Hypersurfaces réelles de variétés complexes

Mohamed Tayeb Benzemmouri

Table des matières

Introduction

L'article de Chern-Moser est consacré à l'étude des hypersurfaces analytiques réelles de $\mathbb{C}^{n+1}$ dont la forme de Levi est non dégénérée, essentiellement du point de vue local.

Cette étude est inspirée par la géométrie riemannienne classique et par le cas $n = 1$, traité par E. Cartan qui, en 1907, a montré par un argument heuristique qu'une hypersurface réelle dans $\mathbb{C}^2$ admet des invariants locaux pour les transformations biholomorphes et a reconnu l'importance du groupe spécial unitaire agissant sur les hyperquadriques réelles [1]. L'hyperquadrique est l'hyperquadrique réelle associée à une forme sesquilinéaire. C'est un espace homogène sous un groupe spécial unitaire ; on note H le groupe d'isotropie d'un point.

On cherche un changement de coordonnées sous la forme $\psi \circ \varphi_0$ avec φ_0 dans H et fortement tangente à l'identité en un certain sens. On démontre alors qu'il existe un unique changement de coordonnées de ce type qui mette l'équation de M sous « forme normale ». Les « formes normales » sont définies par l'annulation de certains coefficients . Ce résultat permet par exemple de déduire que M peut, par changement de coordonnées, être rendue osculatrice à l'ordre 3, mais en général pas à l'ordre 4, à une hyperquadrique.

Soient $z^1, ..., z^{n+1}$, les coordonnées dans $\mathbb{C}^{n+1}$; on étudie à l'origine les hyperquadriques réelles définies par l'équation

$$r\left(z^1, ..., z^{n+1}, \overline{z^1}, ..., \overline{z^{n+1}}\right) = 0, \tag{0.1}$$

où r est une fonction analytique réelle qui s'annule à l'origine, telles que ses dérivées partielles ne sont pas toutes nulles à l'origine.

On pose

$$z = (z^1, ..., z^n),\ z^{n+1} = w = u + iv. \tag{0.2}$$

Suite à un changement de variables linéaire convenable, l'équation de M peut s'écrire comme

$$v = F(z, \bar{z}, u) \tag{0.3}$$

où F est une fonction analytique réelle qui s'annule, ainsi que toutes ses dérivées partielles en 0. L'hypothèse de base sur M est que M est non dégénérée : i.e. sa forme de Levi est non dégénérée en 0

$$\langle z, z\rangle = \sum_{1 \le \alpha, \beta \le n} g_{\alpha\overline{\beta}} z^\alpha \overline{z^\beta},\ g_{\alpha\overline{\beta}} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^\alpha \partial \overline{z^\beta}}\right)_0. \tag{0.4}$$

Dans les paragraphes 2 et 3, on étudie le problème de réduction à la forme normale par des transformations biholomorphes en z, w. Ceci s'étudie d'abord en terme de séries formelles au §2 et leur convergence vers une fonction holomorphe est établie au §3 . Les résultats sont énoncés dans les théorèmes 2.2 et 3.5. Il est bon de noter que la preuve de convergence se réduit à celle des E.D.O.

La forme normale est trouvée en adaptant l'image holomorphe de l'hyperquadrique à la variété donnée.

Pour $n = 1$ ceci conduit à une osculation d'ordre 5 de l'image holomorphe de la sphère au point en question, alors que pour $n \geq 2$ l'approximation est plus compliquée. Dans les deux cas, cependant l'approximation a lieu le long d'une courbe transverse à l'espace tangent complexe ; la famille de courbes ainsi obtenues satisfait à un système d'E.D.O. d'ordre 2 est associé de façon holomorphiquement invariante à la variété.

A cause du rôle principal que jouent les hyperquadriques réelles, le chapitre1 est consacré à la discussion de leurs diverses propriétés. Dans la section 2, on établit la réduction à la forme normale par des séries entières formelles ; au chapitre 3, on montre que les séries obtenues convergent vers des applications biholomorphes. On termine au chapitre 4 par l'étude des points ombilicaux.

1 Hyperquadriques réelles de $\mathbb{C}^{n+1}$

1.1 Généralités

On note z^α $(1 \leq \alpha \leq n)$, $z^{n+1} = w = u + iv$ les coordonnées canoniques dans $\mathbb{C}^{n+1}$.

Soit $h : h(z) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} h_{\alpha\overline{\beta}} z^\alpha \overline{z^\beta}$ une forme hermitienne non dégénérée sur $\mathbb{C}^n$, de signature (p, q). On considère l'hyperquadrique réelle $Q \subset \mathbb{C}^{n+1}$ définie par

$$v = h(z). \tag{1.1}$$

Par la transformation

$$Z^\alpha = \frac{2z^\alpha}{w + \mathrm{i}},\ W = \frac{w - \mathrm{i}}{w + \mathrm{i}}, \tag{1.2}$$

l'équation (1.1) devient

$$h(Z) + W\overline{W} = 1. \tag{1.3}$$

En effet, les relations (1.2) et $v = \operatorname{Im} w$ entraînent

$$\begin{aligned} W\overline{W} &= \frac{w\overline{w} - 2v + 1}{w\overline{w} + 2v + 1}, \\ h(Z) &= \frac{4h(z)}{w\overline{w} + 2v + 1}, \\ h(Z) + W\overline{W} - 1 &= \frac{4\left(h(z) - v\right)}{w\overline{w} + 2v + 1}, \end{aligned}$$

ce qui montre l'équivalence de (1.3) et (1.1).

On note $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ l'espace projectif complexe de dimension n

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) = \left\{\text{droites complexes de } \mathbb{C}^{n+1} \text{ passant par l'origine}\right\};$$

la droite passant par $z = (z^0, \ldots, z^n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ est notée $[z^0, \ldots, z^n]$. L'application

$$\begin{gathered} \left(z^0, \ldots, z^n\right) \mapsto \left[z^0, \ldots, z^n\right] \\ \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \end{gathered}$$

est surjective et $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est le quotient de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par cette application. On munit $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ de la structure quotient de variété analytique complexe correspondante.

L'espace $\mathbb{C}^{n+1}$ est plongé dans l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ par

$$\left(z^1, \ldots, z^n, z^{n+1}\right) \mapsto \left[1, z^1, \ldots, z^n, z^{n+1}\right];$$

ce plongement identifie un point $(z^1, \ldots, z^n, z^{n+1})$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ avec le point de coordonnées homogènes $[\zeta^0, \zeta^1, \ldots, \zeta^n, \zeta^{n+1}]$ $(\zeta^0 \neq 0)$ tel que

$$z^j = \zeta^j/\zeta^0 \quad (1 \leq j \leq n+1).$$

Par cette identification, l'équation (1.1) devient

$$h(\zeta^1, \ldots, \zeta^n) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\zeta^{n+1}\overline{\zeta^0} - \overline{\zeta^{n+1}}\zeta^0\right) = 0. \tag{1.4}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} v = \operatorname{Im} z^{n+1} &= \frac{1}{2i}\left(z^{n+1} - \overline{z^{n+1}}\right) \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\zeta^{n+1}/\zeta^0 - \overline{\zeta^{n+1}/\zeta^0}\right) \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2\zeta^0\overline{\zeta^0}}\left(\zeta^{n+1}\overline{\zeta^0} - \overline{\zeta^{n+1}}\zeta^0\right), \end{aligned}$$

d'où

$$h(z) - v = \frac{1}{\zeta^0\overline{\zeta^0}}\left(h(\zeta^1, \ldots, \zeta^n) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\zeta^{n+1}\overline{\zeta^0} - \overline{\zeta^{n+1}}\zeta^0\right)\right).$$

1.2 Actions de groupes

Soit $\langle\ ,\ \rangle$ la forme hermitienne définie dans $\mathbb{C}^{n+2}$ par

$$\langle Z, Z'\rangle = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} h_{\alpha\overline{\beta}}\zeta^\alpha\overline{\zeta'^\beta} + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\zeta^{n+1}\overline{\zeta'^0} - \overline{\zeta'^{n+1}}\zeta^0\right), \tag{1.5}$$

avec

$$Z = \left(\zeta^0, \zeta^1, \ldots, \zeta^n, \zeta^{n+1}\right), \quad Z' = \left(\zeta'^0, \zeta'^1, \ldots, \zeta'^n, \zeta'^{n+1}\right). \tag{1.6}$$

L'hyperquadrique réelle Q est alors la trace sur $\mathbb{C}^{n+1}$ de la sous-variété $\widetilde{Q}$ de $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$, d'équation homogène

$$\langle Z, Z\rangle = 0. \tag{1.7}$$

(Pour vérifier que $\widetilde{Q}$ est une sous-variété réelle de $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$, il suffit d'écrire son équation dans les cartes canoniques de $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$).

Comme h est de signature (p,q), la forme hermitienne (1.5) est de signature $(p+1,q+1)$. Soit $SU\,(p+1,q+1)$ le groupe des matrices de déterminant 1 qui préservent la forme hermitienne (1.5). Désignons par J la matrice de la forme (1.5) dans la base canonique de $\mathbb{C}^{n+2}$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{2} \\ 0 & h & 0 \\ \frac{\mathrm{i}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

décomposée en blocs, avec $h = \big(h_{\alpha\overline{\beta}}\big)$. Une matrice A appartient à $SU\,(p+1,q+1)$ si elle vérifie

$$A^* J A = J, \quad \det A = 1,$$

où $A^* = {}^t\bar{A}$ est la matrice adjointe de A.

Si $A \in SU\,(p+1,q+1)$, A opère sur $\tilde{Q}$ par

$$A\,[\zeta] = [A\zeta]\,.$$

On définit ainsi une action de $SU\,(p+1,q+1)$ sur $\tilde{Q}$.

Cette action est *transitive* : pour $Z, Z' \in \tilde{Q}$, il existe $A \in SU\,(p+1,q+1)$ tel que $AZ = Z'$. Ceci revient à démontrer la proposition suivante.

Proposition 1.1. *Soient ζ, ζ' deux vecteurs non nuls isotropes pour la forme hermitienne non dégénérée (1.5) :*

$$\langle \zeta, \zeta \rangle = \langle \zeta', \zeta' \rangle = 0.$$

Alors il existe $A \in SU\,(p+1,q+1)$ tel que $A\zeta = \lambda\zeta'$.

Démonstration. Appelons *base orthonormale* pour $\langle\ ,\ \rangle$ une base $(\eta_0, \ldots, \eta_{n+1})$, orthogonale pour $\langle\ ,\ \rangle$ et telle que

$$\langle \eta_0, \eta_0 \rangle = \cdots = \langle \eta_p, \eta_p \rangle = 1,$$
$$\langle \eta_{p+1}, \eta_{p+1} \rangle = \cdots = \langle \eta_{n+1}, \eta_{n+1} \rangle = -1.$$

Alors $B \in U\,(p+1,q+1)$ si et seulement si elle transforme une base orthonormale en base orthonormale.

Un vecteur non nul ζ est isotrope pour $\langle\ ,\ \rangle$ si et seulement s'il existe une base orthonormale $(\eta_0, \ldots, \eta_{n+1})$ telle que $\zeta = \alpha\,(\eta_0 + \eta_{n+1})$. Cette condition est évidemment suffisante. Si ζ est un vecteur isotrope non nul, soit E un sous-espace vectoriel de dimension 2 contenant ζ ; la restriction de $\langle\ ,\ \rangle$ à E est alors de type $(1, 1)$. Soit alors (η_0, η_{n+1}) une base orthonormale de E :

$$\langle \eta_0, \eta_0 \rangle = 1, \quad \langle \eta_{n+1}, \eta_{n+1} \rangle = -1, \quad \langle \eta_0, \eta_{n+1} \rangle = 0.$$

Dans cette base, ζ s'écrit $\zeta = \alpha\eta_0 + \beta\eta_{n+1}$ et on a $(\zeta, \zeta) = |\alpha|^2 - |\beta|^2$; comme ζ est isotrope, on a $|\alpha| = |\beta| \neq 0$. On obtient $\alpha = \beta$ en multipliant η_0 par le nombre complexe de module 1 convenable. Il suffit maintenant de compléter (η_0, η_{n+1}) en une base orthonormale $(\eta_0, \ldots, \eta_{n+1})$, en prenant pour $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ une base orthonormale de l'orthogonal de (η_0, η_{n+1}) par rapport à $\langle\ ,\ \rangle$, qui est un supplémentaire de $\langle \eta_0, \eta_{n+1} \rangle$.

Si ζ, ζ' sont deux vecteurs isotropes, ils s'écrivent

$$\zeta = \alpha\,(\eta_0 + \eta_{n+1})\,, \quad \zeta' = \alpha'\left(\eta'_0 + \eta'_{n+1}\right),$$

où $(\eta_0, \ldots, \eta_{n+1})$ et $\left(\eta'_0, \ldots, \eta'_{n+1}\right)$ sont des bases orthonormales. La matrice B qui transforme $(\eta_0, \ldots, \eta_{n+1})$ en $\left(\eta'_0, \ldots, \eta'_{n+1}\right)$ appartient à $U\,(p+1, q+1)$, et $B\zeta$ est un multiple de ζ'. On a $|\det B| = 1$; si μ est une racine d'ordre $n+2$ de $\det B$, la matrice $A = \mu^{-1}B$ a les propriétés cherchées. $\square$

Soit K le sous-groupe formé des éléments de $SU\,(p+1, q+1)$ qui opèrent *trivialement* sur $\widetilde{Q}$. Alors K est un sous-groupe normal de $SU\,(p+1, q+1)$ et de $SU\,(p+1, q+1)\,/K$ opère transitivement et effectivement sur $\widetilde{Q}$.

Proposition 1.2. *Le groupe K est formé des homothéties εI telles que $\varepsilon^{n+2} = 1$.*

Le groupe K est donc un groupe fini d'ordre $n+2$.

Démonstration. Soit $A \in K$; on a donc $A\,[\zeta] = [\zeta]$, c'est-à-dire $A\zeta = \lambda\,(\zeta)\,\zeta$, pour tout vecteur isotrope non nul ζ. Soit $(\eta_0, \ldots, \eta_{n+1})$ une base orthonormale pour $\langle\ ,\ \rangle$. Les vecteurs

$$\eta_0 + \beta\eta_{n+1}, \quad (|\beta| = 1)$$

sont alors des vecteurs isotropes, donc des vecteurs propres de A. Comme ils engendrent le sous-espace $\langle \eta_0, \eta_{n+1} \rangle$, on a $A\,\langle \eta_0, \eta_{n+1} \rangle = \langle \eta_0, \eta_{n+1} \rangle$. Comme

A restreinte à $\langle \eta_0, \eta_{n+1} \rangle$ possède au plus deux valeurs propres, il existe β, β', $\beta \neq \beta'$ tels que

$$\begin{aligned} A\left(\eta_0 + \beta \eta_{n+1}\right) &= \lambda\left(\eta_0 + \beta \eta_{n+1}\right), \\ A\left(\eta_0 + \beta' \eta_{n+1}\right) &= \lambda\left(\eta_0 + \beta' \eta_{n+1}\right). \end{aligned}$$

Les vecteurs $\eta_0 + \beta\eta_{n+1}$ et $\eta_0 + \beta'\eta_{n+1}$ engendrent $\langle \eta_0, \eta_{n+1} \rangle$, donc A restreinte à $\langle \eta_0, \eta_{n+1} \rangle$ est l'homothétie de rapport λ, et on a $A\eta_0 = \lambda\eta_0$, $A\eta_{n+1} = \lambda\eta_{n+1}$.

Pour tout couple (i, j) tel que $0 \leq i \leq p$, $p + 1 \leq j \leq n + 1$, le même raisonnement montre que A induit une homothétie sur le sous espace $\langle \eta_i, \eta_j \rangle$. On en déduit que A est une homothétie εI. La condition $\det A = 1$ entraîne alors $\varepsilon^{n+2} = 1$.

La réciproque est immédiate : toute matrice εI, avec $\varepsilon^{n+2} = 1$, opère trivialement sur $\widetilde{Q}$. □

1.3 Bases adaptées

Une *base adaptée à* Q (appelée Q*-frame* dans [3]) est une base $(Z_0, \ldots, Z_{n+1})$ de $\mathbb{C}^{n+2}$ dans laquelle la forme hermitienne (1.5) a la même matrice que dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} \langle Z_0, Z_0 \rangle & \langle Z_0, Z_\beta \rangle & \langle Z_0, Z_{n+1} \rangle \\ \langle Z_\alpha, Z_0 \rangle & \langle Z_\alpha, Z_\beta \rangle & \langle Z_\alpha, Z_{n+1} \rangle \\ \langle Z_{n+1}, Z_0 \rangle & \langle Z_0, Z_{n+1} \rangle & \langle Z_{n+1}, Z_{n+1} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{2} \\ 0 & h_{\alpha\overline{\beta}} & 0 \\ \frac{\mathrm{i}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

et vérifie

$$\det\left(Z_0, Z_1, \ldots\ldots Z_{n+1}\right) = 1. \tag{1.9}$$

Les matrices de passage d'une base adaptée à une autre sont alors exactement les éléments de $SU\left(p+1, q+1\right)$.

Si $(Z_0, Z_1, \ldots.., Z_n, Z_{n+1})$ est une base adaptée, les points $[Z_0]$ et $[Z_{n+1}]$ appartiennent à $\tilde{Q}$.

On fixe $Z_0 \in \mathbb{C}^{n+2}$, tel que $[Z_0] \in \widetilde{Q}$ (on peut prendre $Z_0 = (1, 0, \ldots\ldots., 0)$) et on complète en une base adaptée $(Z_0, Z_1, \ldots.., Z_n, Z_{n+1})$ (on peut prendre la base canonique de $\mathbb{C}^{n+2}$).

Proposition 1.3. *La forme générale d'une base adaptée* $\left(Z_0^*, Z_1^*, \ldots.., Z_n^*, Z_{n+1}^*\right)$ *telle que* $[Z_0^*] = [Z_0]$ *est alors*

$$\begin{cases} Z_0^* = tZ_0, \\ Z_\alpha^* = t_\alpha Z_0 + t_\alpha^\beta Z_\beta, \\ Z_{n+1}^* = \tau Z_0 + \tau^\beta Z_\beta + \overline{t}^{-1} Z_{n+1}, \end{cases} \tag{1.10}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{c} t_\alpha = -2\,\mathrm{i}\, t t^\varrho_\alpha \overline{\tau^\sigma} h_{\varrho\overline{\sigma}} = -2\,\mathrm{i}\, t t^\varrho_\alpha \tau_\varrho, \\ t\overline{t}^{-1} \det\left(t^\beta_\alpha\right) = 1, \\ t^\varrho_\alpha \overline{t^\sigma_\beta} h_{\varrho\overline{\sigma}} = h_{\alpha\overline{\beta}}, \\ h_{\varrho\overline{\sigma}} \tau^\varrho \tau^{\overline{\sigma}} + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\tau}\overline{t}^{-1} - \tau t^{-1}\right) = 0. \end{array}\right. \tag{1.11}$$

Démonstration. En effet, la condition $[Z_0^*] = [Z_0]$ équivaut à $Z_0^* = tZ_0$, avec $t \neq 0$. Si $1 \leq \alpha \leq n$, soit

$$Z_\alpha^* = t_\alpha Z_0 + t_\alpha^\beta Z_\beta + u_\alpha Z_{n+1}$$

la décomposition de Z_α^* dans la base $(Z_0, \ldots, Z_{n+1})$. On a alors

$$\langle Z_0^*, Z_\alpha^* \rangle = -\frac{\mathrm{i}}{2} t \overline{u_\alpha}$$

et la condition $(Z_0^*, Z_\alpha^*) = 0$ équivaut donc à $u_\alpha = 0$, d'où

$$Z_\alpha^* = t_\alpha Z_0 + t_\alpha^\beta Z_\beta. \tag{1.12}$$

On en déduit $\left(Z_\alpha^*, Z_\beta^*\right) = t^\varrho_\alpha \overline{t^\sigma_\beta} h_{\varrho\overline{\sigma}}$, ce qui entraîne les conditions

$$t^\varrho_\alpha \overline{t^\sigma_\beta} h_{\varrho\overline{\sigma}} = h_{\alpha\overline{\beta}}, \tag{1.13}$$

pour $1 \leq \alpha \leq \beta \leq n$. Soit

$$Z_{n+1}^* = \tau Z_0 + \tau^\beta Z_\beta + u Z_{n+1}.$$

On a

$$\left\langle Z_0^*, Z_{n+1}^* \right\rangle = t\overline{u}\left(Z_0, Z_{n+1}\right)$$

et la condition $\left\langle Z_0^*, Z_{n+1}^* \right\rangle = \langle Z_0, Z_{n+1} \rangle$ équivaut donc à $u = \overline{t}^{-1}$; on a donc

$$Z_{n+1}^* = \tau Z_0 + \tau^\beta Z_\beta + \overline{t}^{-1} Z_{n+1}. \tag{1.14}$$

De (1.12) et (1.14), on déduit

$$\begin{aligned} \left\langle Z_a^*, Z_{n+1}^* \right\rangle &= -\frac{\mathrm{i}}{2} t_\alpha t^{-1} + t^\rho_\alpha \overline{\tau^\sigma} h_{\rho\overline{\sigma}}, \\ \left\langle Z_{n+1}^*, Z_{n+1}^* \right\rangle &= -\frac{\mathrm{i}}{2} \tau t^{-1} + \tau^\rho \overline{\tau^\sigma} h_{\rho\overline{\sigma}} + \frac{\mathrm{i}}{2} \overline{t}^{-1} \overline{\tau}. \end{aligned}$$

Les conditions $\left\langle Z_a^*, Z_{n+1}^*\right\rangle = 0$ et $\left\langle Z_{n+1}^*, Z_{n+1}^*\right\rangle = 0$ sont alors équivalentes à

$$t_\alpha = -2\,\mathrm{i}\, t t_\alpha^\varrho \tau^{\overline{\sigma}} h_{\varrho\overline{\sigma}}, \tag{1.15}$$

$$h_{\varrho\overline{\sigma}} \tau^\varrho \tau^{\overline{\sigma}} + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\overline{\tau}\,\overline{t}^{-1} - \tau t^{-1}\right) = 0. \tag{1.16}$$

En *définissant* les coordonnées covariantes τ_ρ par « descente des indices » :

$$\tau_\rho = \tau^{\overline{\sigma}} h_{\varrho\overline{\sigma}},$$

la relation (1.15) s'écrit encore

$$t_\alpha = -2\,\mathrm{i}\, t t_\alpha^\varrho \tau_\rho. \tag{1.17}$$

Les éléments du stabilisateur H de $[Z_0]$ dans $SU\,(p+1, q+1)$ sont donc les matrices de déterminant 1

$$\begin{pmatrix} t & t_\alpha & \tau \\ 0 & t_\alpha^\beta & \tau^\beta \\ 0 & 0 & \overline{t}^{-1} \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

dont les coefficients vérifient les relations (1.15), (1.13), (1.16). En écrivant que la matrice (1.18) est de déterminant 1, on obtient

$$t\overline{t}^{-1} \det\left(t_\alpha^\beta\right) = 1. \tag{1.19}$$

□

1.4 Le sous-groupe d'isotropie H

On choisit pour $(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n, Z_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{C}^{n+2}$. Soit H le stabilisateur de $[Z_0]$ dans $SU\,(p+1, q+1)$. Comme H est un sous-groupe fermé de $SU\,(p+1, q+1)$, c'est un groupe de Lie.

Les relations (1.10) et (1.11) peuvent être écrites de la façon suivante. Les éléments de H sont les matrices

$$A = \begin{pmatrix} t & \widetilde{t} & \tau \\ 0 & \theta & \widetilde{\tau} \\ 0 & 0 & \overline{t}^{-1} \end{pmatrix}, \tag{1.20}$$

avec $\widetilde{t} = (t^\alpha)$, $\widetilde{\tau} = (\tau_\beta)$, $\tau \in \mathbb{C}$, $\theta = \left(t_\alpha^\beta\right)$, vérifiant les conditions

$$\left\{ \begin{array}{c} \widetilde{t} = 2\,\mathrm{i}\,t\widetilde{\tau}^* h\theta, \\ t\overline{t}^{-1} \det\theta = 1, \\ \theta^* h\theta = h, \\ \frac{\mathrm{i}}{2}\left(t^{-1}\tau - \overline{t}^{-1}\overline{\tau}\right) + \widetilde{\tau}^* h\widetilde{\tau} = 0. \end{array} \right. \tag{1.21}$$

La troisième équation signifie que $\theta \in U(h) \simeq U(p,q)$, qui est de dimension n^2 . La deuxième condition montre que l'argument de t est déterminé par θ. La dernière condition montre que la partie imaginaire de $t^{-1}\tau$ est déterminée par $\widetilde{\tau}$. La première condition montre que $\widetilde{t}$ est déterminée par t, $\widetilde{\tau}$ et θ. On peut donc prendre comme coordonnées locales sur $H : \theta$ (dimension réelle n^2), $\widetilde{\tau}$ (dimension réelle $2n$), $|t|$ et $\mathrm{Re}\,(t^{-1}\tau)$; ceci montre que H est de dimension $n^2 + 2n + 2$.

