

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et la recherche scientifique  
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene  
Faculté de Physique



## MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MAGISTER**  
En: **PHYSIQUE**  
Spécialité: **Physique Théorique des Basses et Moyennes Energies**

Par: **DOUICI Mohamed**

Sujet :

**Etude de l'effet de l'appariement isovectoriel  
sur les probabilités de transition bêta**

Soutenu publiquement le: 24 / 05 / 2008 devant le jury composé de

<b>Mr M. FELLAH</b>	<b>Professeur (USTHB)</b>	<b>Président</b>
<b>Mlle N. H. ALLAL</b>	<b>Professeur (USTHB)</b>	<b>Directrice de thèse</b>
<b>Mme A. FRAHI-AMROUN</b>	<b>Professeur (USTHB)</b>	<b>Examinatrice</b>
<b>Mr M. DJEBARA</b>	<b>Professeur (USTHB)</b>	<b>Examineur</b>
<b>Mlle N. BENHAMOUDA</b>	<b>Maître de Conférences (USTHB)</b>	<b>Examinatrice</b>

À celle qui a attendu avec patience  
les fruits de sa bonne éducation...

À ma Mère.

À celui qui m'a indiqué la bonne voie  
en me rappelant que la volonté fait  
toujours les grands hommes...

À mon père.

À ceux qui m'ont toujours  
soutenu et encouragé...

À mes frères et sœurs.

# *Remerciements*

Je tiens avant tout à exprimer ma très grande gratitude à ma directrice de thèse Mlle N.H. ALLAL, Professeur à l'USTHB, pour avoir non seulement accepté de gérer ce travail mais aussi pour avoir toujours répondu immédiatement à mes interrogations concernant mon travail. Je la remercie pour ses qualités humaines, pédagogiques et scientifiques.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur M. FELLAH, Professeur à l'USTHB et responsable de l'équipe théorie de la structure nucléaire du Laboratoire de Physique Théorique de l'USTHB, pour l'honneur qu'il me fait de présider ce jury. Je le remercie pour sa grande disponibilité permanente qui a permis que mon séjour au Laboratoire se passe dans les meilleures conditions, et pour ses précieux conseils.

J'adresse de grands remerciements à Madame A. FRAHI-AMROUN, Professeur à l'USTHB d'avoir accepté d'être membre du jury de ce mémoire.

J'exprime mes vifs remerciements à Monsieur M. DJEBARA, Professeur à l'USTHB d'avoir accepté d'être membre du jury de ce mémoire.

J'adresse ma plus profonde gratitude à Mlle N. BENHAMOUDA, Maître de Conférences à l'USTHB pour son aide et d'avoir acceptée d'être membre du jury de ce mémoire.

Je remercie aussi tous les enseignants qui ont contribué à ma formation durant l'année théorique.

Aussi mes remerciements s'adressent à monsieur M. R. OUDIH, Maître de Conférences à l'USTHB pour son aide.

Tout au long de ces deux ans j'ai eu le plaisir de partager mes journées avec les camarades de l'équipe théorie de la structure nucléaire du Laboratoire de Physique Théorique de l'USTHB, DJ. MOKHTARI, S. KERROUCHI, I. AMI, S. BECHICHE, F. BOUDALI, qui ont tous contribué à leurs manières.

Enfin je remercie plus que chaleureusement, mes oncles, mes tantes, mes cousins, mes cousines et tous mes amis qui m'ont toujours prodigué de très précieux encouragements au fil des années.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Traitement de l'appariement isovectoriel</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Système de deux nucléons . . . . .	6
1.3 Hamiltonien du système . . . . .	7
1.4 Diagonalisation . . . . .	10
1.4.1 Méthode de linéarisation-Principe . . . . .	10
1.4.2 Calcul la matrice d'excitation . . . . .	13
1.4.3 Diagonalisation de la matrice d'excitation . . . . .	14
1.5 Transformation généralisée de Bogoliubov - Valatin - Représentation quasi-particule . . . . .	18
1.6 L'hamiltonien en représentation quasi-particule . . . . .	19
1.7 Rediagonalisation de l'hamiltonien $H$ . . . . .	22
1.7.1 Prise en compte du terme $H_{11}$ seul . . . . .	22
1.7.2 Prise en compte des termes $H_{11}$ et $H_2$ . . . . .	24
<b>2 Probabilités de transition bêta</b>	<b>30</b>
2.1 Introduction . . . . .	30
2.2 Etat BCS . . . . .	31
2.3 Etats excités . . . . .	33
2.4 Probabilités de transition . . . . .	36

2.4.1	Calcul en représentation particule . . . . .	37
2.4.2	Calcul en représentation quasi-particule . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Résultats numériques et discussion</b>	<b>45</b>
3.1	Modèles schématiques . . . . .	45
3.1.1	Rediagonalisation de l'hamiltonien-Test numérique . . . . .	45
3.1.2	Probabilités de transition dans le cas du modèle à un niveau . . . . .	52
3.2	Cas réalistes . . . . .	58
3.2.1	Paramètres utilisés . . . . .	58
3.2.2	Rediagonalisation de l'hamiltonien . . . . .	61
3.2.3	Probabilités de transition . . . . .	67
	<b>Conclusion</b>	<b>72</b>
<b>A</b>	<b>Calcul des commutateurs</b>	<b>73</b>
<b>B</b>	<b>Calcul des probabilités de transition dans le cas de l'appariement entre particules identiques</b>	<b>75</b>
B.1	Calcul en représentation particule . . . . .	76
B.1.1	Éléments de matrice de l'opérateur $T_+$ . . . . .	76
B.1.2	Éléments de matrice de l'opérateur $T_-$ . . . . .	77
B.1.3	Probabilités de transition . . . . .	78
B.2	Calcul en représentation quasi-particule . . . . .	79
B.2.1	Éléments de matrice de l'opérateur $T_+$ . . . . .	79
B.2.2	Éléments de matrice de l'opérateur $T_-$ . . . . .	80
B.2.3	Probabilités de transition . . . . .	81
	<b>Bibliographie</b>	<b>81</b>

# Introduction

En structure nucléaire, l'étude de la désintégration bêta permet de connaître certaines propriétés des noyaux. Elle est interprétée comme la transformation d'un neutron en un proton (ou vice versa) en émettant un électron (ou un positron) et un anti-neutrino (ou un neutrino). C'est une transition entre deux noyaux avec le même nombre de masse. Cette désintégration est un événement assez peu probable, de par le fait qu'elle est régie par l'interaction faible [1]. La désintégration bêta nucléaire est alors un outil puissant pour étudier la structure de cette dernière interaction.

Par ailleurs, on s'attend à ce que l'appariement neutron-proton (n-p) joue un rôle significatif dans la désintégration bêta [2, 3]. Ce type d'appariement a fait l'objet ces dernières années de nombreux travaux concernant aussi bien la structure nucléaire [4 – 15] que l'astrophysique nucléaire [16]. En effet, les progrès récents sur le plan expérimental, liés à l'avènement des faisceaux d'ions radioactifs et au développement de détecteurs à très grande efficacité, ont permis d'étudier des noyaux de masse intermédiaire tels que  $N \simeq Z$ . Dans ces noyaux, l'appariement neutron-proton ne peut plus être négligé car les niveaux de Fermi des systèmes neutron et proton sont voisins. Les corrélations d'appariement peuvent en effet exister dans le cas isovectoriel ( $T = 1$ ) qui permet de décrire à la fois l'appariement entre particules identiques et l'appariement n-p et dans le cas isoscalaire ( $T = 0$ ) qui correspond uniquement à l'appariement n-p.

Pour étudier la désintégration bêta, plusieurs méthodes ont été utilisées. Dans ces dernières, l'appariement a été pris en compte de diverses manières. Dans les premières études, seul l'appariement entre particules identiques a été considéré avec ou sans projection dans l'espace nombre d'occupation [17]. Une autre approche est l'approximation des

phases aléatoires (QRPA) [18 – 28]. Cette dernière méthode est la théorie la plus simple des états excités du noyau qui admet la possibilité que l'état fondamental ne doit pas être un déterminant de Slater, et elle élimine une partie importante des fluctuations du nombre de particules dans l'état fondamental.

Récemment, Raduta et Moya de Guerra [4] ont étudié les probabilités de transition bêta en tenant compte de l'appariement n-p, au moyen d'une méthode de projection simultanée sur l'isospin et le nombre de particules à partir de la fonction d'onde BCS.

Le but de présent travail est d'étudier l'effet de l'appariement n-p de type isovectoriel, sur les probabilités de transition bêta par la théorie BCS dans les noyaux pair-pairs riches en protons. Pour parvenir aux équations du gap, nous introduirons, à l'aide de la transformation de Bogoliubov-Valatin, la représentation quasi-particule au premier chapitre. Dans le second chapitre, nous établirons les expressions des probabilités de transition en représentation particule et en représentation quasi-particule, aussi bien dans le cas de l'appariement n-p, que dans le cas de l'appariement entre particules identiques.

Finalement, le chapitre trois sera consacré à la présentation des résultats numériques et à leur discussion dans le cadre des modèles schématiques de Richardson [29, 30] et à un niveau [31], puis dans les cas réalistes à l'aide du modèle de Woods-Saxon [32].

# Chapitre 1

## Traitement de l'appariement isovectoriel

### 1.1 Introduction

Les corrélations d'appariement entre les nucléons jouent un rôle important dans la structure nucléaire. Les effets liés à l'appariement proton-proton (p-p) et neutron-neutron (n-n) ont été intensément étudiés depuis de longues années (voir par exemple [32 – 47]...) et sont bien compris. Par contre, l'appariement neutron-proton (n-p) est un phénomène moins connu.

Dans les noyaux ayant un nombre de neutrons différent de celui des protons, les niveaux de Fermi des systèmes neutrons et protons sont nettement séparés, donc l'appariement n-p est faible (négligeable) devant l'appariement entre particules identiques. Par contre, dans le cas où  $N$  est voisin de  $Z$ , les neutrons et les protons occupent les mêmes couches, et donc leurs niveaux de Fermi sont voisins, d'où la nécessité de prendre en compte ce type d'appariement.

Pour étudier les corrélations d'appariement deux méthodes sont généralement utilisées : la méthode de linéarisation [43] et la méthode variationnelle [42]. Cette dernière est très souvent utilisée pour traiter l'appariement entre particules identiques. Elle consiste à



minimiser la valeur moyenne de l'hamiltonien dans l'espace des états de quasi-particules. Cependant, cette méthode est difficile à appliquer dans le cas de l'appariement (n-p). La méthode de linéarisation est plus adaptée pour traiter l'appariement (n-p).

Nous nous proposons dans le présent chapitre de faire un rappel du traitement de l'appariement neutron-proton (n-p) dans le cas isovectoriel, c'est-à-dire  $T=1$ , dans le cadre du formalisme BCS. Nous allons dans ce but considérer l'hamiltonien du système, dans sa forme générale, qui sera diagonalisé approximativement par la méthode de linéarisation. Il s'avère que la forme obtenue n'est pas sous forme diagonale, ceci nous amènera à procéder à une rediagonalisation, ce qui permettra d'établir une nouvelle transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin.

## 1.2 Système de deux nucléons

Dans le formalisme du spin isotopique (ou isospin) [33–35], l'appariement des nucléons existe pour  $T = 0$  (appariement isoscalaire) et  $T = 1$  (appariement isovectoriel). Dans le cas  $T = 0$ , il y a un état singulet d'isospin antisymétrique, qui décrit uniquement l'appariement neutron-proton. Dans le cas  $T = 1$ , il y a un état triplet d'isospin symétrique. On peut décrire alors les deux types d'appariement : l'appariement entre particules identiques neutron-neutron (n-n) et proton-proton (p-p) et l'appariement neutron-proton (n-p). Les états  $|\nu t, \tilde{\nu} t'\rangle$  ( $t, t' = n, p$ ) renversés l'un de l'autre par rapport au sens du temps et occupés par une paire de nucléons appariés sont caractérisés par les opérateurs de création de paire suivants :

– pour  $T = 0$ ;

$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( a_{\nu n}^+ a_{\tilde{\nu} p}^+ - a_{\nu p}^+ a_{\tilde{\nu} n}^+ \right)$  est l'opérateur de création d'une paire proton-neutron appariés.

– pour  $T = 1$ ;

$a_{\nu p}^+ a_{\tilde{\nu} p}^+$  est l'opérateur de création d'une paire de protons appariés.

$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( a_{\nu p}^+ a_{\tilde{\nu} n}^+ + a_{\nu n}^+ a_{\tilde{\nu} p}^+ \right)$  est l'opérateur de création d'une paire proton-neutron appariés.

$a_{\nu n}^+ a_{\bar{\nu} n}^+$  est l'opérateur de création d'une paire de neutrons appariés.

### 1.3 Hamiltonien du système

On considère un système constitué d'un noyau de masse  $A$ ,  $N$  neutrons et  $Z$  protons, l'hamiltonien du système est :

$$H = H_0 + V \quad (1.1)$$

Où  $H_0$  est l'hamiltonien correspondant à un champ moyen local et  $V$  est une interaction résiduelle. Dans le formalisme de la seconde quantification et du spin isotopique, en admettant que les neutrons et les protons occupent les mêmes états, l'hamiltonien  $H$  s'écrit :

$$H = \sum_{\nu t} \varepsilon_{\nu t} a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + \frac{1}{4} \sum_{\substack{\nu \mu \eta \delta \\ t t' t_1 t_2}} \langle \nu t \mu t' | V | \eta t_1 \delta t_2 \rangle a_{\nu t}^+ a_{\mu t'}^+ a_{\delta t_2} a_{\eta t_1} \quad (1.2)$$

Où  $t = n, p$  caractérise la nature de la particule occupant l'état  $|\nu t\rangle$  (neutron ou proton) et  $a_{\nu t}^+$ ,  $a_{\nu t}$  sont les opérateurs de création et d'annihilation d'une particule dans l'état  $|\nu t\rangle$ . Ces opérateurs obéissent aux relations d'anti-commutation habituelles des fermions

$$\begin{aligned} \{a_{\nu t}, a_{\nu t}^+\} &= \delta_{\nu \nu'} \delta_{t t'} \\ \{a_{\nu t}, a_{\nu' t'}\} &= \{a_{\nu t}^+, a_{\nu' t'}^+\} = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Les quantités  $\varepsilon_{\nu t}$  et  $\langle \nu t \mu t' | V | \eta t_1 \delta t_2 \rangle$  représentent les énergies du champ moyen et les éléments de matrice de l'interaction résiduelle respectivement.

En admettant que la force d'appariement est indépendante des états occupés par les paires de nucléons, la forme générale de l'interaction résiduelle d'appariement dans les

deux cas ( $T = 0$  et  $T = 1$ ) est :

$$\begin{aligned}
V = & -G_{pp}^{T=1} \sum_{\nu, \mu > 0} a_{\nu p}^+ a_{\tilde{\nu} p}^+ a_{\tilde{\mu} p} a_{\mu p} - G_{nn}^{T=1} \sum_{\nu, \mu > 0} a_{\nu n}^+ a_{\tilde{\nu} n}^+ a_{\tilde{\mu} n} a_{\mu n} \\
& - \frac{1}{2} G_{pn}^{T=1} \sum_{\nu, \mu > 0} \left( a_{\nu p}^+ a_{\tilde{\nu} n}^+ + a_{\nu n}^+ a_{\tilde{\nu} p}^+ \right) (a_{\tilde{\mu} n} a_{\mu p} + a_{\tilde{\mu} p} a_{\mu n}) \\
& - \frac{1}{2} G_{pn}^{T=0} \sum_{\nu, \mu > 0} \left( a_{\nu n}^+ a_{\tilde{\nu} p}^+ - a_{\nu p}^+ a_{\tilde{\nu} n}^+ \right) (a_{\tilde{\mu} p} a_{\mu n} - a_{\tilde{\mu} n} a_{\mu p})
\end{aligned} \tag{1.4}$$

On peut écrire l'expression sous la forme compacte suivante :

$$\begin{aligned}
V = & -\frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'}^{T=1} \sum_{\nu, \mu > 0} \left( a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} + a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} \right) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'}^{T=0} \sum_{\nu, \mu > 0} \left( a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} - a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} \right)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

où  $G_{tt'}^{T=1}$ ,  $G_{tt'}^{T=0}$  sont des constantes réelles caractérisant l'intensité de la force d'appariement. Le signe  $(-)$  indique que cette force est attractive.

On remplace l'expression (1.5) dans l'hamiltonien H, il vient :

$$\begin{aligned}
H = & \sum_{\nu > 0, t} \varepsilon_{\nu t} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t}) - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'}^{T=1} \sum_{\nu, \mu > 0} \left( a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} + a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} \right) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'}^{T=0} \sum_{\nu, \mu > 0} \left( a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} - a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} \right)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Nous nous intéressons dans ce travail au cas isovectoriel ( $T = 1$ ), donc l'hamiltonien sera :

$$H = \sum_{\nu > 0, t} \varepsilon_{\nu t} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t}) - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu, \mu > 0} \left( a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} + a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} \right) \tag{1.7}$$

où  $G_{tt'}^{T=1}$  est noté  $G_{tt'}$  pour simplifier les notations.

Il s'agit à présent de trouver les fonctions propres de cet hamiltonien qui soient en même temps fonctions propres de l'opérateur nombre de particules  $N$ . Ce problème n'admet pas en général de solution exacte, il est alors résolu approximativement en imposant

la conservation en moyenne à la fois du nombre de neutrons et de protons [36]. On définit alors l'hamiltonien auxiliaire  $H'$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} H' &= H - \lambda_n N_n - \lambda_p N_p \\ &= H - \sum_t \lambda_t N_t \end{aligned} \quad (1.8)$$

Où  $\lambda_n, \lambda_p$  désignent les potentiels chimiques et  $N_n, N_p$  sont respectivement les opérateurs nombre de neutrons et de protons définis par :

$$N_t = \sum_{\nu>0} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t}) \quad t = n, p \quad (1.9)$$

Une conséquence directe de la conservation du nombre de particules pour les deux types de nucléons est la conservation de la troisième composante du spin isotopique  $T_Z$  définie comme [33] :

$$T_Z = \sum_{i=1}^A t_i \quad \text{avec } t_i = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pour les neutrons} \\ -\frac{1}{2} & \text{pour les protons} \end{cases} \quad (1.10)$$

ainsi,

$$\begin{aligned} T_Z \Psi(1,2,\dots,A) &= \left\{ \overbrace{\left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{1}{2} \right) \dots \left( -\frac{1}{2} \right)}^{Z \text{ fois}} \overbrace{\left( +\frac{1}{2} \right) \left( +\frac{1}{2} \right) \dots \left( +\frac{1}{2} \right)}^{N \text{ fois}} \right\} \Psi(1,2,\dots,A) \\ &= \frac{1}{2} (N - Z) \Psi(1,2,\dots,A) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Où  $\Psi(1,2,\dots,A)$  représente la fonction d'onde des noyaux à  $A$  nucléons.

On remplace les expressions (1.7) et (1.9) dans l'hamiltonien auxiliaire  $H'$ , il devient :

$$H' = \sum_{\nu>0,t} (\varepsilon_{\nu t} - \lambda_t) (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t}) - \frac{1}{2} \sum_{t t'} G_{t t'} \sum_{\nu, \mu > 0} (a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} + a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'}) \quad (1.12)$$

On remarque qu'en négligeant l'appariement n-p, c'est à dire en posant  $t = t'$ , on retrouve l'hamiltonien de la théorie BCS pour des particules identiques [33–35].

## 1.4 Diagonalisation

### 1.4.1 Méthode de linéarisation-Principe

Cette méthode [43] est basée sur le théorème suivant :

Si  $H$  est l'hamiltonien du système et  $a^+$  un opérateur qui satisfait à la relation :

$$[H, a^+] = \omega a^+ \quad (1.13)$$

où  $\omega$  est un nombre réel positif. alors, pour tout  $|\Psi\rangle$  état propre de  $H$  d'énergie  $E$ , il existe un autre état propre de  $H$ ,  $|\Psi'\rangle$  d'énergie  $E'$  tel que :

$$\begin{cases} |\Psi'\rangle = a^+ |\Psi\rangle \\ E' = E + \omega \end{cases} \quad (1.14)$$

De même, puisque  $[H, a] = -\omega a$ , il existe en général un troisième état  $|\Psi''\rangle$  d'énergie  $E''$ , tel que :

$$\begin{cases} |\Psi''\rangle = a |\Psi\rangle \\ E'' = E - \omega \end{cases} \quad (1.15)$$

Dans le cas où  $|\Psi\rangle$  est l'état fondamental de  $H$ , alors  $|\Psi''\rangle = 0$ .

De façon générale, s'il existe un ensemble d'opérateurs,  $a_i^+$ ,  $i = 1, \dots, n$ . ( $n$  entier quelconque), tels que :

$$[H, a_i^+] = \sum_{j=1}^n P_{ij} a_j^+ \quad i = 1, \dots, n \quad (1.16)$$

où les  $P_{ij}$  sont les éléments d'une matrice  $P$  de dimension  $n \times n$ , on peut alors trouver un

ensemble d'opérateurs  $A_k^+$ ,  $k = 1, \dots, n$ , qui satisfont à la relation (1.13), c'est à dire :

$$[H, A_k^+] = \omega_k A_k^+ \quad k = 1, \dots, n \quad (1.17)$$

Ces opérateurs sont combinaisons linéaires des  $a_i^+$

$$A_k^+ = \sum_{i=1}^n x_i^k a_i^+ \quad k = 1, \dots, n \quad (1.18)$$

où les  $x_i^k$  sont les composantes d'un vecteur  $X_k$

En utilisant les relations (1.16) et (1.18), on trouve que le commutateur  $[H, A_k^+]$  peut se mettre aussi sous la forme :

$$[H, A_k^+] = \sum_{ij=1}^n P_{ij} x_i^k a_j^+ \quad k = 1, \dots, n \quad (1.19)$$

D'autre part, en utilisant les relations (1.17) et (1.18), on trouve :

$$[H, A_k^+] = \omega_k \sum_{i=1}^n x_i^k a_i^+ \quad k = 1, \dots, n \quad (1.20)$$

Donc en égalant (1.19) et (1.20) on trouve que :

$$\sum_{ij=1}^n P_{ij} x_i^k a_j^+ = \omega_k \sum_{i=1}^n x_i^k a_i^+ \quad (1.21)$$

Pour que cette égalité soit vérifiée, il suffit que :

$$\sum_{i=1}^n (P_{li} - \omega_k \delta_{li}) x_i^k = 0 \quad \forall l = 1, \dots, n \quad (1.22)$$

ce qui devient en notation matricielle :

$$(P - \omega_k I) X_k = 0 \quad (1.23)$$

Donc les énergies  $\omega_k$  sont les valeurs propres de la matrice énergie d'excitation

$P = (P_{ij})_{ij=1,\dots,n}$  et les  $X_k = (x_i^k)_{i=1,\dots,n}$  sont les vecteurs propres correspondants .

Si  $|\Psi\rangle$  est l'état fondamental, alors  $A_k^+ |\Psi\rangle$  est l'état excité d'énergie  $E_k = E_0 + \omega_k$  ; et  $A_k |\Psi\rangle = 0$ .

L'application de la méthode de linéarisation nécessite le calcul des commutateurs  $[H', a_{jr}^+]$  et  $[H', a_{jr}^-]$ , si l'on remplace l'hamiltonien auxiliaire  $H'$  par son expression dans ces derniers on trouve :

$$[H', a_{jr}^+] = (\varepsilon_{jr} - \lambda_r) a_{jr}^+ - \sum_t G_{tr} \sum_{\nu>0} (a_{\nu r}^+ a_{\nu t}^+ + a_{\nu t}^+ a_{\nu r}^+) a_{jt}^- \quad (1.24)$$

$$[H', a_{jr}^-] = -(\varepsilon_{jr} - \lambda_r) a_{jr}^- - \sum_t G_{tr} \sum_{\mu>0} a_{jt}^+ (a_{\mu r}^- a_{\mu t}^- + a_{\mu t}^- a_{\mu r}^-) \quad (1.25)$$

Le calcul de ces commutateurs est donné en Annexe A.

Ces expressions (1.24), (1.25) étant non linéaires par rapport à  $a$  et  $a^+$ , on les linéarise approximativement, en appliquant le théorème de Wick .

Soit, pour les produits apparaissant dans l'expression (1.24),

$$\begin{cases} a_{\nu r}^+ a_{\nu t}^+ a_{jt}^- = a_{\nu r}^+ a_{\nu t}^+ a_{jt}^- - a_{\nu r}^+ a_{jt}^- a_{\nu t}^+ + a_{\nu t}^+ a_{jt}^- a_{\nu r}^+ + : a_{\nu r}^+ a_{\nu t}^+ a_{jt}^- : \\ a_{\nu t}^+ a_{\nu r}^+ a_{jt}^- = a_{\nu t}^+ a_{\nu r}^+ a_{jt}^- - a_{\nu t}^+ a_{jt}^- a_{\nu r}^+ + a_{\nu r}^+ a_{jt}^- a_{\nu t}^+ + : a_{\nu t}^+ a_{\nu r}^+ a_{jt}^- : \end{cases} \quad (1.26)$$

De même, pour les produits apparaissant dans l'expression (1.25), on a :

$$\begin{cases} a_{jt}^+ a_{\mu r}^- a_{\mu t}^- = a_{jt}^+ a_{\mu r}^- a_{\mu t}^- - a_{jt}^+ a_{\mu t}^- a_{\mu r}^- + a_{\mu r}^- a_{\mu t}^- a_{jt}^+ + : a_{jt}^+ a_{\mu r}^- a_{\mu t}^- : \\ a_{jt}^+ a_{\mu t}^- a_{\mu r}^- = a_{jt}^+ a_{\mu t}^- a_{\mu r}^- - a_{jt}^+ a_{\mu r}^- a_{\mu t}^- + a_{\mu t}^- a_{\mu r}^- a_{jt}^+ + : a_{jt}^+ a_{\mu t}^- a_{\mu r}^- : \end{cases} \quad (1.27)$$

La linéarisation consiste à négliger les produits normaux :  $a_{\nu r}^+ a_{\nu t}^+ a_{jt}^-$  : et :  $a_{\nu t}^+ a_{\nu r}^+ a_{jt}^-$  : dans l'expression (1.26) ainsi que :  $a_{jt}^+ a_{\mu r}^- a_{\mu t}^-$  : et :  $a_{jt}^+ a_{\mu t}^- a_{\mu r}^-$  : dans l'expression (1.27). [37, 43]

Sachant que les différentes contractions sont telles que [37] :

$$a_{jt}^+ a_{\mu t'}^+ = \delta_{j\tilde{\mu}} a_{jt}^+ a_{\tilde{j}t'}^+, \quad a_{jt}^+ a_{\mu t'}^+ = \delta_{j\mu} a_{jt}^+ a_{jt'}^+ \quad \text{et} \quad a_{jt}^+ a_{\mu t'}^+ = \delta_{j\tilde{\mu}} a_{jt}^+ a_{\tilde{j}t'}^+ \quad (1.28)$$

avec  $i, j, t, t'$  quelconques

Les expressions (1.24) et (1.25) s'écrivent respectivement :

$$[H', a_{jr}^+] = \tilde{\varepsilon}_{jr} a_{jr}^+ - \sum_t \Delta_{tr} a_{jt}^+ \quad (1.29)$$

$$[H', a_{jr}^-] = -\tilde{\varepsilon}_{jr} a_{jr}^- - \sum_t \Delta_{tr} a_{jt}^+ \quad (1.30)$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_{jr} = \varepsilon_{jr} - \lambda_r - \sum_t G_{tr} (1 + \delta_{tr}) a_{jt}^+ a_{jt}^- \\ \Delta_{tr} = G_{tr} \sum_{\nu>0} \left( a_{\nu t}^+ a_{\nu r}^+ + a_{\nu r}^+ a_{\nu t}^+ \right) = G_{tr} \sum_{\mu>0} \left( a_{\mu t}^- a_{\mu r}^- + a_{\mu r}^- a_{\mu t}^- \right) \end{cases} \quad (1.31)$$

## 1.4.2 Calcul la matrice d'excitation

Grâce aux expressions des deux commutateurs précédents (1.29) et (1.30) nous allons pouvoir trouver la matrice d'excitation .

