Kaneko and A. Schiller, *Phys. Rev.* **C75** (2007)044304.
- [30] G. Puddu, *Phys. Rev.* **C47** (1993)1067.
- [31] G. Puddu, *Phys. Rev.* **B45** (1992)9882.
- [32] G. Puddu, *Phys. Rev.* **B44** (1991)905.
- [33] G.Puddu, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **27** (2001)73.
- [34] N. Karchev, *J.Phys : Condens.Matter.* **18** (2006)1553.

- [35] L. Ait Gougam, Thèse de Magister, USTHB (1998).
- [36] P. Moller and J. R. Nix, Nucl. Phys. **A536** (1992)20.
- [37] R. M. Richardson and N. Sherman, Nucl. Phys. **52** (1964)253.
- [38] N. H. Allal and M. Fellah, Phys. Rev. **C48** (1993)1656.
- [39] N. H. Allal and M. Fellah, Phys. Rev. **C50** (1994)1404.
- [40] S. T. Belyaev, K. Dan. Selsk, Mat. Fys. Medd. **11** (1959)31.
- [41] A. Messiah "Mécanique Quantique, Tome 2" (Dunod, Paris 1995).
- [42] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **106** (1957)162.
- [43] I. Ami, Thèse de Magister, USTHB (2005).
- [44] J-L. Hwang, Chi. J. of Phys. **3** (1965)35.
- [45] J. Zinn-Juin, "Intégrale de chemin en mécanique quantique" (EDP sciences, Paris CNRS 2003).
- [46] R. P. Feynman, Phys. Rev. **90** (1953)1116.
- [47] R. P. Feynman, Phys. Rev. **91** (1953)1291.
- [48] R. P. Feynman, Phys. Rev. **91** (1953)1301.
- [49] J. Hubbard, Phys. Rev. Lett. **3** (1959)77.
- [50] F. Jędrzejewski "Introduction aux méthodes numériques" (Springer, France 2005)
- [51] www.tn.refer.org.
- [52] Tony Sumaryada and Alexander Volya, Phys. Rev. **C76** (2007)024319.
- [53] K. Kaneko, and M. Hasegawa, Nucl. Phys. **A740** (2004)95.
- [54] S. Kerrouchi, Thèse de Magister, USTHB (2005).
- [55] C. Kittel, "Introduction à la physique de l'état solide" (Dunod, Paris 1972).
- [56] C. Kittel, "Théorie quantique du solide" (Dunod, Paris 1967).
- [57] Y. Alhassid, G.F.Bertsch and L. Fang, Phys. Rev. **C68** (2003)044322.
- [58] P. Moller and J. R. Nix, Atomic Data and Nuclear Data Tables **59** (1995)185.
- [59] V. Yu. Ponomarev and A. I. Vdovin, Phys. Rev. **C72** (2005)034309.