Comme $\widetilde{Q}$ est isomorphe au quotient $SU(p+1, q+1)/H$, on peut également obtenir ce résultat à partir de

$$\begin{gathered} \dim H = \dim SU(p+1,q+1) - \dim \widetilde{Q}, \\ \dim SU(p+1,q+1) = (n+2)^2 - 1, \\ \dim \widetilde{Q} = \dim Q = 2n+1. \end{gathered}$$

1.5 Propriétés de H

Soit $A \in H$, représentée par la matrice (1.18) ; soit $[\zeta] \in \widetilde{Q}$ et $\zeta^* = A\zeta$. on a alors

$$\left\{ \begin{array}{c} \zeta^{*0} = t\zeta^0 + t_\alpha\zeta^\alpha + \tau\zeta^{n+1}, \\ \zeta^{*\beta} = t_\alpha^\beta\zeta^\alpha + \tau^\beta\zeta^{n+1}, \\ \zeta^{*n+1} = \overline{t}^{-1}\zeta^{n+1}. \end{array} \right. \tag{1.22}$$

En coordonnées non homogènes

$$z^i = \zeta^i/\zeta^0 \quad (1 \le i \le n), \quad w = \zeta^{n+1}/\zeta^0,$$

les relations (1.22) s'écrivent

$$\begin{aligned} z^{*\beta} &= \frac{t_\alpha^\beta\zeta^\alpha + \tau^\beta\zeta^{n+1}}{t\zeta^0 + t_\alpha\zeta^\alpha + \tau\zeta^{n+1}} = \frac{t_\alpha^\beta z^\alpha + \tau^\beta w}{t + t_\alpha z^\alpha + \tau w} \quad (1 \le \beta \le n), \\ w^* &= \frac{\overline{t}^{-1}\zeta^{n+1}}{t\zeta^0 + t_\alpha\zeta^\alpha + \tau\zeta^{n+1}} = \frac{\overline{t}^{-1} w}{t + t_\alpha z^\alpha + \tau w}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{l} z^{*\beta} = C^\beta_\alpha \left(z^\alpha + a^\alpha w\right)\delta^{-1}, \\ \qquad w^* = \varrho w \delta^{-1}, \end{array}\right. \tag{1.23}$$

avec

$$\delta = 1 + t^{-1} t_\alpha z^\alpha + t^{-1} \tau w \tag{1.24}$$

et

$$C^\beta_\alpha = t^{-1} t^\beta_\alpha, \quad C^\beta_\alpha a^\alpha = t^{-1} \tau^\beta, \quad \varrho = \mid t \mid^{-1} . \tag{1.25}$$

1.6 Structure de Q

D'autre part, l'hyperquadrique Q peut être munie d'une structure de groupe de Lie.

Pour cela, on considère le sous-groupe d'isotropie H' de $[Z_{n+1}]$ dans $\widetilde{Q}$. La matrice

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & I_n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

induit une involution E de $\widetilde{Q}$, qui échange $[Z_0]$ et $[Z_{n+1}]$. Les éléments de H' sont les matrices EAE^{-1} avec $A \in H$. Ce sont donc les matrices

$$\begin{pmatrix} \bar{t}^{-1} & 0 & 0 \\ -\tau^\beta & t^\beta_\alpha & 0 \\ -\tau & t_\alpha & t \end{pmatrix},$$

dont les coefficients vérifient les conditions (1.11).

Soit H_0 le sous-ensemble de H' formé des matrices telles que $\left(t^\beta_\alpha\right) = \left(\delta^\beta_\alpha\right) = I_n$ et $t = 1$. Pour un élément de H_0, les conditions (1.11) deviennent

$$\left\{\begin{array}{l} t_\alpha = -2\,\mathrm{i}\,\overline{\tau^\rho} h_{\varrho\overline{\sigma}} = -2\,\mathrm{i}\,\tau_\alpha, \\ \quad h_{\varrho\overline{\sigma}} \tau^\varrho \tau^{\overline{\sigma}} + \operatorname{Im}\tau = 0. \end{array}\right. \tag{1.26}$$

Ces conditions montrent que l'application

$$u : \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & I_n & 0 \\ w & \widetilde{t} & 1 \end{pmatrix},$$

où $\widetilde{t}$ est défini par

$$t_\alpha = 2\,\mathrm{i}\,\overline{z^\rho} h_{\varrho\overline{\sigma}}, \tag{1.27}$$

est un isomorphisme de variétés de Q sur H_0. Pour $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in Q$, l'image $u\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ est l'unique élément de H_0 qui transforme Z_0 en $\begin{pmatrix} 1 \\ z \\ w \end{pmatrix}$ (ou, en coordonńes non homogènes, qui transforme $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$).

Proposition 1.4. *L'ensemble H_0 est un sous-groupe de H'.*

Démonstration. Les éléments de H_0 sont les matrices de H' qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & I_n & 0 \\ w & \widetilde{t} & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.28}$$

Le produit de deux matrices de ce type appartient à H' et est égal à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & I_n & 0 \\ w & \widetilde{t} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z' & I_n & 0 \\ w' & \widetilde{t'} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z + z' & I_n & 0 \\ w + \widetilde{t}z' + w' & \widetilde{t} + \widetilde{t'} & 1 \end{pmatrix}; \tag{1.29}$$

il appartient donc à H_0. La matrice unité est obtenue pour $z = 0$, $t = 0$ et appartient donc à H_0. La relation (1.29) montre que l'inverse de la matrice (1.28) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -z & I_n & 0 \\ -w + \widetilde{t}z & -\widetilde{t} & 1 \end{pmatrix},$$

qui appartient également à H_0. □

Comme $t_\alpha = 2\,\mathrm{i}\,\overline{z^\rho} h_{\varrho\overline{\sigma}}$, on a

$$\widetilde{t}z' = 2\,\mathrm{i}\,t_\alpha z'^\alpha = 2\,\mathrm{i}\,\overline{z^\rho} h_{\varrho\overline{\sigma}} z'^\alpha = 2\,\mathrm{i}\,\overline{h}\,(z', z)\,,$$

où $\overline{h}$ désigne la forme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$ dont la matrice est $\left(\overline{h}_{\alpha\overline{\beta}}\right) = (h_{\beta\overline{\alpha}})$. La loi de multiplication dans H_0 s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & I_n & 0 \\ w & \widetilde{t} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z' & I_n & 0 \\ w' & \widetilde{t'} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z + z' & I_n & 0 \\ w + 2\,\mathrm{i}\,\overline{h}\,(z', z) + w' & \widetilde{t} + \widetilde{t'} & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.30}$$

À l'aide de l'isomorphisme de variétés u, on transporte cette loi de groupe sur l'hyperquadrique réelle Q :

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + z' \\ w + 2\,\mathrm{i}\,\overline{h}\,(z', z) + w' \end{pmatrix}. \tag{1.31}$$

Si z, z' sont tels que $\overline{h}\,(z', z)$ n'est pas réel, on a $\overline{h}\,(z', z) \neq \overline{h}\,(z, z')$; la loi de groupe sur Q n'est donc pas commutative.

1.7 Formules de Maurer-Cartan

Les *formules de Maurer-Cartan* sont inspirées de la méthode dite du *repère mobile* qui donne les *formules de Serret-Frenet* pour une courbe de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$.

Soit $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{C}^{n+2}$. On identifie un élément u du groupe spécial unitaire $SU\,(p+1, q+1)$ de la forme hermitienne (1.5) avec la base adaptée

$$(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n, Z_{n+1}) = u\,(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1})\,.$$

On identifie ainsi $G = SU(p+1, q+1)$ à la variété des bases adaptées, qui sont les suites $(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n, Z_{n+1})$ vérifiant les relations

$$\langle Z_A, Z_B \rangle = h_{A\overline{B}} \qquad (0 \leq A, B \leq n+1) \tag{1.32}$$

et

$$\det\,(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n, Z_{n+1}) = 1. \tag{1.33}$$

Les *formules de Maurer-Cartan* de $SU\,(p+1, q+1)$ sont alors

$$\mathrm{d}\,Z_A = \pi_A^B Z_B. \tag{1.34}$$

Elles définissent une matrice $\left(\pi_A^B\right)$ de formes différentielles de degré 1 sur G. Soit $(h_{A\overline{B}})$ la matrice de la forme hermitienne (1.5) par rapport à la base canonique. On définit $(\pi_{A\overline{B}})$, $(\pi_{\overline{B}A})$ par descente des indices par rapport à cette matrice :

$$\pi_{A\overline{B}} = \pi_A^C h_{C\overline{B}}, \quad \pi_{\overline{B}A} = \pi_{\overline{B}}^{\overline{C}} h_{A\overline{C}} = \overline{\pi_{B\overline{A}}}. \tag{1.35}$$

En utilisant les relations (1.32) on voit que la définition (1.35) équivaut à

$$\pi_{A\overline{B}} = \langle \mathrm{d}\,Z_A, Z_B \rangle\,, \quad \pi_{\overline{B}A} = \langle Z_A, \mathrm{d}\,Z_B \rangle \qquad (0 \leq A, B \leq n+1)\,. \tag{1.36}$$

En différentiant les relations (1.32), on voit que la famille $(\pi_{A\overline{B}})$ de 1-formes différentielles sur G vérifie les relations

$$\pi_{A\overline{B}} + \pi_{\overline{B}A} = 0 \qquad (0 \leq A, B \leq n+1)\,, \tag{1.37}$$

que l'on peut aussi écrire

$$\pi_{A\overline{B}} + \overline{\pi_{B\overline{A}}} = 0 \qquad (0 \leq A, B \leq n+1)\,. \tag{1.38}$$

En dérivant (1.9), on obtient en plus

$$\operatorname{tr}\left(\pi_A^B\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\pi_A^A = 0. \tag{1.39}$$

L'étude de la géométrie de Q est facilitée par l'écriture explicite des équations (1.37) et (1.39) ; pour cela, on tient compte des propriétés particulières des $h_{A\overline{B}}$ relatifs à une base adaptée (voir (1.8)) :

$$\left\{\begin{array}{ll} h_{0\overline{B}} = 0 & (0 \leq B \leq n)\,, \\ h_{n+1,\overline{B}} = 0 & (1 \leq B \leq n+1)\,, \\ & h_{n+1,\overline{0}} = \frac{\mathrm{i}}{2}. \end{array}\right. \tag{1.40}$$

On a alors, en appliquant les relations de définition (1.35),

$$\begin{aligned}
\pi_{0,\overline{0}} &= \pi_0^{n+1} h_{n+1,\overline{0}} = \frac{\mathrm{i}}{2}\pi_0^{n+1}, \\
\pi_{0\overline{\beta}} &= \pi_0^{\alpha} h_{\alpha\overline{\beta}} \qquad (1 \leq \beta \leq n)\,, \\
\pi_{0,\overline{n+1}} &= \pi_0^0 h_{0,\overline{n+1}} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\pi_0^0, \\
\pi_{\alpha\overline{0}} &= \pi_\alpha^{n+1} h_{n+1,\overline{0}} = \frac{\mathrm{i}}{2}\pi_\alpha^{n+1} \qquad (1 \leq \alpha \leq n)\,, \\
\pi_{\alpha,\overline{n+1}} &= \pi_\alpha^0 h_{0,\overline{n+1}} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\pi_\alpha^0 \qquad (1 \leq \alpha \leq n)\,, \\
\pi_{n+1,\overline{0}} &= \pi_{n+1}^{n+1} h_{n+1,\overline{0}} = \frac{\mathrm{i}}{2}\pi_{n+1}^{n+1}, \\
\pi_{n+1,\overline{\beta}} &= \pi_{n+1}^{\alpha} h_{\alpha\overline{\beta}} \qquad (1 \leq \beta \leq n)\,, \\
\pi_{n+1,\overline{n+1}} &= \pi_{n+1}^0 h_{0,\overline{n+1}} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\pi_{n+1}^0.
\end{aligned}$$

Compte tenu de ces relations, les relations (1.38), appliquées successivement aux cas $(A, B) = (\alpha, \beta)$, $(A, B) = (0, 0)$, $(A, B) = (n+1, n+1)$, $(A, B) = (n+1, 0)$, $(A, B) = (n+1, \alpha)$ et $(A, B) = (0, \alpha)$, s'écrivent

$$\begin{aligned}
\pi_{\alpha\overline{\beta}} + \pi_{\overline{\beta}\alpha} &= 0 \qquad (1 \leq \alpha, \beta \leq n)\,, \\
\pi_0^{n+1} - \overline{\pi_0^{n+1}} &= \pi_{n+1}^0 - \overline{\pi_{n+1}^0} = 0, \\
\overline{\pi_0^0} + \pi_{n+1}^{n+1} &= 0, \\
\frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\pi_\alpha^0} + \pi_{n+1}^\beta h_{\beta\overline{\alpha}} &= 0 \qquad (1 \leq \alpha \leq n)\,, \\
-\frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\pi_\alpha^{n+1}} + \pi_0^\beta h_{\beta\overline{\alpha}} &= 0 \qquad (1 \leq \beta \leq n)\,.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

La relation (1.39) est alors, compte tenu de la troisième de ces relations, équivalente à

$$\pi_\alpha^\alpha + \pi_0^0 - \overline{\pi_0^0} = 0. \tag{1.42}$$

En différentiant les relations (1.34), on obtient

$$0 = \left(\mathrm{d}\,\pi_A^B\right) Z_B - \pi_A^B \wedge \mathrm{d}\, Z_B,$$

d'où, en utilisant à nouveau (1.34),

$$\left(\mathrm{d}\,\pi_A^B\right) Z_B = \pi_A^C \wedge \pi_C^B Z_B.$$

On en déduit les *équations de structure* de $SU\,(p+1, q+1)$:

$$\mathrm{d}\,\pi_A^B = \pi_A^C \wedge \pi_C^B \qquad (0 \leq A, B \leq n+1)\,. \tag{1.43}$$

1.8 Chaînes

Rappelons que la sous-variété $\widetilde{Q}$ de $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ est l'ensemble des $[Z] \in \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ tels que

$$\langle Z, Z \rangle = 0,$$

où $Z = (\zeta^0, \ldots, \zeta^{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+2} \setminus \{0\}$ et

$$\langle Z, Z \rangle = h(\zeta^1, \ldots, \zeta^n) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\zeta^{n+1}\overline{\zeta^0} - \overline{\zeta^{n+1}}\zeta^0\right);$$

l'hyperquadrique réelle Q est alors la trace de $\widetilde{Q}$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$ identifié à un ouvert de $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ par

$$\left(z^1, \ldots, z^{n+1}\right) \mapsto \left[1, z^1, \ldots, z^{n+1}\right]. \tag{1.44}$$

Soient $z_0 \in Q$, $Z_0 = (1, z_0)$ et soit $[Z_0] \in \widetilde{Q}$ le point associé à z_0 par l'identification (1.44) ci-dessus. L'hyperquadrique Q est définie par

$$\phi(z) \equiv \langle (1, z)\,, (1, z) \rangle = 0;$$

son *espace tangent réel* $T_{z_0}Q$ en z_0 est l'ensemble des vecteurs liés (z_0, w) tels que

$$\mathrm{d}\,\phi(z_0)w = 0,$$

c'est-à-dire

$$\langle (0, w)\,, (1, z_0) \rangle + \langle (1, z_0)\,, (0, w) \rangle = 0.$$

Le *fibré tangent réel* de Q est donc

$$\begin{aligned} TQ &= \cup_z T_z Q \\ &= \left\{ (z, w) \in Q \times \mathbb{C}^{n+1} \,\middle|\, \langle (0, w)\,, (1, z_0) \rangle + \langle (1, z_0)\,, (0, w) \rangle = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Avec les mêmes notations, l'*hyperplan complexe* $H_{z_0}Q$ *tangent* en z_0 à Q est l'ensemble des vecteurs (z_0, w) tels que

$$\overline{\partial}\phi(z_0)w = 0,$$

c'est-à-dire

$$\langle (1, z_0)\,, (0, w) \rangle = 0.$$

Cette relation s'écrit encore

$$\langle Z_0, (0, w) \rangle = 0. \tag{1.45}$$

L'hyperplan complexe *affine* tangent en z_0 à Q est l'ensemble $\widetilde{H_{z_0}Q}$ des points $u = z_0 + w$, où $w \in H_{z_0}Q$. Comme $\langle Z_0, Z_0 \rangle = 0$, on voit que les points u de $\widetilde{H_{z_0}Q}$ sont caractérisés par

$$\langle Z_0, (1, u) \rangle = 0. \tag{1.46}$$

Le complété projectif de $\widetilde{H_{z_0}Q}$ pour l'identification $u \mapsto [(1, u)]$, qui sera encore noté $\widetilde{H_{z_0}Q}$, est alors l'ensemble des $[V] \in \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ tels que

$$\langle Z_0, V \rangle = 0. \tag{1.47}$$

Soit $(Z_0, \ldots, Z_{n+1})$ est une base adaptée à Q dont le premier vecteur est Z_0. Il résulte alors de la définition d'une base adaptée que V vérifie (1.47) si et seulement si V appartient à l'espace vectoriel engendré par $Z_0, \ldots, Z_n$. Il est équivalent de dire que $\widetilde{H_{z_0}Q}$ (comme hyperplan projectif de $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$) est engendré par $[Z_0]\,, \ldots, [Z_n]$.

Définition 1.1. *On appelle* chaîne *de Q (passant par le point $z_0 \in Q$) l'intersection de Q avec une droite complexe affine passant par z_0, transverse à l'hyperplan complexe tangent $\widetilde{H_{z_0}Q}$.*

Le théorème des fonctions implicites implique qu'une chaîne passant par z_0 est une courbe régulière (sous-variété réelle de dimension 1) de Q au voisinage de z_0.

Soit D une droite complexe affine passant par $z_0 \in Q$ et transverse à $H_{z_0}Q$. Ceci équivaut à

$$D = z_0 + \mathbb{C}w,$$

où $w \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $(z_0, w) \notin H_{z_0}Q$; on en déduit comme ci-dessus que $u = z_0 + w$ vérifie

$$\langle Z_0, (1, u)\rangle \neq 0. \tag{1.48}$$

Soit $u \in D \cap Q$, $u \neq z_0$ et soit $U = (1, u)$. En remplaçant U par un multiple complexe convenable, on a $\langle Z_0, U\rangle = -\mathrm{i}/2$; comme $u \in Q$, on a aussi $\langle U, U\rangle = 0$. L'orthogonal $\langle Z_0, U\rangle^{\perp}$ par rapport à $\langle\ ,\ \rangle$ est alors un supplémentaire de l'espace engendré par Z_0 et U ; en effet, si $X = \alpha Z_0 + \beta U$, on a $(X, Z_0) = \mathrm{i}\,\beta/2$ et $(X, U) = -\mathrm{i}\,\alpha/2$, donc $X \in \langle Z_0, U\rangle^{\perp}$ entraîne $X = 0$. Si $(Z_1, \ldots, Z_n)$ est une base orthonormale de $\langle Z_0, U\rangle^{\perp}$ pour $\langle\ ,\ \rangle$, $(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n, U)$ est alors une base adaptée à Q.

Pour toute droite complexe affine D passant par z_0 et transverse à $H_{z_0}Q$, il existe donc une base adaptée $(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n, Z_{n+1})$ telle que $[Z_0] = [(1, z_0)]$ et telle que $[Z_{n+1}]$ représente un point arbitraire $u \neq z_0$ de $D \cap Q$. Dans $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$, la complétée projective de D est la droite projective qui joint $[Z_0]$ à $[Z_{n+1}]$.

Dans ce cas, $(Z_{n+1}, Z_1, \ldots, Z_n, -Z_0)$ est également une base adaptée à Q ; ceci montre que la droite D, qui joint $[Z_{n+1}]$ à $[-Z_0] = [Z_0]$ est également transverse en u à l'hyperplan tangent complexe à Q.

2 Construction d'une forme normale

2.1 Préliminaires

On considère une hypersurface analytique-réelle M d'une variété analytique complexe X. Toute l'étude qui suit étant locale au voisinage d'un point $p \in M$, on se restreint au cas où $X = \mathbb{C}^{n+1}$ et $p = 0$.

Soit M une hypersurface analytique-réelle dans $\mathbb{C}^{n+1}$; M est alors définie au voisinage de $0 \in M$ par

$$U \cap M = \{z \in U \mid r(z) = 0\}, \tag{2.1}$$

où U est un voisinage ouvert de 0 et $r : U \to \mathbb{R}$ une fonction analytique-réelle, telle que

$$r(0) = 0, \quad \mathrm{d}\, r(0) \neq 0.$$

L'hyperplan tangent (réel) à M en 0 est alors

$$T_0(M) = \{\xi \mid \langle \mathrm{d}\, r(0), \xi \rangle = 0\}.$$

L'*hyperplan complexe tangent* à M en 0 est

$$H_0(M) = T_0(M) \cap \mathrm{i}\, T_0(M) = \{\xi \mid \langle \partial r(0), \xi \rangle = 0\}.$$

Soient $(z^1, ..., z^{n+1})$ les coordonnées canoniques dans $\mathbb{C}^{n+!}$; on note $z^{n+1} = w = u + \mathrm{i}\, v$. Les dérivées partielles de r sont notées

$$r_{z^\alpha} = \frac{\partial r}{\partial z^\alpha} \quad (1 \leq \alpha \leq n), \qquad r_{\overline{z^\alpha}} = \frac{\partial r}{\partial \overline{z^\alpha}} \quad (1 \leq \alpha \leq n),$$
$$r_w = \frac{\partial r}{\partial w}, \qquad r_{\overline{w}} = \frac{\partial r}{\partial \overline{w}}.$$

Comme r est à valeurs réelles, on a $r_{z^\alpha} = \overline{r_{\overline{z^\alpha}}}$ et $r_w = \overline{r_{\overline{w}}}$.

Par un changement unitaire de coordonnées, on peut supposer que l'hyperplan tangent à M en 0 est

$$T_0(M) = \left\{\xi \mid \operatorname{Im} \xi^{n+1} = 0\right\}. \tag{2.2}$$

Ceci équivaut à

$$r_{z^\alpha}(0) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, n), \qquad r_w(0) = -r_{\overline{w}}(0) \neq 0 \tag{2.3}$$

(la deuxième condition étant équivalente à $\frac{\partial r}{\partial u}(0) = 0$, $\frac{\partial r}{\partial v}(0) \neq 0$). On a dans ce cas

$$T_0(M) = \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \operatorname{Im} w = v = 0\right\},$$
$$H_0(M) = \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid w = 0\right\}.$$

Si M est définie au voisinage de 0 par (2.1) satisfaisant aux conditions (2.3), il résulte du théorème des fonctions implicites que M peut être définie au voisinage de 0 par

$$v = F(z, \overline{z}, u), \tag{2.4}$$

où F est une fonction analytique-réelle définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, à valeurs réelles, vérifiant

$$F(0,0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z^j}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u}(0,0) = 0. \tag{2.5}$$

Le développement de Taylor de F en 0 s'écrit

$$F(z, \overline{z}, u) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} a_{\alpha,\beta,\gamma} z^\alpha \overline{z}^\beta u^\gamma, \tag{2.6}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ sont des multi-indices, $\gamma \in \mathbb{N}$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$. Les conditions (2.5) sont équivalentes à

$$a_{0,0,0} = 0, \quad a_{\alpha,0,0} = 0 \quad \text{si } |\alpha| = 1, \quad a_{0,0,1} = 0, \tag{2.7}$$

où

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Pour que F soit à valeurs réelles, il faut et il suffit que

$$a_{\alpha,\beta,\gamma} = \overline{a_{\beta,\alpha,\gamma}} \tag{2.8}$$

quels que soient α, β, γ.

2.2 Groupes de transformations formelles

2.2.1

Soit $h : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ une transformation biholomorphe de $\mathbb{C}^{n+1}$ définie au voisinage de 0, telle que $h(0) = 0$; on note $h = (f, g)$, avec $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n$ et $g : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$.

On suppose comme ci-dessus

$$T_0\,(M) = \big\{(z,w) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \operatorname{Im} w = v = 0\big\}$$

et on note $h(M) = M^*$ l'hypersurface image de M par h. Soit $\begin{pmatrix} \zeta \\ \omega \end{pmatrix}$ ($\zeta \in \mathbb{C}^n$, $\omega \in \mathbb{C}$) un vecteur tangent en 0 ; son image par l'application tangente à h est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial z}(0) & \frac{\partial f}{\partial w}(0) \\ \frac{\partial g}{\partial z}(0) & \frac{\partial g}{\partial w}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \frac{\partial g}{\partial z}(0)\zeta + \frac{\partial g}{\partial w}(0)\omega \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs tangents à M^* en 0 sont les images des vecteurs tangents à M en 0.