On suppose que

$$\Delta_{tr} = \Delta_{rt} \quad , \quad t, r = p, n \quad (1.32)$$

Les commutateurs (1.29) et (1.30) deviennent alors :

$$\begin{cases} [H', a_{jp}^+] = \tilde{\varepsilon}_{jp} a_{jp}^+ - \Delta_{pp} a_{jp}^- - \Delta_{np} a_{jn}^- \\ [H', a_{jn}^+] = \tilde{\varepsilon}_{jn} a_{jn}^+ - \Delta_{pn} a_{jp}^- - \Delta_{nn} a_{jn}^- \\ [H', a_{jp}^-] = -\tilde{\varepsilon}_{jp} a_{jp}^- - \Delta_{pp} a_{jp}^+ - \Delta_{np} a_{jn}^+ \\ [H', a_{jn}^-] = -\tilde{\varepsilon}_{jn} a_{jn}^- - \Delta_{pn} a_{jp}^+ - \Delta_{nn} a_{jn}^+ \end{cases} \quad (1.33)$$



Le système (1.33) s'écrit également sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} [H', a_{jp}^+] \\ [H', a_{jn}^+] \\ [H', a_{jp}^-] \\ [H', a_{jn}^-] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{jp} & 0 & -\Delta_{pp} & -\Delta_{np} \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_{jn} & -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} \\ -\Delta_{pp} & -\Delta_{np} & -\tilde{\varepsilon}_{jp} & 0 \\ -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} & 0 & -\tilde{\varepsilon}_{jn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{jp}^+ \\ a_{jn}^+ \\ a_{jp}^- \\ a_{jn}^- \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

Donc, la matrice d'excitation de la méthode de linéarisation est :

$$A_j = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{jp} & 0 & -\Delta_{pp} & -\Delta_{np} \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_{jn} & -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} \\ -\Delta_{pp} & -\Delta_{np} & -\tilde{\varepsilon}_{jp} & 0 \\ -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} & 0 & -\tilde{\varepsilon}_{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & -\Delta \\ -\Delta & -N \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

où  $N$  et  $\Delta$  sont deux matrices  $2 \times 2$  dans l'espace d'isospin définies par :

$$N = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{jp} & 0 \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_{jn} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{pp} & \Delta_{np} \\ \Delta_{np} & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

Elles sont symétriques et réelles. Les éléments de la matrice  $N$  représentent les énergies des particules (protons et neutrons) et les éléments de la matrice  $\Delta$  représentent les effets dus à la force d'appariement.

### 1.4.3 Diagonalisation de la matrice d'excitation

D'après la forme de la matrice  $A_j$ , on remarque que si  $(u_j, v_j)$  est vecteur propre de la matrice  $A_j$  correspondant à la valeur propre  $E_j$  alors  $(-v_j, u_j)$  est aussi vecteur propre de la matrice  $A_j$  correspondant à la valeur propre  $-E_j$ .

Cette remarque facilite la recherche des vecteurs propres, puisqu'elle permet de ne calculer qu'un couple de vecteurs propres et d'en déduire l'autre. [37]

Les valeurs propres de la matrice  $A_j$  sont solutions de l'équation bicarrée :

$$\lambda^4 - \lambda^2 (E_{jn}^2 + E_{jp}^2 + 2\Delta_{np}^2) + E_{jn}^2 E_{jp}^2 + \Delta_{np}^4 + 2\Delta_{np}^2 (\tilde{\varepsilon}_{jn}\tilde{\varepsilon}_{jp} - \Delta_{nn}\Delta_{pp}) = 0 \quad (1.37)$$

où nous avons posé :

$$E_{jn} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{jn}^2 + \Delta_{nn}^2} \quad (1.38)$$

et

$$E_{jp} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{jp}^2 + \Delta_{pp}^2} \quad (1.39)$$

soit :

$$E_j^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (E_{jn}^2 + E_{jp}^2 + 2\Delta_{np}^2) \pm \sqrt{(E_{jn}^2 - E_{jp}^2)^2 + 4\Delta_{np}^2 (E_{jn}^2 + E_{jp}^2 - 2(\tilde{\varepsilon}_{jn}\tilde{\varepsilon}_{jp} - \Delta_{nn}\Delta_{pp}))} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.40)$$

Les racines carrées négatives étant non physiques elles sont rejetées [33, 37] .

Les vecteurs propres de la matrice  $A_j$  correspondant aux valeurs propres  $E_j^+$  et  $E_j^-$  sont définis par :

$$X_j^+ = \begin{pmatrix} u_{j1p} \\ u_{j1n} \\ v_{j1p} \\ v_{j1n} \end{pmatrix} \quad et \quad X_j^- = \begin{pmatrix} u_{j2p} \\ u_{j2n} \\ v_{j2p} \\ v_{j2n} \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

En imposant à la transformation de quasi-particules d'être canonique, on obtient les relations suivantes :

$$u_{j1p}^2 + u_{j1n}^2 + v_{j1p}^2 + v_{j1n}^2 = u_{j2p}^2 + u_{j2n}^2 + v_{j2p}^2 + v_{j2n}^2 = 1 \quad (1.42)$$

La relation d'orthogonalité conduit à :

$$u_{j1p}u_{j2p} + u_{j1n}u_{j2n} + v_{j1p}v_{j2p} + v_{j1n}v_{j2n} = 0 \quad (1.43)$$

La recherche des composantes de  $X_j^+$  et  $X_j^-$  conduit à un système homogène dont la solution peut être mise sous forme de déterminants  $3 \times 3$  :  $T_{ji}$   $i = 1; \dots, 4$  comme suit [37, 44] :

$$u_{j1p} = \frac{T_{j1}}{T_j}, \quad u_{j1n} = \frac{-T_{j2}}{T_j}, \quad v_{j1p} = \frac{T_{j3}}{T_j}, \quad v_{j1n} = \frac{-T_{j4}}{T_j} \quad (1.44)$$

où

$$T_{j1} = \begin{vmatrix} \tilde{\varepsilon}_{jn} - E_j^+ & -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} \\ -\Delta_{np} & -(\tilde{\varepsilon}_{jp} + E_j^+) & 0 \\ -\Delta_{nn} & 0 & -(\tilde{\varepsilon}_{jn} + E_j^+) \end{vmatrix} \quad (1.45)$$

$$T_{j2} = \begin{vmatrix} 0 & -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} \\ -\Delta_{pp} & -(\tilde{\varepsilon}_{jp} + E_j^+) & 0 \\ -\Delta_{np} & 0 & -(\tilde{\varepsilon}_{jn} + E_j^+) \end{vmatrix} \quad (1.46)$$

$$T_{j3} = \begin{vmatrix} 0 & (\tilde{\varepsilon}_{jn} - E_j^+) & -\Delta_{nn} \\ -\Delta_{pp} & -\Delta_{np} & 0 \\ -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} & -(\tilde{\varepsilon}_{jn} + E_j^+) \end{vmatrix} \quad (1.47)$$

$$T_{j4} = \begin{vmatrix} 0 & (\tilde{\varepsilon}_{jn} - E_j^+) & -\Delta_{np} \\ -\Delta_{pp} & -\Delta_{np} & -(\tilde{\varepsilon}_{jp} + E_j^+) \\ -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} & 0 \end{vmatrix} \quad (1.48)$$

et

$$T_j = \sqrt{T_{j1}^2 + T_{j2}^2 + T_{j3}^2 + T_{j4}^2} \quad (1.49)$$

En appelant  $T'_{ji}$ ,  $i = 1, \dots, 4$  et  $T'_j$  les expressions similaires aux  $T_{ji}$ ,  $i = 1, \dots, 4$  et  $T_j$ , où

cette fois on remplace  $E_j^+$  par  $E_j^-$ , on obtient :

$$u_{j2p} = \frac{T'_{j1}}{T'_j}, \quad u_{j2n} = \frac{-T'_{j2}}{T'_j}, \quad v_{j2p} = \frac{T'_{j3}}{T'_j}, \quad v_{j2n} = \frac{-T'_{j4}}{T'_j} \quad (1.50)$$

et

$$T'_j = \sqrt{T'^2_{j1} + T'^2_{j2} + T'^2_{j3} + T'^2_{j4}} \quad (1.51)$$

On vérifie facilement qu'en négligeant l'interaction neutron-proton, on retrouve les énergies des quasi-particules relatives à la force d'appariement entre particules identiques [33–35]. En effet, pour  $\Delta_{np} = 0$  la matrice d'excitation  $A_j$  (1.35) devient :

$$A_j = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{jp} & 0 & -\Delta_{pp} & 0 \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_{jn} & 0 & -\Delta_{nn} \\ -\Delta_{pp} & 0 & -\tilde{\varepsilon}_{jp} & 0 \\ 0 & -\Delta_{nn} & 0 & -\tilde{\varepsilon}_{jn} \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

dont les valeurs et vecteurs propres sont respectivement :

$$E_j^+ = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{jp}^2 + \Delta_{pp}^2} = E_{jp} \quad \text{et} \quad E_j^- = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{jn}^2 + \Delta_{nn}^2} = E_{jn} \quad (1.53)$$

Quand aux vecteurs propres donnés par (1.41), ils deviennent :

$$X_j^+ = \begin{pmatrix} -u_{j1p} \\ u_{j1n} \\ v_{j1p} \\ v_{j1n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_j^- = \begin{pmatrix} u_{j2p} \\ -u_{j2n} \\ v_{j2p} \\ v_{j2p} \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

avec

$$\left. \begin{array}{l} u_{j1p}^2 \\ v_{j1p}^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \frac{\tilde{\varepsilon}_{jp}}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_{jp}^2 + \Delta_{pp}^2}} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} u_{jp}^2 \\ v_{jp}^2 \end{array} \right. \quad (1.55)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_{j1n}^2 \\ v_{j1n}^2 \end{array} \right\} = 0$$

et

$$\left. \begin{array}{l} u_{j2p}^2 \\ v_{j2p}^2 \end{array} \right\} = 0 \quad (1.56)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_{j2n}^2 \\ v_{j2n}^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \frac{\tilde{\varepsilon}_{jn}}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_{jn}^2 + \Delta_{nn}^2}} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} u_{jn}^2 \\ v_{jn}^2 \end{array} \right.$$

## 1.5 Transformation généralisée de Bogoliubov - Valatin - Représentation quasi-particule

La transformation permettant de diagonaliser  $A_j$  s'écrit donc :

$$T = \begin{pmatrix} u_{\nu 1p} & u_{\nu 1n} & v_{\nu 1p} & v_{\nu 1n} \\ u_{\nu 2p} & u_{\nu 2n} & v_{\nu 2p} & v_{\nu 2n} \\ -v_{\nu 1p} & -v_{\nu 1n} & u_{\nu 1p} & u_{\nu 1n} \\ -v_{\nu 2p} & -v_{\nu 2n} & u_{\nu 2p} & u_{\nu 2n} \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

de sorte que si l'on introduit des nouveaux opérateurs  $\alpha_{\nu\tau}^+$  et  $\alpha_{\nu\tau}$  ( $\tau = 1, 2$ ) qui seront les opérateurs de création et d'annihilation des quasi-particules respectivement, on aura :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\nu 1}^+ \\ \alpha_{\nu 2}^+ \\ \alpha_{\tilde{\nu} 1} \\ \alpha_{\tilde{\nu} 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\nu 1p} & u_{\nu 1n} & v_{\nu 1p} & v_{\nu 1n} \\ u_{\nu 2p} & u_{\nu 2n} & v_{\nu 2p} & v_{\nu 2n} \\ -v_{\nu 1p} & -v_{\nu 1n} & u_{\nu 1p} & u_{\nu 1n} \\ -v_{\nu 2p} & -v_{\nu 2n} & u_{\nu 2p} & u_{\nu 2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\nu p}^+ \\ a_{\nu n}^+ \\ a_{\tilde{\nu} p} \\ a_{\tilde{\nu} n} \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

Cette transformation n'est donc autre que la transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin. On constate alors qu'il existe deux types de quasi-particules (1 et 2)

La transformation de Bogoliubov-Valatin peut s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\alpha_{\nu\tau}^+ = \sum_t (u_{\nu\tau t} a_{\nu t}^+ + v_{\nu\tau t} a_{\tilde{\nu}t}) \quad \text{avec } \tau = 1, 2 \quad \text{et } t = p, n \quad (1.59)$$

Notons que les  $\alpha_{\nu\tau}^+$  et  $\alpha_{\nu\tau}$  obéissent aux relations d'anti-commutation des fermions .

La transformation inverse de Bogoliubov-Valatin généralisée sera donnée par :

$$a_{\nu t}^+ = \sum_{\tau} (u_{\nu\tau t} \alpha_{\nu\tau}^+ - v_{\nu\tau t} \alpha_{\tilde{\nu}\tau}) \quad (1.60)$$

et l'état fondamental  $|BCS\rangle$  ou vide de quasi-particule est tel que :

$$\alpha_{\nu\tau} |BCS\rangle = 0 \quad \forall \nu, \tau \quad (1.61)$$

## 1.6 L'hamiltonien en représentation quasi-particule

A l'aide de la transformation inverse de Bogoliubov-Valatin généralisée nous allons exprimer l'hamiltonien  $H$  en fonction des nouveaux opérateurs de quasi-particules  $\alpha^+$  et  $\alpha$ . En utilisant le théorème de Wick, l'hamiltonien  $H$  se met sous la forme :

$$H = E_0 + H_{11} + H_{20} + H_{02} + H_{22} + H_{31} + H_{13} + H_{40} + H_{04} \quad (1.62)$$

où  $E_0$  est le terme constant et où  $H_{ij}$  est le terme contenant  $i$  (respectivement  $j$ ) opérateurs de création  $\alpha^+$  (respectivement opérateurs d'annihilation  $\alpha$ ).

Pour alléger les écritures nous notons :

$$H = E_0 + H_{11} + H_2 + H_{res} \quad (1.63)$$

avec  $H_2 = H_{20} + H_{02}$

et  $H_{res} = H_{22} + H_3 + H_4$  où  $H_3 = H_{31} + H_{13}$  et  $H_4 = H_{40} + H_{04}$

Ces différents termes sont explicités dans ce qui suit :

· $E_0$  est une constante qui contient les termes entièrement contractés, son expression est :

$$\begin{aligned}
E_0 = & 2 \sum_{\nu > 0, t} \left[ \varepsilon_{\nu t} - \frac{1}{2} G_{tt} \left( \sum_{\tau} v_{\nu\tau t}^2 \right) \right] \left( \sum_{\tau} v_{\nu\tau t}^2 \right) \\
& - \frac{1}{2} G_{np} \sum_{\nu > 0} \left[ \left( \sum_{\tau} v_{\nu\tau n}^2 \right)^2 + \left( \sum_{\tau} v_{\nu\tau p}^2 \right)^2 + 2 \left( \sum_{\tau} v_{\nu\tau n} v_{\nu\tau p} \right)^2 \right] \\
& - \frac{\Delta_{nn}^2}{4G_{nn}} - \frac{\Delta_{pp}^2}{4G_{pp}} - \frac{\Delta_{np}^2}{2G_{np}}
\end{aligned} \tag{1.64}$$

· $H_{11}$  contient les produits normaux de deux opérateurs  $\alpha^+$  et  $\alpha$ , son expression est :

$$H_{11} = \sum_{\nu > 0, \tau\tau'} E_{\nu\tau\tau'} \left( \alpha_{\nu\tau}^+ \alpha_{\nu\tau'} + \alpha_{\tilde{\nu}\tau}^+ \alpha_{\tilde{\nu}\tau'} \right) \tag{1.65}$$

où nous avons posé :

$$\begin{aligned}
E_{\nu\tau\tau'} = & \sum_t \left[ \varepsilon_{\nu t} - \frac{1}{2} \sum_{t'} G_{tt'} \sum_{\tau} v_{\nu\tau t'}^2 \right] (u_{\nu\tau t} u_{\nu\tau' t} - v_{\nu\tau t} v_{\nu\tau' t}) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \left[ \left( \sum_{\tau} v_{\nu\tau t} v_{\nu\tau' t'} \right) (u_{\nu\tau t} u_{\nu\tau' t'} - v_{\nu\tau t} v_{\nu\tau' t'}) \right] \\
& - \sum_{tt'} \Delta_{tt'} (u_{\nu\tau t} v_{\nu\tau' t'} + u_{\nu\tau' t} v_{\nu\tau t})
\end{aligned} \tag{1.66}$$

· $H_2$  contient les termes en  $\alpha^+ \alpha^+$  et  $\alpha \alpha$ , son expression est :

$$H_2 = \sum_{\nu > 0, \tau\tau'} H_2^{\nu\tau\tau'} \left( \alpha_{\tilde{\nu}\tau}^+ \alpha_{\tilde{\nu}\tau'}^+ + \alpha_{\nu\tau'} \alpha_{\tilde{\nu}\tau} \right) \tag{1.67}$$

avec la notation :

$$\begin{aligned}
H_2^{\nu\tau\tau'} &= \sum_t \left[ \varepsilon_{\nu t} - \frac{1}{2} \sum_{t'} G_{tt'} \sum_{\tau} v_{\nu\tau t}^2 \right] (u_{\nu\tau t} v_{\nu\tau' t} + u_{\nu\tau' t} v_{\nu\tau t}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \left( \sum_{\tau} v_{\nu\tau t} v_{\nu\tau' t} \right) (u_{\nu\tau t} v_{\nu\tau' t} + u_{\nu\tau' t} v_{\nu\tau t}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{tt'} \Delta_{tt'} (u_{\nu\tau' t} u_{\nu\tau t} - v_{\nu\tau t} v_{\nu\tau' t})
\end{aligned} \tag{1.68}$$

$\cdot H_{res}$  contient les produits normaux :  $a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t}$  : et :  $a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t}$  : .

où  $H_{22}$  contient les termes en  $\alpha^+ \alpha^+ \alpha \alpha$ , son expression est :

$$\begin{aligned}
H_{22} &= -\frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu, \mu > 0} \sum_{\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4} \\
&\quad \left\{ (u_{\nu\tau_1 t} u_{\nu\tau_2 t'} u_{\mu\tau_3 t'} u_{\mu\tau_4 t} + u_{\nu\tau_1 t} u_{\nu\tau_2 t'} u_{\mu\tau_3 t} u_{\mu\tau_4 t'}) \alpha_{\nu\tau_1}^+ \alpha_{\tilde{\nu}\tau_2}^+ \alpha_{\tilde{\mu}\tau_3}^+ \alpha_{\mu\tau_4} \right. \\
&\quad + (u_{\nu\tau_1 t} v_{\nu\tau_2 t'} v_{\mu\tau_3 t'} u_{\mu\tau_4 t} + u_{\nu\tau_1 t} v_{\nu\tau_2 t'} v_{\mu\tau_3 t} u_{\mu\tau_4 t'}) \alpha_{\nu\tau_1}^+ \alpha_{\mu\tau_3}^+ \alpha_{\mu\tau_4} \alpha_{\nu\tau_2} \\
&\quad + (u_{\nu\tau_1 t} v_{\nu\tau_2 t'} u_{\mu\tau_3 t'} v_{\mu\tau_4 t} + u_{\nu\tau_1 t} v_{\nu\tau_2 t'} u_{\mu\tau_3 t} v_{\mu\tau_4 t'}) \alpha_{\nu\tau_1}^+ \alpha_{\tilde{\mu}\tau_4}^+ \alpha_{\tilde{\mu}\tau_3}^+ \alpha_{\nu\tau_2} \\
&\quad + (v_{\nu\tau_1 t} u_{\nu\tau_2 t'} u_{\mu\tau_3 t'} v_{\mu\tau_4 t} + v_{\nu\tau_1 t} u_{\nu\tau_2 t'} u_{\mu\tau_3 t} v_{\mu\tau_4 t'}) \alpha_{\tilde{\nu}\tau_2}^+ \alpha_{\tilde{\mu}\tau_4}^+ \alpha_{\tilde{\mu}\tau_3}^+ \alpha_{\tilde{\nu}\tau_1} \\
&\quad + (v_{\nu\tau_1 t} u_{\nu\tau_2 t'} v_{\mu\tau_3 t'} u_{\mu\tau_4 t} + v_{\nu\tau_1 t} u_{\nu\tau_2 t'} v_{\mu\tau_3 t} u_{\mu\tau_4 t'}) \alpha_{\mu\tau_3}^+ \alpha_{\tilde{\nu}\tau_2}^+ \alpha_{\tilde{\nu}\tau_1}^+ \alpha_{\mu\tau_4} \\
&\quad \left. + (v_{\nu\tau_1 t} v_{\nu\tau_2 t'} v_{\mu\tau_3 t'} v_{\mu\tau_4 t} + v_{\nu\tau_1 t} v_{\nu\tau_2 t'} v_{\mu\tau_3 t} v_{\mu\tau_4 t'}) \alpha_{\mu\tau_3}^+ \alpha_{\tilde{\mu}\tau_4}^+ \alpha_{\tilde{\nu}\tau_1}^+ \alpha_{\nu\tau_2} \right\}
\end{aligned} \tag{1.69}$$

et  $H_3$  contient les termes en  $\alpha^+ \alpha^+ \alpha^+ \alpha$  et  $\alpha^+ \alpha \alpha \alpha$ , son expression est :

$$\begin{aligned}
H_3 &= -\frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu, \mu > 0} \sum_{\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4} \\
&\quad \left\{ u_{\nu\tau_1 t} u_{\nu\tau_2 t'} (u_{\mu\tau_3 t} v_{\mu\tau_4 t'} + u_{\mu\tau_3 t'} v_{\mu\tau_4 t}) \left( \alpha_{\nu\tau_1}^+ \alpha_{\tilde{\nu}\tau_2}^+ \alpha_{\tilde{\mu}\tau_4}^+ \alpha_{\tilde{\mu}\tau_3}^+ + \alpha_{\tilde{\mu}\tau_3}^+ \alpha_{\tilde{\mu}\tau_4}^+ \alpha_{\tilde{\nu}\tau_2}^+ \alpha_{\nu\tau_1} \right) \right. \\
&\quad + u_{\nu\tau_1 t} u_{\nu\tau_2 t'} (u_{\mu\tau_4 t'} v_{\mu\tau_3 t} + u_{\mu\tau_4 t} v_{\mu\tau_3 t'}) \left( \alpha_{\nu\tau_1}^+ \alpha_{\tilde{\nu}\tau_2}^+ \alpha_{\mu\tau_3}^+ \alpha_{\mu\tau_4} + \alpha_{\mu\tau_4}^+ \alpha_{\mu\tau_3}^+ \alpha_{\tilde{\nu}\tau_2}^+ \alpha_{\nu\tau_1} \right) \\
&\quad - v_{\nu\tau_2 t'} u_{\nu\tau_1 t} (v_{\mu\tau_4 t} v_{\mu\tau_3 t'} + v_{\mu\tau_4 t'} v_{\mu\tau_3 t}) \left( \alpha_{\nu\tau_1}^+ \alpha_{\mu\tau_3}^+ \alpha_{\tilde{\mu}\tau_4}^+ \alpha_{\nu\tau_2} + \alpha_{\nu\tau_2}^+ \alpha_{\tilde{\mu}\tau_4}^+ \alpha_{\mu\tau_3}^+ \alpha_{\nu\tau_1} \right) \\
&\quad \left. - v_{\nu\tau_1 t} u_{\nu\tau_2 t'} (v_{\mu\tau_3 t} v_{\mu\tau_4 t'} + v_{\mu\tau_3 t'} v_{\mu\tau_4 t}) \left( \alpha_{\tilde{\nu}\tau_2}^+ \alpha_{\mu\tau_3}^+ \alpha_{\tilde{\mu}\tau_4}^+ \alpha_{\tilde{\nu}\tau_1} + \alpha_{\tilde{\nu}\tau_1}^+ \alpha_{\tilde{\mu}\tau_4}^+ \alpha_{\mu\tau_3}^+ \alpha_{\tilde{\nu}\tau_2} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{1.70}$$



finalement  $H_4$  contient les termes en  $\alpha^+\alpha^+\alpha^+\alpha^+$  et  $\alpha\alpha\alpha\alpha$ , son expression est :

$$H_4 = -\frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu, \mu > 0} \sum_{\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4} \left\{ (u_{\nu\tau_1 t} u_{\nu\tau_2 t'} v_{\mu\tau_3 t} v_{\mu\tau_4 t'} + u_{\nu\tau_1 t} u_{\nu\tau_2 t'} v_{\mu\tau_3 t'} v_{\mu\tau_4 t}) \right. \\ \left. \left( \alpha_{\nu\tau_1}^+ \alpha_{\tilde{\nu}\tau_2}^+ \alpha_{\tilde{\mu}\tau_4}^+ \alpha_{\mu\tau_3}^+ + \alpha_{\mu\tau_3} \alpha_{\tilde{\mu}\tau_4} \alpha_{\tilde{\nu}\tau_2} \alpha_{\nu\tau_1} \right) \right\} \quad (1.71)$$

où nous avons posé, compte tenu de (1.31)

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varepsilon}_{\nu r} = \varepsilon_{\nu r} - \lambda_r - \sum_t G_{tr} (1 + \delta_{tr}) \sum_t v_{\nu\tau t}^2 \\ \Delta_{pp} = -2G_{pp} \sum_{\nu > 0} \sum_{\tau} u_{\nu\tau p} v_{\nu\tau p} \\ \Delta_{nn} = -2G_{nn} \sum_{\nu > 0} \sum_{\tau} u_{\nu\tau n} v_{\nu\tau n} \\ \Delta_{pn} = -G_{pn} \sum_{\nu > 0} \sum_{\tau} (u_{\nu\tau p} v_{\nu\tau n} + u_{\nu\tau n} v_{\nu\tau p}) \end{array} \right. \quad (1.72)$$

## 1.7 Rediagonalisation de l'hamiltonien H

L'approximation des quasi-particules indépendantes consiste à négliger le terme  $H_{res}$  dans l'expression (1.63) de l'hamiltonien en représentation quasi-particules. Notons toutefois que dans le cas de l'appariement entre particules identiques le terme  $H_2$  est exactement nul, ce qui n'est pas à priori le cas dans le cadre de l'appariement n-p. Nous allons dans ce qui suit envisager deux cas de figure : une première approche consistera comme dans les ref [9] et [10] à considérer  $H_2$  comme négligeable et à l'inclure dans le terme résiduel. La seconde approche consiste à prendre en considération le terme  $H_2$ .