L'hypersurface M^* a donc même hyperplan tangent complexe que M en 0 si

$$\frac{\partial g}{\partial z}\,(0,0) = 0; \tag{2.9}$$

elle a même hyperplan tangent réel $T_0 M^* = T_0 M$ que M si on a de plus

$$\frac{\partial g}{\partial w}(0,0) \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Si les deux conditions (2.9) et (2.10) sont vérifiées, l'hypersurface M^* peut être définie par l'équation

$$v^* = F^*\,(z^*, \overline{z}^*, u^*)$$

avec

$$z^* = f\,(z,w)\,,\;\; w^* = g\,(z,w) \tag{2.11}$$

et

$$v = F\,(z, \overline{z}, u)\,.$$

On cherche à simplifier F^* par un choix convenable de la transformation (2.11). On considère d'abord le cas où F, F^* sont des séries formelles. La définition suivante définit un espace de séries formelles qui ont les propriétés de l'équation de M.

Définition 2.1. *On désigne par $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel réel des séries formelles*

$$F\,(z, \overline{z}, u) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} a_{\alpha,\beta,\gamma} z^\alpha \overline{z}^\beta u^\gamma$$

vérifiant les conditions

$$\begin{aligned} a_{\alpha,\beta,\gamma} &= \overline{a_{\beta,\alpha,\gamma}} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,\;\gamma \in \mathbb{N})\,, \\ a_{\alpha,\beta,\gamma} &= 0 \qquad \text{si}\;\; |\alpha| + |\beta| + \gamma \le 1. \end{aligned}$$

2.2.2

On définit ci-dessous un groupe $\mathcal{G}$ de transformations formelles qui conservent les éléments de $\mathcal{F}$. La définition de [3] a été complétée de manière à assurer la conservation de l'hyperplan tangent réel (condition $b_{01} \in \mathbb{R}$) et l'inversibilité (condition (2.13)).

Définition 2.2. *On désigne par $\mathcal{G}$ l'ensemble des transformations formelles $h = (f, g)$, avec*

$$f\,(z, w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n,\ \lambda \in \mathbb{N}} a_{\alpha\lambda} z^\alpha w^\lambda,$$
$$g\,(z, w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n,\ \lambda \in \mathbb{N}} b_{\alpha\lambda} z^\alpha w^\lambda,$$

où $a_{\alpha\lambda} \in \mathbb{C}^n$, $b_{\alpha\lambda} \in \mathbb{C}$ vérifiant

$$a_{00} = 0, \tag{2.12a}$$

$$b_{00} = 0, \tag{2.12b}$$

$$b_{\alpha 0} = 0 \qquad \text{si } |\alpha| = 1, \tag{2.12c}$$

$$b_{01} \in \mathbb{R} \tag{2.12d}$$

et

$$b_{01} \det C \neq 0. \tag{2.13}$$

Ici C désigne la « partie linéaire en z » de f, définie par

$$Cz = \sum_{|\alpha|=1} a_{\alpha 0} z^\alpha.$$

On munit $\mathcal{G}$ de la loi de composition $\circ$ des applications formelles (qui est définie parce que les éléments de $\mathcal{G}$ sont « sans terme constant »).

Lemme 2.1. $(\mathcal{G}, \circ)$ *est un groupe.*

La condition (2.13) assure l'inversibilité des éléments de $\mathcal{G}$.

2.2.3

Définition 2.3. *Soit P un polynôme réel en z, $\overline{z}$, u. On dit que P est* semi-homogène de poids ν *si*

$$P\left(tz, t\overline{z}, t^2 u\right) = t^{\nu} P\left(z, \overline{z}, u\right)$$

pour tout $t > 0$.

Cette définition attribue à u le poids 2 et à z, $\overline{z}$ le poids 1. Un polynôme de poids ν s'écrit

$$P\left(z, \overline{z}, u\right) = \sum_{|\alpha|+|\beta|+2\gamma=\nu} a_{\alpha\beta\gamma} z^{\alpha} \overline{z}^{\beta} u^{\gamma},$$

avec $a_{\alpha,\beta,\gamma} = \overline{a_{\beta,\alpha,\gamma}}$ quels que soient α, β, γ.

Une série formelle réelle $F\left(z, \overline{z}, u\right)$ se décompose de manière unique sous la forme

$$F\left(z, \overline{z}, u\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_{\nu}\left(z, \overline{z}, u\right),$$

où F_{ν} est semi-homogène de poids ν.

Si $F \in \mathcal{F}$, on a $F_0 = 0$ car F est sans terme constant, et $F_1 = 0$ car F est sans terme linéaire en z, $\overline{z}$. La composante de poids 2 comprend le terme linéaire en u (qui est nul) et les termes homogènes de degré 2 en z, $\overline{z}$; comme F_2 est réel, on a

$$F_2\left(z, \overline{z}, u\right) = Q\left(z\right) + \overline{Q\left(z\right)} + H\left(z, z\right),$$

où $Q\left(z\right)$ est une forme quadratique complexe en z et $H\left(z, z\right)$ une forme hermitienne.

Proposition 2.2. *Soit $F \in \mathcal{F}$, avec*

$$F_2\left(z, \overline{z}, u\right) = Q\left(z\right) + \overline{Q\left(z\right)} + H\left(z, z\right).$$

On considère la transformation

$$\begin{aligned} z^* &= f(z, w) = z, \\ w^* &= g(z, w) = w - 2\,\mathrm{i}\, Q\left(z\right). \end{aligned}$$

Alors

$$v = F(z, \overline{z}, u)$$

équivaut à

$$v^* = F^*(z, \overline{z}, u^*)$$

avec

$$F_2^*(z, \overline{z}, u^*) = H(z, z).$$

Démonstration. En effet, on a

$$\begin{aligned} u^* &= u + 2\,\mathrm{Im}\, Q(z), \\ v^* &= v - 2\,\mathrm{Re}\, Q(z). \end{aligned}$$

La relation $v = F(z, \overline{z}, u)$ équivaut donc à

$$\begin{aligned} v^* = \sum_{\nu=2}^{\infty} F_\nu(z, \overline{z}, u) - Q(z) - \overline{Q(z)} \\ = F^*(z, \overline{z}, u^*), \end{aligned}$$

avec

$$F^*(z, \overline{z}, u^*) = H(z, z) + \sum_{\nu=3}^{\infty} F_\nu(z, \overline{z}, u^* - 2\,\mathrm{Im}\, Q(z)).$$

Comme chacun des $F_\nu(z, \overline{z}, u^* - 2\,\mathrm{Im}\, Q(z))$ se décompose en polynômes semi-homogènes de poids au moins égal à 3, on a

$$F_2^*(z, \overline{z}, u^*) = H(z, z).$$

□

On vérifie facilement que la transformation utilisée dans cette proposition est un élément de $\mathcal{G}$.

2.2.4

On suppose désormais que l'équation de M s'écrit

$$v = H(z, z) + \sum_{\nu=3}^{\infty} F_\nu(z, \overline{z}, u),$$

avec H hermitienne. On suppose de plus que H est *non dégénérée* et on note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire hermitien associé à H. L'équation de M sera écrite

$$v = \langle z, z\rangle + F\left(z, \overline{z}, u\right), \tag{2.14}$$

avec

$$F\left(z, \overline{z}, u\right) = \sum_{\nu=3}^{\infty} F_\nu\left(z, \overline{z}, u\right)$$

ne contenant que des termes de poids au moins égal à 3.

Soit $h = (f, g)$ une transformation holomorphe formelle. On écrit

$$z^* = f(z, w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu\left(z, w\right),$$

$$w^* = g(z, w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu\left(z, w\right),$$

où f_ν, g_ν sont les composantes de poids ν de f, g (poids 1 pour z, poids 2 pour w). Si $h \in \mathcal{G}$, on a $f_0 = 0$, $g_0 = 0$; la condition (2.12c) s'écrit $g_1 = 0$. La composante f_1 est la partie linéaire en z de f et doit être inversible ; la composante g_2 est

$$g_2(z, w) = b_{01}w + \phi(z),$$

avec $b_{01} \in \mathbb{R}$ non nul et ϕ homogène de degré 2. Les éléments (f, g) de $\mathcal{G}$ s'écrivent donc

$$f(z, w) = Cz + \sum_{\nu=2}^{\infty} f_\nu\left(z, w\right), \tag{2.15a}$$

$$g(z, w) = \rho w + \phi(z) + \sum_{\nu=3}^{\infty} g_\nu\left(z, w\right), \tag{2.15b}$$

avec C linéaire inversible, ρ réel non nul et ϕ quadratique.

Définition 2.4. *On désigne par $\mathcal{G}_1$ le groupe des transformations formelles $h = (f, g) \in \mathcal{G}$ qui transforment une relation*

$$v =< z, z > + \sum_{\nu=3}^{\infty} F_\nu\left(z, \overline{z}, u\right)$$

en une relation de la forme

$$v^* =< z^*, z^* > + \sum_{\nu=3}^{\infty} F^*_\nu\left(z^*, \overline{z^*}, u^*\right).$$

Proposition 2.3. *Les éléments de $\mathcal{G}_1$ sont les transformations formelles*

$$z^* = Cz + \sum_{\nu=2}^{\infty} f_\nu (z, w), \tag{2.16a}$$

$$w^* = \rho w + \sum_{\nu=3}^{\infty} g_\nu (z, w) \tag{2.16b}$$

telles que $\rho > 0$ *et* $\langle Cz, Cz \rangle \equiv \rho \langle z, z \rangle$.

Démonstration. La transformation $h = (f, g)$ étant écrite sous la forme (2.15a)-(2.15b), on a

$$\begin{aligned} & v^* - < z^*, z^* > \\ &= \rho v + \operatorname{Im} \phi(z) + \operatorname{Im} \sum_{\nu=3}^{\infty} g_\nu (z, w) - < Cz + \sum_{\nu=2}^{\infty} f_\nu (z, w), Cz + \sum_{\nu=2}^{\infty} f_\nu (z, w) > \\ &= \rho < z, z > + \rho \sum_{\nu=3}^{\infty} F_\nu (z, \overline{z}, u) + \operatorname{Im} \phi(z) + \operatorname{Im} \sum_{\nu=3}^{\infty} g_\nu (z, w) \\ &\quad - < Cz + \sum_{\nu=2}^{\infty} f_\nu (z, w), Cz + \sum_{\nu=2}^{\infty} f_\nu (z, w) > . \end{aligned}$$

Les termes de poids ≤ 2 du dernier membre sont

$$\rho < z, z > + \operatorname{Im} \phi(z) - < Cz, Cz >;$$

leur somme est nulle si et seulement si $\phi = 0$ et $\langle Cz, Cz \rangle \equiv \rho \langle z, z \rangle$. $\square$

Soit h un élément de $\mathcal{G}_1$, écrit sous la forme (2.16a)-(2.16b). Soit $h^0 = (f^0, g^0)$ la transformation définie par

$$f^0 (z, w) = Cz, \quad g^0(z, w) = \rho w.$$

Alors $h^0 \in \mathcal{G}_1$ et $h \left(h^0\right)^{-1}$ est une transformation de la forme

$$z^* = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} f_\nu (z, w), \quad w^* = w + \sum_{\nu=3}^{\infty} g_\nu (z, w).$$

Définition 2.5. *On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des transformations*

$$z^* = Cz, \quad w^* = \rho w, \tag{2.17}$$

où C est linéaire et vérifie $\langle Cz, Cz \rangle \equiv \rho \langle z, z \rangle$, par $\mathcal{V}$ l'espace vectoriel des couples (f, g) de séries formelles

$$f(z, w) = \sum_{\nu=2}^{\infty} f_\nu (z, w),$$
$$g(z, w) = \sum_{\nu=3}^{\infty} g_\nu (z, w)$$

(où $f_\nu : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n$ et $g_\nu : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ sont polynomiales de poids ν) et par $\widetilde{\mathcal{G}}_1$ l'ensemble des transformations

$$z^* = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} f_\nu (z, w), \quad w^* = w + \sum_{\nu=3}^{\infty} g_\nu (z, w). \tag{2.18}$$

On a immédiatement

Lemme 2.4. *Tout élément de $\mathcal{G}_1$ est le produit d'un élément de $\widetilde{\mathcal{G}}_1$ et d'un élément de $\mathcal{H}$; $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}_1$, $\widetilde{\mathcal{G}}_1$ un sous-groupe distingué de $\mathcal{G}_1$ et on a $\mathcal{G}_1 / \widetilde{\mathcal{G}}_1 \simeq \mathcal{H}$.*

2.2.5

Soit $(f, g) \in \mathcal{V}$. Les termes de plus bas poids de f et g s'écrivent

$$\begin{aligned} f_2 (z, w) &= q(z) + bw, \\ g_3 (z, w) &= a_3(z) + a_1(z)w, \\ g_4 (z, w) &= a_4(z) + a_2(z)w + a_0 w^2, \end{aligned}$$

où q est quadratique, $b \in \mathbb{C}^n$, $a_0 \in \mathbb{C}$ et où a_1, a_2, a_3, a_4 sont polynomiales homogènes du degré indiqué par l'indice.

Définition 2.6. *On désigne par $\mathcal{V}_0$ l'espace des séries formelles $h = (f, g) \in \mathcal{V}$ qui vérifient*

$$f_2 (0, w) = 0, \quad \operatorname{Re} \frac{\partial^2}{\partial w^2} g_4 = 0. \tag{2.19}$$

Cette condition équivaut à $b=0$, $\operatorname{Re} a_0 = 0$.

Un couple (f,g) de séries formelles appartient à $\mathcal{V}_0$ si et seulement si les séries formelles

$$f, \quad \frac{\partial f}{\partial z^\alpha}, \quad \frac{\partial f}{\partial w}, \quad g, \quad \frac{\partial g}{\partial z^\alpha}, \quad \frac{\partial g}{\partial w}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial z^\alpha \partial z^\beta}, \quad \operatorname{Re} \frac{\partial^2 g}{\partial w^2}$$

s'annulent en 0 (i.e. sont sans terme constants). Les éléments de $\mathcal{V}_0$ s'écrivent

$$\begin{aligned} f(z,w) &= q(z) + \sum_{\nu=3}^{\infty} f_\nu(z,w), \\ g(z,w) &= (a_3(z) + a_1(z)w) + \left(a_4(z) + a_2(z)w + a_0 w^2\right) + \sum_{\nu=5}^{\infty} g_\nu(z,w), \end{aligned}$$

où q est quadratique, $\operatorname{Re} a_0 = 0$ et où a_1, a_2, a_3, a_4 sont polynomiales homogènes du degré indiqué par l'indice.

Lemme 2.5. *Les transformations formelles*

$$\begin{aligned} z^* &= z + f(z,w), \\ w^* &= w + g(z,w) \end{aligned}$$

telles que $(f,g) \in \mathcal{V}_0$ *forment un sous-groupe distingué* $\mathcal{G}_0$ *de* $\widetilde{\mathcal{G}}_1$.

La bijection entre $\mathcal{V}_0$ et $\mathcal{G}_0$ définit alors une structure de groupe sur $\mathcal{V}_0$.

Démonstration. Soient (f,g) et (F,G) deux éléments de $\mathcal{V}$ et soient u, U les transformations correspondantes :

$$\begin{aligned} z^* &= z + f(z,w), \quad & w^* &= w + g(z,w), \\ z^{**} &= z^* + F(z^*, w^*), \quad & w^{**} &= w^* + G(z^*, w^*). \end{aligned}$$

La transformation composée $U \circ u$ est donnée par

$$\begin{aligned} z^{**} &= z + f(z,w) + F(z + f(z,w), w + g(z,w)), \\ w^{**} &= w + g(z,w) + G(z + f(z,w), w + g(z,w)) \end{aligned}$$

et correspond donc au couple (ϕ, ψ) de séries formelles défini par

$$\begin{aligned} \phi(z,w) &= f(z,w) + F(z + f(z,w), w + g(z,w)), \\ \psi(z,w) &= g(z,w) + G(z + f(z,w), w + g(z,w)). \end{aligned}$$

Les termes de plus bas poids de ces deux séries sont

$$\begin{aligned}\phi_2(z,w) &= f_2(z,w) + F_2(z,w)\,,\\ \psi_3(z,w) &= g_3(z,w) + G_3(z,w),\\ \psi_4(z,w) &= g_4(z,w) + G_4(z,w) + \mathrm{d}\,A_3(z).f_2(z,w)\\ &\quad + A_1(f_2(z,w))\,w + A_1(z)g_3(z,w)\,,\end{aligned}$$

si

$$G_3(z,w) = A_3(z) + A_1(z)w.$$

En particulier,

$$\begin{aligned}\phi_2(0,w) &= f_2(0,w) + F_2(0,w)\,,\\ \frac{\partial^2}{\partial w^2}\psi_4(z,w) &= \frac{\partial^2}{\partial w^2}g_4(z,w) + \frac{\partial^2}{\partial w^2}G_4(z,w).\end{aligned}$$

Autrement dit, l'application

$$\widetilde{\mathcal{G}}_1 \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$$

qui, à l'élément de $\widetilde{\mathcal{G}}_1$ défini par

$$\begin{aligned}z^* &= z + f(z,w)\,,\\ w^* &= w + g(z,w)\,,\end{aligned}$$

associe

$$\left(f_2(0,1)\,,\mathrm{Re}\,\frac{\partial^2}{\partial w^2}g_4(0,0)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial w}(0,0)\,,\mathrm{Re}\,\frac{\partial^2 g}{\partial w^2}(0,0)\right),$$

est un *homomorphisme de groupes*. Son noyau est $\mathcal{G}_0$, qui est donc un sous-groupe distingué de $\widetilde{\mathcal{G}}_1$. □

2.3 Image d'une hypersurface par une transformation formelle

Soit M une « hypersurface formelle » définie par la relation

$$\mathrm{Im}\,w =< z,z > +F(z,\overline{z},\mathrm{Re}\,w)\,, \tag{2.20}$$

où F est une série formelle

$$F(z,\overline{z},u)=\sum_{\nu=3}^{\infty}F_\nu(z,\overline{z},u).$$

Soit M^* définie par

$$\operatorname{Im}w^* =< z^*,z^* > +F^*\left(z^*,\overline{z^*},\operatorname{Re}w^*\right), \tag{2.21}$$

avec

$$F^*(z,\overline{z},u)=\sum_{\nu=3}^{\infty}F^*_\nu(z,\overline{z},u).$$

Soit (f,g) :

$$z^*=z+\sum_{\nu=2}^{\infty}f_\nu(z,w), \quad w^*=w+\sum_{\nu=3}^{\infty}g_\nu(z,w)$$

un élément de $\widetilde{\mathcal{G}}_1$. On désire écrire les conditions pour que (f,g) transforme la relation (2.20) en (2.21) ; on dira alors que (f,g) est une transformation formelle de M en M^*.

On doit donc avoir

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}w &=< z,z > +2\operatorname{Re}\left\langle z,\widetilde{f}(z,w)\right\rangle-\operatorname{Im}\widetilde{g}(z,w)\\ &\quad+\left\langle\widetilde{f}(z,w),\widetilde{f}(z,w)\right\rangle+F^*\left(z+\widetilde{f}(z,w),\overline{z+\widetilde{f}(z,w)},\operatorname{Re}(w+\widetilde{g}(z,w))\right),\end{aligned}$$

avec

$$\widetilde{f}(z,w)=f(z,w)-z=\sum_{\nu=2}^{\infty}f_\nu(z,w), \tag{2.22a}$$

$$\widetilde{g}(z,w)=g(z,w)-w=\sum_{\nu=3}^{\infty}g_\nu(z,w), \tag{2.22b}$$

sous la condition $\operatorname{Im}w =< z,z > +F$. On obtient ainsi la condition

$$\begin{aligned}&F(z,\overline{z},u)+\operatorname{Im}\widetilde{g}(z,w)\\ &=\left\langle z,\widetilde{f}(z,w)\right\rangle+\left\langle\widetilde{f}(z,w),z\right\rangle+\left\langle\widetilde{f}(z,w),\widetilde{f}(z,w)\right\rangle\\ &+F^*\left(z+\widetilde{f}(z,w),\overline{z}+\overline{\widetilde{f}(z,w)},u+\operatorname{Re}\widetilde{g}(z,w)\right),\end{aligned} \tag{2.23}$$

où w doit être remplacé par

$$u+\mathrm{i}<z,z>+\mathrm{i}\sum_{\nu=3}^{\infty}F_{\nu}\left(z,\overline{z},u\right) \tag{2.24}$$

dans tous les termes du premier et du second membre.

On décompose l'égalité (2.23) suivant les poids en $(z,\overline{z},u)$. L'égalité des termes de poids 3 s'écrit

$$\begin{aligned}&F_3\left(z,\overline{z},u\right)+\operatorname{Im}g_3\left(z,u+\mathrm{i}<z,z>\right)\\&=2\operatorname{Re}\left\langle z,f_2\left(z,u+\mathrm{i}<z,z>\right)\right\rangle+F_3^*\left(z,\overline{z},u\right).\end{aligned}$$

L'égalité des termes de poids 4 donne

$$\begin{aligned}&F_4\left(z,\overline{z},u\right)+\operatorname{Im}g_4\left(z,u+\mathrm{i}<z,z>\right)\\&+\left\{\text{termes provenant de }\operatorname{Im}g_3(z,w)\right\}\\&=2\operatorname{Re}\left\langle z,f_3\left(z,u+\mathrm{i}<z,z>\right)\right\rangle+F_4^*\left(z,\overline{z},u\right)\\&+\left\{\text{termes provenant de }2\operatorname{Re}\left\langle z,f_2\left(z,w\right)\right\rangle\right\}\\&+\left\{\text{termes provenant de }F_3^*\left(z^*,\overline{z^*},\operatorname{Re}w^*\right)\right\}.\end{aligned}$$

Plus généralement, l'égalité des termes de poids μ dans (2.23) s'écrit

$$\begin{aligned}&F_\mu\left(z,\overline{z},u\right)+\operatorname{Im}g_\mu\left(z,u+\mathrm{i}<z,z>\right)\\&+\left\{\text{termes provenant de }\operatorname{Im}g_\nu(z,w)\qquad(\nu<\mu)\right\}\\&=2\operatorname{Re}\left\langle z,f_{\mu-1}\left(z,u+\mathrm{i}<z,z>\right)\right\rangle+F_\mu^*\left(z,\overline{z},u\right)\\&+\left\{\text{termes provenant de }2\operatorname{Re}\left\langle z,f_{\nu-1}\left(z,w\right)\right\rangle\qquad(\nu<\mu)\right\}\\&+\left\{\text{termes provenant de }\left\langle f_\lambda\left(z,w\right),f_\nu\left(z,w\right)\right\rangle\qquad(\lambda+\nu<\mu)\right\}\\&+\left\{\text{termes provenant de }F_\nu^*\left(z^*,\overline{z^*},\operatorname{Re}w^*\right)\qquad(\nu<\mu)\right\}.\end{aligned}$$

Cette relation s'écrit encore

$$\begin{aligned}&2\operatorname{Re}\left\langle z,f_{\mu-1}\left(z,u+\mathrm{i}<z,z>\right)\right\rangle-\operatorname{Im}g_\mu\left(z,u+\mathrm{i}<z,z>\right)\\&=F_\mu\left(z,\overline{z},u\right)-F_\mu^*\left(z,\overline{z},u\right)+A_\mu\left(z,\overline{z},u\right),\end{aligned} \tag{2.25}$$

où $A_\mu\left(z,\overline{z},u\right)$ est la composante de poids μ de

$$\operatorname{Im}\sum_{\nu<\mu}g_\nu(z,w)-2\operatorname{Re}\sum_{\nu<\mu}\left\langle z,f_{\nu-1}\left(z,w\right)\right\rangle-\sum_{\lambda+\nu<\mu}\left\langle f_\lambda\left(z,w\right),f_\nu\left(z,w\right)\right\rangle$$

$$-\sum_{\nu<\mu} F_\nu^* \left(z + \sum_{j<\mu-2} f_j(z,w), \overline{z + \sum_{k<\mu-2} f_k(z,w)}, u + \mathrm{Re} \sum_{l<\mu-1} g_l(z,w) \right)$$

après la substitution

$$w = u + \mathrm{i} < z, z > + \mathrm{i} \sum_{\nu=3}^{\infty} F_\nu \left(z, \overline{z}, u\right).$$

La fonction A_μ est déterminée par $\{(f_{\nu-1}, g_\nu, F_\nu, F_\nu^*) \,; \nu < \mu\}$.

Définition 2.7. *Soit $(f,g) \in \mathcal{V}$ (définition 2.5) ; on définit $L(f,g)$ par*

$$L\left(f,g\right) = \mathrm{Re}\left(2\left\langle z,f\right\rangle + \mathrm{i}\,g\right)\big|_{w=u+\mathrm{i}<z,z>}. \tag{2.26}$$

On désigne par L_0 la restriction de L à $\mathcal{V}_0$.

Un élément (f,g) de $\mathcal{V}$ s'écrit

$$(f,g) = \sum_{\mu=3}^{\infty} \left(f_{\mu-1}, g_\mu\right),$$

où $f_\nu : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n$ et $g_\nu : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ sont polynomiales de poids ν ; $L\left(f_{\mu-1}, g_\mu\right)$ est semi-homogène de poids μ en $(z, \overline{z}, u)$. La relation (2.26) définit ainsi une application linéaire

$$L : \mathcal{V} \to \mathcal{F}_3,$$

où $\mathcal{F}_3$ est l'espace vectoriel des séries réelles en $(z, \overline{z}, u)$

$$F = \sum_{\mu=3}^{\infty} F_\mu$$

dont tous les termes sont de poids au moins égal à 3.

Avec ces définitions, le système d'équations (2.25) équivaut à

$$L\left(f_{\mu-1}, g_\mu\right) = F_\mu\left(z,\overline{z},u\right) - F_\mu^*\left(z,\overline{z},u\right) + A_\mu\left(z,\overline{z},u\right). \tag{2.27}$$

La résolution de l'équation (2.23) par rapport à (f,g) est ainsi ramenée à la détermination par récurrence de $(f_{\mu-1}, g_\mu)$ $(\mu \geq 3)$.

2.4 Contraction par rapport à la forme hermitienne h

On décompose un élément F de $\mathcal{F}$ en termes homogènes de bidegré (k,l) en $(z,\bar{z})$

$$F = \sum_{k,l\geq 0} F_{kl},$$

avec

$$F_{kl}\left(\lambda z, \mu \overline{z}, u\right) = \lambda^k \overline{\mu}^l F_{kl}\left(z, \overline{z}, u\right) \qquad \left(\lambda, \mu \in \mathbb{C}\right).$$

La composante F_{kl} de type (k,l) s'écrit

$$F_{kl} = \sum a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_l}} z^{\alpha_1} \ldots z^{\alpha_k} \overline{z^{\beta_1}} \ldots \overline{z^{\beta_l}}, \tag{2.28}$$

où les coefficients $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_l}}$ sont des séries formelles en u, symétriques par rapport aux indices $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ et $(\beta_1, ..., \beta_l)$.

Soit $\mathcal{F}_{kl}$ l'espace vectoriel des séries formelles de la forme (8.1). Si $V = \mathbb{C}^n$, on considère un élément $F \in \mathcal{F}_{kl}$ comme un polynôme réel de type (k,l) sur V à valeurs dans l'anneau $\mathbb{C}[[u]]$ des séries formelles en u :

$$F : V \to \mathbb{C}[[u]].$$

On note $\overline{V}$ l'espace vectoriel conjugué de V, $\otimes_k V$ la puissance tensorielle d'ordre k de V, $\odot_k V$ la puissance tensorielle symétrique d'ordre k de V, $\otimes^k V = \otimes_k V^*$, $\odot^k V = \odot_k V^*$. L'espace $\mathcal{F}_{kl}$ est naturellement isomorphe à l'espace des applications $\mathbb{C}$-linéaires

$$\widetilde{F} : (\odot_k V) \otimes \left(\odot_l \overline{V}\right) \to \mathbb{C}[[u]],$$

par la correspondance $F \leftrightarrow \widetilde{F}$, où

$$F(z) = \widetilde{F}(\underbrace{z \odot \cdots \odot z}_{k \text{ fois}} \otimes \underbrace{z \odot \cdots \odot z}_{l \text{ fois}}).$$

À $\widetilde{F}$, appelé *forme polaire* de F, on associe par la dualité du produit tensoriel et par la dualité du produit tensoriel symétrique un élément

$$\widehat{F} \in \mathbb{C}[[u]] \otimes \left(\odot^k V\right) \otimes \left(\odot^l \overline{V}\right).$$

2.4.1

Soit $h : V \to \mathbb{R}$,

$$h(z) = \sum_{\alpha,\overline{\beta}} h_{\alpha\overline{\beta}} z^{\alpha} \overline{z^{\beta}}$$

une forme hermitienne *non dégénérée* sur $V = \mathbb{C}^n$. On désigne également par h le produit scalaire hermitien associé $h : V \times \overline{V} \to \mathbb{C}$,

$$h(z,t) = \sum_{\alpha,\overline{\beta}} h_{\alpha\overline{\beta}} z^{\alpha} \overline{t^{\beta}}.$$

Comme h est non dégénérée, elle définit un isomorphisme

$$\begin{aligned} \alpha : V &\to \overline{V}^* \\ z &\mapsto \alpha(z) \end{aligned}$$

où $\alpha(z)$ est caractérisé par

$$\langle t, \alpha(z) \rangle = h\,(z,t) \qquad \left(t \in \overline{V}\right)$$

(ici $\langle\ ,\ \rangle$ désigne l'accouplement canonique entre un espace vectoriel et son dual). Le transposé de cet isomorphisme est l'isomorphisme conjugué

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} : \overline{V} &\to V^* \\ z &\mapsto \overline{\alpha(z)}. \end{aligned}$$

On désigne par $\beta = a^{-1} : \overline{V}^* \to V$ et $\overline{\beta} = \overline{a}^{-1} : V^* \to \overline{V}$ les isomorphismes inverses, caractérisés par

$$\langle t, u \rangle = h\,(\beta(u), t) \qquad \left(t \in \overline{V}\right).$$

Si $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $V = \mathbb{C}^n$, $(e^1, \ldots, e^n)$ la base duale de V^*, $\left(\overline{e^1}, \ldots, \overline{e^n}\right)$ la base duale de $\overline{V}^*$, on a

$$\alpha\,(e_i) = \sum_j h_{i\overline{j}} \overline{e^j}.$$

Si $\left(h^{k\overline{l}}\right)$ est la matrice inverse de $\left(\overline{h_{i\overline{j}}}\right) = \left(h_{j\overline{i}}\right)$ (au sens $\sum_j h^{k\overline{j}} h_{i\overline{j}} = \delta_i^k$), on a

$$\beta\left(\overline{e^k}\right) = \sum_i h^{i\overline{k}} e_i. \tag{2.29}$$

Par les isomorphismes α, $\overline{\alpha}$ on transporte h en une application bilinéaire

$$\theta : V^* \times \overline{V}^* \to \mathbb{C},$$

définie par

$$\theta\,(u,v) = h\left(\beta(v), \overline{\beta}(u)\right) = \left\langle \overline{\beta}(u), v \right\rangle = \left\langle u, \beta(v) \right\rangle.$$

On définit ainsi une forme hermitienne θ sur V^*, dont la matrice dans la base $(e^1, \ldots, e^n)$ de V^* est $\left(h^{k\bar{l}}\right)$.

2.4.2

L'application θ se factorise en $\theta = \mathrm{tr}_h \circ \otimes$, où $\otimes : V^* \times \overline{V}^* \to V^* \otimes \overline{V}^*$ est l'application canonique du produit tensoriel. L'application

$$\mathrm{tr} = \mathrm{tr}_h : V^* \otimes \overline{V}^* \to \mathbb{C}$$

est appelée *trace* ou *contraction par rapport à la forme hermitienne h.*

Pour $k, l \geq 1$, on définit

$$\mathrm{tr} = \mathrm{tr}_h : \mathbb{C}[[u]] \otimes \left(\otimes^k V\right) \otimes \left(\otimes^l \overline{V}\right) \to \mathbb{C}[[u]] \otimes \left(\otimes^{k-1} V\right) \otimes \left(\otimes^{l-1} \overline{V}\right)$$

par

$$\mathrm{tr}\left(a \otimes f^1 \otimes \cdots \otimes f^k \otimes g^1 \otimes \cdots \otimes g^l\right) = \theta\left(f^1, g^1\right) a \otimes f^2 \otimes \cdots \otimes f^k \otimes g^2 \otimes \cdots \otimes g^l.$$

Cette application se restreint en une application

$$\mathrm{tr} = \mathrm{tr}_h : \mathbb{C}[[u]] \otimes \left(\odot^k V\right) \otimes \left(\odot^l \overline{V}\right) \to \mathbb{C}[[u]] \otimes \left(\odot^{k-1} V\right) \otimes \left(\odot^{l-1} \overline{V}\right).$$

Par l'isomorphisme $F \leftrightarrow \widehat{F}$,

$$\mathcal{F}_{kl} \simeq \mathbb{C}[[u]] \otimes \left(\odot^k V\right) \otimes \left(\odot^l \overline{V}\right),$$

on en déduit l'application de *contraction des polynômes par rapport à h* :

$$\mathrm{tr} = \mathrm{tr}_h : \mathcal{F}_{kl} \to \mathcal{F}_{k-1,l-1}.$$

Si $F \in \mathcal{F}_{kl}$ s'écrit

$$F_{kl} = \sum a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_l}} z^{\alpha_1} \ldots z^{\alpha_k} \overline{z^{\beta_1}} \ldots \overline{z^{\beta_l}},$$

où les coefficients $a_{\alpha_1\ldots\alpha_k\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_l}}$ sont des séries formelles en u, symétriques par rapport aux indices $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ et $(\beta_1, ..., \beta_l)$, on a

$$\operatorname{tr} F = \sum b_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{l-1}}} z^{\alpha_1} \ldots z^{\alpha_{k-1}} \overline{z^{\beta_1}} \ldots \overline{z^{\beta_{l-1}}},$$

avec

$$b_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_{l-1}}} = \sum_{\alpha_k,\beta_l} h^{\alpha_k\overline{\beta_l}} a_{\alpha_1\ldots\alpha_k\overline{\beta_1}\ldots\overline{\beta_l}}.$$

2.4.3 Propriétés de la contraction

Proposition 2.6. *Soit h une forme hermitienne sur $V = \mathbb{C}^n$ et soient* $\operatorname{tr} : \mathcal{F}_{kl} \to \mathcal{F}_{k-1,l-1}$ *les applications de contraction par rapport à h.*

1.
$$\operatorname{tr} h = n = \dim V. \tag{2.30}$$

2. Si $F \in \mathcal{F}_{11}$,
$$\operatorname{tr}(hF) = \frac{n+2}{4} F + \frac{1}{4} (\operatorname{tr} F)\, h. \tag{2.31}$$

3.
$$\operatorname{tr}\left(h^2\right) = \frac{n+1}{2} h, \tag{2.32}$$
$$\operatorname{tr}^2\left(h^2\right) = \tfrac{n(n+1)}{2}. \tag{2.33}$$

4. Si $F \in \mathcal{F}_{22}$,
$$\operatorname{tr}(hF) = \frac{n+4}{9} F + \frac{4}{9} h \operatorname{tr} F. \tag{2.34}$$

5.
$$\operatorname{tr}\left(h^3\right) = \frac{n+2}{3} h^2, \tag{2.35}$$
$$\operatorname{tr}^2\left(h^3\right) = \tfrac{(n+1)(n+2)}{6} h, \tag{2.36}$$
$$\operatorname{tr}^3\left(h^3\right) = \tfrac{n(n+1)(n+2)}{6}. \tag{2.37}$$

6. Si $F \in \mathcal{F}_{10}$,
$$\operatorname{tr}(hF) = \frac{n+1}{2} F. \tag{2.38}$$

7. *Si* $F \in \mathcal{F}_{21}$,
$$\operatorname{tr}(hF) = \frac{n+3}{6}F + \frac{1}{3}(\operatorname{tr} F)\, h. \tag{2.39}$$
8. *Si* $F \in \mathcal{F}_{10}$,
$$\operatorname{tr}\left(h^2 F\right) = \frac{n+2}{3} hF, \tag{2.40}$$
$$\operatorname{tr}^2\left(h^2 F\right) = \tfrac{(n+1)(n+2)}{6} F. \tag{2.41}$$

Démonstration. L'isomorphisme $F \leftrightarrow \widehat{F}$ entre $\mathcal{F}_{kl}$ et $\mathbb{C}[[u]] \otimes \left(\odot^k V\right) \otimes \left(\odot^l \overline{V}\right)$ transforme le produit de polynômes en produit tensoriel et produit symétrique de tenseurs (dans $\odot^k V$ et $\odot^l \overline{V}$). Il suffit donc de démontrer les relations (2.30)-(6.18) transposées dans $\left(\odot^k V\right) \otimes \left(\odot^l \overline{V}\right)$. On utilisera les bases $(e^1, \ldots, e^n)$ de V^* et
$$(e_1^*, \ldots, e_n^*) = (\alpha(e_1), \ldots, \alpha(e_n))$$
de $\overline{V}^*$. On a
$$\operatorname{tr}(u \otimes \alpha(z)) = \theta(u, \alpha(z)) = \langle u, z \rangle$$
et
$$\operatorname{tr}\left(e^i \otimes e_j^*\right) = \delta_j^i$$
(i.e., les bases $(e^1, \ldots, e^n)$ et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sont duales par rapport à θ).

1. On a
$$\widehat{h} = \sum_{i,j} h_{i\bar{j}} e^i \otimes \overline{e^j} = \sum_{i,j} e^i \otimes e_j^*,$$
d'où
$$\operatorname{tr} \widehat{h} = \dim V.$$

2. On démontre la relation (6.9) pour $\widehat{h}$ et $\widehat{F} \in V^* \otimes \overline{V}^*$. Comme la relation à démontrer est linéaire en F, il suffit de la démontrer pour
$$\widehat{F} = e^i \otimes e_j^*.$$
On a $\operatorname{tr} \widehat{F} = \delta_i^j$. D'autre part,
$$\widehat{h} \odot \widehat{F} = \sum_k \left(e^k \odot e^i\right) \otimes \left(e_k^* \odot e_j^*\right)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_k \left(e^{ki} + e^{ik}\right) \otimes \left(e^*_{kj} + e^*_{jk}\right),$$

où on note $e^{ij} = e^i \otimes e^j$ et $e^*_{ij} = e^*_i \otimes e^*_j$. On en déduit

$$\operatorname{tr}\left(\widehat{h} \odot \widehat{F}\right) = \frac{n}{4}\widehat{F} + \frac{1}{4}\widehat{F} + \frac{1}{4}\widehat{F} + \frac{1}{4}\delta^j_i \widehat{h} = \frac{n+2}{4}\widehat{F} + \frac{1}{4}\left(\operatorname{tr}\widehat{F}\right)\widehat{h}.$$

3. De (6.9) et $\operatorname{tr} h = n$, on déduit immédiatement $\operatorname{tr}(h^2)$ et $\operatorname{tr}^2(h^2)$.
4. On démontre la relation (6.9) pour $\widehat{h}$ et $\widehat{F} \in \odot^2 V \otimes \odot_2 \overline{V}^*$. Comme $\odot_2 V$ est engendré par les éléments de la forme $x \odot x$, $x \in V$, on peut se limiter au cas où

$$\widehat{F} = \left(e^j \odot e^j\right) \otimes \left(e^*_k \odot e^*_k\right) = e^{jj} \otimes e^*_{kk}.$$

On a alors

$$\widehat{h} \odot \widehat{F} = \sum_i \left(e^i \odot e^j \odot e^j\right) \otimes \left(e^*_i \odot e^*_k \odot e_k\right)$$
$$= \frac{1}{9} \sum_i \left(e^{ijj} + e^{jij} + e^{jji}\right) \otimes \left(e^*_{ikk} + e^*_{kik} + e^*_{kki}\right).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(\widehat{h} \odot \widehat{F}\right) &= \frac{n}{9} e^{jj} \otimes e^*_{kk} + \frac{1}{9} e^{jj} \otimes e^*_{kk} + \frac{1}{9} e^{jj} \otimes e^*_{kk} \\ &+ \frac{1}{9} e^{jj} \otimes e^*_{kk} + \frac{\delta^j_k}{9} \sum_i e^{ij} \otimes e^*_{ik} + \frac{\delta^j_k}{9} \sum_i e^{ij} \otimes e^*_{ki} \\ &+ \frac{1}{9} e^{jj} \otimes e^*_{kk} + \frac{\delta^j_k}{9} \sum_i e^{ji} \otimes e^*_{ik} + \frac{\delta^j_k}{9} \sum_i e^{ji} \otimes e^*_{ki} \\ &= \frac{n+4}{9}\widehat{F} + \frac{4}{9}\widehat{h} \odot \operatorname{tr}\widehat{F},\end{aligned}$$

car $\operatorname{tr}\widehat{F} = \delta^j_k e^j \otimes e^*_k$.
5. On déduit (6.10)-(6.12) de (6.9) avec $F = h^2$.
6. Il suffit de montrer la relation (6.15) pour $\widehat{F} = e^j$. On a alors

$$\widehat{h} \odot \widehat{F} = \sum_i \left(e^i \odot e^j\right) \otimes e^*_i = \frac{1}{2} \sum_i e^{ij} \otimes e^*_i + \frac{1}{2} \sum_i e^{ji} \otimes e^*_i$$

et

$$\operatorname{tr}\left(\widehat{h}\odot\widehat{F}\right)=\frac{n}{2}e^{j}+\frac{1}{2}e^{j}.$$

7. Il suffit de montrer la relation (6.16) pour $\widehat{h}$ et $\widehat{F}=\left(e^{j}\odot e^{k}\right)\otimes e_{l}^{*}$. On a dans ce cas

$$\widehat{h}\odot\widehat{F}=\sum_{i}\left(e^{i}\odot e^{j}\odot e^{k}\right)\otimes\left(e_{i}^{*}\odot e_{l}^{*}\right)$$

$$=\frac{1}{12}\sum_{i}\left(e^{ijk}+e^{ikj}+e^{jik}+e^{jki}+e^{kij}+e^{kji}\right)\otimes\left(e_{il}^{*}+e_{li}^{*}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(\widehat{h}\odot\widehat{F}\right)&=\frac{n}{12}e^{jk}\otimes e_{l}^{*}+\frac{1}{12}e^{jk}\otimes e_{l}^{*}+\frac{n}{12}e^{kj}\otimes e_{l}^{*}+\frac{1}{12}e^{kj}\otimes e_{l}^{*}\\&+\frac{1}{12}e^{jk}\otimes e_{l}^{*}+\frac{\delta_{l}^{j}}{12}\sum_{i}e^{ik}\otimes e_{i}^{*}+\frac{1}{12}e^{kj}\otimes e_{l}^{*}+\frac{\delta_{l}^{j}}{12}\sum_{i}e^{ki}\otimes e_{i}^{*}\\&+\frac{1}{12}e^{kj}\otimes e_{l}^{*}+\frac{\delta_{l}^{k}}{12}\sum_{i}e^{ij}\otimes e_{i}^{*}+\frac{1}{12}e^{jk}\otimes e_{l}^{*}+\frac{\delta_{l}^{k}}{12}\sum_{i}e^{ji}\otimes e_{i}^{*}\\&=\frac{n}{6}\widehat{F}+\frac{1}{2}\widehat{F}+\frac{1}{6}\left(\delta_{l}^{i}e^{k}+\delta_{l}^{k}e^{j}\right)\odot\widehat{h}=\frac{n+3}{6}\widehat{F}+\frac{1}{3}\left(\operatorname{tr}\widehat{F}\right)\odot\widehat{h}.\end{aligned}$$

8. En remplaçant dans (6.16) F par hF ($F\in\mathcal{F}_{10}$) et en utilisant (6.15), on obtient (6.17) ; d'où (6.18) en appliquant à nouveau (6.15).

□

2.5 Formes normales

De la proposition précédente, on déduit les lemmes suivants :

Lemme 2.7. *On a*

$$\mathcal{F}_{22}=h\mathcal{F}_{11}\oplus\mathcal{N}_{22},$$

où

$$\mathcal{N}_{22}=\left\{N\in\mathcal{F}_{22}\mid\operatorname{tr}N=0\right\}.$$

Tout élément $F\in\mathcal{F}_{22}$ *s'écrit*

$$F=hG+N,\tag{2.42}$$

avec $\operatorname{tr} N = 0$ *et*

$$G = \frac{4}{n+2} \operatorname{tr} F - \frac{2h}{(n+1)(n+2)} (\operatorname{tr})^2 F. \tag{2.43}$$

Démonstration. Si $F \in \mathcal{F}_{22}$ admet l'écriture (6.7) avec $\operatorname{tr} N = 0$, la relation (6.4) entraîne

$$\operatorname{tr} F = \frac{n+2}{4} G + \frac{1}{4} (\operatorname{tr} G)\, h.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}^2 F &= \frac{n+2}{4} \operatorname{tr} G + \frac{n}{4} \operatorname{tr} G = \frac{n+1}{2} \operatorname{tr} G, \\
\operatorname{tr} G &= \frac{2}{n+1} \operatorname{tr}^2 F, \\
G &= \frac{4}{n+2} \operatorname{tr} F - \frac{1}{n+2} (\operatorname{tr} G)\, h \\
&= \frac{4}{n+2} \operatorname{tr} F - \frac{2h}{(n+1)(n+2)} (\operatorname{tr})^2 F,
\end{aligned}$$

ce qui montre l'unicité de la décomposition (6.7).

Inversement, si G est défini par (6.8), on a

$$\operatorname{tr}(hG) = \frac{n+2}{4} G + \frac{1}{4} (\operatorname{tr} G)\, h = \operatorname{tr} F.$$

□

Lemme 2.8. *On a*

$$\mathcal{F}_{32} = h^2 \mathcal{F}_{10} \oplus \mathcal{N}_{32},$$

où

$$\mathcal{N}_{32} = \left\{ N \in \mathcal{F}_{32} \mid (\operatorname{tr})^2 N = 0 \right\}.$$

Tout élément $F \in \mathcal{F}_{32}$ *s'écrit*

$$F = h^2 G + N,$$

avec $(\operatorname{tr})^2 N = 0$ *et*

$$G = \frac{6}{(n+1)(n+2)} (\operatorname{tr})^2 F.$$

Résulte directement de (6.18).

Lemme 2.9. *On a*
$$\mathcal{F}_{33} = h^3\mathcal{F}_{00} \oplus \mathcal{N}_{33},$$
où
$$\mathcal{N}_{33} = \left\{N \in \mathcal{F}_{33} \mid (\mathrm{tr})^3 N = 0\right\}.$$
Tout élément $F \in \mathcal{F}_{33}$ *s'écrit*
$$F = h^3 G + N,$$
avec $(\mathrm{tr})^3 N = 0$ *et*
$$G = \frac{6}{n(n+1)(n+2)} (\mathrm{tr})^3 F.$$

Résulte directement de (6.12).

Rappelons (définition 2.1) que tout série formelle $F \in \mathcal{F}$ s'écrit
$$F = \sum_{k,l \in \mathbb{N}} F_{kl},$$
avce $F_{kl} \in \mathcal{F}_{kl}$ et
$$F_{lk} = \overline{F_{kl}} \qquad (k, l \in \mathbb{N}).$$

Définition 2.8. *On désigne par* $\mathcal{R}$ *le sous-espace de* $\mathcal{F}$*, constitué par les séries formelles*
$$F = \sum_{\min(k,l) \leq 1} F_{kl} + hG_{11} + h^2(G_{10} + G_{01}) + h^3 G_{00}$$
telles que $F_{lk} = \overline{F_{kl}}$*,* $G_{11} = \overline{G_{11}}$*,* $G_{10} = \overline{G_{01}}$*,* $G_{00} = \overline{G_{00}}$*.*

On désigne par $\mathcal{N}$ *le sous-espace de* $\mathcal{F}$*, constitué par les séries formelles*
$$N = \sum_{k,l \in \mathbb{N}} N_{kl}$$
telles que
$$N_{kl} = 0 \text{ si } \min(k,l) \leq 1,\ \mathrm{tr}\, N_{22} = 0,\ (\mathrm{tr})^2 N_{32} = 0,\ (\mathrm{tr})^3 N_{33} = 0.$$

Des lemmes 2.7-2.9 et de $\mathrm{tr}\, F_{kl} = \mathrm{tr}\, \overline{F_{lk}} = \overline{\mathrm{tr}\, F_{lk}}$, on déduit immédiatement

Proposition 2.10. *L'espace vectoriel $\mathcal{F}$ des séries formelles est la somme directe*

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{N}.$$

Définition 2.9. *On désigne par $P : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{R}$ la projection associée à la décomposition $\mathcal{F} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{N}$. Pour $F = \sum_{k,l \in \mathbb{N}} F_{kl} \in \mathcal{F}$, on a*

$$PF = \sum_{\min(k,l) \leq 1} F_{kl} + G_{11} h + (G_{10} + G_{01}) h^2 + G_{00} h^3, \tag{2.44}$$

où

$$\begin{aligned}
G_{11} &= \frac{4}{n+2} \operatorname{tr}(F_{22}) - \frac{2h}{(n+1)(n+2)} (\operatorname{tr})^2 (F_{22}), \\
G_{10} &= \frac{6}{(n+1)(n+2)} (\operatorname{tr})^2 F_{32}, \\
G_{00} &= \frac{6}{n(n+1)(n+2)} (\operatorname{tr})^3 F_{33}.
\end{aligned}$$

On remarque que, si $n = 1$, on a

$$PF = \sum_{\min(k,l) \leq 1} F_{kl} + F_{22} + F_{23} + F_{32} + F_{33}. \tag{2.45}$$

2.6 Noyau de l'opérateur L

Les équations (2.27) ramènent la détermination d'un biholomorphisme local (f, g) qui transforme une hypersurface réelle M en une hypersurface M^* à la résolution d'équations linéaires sur $(f_{\mu-1}, g_\mu)$ $(\mu \geq 3)$.