### 1.7.1 Prise en compte du terme $H_{11}$ seul

Dans ce cas, l'hamiltonien (1.63) s'écrit :

$$H = E_0 + \sum_{\nu > 0, \tau \tau'} E_{\nu\tau\tau'} (\alpha_{\nu\tau}^+ \alpha_{\nu\tau'} + \alpha_{\tilde{\nu}\tau}^+ \alpha_{\tilde{\nu}\tau'}) \quad (1.73)$$

Cette expression peut être mise sous forme matricielle :

$$H = E_0 + \sum_{\nu} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{\nu 1}^+ & \alpha_{\nu 2}^+ \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} \alpha_{\nu 1} \\ \alpha_{\nu 2} \end{pmatrix} \right\} \quad (1.74)$$

où la matrice  $C$  est définie par :

$$C = \begin{pmatrix} E_{\nu 11} & E_{\nu 12} \\ E_{\nu 12} & E_{\nu 22} \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

et où nous avons posé  $E_{\nu 12} = E_{\nu 21}$  pour tenir compte de l'hermiticité de  $H$  .

Les valeurs propres de la matrice  $C$  sont données par :

$$\chi_{\nu 1,2} = \frac{1}{2} \left[ (E_{\nu 11} + E_{\nu 22}) \pm \sqrt{(E_{\nu 11} - E_{\nu 22})^2 + 4E_{\nu 12}^2} \right] \quad (1.76)$$

et ses vecteurs propres par :

$${}^t X_{1\nu} = \begin{pmatrix} x_{\nu 11} & x_{\nu 12} \end{pmatrix} \text{ et } {}^t X_{2\nu} = \begin{pmatrix} x_{\nu 21} & x_{\nu 22} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} x_{\nu 11} = \frac{E_{\nu 12}}{\sqrt{E_{\nu 12}^2 + (\chi_{\nu 1} - E_{\nu 11})^2}} \\ x_{\nu 12} = \frac{\chi_{\nu 1} - E_{\nu 11}}{\sqrt{E_{\nu 12}^2 + (\chi_{\nu 1} - E_{\nu 11})^2}} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{\nu 21} = \frac{(\chi_{\nu 2} - E_{\nu 22})}{\sqrt{E_{\nu 12}^2 + (\chi_{\nu 2} - E_{\nu 22})^2}} \\ x_{\nu 22} = \frac{E_{\nu 12}}{\sqrt{E_{\nu 12}^2 + (\chi_{\nu 2} - E_{\nu 22})^2}} \end{cases} \quad (1.77)$$

La transformation  $T$  qui diagonalise l'hamiltonien  $H_{11}$  s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} x_{11}^{\nu} & x_{21}^{\nu} \\ x_{12}^{\nu} & x_{22}^{\nu} \end{pmatrix}$$

En utilisant cette dernière, on peut réécrire (1.74) sous la forme suivante :

$$H = E_0 + \sum_{\nu} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{\nu 1}^+ & \alpha_{\nu 2}^+ \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} \chi_{\nu 1} & 0 \\ 0 & \chi_{\nu 2} \end{pmatrix} T^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_{\nu 1} \\ \alpha_{\nu 2} \end{pmatrix} \right\} \quad (1.78)$$

En introduisant les nouveaux opérateurs  $\beta$  tels que :

$$\begin{pmatrix} \beta_{\nu 1} \\ \beta_{\nu 2} \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_{\nu 1} \\ \alpha_{\nu 2} \end{pmatrix}$$

l'hamiltonien  $H$  peut être réécrit sous la forme :

$$H = E_0 + \sum_{\nu\tau} \chi_{\nu\tau} \beta_{\nu\tau}^+ \beta_{\nu\tau} \quad (1.79)$$

Les nouveaux opérateurs peuvent s'exprimer directement en fonction des opérateurs de création et d'annihilation de particules, soit :

$$\beta_{\nu\tau}^+ = \sum_t (U_{\nu\tau t} a_{\nu t}^+ + V_{\nu\tau t} a_{\tilde{\nu} t}) \quad , \quad \tau = 1, 2 \text{ et } t = n, p \quad (1.80)$$

avec :

$$\begin{cases} U_{\nu\tau t} = \sum_{j=1,2} x_{\nu\tau j} u_{\nu j t} \\ V_{\nu\tau t} = \sum_{j=1,2} x_{\nu\tau j} v_{\nu j t} \end{cases} \quad \tau = 1, 2, \quad t = n, p \quad (1.81)$$

### 1.7.2 Prise en compte des termes $H_{11}$ et $H_2$

Si, en plus de  $H_{11}$ , on inclut le terme  $H_2$ , il vient :

$$H = E_0 + \sum_{\nu > 0, \tau\tau'} E_{\nu\tau\tau'} (\alpha_{\nu\tau}^+ \alpha_{\nu\tau'} + \alpha_{\tilde{\nu}\tau}^+ \alpha_{\tilde{\nu}\tau'}) + \sum_{\nu > 0, \tau\tau'} H_2^{\nu\tau\tau'} (\alpha_{\tilde{\nu}\tau}^+ \alpha_{\nu\tau'}^+ + \alpha_{\nu\tau} \alpha_{\tilde{\nu}\tau}) \quad \tau, \tau' = 1, 2 \quad (1.82)$$

soit encore sous forme matricielle :

$$H = E_0 + \sum_{\nu>0} (E_{\nu 11} + E_{\nu 22}) + \sum_{\nu>0} \begin{pmatrix} \alpha_{\nu 1}^+ & \alpha_{\nu 2}^+ & \alpha_{\tilde{\nu} 1} & \alpha_{\tilde{\nu} 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\nu 11} & E_{\nu 12} & -H_2^{\nu 11} & -H_2^{\nu 21} \\ E_{\nu 21} & E_{\nu 22} & -H_2^{\nu 12} & -H_2^{\nu 22} \\ -H_2^{\nu 11} & -H_2^{\nu 12} & -E_{\nu 11} & -E_{\nu 21} \\ -H_2^{\nu 21} & -H_2^{\nu 22} & -E_{\nu 12} & -E_{\nu 22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\nu 1} \\ \alpha_{\nu 2} \\ \alpha_{\tilde{\nu} 1}^+ \\ \alpha_{\tilde{\nu} 2}^+ \end{pmatrix} \quad (1.83)$$

Toutefois l'hamiltonien (1.82) n'est toujours pas diagonal. Nous nous proposons dans ce qui suit d'effectuer une nouvelle diagonalisation .

L'hamiltonien étant hermitique  $E_{\nu 12} = E_{\nu 21}$  et  $H_2^{\nu 12} = H_2^{\nu 21}$ , soit  $B_\nu$  la matrice :

$$B_\nu = \begin{pmatrix} E_{\nu 11} & E_{\nu 12} & -H_2^{\nu 11} & -H_2^{\nu 12} \\ E_{\nu 12} & E_{\nu 22} & -H_2^{\nu 12} & -H_2^{\nu 22} \\ -H_2^{\nu 11} & -H_2^{\nu 12} & -E_{\nu 11} & -E_{\nu 12} \\ -H_2^{\nu 12} & -H_2^{\nu 22} & -E_{\nu 12} & -E_{\nu 22} \end{pmatrix} \quad (1.84)$$

### Valeurs propres de la matrice $B_\nu$

Les valeurs propres de  $B_\nu$  sont solutions de l'équation bicarrée :

$$\lambda^4 - A\lambda^2 + B = 0 \quad (1.85)$$

avec :

$$A = [E_{\nu 11}^2 + 2E_{\nu 12}^2 + E_{\nu 22}^2 + (H_2^{\nu 11})^2 + 2(H_2^{\nu 12})^2 + (H_2^{\nu 22})^2]$$

et

$$B = [E_{\nu 11}^2 + (H_2^{\nu 11})^2] [E_{\nu 22}^2 + (H_2^{\nu 22})^2] - 4E_{\nu 12}H_2^{\nu 12}(E_{\nu 11}H_2^{\nu 22} + E_{\nu 22}H_2^{\nu 11}) \\ + 2 [E_{\nu 12}^2 - (H_2^{\nu 12})^2] (H_2^{\nu 11}H_2^{\nu 22} - E_{\nu 11}E_{\nu 22}) + [E_{\nu 12}^2 + (H_2^{\nu 12})^2]^2$$

On en déduit que :

$$\xi_{\nu 1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ A \pm \sqrt{A^2 - 4B} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.86)$$

Les racines carrées négatives étant non physiques elles sont rejetées [33,37].

### Vecteurs propres de la matrice $B_\nu$

Explicitons maintenant les vecteurs propres de la matrice  $B_\nu$  correspondant aux valeurs propres  $\xi_{\nu 1}$  et  $\xi_{\nu 2}$ . La structure en blocs de la matrice  $B_\nu$  est la même que celle de  $A_j$  donnée par (1.35), ses vecteurs propres auront donc des propriétés analogues à ceux de  $A_j$ .

Soient :  ${}^t X_{1\nu} = \begin{pmatrix} x_{\nu 11} & x_{\nu 12} & y_{\nu 11} & y_{\nu 12} \end{pmatrix}$  et  ${}^t X_{2\nu} = \begin{pmatrix} x_{\nu 21} & x_{\nu 22} & y_{\nu 21} & y_{\nu 22} \end{pmatrix}$   
les vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\xi_{\nu 1}$  et  $\xi_{\nu 2}$  respectivement .

En imposant à la transformation d'être canonique, on obtient les relations suivantes entre les coordonnées des deux vecteurs propres :

$$x_{\nu 11}^2 + x_{\nu 12}^2 + y_{\nu 11}^2 + y_{\nu 12}^2 = x_{\nu 21}^2 + x_{\nu 22}^2 + y_{\nu 21}^2 + y_{\nu 22}^2 = 1 \quad (1.87)$$

et l'orthogonalité donne :

$$x_{\nu 11}x_{\nu 21} + x_{\nu 12}x_{\nu 22} + y_{\nu 11}y_{\nu 21} + y_{\nu 12}y_{\nu 22} = 0 \quad (1.88)$$

Les composantes du vecteur propre  $X_{1\nu}$  sont données par :

$$x_{\nu 11} = \frac{T_{\nu 1}}{T_\nu} \quad , \quad x_{\nu 12} = \frac{-T_{\nu 2}}{T_\nu} \quad , \quad y_{\nu 11} = \frac{T_{\nu 3}}{T_\nu} \quad , \quad y_{\nu 12} = \frac{-T_{\nu 4}}{T_\nu} \quad (1.89)$$

où

$$T_{\nu 1} = \begin{vmatrix} E_{\nu 22} - \xi_{\nu 1} & -H_2^{\nu 12} & -H_2^{\nu 22} \\ -H_2^{\nu 12} & -(E_{\nu 11} + \xi_{\nu 1}) & -E_{\nu 12} \\ -H_2^{\nu 22} & -E_{\nu 12} & -(E_{\nu 22} + \xi_{\nu 1}) \end{vmatrix} \quad (1.90)$$

$$T_{\nu 2} = \begin{vmatrix} E_{\nu 12} & -H_2^{\nu 12} & -H_2^{\nu 22} \\ -H_2^{\nu 11} & -(E_{\nu 11} + \xi_{\nu 1}) & -E_{\nu 12} \\ -H_2^{\nu 12} & -E_{\nu 12} & -(E_{\nu 22} + \xi_{\nu 1}) \end{vmatrix} \quad (1.91)$$

$$T_{\nu 3} = \begin{vmatrix} E_{\nu 12} & E_{\nu 22} - \xi_{\nu 1} & -H_2^{\nu 22} \\ -H_2^{\nu 11} & -H_2^{\nu 12} & -E_{\nu 12} \\ -H_2^{\nu 12} & -H_2^{\nu 22} & -(E_{\nu 22} + \xi_{\nu 1}) \end{vmatrix} \quad (1.92)$$

$$T_{\nu 4} = \begin{vmatrix} E_{\nu 12} & E_{\nu 22} - \xi_{\nu 1} & -H_2^{\nu 12} \\ -H_2^{\nu 11} & -H_2^{\nu 12} & -(E_{\nu 11} + \xi_{\nu 1}) \\ -H_2^{\nu 12} & -H_2^{\nu 22} & -E_{\nu 12} \end{vmatrix} \quad (1.93)$$

et

$$T_{\nu} = \sqrt{T_{\nu 1}^2 + T_{\nu 2}^2 + T_{\nu 3}^2 + T_{\nu 4}^2} \quad (1.94)$$

En appelant  $T'_{\nu i}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , (respectivement  $T'_{\nu}$ ) les expressions similaires aux  $T_{\nu i}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , (respectivement  $T_{\nu}$ ) où cette fois on remplace  $\xi_{\nu 1}$  par  $\xi_{\nu 2}$ , on obtient :

$$x_{j21} = \frac{T'_{\nu 1}}{T'_{\nu}}, \quad x_{j22} = \frac{-T'_{\nu 2}}{T'_{\nu}}, \quad y_{\nu 21} = \frac{T'_{\nu 3}}{T'_{\nu}}, \quad y_{\nu 22} = \frac{-T'_{\nu 4}}{T'_{\nu}} \quad (1.95)$$

et

$$T'_{\nu} = \sqrt{T_{\nu 1}'^2 + T_{\nu 2}'^2 + T_{\nu 3}'^2 + T_{\nu 4}'^2} \quad (1.96)$$

### Nouvelle transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin

La transformation  $T$  qui diagonalise l'hamiltonien  $H$  (1.83) s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} x_{\nu 11} & x_{\nu 21} & -y_{\nu 11} & -y_{\nu 12} \\ x_{\nu 21} & x_{\nu 22} & -y_{\nu 21} & -y_{\nu 22} \\ y_{\nu 11} & y_{\nu 21} & x_{\nu 11} & x_{\nu 12} \\ y_{\nu 12} & y_{\nu 22} & x_{\nu 21} & x_{\nu 22} \end{pmatrix} \quad (1.97)$$

D'ici on peut écrire immédiatement l'expression (1.83) comme suit :

$$H = E_0 + \sum_{\nu>0} (E_{\nu 11} + E_{\nu 22}) + \sum_{\nu>0} \begin{pmatrix} \alpha_{\nu 1}^+ & \alpha_{\nu 2}^+ & \alpha_{\tilde{\nu} 1} & \alpha_{\tilde{\nu} 2} \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} \xi_{\nu 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{\nu 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_{\nu 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\xi_{\nu 2} \end{pmatrix} T^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_{\nu 1} \\ \alpha_{\nu 2} \\ \alpha_{\tilde{\nu} 1}^+ \\ \alpha_{\tilde{\nu} 2}^+ \end{pmatrix} \quad (1.98)$$

Cet hamiltonien s'écrit également sous forme la condensée suivante :

$$H = E_0 + \sum_{\nu>0} (E_{\nu 11} + E_{\nu 22}) + \sum_{\nu>0, \tau} \xi_{\nu \tau} (\beta_{\nu \tau}^+ \beta_{\nu \tau} + \beta_{\tilde{\nu} \tau} \beta_{\tilde{\nu} \tau}^+) \quad (1.99)$$

où les opérateurs  $\beta$  définis par :

$$\beta_{\nu \tau}^+ = \sum_{j=1,2} (x_{\nu \tau j} \alpha_{\nu j}^+ + y_{\nu \tau j} \alpha_{\tilde{\nu} j}) \quad \tau = 1, 2 \quad (1.100)$$

sont les nouveaux opérateurs de quasi-particules.

Si l'on remplace l'expression (1.59) dans l'expression (1.100) on trouve que la nouvelle transformation généralisée de bogoliubov-Valatin prend la forme :

$$\beta_{\nu \tau}^+ = \sum_t (U_{\nu \tau t} a_{\nu t}^+ + V_{\nu \tau t} a_{\tilde{\nu} t}) \quad \tau = 1, 2 \quad \text{et} \quad t = n, p \quad (1.101)$$

où :

$$\begin{cases} U_{\nu \tau t} = \sum_{j=1,2} (x_{\nu \tau j} u_{\nu j t} - y_{\nu \tau j} v_{\nu j t}) \\ V_{\nu \tau t} = \sum_{j=1,2} (x_{\nu \tau j} v_{\nu j t} + y_{\nu \tau j} u_{\nu j t}) \end{cases} \quad \tau = 1, 2, \quad t = n, p \quad (1.102)$$

On peut donc écrire l'expression (1.101) sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \beta_{\nu 1}^+ \\ \beta_{\nu 2}^+ \\ \beta_{\tilde{\nu} 1} \\ \beta_{\tilde{\nu} 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{\nu 1p} & U_{\nu 1n} & V_{\nu 1p} & V_{\nu 1n} \\ U_{\nu 2p} & U_{\nu 2n} & V_{\nu 2p} & V_{\nu 2n} \\ -V_{\nu 1p} & -V_{\nu 1n} & U_{\nu 1p} & U_{\nu 1n} \\ -V_{\nu 2p} & -V_{\nu 2n} & U_{\nu 2p} & U_{\nu 2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\nu p}^+ \\ a_{\nu n}^+ \\ a_{\tilde{\nu} p} \\ a_{\tilde{\nu} n} \end{pmatrix} \quad (1.103)$$

La transformation inverse de la nouvelle transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin est :

$$a_{\nu t}^+ = \sum_{\tau} (U_{\nu \tau t} \beta_{\nu \tau}^+ - V_{\nu \tau t} \beta_{\tilde{\nu} \tau}) \quad \tau = 1, 2 \text{ et } t = n, p \quad (1.104)$$



# Chapitre 2

## Probabilités de transition bêta

### 2.1 Introduction

Les transitions bêta sont un processus physique dans lequel un noyau se transforme en un autre en émettant une ou plusieurs particules. Ce processus est un passage d'un état quantique initial vers un état quantique final différent [1].

La désintégration bêta moins est une transition d'un neutron à un proton associé par la création d'un électron et d'un anti-neutrino i.e.  $A(N, Z) \longrightarrow A(N - 1, Z + 1) + e^- + \bar{\nu}_e$ . La désintégration bêta plus est une transition d'un proton à un neutron associé par la création d'un positron et d'un neutrino i.e.  $A(N, Z) \longrightarrow A(N + 1, Z - 1) + e^+ + \nu_e$ . L'électron (ou le positron) et le neutrino (ou l'anti-neutrino) sont des particules de spin  $1/2$ , leur orientation relative peut donc conduire à un spin total  $S = 0$  ou  $S = 1$ . On va donc distinguer deux types possibles de transitions bêta :

- La transitions de Gamow-Teller lorsque  $S = 1$  : les spins du couple (électron anti-neutrino) ou (positron neutrino) sont alors parallèles.
- La transition de Fermi où le moment angulaire intrinsèque  $S$  évacué est nul : les spins du couple (électron anti-neutrino) ou (positron neutrino) sont antiparallèles. Dans le présent travail, nous considérons ce dernier type de transition.

Nous nous proposons, dans le présent chapitre d'établir les expressions des probabilités

de transition bêta en tenant compte de l'appariement isovectoriel, aussi bien en représentation particule qu'en représentation quasi-particule. Nous commencerons pour cela par établir l'expression de l'état BCS ou état fondamental, puis des états excités.

## 2.2 Etat BCS

L'état fondamental ou état  $|BCS\rangle$  est déterminé en éliminant du vrai vide  $|0\rangle$  toutes les quasi-particules, soit :

$$|BCS\rangle = K \prod_{\nu>0} \beta_{\nu 1} \beta_{\tilde{\nu} 1} \beta_{\nu 2} \beta_{\tilde{\nu} 2} |0\rangle \quad (2.1)$$

K étant la constante de normalisation.

Compte tenu de l'expression (1.101) on obtient :

$$\begin{aligned} |BCS\rangle &= \prod_{\nu>0} \left\{ B_1^\nu a_{\tilde{\nu} n}^+ a_{\nu n}^+ a_{\tilde{\nu} p}^+ a_{\nu p}^+ + B_p^\nu a_{\tilde{\nu} p}^+ a_{\nu p}^+ + B_n^\nu a_{\tilde{\nu} n}^+ a_{\nu n}^+ + B_4^\nu \left( a_{\tilde{\nu} n}^+ a_{\nu p}^+ + a_{\tilde{\nu} p}^+ a_{\nu n}^+ \right) + \right. \\ &\quad \left. B_5^\nu \right\} |0\rangle \\ &= \prod_{\nu>0} |\Psi_\nu\rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec

$$|\Psi_\nu\rangle = \left\{ B_1^\nu A_{\nu n}^+ A_{\nu p}^+ + B_p^\nu A_{\nu p}^+ + B_n^\nu A_{\nu n}^+ + B_4^\nu \left( a_{\tilde{\nu} n}^+ a_{\nu p}^+ + a_{\tilde{\nu} p}^+ a_{\nu n}^+ \right) + B_5^\nu \right\} |0\rangle$$

sachant que  $A_{\nu p}^+ = a_{\tilde{\nu} p}^+ a_{\nu p}^+$ ,  $A_{\nu n}^+ = a_{\tilde{\nu} n}^+ a_{\nu n}^+$ , et les coefficients  $B_1^\nu$ ,  $B_p^\nu$ ,  $B_n^\nu$ ,  $B_4^\nu$ ,  $B_5^\nu$  sont tels que :

$$B_i^\nu = b_i^\nu / K, \quad i = 1, 2, p, n, 5. \quad (2.3)$$

où nous avons posé :

$$\begin{aligned} b_1^\nu &= (V_{\nu 1 p} V_{\nu 2 n} - V_{\nu 1 n} V_{\nu 2 p})^2 \\ b_p^\nu &= V_{\nu 1 p}^2 (U_{\nu 2 p} V_{\nu 2 p} + U_{\nu 2 n} V_{\nu 2 n}) + V_{\nu 2 p}^2 (U_{\nu 1 n} V_{\nu 1 n} - U_{\nu 1 p} V_{\nu 1 p}) - 2U_{\nu 1 n} V_{\nu 1 p} V_{\nu 2 p} V_{\nu 2 n} \\ b_n^\nu &= V_{\nu 1 n}^2 (U_{\nu 2 p} V_{\nu 2 p} + U_{\nu 2 n} V_{\nu 2 n}) - V_{\nu 2 n}^2 (U_{\nu 1 n} V_{\nu 1 n} - U_{\nu 1 p} V_{\nu 1 p}) - 2U_{\nu 1 p} V_{\nu 1 n} V_{\nu 2 p} V_{\nu 2 n} \end{aligned}$$

$$b_4^\nu = V_{\nu 1n} V_{\nu 1p} (U_{\nu 2p} V_{\nu 2p} + U_{\nu 2n} V_{\nu 2n}) - V_{\nu 2n}^2 U_{\nu 1n} V_{\nu 1p} - V_{\nu 2p}^2 U_{\nu 1p} V_{\nu 1n}$$

$$b_5^\nu = (U_{\nu 1n} V_{\nu 1n} + U_{\nu 1p} V_{\nu 1p}) (U_{\nu 2p} V_{\nu 2p} + U_{\nu 2n} V_{\nu 2n}) - (U_{\nu 1n} V_{\nu 2n} + U_{\nu 1p} V_{\nu 2p})^2$$

La normalisation à l'unité de cet état conduit à :

$$K = \left\{ (b_1^\nu)^2 + (b_p^\nu)^2 + (b_n^\nu)^2 + 2 (b_4^\nu)^2 + (b_5^\nu)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

On constate que cet état décrit un ensemble de paires indépendantes et que chaque paire est constituée de nucléons corrélés. Il ne peut donc décrire que des noyaux pair-pairs .

Dans tout ce qui suit, et pour simplifier les notations, nous poserons :

$$|\Psi\rangle = |BCS\rangle \quad (2.4)$$

A la limite  $\Delta_{np} = 0$ , les amplitudes de probabilités d'occupation s'écrivent, compte tenu de (1.55) et (1.56) .

$$B_1^\nu = V_{\nu p} V_{\nu n} \quad , \quad B_p^\nu = V_{\nu p} U_{\nu n} \quad , \quad B_n^\nu = V_{\nu n} U_{\nu p} \quad , \quad B_4^\nu = 0 \quad \text{et} \quad B_5^\nu = U_{\nu p} U_{\nu n} \quad (2.5)$$

En remplaçant ces dernières expressions dans (2.2), on trouve :

$$|\Psi\rangle = \prod_{\nu>0} \{ V_{\nu p} V_{\nu n} A_{\nu n}^+ A_{\nu p}^+ + V_{\nu p} U_{\nu n} A_{\nu p}^+ + V_{\nu n} U_{\nu p} A_{\nu n}^+ + U_{\nu p} U_{\nu n} \} |0\rangle$$

$$= |\Psi_p\rangle |\Psi_n\rangle \quad (2.6)$$

avec :

$$|\Psi_p\rangle = \prod_{\nu>0} (U_{\nu p} + V_{\nu p} A_{\nu p}^+) |0\rangle$$

$$|\Psi_n\rangle = \prod_{\nu>0} (U_{\nu n} + V_{\nu n} A_{\nu n}^+) |0\rangle \quad (2.7)$$

La fonction d'onde du système total (neutron+proton) se ramène donc au produit des fonctions d'onde des deux systèmes, évaluées dans le cas de la théorie BCS habituelle, c'est à dire dans le cas de l'appariement entre particules identiques (voir annexe B) .

Dans cette dernière on notera que par rapport aux notations adoptées jusque là, il

suffit de changer  $V_\nu$  en  $(-V_\nu)$  en raison de l'ordre des opérateurs .

## 2.3 Etats excités

Nous supposons dans ce qui suit que les états excités sont des combinaisons linéaires d'états à deux quasi-particules [4].

Commençons par déterminer l'état à une quasi-particule qui s'écrit en tenant compte de (1.101) et (2.2) :

$$\beta_{\tilde{\nu}\tau}^+ |\Psi\rangle = \left( U_{\nu\tau p} a_{\tilde{\nu}p}^+ + U_{\nu\tau} a_{\tilde{\nu}n}^+ - V_{\nu\tau p} a_{\nu p} - V_{\nu\tau n} a_{\nu n} \right) \quad , \quad \tau = 1, 2 \quad (2.8)$$

$$\left( B_1^\nu A_{\nu n}^+ A_{\nu p}^+ + B_p^\nu A_{\nu p}^+ + B_n^\nu A_{\nu n}^+ + B_4^\nu \left( a_{\tilde{\nu}n}^+ a_{\nu p}^+ + a_{\tilde{\nu}p}^+ a_{\nu n}^+ \right) + B_5^\nu \right) \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} |\Psi_j\rangle$$

Soit encore :

$$\beta_{\tilde{\nu}\tau}^+ |\Psi\rangle = \left( B_{3\nu\tau}^{p,n} A_{\nu p}^+ a_{\tilde{\nu}n}^+ + B_{3\nu\tau}^{n,p} A_{\nu n}^+ a_{\tilde{\nu}p}^+ + \gamma_{\nu\tau p} a_{\tilde{\nu}p}^+ + \gamma_{\nu\tau n} a_{\tilde{\nu}n}^+ \right) \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} |\Psi_j\rangle \quad (2.9)$$

où l'on a introduit les notations :

$$\begin{aligned} B_{3\nu\tau}^{pn} &= (U_{\nu\tau n} B_p^\nu - U_{\nu\tau p} B_4^\nu + V_{\nu\tau n} B_1^\nu) \\ B_{3\nu\tau}^{np} &= (U_{\nu\tau p} B_n^\nu - U_{\nu\tau n} B_4^\nu + V_{\nu\tau p} B_1^\nu) \\ \gamma_{\nu\tau p} &= (U_{\nu\tau p} B_5^\nu + V_{\nu\tau p} B_p^\nu + V_{\nu\tau n} B_4^\nu) \\ \gamma_{\nu\tau n} &= (U_{\nu\tau n} B_5^\nu + V_{\nu\tau p} B_4^\nu + V_{\nu\tau n} B_n^\nu) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Compte tenu de ces relations, l'expression de l'état à deux quasi-particules s'écrit :

$$\beta_{\nu\tau}^+ \beta_{\tilde{\nu}\tau'}^+ |\Psi\rangle = (U_{\nu\tau p} a_{\nu p}^+ + U_{\nu\tau n} a_{\nu n}^+ + V_{\nu\tau p} a_{\tilde{\nu}p}^+ + V_{\nu\tau n} a_{\tilde{\nu}n}^+) \quad (2.11)$$

$$\left( B_{3\nu\tau'}^{pn} A_{\nu p}^+ a_{\tilde{\nu}n}^+ + B_{3\nu\tau'}^{np} A_{\nu n}^+ a_{\tilde{\nu}p}^+ + \gamma_{\nu\tau'p} a_{\tilde{\nu}p}^+ + \gamma_{\nu\tau'n} a_{\tilde{\nu}n}^+ \right) \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} |\Psi_j\rangle$$

Après normalisation, il devient :

$$\begin{aligned}
|\nu\tau\nu\tau'\rangle = & [C_{1\tau\tau'}^\nu A_{\nu n}^+ A_{\nu p}^+ + C_{p\tau\tau'}^\nu A_{\nu p}^+ + C_{n\tau\tau'}^\nu A_{\nu n}^+ + C_{4\tau\tau'}^{\nu np} a_{\nu n}^+ a_{\nu p}^+ \\
& + C_{4\tau\tau'}^{\nu pn} a_{\nu p}^+ a_{\nu n}^+ + C_{5\tau\tau'}^\nu] \prod_{\substack{j>0 \\ j\neq\nu}} |\Psi_j\rangle
\end{aligned} \tag{2.12}$$

où nous avons posé :

$$\begin{aligned}
C_{1\tau\tau'}^\nu &= (-U_{\nu\tau p} B_{3\nu\tau'}^{np} - U_{\nu\tau n} B_{3\nu\tau'}^{pn}) / K_{\nu\tau\tau'} \\
C_{p\tau\tau'}^\nu &= (-U_{\nu\tau p} \gamma_{\nu\tau'p} + V_{\nu\tau n} B_{3\nu\tau'}^{pn}) / K_{\nu\tau\tau'} \\
C_{n\tau\tau'}^\nu &= (-U_{\nu\tau n} \gamma_{\nu\tau'n} + V_{\nu\tau p} B_{3\nu\tau'}^{np}) / K_{\nu\tau\tau'} \\
C_{4\tau\tau'}^{\nu np} &= (-U_{\nu\tau p} \gamma_{\nu\tau'n} - V_{\nu\tau p} B_{3\nu\tau'}^{pn}) / K_{\nu\tau\tau'} \\
C_{4\tau\tau'}^{\nu pn} &= (-U_{\nu\tau n} \gamma_{\nu\tau'p} - V_{\nu\tau n} B_{3\nu\tau'}^{np}) / K_{\nu\tau\tau'} \\
C_{5\tau\tau'}^\nu &= (+V_{\nu\tau p} \gamma_{\nu\tau'p} + V_{\nu\tau n} \gamma_{\nu\tau'n}) / K_{\nu\tau\tau'}
\end{aligned} , \quad \tau, \tau' = 1, 2 \tag{2.13}$$

avec :

$$K_{\nu\tau\tau'} = \sqrt{(C_{1\tau\tau'}^\nu)^2 + (C_{p\tau\tau'}^\nu)^2 + (C_{n\tau\tau'}^\nu)^2 + (C_{4\tau\tau'}^{\nu np})^2 + (C_{4\tau\tau'}^{\nu pn})^2 + (C_{5\tau\tau'}^\nu)^2} \tag{2.14}$$

On constate donc que le niveau  $\nu$  peut comprendre, comme dans l'état fondamental

- soit aucune particule avec une probabilité  $C_{5\tau\tau'}^\nu$
- soit une paire mixte neutron-proton avec une probabilité  $C_{4\tau\tau'}^{\nu np}$
- soit une paire mixte proton-neutron avec une probabilité  $C_{4\tau\tau'}^{\nu pn}$
- soit une paire homogène proton-proton avec une probabilité  $C_{p\tau\tau'}^\nu$
- soit une paire homogène neutron-neutron avec une probabilité  $C_{n\tau\tau'}^\nu$
- soit deux paires homogènes neutron-neutron et proton-proton avec une probabilité

$$C_{1\tau\tau'}^\nu$$

L'état excité s'écrira finalement, une fois normé à l'unité :

$$|\tau\tau'\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\nu>0} |\nu\tau\nu\tau'\rangle \tag{2.15}$$

$\Omega$  : étant la dégénérescence totale des niveaux .

A la limite lorsque  $\Delta_{np} = 0$ , les coefficients définis en (2.10) deviennent :

$$\begin{aligned}
B_{3\nu 1}^{pn} &= 0 & B_{3\nu 2}^{pn} &= 2V_{\nu p} \\
B_{3\nu 1}^{np} &= 2V_{\nu n} & B_{3\nu 2}^{np} &= 0 \\
\gamma_{\nu 1 p} &= 2U_{\nu n} & \gamma_{\nu 2 p} &= 0 \\
\gamma_{\nu 1 n} &= 0 & \gamma_{\nu 2 n} &= 2U_{\nu p}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Ce qui entraîne pour les coefficients définis en (2.13) :

$$\begin{aligned}
C_{111}^\nu &= -U_{\nu p}V_{\nu n} & C_{122}^\nu &= -U_{\nu n}V_{\nu p} & C_{112}^\nu &= 0 & C_{121}^\nu &= 0 \\
C_{p11}^\nu &= -U_{\nu p}U_{\nu n} & C_{p22}^\nu &= V_{\nu p}V_{\nu n} & C_{p12}^\nu &= 0 & C_{p21}^\nu &= 0 \\
C_{n11}^\nu &= V_{\nu p}V_{\nu n} & C_{n22}^\nu &= -U_{\nu n}U_{\nu p} & C_{n12}^\nu &= 0 & C_{n21}^\nu &= 0 \\
C_{411}^{\nu np} &= 0 & C_{422}^{\nu np} &= 0 & C_{412}^{\nu np} &= -1 & C_{421}^{\nu np} &= 0 \\
C_{411}^{\nu pn} &= 0 & C_{422}^{\nu pn} &= 0 & C_{412}^{\nu pn} &= 0 & C_{421}^{\nu pn} &= -1 \\
C_{511}^\nu &= U_{\nu n}V_{\nu p} & C_{522}^\nu &= U_{\nu p}V_{\nu n} & C_{512}^\nu &= 0 & C_{521}^\nu &= 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

A la limite lorsque  $\Delta_{np} = 0$ , l'expression (2.15) devient ( $\tau, \tau' = 1, 2$ ) :

$$\begin{aligned}
|11\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\nu>0} [-U_{\nu p}V_{\nu n}A_{\nu n}^+A_{\nu p}^+ - U_{\nu p}U_{\nu n}A_{\nu p}^+ + V_{\nu p}V_{\nu n}A_{\nu n}^+ + U_{\nu n}V_{\nu p}] \prod_{\substack{j>0 \\ j\neq\nu}} |\Psi_{jn}\rangle |\Psi_{jp}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\nu>0} (-V_{\nu p} + U_{\nu p}a_{\nu p}^+a_{\nu p}^+) \prod_{j\neq\nu} |\Psi_{jp}\rangle |\Psi_n\rangle
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
|22\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\nu>0} [-U_{\nu n}V_{\nu p}A_{\nu n}^+A_{\nu p}^+ + V_{\nu p}V_{\nu n}A_{\nu p}^+ - U_{\nu n}U_{\nu p}A_{\nu n}^+ + U_{\nu p}V_{\nu n}] \prod_{\substack{j>0 \\ j\neq\nu}} |\Psi_{jn}\rangle |\Psi_{jp}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\nu>0} (-V_{\nu n} + U_{\nu n}a_{\nu n}^+a_{\nu n}^+) \prod_{j\neq\nu} |\Psi_{jn}\rangle |\Psi_p\rangle
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$|21\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\nu>0} a_{\nu n}^+a_{\nu p}^+ \prod_{j\neq\nu} |\Psi_{jn}\rangle |\Psi_{jp}\rangle \tag{2.20}$$

$$|12\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\nu>0} a_{\nu p}^+ a_{\tilde{\nu} n}^+ \prod_{j \neq \nu} |\Psi_{jn}\rangle |\Psi_{jp}\rangle \quad (2.21)$$

Ces quatres dernières expressions sont identiques aux expressions (B.7), à (B.10) dans le cas de l'appariement entre particules identiques .

## 2.4 Probabilités de transition

Nous avons, dans le présent travail, adopté l'approche de Raduta et Moya de Guerra [4] dans laquelle les probabilités de transition sont définies par :

$$P_{\pm}^{\tau\tau'} = |\langle \Psi | T_{\pm} | \tau\tau' \rangle|^2 \quad , \quad \tau, \tau' = 1, 2 \quad (2.22)$$

où  $T_{\pm}$  sont les opérateurs de transition permettant d'étudier les désintégrations  $\beta^+$  et  $\beta^-$  s'écrivent [4] :

$$T_+ = \sum_{k>0} \left( a_{kp}^+ a_{kn} + a_{kp}^+ a_{\tilde{kn}} \right) = \sum_{k>0} T_+^k \quad (2.23)$$

et

$$T_- = \sum_{k>0} \left( a_{kn}^+ a_{kp} + a_{kn}^+ a_{\tilde{kp}} \right) = \sum_{k>0} T_-^k \quad (2.24)$$

La transition peut se produire dans ce cas entre l'état fondamental BCS  $|\Psi\rangle$  et l'un des états à deux quasi-particules  $|\tau\tau'\rangle$ . En effet, la composante principale de l'état  $|\Psi\rangle$  est associée au noyau père  $A(N, Z)$ . Quand aux états à deux quasi-particules, ils ont des composantes correspondant à des noyaux voisins  $A(N, Z+2)$ ,  $A(N-1, Z-1)$ ,  $A(N-1, Z+1)$ ,  $A(N+1, Z-1)$ ,  $A(N+1, Z+1)$ ,  $A(N, Z-2)$ ,  $A(N+2, Z)$  et  $A(N-2, Z)$ . Le troisième et le quatrième terme ci-dessus sont les noyaux fils dans le cas des désintégrations  $\beta^-$  et  $\beta^+$ , respectivement [4].

Par ailleurs, compte tenu du fait que :

$$(T_{\pm})^+ = T_{\mp} \quad (2.25)$$

il vient :

$$|\langle \Psi | T_{\pm} | \tau \tau' \rangle|^2 = \langle \Psi | T_{\pm} | \tau \tau' \rangle \langle \tau \tau' | T_{\mp} | \Psi \rangle \quad (2.26)$$

Cette propriété nous facilitera les calculs dans ce qui suit.

### 2.4.1 Calcul en représentation particule

Déterminons dans un premier temps  $\langle \tau \tau' | T_+ | \Psi \rangle$  en représentation particule, soit :

$$\langle \tau \tau' | T_+ | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} \langle k \tau k \tau' | T_+^k | \Psi \rangle + \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} \sum_{\substack{\nu>0 \\ \nu \neq k}} \langle \nu \tau \nu \tau' | T_+^k | \Psi \rangle \quad (2.27)$$

avec :

$$\begin{aligned} \langle k \tau k \tau' | T_+^k | \Psi \rangle &= \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq k}} \langle \Psi_j | \left[ C_{1\tau\tau'}^k A_{kp} A_{kn} + C_{n\tau\tau'}^k A_{kn} + C_{p\tau\tau'}^k A_{kp} + C_{4\tau\tau'}^{knp} a_{kp} a_{\tilde{kn}} \right. \\ &\quad \left. + C_{4\tau\tau'}^{kpn} a_{kn} a_{\tilde{kp}} + C_{5\tau\tau'}^k \right] \left[ B_n^k \left( a_{\tilde{kn}}^+ a_{kp}^+ + a_{\tilde{kp}}^+ a_{kn}^+ \right) + 2B_4^k A_{kp}^+ \right] \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq k}} |\Psi_j \rangle \\ &= \left[ B_n^k \left( C_{4\tau\tau'}^{knp} + C_{4\tau\tau'}^{kpn} \right) + 2B_4^k C_{p\tau\tau'}^k \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$



et

$$\begin{aligned}
\langle \nu\tau\nu\tau' | T_+^k | \Psi \rangle &= \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq (\nu,k)}} \langle \Psi_j | [C_{1\tau\tau'}^\nu A_{\nu p} A_{\nu n} + C_{n\tau\tau'}^\nu A_{\nu n} + C_{p\tau\tau'}^\nu A_{\nu p} + C_{4\tau\tau'}^{\nu np} a_{\nu p} a_{\tilde{\nu}n} \\
&\quad + C_{4\tau\tau'}^{\nu pn} a_{\nu n} a_{\tilde{\nu}p} + C_{5\tau\tau'}^\nu] [B_1^k A_{kp} A_{kn} + B_p^k A_{kp} + B_n^k A_{kn} \\
&\quad + B_4^k (a_{kn} a_{\tilde{k}p} + a_{kp} a_{\tilde{kn}}) + B_5^k] [B_n^k (a_{kn}^+ a_{kp}^+ + a_{\tilde{k}p}^+ a_{kn}^+) \\
&\quad + 2B_4^k A_{kp}^+] [B_1^\nu A_{\nu p}^+ A_{\nu n}^+ + B_p^\nu A_{\nu p}^+ + B_n^\nu A_{\nu n}^+ + B_5^\nu \\
&\quad + B_4^\nu (a_{\tilde{\nu}n}^+ a_{\nu p}^+ + a_{\tilde{\nu}p}^+ a_{\nu n}^+)] \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq (\nu,k)}} |\Psi_j \rangle \\
&= 2B_4^k (B_n^k + B_p^k) [B_1^\nu C_{1\tau\tau'}^\nu + B_p^\nu C_{p\tau\tau'}^\nu + B_n^\nu C_{n\tau\tau'}^\nu + B_4^\nu (C_{4\tau\tau'}^{\nu np} + C_{4\tau\tau'}^{\nu pn}) \\
&\quad + B_5^\nu C_{5\tau\tau'}^\nu] \tag{2.29}
\end{aligned}$$

On aura alors :

$$\begin{aligned}
\langle \tau\tau' | T_+ | \Psi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} [B_n^k (C_{4\tau\tau'}^{knp} + C_{4\tau\tau'}^{kpn}) + 2B_4^k C_{p\tau\tau'}^k] \tag{2.30} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} \sum_{\substack{\nu>0 \\ \nu \neq k}} 2B_4^k (B_n^k + B_p^k) [B_1^\nu C_{1\tau\tau'}^\nu + B_p^\nu C_{p\tau\tau'}^\nu + B_n^\nu C_{n\tau\tau'}^\nu \\
&\quad + B_4^\nu (C_{4\tau\tau'}^{\nu np} + C_{4\tau\tau'}^{\nu pn}) + B_5^\nu C_{5\tau\tau'}^\nu]
\end{aligned}$$

On montre facilement que :

$$\langle \Psi | T_- | \tau\tau' \rangle = \langle \tau\tau' | T_+ | \Psi \rangle \tag{2.31}$$

D'où :

$$P_-^{\tau\tau'} = (\langle \tau\tau' | T_+ | \Psi \rangle)^2 \tag{2.32}$$

A la limite lorsque  $\Delta_{np} = 0$ , compte tenu (2.5) et (2.17), l'expression (2.30) devient :

$$\begin{cases} \langle 11 | T_+ | \Psi \rangle = 0 \\ \langle 21 | T_+ | \Psi \rangle = -\frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} U_{kp} V_{kn} \\ \langle 12 | T_+ | \Psi \rangle = -\frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} U_{kp} V_{kn} \\ \langle 22 | T_+ | \Psi \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

Compte tenu de (2.32), les probabilités de transition sont :

$$\begin{aligned} P_-^{11} &= 0 \\ P_-^{22} &= 0 \\ P_-^{21} &= \frac{1}{\Omega} \left( \sum_{k>0} U_{kp} V_{kn} \right)^2 \\ P_-^{12} &= \frac{1}{\Omega} \left( \sum_{k>0} U_{kp} V_{kn} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Ce qui correspond bien à l'expression (B.22) dans le cas de l'appariement entre particules identiques .

De même :

$$\langle \tau\tau' | T_- | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} \langle k\tau k\tau' | T_-^k | \Psi \rangle + \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} \sum_{\substack{\nu>0 \\ \nu \neq k}} \langle \nu\tau\nu\tau' | T_-^k | \Psi \rangle \quad (2.35)$$

avec :

$$\begin{aligned} \langle k\tau k\tau' | T_-^k | \Psi \rangle &= \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq k}} \langle \Psi_j | \left[ C_{1\tau\tau'}^k A_{kp} A_{kn} + C_{n\tau\tau'}^k A_{kn} + C_{p\tau\tau'}^k A_{kp} + C_{4\tau\tau'}^{knp} a_{kp} a_{kn} \right. \\ &\quad \left. + C_{4\tau\tau'}^{kpn} a_{kn} a_{kp} + C_{5\tau\tau'}^k \right] \left[ B_p^k \left( a_{kn}^+ a_{kp}^+ + a_{kp}^+ a_{kn}^+ \right) + 2B_4^k A_{kn}^+ \right] \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq k}} | \Psi_j \rangle \\ &= \left[ B_p^k \left( C_{4\tau\tau'}^{knp} + C_{4\tau\tau'}^{kpn} \right) + 2B_4^k C_{n\tau\tau'}^k \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

et

$$\begin{aligned}
\langle \nu\tau\nu\tau' | T_-^k | \Psi \rangle &= \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq (\nu,k)}} \langle \Psi_j | [C_{1\tau\tau'}^\nu A_{\nu p} A_{\nu n} + C_{n\tau\tau'}^\nu A_{\nu n} + C_{p\tau\tau'}^\nu A_{\nu p} + C_{4\tau\tau'}^{\nu np} a_{\nu p} a_{\tilde{\nu} n} \\
&\quad + C_{4\tau\tau'}^{\nu pn} a_{\nu n} a_{\tilde{\nu} p} + C_{5\tau\tau'}^\nu] [B_1^k A_{kp} A_{kn} + B_p^k A_{kp} + B_n^k A_{kn} \\
&\quad + B_4^k (a_{kn} a_{\tilde{k} p} + a_{kp} a_{\tilde{k} n}) + B_5^k] [B_p^k (a_{kn}^+ a_{kp}^+ + a_{\tilde{k} p}^+ a_{kn}^+) \\
&\quad + 2B_4^k A_{kn}^+] [B_1^\nu A_{\nu p}^+ A_{\nu n}^+ + B_p^\nu A_{\nu p}^+ + B_n^\nu A_{\nu n}^+ + B_5^\nu \\
&\quad + B_4^\nu (a_{\tilde{\nu} n}^+ a_{\nu p}^+ + a_{\tilde{\nu} p}^+ a_{\nu n}^+)] \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq (\nu,k)}} |\Psi_j \rangle \\
&= 2B_4^k (B_n^k + B_p^k) [B_1^\nu C_{1\tau\tau'}^\nu + B_p^\nu C_{p\tau\tau'}^\nu + B_n^\nu C_{n\tau\tau'}^\nu + B_4^\nu (C_{4\tau\tau'}^{\nu np} + C_{4\tau\tau'}^{\nu pn}) \\
&\quad + B_5^\nu C_{5\tau\tau'}^\nu] \tag{2.37}
\end{aligned}$$

d'où, finalement :

$$\begin{aligned}
\langle \tau\tau' | T_- | \Psi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} [B_p^k (C_{4\tau\tau'}^{knp} + C_{4\tau\tau'}^{kpn}) + 2B_4^k C_{n\tau\tau'}^k] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} \sum_{\substack{\nu>0 \\ \nu \neq k}} 2B_4^k (B_n^k + B_p^k) [B_1^\nu C_{1\tau\tau'}^\nu + B_p^\nu C_{p\tau\tau'}^\nu + B_n^\nu C_{n\tau\tau'}^\nu \\
&\quad + B_4^\nu (C_{4\tau\tau'}^{\nu np} + C_{4\tau\tau'}^{\nu pn}) + B_5^\nu C_{5\tau\tau'}^\nu] \tag{2.38}
\end{aligned}$$

On montre facilement que :

$$\langle \Psi | T_+ | \tau\tau' \rangle = \langle \tau\tau' | T_- | \Psi \rangle \tag{2.39}$$

D'où :

$$P_+^{\tau\tau'} = (\langle \tau\tau' | T_- | \Psi \rangle)^2 \tag{2.40}$$

A la limite lorsque  $\Delta_{np} = 0$ , l'expression (2.38) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle 11 | T_- | \Psi \rangle = 0 \\ \langle 21 | T_- | \Psi \rangle = -\frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} U_{kn} V_{kp} \\ \langle 12 | T_- | \Psi \rangle = -\frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} U_{kn} V_{kp} \\ \langle 22 | T_- | \Psi \rangle = 0 \end{array} \right. \quad (2.41)$$

Compte tenu (2.40) et (2.41), les probabilités de transition sont donc :

$$\begin{aligned} P_+^{11} &= 0 \\ P_+^{22} &= 0 \\ P_+^{21} &= \frac{1}{\Omega} \left( \sum_{k>0} U_{kn} V_{kp} \right)^2 \\ P_+^{12} &= \frac{1}{\Omega} \left( \sum_{k>0} U_{kn} V_{kp} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Cette dernière correspond bien à l'expression (B.21) dans le cas de l'appariement entre particules identiques .

## 2.4.2 Calcul en représentation quasi-particule

Nous allons calculer maintenant les probabilités de transition en représentation quasi-particule .

L'expression (2.15) s'écrit dans cette représentation :

$$|\tau\tau'\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} \beta_{k\tau}^+ \beta_{k\tau'}^+ |\Psi\rangle \quad (2.43)$$

En substituant l'expression (1.104) dans celles des opérateurs de transition  $T_+$  et  $T_-$  et en appliquant ces derniers sur l'état  $|\Psi\rangle$ , on trouve :

Pour  $T_+$  :

$$T_+ |\Psi\rangle = \sum_{k>0} \left[ -2U_{k1p}V_{k1n}\beta_{k1}^+\beta_{k1}^+ - U_{k1p}V_{k2n} \left( \beta_{k1}^+\beta_{k2}^+ - \beta_{k1}^+\beta_{k2}^+ \right) + 2V_{k1p}V_{k1n} \right. \\ \left. - U_{k2p}V_{k1n} \left( \beta_{k2}^+\beta_{k1}^+ - \beta_{k2}^+\beta_{k1}^+ \right) + 2V_{k2p}V_{k2n} - 2U_{k2p}V_{k2n}\beta_{k2}^+\beta_{k2}^+ \right] |\Psi\rangle \quad (2.44)$$

En multipliant à gauche par  $\langle \tau\tau' |$  ( $\tau, \tau' = 1, 2$ ), on obtient :

$$\begin{cases} \langle 11 | T_+ | \Psi \rangle = -\frac{2}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} U_{k1p}V_{k1n} \\ \langle 21 | T_+ | \Psi \rangle = -\frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} (U_{k1p}V_{k2n} + U_{k2p}V_{k1n}) \\ \langle 12 | T_+ | \Psi \rangle = -\frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} (U_{k2p}V_{k1n} + U_{k1p}V_{k2n}) \\ \langle 22 | T_+ | \Psi \rangle = -\frac{2}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} U_{k2p}V_{k2n} \end{cases} \quad (2.45)$$

On constate alors que  $\langle 21 | T_+ | \Psi \rangle = \langle 12 | T_+ | \Psi \rangle$  ce qui entraine que  $P_-^{21} = P_-^{12}$

A la limite lorsque  $\Delta_{np} = 0$ , en remplaçant les expressions (1.55) et (1.56) dans (2.45), il vient :

$$\begin{cases} \langle 11 | T_+ | \Psi \rangle = 0 \\ \langle 21 | T_+ | \Psi \rangle = -\frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} U_{kp}V_{kn} \\ \langle 12 | T_+ | \Psi \rangle = -\frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} U_{kp}V_{kn} \\ \langle 22 | T_+ | \Psi \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

Les probabilités de transition sont :

$$\begin{aligned} P_-^{11} &= 0 \\ P_-^{22} &= 0 \\ P_-^{21} &= \frac{1}{\Omega} \left( \sum_{k>0} U_{kp}V_{kn} \right)^2 \\ P_-^{12} &= \frac{1}{\Omega} \left( \sum_{k>0} U_{kp}V_{kn} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.47)$$

On voit que ces expressions (2.47) correspondent bien aux expressions (B.36) dans le cas de l'appariement entre particules identiques .