Rappelons que L est défini par

$$L(f, g) = \operatorname{Re}(2 \langle z, f \rangle + \mathrm{i}\, g)|_{w=u+\mathrm{i}<z,z>}.$$

Soit $\mathcal{V}^\mu$ l'espace vectoriel des applications polynomiales (f, g)

$$f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n, \quad g : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C},$$

où $f(z, w)$ est polynomiale de poids $\mu - 1$ et $g(z, w)$ est polynomiale de poids μ (poids 1 pour z, poids 2 pour w). Soit $\mathcal{F}^\mu$ l'espace des polynômes réels de poids μ en $z, \overline{z}, u$ (poids 1 pour $z, \overline{z}$, poids 2 pour u). Alors L est une application $\mathbb{R}$-linéaire

$$L : \mathcal{V} = \widehat{\bigoplus_{\mu \geq 3}} \mathcal{V}^\mu \longrightarrow \mathcal{F}_3 = \widehat{\bigoplus_{\mu \geq 3}} \mathcal{F}^\mu$$

telle que

$$L\left(\mathcal{V}^\mu\right) \subset \mathcal{F}^\mu \qquad (\mu \geq 3)\,. \tag{2.46}$$

On désigne par

$$L^\mu : \mathcal{V}^\mu \longrightarrow \mathcal{F}^\mu \qquad (\mu \geq 3)$$

la restriction de L à $\mathcal{V}^\mu$. Pour déterminer le noyau et l'image de L, il suffit donc de déterminer le noyau et l'image des L^μ.

2.6.1

Lemme 2.11. *On a*

$$\ker L^3 = \left\{ \left(2\,\mathrm{i}\,\langle z, b_0\rangle\, z + b_0 w, 2\,\mathrm{i}\,\langle z, b_0\rangle\, w\right) \mid b_0 \in \mathbb{C}^n \right\}.$$

Démonstration. Si $(f, g) \in \mathcal{V}^3$, on a

$$\begin{aligned} f\,(z, w) &= b_2(z) + b_0 w, \\ g\,(z, w) &= a_3(z) + a_1(z) w, \end{aligned}$$

où b_2, a_3, a_1 sont polynomiales homogènes du degré indiqué par leur indice. On a donc

$$2\,\langle z, f\rangle = 2\,\langle z, b_2\rangle + 2\,\langle z, b_0\rangle\,\overline{w}$$

et

$$\begin{aligned} L(f, g) &= \mathrm{Re}\left(2\,\langle z, b_2\rangle + 2\,\langle z, b_0\rangle\,(u - \mathrm{i}\,\langle z, z\rangle) + \mathrm{i}\,a_3 + \mathrm{i}\,a_1\,(u + \mathrm{i}\,\langle z, z\rangle)\right) \\ &= u\ \ \mathrm{Re}\left(2\,\langle z, b_0\rangle + \mathrm{i}\,a_1(z)\right) \\ &\quad + \mathrm{Re}\left(2\,\langle z, b_2\rangle - \mathrm{Re}\left(2\,\mathrm{i}\,\langle z, b_0\rangle\right)\langle z, z\rangle + \mathrm{i}\,a_3 - a_1\,\langle z, z\rangle\right). \end{aligned}$$

La nullité du coefficient de u dans $L(f, g)$ équivaut à

$$2\,\langle z, b_0\rangle + \mathrm{i}\,a_1(z) = 0. \tag{2.47}$$

La nullité du terme indépendant de u implique $a_3 = 0$ et

$$2\,\langle b_2, z\rangle - \mathrm{Re}\left(2\,\mathrm{i}\,\langle z, b_0\rangle\right)\langle z, z\rangle - a_1(z)\,\langle z, z\rangle = 0.$$

Cette relation est équivalente à

$$2b_2 - 2\,\mathrm{i}\,\langle z, b_0\rangle\, z - a_1(z) z = 0$$

ou encore, compte tenu de (2.47), à

$$b_2(z) = 2\,\mathrm{i}\,\langle z, b_0\rangle\, z. \tag{2.48}$$

Les éléments (f, g) du noyau de L vérifient donc $a_3 = 0$, et les relations (2.47), (2.48), d'où

$$\begin{aligned} f(z,w) &= 2\,\mathrm{i}\,\langle z, b_0\rangle\, z + b_0 w, \\ g(z,w) &= 2\,\mathrm{i}\,\langle z, b_0\rangle\, w, \end{aligned}$$

avec $b_0 \in \mathbb{C}^n$. □

2.6.2

Lemme 2.12. *On a*

$$\ker L^4 = \mathbb{R}\left(zw, w^2\right).$$

Démonstration. Si $(f, g) \in \mathcal{V}^4$, on a

$$\begin{aligned} f(z,w) &= b_3(z) + b_1(z) w, \\ g(z,w) &= a_4(z) + a_2(z) w + a_0 w^2, \end{aligned}$$

où b_3, b_1, a_4, a_2 sont polynomiales homogènes du degré indiqué par leur indice. On a donc

$$2\langle z, f\rangle = 2\langle z, b_3\rangle + 2\langle z, b_0\rangle\, \overline{w}$$

et

$$\begin{aligned} L(f,g) &= \mathrm{Re}\,(2\langle z, b_3\rangle + 2\langle z, b_1\rangle (u - \mathrm{i}\langle z, z\rangle)) \\ &\quad + \mathrm{Re}\left(\mathrm{i}\, a_4 + \mathrm{i}\, a_2 (u + \mathrm{i}\langle z, z\rangle) + \mathrm{i}\, a_0 (u + \mathrm{i}\langle z, z\rangle)^2\right) \\ &= u^2\, \mathrm{Re}\,(\mathrm{i}\, a_0) \\ &\quad + u\;\, \mathrm{Re}\,(2\langle z, b_1\rangle + \mathrm{i}\, a_2(z) - 2a_0\langle z, z\rangle) \\ &\quad + \mathrm{Re}\left(2\langle z, b_3\rangle - 2\,\mathrm{i}\,\langle z, b_1\rangle\langle z, z\rangle + \mathrm{i}\, a_4 - a_2\langle z, z\rangle - \mathrm{i}\, a_0\langle z, z\rangle^2\right). \end{aligned}$$

La nullité du coefficient $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\, a_0) = -\,\mathrm{Im}\, a_0$ de u^2 équivaut à $a_0 \in \mathbb{R}$. Celle du coefficient de u équivaut à $a_2 = 0$ et

$$\langle z, b_1\rangle + \langle b_1, z\rangle - 2a_0\langle z, z\rangle = 0. \tag{2.49}$$

Le terme indépendant de u est alors

$$\operatorname{Re}\left(2\left\langle z, b_3\right\rangle - 2\,\mathrm{i}\left\langle z, b_1\right\rangle\left\langle z, z\right\rangle + \mathrm{i}\, a_4\right);$$

sa nullité équivaut à $b_3 = 0$, $a_4 = 0$ et

$$\left\langle z, b_1\right\rangle - \left\langle b_1, z\right\rangle = 0. \tag{2.50}$$

De (2.49) et (2.50), on déduit $\langle z, b_1\rangle - a_0\langle z, z\rangle = 0$ et $b_1 = a_0 z$. En conclusion, on a $(f, g) \in \ker L^4$ si $f(z, w) = a_0 z w$, $g(z, w) = a_0 w^2$, $a_0 \in \mathbb{R}$. $\square$

2.6.3

Lemme 2.13. *Pour $\mu \geq 5$, l'opérateur $L^\mu : \mathcal{V}^\mu \longrightarrow \mathcal{F}^\mu$ est injectif.*

Démonstration. La démonstration est différente suivant que μ est pair ou impair.

1) Soit $\mu \geq 5$, $\mu = 2\nu + 1$ impair, $\nu \geq 2$. Soit $(f, g) \in \mathcal{V}^\mu$. On a

$$\begin{aligned} f(z, w) &= b_{2\nu}(z) + b_{2\nu-2}(z) w + \cdots + b_4(z) w^{\nu-2} + b_2(z) w^{\nu-1} + b_0 w^\nu, \\ g(z, w) &= a_{2\nu+1}(z) + a_{2\nu-1}(z) w + \cdots + a_3(z) w^{\nu-1} + a_1(z) w^\nu \end{aligned}$$

et

$$\langle z, f\rangle = \langle z, b_{2\nu}\rangle + \langle z, b_{2\nu-2}\rangle\,\overline{w} + \cdots + \langle z, b_4\rangle\,\overline{w}^{\nu-2} + \langle z, b_2\rangle\,\overline{w}^{\nu-1} + \langle z, b_0\rangle\,\overline{w}^{\nu}.$$

Le coefficient de u^ν dans $L(f, g)$ est

$$\operatorname{Re}\left(2\left\langle z, b_0\right\rangle + \mathrm{i}\, a_1(z)\right);$$

sa nullité équivaut à

$$2\left\langle z, b_0\right\rangle + \mathrm{i}\, a_1(z) = 0. \tag{2.51}$$

Le coefficient de $u^{\nu-1}$ dans $L(f, g)$ est alors

$$\operatorname{Re}\left(2\left\langle z, b_2\right\rangle - 2\,\mathrm{i}\,\nu\left\langle z, b_0\right\rangle\left\langle z, z\right\rangle + \mathrm{i}\, a_3(z) - \nu a_1(z)\left\langle z, z\right\rangle\right);$$

sa nullité entraîne $a_3 = 0$ et

$$2\left\langle b_2, z\right\rangle + \mathrm{i}\,\nu\left\langle z, z\right\rangle\left(-2\left\langle z, b_0\right\rangle + \mathrm{i}\, a_1(z)\right) = 0. \tag{2.52}$$

Compte tenu de (2.51), cette relation est équivalente à

$$\langle b_2, z\rangle = 2\,\mathrm{i}\,\nu\,\langle z, b_0\rangle\,\langle z, z\rangle$$

ou encore à

$$b_2(z) = 2\,\mathrm{i}\,\nu\,\langle z, b_0\rangle\, z. \tag{2.53}$$

On a donc

$$\begin{aligned} f\,(z,w) &= b_{2\nu}(z) + b_{2\nu-2}(z)w + \cdots + b_4(z)w^{\nu-2} + b_2(z)w^{\nu-1} + b_0 w^{\nu}, \\ g\,(z,w) &= a_{2\nu+1}(z) + a_{2\nu-1}(z)w + \cdots + a_5(z)w^{\nu-2} + a_1(z)w^{\nu}, \end{aligned}$$

avec a_1 et b_2 liés à b_0 par (2.51) et (2.53). Le coefficient de $u^{\nu-2}$ dans $L(f,g)$ est alors

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\left(2\,\langle z, b_4\rangle - 2\,\mathrm{i}\,(\nu-1)\,\langle z, b_2\rangle\,\langle z, z\rangle - 2\binom{\nu}{2}\langle z, b_0\rangle\,\langle z, z\rangle^2\right) \\ &+ \mathrm{Re}\left(\mathrm{i}\,a_5 - \mathrm{i}\,a_1\binom{\nu}{2}\langle z, z\rangle^2\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(2\,\langle z, b_4\rangle + \mathrm{i}\,a_5 - 2\,\mathrm{i}\,(\nu-1)\,\langle z, b_2\rangle\,\langle z, z\rangle\right). \end{aligned}$$

Sa nullité implique, par décomposition suivant le type en z, $a_5 = 0$, $b_4 = 0$, $b_2 = 0$; on en déduit $b_0 = 0$ et $a_1 = 0$ par (2.51) et (2.53).

On a ainsi montré $b_{2j} = 0$ et $a_{2j+1} = 0$ $(0 \le j < 3)$. On démontre ensuite par récurrence $b_{2j} = 0$ et $a_{2j+1} = 0$ pour tout $j \le \nu$.

En effet, soit $k \ge 3$ tel que $b_{2j} = 0$ et $a_{2j+1} = 0$ pour tout $j < k$. Soit alors $(f,g) \in \mathcal{V}^{\mu}$,

$$\begin{aligned} f\,(z,w) &= b_{2\nu}(z) + b_{2\nu-2}(z)w + \cdots + b_{2k}(z)w^{\nu-k}, \\ g\,(z,w) &= a_{2\nu+1}(z) + a_{2\nu-1}(z)w + \cdots + a_{2k+1}(z)w^{\nu-k} \end{aligned}$$

tel que $L(f,g) = 0$. Le coefficient de $u^{\nu-k}$ dans $L(f,g)$ est

$$\mathrm{Re}\left(2\,\langle z, b_{2k}\rangle + \mathrm{i}\,a_{2k+!}(z)\right),$$

et sa nullité entraîne $b_{2k} = 0$, $a_{2k+1} = 0$. Donc $L\,(f,g) = 0$ entraîne $(f,g) = 0$.

2) Soit $\mu = 2\nu$ est pair $(\nu \ge 3)$ et soit $(f,g) \in \mathcal{V}^{\mu}$. On a

$$\begin{aligned} f\,(z,w) &= b_{2\nu-1}(z) + b_{2\nu-3}(z)w + \cdots + b_1(z)w^{\nu-1}, \\ g\,(z,w) &= a_{2\nu}(z) + a_{2\nu-2}(z)w + \cdots + a_2(z)w^{\nu-1} + a_0 w^{\nu}, \end{aligned}$$

où les b_j, a_k sont polynomiales homogènes de degrés j, k, et

$$\langle z, f\rangle = \langle z, b_{2\nu-1}\rangle + \langle z, b_{2\nu-3}\rangle \overline{w} + \cdots + \langle z, b_3\rangle \overline{w}^{\nu-2} + \langle z, b_1\rangle \overline{w}^{\nu-1}.$$

Le coefficient de u^ν dans $L(f,g)$ est

$$\operatorname{Re}(\mathrm{i}\, a_0).$$

Si $L(f,g) = 0$, on a donc $a_0 \in \mathbb{R}$.

Le coefficient de $u^{\nu-1}$ est alors

$$\operatorname{Re}(2\langle z, b_1\rangle + \mathrm{i}\, a_2(z) - a_0 \nu \langle z, z\rangle);$$

on en déduit $a_2 = 0$ et

$$\langle z, b_1\rangle + \langle b_1, z\rangle - \nu a_0 \langle z, z\rangle = 0. \tag{2.54}$$

On a donc

$$g(z,w) = a_{2\nu}(z) + a_{2\nu-2}(z)w + \cdots + a_4(z)w^{\nu-2} + a_0 w^\nu.$$

Le coefficient de $u^{\nu-2}$ dans $L(f,g)$ est

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\left(2\langle z, b_3\rangle - 2\,\mathrm{i}\,(\nu-1)\langle z, b_1\rangle \langle z, z\rangle + \mathrm{i}\, a_4(z) - \mathrm{i}\, a_0 \binom{\nu}{2} \langle z, z\rangle^2\right)\\ &= \operatorname{Re}(2\langle z, b_3\rangle - 2\,\mathrm{i}\,(\nu-1)\langle z, b_1\rangle \langle z, z\rangle + \mathrm{i}\, a_4(z))\end{aligned}$$

puisque $a_0 \in \mathbb{R}$. Sa nullité entraîne $a_4 = 0$, $b_3 = 0$ et

$$\langle z, b_1\rangle - \langle b_1, z\rangle = 0.$$

Utilisant (2.54), on a alors

$$2\langle z, b_1\rangle - \nu a_0 \langle z, z\rangle = 0$$

et $2b_1 = \nu a_0 z$.

D'où, si $L(f,g) = 0$,

$$\begin{aligned}f(z,w) &= b_{2\nu-1}(z) + b_{2\nu-3}(z)w + \cdots + b_5(z)w^{\nu-3} + \frac{\nu a_0}{2} z w^{\nu-1},\\ g(z,w) &= a_{2\nu}(z) + a_{2\nu-2}(z)w + \cdots + a_6(z)w^{\nu-3} + a_0 w^\nu.\end{aligned}$$

Le coefficient de $u^{\nu-3}$ est alors

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\left(2\langle z,b_5\rangle - a_0\nu\binom{\nu-1}{2}\langle z,z\rangle^3 + \mathrm{i}\,a_6(z) + a_0\binom{\nu}{3}\langle z,z\rangle^3\right)\\&= \operatorname{Re}\left(2\langle z,b_5\rangle - a_0\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{3}\langle z,z\rangle^3 + \mathrm{i}\,a_6(z)\right).\end{aligned}$$

On en déduit $a_6 = 0$, $b_5 = 0$, *mais aussi, comme* $\nu \geq 3$, $\operatorname{Re} a_0 = 0$ *et par conséquent*

$$a_0 = 0, \quad b_1 = 0.$$

On termine encore la démonstration par récurrrence. Soit $k \geq 3$ tel que

$$a_{2j} = 0, \quad b_{2j+1} = 0 \quad (0 \leq j < k)\,;$$

on a donc

$$\begin{aligned}f(z,w) &= b_{2\nu-1}(z) + b_{2\nu-3}(z)w + \cdots + b_{2k+1}(z)w^{\nu-k},\\ g(z,w) &= a_{2\nu}(z) + a_{2\nu-2}(z)w + \cdots + a_{2k}(z)w^{\nu-k}.\end{aligned}$$

Le coefficient de $u^{\nu-k}$ dans $L(f,g)$ est

$$\operatorname{Re}\left(2\langle z,b_{2k+1}\rangle + \mathrm{i}\,a_{2k}(z)\right)$$

et sa nullité entraîne $a_{2k} = 0$, $b_{2k+1} = 0$. Donc $L(f,g) = 0$ entraîne $(f,g) = 0$. $\square$

2.6.4

Proposition 2.14. *Le noyau de* $L : \mathcal{V} \to \mathcal{F}_3$ *est*

$$\left\{\left(2\,\mathrm{i}\langle z,b_0\rangle z + b_0 w + a_0 zw, 2\,\mathrm{i}\langle z,b_0\rangle w + a_0 w^2\right) \mid a_0 \in \mathbb{R},\ b_0 \in \mathbb{C}^n\right\}.$$

La restriction $L_0 : \mathcal{V}_0 \to \mathcal{F}_3$ *de* L *à* $\mathcal{V}_0$ *est un opérateur injectif.*

Démonstration. La première assertion résulte des lemmes 2.11-2.13. La seconde résulte de la définition de $\mathcal{V}_0$, qui implique $a_0 = 0$ et $b_0 = 0$. $\square$

2.7 Image de L

Soit $F \in \mathcal{F}^\mu$ un polynôme réel de poids $\mu \geq 3$. Sa décomposition suivant les bidegrés en $z, \overline{z}$ s'écrit

$$F = \sum_{k+l+2j=\mu} A_{kl} u^j = \sum_{j=0}^{[\mu/2]} \sum_{k+l=\mu-2j} F_{kl}$$

avec $F_{kl} = A_{kl} u^j$ et $A_{kl} = \overline{A_{lk}}$.

2.7.1

Soit

$$F = F_{30} + F_{03} + F_{21} + F_{12} + (A_{10} + A_{01})\, u$$

un élément arbitraire de $\mathcal{F}^3$. Alors $PF = F$ et $\mathcal{R}^3 = \mathcal{F}^3$.

Lemme 2.15. *L'image de L^3 est $\mathcal{R}^3 = \mathcal{F}^3$ et $L_0^3 = L^3|_{\mathcal{V}^3 \cap \mathcal{V}_0}$ est une bijection de $\mathcal{V}^3 \cap \mathcal{V}_0$ sur $\mathcal{F}^3$.*

Démonstration. D'après le lemme 2.11, $\mathcal{V}_0^3 = \mathcal{V}^3 \cap \mathcal{V}_0$ est un supplémentaire de $\ker L^3$; l'image de L^3 est donc égale à $L\left(\mathcal{V}_0^3\right)$. Soit $(f, g) \in \mathcal{V}_0^3$,

$$\begin{aligned} f\,(z, w) &= b_2(z), \\ g\,(z, w) &= a_3(z) + a_1(z) w, \end{aligned}$$

avec les notations du lemme 2.11. On a alors

$$\begin{aligned} L(f, g) &= \operatorname{Re}\left(2\left\langle z, b_2\right\rangle + \mathrm{i}\, a_3 + \mathrm{i}\, a_1 u - a_1 \langle z, z\rangle\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(2\left\langle z, b_2\right\rangle + \mathrm{i}\, a_3 - a_1 \langle z, z\rangle\right) + u \operatorname{Re}\left(\mathrm{i}\, a_1\right). \end{aligned}$$

Soit

$$F = F_{30} + F_{03} + F_{21} + F_{12} + (A_{10} + A_{01})\, u$$

un élément arbitraire de $\mathcal{F}^3$. L'équation $L(f, g) = F$ équivaut alors à

$$\mathrm{i}\, a_1 = 2A_{10}, \tag{2.55}$$

$$\mathrm{i}\, a_3 = 2F_{30}, \tag{2.56}$$

$$2\left\langle b_2, z\right\rangle - a_1 \langle z, z\rangle = 2F_{21}. \tag{2.57}$$

Les coefficients de f et g : a_3, a_1, b_2 sont déterminés uniquement par ces équations quels que soient F_{30}, F_{21}, $F_{10} = A_{10} u$. $\square$

2.7.2

Le sous-espace $\mathcal{F}^4$ est l'ensemble des éléments de la forme

$$\begin{aligned} F = {} & F_{40} + F_{04} + F_{31} + F_{13} + F_{22} \\ & + (A_{20} + A_{02} + A_{11})\, u + A_{00} u^2. \end{aligned}$$

Pour $F \in \mathcal{F}^4$, on a

$$\begin{aligned} PF = {} & F_{40} + F_{04} + F_{31} + F_{13} + hG_{11} \\ & + (A_{20} + A_{02} + A_{11})\, u + A_{00} u^2, \end{aligned}$$

avec

$$G_{11} = \frac{4}{n+2} \operatorname{tr} F_{22} - \frac{2h}{(n+1)\,(n+2)} (\operatorname{tr})^2 F_{22}.$$

Les éléments de $\mathcal{R}^4$ sont les F tels que $F_{22} = hG_{11}$.

Lemme 2.16. *L'application L^4 est bijective de $\mathcal{V}^4 \cap \mathcal{V}_0$ sur $\mathcal{R}^4 = \mathcal{R} \cap \mathcal{F}^4$.*

Démonstration. D'après le lemme 2.12, $\mathcal{V}_0^4 = \mathcal{V}^4 \cap \mathcal{V}_0$ est un supplémentaire de $\ker L^4$ dans $\mathcal{V}^4$; l'image de L^4 est donc égale à $L\,(\mathcal{V}_0^4)$. Soit $(f, g) \in \mathcal{V}_0^4$,

$$\begin{aligned} f\,(z, w) &= b_3(z) + b_1(z) w, \\ g\,(z, w) &= a_4(z) + a_2(z) w + a_0 w^2, \end{aligned}$$

avec $\operatorname{Re} a_0 = 0$.