De même, pour  $T_-$  :

$$T_- |\Psi\rangle = \sum_{k>0} \left[ -2U_{k1n}V_{k1p}\beta_{k1}^+\beta_{k1}^+ - U_{k1n}V_{k2p} \left( \beta_{k1}^+\beta_{k2}^+ - \beta_{k1}^+\beta_{k2}^+ \right) + 2V_{k1n}V_{k1p} \right. \\ \left. - U_{k2n}V_{k1p} \left( \beta_{k2}^+\beta_{k1}^+ - \beta_{k2}^+\beta_{k1}^+ \right) + 2V_{k2n}V_{k2p} - 2U_{k2n}V_{k2p}\beta_{k2}^+\beta_{k2}^+ \right] |\Psi\rangle \quad (2.48)$$

On aboutit finalement aux expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle 11|T_-|\Psi\rangle = -\frac{2}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} U_{k1n}V_{k1p} \\ \langle 21|T_-|\Psi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} (U_{k1n}V_{k2p} + U_{k2n}V_{k1p}) \\ \langle 12|T_-|\Psi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} (U_{k2n}V_{k1p} + U_{k1n}V_{k2p}) \\ \langle 22|T_-|\Psi\rangle = -\frac{2}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} U_{k2n}V_{k2p} \end{array} \right. \quad (2.49)$$

On constate alors que  $\langle 21|T_-|\Psi\rangle = \langle 12|T_-|\Psi\rangle$  ce qui entraine que  $P_+^{21} = P_+^{12}$

$$\langle 21|T_{\pm}|\Psi\rangle = \langle 12|T_{\pm}|\Psi\rangle \quad (2.50)$$

A la limite lorsque  $\Delta_{np} = 0$ , ces expressions deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle 11|T_-|\Psi\rangle = 0 \\ \langle 21|T_-|\Psi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} U_{kn}V_{kp} \\ \langle 12|T_-|\Psi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} U_{kn}V_{kp} \\ \langle 22|T_-|\Psi\rangle = 0 \end{array} \right. \quad (2.51)$$

Finalement les probabilités de transition sont :

$$\begin{aligned} P_+^{11} &= 0 \\ P_+^{22} &= 0 \\ P_+^{21} &= \frac{1}{\Omega} \left( \sum_{k>0} U_{kn} V_{kp} \right)^2 \\ P_+^{12} &= \frac{1}{\Omega} \left( \sum_{k>0} U_{kn} V_{kp} \right)^2 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Ce qui correspond bien aux expressions (B.35) dans le cas de l'appariement entre particules identiques .

# Chapitre 3

## Résultats numériques et discussion

### 3.1 Modèles schématiques

#### 3.1.1 Rediagonalisation de l'hamiltonien-Test numérique

Nous avons dans une première étape testé numériquement l'effet de la rediagonalisation de l'hamiltonien effectuée au chapitre 1 (voir paragraphe (1.7)). Nous avons pour cela élaboré un code de calcul et évalué les probabilités d'occupation  $(B_i^\nu)^2$ ,  $i = 1, n, p, 4, 5$  définies au chapitre 2 dans l'expression (2.2) de l'état BCS. Nous avons dans ce but considéré le modèle schématique de Richardson [29, 30], habituellement utilisé dans ce genre de test et qui permet de simuler les noyaux déformés. Il consiste en des niveaux doublement dégénérés tels que  $\varepsilon_\nu = \nu$ .

#### A) Avant la rediagonalisation

Nous avons reporté dans la figure 3-1 les différentes probabilités d'occupation dans le cas d'un système possédant  $N = 16$  neutrons et  $Z = 16$  protons, avec  $G_{nn} = G_{pp} = 0.475$ ,  $G_{np} = 0.451$  et  $\Omega = 16$  en fonction des niveaux individuels, avant la rediagonalisation.

Nous avons donc considéré la forme (1.65) de  $H_{11}$  et inclus  $H_2$  dans le terme résiduel. Nous avons représenté en pointillés la position des niveaux de Fermi des systèmes neutrons et protons qui sont dans ce cas  $\lambda_n = \lambda_p = 8.5 MeV$ . On constate que la probabilité



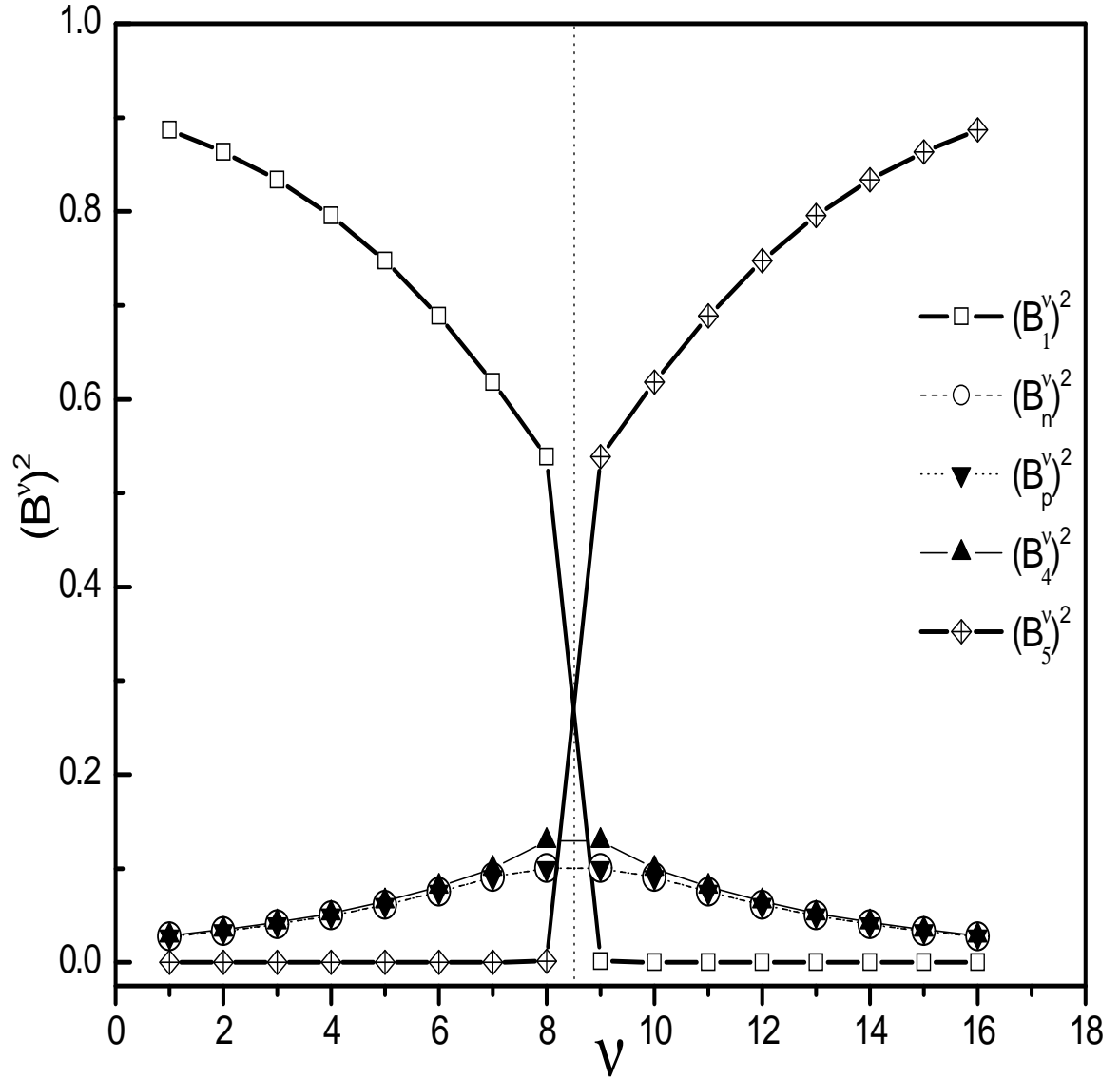


FIG. 3-1 – Evolution des probabilités d’occupation en fonction des niveaux individuels avant la rediagonalisation de  $H_{11}$  seul. Les niveaux de Fermi des systèmes protons et neutrons sont  $\lambda_n = \lambda_p = 8.5 MeV$  et se situent entre la 8<sup>ième</sup> et la 9<sup>ième</sup> orbitale. Nous avons représenté leur position approximative en pointillés.

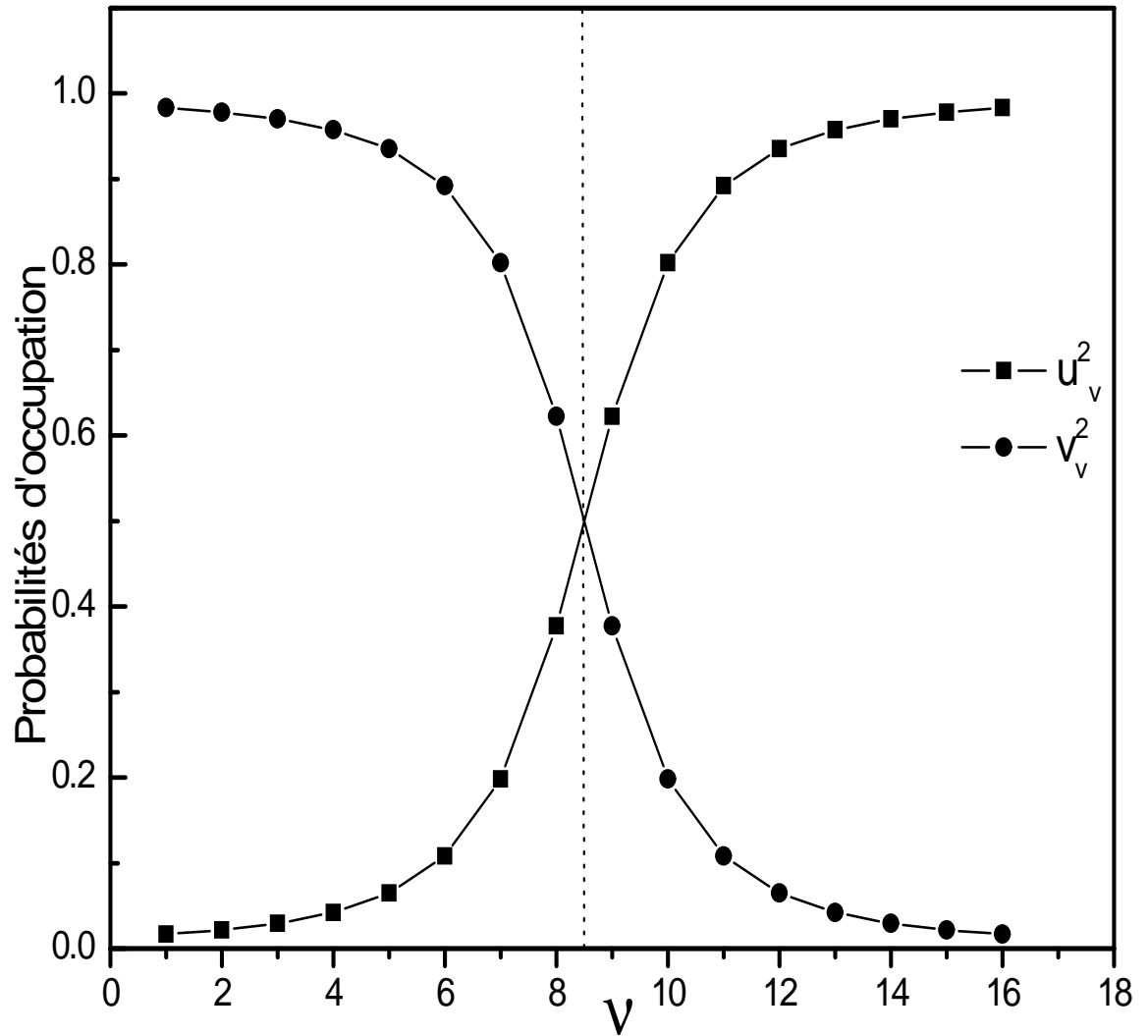


FIG. 3-2 – Evolution des probabilités d’occupation ( $v_v^2$ ) et d’inoccupation ( $u_v^2$ ) de la théorie BCS habituelle en fonction des niveaux, pour  $\Omega = 16$  et  $G = 0.475$ . Le niveau de Fermi est dans ce cas  $\lambda = 8.5 \text{ MeV}$  et se situe entre la 8<sup>ième</sup> et la 9<sup>ième</sup> orbitale. Nous avons représenté sa position approximative en pointillés.

d'occupation de l'état  $|\nu\rangle$  par une paire de protons et une paire de neutrons  $(B_1^\nu)^2$  est la plus importante pour les niveaux les plus bas puis diminue jusqu'à pratiquement s'annuler pour les niveaux les plus élevés. La probabilité d'inoccupation  $(B_5^\nu)^2$  a un comportement opposé .

L'allure des graphes de  $(B_1^\nu)^2$  et  $(B_5^\nu)^2$  est tout à fait similaire à celle des probabilités d'occupation de l'état  $|\nu\rangle$  par une paire de particules  $(v_\nu^2)$ , et d'inoccupation  $(u_\nu^2)$ , dans la théorie BCS habituelle. Nous avons représenté, à titre d'illustration, ces grandeurs en fonction des niveaux individuels, dans le cadre du modèle de Richardson, dans le cas d'un système possédant  $N = 16$  particules avec  $G = 0.475$  et  $\Omega = 16$  dans la figure 3-2. Nous avons représenté en pointillés la position du niveau de Fermi qui est dans ce cas  $\lambda = 8.5MeV$ . Par ailleurs, remarquons que dans la figure 3-1 les probabilités d'occupation de l'état  $|\nu\rangle$  par une paire de protons  $(B_p^\nu)^2$  et par une paire de neutrons  $(B_n^\nu)^2$  sont identiques, car dans notre exemple  $N = Z$  et les niveaux d'énergies  $\varepsilon_\nu$  des systèmes neutrons et protons sont identiques. Notons également que l'allure de la probabilité d'occupation de l'état  $|\nu\rangle$  par une paire mixte  $(B_4^\nu)^2$  a une allure similaire à celle des paires homogènes  $(B_p^\nu)^2$  et  $(B_n^\nu)^2$ .

## B) Après la rediagonalisation

**1) Prise en compte du terme  $H_{11}$  seul.** Dans cette partie, nous considérons la forme (1.79) de l'hamiltonien, c'est à dire celle où seul le terme  $H_{11}$  est rediagonalisé et où le terme  $H_2$  est inclus dans le terme résiduel.

Les différentes probabilités d'occupation sont représentées dans la figure 3-3 en fonction des niveaux individuels .

On constate alors que leur allure est tout à fait similaire à celle de la figure 3-1. Ceci signifie que la rediagonalisation du terme  $H_{11}$  se traduit uniquement par une renormalisation des paramètres  $U_{\nu\tau t}$  et  $V_{\nu\tau t}$  dans la transformation de Bogoliubov-Valatin (voir les équations (1.80) et (1.81)).

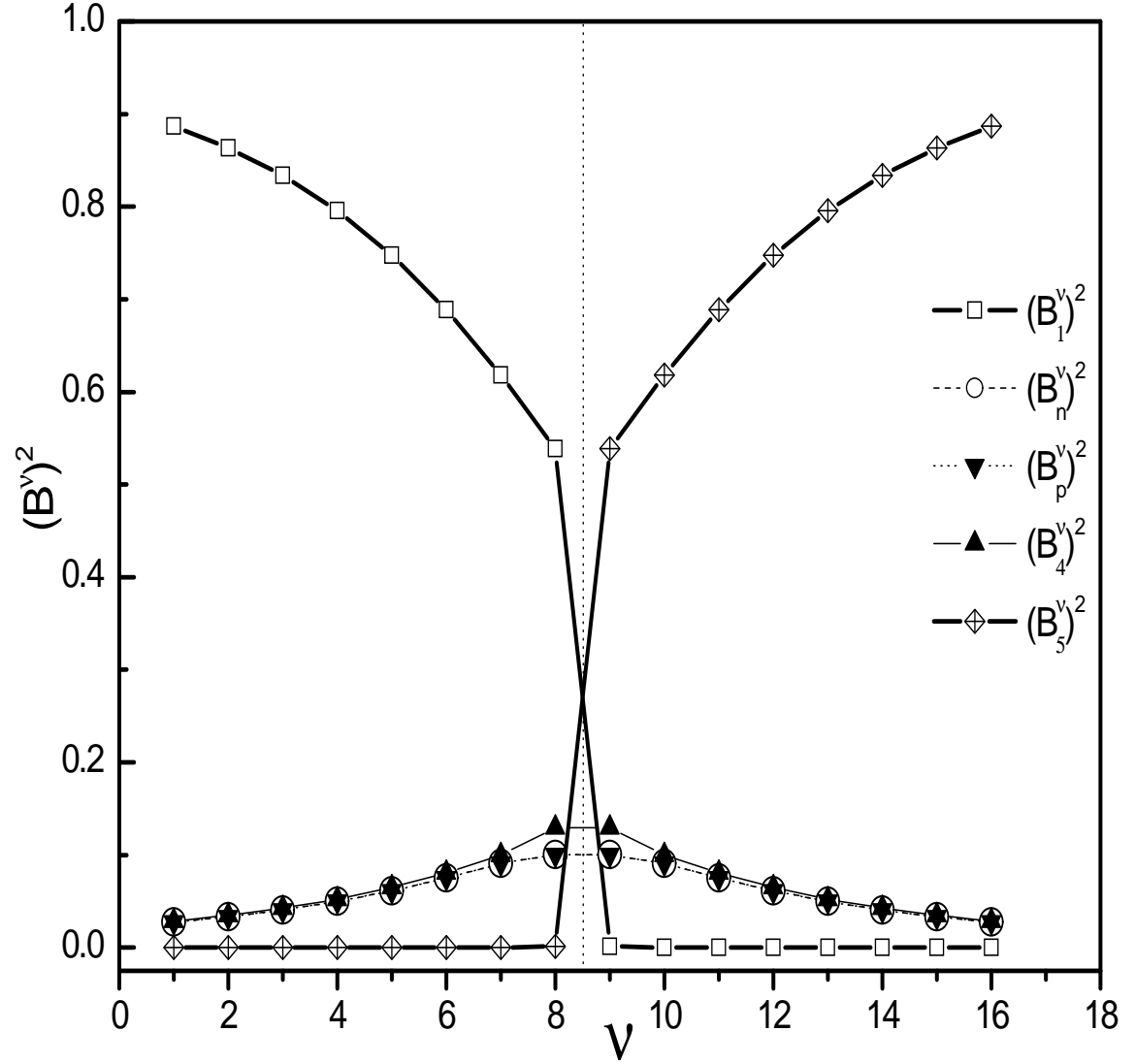


FIG. 3-3 – Evolution des probabilités d’occupation en fonction des niveaux individuels après la rediagonalisation de  $H_{11}$  seul. Les niveaux de Fermi des systèmes protons et neutrons sont  $\lambda_n = \lambda_p = 8.5 MeV$  et se situent entre la 8<sup>ième</sup> et la 9<sup>ième</sup> orbitale. Nous avons représenté leur position approximative en pointillés.

**2) Prise en compte des termes  $H_{11}$  et  $H_2$ .** Dans cette partie, nous considérons la forme (1.99) de l'hamiltonien, c'est à dire celle où les termes  $H_{11}$  et  $H_2$  sont rediagonalisés. Les différentes probabilités d'occupation sont représentées en figure 3-4 en fonction des niveaux individuels. On constate alors que l'allure de ces graphes est totalement différente de celles des figures 3-1 et 3-3. Ces résultats ne nous semblent pas acceptables physiquement. En particulier, la probabilité d'occupation de l'état  $|\nu\rangle$  par une paire de protons et une paire de neutrons  $(B_1')^2$  est très petite quel que soit le niveau d'énergie, ce qui n'a aucun fondement physique.

C'est pourquoi, dans toute la suite du travail, nous utiliserons la forme (1.79) de l'hamiltonien.

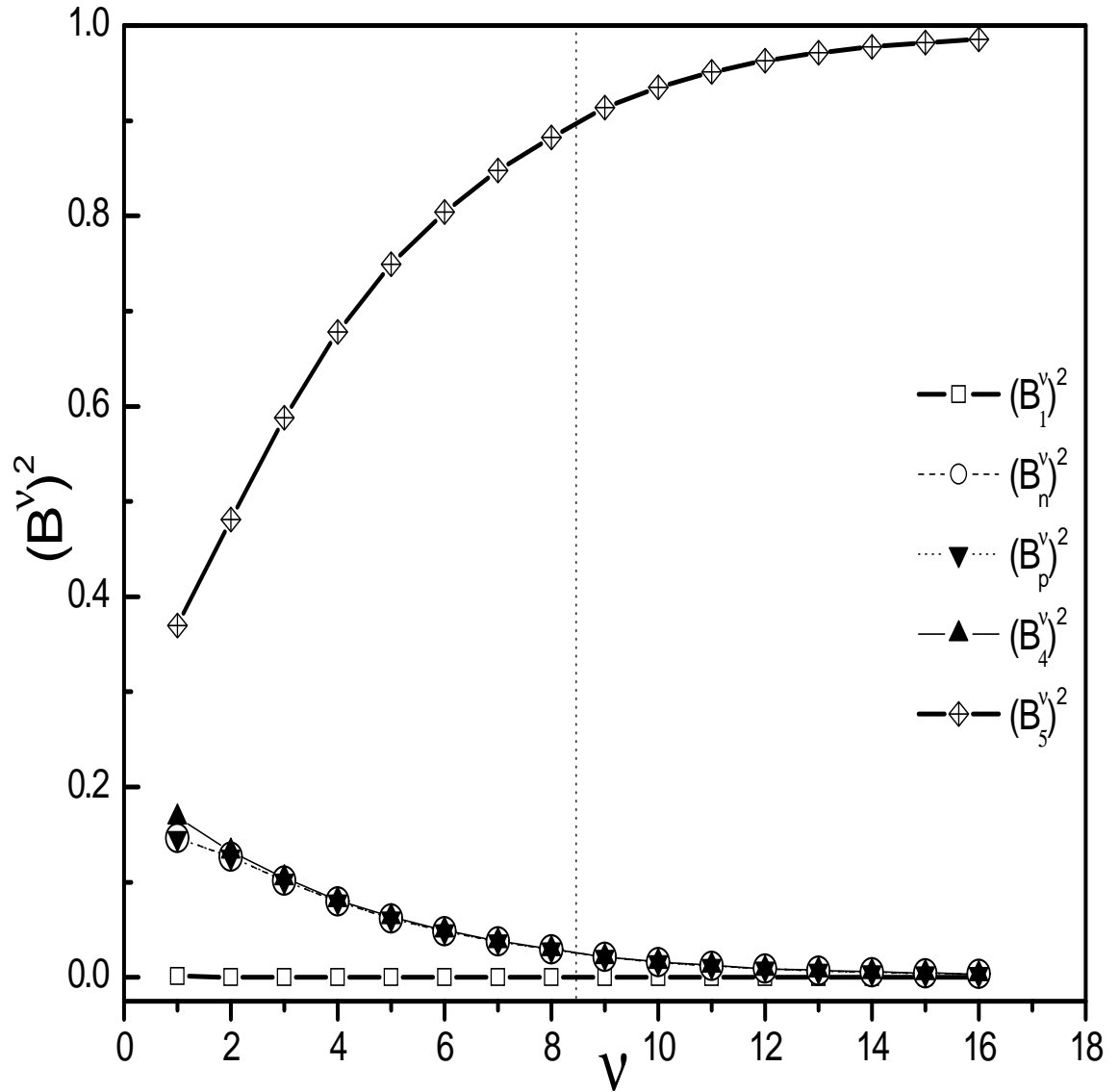


FIG. 3-4 – Evolution des probabilités d’occupation en fonction des niveaux individuels après la rediagonalisation de  $H_{11}$  et  $H_2$ . Les niveaux de Fermi des systèmes protons et neutrons sont  $\lambda_n = \lambda_p = 8.5 MeV$  et se situent entre la 8<sup>ième</sup> et la 9<sup>ième</sup> orbitale. Nous avons représenté leur position approximative en pointillés.

### 3.1.2 Probabilités de transition dans le cas du modèle à un niveau

Nous avons élaboré un code de calcul permettant de déterminer les probabilités de transition bêta plus et moins à partir de leurs expressions déduites de la représentation quasi-particule (voir les équations (2.45) et (2.49)) au chapitre 2 .

Dans le but de tester notre code et afin de comparer nos résultats numériques à ceux de Raduta et Moya de Guerra [4], nous avons utilisé le même modèle que ces derniers, à savoir le modèle à un niveau [31]. Ce modèle est généralement utilisé comme test en raison de sa simplicité. De plus, il permet dans certains cas d'obtenir des solutions analytiques exactes. Dans ce modèle, on considère qu'il existe un seul niveau de dégénérescence totale égale à  $\Omega$  et d'énergie  $\varepsilon = 0$ . Ce niveau peut contenir un nombre de particules égal à  $N = 2\Omega$  [31] .

Nous avons dans une première étape étudié les paramètres du gap et l'énergie BCS dans le cadre de ce modèle, puis les probabilités de transition dans une seconde étape .

#### A) Paramètres du gap-Energie BCS

Afin de pouvoir comparer nos résultats à ceux de Raduta et Moya de Guerra [4], nous avons utilisé les mêmes paramètres que ces derniers, à savoir,  $N = 8$ ,  $Z = 4$ ,  $\Omega = 12$ , et  $G_{nn} = G_{pp} = 0.125$ . Nous avons représenté sur la figure 3-5(a) les variations des différents paramètres du gap  $\Delta_{nn}$ ,  $\Delta_{pp}$  et  $\Delta_{np}$  en fonction du rapport  $G_{np}/G_{pp}$ . Nos résultats sont tout à fait similaires à ceux de la littérature (voir par exemple [46], [6], [5], [8], [48]). En effet,  $\Delta_{np}$  est nul lorsque  $G_{np}$  est inférieur à sa valeur critique  $(G_{np})_c$  (ici  $(G_{np})_c = G_{pp}$ ) et croît brusquement au-delà. Quant à  $\Delta_{nn}$  et  $\Delta_{pp}$ , ils conservent leurs valeurs de la théorie BCS habituelle (c'est à dire sans appariement n-p) lorsque  $G_{np} < (G_{np})_c$  et décroissent rapidement au-delà de  $(G_{np})_c$  pour ensuite se stabiliser. Nous avons représenté en pointillés sur la figure la position correspondant à la valeur critique du rapport  $G_{np}/G_{pp}$  qui correspond au passage de l'appariement n-p à l'appariement entre particules identiques.

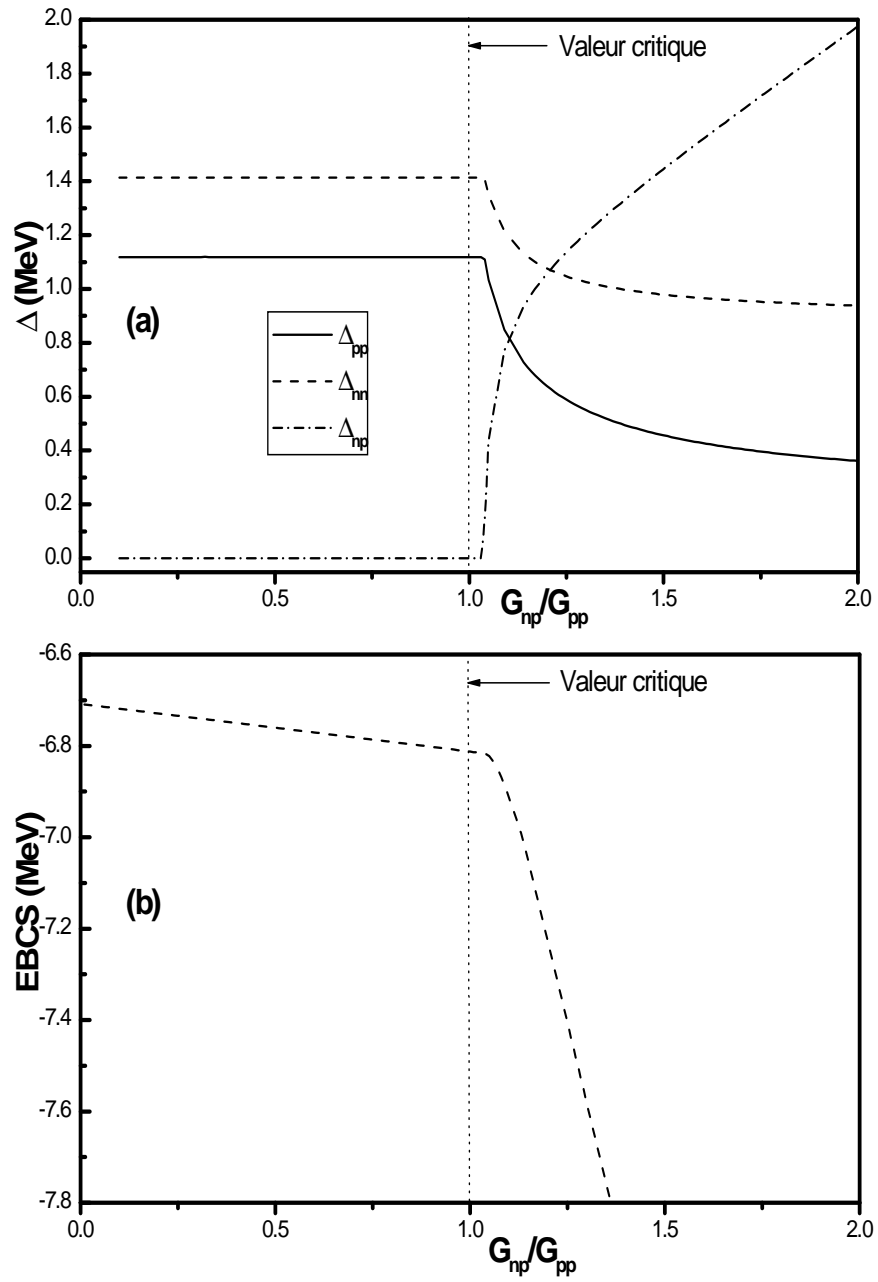


FIG. 3-5 – Variation des différents paramètres du gap (a) et de l'énergie BCS (b) en fonction du rapport  $G_{np}/G_{pp}$  dans le cas du modèle à un niveau .



Nous avons représenté sur la figure 3-5(b) les variations de l'énergie BCS,  $E_{BCS}$ , en fonction du rapport  $G_{np}/G_{pp}$ . On aurait pû s'attendre à ce que  $E_{BCS}$  soit constante lorsque  $G_{np} < (G_{np})_c$ . L'allure obtenue ( à savoir une droite décroissante ) s'explique par le fait que si  $\Delta_{np} = 0$ , l'énergie totale ne se ramène pas uniquement à la somme des énergies des systèmes neutrons et protons pris séparément dans le cas de l'appariement entre particules identiques. En effet, à la limite  $\Delta_{np} = 0$ , l'expression (1.64) devient

$$E_{BCS} = (E_{BCS})_n + (E_{BCS})_p - \frac{1}{2}G_{np} \sum_{\nu>0} (v_{\nu n}^4 + v_{\nu p}^4) \quad (3.1)$$

avec

$$(E_{BCS})_n = 2 \sum_{\nu>0} \left\{ \left[ \varepsilon_{\nu n} - \frac{1}{2}G_{nn}v_{\nu n}^2 \right] v_{\nu n}^2 \right\} \quad (3.2)$$

$$(E_{BCS})_p = 2 \sum_{\nu>0} \left\{ \left[ \varepsilon_{\nu p} - \frac{1}{2}G_{pp}v_{\nu p}^2 \right] v_{\nu p}^2 \right\} \quad (3.3)$$

Par ailleurs, on constate que l'énergie totale décroît plus rapidement lorsque  $G_{np} > (G_{np})_c$ , c'est à dire en présence d'appariement n-p .

## B) Probabilités de transition

Afin de pouvoir comparer nos résultats numériques à ceux de Raduta et Moya de Guerra [4], nous avons utilisé comme valeurs des forces d'appariement  $G_{nn} = G_{pp} = 0.125$  et  $G_{np} = 0.131 = 1.05G_{pp}$ . En effet, nous n'avons pas pu utiliser comme ces derniers auteurs la valeur  $G_{np}/G_{pp} = 1$  qui correspond dans notre cas à  $\Delta_{np} = 0$  (voir figure 3-5(a)) et donc à l'absence d'appariement n-p. Nous avons donc choisi un rapport  $G_{np}/G_{pp} = 1.05$  qui est très voisin de 1 et pour lequel  $\Delta_{np} \neq 0$  (voir tableau 3.1). De plus, dans ce cas, l'énergie totale du système est de  $-6.82 \text{ MeV}$  pour le présent travail, ce qui est comparable à celle de la référence [4] qui est d'environ  $-7 \text{ MeV}$  .

Nous avons reporté dans le tableau 3.1 les valeurs des différentes probabilités de transition, sans appariement n-p (voir les équations (B.35) et (B.36)) et avec appariement n-p de la référence [4], puis dans le cas du présent travail, avant et après la rediagonalisation.

TAB. 3.1 – Comparaison des valeurs des différents paramètres du gap, de l'énergie totale du système, ainsi que des différentes probabilités de transition, sans appariement n-p (colonne 1) et avec appariement n-p de la référence [4] (colonne 2) et avant (colonne 3), puis après (colonne 4) rediagonalisation pour le présent travail, dans le cas du modèle à un niveau. Les valeurs des intensités d'appariement ont été précisées dans chacun des cas.

	Sans appariement n-p	Avec appariement n-p Ref [4]	Avec appariement n-p avant rediagonalisation (présent travail)	Avec appariement n-p après rediagonalisation (présent travail)
$G_{nn} (MeV)$	0.125	0.125	0.125	0.125
$G_{pp} (MeV)$	0.125	0.125	0.125	0.125
$G_{np} (MeV)$	0	0.125	0.131	0.131
$\Delta_{nn} (MeV)$	1.414	—	1.347	1.347
$\Delta_{pp} (MeV)$	1.118	—	1.032	1.032
$\Delta_{np} (MeV)$	0	—	0.441	0.441
$E_{BCS} (MeV)$	-6.5	-7.	-6.823	-6.823
$P_+^{11}$	0	0.56	0.447	0.279
$P_+^{12}$	1.333	0	0.002	1.331
$P_+^{22}$	0	5.06	2.684	0.194
$P_-^{11}$	0	5.06	5.329	0.326
$P_-^{12}$	3.333	0	0.006	3.325
$P_-^{22}$	0	0.56	1.794	0.158
$\beta^+$	2.66	5.62	3.135	3.135
$\beta^-$	6.66	5.62	7.135	7.134
$ \beta^- - \beta^+ $	4	0	4	3.999

Nous avons noté par  $\beta^+$  et  $\beta^-$  les probabilités totales (i.e.  $\beta^\pm = \sum_{\tau, \tau'} P_{\pm}^{\tau\tau'}$ ,  $\tau, \tau' = 1, 2$ )

Remarquons pour commencer que les valeurs du présent travail, avant rediagonalisation, sont comparables à celles de Raduta et Moya de Guerra (sauf dans le cas de  $P_{\pm}^{22}$ ). Les différences constatées au niveau de  $P_+^{22}$  et  $P_-^{22}$  peuvent peut-être s'expliquer par la valeur du paramètre  $G_{np}$ . Nous concluons toutefois à la validité de notre code de calcul.

Par ailleurs, la prise en compte de l'appariement n-p modifie totalement les valeurs des différentes probabilités de transition par rapport à celles déduites de la théorie BCS habituelle.

De même, la rediagonalisation de l'hamiltonien  $H_{11}$ , qui correspond, rappelons-le, à une renormalisation des paramètres  $U_{\nu\tau t}$  et  $V_{\nu\tau t}$ , se traduit par des changements appréciables des valeurs des différentes probabilités de transition.

On constate également que la règle  $\beta^- - \beta^+ = N - Z$  (voir Ref [4]) est vérifiée dans chacun des cas (rappelons qu'ici  $N - Z = 4$ ) sauf dans celui de la Ref [4]. Raduta et Moya de Guerra [4] attribuent la violation de cette règle à la non-conservation du nombre de particules dans la théorie BCS, ce qui ne semble pas être le cas.

Dans une deuxième étape, nous avons étudié les variations des différentes probabilités de transitions en fonction du rapport  $G_{np}/G_{pp}$  avant (voir figures 3-6(a),(b)) et après rediagonalisation (voir figures 3-6(c),(d)) .

**1) Avant la rediagonalisation** On constate, dans chacun des cas, que ces probabilités conservent leurs valeurs de la théorie BCS habituelle tant que  $G_{np} < (G_{np})_c$ , puis varient brusquement à partir de  $G_{np} = G_{pp}$ . On constate en particulier que :

- $P_+^{22}$  et  $P_-^{11}$  qui étaient nulles dans le cas de l'appariement entre particules identiques croissent rapidement si  $G_{np} > (G_{pp})_c$  pour atteindre une certaine valeur et se stabiliser à la valeur 8.280 pour  $P_-^{11}$  et la valeur 5.312 pour  $P_+^{22}$ .

- $P_+^{12}$  et  $P_-^{12}$  qui étaient non nulles pour  $G_{np} > (G_{np})_c$  décroissent pour leur part rapidement dès que  $G_{np} \geq (G_{np})_c$ . Toutefois  $P_+^{12}$  décroît jusqu'à s'annuler alors que  $P_-^{12}$  décroît jusqu'à zéro puis augmente ensuite légèrement et se stabilise à la valeur  $P_-^{12} = 0.502$ .

- $P_+^{11}$  et  $P_-^{22}$  qui étaient nulles en l'absence d'appariement n-p augmentent brusquement au voisinage de  $G_{np} = (G_{np})_c$  pour décroître de nouveau très rapidement et se stabiliser à la valeur zéro pour  $P_+^{11}$  et à la valeur 0.283 pour  $P_-^{22}$ .

Ce comportement est bien sûr lié à celui des différents paramètres du gap (voir figure 3-5(a)).

**2) Après la rediagonalisation** On constate que la rediagonalisation modifie complètement l'allure des graphes des probabilités de transition au-delà de  $(G_{np})_c$ , mais ces

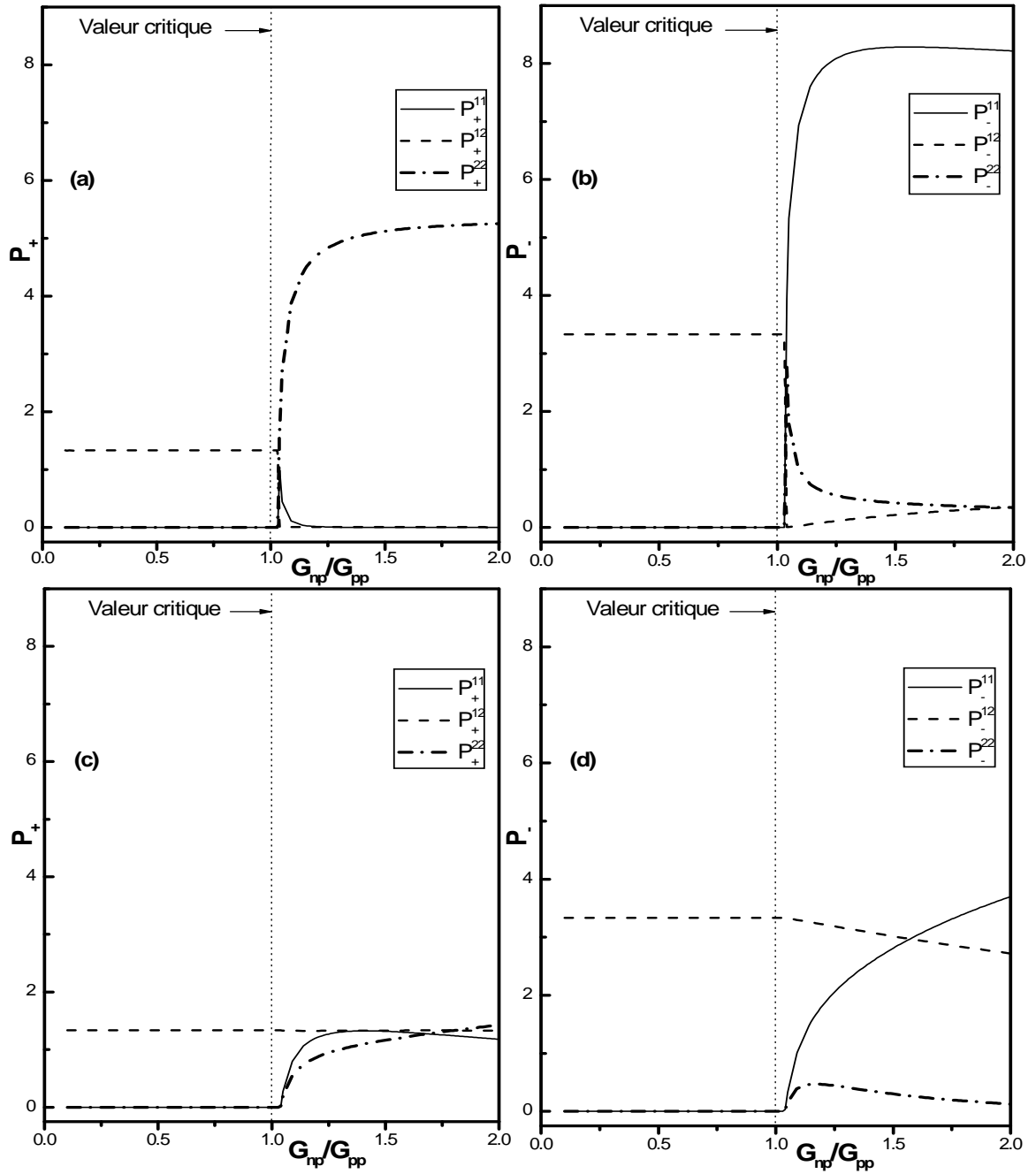


FIG. 3-6 – Variation des probabilités de transition  $P_+$ (a) et  $P_-$ (b) avant la rediagonalisation, et  $P_+$ (c) et  $P_-$ (d) après la rediagonalisation de  $H_{11}$  en fonction du rapport  $G_{np}/G_{pp}$  dans le cas du modèle à un niveau.

dernières ne changent pas d'allure avant  $(G_{np})_c$  parce que cela correspond à la théorie BCS habituelle.

En effet,

- $P_+^{11}$  et  $P_-^{22}$  ne présentent plus le pic apparaissant dans le cas précédent. Même s'ils augmentent de manière brutale lorsque  $G_{np} \geq (G_{np})_c$ , la décroissance qui suit cette augmentation est beaucoup plus douce et les probabilités se stabilisent à la valeur 0.993 pour  $P_+^{11}$  et à la valeur 0.032 pour  $P_-^{22}$ .

- La décroissance brutale que l'on observait dans le cas précédent pour  $G_{np} \geq (G_{np})_c$  pour  $P_+^{12}$  et  $P_-^{12}$  est remplacée par une décroissance très douce,  $P_+^{12}$  présentant même une valeur quasi-constante correspondant à  $P_+^{12} \simeq 1.311$ .

- $P_+^{22}$  et  $P_-^{11}$  changent également et le plateau qui était observé, avant rediagonalisation, pour  $G_{np} \geq 1.5G_{pp}$  n'existe plus et est remplacé, dans chacun des cas, par une allure croissante.

De ce qui précède, on peut conclure que la prise en compte de l'appariement n-p est nécessaire lors de l'évaluation des probabilités de transition  $P_{\pm}$ . De plus, la rediagonalisation de l'hamiltonien  $H_{11}$  doit être effectuée dans ce cas. En effet, les valeurs des  $P_{\pm}$  sont très différentes avant et après la rediagonalisation. Ceci n'était le cas avec les probabilités d'occupation  $(B^{\nu})^2$ .

## 3.2 Cas réalistes

Nous avons dans une seconde étape de notre travail considéré des cas réalistes. Nous avons pour cela utilisé les énergies et états propres d'un champ moyen déformé de Woods-Saxon [32]. Nous avons utilisé un nombre de couches maximum  $N_{\max} = 12$ , ce qui correspond à  $\Omega = 455$ .

### 3.2.1 Paramètres utilisés

Comme le montre la figure 3-6, le choix des constantes d'appariement est très important lors de l'évaluation des probabilités de transition. On voit bien sur cette figure qu'une

petite variation de  $G_{np}$  peut entraîner un très grand changement dans les valeurs de  $P_{\pm}^{\tau\tau'}$ ,  $\tau\tau' = 1, 2$ .

Le problème du choix de la constante  $G_{np}$  est toujours une question ouverte qui a fait l'objet d'un certain nombre de propositions au cours des dernières années. Citons, entre autres, Satula et Wyss [13] qui, justifient leur choix en utilisant des arguments basés sur l'invariance de spin isotopique :

$$G_{np} = \frac{1}{2}(G_{nn} + G_{pp})$$

Chasman [52] qui pour la même raison a proposé :

$$G_{np} = \frac{1}{2}G_{nn} = \frac{1}{2}G_{pp}$$

et Chen et Goswami [51] qui ont choisi arbitrairement la forme :

$$G_{np} = G_{nn} + \frac{6}{A}$$

Pour leur part, Civitarese et al. [53] proposent la forme :

$$G_{np} = \frac{C(Z)}{A}$$

où  $C(Z)$  est une constante qui change en fonction de l'élément considéré, de la forme [6] :

$$G_{np} = 1.1 \frac{16}{A + 56} \quad \text{ou} \quad G_{np} = 1.25 \frac{16}{A + 56}$$

Cette dernière expression a été également employée par Szpikowski [54].

Mokhtari et al. [9, 46, 55] ont établi une expression de  $G_{np}$  en considérant des noyaux paires-paires tels que  $N = Z$  avec  $\Delta_{pp} = \Delta_{nn} = \Delta_{np}$  et en minimisant la distance :

$$D = \sqrt{[(\Delta_{pp} - \Delta_{pp}^{\text{exp}})^2 + (\Delta_{nn} - \Delta_{nn}^{\text{exp}})^2 + (\Delta_{np} - \Delta_{np}^{\text{exp}})^2]}$$

Une meilleure approximation au sens des moindres carrés leur a permis d'établir l'expression :

$$G_{np} = \frac{6.02}{A} + 0.084$$

Dans le présent travail, nous avons choisi de déduire les valeurs de  $G_{pp}$ ,  $G_{nn}$  et  $G_{np}$  directement à partir des valeurs expérimentales des paramètres du gap  $\Delta_{pp}$ ,  $\Delta_{nn}$  et  $\Delta_{np}$ . Ces dernières sont déterminées à partir des différences de masse pair-impair définies par [5] :

$$\begin{aligned}\Delta_{pp}^{\text{exp}} &= -\frac{1}{8} [M(Z+2, N) - 4M(Z+1, N) + 6M(Z, N) - 4M(Z-1, N) \\ &\quad + M(Z-2, N)] \\ \Delta_{nn}^{\text{exp}} &= -\frac{1}{8} [M(Z, N+2) - 4M(Z, N+1) + 6M(Z, N) - 4M(Z, N-1) \\ &\quad + M(Z, N-2)] \\ \Delta_{np}^{\text{exp}} &= \frac{1}{4} \{2 [[M(Z, N+1) + M(Z, N-1) + M(Z-1, N) + M(Z+1, N)] \\ &\quad - 4M(Z, N)] - [M(Z+1, N+1) + M(Z-1, N+1) + M(Z+1, N-1) \\ &\quad + M(Z+1, N-1)]\}\end{aligned}$$

où M est la masse expérimentale déduite de la table de Moller [50,56].

C'est pourquoi nous n'avons considéré dans le présent travail que les noyaux tels que  $N = Z$  et  $32 \leq A \leq 64$  pour lesquels on peut déterminer  $\Delta_{pp}^{\text{exp}}$ ,  $\Delta_{nn}^{\text{exp}}$  et  $\Delta_{np}^{\text{exp}}$ .

Les valeurs des constantes d'appariement et des demi-largeurs du gap correspondant aux différents noyaux considérés sont données dans le tableau 3.2 pour la théorie BCS habituelle et dans le tableau 3.3 dans le cas de l'appariement n-p

TAB. 3.2 – Valeurs des constantes d'appariement et des demi-largeurs du gap des systèmes neutrons et protons dans le cas de la théorie BCS habituelle pour les noyaux considérés dans le présent travail.

Noyau	$^{32}S$	$^{36}Ar$	$^{40}Ca$	$^{44}Ti$	$^{48}Cr$	$^{52}Fe$	$^{56}Ni$	$^{60}Zn$	$^{64}Ge$
$\Delta_{pp}^{\text{exp}} (MeV)$	2.146	2.266	2.392	2.635	2.135	1.991	2.077	1.789	1.807
$\Delta_{nn}^{\text{exp}} (MeV)$	2.193	2.310	2.503	2.653	2.141	2.007	2.148	1.767	2.141
$G_{pp} (MeV)$	0.175	0.171	0.169	0.162	0.147	0.141	0.136	0.126	0.124
$G_{nn} (MeV)$	0.184	0.181	0.180	0.171	0.156	0.149	0.145	0.135	0.136

TAB. 3.3 – Valeurs des constantes d’appariement et des demi-largeurs du gap des systèmes neutrons et protons dans le cas de l’appariement n-p pour les noyaux considérés dans le présent travail.

Noyau	$^{32}S$	$^{36}Ar$	$^{40}Ca$	$^{44}Ti$	$^{48}Cr$	$^{52}Fe$	$^{56}Ni$	$^{60}Zn$	$^{64}Ge$
$\Delta_{pp}^{\text{exp}} (MeV)$	2.146	2.266	2.392	2.635	2.135	1.991	2.077	1.789	1.807
$\Delta_{nn}^{\text{exp}} (MeV)$	2.193	2.310	2.503	2.653	2.141	2.007	2.148	1.767	2.141
$\Delta_{np}^{\text{exp}} (MeV)$	1.05	1.370	1.159	2.037	1.415	1.230	1.094	1.550	1.498
$G_{pp} (MeV)$	0.355	0.350	0.345	0.341	0.301	0.291	0.279	0.273	0.2608
$G_{nn} (MeV)$	0.373	0.369	0.367	0.361	0.319	0.309	0.298	0.291	0.286
$G_{np} (MeV)$	0.413	0.407	0.381	0.362	0.348	0.329	0.329	0.291	0.301

Nous constatons à partir des résultats du tableau 3.2, que les forces d’appariement dans la théorie BCS habituelle, en terme de valeurs numériques, représentent la moitié de leurs valeurs dans le cas de l’appariement n-p (tableau 3.3). Ceci est dû à la définition de l’intensité de la force d’appariement  $G$ . Cette dernière s’écrit dans l’hamiltonien du présent travail (voir l’expression (1.7)) avec un facteur  $(\frac{1}{2})$ , i.e.  $\frac{G}{2}$ , et avec un facteur (1), i.e.  $G$ , dans la théorie BCS habituelle. Pour plus de clarté, rappelons l’expression de l’hamiltonien dans la théorie BCS habituelle pour un système de particules identiques :

$$H = \sum_{\nu>0} \varepsilon_{\nu} (a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + a_{\bar{\nu}}^{\dagger} a_{\bar{\nu}}) - G \sum_{\nu, \mu>0} a_{\nu}^{\dagger} a_{\bar{\nu}}^{\dagger} a_{\bar{\mu}} a_{\mu}$$

### 3.2.2 Rediagonalisation de l’hamiltonien

#### A) Avant la rediagonalisation

Nous avons tracé les graphes des différentes probabilités d’occupation avant la rediagonalisation de l’hamiltonien  $H$  en fonction des niveaux individuels pour les noyaux  $^{32}S$ ,  $^{48}Cr$ , et  $^{64}Ge$  choisis à titre d’exemple (voir figures 3-7(a), 3-8(a) et 3-9(a)). Nous avons représenté en pointillés la position des niveaux de Fermi des systèmes neutrons et protons. On constate sur ces figures que les courbes de  $(B^{\nu})^2$  ont des formes comparables à celles du modèle schématique de Richardson.

Par ailleurs, l’allure des graphes  $(B_1^{\nu})^2$  et  $(B_5^{\nu})^2$  est tout à fait similaire à celle des probabilités d’occupation de l’état  $|\nu\rangle$  par une paire de particules  $(\nu^2)$ , et d’inoccupation



$(u_\nu^2)$ , dans la théorie BCS habituelle. Nous avons représenté, à titre d'illustration, ces grandeurs en fonction des niveaux individuels, dans le cadre du cas réaliste pour les noyaux  $^{32}\text{S}$ ,  $^{48}\text{Cr}$  et  $^{64}\text{Ge}$  dans la figure 3-10.

## B) Après la rediagonalisation

**1) Prise en compte du terme  $H_{11}$  seul.** Dans cette partie, nous considérons la forme (1.79) de l'hamiltonien, c'est à dire celle où seul le terme  $H_{11}$  est rediagonalisé et où le terme  $H_2$  est inclus dans le terme résiduel.

Les différentes probabilités d'occupation sont représentées dans les figures 3-7(b), 3-8(b) et 3-9(b) en fonction des niveaux individuels .

On constate que les courbes des  $(B^\nu)^2$  après la rediagonalisation  $H_{11}$ , ont même allure que les courbes avant la rediagonalisation, dans chacun des cas.

**2) Prise en compte des termes  $H_{11}$  et  $H_2$ .** Dans cette partie, nous considérons la forme (1.99) de l'hamiltonien, c'est à dire celle où les termes  $H_{11}$  et  $H_2$  sont rediagonalisés. Les probabilités d'occupation obtenues sont représentées sur les figures 3-7(c), 3-8(c) et 3-9(c) en fonction des niveau individuels pour les noyaux  $^{32}\text{S}$ ,  $^{48}\text{Cr}$ , et  $^{64}\text{Ge}$ . On constate alors que le comportement des probabilités d'occupation est très différent de celles évaluées avant la rediagonalisation. En particulier, dans chaque cas, les probabilités d'occupation de l'état  $|\nu\rangle$  par une paire de neutrons  $(B_n^\nu)^2$  sont très importantes alors que celles correspondant à une paire de protons  $(B_p^\nu)^2$  sont pratiquement nulles. Ceci n'a aucun fondement physique. Donc ces résultats ne sont pas acceptables et confirment ceux établis dans le cadre du modèle de Richardson.