On considère l'équation $L(f, g) = F$, $F \in \mathcal{F}^4$. Le coefficient de u^2 dans $L(f, g)$ est $\operatorname{Re}(\mathrm{i}\, a_0) = -\operatorname{Im} a_0$; l'égalité des termes en u^2 s'écrit donc

$$-\operatorname{Im} a_0 = A_{00}.$$

Le coefficient de u dans $L(f, g)$ est

$$\operatorname{Re}\left(2 \langle z, b_1 \rangle + \mathrm{i}\, a_2(z) - 2a_0 \langle z, z \rangle\right) = \operatorname{Re}\left(2 \langle z, b_1 \rangle + \mathrm{i}\, a_2(z)\right);$$

l'égalité des termes en u dans l'équation $L(f, g) = F$ équivaut à

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\, a_2 &= 2A_{20}, \\ \langle z, b_1 \rangle + \langle b_1, z \rangle &= A_{11}. \end{aligned}$$

Le terme indépendant de u dans $L(f,g)$ est

$$\mathrm{Re}\left(2\langle z,b_3\rangle + 2\,\mathrm{i}\,\langle z,b_1\rangle\langle z,z\rangle + \mathrm{i}\,a_4(z) - a_2 < z,z > - \mathrm{i}\,a_0\,\langle z,z\rangle^2\right);$$

l'égalité des termes indépendants de u dans l'équation équivaut à

$$\begin{gathered}\mathrm{i}\,a_4 = 2F_{40},\\ 2\langle b_3,z\rangle - a_2 < z,z >= 2F_{31},\\ (\mathrm{i}\,\langle z,b_1\rangle - \mathrm{i}\,\langle b_1,z\rangle - \mathrm{i}\,a_0 < z,z >) < z,z >= F_{22}.\end{gathered}$$

La dernière condition implique $F \in \mathcal{R}^4$. Si $F \in \mathcal{R}^4$, on a $F_{22} = hG_{11}$ et les conditions sur (f,g) s'écrivent

$$\begin{gathered}-\mathrm{Im}\,a_0 = A_{00},\\ \mathrm{i}\,a_2 = 2A_{20},\\ \mathrm{i}\,a_4 = 2F_{40},\\ 2\langle b_3,z\rangle - a_2 < z,z >= 2F_{31},\\ \langle z,b_1\rangle + \langle b_1,z\rangle = A_{11},\\ \mathrm{i}\,\langle z,b_1\rangle - \mathrm{i}\,\langle b_1,z\rangle - \mathrm{i}\,a_0 < z,z >= G_{11}.\end{gathered}$$

Les trois premières ont des solutions uniques a_4, a_2, a_0 (avec $\mathrm{Re}\,a_0 = 0$). La quatrième s'écrit

$$2\langle b_3,z\rangle = 2F_{31} + a_2 < z,z >$$

et a une solution unique b_3. Des deux dernières, on déduit la relation équivalente

$$2\langle b_1,z\rangle = A_{11} + \mathrm{i}\,G_{11} - a_0 < z,z >,$$

qui a toujours une solution unique b_1. □

2.7.3

Soit $\mu = 2\nu+1$ impair, $\nu \geq 2$. Soit $F \in \mathcal{F}^\mu$; on a

$$\begin{aligned}F = \sum_{k+l=2\nu+1} F_{kl} + \sum_{k+l=2\nu-1} A_{kl}u^2 + \cdots\\ + (A_{50}+A_{41}+A_{32}+A_{23}+A_{14}+A_{05})\,u^{\nu-2}\\ + (A_{30}+A_{21}+A_{12}+A_{03})\,u^{\nu-1} + (A_{10}+A_{01})\,u^\nu\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}PF &= \left(F_{2\nu+1,0} + F_{2\nu,1} + F_{1,2\nu} + F_{0,2\nu+1}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(A_{2k+1,0} + A_{2k,1} + A_{1,2k} + A_{0,2k+1}\right) u^{\nu-k} + \cdots \\ &\quad + \Big(A_{50} + A_{41} + h^2\left(B_{10} + B_{01}\right) + A_{14} + A_{05}\Big) u^{\nu-2} \\ &\quad + \left(A_{30} + A_{21} + A_{12} + A_{03}\right) u^{\nu-1} + \left(A_{10} + A_{01}\right) u^{\nu},\end{aligned}$$

avec

$$B_{10} = \frac{6}{(n+1)(n+2)} (\mathrm{tr})^2 A_{32}.$$

Les éléments de $\mathcal{R}^\mu$ sont les

$$\begin{aligned}F &= \left(F_{2\nu+1,0} + F_{2\nu,1} + F_{1,2\nu} + F_{0,2\nu+1}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(A_{2\nu-2k+1,0} + A_{2\nu-2k,1} + A_{1,2\nu-2k} + A_{0,2\nu-2k+1}\right) u^{k} + \cdots \\ &\quad + \Big(A_{50} + A_{41} + h^2\left(B_{10} + B_{10}\right) + A_{14} + A_{05}\Big) u^{\nu-2} \\ &\quad + \left(A_{30} + A_{21} + A_{12} + A_{03}\right) u^{\nu-1} + \left(A_{10} + A_{01}\right) u^{\nu}.\end{aligned} \tag{2.58}$$

Lemme 2.17. *Soit $\mu = 2\nu + 1$ impair, $\nu \geq 2$. L'image de PL^μ est $\mathcal{R}^\mu = \mathcal{F}^\mu \cap \mathcal{R}$ et PL^μ est une bijection de $\mathcal{V}^\mu$ sur $\mathcal{R}^\mu$.*

Démonstration. Soit $(f, g) \in \mathcal{V}^\mu$:

$$\begin{aligned}f(z,w) &= b_{2\nu}(z) + \cdots + b_{2k}(z) w^{\nu-k} + \cdots \\ &\quad + b_4(z) w^{\nu-2} + b_2(z) w^{\nu-1} + b_0 w^{\nu}, \\ g(z,w) &= a_{2\nu+1}(z) + \cdots + a_{2k+1}(z) w^{\nu-k} + \cdots \\ &\quad + a_5(z) w^{\nu-2} + a_3(z) w^{\nu-1} + a_1(z) w^{\nu}\end{aligned}$$

et soit $F = L(f, g)$. Le coefficient de u^ν dans $L(f, g) = F$ est

$$\mathrm{Re}\left(2\langle z, b_0\rangle + \mathrm{i}\, a_1\right) = A_{10} + A_{01},$$

avec

$$2\langle z, b_0\rangle + \mathrm{i}\, a_1 = 2A_{10}. \tag{2.59}$$

Le coefficient de $u^{\nu-1}$ dans $L(f, g) = F$ est

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left(2\langle z, b_2\rangle - 2\,\mathrm{i}\,\nu\langle z, b_0\rangle\langle z, z\rangle + \mathrm{i}\, a_3(z) - \nu a_1(z)\langle z, z\rangle\right) \\ &= A_{30} + A_{21} + A_{12} + A_{03},\end{aligned}$$

avec

$$\mathrm{i}\, a_3 = 2A_{30}, \tag{2.60}$$

$$2\langle b_2, z\rangle + \mathrm{i}\,\nu\,\langle z, z\rangle\,(-2\langle z, b_0\rangle + \mathrm{i}\, a_1(z)) = 2A_{21}. \tag{2.61}$$

Le coefficient de $u^{\nu-2}$ dans $L(f,g) = F$ est

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left(2\langle z, b_4\rangle - 2\,\mathrm{i}\,(\nu-1)\langle z, b_2\rangle\langle z.z\rangle - 2\binom{\nu}{2}\langle z, b_0\rangle\langle z, z\rangle^2\right)\\
&+\mathrm{Re}\left(\mathrm{i}\, a_5 + \mathrm{i}\,(\nu-1)\, a_3\langle z, z\rangle - \mathrm{i}\binom{\nu}{2} a_1\langle z, z\rangle^2\right)\\
&= \mathrm{Re}\,(\mathrm{i}\, a_5) + \mathrm{Re}\,(2\langle z, b_4\rangle + \mathrm{i}\,(\nu-1)\, a_3\langle z, z\rangle)\\
&+\mathrm{Re}\left(-2\,\mathrm{i}\,(\nu-1)\langle z, b_2\rangle - \binom{\nu}{2}(2\langle z, b_0\rangle + \mathrm{i}\, a_1)\langle z, z\rangle\right)\langle z, z\rangle,
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{i}\, a_5 = 2A_{50}, \tag{2.62}$$

$$2\langle b_4, z\rangle + \mathrm{i}\,(\nu-1)\, a_3\langle z, z\rangle = 2A_{41}, \tag{2.63}$$

$$2\,\mathrm{i}\,(\nu-1)\langle b_2, z\rangle\langle z, z\rangle - \binom{\nu}{2}(2\langle z, b_0\rangle + \mathrm{i}\, a_1)\langle z, z\rangle^2 = 2A_{32}. \tag{2.64}$$

La projection PA_{32} est alors

$$PA_{32} = h^2 B_{10},$$

avec

$$B_{10} = \frac{6}{(n+1)(n+2)}(\mathrm{tr})^2 A_{32}.$$

Appliquant

$$\mathrm{tr}\,(hG) = \frac{n+3}{6} G + \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\, G)\, h$$

à $G = \langle b_2, z\rangle$, on a

$$\mathrm{tr}\,(\langle b_2, z\rangle\langle z, z\rangle) = \frac{n+3}{6}\langle b_2, z\rangle + \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\langle b_2, z\rangle)\, h$$

et

$$\mathrm{tr}^2\,(\langle b_2, z\rangle\langle z, z\rangle) = \frac{n+3}{6}\,\mathrm{tr}\,\langle b_2, z\rangle + \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,(\mathrm{tr}\,\langle b_2, z\rangle)\, h$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n+3}{6}\operatorname{tr}\langle b_2, z\rangle + \frac{n+1}{6}\operatorname{tr}\langle b_2, z\rangle \\
&= \frac{n+2}{3}\operatorname{tr}\langle b_2, z\rangle .
\end{aligned}
$$

La projection sur $\mathcal{R}$ de $\langle b_2, z\rangle\langle z, z\rangle$ est donc

$$h^2\frac{2}{n+1}\operatorname{tr}\langle b_2, z\rangle$$

et celle de A_{32} est $h^2 B_{10}$, avec

$$2\,\mathrm{i}\,(\nu-1)\,\frac{2}{n+1}\operatorname{tr}\langle b_2, z\rangle - \binom{\nu}{2}\left(2\langle z, b_0\rangle + \mathrm{i}\,a_1\right) = 2B_{10}. \tag{2.65}$$

Soient A_{10}, A_{30}, A_{21}, A_{50}, A_{41} quelconques et $A_{32} = h^2 B_{10}$. Les équations (2.60) et (2.62) déterminent a_3 et a_5 ; l'équation (2.63) détermine alors b_4. Les coefficients b_2, b_0 et a_1 doivent vérifier

$$2\langle z, b_0\rangle + \mathrm{i}\,a_1 = 2A_{10}, \tag{2.66}$$
$$2\langle b_2, z\rangle + \mathrm{i}\,\nu\langle z, z\rangle\left(-2\langle z, b_0\rangle + \mathrm{i}\,a_1(z)\right) = 2A_{21}, \tag{2.67}$$
$$2\,\mathrm{i}\,(\nu-1)\,\frac{2}{n+1}\operatorname{tr}\langle b_2, z\rangle - \binom{\nu}{2}\left(2\langle z, b_0\rangle + \mathrm{i}\,a_1\right) = 2B_{10}. \tag{2.68}$$

La deuxième relation entraîne

$$2\operatorname{tr}\langle b_2, z\rangle + \mathrm{i}\,\nu\frac{n+1}{2}\left(-2\langle z, b_0\rangle + \mathrm{i}\,a_1(z)\right) = 2\operatorname{tr} A_{21}. \tag{2.69}$$

Le système d'équations (2.66)-(2.68)-(2.69) a une solution unique

$$\left(\operatorname{tr}\langle b_2, z\rangle, \langle z, b_0\rangle, a_1\right),$$

qui détermine b_0 et a_1 ; $\langle b_2, z\rangle$ et b_2 sont alors déterminés par (2.67).

Soit $2 < k \leq \nu$. Dans le coefficient de $u^{\nu-k}$ de $L(f,g)$, les termes de type $(2k+1,0)$ et $(2k,1)$ sont

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{i}}{2}a_{2k+1} &= A_{2k+1,0}, \\
\langle b_{2k}, z\rangle &= A_{2k,1}.
\end{aligned}
$$

Si $F \in \mathcal{R}^\mu$ est donné par (2.58), a_{2k+1}et b_{2k} sont donc uniquement déterminés par F.

On a ainsi montré que pour tout $F \in \mathcal{R}^\mu$, il existe une solution unique $(f,g) \in \mathcal{V}^\mu$ pour $PL(f,g) = F$. Donc PL^μ est une bijection de $\mathcal{V}^\mu$ sur $\mathcal{R}^\mu$, et P induit une bijection de l'image de L^μ sur $\mathcal{R}^\mu$. $\square$

2.7.4

Soit $\mu = 2\nu$ pair, $\nu \geq 3$. Soit $F \in \mathcal{F}^\mu$; on a

$$\begin{aligned} F = & \sum_{i+j=2\nu} F_{ij} + \cdots + \sum_{i+j=2k} A_{ij} u^{\nu-k} + \cdots \\ & + (A_{60} + A_{51} + A_{42} + A_{33} + A_{24} + A_{15} + A_{06})\, u^{\nu-3} \\ & + (A_{40} + A_{31} + A_{22} + A_{13} + A_{04})\, u^{\nu-2} \\ & + (A_{20} + A_{11} + A_{02})\, u^{\nu-1} + A_{00} u^\nu \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} PF = & (F_{2\nu,0} + F_{2\nu-1,1} + F_{1,2\nu-1} + F_{0,2\nu}) + \cdots \\ & + (A_{2k,0} + A_{2k-1,1} + A_{1,2k-1} + A_{0,2k})\, u^{\nu-k} + \cdots \\ & + \left(A_{60} + A_{51} + h^3 B_{00} + A_{15} + A_{06}\right) u^{\nu-3} \\ & + (A_{40} + A_{31} + hB_{11} + A_{13} + A_{04})\, u^{\nu-2} \\ & + (A_{20} + A_{11} + A_{02})\, u^{\nu-1} + A_{00} u^\nu, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{4}{n+2} \operatorname{tr}(A_{22}) - \frac{2h}{(n+1)(n+2)} (\operatorname{tr})^2 (A_{22}), \\ B_{00} &= \frac{6}{n(n+1)(n+2)} (\operatorname{tr})^3 A_{33}. \end{aligned}$$

Les éléments de $\mathcal{R}^\mu$ sont les

$$\begin{aligned} F = & (F_{2\nu,0} + F_{2\nu-1,1} + F_{1,2\nu-1} + F_{0,2\nu}) + \cdots \\ & + (A_{2k,0} + A_{2k-1,1} + A_{1,2k-1} + A_{0,2k})\, u^{\nu-k} + \cdots \\ & + \left(A_{60} + A_{51} + h^3 B_{00} + A_{15} + A_{06}\right) u^{\nu-3} \\ & + (A_{40} + A_{31} + hB_{11} + A_{13} + A_{04})\, u^{\nu-2} \\ & + (A_{20} + A_{11} + A_{02})\, u^{\nu-1} + A_{00} u^\nu. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Lemme 2.18. *Soit $\mu = 2\nu$ pair, $\nu \geq 3$. L'image de PL^μ est $\mathcal{R}^\mu = \mathcal{F}^\mu \cap \mathcal{R}$ et PL^μ est une bijection de $\mathcal{V}^\mu$ sur $\mathcal{R}^\mu$.*

Démonstration. Soit $(f, g) \in \mathcal{V}^\mu$:

$$f(z, w) = b_{2\nu-1}(z) + \cdots + b_{2k-1}(z) w^{\nu-k} + \cdots$$

$$\begin{aligned} &+ b_5(z)w^{\nu-3} + b_3(z)w^{\nu-2} + b_1(z)w^{\nu-1}, \\ g\,(z,w) &= a_{2\nu}(z) + \cdots + a_{2k}(z)w^{\nu-k} + \cdots \\ &+ a_6(z)w^{\nu-3} + a_4(z)w^{\nu-2} + a_2(z)w^{\nu-1} + a_0 w^{\nu}. \end{aligned}$$

Le coefficient de u^ν dans $L\,(f,g) = F$ est

$$\operatorname{Re}\,(\mathrm{i}\,a_0) = A_{00}. \tag{2.71}$$

Le coefficient de $u^{\nu-1}$ est

$$\operatorname{Re}\,(2\,\langle z, b_1\rangle + \mathrm{i}\,a_2 - a_0\nu\,\langle z,z\rangle) = A_{20} + A_{11} + A_{02},$$

avec

$$\mathrm{i}\,a_2 = 2A_{20}, \tag{2.72}$$

$$\langle z, b_1\rangle + \langle b_1, z\rangle - \nu\,\langle z,z\rangle\operatorname{Re} a_0 = A_{11}. \tag{2.73}$$

Le coefficient de $u^{\nu-2}$ dans $L\,(f,g)$ est

$$\operatorname{Re}\left(2\,\langle z, b_3\rangle - 2\,\mathrm{i}\,(\nu-1)\,\langle z,b_1\rangle\,\langle z,z\rangle + \mathrm{i}\,a_4 - a_2(\nu-1)\,\langle z,z\rangle - \mathrm{i}\,a_0\binom{\nu}{2}\,\langle z,z\rangle^2\right).$$

Il appartient à $\mathcal{R}$ et s'écrit

$$A_{40} + A_{31} + hB_{11} + A_{13} + A_{04}$$

avec

$$\mathrm{i}\,a_4 = 2A_{40}, \tag{2.74}$$

$$2\,\langle b_3, z\rangle - a_2(\nu-1)\,\langle z,z\rangle = 2A_{31}, \tag{2.75}$$

$$-2\,\mathrm{i}\,(\nu-1)\,(\langle z,b_1\rangle - \langle b_1,z\rangle) - \operatorname{Re}\,(\mathrm{i}\,a_0)\binom{\nu}{2}\,\langle z,z\rangle = B_{11}. \tag{2.76}$$

Le coefficient de $u^{\nu-3}$ est

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\left(2\,\langle z,b_5\rangle - 2\,\mathrm{i}\,(\nu-2)\,\langle z,b_3\rangle\,\langle z,z\rangle - 2\binom{\nu-1}{2}\,\langle z,b_1\rangle\,\langle z,z\rangle^2\right) \\ &+ \operatorname{Re}\left(\mathrm{i}\,a_6 - a_4\,(\nu-2)\,\langle z,z\rangle - \mathrm{i}\,a_2\binom{\nu-1}{2}\,\langle z,z\rangle^2 + a_0\binom{\nu}{3}\,\langle z,z\rangle^3\right). \end{aligned}$$

Sa projection dans $\mathcal{R}$ est

$$A_{60} + A_{51} + h^3 B_{00} + A_{15} + A_{06}$$

avec

$$\mathrm{i}\, a_6 = 2A_{60}, \tag{2.77}$$

$$2\left\langle b_5, z\right\rangle - a_4(\nu-2)\left\langle z, z\right\rangle = 2A_{51}, \tag{2.78}$$

$$-\binom{\nu-1}{2}\left(\left\langle z, b_1\right\rangle + \left\langle b_1, z\right\rangle\right)\left\langle z, z\right\rangle^2 + \binom{\nu}{3}\left\langle z, z\right\rangle^3 \operatorname{Re} a_0 = A_{33},$$

$$B_{00} = \frac{6}{n\,(n+1)\,(n+2)}\,(\mathrm{tr})^3\, A_{33}.$$

Si $B \in \mathcal{F}_{11}$, on a

$$\mathrm{tr}^3\left(h^2 B\right) = \tfrac{(n+1)(n+2)}{6}\,\mathrm{tr}\, B.$$

Les deux relations précédentes sont alors équivalentes à

$$\binom{\nu}{3}\operatorname{Re} a_0 - \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}\left(\left\langle z, b_1\right\rangle + \left\langle b_1, z\right\rangle\right) = B_{00}. \tag{2.79}$$

Soit $F \in \mathcal{R}^{\mu}$, écrit sous la forme (2.70). Les équations (2.72), (2.74), (2.77) déterminent a_2, a_4 , a_6 ; les équations (2.75) et (2.78) déterminent alors b_3 et b_5. Les équations (2.71) et (2.76) déterminent $\operatorname{Im} a_0$ et $\left\langle z, b_1\right\rangle - \left\langle b_1, z\right\rangle$. Enfin, les coefficients a_0 et b_1 sont soumis aux conditions (2.73) :

$$\left\langle z, b_1\right\rangle + \left\langle b_1, z\right\rangle - \nu\left\langle z, z\right\rangle \operatorname{Re} a_0 = A_{11}$$

et (2.79). La condition (2.73) entraîne

$$\mathrm{tr}\left(\left\langle z, b_1\right\rangle + \left\langle b_1, z\right\rangle\right) - \nu n \operatorname{Re} a_0 = \mathrm{tr}\, A_{11}. \tag{2.80}$$

Le système (2.79)-(2.80) possède une solution unique

$$\left(\operatorname{Re} a_0, \mathrm{tr}\left(\left\langle z, b_1\right\rangle + \left\langle b_1, z\right\rangle\right)\right).$$

De (2.73), on déduit $\left\langle z, b_1\right\rangle + \left\langle b_1, z\right\rangle$. Les coefficients a_{2j} $(j \leq 3)$ et b_{2j+1} $(j \leq 2)$ d'une solution de $PL(f,g) = F$ sont ainsi uniquement déterminés pour tout $F \in \mathcal{R}^{\mu}$.

Soit $3 < k \leq \nu$. Dans le coefficient de $u^{\nu-k}$ de $L(f,g)$, les termes de type $(2k,0)$ et $(2k-1,1)$ sont

$$\frac{\mathrm{i}}{2}a_{2k} = A_{2k,0},$$
$$\langle b_{2k}, z\rangle = A_{2k-1,1}.$$

Si $F \in \mathcal{R}^\mu$ est donné par (2.58), a_{2k+1} et b_{2k} sont donc uniquement déterminés par F.

Finalement, pour tout $F \in \mathcal{R}^\mu$, l'équation $PL(f,g) = F$ possède une solution unique $(f,g) \in \mathcal{V}^\mu$. $\square$

2.7.5

Rassemblant les résultats des lemmes 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, on obtient

Proposition 2.19. *L'application $PL_0 : \mathcal{V}_0 \to \mathcal{R}_3$ est un isomorphisme linéaire, et P induit un isomorphisme de l'image de L sur $\mathcal{R}_3$.*

2.8 Réduction formelle à la forme normale

Théorème 2.20. *[3, Theorem 2.2]Soit M une hypersurface réelle d'équation*

$$\operatorname{Im} w =< z, z > +F\left(z, \overline{z}, \operatorname{Re} w\right),$$

où

$$F\left(z, \overline{z}, u\right) = \sum_{\nu=3}^{\infty} F_\nu\left(z, \overline{z}, u\right).$$

Il existe une tranformation formelle unique

$$z^* = z + f(z,w),\ w^* = w + g(z,w),$$

avec $(f,g) \in \mathcal{V}_0$, telle que l'équation de la transformée M^* de M soit

$$\operatorname{Im} w^* = \langle z^*, z^*\rangle + N\left(z, \overline{z}, \operatorname{Re} w\right)$$

avec $N \in \mathcal{N}$.

Démonstration. On a vu que la transformation associée à $(f,g) \in \mathcal{V}_0$ transforme l'hypersurface M, définie par

$$\operatorname{Im} w =< z,z > + F\left(z,\overline{z},\operatorname{Re} w\right),$$
$$F\left(z,\overline{z},u\right) = \sum_{\nu=3}^{\infty} F_\nu\left(z,\overline{z},u\right),$$

en M^* définie par

$$\operatorname{Im} w^* =< z^*,z^* > + F^*\left(z^*,\overline{z^*},\operatorname{Re} w^*\right),$$
$$F^*\left(z,\overline{z},u\right) = \sum_{\nu=3}^{\infty} F^*_\nu\left(z,\overline{z},u\right),$$

si et seulement si elle vérifie les relations

$$L\left(f_{\mu-1},g_\mu\right) = F_\mu\left(z,\overline{z},u\right) - F^*_\mu\left(z,\overline{z},u\right) + A_\mu\left(z,\overline{z},u\right) \qquad \left(\mu \geq 3\right), \quad (2.81)$$

où $A_\mu\left(z,\overline{z},u\right)$ est la composante de poids μ de

$$\operatorname{Im} \sum_{\nu<\mu} g_\nu(z,w) - 2\operatorname{Re} \sum_{\nu<\mu} \langle z, f_{\nu-1}\left(z,w\right)\rangle - \sum_{\lambda+\nu<\mu} \langle f_\lambda\left(z,w\right), f_\nu\left(z,w\right)\rangle$$
$$- \sum_{\nu<\mu} F^*_\nu \left(z + \sum_{j<\mu-2} f_j(z,w), \overline{z + \sum_{k<\mu-2} f_k(z,w)}, u + \operatorname{Re} \sum_{l<\mu-1} g_l(z,w) \right) \quad (2.82)$$

après la substitution

$$w = u + \mathrm{i} < z,z > + \mathrm{i} \sum_{\nu=3}^{\infty} F_\nu\left(z,\overline{z},u\right). \quad (2.83)$$

Rappelons que la fonction A_μ est déterminée par $\{(f_{\nu-1},g_\nu,F_\nu,F^*_\nu)\,;\nu<\mu\}$. On souhaite déterminer $(f_{\mu-1},g_\mu)$ $(\mu \geq 3)$ vérifiant les équations (2.81) et $F^* \in \mathcal{N}$.

Pour $\mu = 3$, on a $A_3 = 0$. L'équation (2.81) correspondante s'écrit

$$L\left(f_2,g_3\right) = F_3 - F^*_3$$

et $F^*_3 \in \mathcal{N}$ entraîne

$$L\left(f_2,g_3\right) = F_3,$$

qui possède une solution unique $(f_2, g_3) \in \mathcal{V}_0^3$. On a

$$F_3^* = 0.$$

Soit $\mu > 3$. On suppose que pour tout $\nu < \mu$, il existe un unique couple $(f_{\nu-1}, g_\nu) \in \mathcal{V}_0^\mu$ tel que

$$L(f_{\nu-1}, g_\nu) = F_\nu - F_\nu^* + A_\nu$$

et $F_\nu^* \in \mathcal{N}$. L'équation

$$L(f_{\mu-1}, g_\mu) = F_\mu - F_\mu^* + A_\mu$$

et la condition $F_\nu^* \in \mathcal{N}$ entraînent alors

$$L(f_{\mu-1}, g_\mu) = PF_\mu + PA_\mu,$$

qui possède une solution unique $(f_{\mu-1}, g_\mu) \in \mathcal{V}_0^\mu$. On a

$$F_\mu^* = F_\mu + A_\mu - P(F_\mu + A_\mu).$$

On a ainsi montré l'existence et l'unicité de $(f, g) = \sum_{\mu=3}^{\infty} (f_{\mu-1}, g_\mu)$ telle que $F^* \in \mathcal{N}$. □

Définition 2.10. *On dit que l'équation d'une hypersurface M est sous* forme normale *si elle s'écrit*

$$\operatorname{Im} w = < z, z > + N(z, \overline{z}, \operatorname{Re} w)$$

avec $N \in \mathcal{N}$.

3 Théorèmes d'existence

Les séries formelles utilisées pour chercher une forme normale d'une hypersurface analytique-réelle sont en fait des séries qui convergent vers des fonctions holomorphes. En plus de cela, on cherche une interprétation géométrique des conditions qui donnent lieu à une forme normale d'une hypersurface analytique réelle

$$\operatorname{tr} N_{22} = 0,\ (\operatorname{tr})^2 N_{32} = 0,\ (\operatorname{tr})^3 N_{33} = 0.$$

Soient M une hypersurface analytique réelle et γ un arc analytique réel tracé sur M et qui est transverse à l'espace tangent complexe de M. De plus on se donne un repère de vecteurs linéairement indépendants, qui sont analytiques réels le long de courbe γ. Toutes ces données sont localement données au voisinage d'un point p de M.

Théorème 3.1. *Il existe une application biholomorphe ϕ qui transforme M en une hypersurface réelle, qui a la forme suivante*

$$\begin{array}{l} v = \langle z, z \rangle + \sum_{\min(k,l)\geq 2} F_{kl}\left(z, \overline{z}, u\right),\ \text{où} \\ (\operatorname{tr})^2 F_{23} = 0. \end{array} \tag{3.1}$$

Géométriquement, il existe une unique courbe analytique Γ dans M qui passe par l'origine, et qui est tangente à un vecteur transversal à l'hyperplan tangent complexe à l'origine et qui est envoyée dans une u-courbe par l'application biholomorphe ϕ. De plus il existe une application biholomorphe ϕ_1 qui, avec la condition

$$(\operatorname{tr})^2 F_{23} = 0, \tag{3.2}$$

vérifie les conditions

$$\operatorname{tr} F_{22} = 0,\ \ (\operatorname{tr})^3 F_{33} = 0. \tag{3.3}$$

Pour l'application de ϕ on a :

Théorème 3.2. *Soit M une hypersurface analytique réelle, dont la forme de Levi est non dégénérée à l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$, définit par l'équation suivante*

$$v = F\left(z, \overline{z}, u\right), \left.F\right|_0 = \left.dF\right|_0 = 0. \tag{3.4}$$

Alors il existe une application gihoilomorphe ϕ telle que

$$\phi\left(M\right) : v = \langle z, z \rangle + \sum_{\min(k,l)\geq 2} F^*_{kl}\left(z, \overline{z}, u\right), \tag{3.5}$$

où

$$\operatorname{tr} F_{22}^{*} = 0,\ (\operatorname{tr})^{2} F_{23}^{*} = 0,\ (\operatorname{tr})^{3} F_{33}^{*} = 0. \tag{3.6}$$

Dans le théorème d'existence donné par Chern et Moser on donne une démonstration qui comprend le théorème d'unicité donné par

Théorème 3.3. *Soit M une hypersurface analytique réelle du théorème 3.2. Alors la normalisation $\phi = (f, g)$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ est uniquement déterminée par les valeurs*

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_0, \left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_0, \operatorname{Re}\left(\left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_0\right), \operatorname{Re}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_0\right). \tag{3.7}$$

Les normalisations d'une hypersurface réelle M en une forme normale sont paramétrées par le groupe H de dimension finie données par

$$\begin{pmatrix} \varrho & 0 & 0 \\ -Ca & C & 0 \\ -r - \mathrm{i}\langle a, a\rangle & 2\,\mathrm{i}\, a^{\dagger} & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Où

$$a^{\dagger} = \left(\overline{a^1}, ..., \overline{a^l}, -\overline{a^{l+1}}, -\overline{a^n}\right). \tag{3.9}$$

La famille de normalisation de M va dépendre analytiquement des paramètres ,

$$\begin{aligned} &C = \left(\left.\tfrac{\partial f}{\partial z}\right|_0\right), -Ca = \left(\left.\tfrac{\partial f}{\partial w}\right|_0\right), \varrho = \operatorname{Re}\left(\left.\tfrac{\partial g}{\partial z}\right|_0\right), \\ &\text{et } 2\varrho r = \operatorname{Re}\left(\left.\tfrac{\partial^2 g}{\partial w^2}\right|_0\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

On montrera qu'il existe une famille de formes normales telles que

$$\begin{aligned} &v = \langle z, z\rangle + \textstyle\sum_{\min(k,l)\geq 2} F_{kl}(z, \overline{z}, u) \ \text{ pour } \alpha = 0, \\ &v = -\frac{1}{2\alpha}\left\{1 - 2\alpha\langle z, z\rangle\right\} + \textstyle\sum_{\min(k,l)\geq 2} F_{kl}(z, \overline{z}, u) \ \text{ pour } \alpha \neq 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Où $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr} F_{22}(z, \overline{z}, u) = (\operatorname{tr})^{2} F_{23}(z, \overline{z}, u) = 0, \\ &(\operatorname{tr})^{3} F_{33}(z, \overline{z}, u) = \beta\,(\operatorname{tr})^{4}\left(F_{22}(z, \overline{z}, u)\right)^{2} \ \text{ pour certain } \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Lemme 3.4. *Soit $g(z,w)$ une fonction holomorphe implicitement définie par les équations*

$$
\begin{aligned}
&g(z,w) - g(0,w) = -2\,\mathrm{i}\,F(p(w), \overline{p}(w), w)\\
&+2\,\mathrm{i}\,F\left(z + p(w), \overline{p}(w), w + \frac{1}{2}\{g(z,w) - g(0,w)\}\right), \qquad (3.13)\\
&\text{où } g(0,w) = \mathrm{i}\,F(p(w), \overline{p}(w), w).
\end{aligned}
$$

Soit ϕ L'application biholomorphe au voisinage de l'origine définie par

$$
\begin{aligned}
z &= z^* + p(w^*),\\
w &= w^* + g(z^*, w^*).
\end{aligned} \qquad (3.14)
$$

Alors l'application ϕ transforme l'hypersurface réelle M telle que $M' = \phi(M)$ est localement définie par une équation de la forme suivante

$$
v^* = \langle z^*, z^* \rangle + \sum_{\min(k,l) \geq 2} F_{kl}(z^*, \overline{z}^*, u^*),
$$

et la courbe Γ Dans M via l'équation

$$
\Gamma : \begin{cases} z = p(\mu), \\ w = \mu + \mathrm{i}\,F(p(\mu), \overline{p}(\mu), \mu), \end{cases} \qquad (3.15)
$$

et appliquée à la courbe, $z = v = 0$. Où (3.15) est uniquement donnée avec la parametrisation μ.

La fonction holomorphe $g(z,w)$ est bien définie à cause de la condition

$$
F|_0 = F_z|_0 = F_{\overline{z}}|_0 = 0.
$$

Qui implique

$$
g|_0 = \left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_0 = \mathrm{Re}\left(\left.\frac{\partial g}{\partial w}\right|_0\right) = 0.
$$

De plus (3.14) est bijective à l'origine. D'où l'application (3.14) est biholomorphe au voisinage de 0 pour toute fonction analytique $p(u)$ telle que $p(0) = 0$.

On suppose que l'hypersurface qui resulte M' est défiinie par

$$
v^* = F^*(z^*, \overline{z}^*, u^*).
$$

Alors l'application (3.14) donne l'égalité suivante

$$F\left(z,\overline{z},u\right)=F^{*}\left(z^{*},\overline{z}^{*},u^{*}\right)+\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left\{g\left(z^{*},u^{*}+\mathrm{i}\,v^{*}\right)-\bar{g}\left(z^{*},\overline{z}^{*},u^{*}-\mathrm{i}\,v^{*}\right)\right\},\tag{3.16}$$

où

$$\begin{aligned}&z=z^{*}+p(u^{*}+\mathrm{i}\,v^{*}),\\&\bar{z}=\bar{z}^{*}+\bar{p}(u^{*}-\mathrm{i}\,v^{*}),\\&u=u^{*}+\frac{1}{2}\left\{g\left(z^{*},u^{*}+\mathrm{i}\,v^{*}\right)+\bar{g}\left(z^{*},\bar{z}^{*},u^{*}-\mathrm{i}\,v^{*}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Puisque F et F^{*} sont analytiques réelles, on peut considérer $z^{*},\overline{z^{*}},u^{*}$ comme variables indépendantes. D'où la condition de $F^{*}\left(z^{*},\overline{z}^{*},u^{*}\right)=v^{*}=0$ est équivalente via l'équation (3.16) à l'équation suivante

$$g\left(z,u\right)-\bar{g}\left(0,u\right)=2\,\mathrm{i}\,F\left(z+p\left(u\right),\overline{p}\left(u\right),u+\frac{1}{2}\left\{g\left(z,u\right)-\bar{g}\left(0,u\right)\right\}\right).\tag{3.17}$$

Pour $z=0$ on a

$$g\left(z,u\right)-\bar{g}\left(0,u\right)=2\,\mathrm{i}\,F\left(p\left(u\right),\overline{p}\left(u\right),u+\frac{1}{2}\left\{g\left(0,u\right)-\bar{g}\left(0,u\right)\right\}\right).\tag{3.18}$$

Ainsi on voit facilement que

$$g\left(z,u\right)+\bar{g}\left(0,u\right)=0\tag{3.19}$$

si et seulement si

$$g\left(0,u\right)=\mathrm{i}\,F\left(p\left(u\right),\overline{p}\left(u\right),u\right).$$

On utilise (3.19), l'égalité (3.17) se réduit à

$$\begin{aligned}&g\left(z,u\right)-g\left(0,u\right)=-2\,\mathrm{i}\,F\left(p\left(u\right),\overline{p}\left(u\right),u\right)\\&+2\,\mathrm{i}\,F\left(z+p\left(u\right),\overline{p}\left(u\right),w+\frac{1}{2}\left\{g\left(z,u\right)-g\left(0,u\right)\right\}\right).\end{aligned}$$

L'application (3.14) du lemme3.4 est complètement déterminée par la fonction analytique $p(u)$. De l'égalité (3.13), on obtient le développement de la fonction holomorphe $g(z,w)$ comme série entière en z jusqu'à l'ordre 3 inclus comme suit.

On considère g définie implicitement par

$$\begin{aligned}&g\left(z,w\right)-g\left(0,w\right)=-2\,\mathrm{i}\,F\left(p\left(w\right),\overline{p}\left(w\right),w\right)\\&+2\,\mathrm{i}\,F\left(z+p\left(w\right),\overline{p}\left(w\right),w+\frac{1}{2}\left\{g\left(z,w\right)-g\left(0,w\right)\right\}\right),\end{aligned}$$

$$g\,(0,w) = \mathrm{i}\,F\,(p\,(w)\,,\bar{p}\,(w)\,,w)\,.$$

Le développement de Taylor de F à l'ordre 3 (w fixé) donne

$$\begin{aligned}
F\,(z+p(w),\bar{p}(w),w+u) = F\,(p(w),\bar{p}(w),w) &+ \sum_{\alpha} z^{\alpha} F_{\alpha} + u\,F' \\
&+ \sum_{\alpha,\beta} z^{\alpha} z^{\beta} F_{\alpha\beta} + u \sum_{\alpha} z^{\alpha} F'_{\alpha} + u^2 F'' \\
&+ \sum_{\alpha,\beta,\gamma} z^{\alpha} z^{\beta} z^{\gamma} F_{\alpha\beta\gamma} + u \sum_{\alpha,\beta} z^{\alpha} z^{\beta} F''_{\alpha\beta} \\
&+ u^2 \sum_{\alpha} z^{\alpha} F''_{\alpha} + u^3 F''' + \mathrm{o}\left(|(z,u)|^3\right). \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
F_{\alpha} &= \frac{\partial F}{\partial z^{\alpha}}\,(p(w),\bar{p}(w),w)\,, \quad F' = \frac{\partial F}{\partial u}\,(p(w),\bar{p}(w),w)\,, \\
F_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial z^{\alpha}\partial z^{\beta}}\,(p(w),\bar{p}(w),w)\,, \quad F'_{\alpha} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^{\alpha}\partial u}\,(p(w),\bar{p}(w),w)\,, \\
F'' &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\,(p(w),\bar{p}(w),w)\,, \\
F_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{6}\frac{\partial^3 F}{\partial z^{\alpha}\partial z^{\beta}\partial z^{\gamma}}\,(p(w),\bar{p}(w),w)\,, \quad F'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 F}{\partial z^{\alpha}\partial z^{\beta}\partial u}\,(p(w),\bar{p}(w),w)\,, \\
F''_{\alpha} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^3 F}{\partial z^{\alpha}\partial u^2}\,(p(w),\bar{p}(w),w)\,, \quad F''' = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 F}{\partial u^3}\,(p(w),\bar{p}(w),w)\,. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Soit

$$g(z,w) - g(0,w) = G_1(z) + G_2(z) + G_3(z) + \mathrm{o}(z^3). \qquad (3.22)$$

Le développement de g à l'ordre 3 (w fixé). En reportant (3.22) et (3.20) dans (3.13), on obtient

$$\begin{aligned}
&G_1(z) + G_2(z) + G_3(z) + \mathrm{o}(z^3) \\
&= 2\,\mathrm{i}\,F\left(z+p(w),\bar{p}(w),w+\frac{1}{2}\{g(z,w)-g(0,w)\right) \\
&- 2\,\mathrm{i}\,F(p(w),\bar{p}(w),w) \\
&= 2\,\mathrm{i}\sum_{\alpha} z^{\alpha} F_{\alpha} + \mathrm{i}\,(G_1(z)+G_2(z)+G_3(z))\;F'
\end{aligned}$$

$$+ 2\,\mathrm{i}\sum_{\alpha,\beta} z^\alpha z^\beta F_{\alpha\beta} + \mathrm{i}\left(G_1(z)+G_2(z)\right)\sum_\alpha z^\alpha F'_\alpha$$
$$+ \frac{\mathrm{i}}{2}\left(G_1^2(z) + 2G_1(z)G_2(z)\right) F''$$
$$+ 2\,\mathrm{i}\sum_{\alpha,\beta,\gamma} z^\alpha z^\beta z^\gamma F_{\alpha\beta\gamma} + \mathrm{i}\,G_1(z)\sum_{\alpha,\beta} z^\alpha z^\beta F'_{\alpha\beta}$$
$$+ \frac{\mathrm{i}}{2} G_1^2(z)\sum_\alpha z^\alpha F''_\alpha + \frac{\mathrm{i}}{4} G_1^3(z) F''' + \mathrm{o}\left(z^3\right). \tag{3.23}$$

L'identification des termes de degré 1, 2 et 3 dans les développents limités ci-dessus fournit

$$G_1(z) = 2\,\mathrm{i}\sum_\alpha z^\alpha F_\alpha + \mathrm{i}\,G_1(z)\,F', \tag{3.24}$$
$$G_2(z) = \mathrm{i}\,G_2(z)\,F' + 2\,\mathrm{i}\sum_{\alpha,\beta} z^\alpha z^\beta F_{\alpha\beta} + \mathrm{i}\,G_1(z)\sum_\alpha z^\alpha F'_\alpha$$
$$+ \frac{\mathrm{i}}{2} G_1^2(z) F'', \tag{3.25}$$
$$G_3(z) = \mathrm{i}\,G_3(z)\,F' + \mathrm{i}\,G_2(z)\sum_\alpha z^\alpha F'_\alpha + \mathrm{i}\,G_1(z)G_2(z)F''$$
$$+ 2\,\mathrm{i}\sum_{\alpha,\beta,\gamma} z^\alpha z^\beta z^\gamma F_{\alpha\beta\gamma} + \mathrm{i}\,G_1(z)\sum_{\alpha,\beta} z^\alpha z^\beta F'_{\alpha\beta}$$
$$+ \frac{\mathrm{i}}{2} G_1^2(z)\sum_\alpha z^\alpha F''_\alpha + \frac{\mathrm{i}}{4} G_1^3(z) F'''. \tag{3.26}$$

En définissant

$$F^{(1,0)} = \sum_\alpha z^\alpha F_\alpha,$$
$$F^{(2,0)} = \sum_{\alpha,\beta} z^\alpha z^\beta F_{\alpha\beta}, \quad F^{(1,1)} = \sum_\alpha z^\alpha F'_\alpha,$$
$$F^{(3,0)} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} z^\alpha z^\beta z^\gamma F_{\alpha\beta\gamma}, \quad F^{(2,1)} = \sum_{\alpha,\beta} z^\alpha z^\beta F'_{\alpha\beta}.$$
$$F^{(1,2)} = \sum_\alpha z^\alpha F''_\alpha,$$

Les relations (3.24)-(3.26) s'écrivent

$$G_1(z) = 2\,\mathrm{i}\,F^{(1,0)} + \mathrm{i}\,G_1(z)\,F', \tag{3.27}$$

$$G_2(z) = \mathrm{i}\, G_2(z)\, F' + 2\,\mathrm{i}\, F^{(2,0)} + \mathrm{i}\, G_1(z) F^{(1,1)} + \frac{\mathrm{i}}{2} G_1^2(z) F'', \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} G_3(z) &= \mathrm{i}\, G_3(z)\, F' + \mathrm{i}\, G_2(z) F^{(1,1)} + \mathrm{i}\, G_1(z) G_2(z) F'' \\ &\quad + 2\,\mathrm{i}\, F^{(3,0)} + \mathrm{i}\, G_1(z) F^{(2,1)} + \frac{\mathrm{i}}{2} G_1^2(z) F^{(1,2)} + \frac{\mathrm{i}}{4} G_1^3(z) F'''. \end{aligned} \tag{3.29}$$

On a finalement

$$G_1(z) = 2\,\mathrm{i}\,(1 - \mathrm{i}\, F')^{-1}\, F^{(1,0)}, \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned} G_2(z) &= (1 - \mathrm{i}\, F')^{-1} \left(2\,\mathrm{i}\, F^{(2,0)} + \mathrm{i}\, G_1(z) F^{(1,1)} + \frac{\mathrm{i}}{2} G_1^2(z) F'' \right) \\ &= 2\,\mathrm{i}\,(1 - \mathrm{i}\, F')^{-1}\, F^{(2,0)} - 2\,(1 - \mathrm{i}\, F')^{-2}\, F^{(1,0)} F^{(1,1)} \\ &\quad - 2\,\mathrm{i}\,(1 - \mathrm{i}\, F')^{-3} \left(F^{(1,0)}\right)^2 F'', \end{aligned} \tag{3.31}$$

et

$$\begin{aligned} G_3(z) &= (1 - \mathrm{i}\, F')^{-1} \Big(\mathrm{i}\, G_2(z) F^{(1,1)} + \mathrm{i}\, G_1(z) G_2(z) F'' \\ &\quad + 2\,\mathrm{i}\, F^{(3,0)} + \mathrm{i}\, G_1(z) F^{(2,1)} + \frac{\mathrm{i}}{2} G_1^2(z) F^{(1,2)} + \frac{\mathrm{i}}{4} G_1^3(z) F''' \Big) \\ &= 2\,\mathrm{i}\,(1 - \mathrm{i}\, F')^{-1}\, F^{(3,0)} + \mathrm{i}\,(1 - \mathrm{i}\, F')^{-1}\, G_1(z) F^{(2,1)} \\ &\quad + \frac{\mathrm{i}}{2}\,(1 - \mathrm{i}\, F')^{-1}\, G_1^2(z) F^{(1,2)} + (1 - \mathrm{i}\, F')^{-1}\, \mathrm{i}\, G_2(z) F^{(1,1)} \\ &\quad + (1 - \mathrm{i}\, F')^{-1}\, \mathrm{i}\, G_1(z) G_2(z) F'' + (1 - \mathrm{i}\, F')^{-1}\, \frac{\mathrm{i}}{4} G_1^3(z) F''', \end{aligned}$$

d'où

$$G_3(z) = 2\,\mathrm{i}\,(1 - \mathrm{i}\, F')^{-1}\, F^{(3,0)} - 2\,(1 - \mathrm{i}\, F')^{-2}\, F^{(1,0)} F^{(2,1)} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} &- 2\,\mathrm{i}\,(1 - \mathrm{i}\, F')^{-3} \left(F^{(1,0)}\right)^2 F^{(1,2)} - 2\,(1 - \mathrm{i}\, F')^{-2}\, F^{(2,0)} F^{(1,1)} \\ &- 2\,\mathrm{i}\,(1 - \mathrm{i}\, F')^{-3}\, F^{(1,0)} \left(F^{(1,1)}\right)^2 + 2\,(1 - \mathrm{i}\, F')^{-4} \left(F^{(1,0)}\right)^2 F^{(1,1)} F'' \\ &- 4\,\mathrm{i}\,(1 - \mathrm{i}\, F')^{-3}\, F^{(1,0)} F^{(2,0)} F'' + 4\,(1 - \mathrm{i}\, F')^{-4} \left(F^{(1,0)}\right)^2 F^{(1,1)} F'' \\ &+ 4\,\mathrm{i}\,(1 - \mathrm{i}\, F')^{-5} \left(F^{(1,0)}\right)^3 (F'')^2 + 2\,(1 - \mathrm{i}\, F')^{-4} \left(F^{(1,0)}\right)^3 F''' \end{aligned} \tag{3.33}$$

et

$$g(z, w) = \mathrm{i}\, F(p(w), \overline{p}(w), w)$$

$$
\begin{aligned}
&+2\,\mathrm{i}\,(1-\mathrm{i}\,F')^{-1}\left(F^{(1,0)}+F^{(2,0)}+F^{(3,0)}\right)\\
&-2\,(1-\mathrm{i}\,F')^{-2}\left(F^{(1,0)}F^{(1,1)}+F^{(1,0)}F^{(2,1)}+F^{(2,0)}F^{(1,1)}\right)\\
&-2\,\mathrm{i}\,(1-\mathrm{i}\,F')^{-3}\Big(\left(F^{(1,0)}\right)^2F''+F^{(1,0)}\left(F^{(1,1)}\right)^2\\
&\qquad\qquad +2F^{(1,0)}F^{(2,0)}F''+\left(F^{(1,0)}\right)^2F^{(1,2)}\Big)\\
&+2\,(1-\mathrm{i}\,F')^{-4}\left(3\left(F^{(1,0)}\right)^2F^{(1,1)}F''+\left(F^{(1,0)}\right)^3F'''\right)\\
&+4\,\mathrm{i}\,(1-\mathrm{i}\,F')^{-5}\left(F^{(1,0)}\right)^3\left(F''\right)^2+\mathrm{o}\left(z^3\right),
\end{aligned}
$$

on utilise lelemme3.4, on a la condition suivante sur l'hypersurface réelle M'

$$v=\mathrm{o}\,(z\overline{z})$$

Ainsi pour obtenir les termes jusqu'a l'ordre v^2 compris, il suffit de calculer les fonctions

$$F^*_{kl}\,(z,\overline{z},u)$$

de M' jusqu'au type $(k,l),k,l\leq 5$ compris. On obtient les développements de $p^{\alpha}\,(u+\mathrm{i}\,v)$ et $p^{\overline{\beta}}\,(u+\mathrm{i}\,v)$ comme series entières en v comme suit

$$
\begin{aligned}
p^{\alpha}\,(u+\mathrm{i}\,v)&=p^{\alpha}+p^{\alpha'}\,\mathrm{i}\,v+p^{\alpha''}.\frac{(\mathrm{i}\,v)^2}{2}+\mathrm{o}\left(v^3\right).\\
p^{\bar{\beta}}\,(u+\mathrm{i}\,v)&=p^{\bar{\beta}}+p^{\bar{\beta}'}\,\mathrm{i}\,v+p^{\bar{\beta}''}.\frac{(\mathrm{i}\,v)^2}{2}+\mathrm{o}\left(v^3\right).
\end{aligned}
$$

On utilise ce développement, on développe la fonction holomorphe $g(z,w)$ comme serie entière en z et v dans (3.10) comme suit

$$
\begin{aligned}
g(z,w)\ &=\sum_{k,l=0}^{\infty}g_k^{(l)}\,(z,u)\,.\frac{(\mathrm{i}\,v)^l}{l!}\\
&=\mathrm{i}\,F\,(p\,(u)\,,\overline{p}\,(u)\,,u)++g_0'\,(0,u)\,\mathrm{i}\,v+g_0''\,(0,u)\,.\frac{(\mathrm{i}\,v)^2}{2}\\
&+g_1\,(z,u)+g_1'\,(z,u)\,\mathrm{i}\,v+g_1''\,(z,u)\,.\frac{(\mathrm{i}\,v)^2}{2}\\
&+\ g_2\,(z,u)+g_2'\,(z,u)\,\mathrm{i}\,v+g_3\,(z,u)\\
&+\mathrm{o}\,(z^4)+\mathrm{o}\,(z^3v)+\mathrm{o}\,(z^2v^2)+\mathrm{o}\,(zv^3)+\mathrm{o}\,(v^3)\,.\\
&\text{où }g_k^{(l)}\,(\mu z,u)=\mu^k g_k^{(l)}\,(z,u)\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(z,w) &= \sum_{k,l=0}^{\infty} g_k^{(l)}(z,u)\,.\frac{(\mathrm{i}\,v)^l}{l!} \\
&= \mathrm{i}\,F\left(p\left(u\right),\overline{p}\left(u\right),u\right) + + g_0'\left(0,u\right)\mathrm{i}\,v + g_0''\left(0,u\right).\frac{(\mathrm{i}\,v)^2}{2} \\
&+ g_1\left(z,u\right) + g_1'\left(z,u\right)\mathrm{i}\,v + g_1''\left(z,u\right).\frac{(\mathrm{i}\,v)^2}{2} \\
&+ \ g_2\left(z,u\right) + g_2'\left(z,u\right)\mathrm{i}\,v + g_3\left(z,u\right) \\
&+ \mathrm{o}\left(z^4\right) + \mathrm{o}\left(z^3 v\right) + \mathrm{o}\left(z^2 v^2\right) + \mathrm{o}\left(z v^3\right) + \mathrm{o}\left(v^3\right)
\end{aligned}
$$

où $g_k^{(l)}\left(\mu z,u\right) = \mu^k g_k^{(l)}\left(z,u\right)$ pour tout nombre complexe μ.