C'est pourquoi dans ce qui suit, nous utiliserons la forme (1.79) de l'hamiltonien.

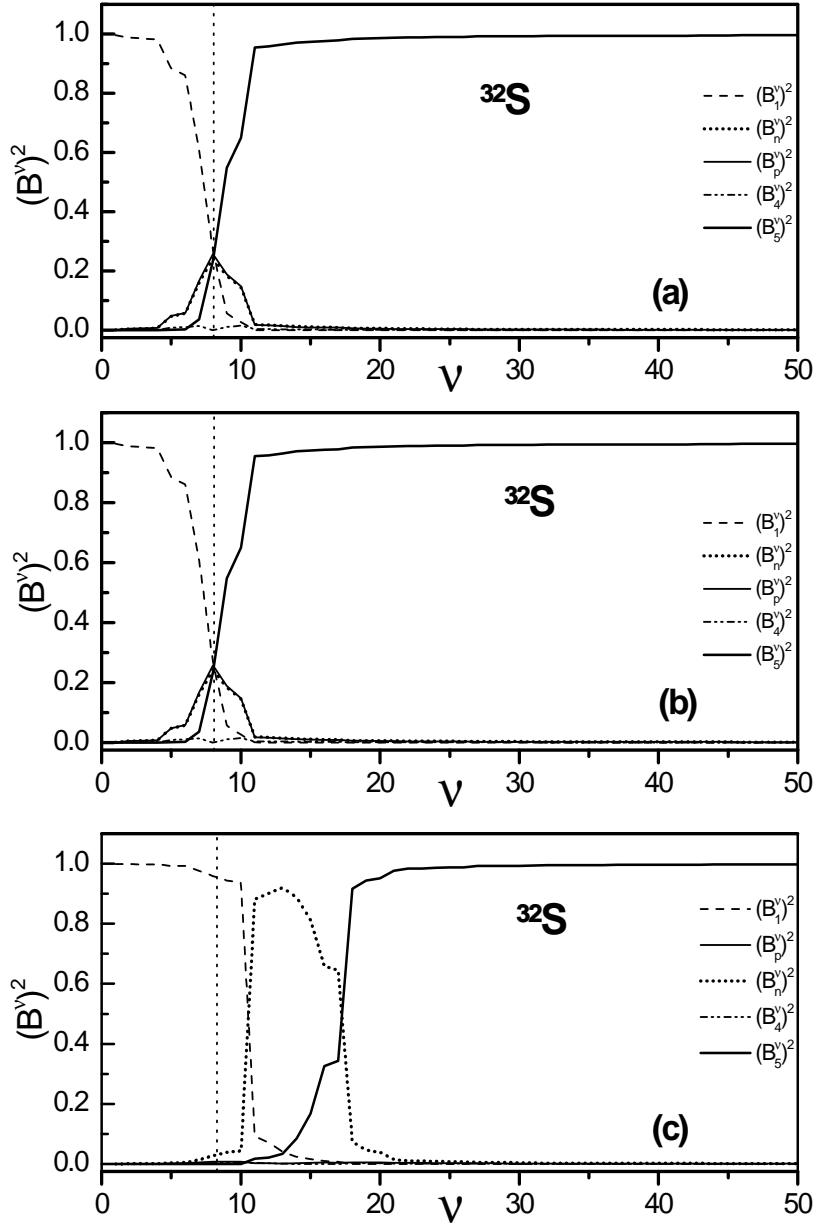


FIG. 3-7 – Evolution des probabilités d’occupation en fonction des niveaux individuels pour le noyau  $^{32}\text{S}$ , (a) avant la rediagonalisation, (b) après la rediagonalisation de  $H_{11}$  seul et (c) après la rediagonalisation  $H_{11} + H_2$ . Nous avons représenté en pointillés la position approximative des niveaux de Fermi  $\lambda_n$  et  $\lambda_p$  qui se situent entre la 8<sup>ième</sup> et la 9<sup>ième</sup> orbitale.

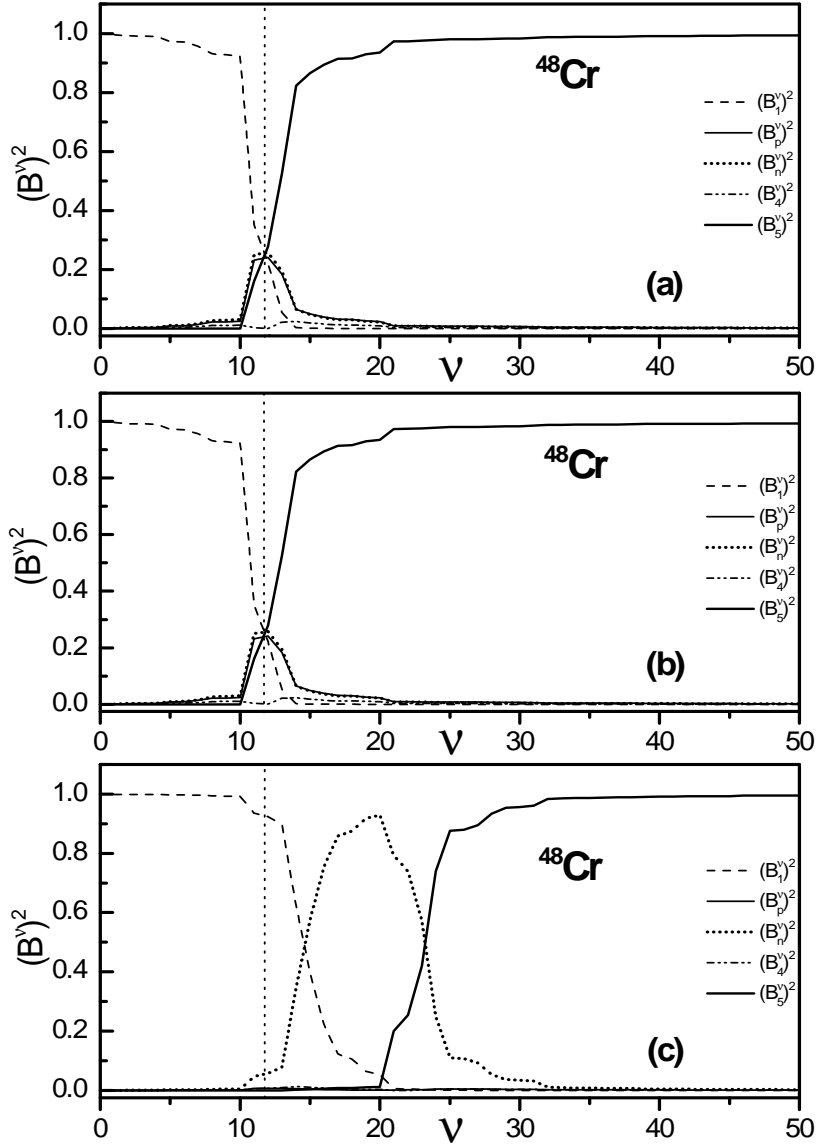


FIG. 3-8 – Même commentaire que la figure 3-7 dans le cas du noyau  $^{48}\text{Cr}$ . Les niveaux de Fermi  $\lambda_n$  et  $\lambda_p$  se situent dans ce cas entre la 12<sup>ième</sup> et la 13<sup>ième</sup> orbitale.

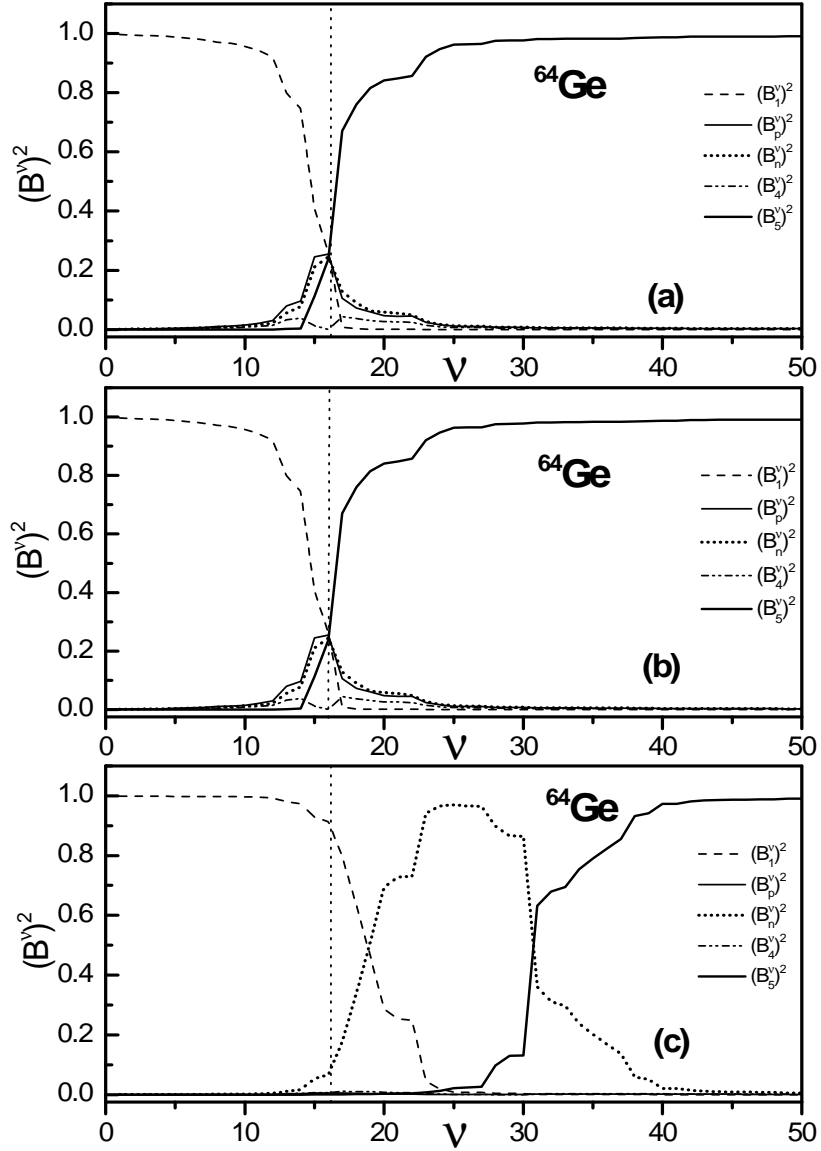


FIG. 3-9 – Même commentaire que la figure 3-7 dans le cas du noyau  $^{64}\text{Ge}$ . Les niveaux de Fermi  $\lambda_n$  et  $\lambda_p$  se situent dans ce cas entre la 16<sup>ième</sup> et la 17<sup>ième</sup> orbitale.

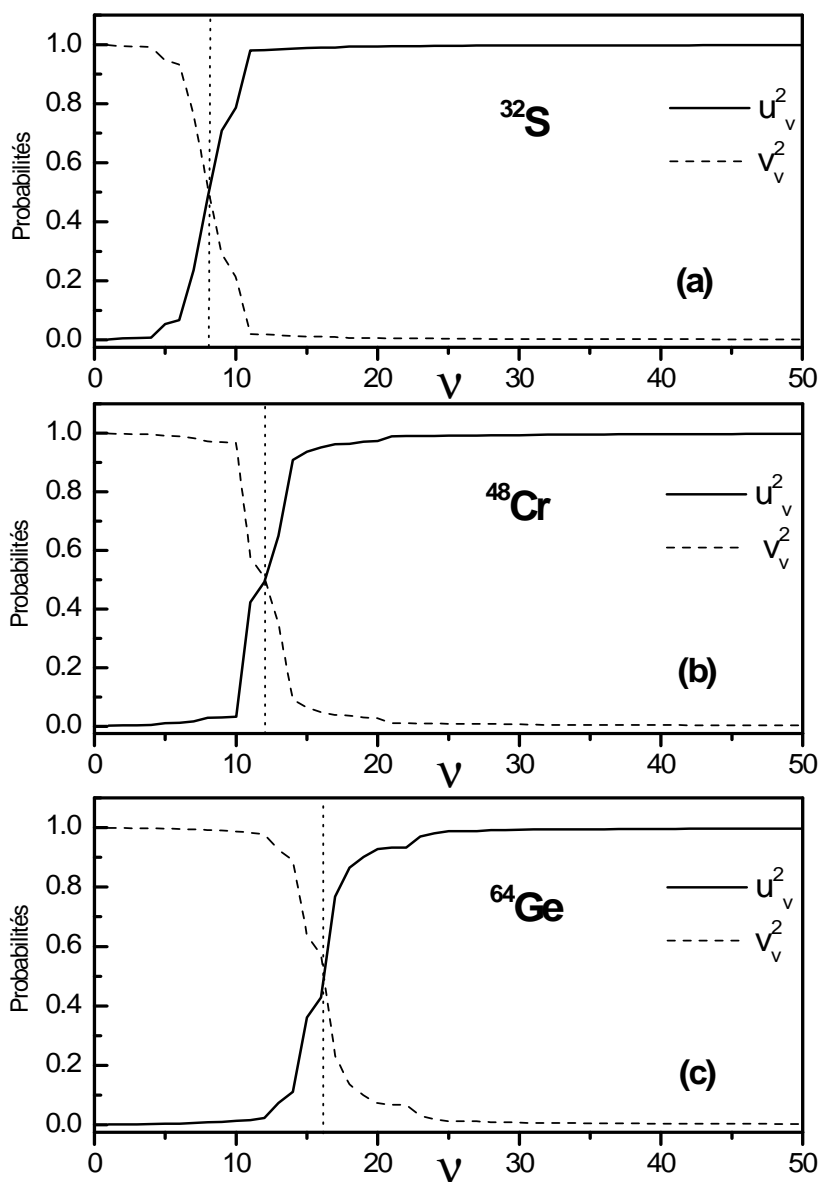


FIG. 3-10 – Evolution des probabilités d’occupation ( $v_v^2$ ) et d’inoccupation ( $u_v^2$ ) de la théorie BCS habituelle en fonction des niveaux, pour les noyaux  $^{32}\text{S}$ (a),  $^{48}\text{Cr}$ (b) et  $^{64}\text{Ge}$ (c). Le niveau de Fermi est dans ce cas, (a) entre la 8<sup>ième</sup> et la 9<sup>ième</sup> orbitale, (b) entre la 12<sup>ième</sup> et la 13<sup>ième</sup> orbitale et (c) entre la 16<sup>ième</sup> et la 17<sup>ième</sup> orbitale.

### 3.2.3 Probabilités de transition

Nous avons ensuite calculé les probabilités de transition bêta plus et bêta moins dans le cas réaliste pour les noyaux cités ci-dessus. Nous avons reporté dans le tableau 3.4 les résultats correspondant à la théorie *BCS* habituelle, c'est à dire sans appariement n-p ( $\Delta_{np} = 0$ ,  $G_{np} = 0$ ), dans le tableau 3.5 les résultats avec appariement n-p avant rediagonalisation et dans le tableau 3.6 les résultats avec appariement n-p après rediagonalisation.

Nous avons reporté dans le tableau 3.7 les valeurs moyennes des écarts des probabilités de transition entre elles. Ces derniers ont été calculés à partir des expressions :

$$\Delta P_{\pm}^{\tau\tau'} = \frac{\left| P_{\pm,(n-p)}^{\tau\tau'} - P_{\pm,(BCS)}^{\tau\tau'} \right|}{P_{\pm,(BCS)}^{\tau\tau'}}$$

et

$$\Delta P_{\pm}^{\tau\tau'}(n-p) = \frac{\left| P_{\pm(n-p)}^{\tau\tau',sans\ red} - P_{\pm(n-p)}^{\tau\tau',après\ red} \right|}{P_{\pm(n-p)}^{\tau\tau',sans\ red}}$$

Notons que nous n'avons pas pu évaluer les écarts  $\Delta P_{\pm}^{11}$  et  $\Delta P_{\pm}^{22}$ , étant donné que les valeurs de la théorie *BCS* habituelle sont nulles et les valeurs de l'appariement n-p sont voisines de zéro.

TAB. 3.4 – Valeurs des probabilités de transition bêta plus et bêta moins dans le cas de la théorie *BCS* habituelle.

Noyau	$^{32}S$	$^{36}Ar$	$^{40}Ca$	$^{44}Ti$	$^{48}Cr$	$^{52}Fe$	$^{56}Ni$	$^{60}Zn$	$^{64}Ge$
$P_{+}^{11}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$P_{+}^{12}$	0.327	0.379	0.432	0.574	0.454	0.431	0.506	0.429	0.478
$P_{+}^{22}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$P_{-}^{11}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$P_{-}^{12}$	0.312	0.357	0.424	0.538	0.420	0.399	0.482	0.383	0.526
$P_{-}^{22}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\beta^{+}$	0.654	0.758	0.864	1.048	0.908	0.862	1.012	0.858	0.956
$\beta^{-}$	0.624	0.714	0.848	1.076	0.840	0.798	0.964	0.766	1.052
$ \beta^{-} - \beta^{+} $	0.030	0.044	0.016	0.038	0.068	0.064	0.048	0.092	0.096

On constate alors que les probabilités  $P_{+}^{11}$  et  $P_{-}^{22}$  qui étaient nulles dans le cas de la théorie *BCS* habituelle ont des valeurs non négligeables lorsqu'on prend en compte

TAB. 3.5 – Valeurs des probabilités de transition bêta plus et bêta moins dans le cas de l'appariement n-p, avant la rediagonalisation de l'hamiltonien H.

Noyau	$^{32}S$	$^{36}Ar$	$^{40}Ca$	$^{44}Ti$	$^{48}Cr$	$^{52}Fe$	$^{56}Ni$	$^{60}Zn$	$^{64}Ge$
$P_+^{11}$	0.351	0.574	0.471	1.338	0.767	0.637	0.595	1.060	1.076
$P_+^{12}$	0.198	0.228	0.292	0.244	0.217	0.221	0.264	0.167	0.230
$P_+^{22}$	0.014	0.016	0.014	0.011	0.013	0.010	0.015	0.001	0.011
$P_-^{11}$	0.034	0.047	0.048	0.132	0.086	0.078	0.084	0.112	0.106
$P_-^{12}$	0.213	0.239	0.304	0.427	0.303	0.263	0.321	0.268	0.357
$P_-^{22}$	0.085	0.172	0.121	0.477	0.219	0.176	0.128	0.440	0.366
$\beta^+$	0.761	1.046	1.069	1.837	1.214	1.089	1.138	1.395	1.547
$\beta^-$	0.545	0.697	0.777	1.463	0.911	0.780	0.854	1.088	1.186
$ \beta^- - \beta^+ $	0.216	0.349	0.292	0.374	0.303	0.309	0.284	0.307	0.361

TAB. 3.6 – Valeurs des probabilités de transition bêta plus et bêta moins dans le cas de l'appariement n-p, après la rediagonalisation de l'hamiltonien H.

Noyau	$^{32}S$	$^{36}Ar$	$^{40}Ca$	$^{44}Ti$	$^{48}Cr$	$^{52}Fe$	$^{56}Ni$	$^{60}Zn$	$^{64}Ge$
$P_+^{11}$	0.004	0.003	0.000	0.008	0.007	0.000	0.003	0.003	0.003
$P_+^{12}$	0.192	0.201	0.240	0.413	0.273	0.222	0.297	0.275	0.223
$P_+^{22}$	0.171	0.337	0.306	0.925	0.454	0.461	0.353	0.888	0.761
$P_-^{11}$	0.297	0.479	0.355	1.296	0.730	0.544	0.517	1.121	1.022
$P_-^{12}$	0.142	0.139	0.185	0.215	0.178	0.143	0.216	0.128	0.191
$P_-^{22}$	0.005	0.004	0.001	0.007	0.009	0.001	0.005	0.004	0.006
$\beta^+$	0.559	0.742	0.786	1.759	1.007	0.905	0.950	1.441	1.210
$\beta^-$	0.586	0.761	0.726	1.733	1.095	0.831	0.954	1.381	1.410
$ \beta^- - \beta^+ $	0.027	0.019	0.06	0.026	0.088	0.074	0.004	0.060	0.200

l'appariement n-p sans rediagonalisation et sont de nouveau pratiquement nulles après la rediagonalisation.

Quand aux probabilités  $P_+^{22}$  et  $P_-^{11}$  qui étaient nulles dans le cas de l'appariement entre particules identiques, elles restent voisines de zéro dans le cas de l'appariement n-p sans rediagonalisation (sauf dans le cas des noyaux  $^{60}Zn$  et  $^{64}Ge$ ), mais deviennent importantes lorsqu'on rediagonalise l'hamiltonien.

Les valeurs des probabilités  $P_+^{12}$  avant et après la rediagonalisation sont assez voisines entre elles (sauf dans le cas du  $^{44}Ti$  et du  $^{60}Zn$ ). L'écart relatif moyen entre elles est de 10% (si l'on exclut les deux noyaux sous-cités). Par contre, elles diffèrent nettement des valeurs BCS habituelles puisque l'écart relatif par rapport à ces dernières est de 47% et

TAB. 3.7 – Valeurs des écarts relatifs moyens entre les probabilités de transition pour les noyaux utilisés.

$\Delta P_+^{12}$ (%)	$\Delta P_+^{12}$ (%)	$\Delta P_+^{12}$ (%)	$\Delta P_-^{12}$ (%)	$\Delta P_-^{12}$ (%)	$\Delta P_-^{12}$ (%)
<i>Avant</i>	<i>Après</i>	<i>n - p</i>	<i>Avant</i>	<i>Après</i>	<i>n - p</i>
<i>redia</i>	<i>redia</i>		<i>redia</i>	<i>redia</i>	
47.78	42.25	16.69	30.29	59.91	42.47

de 42% avant et après la rediagonalisation, respectivement.

Finalement on constate que les valeurs des probabilités  $P_-^{12}$  sont très différentes dans les trois cas. L'écart relatif par rapport aux valeurs de la théorie BCS habituelle est de 30% avant la rediagonalisation et 59% après.

D'autre part, nous avons aussi reporté dans les tableaux 3.4, 3.5 et 3.6 les probabilités de transition totales  $\beta^\pm$  et la différence entre ces dernières. On constate que cette différence dans le cas de la théorie BCS habituelle donne  $\beta^- - \beta^+ \simeq 0 = N - Z$  pour tous les noyaux utilisés.

Dans le cas avec appariement n-p avant la rediagonalisation, la différence de  $|\beta^- - \beta^+|$  (voir tableau 3.5) donne des valeurs différentes de zéro. Par contre, après la rediagonalisation (voir tableau 3.6)  $|\beta^- - \beta^+| \simeq N - Z = 0$  (sauf pour le noyau  ${}^{64}\text{Ge}$ ). La règle  $\beta^- - \beta^+ = N - Z$  qui était violée avant la rediagonalisation est donc de nouveau vérifiée après rediagonalisation. En conséquence, il est important dans le cas de l'appariement n-p d'effectuer une rediagonalisation de l'hamiltonien  $H_{11}$ .

Par ailleurs, vue la définition simplifiée des  $P_{\pm}^{\tau\tau'}$  que nous avons adoptée (2.22), il n'est pas possible d'effectuer des comparaisons avec les valeurs expérimentales. Une approche plus réaliste consisterait à considérer comme état final dans l'expression (2.22) la fonction d'onde correspondant au noyau fils (c'est à dire  $A(N - 1, Z + 1)$  et  $A(N + 1, Z - 1)$  dans le cas des désintégrations  $\beta^-$  et  $\beta^+$ ) au lieu de l'état à deux quasi-particules.



# Conclusion

Au cours de ce travail, nous avons étudié l'effet de l'appariement neutron-proton (n-p), de type isovectoriel, sur les probabilités de transition bêta au moyen de l'approximation BCS. Nous avons pour cela considéré l'hamiltonien du système dans sa forme la plus générale. Ce dernier a été diagonalisé approximativement par la méthode de linéarisation. Ceci a permis de trouver la transformation généralisée de Bogoliubov - Valatin et de définir la représentation quasi-particule. Toutefois, l'hamiltonien exprimé dans cette dernière représentation n'était toujours pas diagonal, ce qui nous a conduit à opérer une rediagonalisation. La rediagonalisation a été effectuée de deux façons :

-Rediagonalisation de l'hamiltonien  $H_{11}$  en incluant  $H_2$  dans l'interaction résiduelle et en négligeant cette dernière.

-Rediagonalisation de l'hamiltonien  $H_{11} + H_2$  en négligeant l'interaction résiduelle. Cette rediagonalisation a permis d'écrire une nouvelle transformation généralisée de Bogoliubov - Valatin.

Nous avons ensuite établi les expressions des probabilités de transition bêta plus et bêta moins,  $P_{\pm}^{\tau\tau'}$ , aussi bien en représentation particule qu'en représentation quasi-particules. Nous avons pour cela, comme suggéré par Raduta et Moya de Guerra, évalué les valeurs moyennes des opérateurs de transition entre l'état fondamental et l'état excité à deux quasi-particules. Nous nous sommes assurés que ces expressions se réduisent bien à celles de la théorie BCS pour l'appariement entre particules identiques lorsque l'on annule l'appariement n-p.

Nous avons ensuite élaboré notre propre code de calcul qui nous a permis d'utiliser aussi bien des modèles schématiques qu'un modèle réaliste.

Dans un premier temps, l'effet de la rediagonalisation a été étudié dans le cadre du modèle schématique de Richardson. Nous avons pour cela évalué les probabilités d'occupation des niveaux. Il s'avère alors que la rediagonalisation du terme  $H_{11}$  seul donne des résultats acceptables physiquement, ce qui n'est pas le cas lorsqu'on rediagonalise les termes  $H_{11}$  et  $H_2$ . Nous avons donc adopté la première méthode pour la suite du travail.

Dans une seconde étape, les probabilités de transition  $P_{\pm}^{\tau\tau'}$  ont été déterminées dans le cadre du modèle à un niveau avec les mêmes paramètres que Raduta et Moya de Guerra. Les  $P_{\pm}^{\tau\tau'}$  ont été déterminées dans le cadre l'appariement entre particules identiques et de l'appariement isovectoriel, avant et après la rediagonalisation. Le fait d'avoir obtenu des résultats numériques comparables à Raduta et Moya de Guerra nous a permis de conclure à la validité de notre code de calcul. Notons toutefois que pour ces derniers auteurs, la règle  $\beta^- - \beta^+ = N - Z$  (où  $\beta^{\pm} = \sum_{\tau,\tau'} P_{\pm}^{\tau\tau'}$ ) était violée dans le cadre de la théorie BCS (ils attribuent cette violation à la non-conservation du nombre de particules), alors que dans le cadre du présent travail, cette règle est vérifiée dans chacun des cas. Par ailleurs, l'inclusion de l'appariement n-p, puis la rediagonalisation apportent des changements importants dans les valeurs des probabilités de transition. Ces dernières ont été ensuite étudiées en fonction du rapport  $G_{np}/G_{pp}$ , ce qui a permis de montrer qu'une petite variation de  $G_{np}$  peut entraîner un grand changement dans les probabilités de transition.

Dans une troisième étape, des cas réalistes ont été considérés en utilisant les énergies à particules indépendantes d'un champ moyen de Woods-Saxon. Vu l'importance du choix de la valeur de  $G_{np}$ , nous avons considéré des noyaux pair-pairs tels que  $N = Z$  et pour lesquels les valeurs expérimentales de  $\Delta_{np}$  sont connues, ce qui permet de déduire directement  $G_{np}$ . Nous avons là aussi commencé par étudier l'effet de la rediagonalisation de l'hamiltonien. Les résultats obtenus permettent de confirmer les conclusions déduites dans le cadre du modèle de Richardson, à savoir que c'est la rediagonalisation du terme  $H_{11}$  seul qui donne des résultats physiquement acceptables.

Les probabilités de transition ont ensuite été évaluées, pour les différents noyaux considérés dans le cadre de la théorie BCS habituelle puis avec appariement n-p, avant et après la rediagonalisation. On constate alors des écarts importants entre ces différentes quan-

tités. De plus, la règle  $\beta^- - \beta^+ = N - Z$ , qui est vérifiées dans le cas de la théorie BCS habituelle, ne l'est plus dans le cas de l'appariement isovectoriel avant rediagonalisation, pour être de nouveau vérifiée après rediagonalisation. En conséquence, il est non seulement important pour ces noyaux d'inclure l'appariement n-p, mais également d'effectuer la rediagonalisation de l'hamiltonien.

Par ailleurs, vu la définition simplifiée des  $P_{\pm}^{\tau\tau'}$  que nous avons adoptée, il n'a pas été possible d'effectuer des comparaisons avec l'expérience.

Finalement, notons que nos résultats pourraient être améliorés en éliminant les fluctuations du nombre de particules en utilisant une méthode de projection dans l'espace nombre de particules.

# Annexe A

## Calcul des commutateurs

$$[H', a_{jr}^+] = \sum_{\nu>0,t} (\varepsilon_{\nu t} - \lambda_t) [a_{\nu t}^+ a_{\nu t}, a_{jr}^+] - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu,\mu>0} [(a_{\nu t}^+ a_{\nu t'}^+ a_{\mu t'} a_{\mu t} + a_{\nu t}^+ a_{\nu t'}^+ a_{\mu t} a_{\mu t'}), a_{jr}^+] \quad (\text{A.1})$$

et

$$[H', a_{jr}^-] = \sum_{\nu>0,t} (\varepsilon_{\nu t} - \lambda_t) [a_{\nu t}^+ a_{\nu t}, a_{jr}^-] - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu,\mu>0} [(a_{\nu t}^+ a_{\nu t'}^+ a_{\mu t'} a_{\mu t} + a_{\nu t}^+ a_{\nu t'}^+ a_{\mu t} a_{\mu t'}), a_{jr}^-] \quad (\text{A.2})$$

Pour déterminer ces commutateurs, on va utiliser les relations d'anti-commutation (1.3), on obtient alors :

$$\cdot [a_{\nu t}^+ a_{\nu t}, a_{jr}^+] = a_{jr}^+ \delta_{\nu j} \delta_{tr} \quad (\text{A.3})$$

$$\cdot [a_{\nu t}^+ a_{\nu t'}^+ a_{\mu t'} a_{\mu t}, a_{jr}^+] = a_{\nu r}^+ a_{\nu t'}^+ a_{j t'} \delta_{j \mu} \delta_{tr} + a_{\nu t}^+ a_{\nu r}^+ a_{j t} \delta_{\mu j} \delta_{t' r} \quad (\text{A.4})$$

$$\cdot [a_{\nu t}^+ a_{\nu t'}^+ a_{\mu t} a_{\mu t'}, a_{jr}^+] = a_{\nu t}^+ a_{\nu r}^+ a_{j t} \delta_{j \mu} \delta_{t' r} + a_{\nu r}^+ a_{\nu t'}^+ a_{j t'} \delta_{\mu j} \delta_{tr} \quad (\text{A.5})$$

De même, on trouve que :

$$\cdot \left[ a_{\nu t}^+ a_{\nu t}, a_{jr}^- \right] = -a_{jr}^- \delta_{\nu j} \delta_{tr} \quad (\text{A.6})$$

$$\cdot \left[ a_{\nu t}^+ a_{\nu t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t}, a_{jr}^- \right] = a_{jt'}^+ a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu r} \delta_{\nu j} \delta_{tr} + a_{jt}^+ a_{\tilde{\mu} r} a_{\mu t} \delta_{\nu j} \delta_{t'r} \quad (\text{A.7})$$

$$\cdot \left[ a_{\nu t}^+ a_{\nu t'}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'}, a_{jr}^- \right] = a_{jt'}^+ a_{\tilde{\mu} r} a_{\mu t'} \delta_{\nu j} \delta_{tr} + a_{jt}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu r} \delta_{\nu j} \delta_{t'r} \quad (\text{A.8})$$

Les commutateurs (A1) et (A2) deviennent maintenant :

$$\left[ H', a_{jr}^+ \right] = (\varepsilon_{jr} - \lambda_r) a_{jr}^+ - \sum_t G_{tr} \sum_{\nu > 0} (a_{\nu r}^+ a_{\nu t}^+ + a_{\nu t}^+ a_{\nu r}^+) a_{jt}^- \quad (\text{A.9})$$

$$\left[ H', a_{jr}^- \right] = -(\varepsilon_{jr} - \lambda_r) a_{jr}^- - \sum_t G_{tr} \sum_{\mu > 0} a_{jt}^+ (a_{\tilde{\mu} r} a_{\mu t} + a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu r}) \quad (\text{A.10})$$

# Annexe B

## Calcul des probabilités de transition dans le cas de l'appariement entre particules identiques

Dans le cas de l'appariement entre particules identiques, la fonction d'onde du système total (neutron+proton) est le produit des fonctions d'onde de chacun des systèmes pris indépendamment, soit :

$$|\Psi\rangle = |\Psi_n\rangle |\Psi_p\rangle \quad (\text{B.1})$$

avec :

$$|\Psi_t\rangle = \prod_{j>0} |\Psi_{jt}\rangle \quad , \quad t = n, p \quad (\text{B.2})$$

et

$$|\Psi_{jt}\rangle = \left( U_{jt} \alpha_{jt}^+ + V_{jt} a_{jt}^+ a_{\tilde{j}t}^+ \right) |0\rangle \quad (\text{B.3})$$

Sachant que la transformation de Bogoliubov-Valatin est définie par [47] :

$$a_{jt}^+ = U_{jt} \alpha_{jt}^+ + V_{jt} \alpha_{\tilde{j}t} \quad (\text{B.4})$$

dont l'inverse est :

$$\alpha_{jt}^+ = U_{jt}a_{jt}^+ - V_{jt}a_{jt}^- \quad (\text{B.5})$$

l'état excité est défini par :

$$\begin{aligned} |tt'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\nu>0} |\nu t \tilde{\nu} t'\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\nu>0} \alpha_{\nu t}^+ \alpha_{\tilde{\nu} t'}^+ |\Psi\rangle \end{aligned} \quad t, t' = n, p \quad (\text{B.6})$$

soit encore en représentation particule :

$$|pp\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\nu>0} \left( -V_{\nu p} + U_{\nu p} a_{\nu p}^+ a_{\tilde{\nu} p}^+ \right) \prod_{j \neq \nu} |\Psi_{jp}\rangle |\Psi_n\rangle \quad (\text{B.7})$$

$$|nn\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\nu>0} \left( -V_{\nu n} + U_{\nu n} a_{\nu n}^+ a_{\tilde{\nu} n}^+ \right) \prod_{j \neq \nu} |\Psi_{jn}\rangle |\Psi_p\rangle \quad (\text{B.8})$$

$$|np\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\nu>0} a_{\nu n}^+ a_{\tilde{\nu} p}^+ \prod_{j \neq \nu} |\Psi_{jn}\rangle |\Psi_{jp}\rangle \quad (\text{B.9})$$

$$|pn\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\nu>0} a_{\nu p}^+ a_{\tilde{\nu} n}^+ \prod_{j \neq \nu} |\Psi_{jn}\rangle |\Psi_{jp}\rangle \quad (\text{B.10})$$

## B.1 Calcul en représentation particule

### B.1.1 Eléments de matrice de l'opérateur $T_+$

Calculons tout d'abord  $T_+ |\Psi\rangle$ .

En utilisant (2.23) et (B.1), il vient :

$$\begin{aligned} T_+ |\Psi\rangle &= \sum_{k>0} \left( a_{kp}^+ a_{kn} + a_{kp}^- a_{kn}^- \right) \prod_{\nu>0} \left( U_{\nu p} + V_{\nu p} a_{\nu p}^+ a_{\tilde{\nu} p}^+ \right) \prod_{\nu>0} \left( U_{\nu n} + V_{\nu n} a_{\nu n}^+ a_{\tilde{\nu} n}^+ \right) |0\rangle \\ &= \sum_{k>0} U_{kp} V_{kn} \left( a_{kp}^+ a_{kn}^- - a_{kp}^- a_{kn}^+ \right) \prod_{j \neq k} |\Psi_{jp}\rangle |\Psi_{jn}\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

En multipliant à gauche par  $\langle pp|$ , il vient :

$$\begin{aligned}
\langle pp|T_+|\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \left\{ \sum_{k>0} \prod_{j\neq k} \langle \Psi_{jn} | \langle \Psi_{jp} | a_{kp}^- a_{kp} U_{kp} V_{kn} \left( a_{kp}^+ a_{kn}^+ - a_{kp}^- a_{kn}^- \right) \prod_{j\neq k} |\Psi_{jp}\rangle |\Psi_{jn}\rangle \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\nu\neq k} \prod_{j\neq\nu} \langle \Psi_{jn} | \langle \Psi_{jp} | a_{\nu p}^- a_{\nu p} U_{kp} V_{kn} \left( a_{kp}^+ a_{kn}^+ - a_{kp}^- a_{kn}^- \right) \prod_{j\neq k} |\Psi_{jp}\rangle |\Psi_{jn}\rangle \right\} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.12}$$

De même :

$$\langle nn|T_+|\Psi\rangle = 0 \tag{B.13}$$

et

$$\begin{aligned}
\langle np|T_+|\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \left\{ \sum_{k>0} \prod_{j\neq k} \langle \Psi_{jn} | \langle \Psi_{jp} | a_{kn}^- a_{kp} U_{kp} V_{kn} \left( a_{kp}^+ a_{kn}^+ - a_{kp}^- a_{kn}^- \right) \prod_{j\neq k} |\Psi_{jp}\rangle |\Psi_{jn}\rangle \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\nu\neq k} \prod_{j\neq\nu} \langle \Psi_{jn} | \langle \Psi_{jp} | a_{\nu n}^- a_{\nu p} U_{kp} V_{kn} \left( a_{kp}^+ a_{kn}^+ - a_{kp}^- a_{kn}^- \right) \prod_{j\neq k} |\Psi_{jp}\rangle |\Psi_{jn}\rangle \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} U_{kp} V_{kn}
\end{aligned} \tag{B.14}$$

De même, on obtient que :

$$\langle pn|T_+|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} U_{kp} V_{kn} \tag{B.15}$$

### B.1.2 Eléments de matrice de l'opérateur $T_-$ .

Calculons d'abord  $T_-|\Psi\rangle$

En utilisant les expressions (2.7) et (2.24) il vient :

$$\begin{aligned}
T_-|\Psi\rangle &= \sum_{k>0} \left( a_{kn}^+ a_{kp} + a_{kn}^- a_{kp}^- \right) \prod_{\nu>0} \left( U_{\nu p} + V_{\nu p} a_{\nu p}^+ a_{\nu p}^- \right) \prod_{\nu>0} \left( U_{\nu n} + V_{\nu n} a_{\nu n}^+ a_{\nu n}^- \right) |0\rangle \\
&= \sum_{k>0} U_{kn} V_{kp} \left( a_{kn}^+ a_{kp}^- - a_{kn}^- a_{kp}^+ \right) \prod_{j\neq k} |\Psi_{jp}\rangle |\Psi_{jn}\rangle
\end{aligned} \tag{B.16}$$



En multipliant à gauche par  $\langle \tau\tau' |$  ( $\tau, \tau' = 1, 2$ ), on obtient les différentes probabilités de transition :

$$\begin{aligned}
\langle pp | T_- | \Psi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \left\{ \sum_{k>0} \prod_{j \neq k} \langle \Psi_{jn} | \langle \Psi_{jp} | a_{\tilde{k}p} a_{kp} U_{kn} V_{kp} \left( a_{kn}^+ a_{\tilde{k}p}^+ - a_{\tilde{k}n}^+ a_{kp}^+ \right) \prod_{j \neq k} | \Psi_{jp} \rangle | \Psi_{jn} \rangle \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\nu \neq k} \prod_{j \neq \nu} \langle \Psi_{jn} | \langle \Psi_{jp} | a_{\tilde{\nu}p} a_{\nu p} U_{kn} V_{kp} \left( a_{kn}^+ a_{\tilde{k}p}^+ - a_{\tilde{k}n}^+ a_{kp}^+ \right) \prod_{j \neq k} | \Psi_{jp} \rangle | \Psi_{jn} \rangle \right\} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.17}$$

De même, on trouve :

$$\langle nn | T_- | \Psi \rangle = 0 \tag{B.18}$$

Quand à l'état  $|np\rangle$ , il conduit à :

$$\begin{aligned}
\langle np | T_- | \Psi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \left\{ \sum_{k>0} \prod_{j \neq k} \langle \Psi_{jn} | \langle \Psi_{jp} | a_{\tilde{k}n} a_{kp} U_{kn} V_{kp} \left( a_{kn}^+ a_{\tilde{k}p}^+ - a_{\tilde{k}n}^+ a_{kp}^+ \right) \prod_{j \neq k} | \Psi_{jp} \rangle | \Psi_{jn} \rangle \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\nu \neq k} \prod_{j \neq \nu} \langle \Psi_{jn} | \langle \Psi_{jp} | a_{\tilde{\nu}n} a_{\nu p} U_{kn} V_{kp} \left( a_{kn}^+ a_{\tilde{k}p}^+ - a_{\tilde{k}n}^+ a_{kp}^+ \right) \prod_{j \neq k} | \Psi_{jp} \rangle | \Psi_{jn} \rangle \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} U_{kn} V_{kp}
\end{aligned} \tag{B.19}$$

De même pour  $\langle pn | T_- | \Psi \rangle$  on trouve :

$$\langle pn | T_- | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} U_{kn} V_{kp} \tag{B.20}$$

### B.1.3 Probabilités de transition

On a alors pour les probabilités de transition :

$$\begin{aligned}
P_+^{nn} &= P_+^{pp} = 0 \\
P_+^{np} &= P_+^{pn} = \frac{1}{\Omega} \left( \sum_{k>0} U_{kn} V_{kp} \right)^2
\end{aligned} \tag{B.21}$$

et

$$\begin{aligned}
P_-^{nn} &= P_-^{pp} = 0 \\
P_-^{np} &= P_-^{pn} = \frac{1}{\Omega} \left( \sum_{k>0} U_{kp} V_{kn} \right)^2
\end{aligned} \tag{B.22}$$

## B.2 Calcul en représentation quasi-particule

### B.2.1 Eléments de matrice de l'opérateur $T_+$

L'opérateur  $T_+$  s'écrit, en représentation quasi-particule à l'aide de la relation (B.4) :

$$\begin{aligned}
T_+ &= \sum_{k>0} \left[ \left( U_{kp} \alpha_{kp}^+ + V_{kp} \alpha_{\tilde{kp}}^- \right) \left( U_{kn} \alpha_{kn} + V_{kn} \alpha_{\tilde{kn}}^+ \right) + \left( U_{kp} \alpha_{\tilde{kp}}^+ - V_{kp} \alpha_{kp} \right) \right. \\
&\quad \left. \left( U_{kn} \alpha_{\tilde{kn}}^- - V_{kn} \alpha_{kn}^+ \right) \right]
\end{aligned} \tag{B.23}$$

d'où

$$T_+ |\Psi\rangle = \sum_{k>0} U_{kp} V_{kn} \left( \alpha_{kp}^+ \alpha_{\tilde{kn}}^+ - \alpha_{\tilde{kp}}^+ \alpha_{kn}^+ \right) |\Psi_{jp}\rangle |\Psi_{jn}\rangle \tag{B.24}$$

On aura alors :

$$\begin{aligned}
\langle pp | T_+ | \Psi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\nu, k>0} \langle \Psi_n | \langle \Psi_p | \alpha_{\tilde{kp}}^- \alpha_{kp} U_{kp} V_{kn} \left( \alpha_{kp}^+ \alpha_{\tilde{kn}}^+ - \alpha_{\tilde{kp}}^+ \alpha_{kn}^+ \right) | \Psi_p \rangle | \Psi_n \rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.25}$$

De même, on trouve :

$$\langle nn | T_+ | \Psi \rangle = 0 \tag{B.26}$$

et

$$\begin{aligned}
\langle pn | T_+ | \Psi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\nu, k>0} \langle \Psi_n | \langle \Psi_p | \alpha_{\tilde{kp}}^- \alpha_{kn} U_{kp} V_{kn} \left( \alpha_{kp}^+ \alpha_{\tilde{kn}}^+ - \alpha_{\tilde{kp}}^+ \alpha_{kn}^+ \right) | \Psi_p \rangle | \Psi_n \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} U_{kp} V_{kn}
\end{aligned} \tag{B.27}$$

puis

$$\langle np|T_+|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} U_{kp} V_{kn} \quad (\text{B.28})$$

Ce qui correspond bien aux expressions (B.14) et (B.15) obtenus à partir de la représentation particule .

## B.2.2 Éléments de matrice de l'opérateur $T_-$

En utilisant la transformation de Bogoliubov-Valatin (B.4) dans l'expression (2.24), il vient :

$$\begin{aligned} T_- = \sum_{k>0} & \left[ (U_{kn} \alpha_{kn}^+ + V_{kn} \alpha_{kn}^-) (U_{kp} \alpha_{kp} + V_{kp} \alpha_{kp}^-) + (U_{kn} \alpha_{kn}^- - V_{kn} \alpha_{kn}^+) \right. \\ & \left. (U_{kp} \alpha_{kp}^- - V_{kp} \alpha_{kp}^+) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

d'où

$$T_- |\Psi\rangle = \sum_{k>0} U_{kn} V_{kp} \left( \alpha_{kn}^+ \alpha_{kp}^- - \alpha_{kn}^- \alpha_{kp}^+ \right) |\Psi_p\rangle |\Psi_n\rangle \quad (\text{B.30})$$

Compte tenu de cette expression, on trouve :

$$\begin{aligned} \langle pp|T_-|\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\nu, k>0} \langle \Psi_n | \langle \Psi_p | \alpha_{kp}^- \alpha_{kp} U_{kn} V_{kp} \left( \alpha_{kn}^+ \alpha_{kp}^- - \alpha_{kn}^- \alpha_{kp}^+ \right) |\Psi_p\rangle |\Psi_n\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

De même, on aboutit à :

$$\langle nn|T_-|\Psi\rangle = 0 \quad (\text{B.32})$$

Tandis que :

$$\begin{aligned} \langle np|T_-|\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\nu, k>0} \langle \Psi_n | \langle \Psi_p | \alpha_{kn}^- \alpha_{kp} U_{kn} V_{kp} \left( \alpha_{kn}^+ \alpha_{kp}^- - \alpha_{kn}^- \alpha_{kp}^+ \right) |\Psi_p\rangle |\Psi_n\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} U_{kn} V_{kp} \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

et

$$\langle np | T_- | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{k>0} U_{kn} V_{kp} \quad (\text{B.34})$$

Là aussi les expressions obtenues coïncident avec celles déduites à l'aide de la représentation particule .

### B.2.3 Probabilités de transition

Les probabilités de transition sont :

$$\begin{aligned} P_+^{nn} &= P_+^{pp} = 0 \\ P_+^{np} &= P_+^{pn} = \frac{1}{\Omega} \left( \sum_{k>0} U_{kn} V_{kp} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

et

$$\begin{aligned} P_-^{nn} &= P_-^{pp} = 0 \\ P_-^{np} &= P_-^{pn} = \frac{1}{\Omega} \left( \sum_{k>0} U_{kp} V_{kn} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

On constate alors que ces expressions sont identiques à (B.21) et (B.22) .

# Bibliographie

- [1] L. Valentin, "Physique subatomique, noyaux et particules" (Hermann, Paris, 1975).
- [2] O. Moreno, P. Sarriguren, R. Alvarez-Rodriguez and E. Moya de Guerra, Phys. Rev. **C73**, 054302 (2006).
- [3] F. Frisk, Physica Scripta. **57**, 612 (1998).
- [4] A. A. Raduta and E. Moya de Guerra, Ann. Phys. **284**, 134 (2000).
- [5] F. Simkovic, Ch. C. Moustakidis, L. Pacearescu, and Amand Faessler, Phys. Rev. **C68**, 054319 (2003).
- [6] O. Civitarese, M. Reboiro and P. Vogel, Phys. Rev. **C56**, 1840 (1997).
- [7] N. H. Allal, M. Fellah, M. R. Oudih and N. Benhamouda. Eur. Phys. J. **A27**, s01, 301 (2006).
- [8] M. Fellah, N. H. Allal, M. Belabbas, M. R. Oudih and N. Benhamouda Phys. Rev. **C76**, 047306 (2007).
- [9] D. Mokhtari, I. Ami, M. Fellah and N. H. Allal, Int. J. Mod. Phys. E **17**, 655 (2008)
- [10] I. Ami, Thèse de Magister, USTHB (2005).
- [11] A. A. Raduta, L. Pacearescu, V. Baran, P. Sarriguren and E. Moya de Guerra, Nucl. Phys. **A675**, 503 (2000).
- [12] E. Moya de Guerra, A.A. Raduta, L. Zamick, P. Sarriguren, Nucl. Phys. **A727**, 3 (2003).
- [13] W. Satula and R. Wyss, Nucl. Phys. **A676**, 120 (2000).
- [14] W. Satula and R. Wyss, Phys. Lett. **B393**, 1 (1997).

- [15] D. R. Bes, O. Civitarese, E. E. Maqueda and N. N. Scoccola, arXiv :nucl-th/99077007v1.
- [16] J. Engel, S. Pittel, M. Stoitsov, P. Vogel and J. Dukelskey, Phys. Rev. **C55**, 1781 (1997).
- [17] M. Fellaah and T. F. Hammann, Nuovo Cimento **30A**, 239 (1975).
- [18] J. Suhonen, "From nucleons to nucleus" (Springer, Finland, 2006).
- [19] A. A. Raduta, Prog. Part. Nucl. Phys. **48**, 233 (2002).
- [20] J. G. Hirsh, P.O. Hess and O. Civitarese, Phys. Lett. **B390**, 36 (1997).
- [21] C. Selam, A. Kuçukbursa and H. Bircan, Turk. J. Phys **27** 187 (2003).
- [22] C. M. Raduta and A. A. Raduta, Nucl. Phys. **A756**, 153 (2005).
- [23] E. Moya de Guerra, A. A.Raduta, L. Zamick and P. Sarruguren, Nucl. Phys. **A727**, 3 (2003).
- [24] E. Moya de Guerra, P. Sarriguren, A. Escuderos and J. Jung, Nucl. Phys. **A690**, 276C (2001).
- [25] A. A. Raduta, P. Sarriguen, A. Fassler and E. Moya de Guerra, Ann. Phys. **294**, 182 (2001).
- [26] D. R. Bes, O. Civitarese and N. N. Scocola, Phys. Lett. **B464**, 93 (1999).
- [27] F. Simkovic, J. Schuvieger, M. Veselsky, G. Pantis and Amand Faessler, arXiv :nucl-th/9612037v1.
- [28] S. Yu. Igashov. V. A. Rodin, M. H. Urin and A. Faessler, arXiv :nucl-th/0711.4751v1.
- [29] R. W. Richardson and N. Sherman, Nucl. Phys. **52**, 221 (1964).
- [30] R. W. Richardson, J. Math. Phys. **18**, 1802 (1977).
- [31] K. Kumar, Phys. Rep. **264**, 267 (1996).
- [32] N. H. Allal and M. Fellaah, Phys. Rev. **C50**, 1404 (1994).
- [33] P. Ring and P.Schuk, "The Nuclear Many Body Problem" (Springer, Berlin, 2000).
- [34] W. Greiner and J. A. Marhun, "Nuclear Models" (Springer, Berlin, 1996).

- [35] S. G. Nilson and I. Ragnarsson, "Shapes and Shells in Nuclear Structure" (Cambridge University Press, 1995).
- [36] M. Fellah, Thèse de doctorat de troisième cycle, Université d'Alger (1969).
- [37] A. Goswami, Nucl.Phys. **60**, 228 (1964).
- [38] A. Goswami and L.S. Kisslinger, Phys. Rev. **B26**, 140 (1965).
- [39] P. Camiz, A. Covello and M. Jean, Nuovo Cimento **36**, 663 (1965).
- [40] A. L. Goodman, Adv. Nucl. Phys. **11**, 263 (1979).
- [41] H. H. Wolter, A. Faessler and P.U. Sauer, Nucl. Phys. **A167**, 108 (1971).
- [42] A. Messiah, "Mécanique Quantique", Dunod, Paris, (1960).
- [43] A. M. Lane, "Nuclear Theory" (W. A. Benjamin, New York, 1964).
- [44] C. Scouarnec, "Algèbre Spectrale, Tome 1" (Publisud, Toulouse, 1987).
- [45] M. R. Oudih, Thèse de Magister, USTHB (1999).
- [46] D. Mokhtari, Thèse de Magister, USTHB (2002).
- [47] N. N. Bogoliubov, Nuovo Cimento, **7**, 794 (1958); J. G. Valatin, Nuovo Cimento, **7**, 843 (1958).
- [48] P. Vogel, Czech. J. Phys. **48**, 269 (1998).
- [49] P. Moller and J. R. Nix, Nucl. Phys **A536**, 20 (1992).
- [50] P. Moller and J. R. Nix, Atomic Data and Nuclear Data Tables **59**, 185 (1995).
- [51] H. Chen and A. Goswami, Phys. Lett. **24B**, 257 (1967).
- [52] R. R. Chasman, Phys. Lett. **B524**, 81 (2002).
- [53] O. Civitarese and M. Reboiro, Phys. Rev. **C56**, 1179 (1997).
- [54] S. Szpikowski, Acta Phys. Pol. **B31**, 443 (2000).
- [55] D. Mokhtari, N. H. Allal and M. Fellah, Acta Phys. Hung. A : Heavy Ion Phys. **19**, 187 (2004).
- [56] G. Audia, A.H. Wapstrab and C. Thibaulta, The AME2003 atomic mass evaluation