Les fonctions $g_k^{(l)}\left(z,u\right)$ dépendent analytiquement des fonctions $p(u)$ et $\overline{p}(u)$, et polynomialement de leurs dérivées jusqu'à l'ordre l compris, tel que la somme des ordres de toutes les dérivées $g_k^{(l)}\left(z,u\right)$ est inférieur ou égal à l'entier l. En ordre inferieur, on obtient

$$
\begin{aligned}
g_0\left(0,u\right) &= \mathrm{i}\,F\left(p\left(u\right),\overline{p}\left(u\right),u\right) = \mathrm{o}\left(u\right) \\
g_0'\left(0,u\right) &= \mathrm{i}\,F_\alpha p^{\alpha'} + \mathrm{i}\,F_{\bar\beta} p^{\bar\beta'} + \mathrm{i}\,F' = \mathrm{o}\left(1\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_0'\left(0,u\right) = {} & \mathrm{i}\,F_\alpha p^{\alpha''} + \mathrm{i}\,F_{\bar\beta} p^{\bar\beta''} + 2\,\mathrm{i}\,F_{\alpha\beta} p^{\alpha'} p^{\beta'} + 2\,\mathrm{i}\,F_{\alpha\beta} p^{\alpha'} p^{\bar\beta'} + 2\,\mathrm{i}\,F_{\alpha\beta} p^{\bar\alpha'} p^{\bar\beta'} \\
& + 2\,\mathrm{i}\,F_\alpha' p^{\alpha'} + 2\,\mathrm{i}\,F_{\overline{\beta}}' p^{\overline{\beta}'} + 2\,\mathrm{i}\,F''
\end{aligned}
$$

et

$$
g_1\left(z,u\right) = 2\,\mathrm{i}\left(1-F'\right)^{-1} F_\alpha z^\alpha = \mathrm{o}\left(zu\right).
$$

$$
\begin{aligned}
g_1'\left(z,u\right) &= 2\,\mathrm{i}\left(1-F'\right)^{-1}\left\{2F_{\alpha\beta} p^\alpha p^{\beta'} + F_{\alpha\beta} p^{\alpha'} p^{\bar\beta'} + F_\alpha' p^\alpha\right\} \\
&\quad -2\,\mathrm{i}\left(1-F'\right)^{-1}\left\{F_\alpha' p^{\alpha'} + F_{\overline{\beta}}' p^{\overline{\beta}'} + 2F''\right\} F_\alpha z^\alpha \\
&= 4\,\mathrm{i}\ F_{\alpha\beta}\big|_0\, z^\alpha p^{\beta'} + 2\,\mathrm{i}\ F_{\alpha\overline{\beta}}\big|_0\, z^\alpha p^{\bar\beta'} + \mathrm{o}\left(zu\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_2\left(z,u\right) &= 2\,\mathrm{i}\left(1-F'\right)^{-1} F_{\alpha\beta} z^\alpha z^\beta - 2\,\mathrm{i}\left(1-F'\right)^{-2} F_\alpha z^\alpha F_\beta' z^\beta \\
&\quad -2\,\mathrm{i}\left(1-F'\right)^{-3}\left(F_\alpha z^\alpha\right)^2 F'' \\
&= 2\,\mathrm{i}\ F_{\alpha\beta}\big|_0\, z^\alpha z^\beta + \mathrm{o}\left(z^2 u\right).
\end{aligned}
$$

L'hypersurface réelle M est définie par l'équation suivante

$$
\begin{aligned}
v \ &= F\left(z+p\left(u+\mathrm{i}\,v\right),\ \bar{z}+\overline{p}\left(u-\mathrm{i}\,v\right),u+\frac{1}{2}\left\{g\left(z,u+\mathrm{i}\,v\right)-\bar{g}\left(0,u-\mathrm{i}\,v\right)\right\}\right)\\
&-\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left\{g\left(z,u+\mathrm{i}\,v\right)-\bar{g}\left(0,u-\mathrm{i}\,v\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

On développe le second membre de l'équation (3.34) en termes d'ordre inferieur en v comme suit

$$
\begin{aligned}
&F\left(z+p\left(u+\mathrm{i}\,v\right),\ \bar{z}+\overline{p}\left(u-\mathrm{i}\,v\right),u+\frac{1}{2}\left\{g\left(z,u+\mathrm{i}\,v\right)-\bar{g}\left(0,u-\mathrm{i}\,v\right)\right\}\right)\\
&-\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left\{g\left(z,u+\mathrm{i}\,v\right)-\bar{g}\left(0,u-\mathrm{i}\,v\right)\right\}\\
&=A\left(z,\overline{z},u\right)+vB\left(z,\overline{z},u\right)+v^2C\left(z,\overline{z},u\right)+\mathrm{o}\left(v^3\right).
\end{aligned}
$$

Donc on obtient

$$
A\left(z,\overline{z},u\right)=F\left(z+p\left(u\right),\bar{z}+\overline{p}\left(u\right),u+\operatorname{Re}g\left(z,u\right)\right)-\operatorname{Im}g\left(0,u\right),
$$

$$
\begin{aligned}
B\left(z,\overline{z},u\right)\ &=\mathrm{i}\,F_{\alpha}\left(z+p\left(u\right),\bar{z}+\overline{p}\left(u\right),u+\operatorname{Re}g\left(z,u\right)\right)p^{\alpha'}(u)\\
&-\mathrm{i}\,F_{\overline{\beta}}\left(z+p\left(u\right),\bar{z}+\overline{p}\left(u\right),u+\operatorname{Re}g\left(z,u\right)\right)p^{\bar{\beta}'}(u)\\
&-F'\left(z+p\left(u\right),\bar{z}+\overline{p}\left(u\right),u+\operatorname{Re}g\left(z,u\right)\right)\operatorname{Im}g'\left(z,u\right)\\
&-\operatorname{Re}g'\left(z,u\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C\left(z,\overline{z},u\right)\ &=F_{\alpha\beta}\left(z+p\left(u\right),\bar{z}+\overline{p}\left(u\right),u+\operatorname{Re}g\left(z,u\right)\right)p^{\alpha'}(u)p^{\beta'}(u)\\
&+F_{\alpha\overline{\beta}}\left(z+p\left(u\right),\bar{z}+\overline{p}\left(u\right),u+\operatorname{Re}g\left(z,u\right)\right)p^{\alpha'}(u)p^{\bar{\beta}'}(u)\\
&-F_{\bar{\alpha}\overline{\beta}}\left(z+p\left(u\right),\bar{z}+\overline{p}\left(u\right),u+\operatorname{Re}g\left(z,u\right)\right)p^{\bar{\alpha}'}(u)p^{\bar{\beta}'}(u)\\
&-\mathrm{i}\,F'_{\alpha}\left(z+p\left(u\right),\bar{z}+\overline{p}\left(u\right),u+\operatorname{Re}g\left(z,u\right)\right)p^{\alpha'}(u)\operatorname{Im}g'\left(z,u\right)\\
&+\mathrm{i}\,F'_{\overline{\beta}}\left(z+p\left(u\right),\bar{z}+\overline{p}\left(u\right),u+\operatorname{Re}g\left(z,u\right)\right)p^{\bar{\beta}'}(u)\operatorname{Im}g'\left(z,u\right)\\
&+F''\left(z+p\left(u\right),\bar{z}+\overline{p}\left(u\right),u+\operatorname{Re}g\left(z,u\right)\right)\left(\operatorname{Im}g'\left(z,u\right)\right)^2\\
&-\frac{1}{2}F_{\alpha}\left(z+p\left(u\right),\bar{z}+\overline{p}\left(u\right),u+\operatorname{Re}g\left(z,u\right)\right)p^{\alpha''}(u)\\
&-\frac{1}{2}F_{\overline{\beta}}\left(z+p\left(u\right),\bar{z}+\overline{p}\left(u\right),u+\operatorname{Re}g\left(z,u\right)\right)p^{\bar{\beta}''}(u)\\
&-\frac{1}{2}F'\left(z+p\left(u\right),\bar{z}+\overline{p}\left(u\right),u+\operatorname{Re}g\left(z,u\right)\right)\operatorname{Re}g''\left(z,u\right)\\
&+\frac{1}{2}\operatorname{Im}g''\left(z,u\right).
\end{aligned}
$$

Où

$$g'(z,u)=\left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)(z,u),$$
$$g''(z,u)=\left(\frac{\partial^2 g}{\partial w^2}\right)(z,u).$$

On décompose $A(z,\bar{z},u), B(z,\bar{z},u)$ et $C(z,\bar{z},u)$ comme suit

$$A(z,\overline{z},u)=\sum_{\min(k,l)\geq 1} A_{kl}(z,\overline{z},u),$$

$$B(z,\overline{z},u)=\sum_{\min(k,l)\geq 1} B_{kl}(z,\overline{z},u),$$

$$C(z,\overline{z},u)=\sum_{\min(k,l)\geq 1} C_{kl}(z,\overline{z},u).$$

Il est facile de voir que

1-$A_{kl}(z,\overline{z},u)$ dépendent analytiquement des fonctions $p(u)$ et $\overline{p}(u)$.

2-$B_{kl}(z,\overline{z},u)$ dépendent analytiquement des fonctions $p(u)$ et $\overline{p}(u)$, en plus linéairement des dérivées $p'(u)$ et $\overline{p}'(u)$.

3-$C_{kl}(z,\overline{z},u)$ dépendent analytiquement des fonctions $p(u)$ et $\overline{p}(u)$, quadratiquement des dérivées $p'(u)$ et $\overline{p}'(u)$ et linéairement des dérivées secondes $p''(u)$ et $\overline{p}''(u)$ tel que la somme des ordres des dérivées de $p(u)$ et $\overline{p}(u)$ dans chaque terme est inferieur ou égal à 2.

Lemme 3.5. *(3.4) : Les fonctions $C_{0t}(z,\overline{z},u), t\in\mathbb{N}$, ne dépendent pas des dérivées $p''(u)$ et $\overline{p}''(u)$.*

Cette assertion est facile à verifier, on observe que les fonctions suivantes

$$C(z,\overline{z},u)\ \text{ et }\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial u^2}\right)(z,\overline{z},u)$$

dépendent de la même manière des dérivées $p''(u)$ et $\overline{p}''(u)$, car

$$A(z,\overline{z},u+\mathrm{i}\,v)=A(z,\overline{z},u)+\mathrm{i}\,v\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)(z,\overline{z},u)-\frac{v^2}{2}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial u^2}\right)(z,\overline{z},u)+...$$

De $A(z,0,u)=0$ de $g(z,u)$ définie dans le lemme 3.4 avec $g(0,u)=\mathrm{i}\,F(p(u),\overline{p}(u),u)$. Ainsi les identités suivantes

$$\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)(z,0,u)=\left(\frac{\partial^2 A}{\partial u^2}\right)(z,0,u)=...=0.$$

L'identité

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial u^2}\right)(z,0,u)=0,$$

donne la relation désirée entre les termes ayant p'' et $\overline{p}''$ et les termes n'ayant pas p'' et $\overline{p}''$ de sorte que nous verifions que la fonction $C\,(z,0,u)$ est indépendente de la dérivée p'' et $\overline{p}''$. ce qui prouve l'assertion du lemme 3.5.

On calcul explicitement le coté droit de l'équation (3.34) en ordre inférieur tel que

$$\begin{aligned}
v &= A_{11}\,(z,\overline{z},u)+A_{22}\,(z,\overline{z},u)+A_{12}\,(z,\overline{z},u)+A_{13}\,(z,\overline{z},u)\\
&\quad+A_{23}\,(z,\overline{z},u)+A_{21}\,(z,\overline{z},u)+A_{31}\,(z,\overline{z},u)+A_{32}\,(z,\overline{z},u)\\
&\quad+v\,\{B_{00}\,(z,\overline{z},u)+B_{11}\,(z,\overline{z},u)+B_{01}\,(z,\overline{z},u)+B_{02}\,(z,\overline{z},u)\\
&\quad+B_{12}\,(z,\overline{z},u)+B_{10}\,(z,\overline{z},u)+B_{20}\,(z,\overline{z},u)+B_{21}\,(z,\overline{z},u)\}\\
&\quad+v^2\,\{C_{00}\,(z,\overline{z},u)+C_{01}\,(z,\overline{z},u)+C_{10}\,(z,\overline{z},u)\}\\
&\quad+\mathrm{o}\left(z^1\overline{z}^4\right)+\mathrm{o}\left(z^4\overline{z}^1\right)+\mathrm{o}\left(vz^3\right)+\mathrm{o}\left(v\overline{z}^3\right)+\mathrm{o}\left(v^3\right)\\
&\quad+\sum_{\substack{\min(k,l)\geq 1\\ k+l\geq 6}}\mathrm{o}\left(z^k\overline{z}^l\right)+\sum_{k+l\geq 4}\mathrm{o}\left(z^k\overline{z}^l\right)+\sum_{k+l\geq 2}\mathrm{o}\left(v^2z^k\overline{z}^l\right).
\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
A_{11}\,(z,\overline{z},u) &= F_{\alpha\overline{\beta}}z^{\alpha}\overline{z}^{\beta}-\mathrm{i}\,(1+F')^{-1}\,F'_{\alpha}z^{\alpha}F_{\overline{\beta}}\overline{z}^{\beta}\\
&\quad+\mathrm{i}\,(1-F')^{-1}\,F_{\alpha}z^{\alpha}F'_{\overline{\beta}}\overline{z}^{\beta}+2\,(1+F')^{-1}\,(1-F')^{-1}\,F''F_{\alpha}z^{\alpha}F_{\overline{\beta}}\overline{z}^{\beta}\\
&= \langle z,z\rangle+\mathrm{o}\,(z\overline{z}u)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{00}\,(z,\overline{z},u) &= \mathrm{i}\,(1+F')^{-1}\,F_{\alpha}z^{\alpha'}-\mathrm{i}\,(1-F')^{-1}\,F_{\overline{\beta}}z^{\bar{\beta}'}-(F')^2\\
&= \mathrm{o}\,(1)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{01}\,(z,\overline{z},u) &= 2\,\mathrm{i}\,F_{\alpha\overline{\beta}}p^{\alpha'}z^{\bar{\beta}}+2F''F_{\bar{\alpha}}z^{\bar{\alpha}}+\mathrm{i}\,(1+F')\,F_{\bar{\alpha}}z^{\bar{\alpha}}+\mathrm{i}\,F'_{\alpha}p^{\alpha'}\,(1+F')\,F_{\bar{\alpha}}z^{\bar{\alpha}}\\
&\quad+2\,\mathrm{i}\left(F_{\alpha}p^{\alpha'}+F'_{\bar{\beta}}p^{\bar{\beta}'}\right)F''\,(1+\mathrm{i}\,F')^{-1}\,F_{\bar{\gamma}}z^{\bar{\gamma}}.
\end{aligned}$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned}
v &= F^{*}_{11}\,(z,\overline{z},u)+F^{*}_{22}\,(z,\overline{z},u)+F^{*}_{12}\,(z,\overline{z},u)+F^{*}_{13}\,(z,\overline{z},u)\\
&\quad+F^{*}_{23}\,(z,\overline{z},u)+F^{*}_{21}\,(z,\overline{z},u)+F^{*}_{31}\,(z,\overline{z},u)+F^{*}_{32}\,(z,\overline{z},u)\\
&\quad+\mathrm{o}\left(z\overline{z}^4\right)+\mathrm{o}\left(z^4\overline{z}\right)+\sum_{\substack{\min(k,l)\geq 1\\ k+l\geq 6}}\mathrm{o}\left(z^k\overline{z}^l\right).
\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
F_{11}^{*}(z,\overline{z},u) &= (1-B_{00})^{-1}A_{11}\\
F_{12}^{*}(z,\overline{z},u) &= (1-B_{00})^{-1}A_{12}+(1-B_{00})^{-2}A_{11}B_{01}\\
F_{13}^{*}(z,\overline{z},u) &= (1-B_{00})^{-1}A_{12}+(1-B_{00})^{-2}(A_{11}B_{02}+A_{12}B_{01})+(1-B_{00})^{-3}A_{11}B_{01}^{2}\\
F_{22}^{*}(z,\overline{z},u) &= (1-B_{00})^{-1}A_{22}+(1-B_{00})^{-2}(A_{11}B_{11}+A_{12}B_{10}+A_{12}B_{01})\\
&\quad+(1-B_{00})^{-3}(2A_{11}B_{01}B_{10}+A_{11}C_{00})\\
F_{23}^{*}(z,\overline{z},u) &= (1-B_{00})^{-1}A_{23}+(1-B_{00})^{-2}(A_{11}B_{12}+A_{12}B_{11}+A_{21}B_{02}+A_{13}B_{10}+A_{22}B_{01})\\
&\quad+(1-B_{00})^{-3}\big(2A_{11}B_{01}B_{11}+2A_{11}B_{10}B_{02}+2A_{12}B_{01}B_{10}+A_{21}B_{01}^{2}+A_{11}^{2}C_{01}\\
&\quad+2A_{11}B_{12}C_{10}\big)+3(1-B_{00})^{-4}\big(A_{11}B_{02}^{2}B_{10}+A_{11}^{2}B_{01}C_{00}\big).
\end{aligned}$$

Du lemme 3.5, les fonctions F_{22}^{*} et F_{23}^{*} ne dépendent pas des dérivées p'' et $\overline{p}''$, et la dépendence des coefficients dans F_{22}^{*} et F_{23}^{*} des dérivées $p'(u)$ et $\overline{p}'(u)$ est de la forme

$$\frac{A_1(up,\bar{p},p',\bar{p}')}{(1-B_{00})^{-3}}, \tag{3.35}$$

et

$$\frac{A_2(up,\bar{p},p',\bar{p}')}{(1-B_{00})^{-4}}. \tag{3.36}$$

Où A_1 dépend analytiquement de $p,\bar{p}$ et u et au plus quadratiquement de $p',\bar{p}'$ et A_2 dépend analytiquement de $p,\bar{p}$ et u et au plus cubicalement de $p',\bar{p}'$.

Soit M' l'hypersurface réelle obtenue dans le lemme 3.4 par l'application biholomorphique (3.14), qui est définie par l'équation suivante

$$v=\sum_{\min(k,l)\geq 1}F_{kl}^{*}(z,\overline{z},u).$$

Alors il existe une unique fonction analytique $f(z,u)$ telle que

$$F_{11}^{*}(z+f(z,u),\overline{z},u)=\sum_{k\geq 1}F_{k1}^{*}(z,\overline{z},u)$$

et la fonction $D(z,u)$ Satisfont la condition $f(0,u)=\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,u)$. Ainsi $f(z,u)$ dépend analytiquement de $p,\bar{p}$ et u et rationnellement des dérivées p' et $\bar{p}'$.

On décompose $f(z,u)$ comme suit

$$f(z,u)=\sum_{k\geq 2} f_k(z,u).$$

Où

$$f_k(\mu z,u)=\mu^k f_k(z,u),\ \text{pour tout } \mu\in\mathbb{C}.$$

Alors les fonctions $f_2(z,u)$ et $f_3(z,u)$ sont données par

$$\begin{aligned}
&A_{11}(f_2(z,u),\overline{z},u)=A_{21}+(1-B_{00})^{-1}A_{11}B_{10},\\
&A_{11}(f_3(z,u),\overline{z},u)=A_{31}+(1-B_{00})^{-1}(A_{11}B_{20}+A_{21}B_{10})+(1-B_{00})^{-2}A_{11}B_{10}^2.
\end{aligned}$$

Où $f_2(z,u)$ et $f_3(z,u)$ ne dépendent pas des dérivées du second ordre p'' et $\overline{p}''$

Alors on obtient

$$\begin{aligned}
v\ &=\textstyle\sum_{\min(k,l)\geq 1}F^*_{kl}(z,\overline{z},u)\\
&=F^*_{11}(z,\overline{z},u)+F^*_{11}\left(z,\bar{f}(z,u),u\right)+F^*_{11}(f(z,u),\overline{z},u)+\textstyle\sum_{\min(k,l)\geq 2}F^*_{kl}(z,\overline{z},u)\\
&=F^*_{11}\left(z+f(z,u),\overline{z}+\bar{f}(z,u),u\right)+\textstyle\sum_{\min(k,l)\geq 2}G_{kl}(z,\overline{z},u).
\end{aligned}$$

On note

$$\begin{aligned}
G_{22}(z,\overline{z},u)&=F^*_{22}(z,\overline{z},u)-F^*_{11}\left(f_2(z,u),\bar{f}_2(z,u),u\right),\\
G_{23}(z,\overline{z},u)&=F^*_{23}(z,\overline{z},u)-F^*_{11}\left(f_2(z,u),\bar{f}_3(z,u),u\right).
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que G_{22} et G_{23} dépendent de $p,\bar{p},u,p'$ et $\bar{p}'$de la même forme comme dans (3.35) et (3.35).

On prend une fonction analytique $E(u)$ telle que

$$F^*_{11}(z,\overline{z},u)=\langle E(u)z,E(u)z\rangle\ \text{ et } E(0)=\mathrm{i}\,d_{n\times n}.$$

La fonction $E(u)$ est déterminée par la relation suivante

$$E_1(u)=U(u)\,E(u). \tag{3.37}$$

$$\text{Où }\ \langle U(u)\,z,U(u)\,z\rangle=\langle z,z\rangle.$$

Alors l'application biholomorphe définie par l'équation suivante

$$z^*=E(u)\{z+f(z,w)\},$$

$$w^* = w.$$

Transforme M' en une hypersurface de la forme suivante

$$v = \langle z, z \rangle + \sum_{\min(k,l)\geq 2} H_{kl}\left(z, \overline{z}, u\right). \tag{3.38}$$

Par la suite, on obtient une hypersurface réelle dans (3.38) par une application biholomorphe comme suit

$$\begin{aligned} z^* &= U(w)E(w)\left\{z + f\left(z, w\right)\right\}, \\ w^* &= w. \end{aligned}$$

Où la fonction holomorphe $U(w)$ satisfait la condition (3.37).

On utilise le développement

$$\begin{aligned} E(u) &= E(w) - \mathrm{i}\, vE'(w) + ..., \\ U(u) &= U(w) - \mathrm{i}\, vU'(w) + ... \end{aligned} \tag{3.39}$$

On obtient

$$\begin{aligned} v &= F^*_{11}\left(z + f\left(z, u\right), \overline{z} + \bar{f}\left(z, u\right), u\right) + \textstyle\sum_{\min(k,l)\geq 2} G_{kl}\left(z, \overline{z}, u\right) \\ &= \left\langle E(u)\left(z + f\left(z, u\right)\right), E(u)\left(z + f\left(z, u\right)\right)\right\rangle + \textstyle\sum_{\min(k,l)\geq 2} G_{kl}\left(z, \overline{z}, u\right) \\ &= \left\langle U(u)E(u)\left(z + f\left(z, u\right)\right), U(u)E(u)\left(z + f\left(z, u\right)\right)\right\rangle + \textstyle\sum_{\min(k,l)\geq 2} G_{kl}\left(z, \overline{z}, u\right) \\ &= \left\langle U(w)E(w)\left(z + f\left(z, w\right)\right), U(w)E(w)\left(z + f\left(z, w\right)\right)\right\rangle \\ &\quad - \mathrm{i}\, v\left\langle U(w)E(w)\left(z + f\left(z, w\right)\right), U(w)E(w)\left(z + f\left(z, w\right)\right)\right\rangle \\ &\quad + \mathrm{i}\, v\left\langle U(w)E(w)\left(z + f\left(z, w\right)\right), U'(w)E(w)\left(z + f\left(z, w\right)\right)\right\rangle \\ &\quad - \mathrm{i}\, v\left\langle\left\{E'(w)\left(z + f\left(z, w\right)\right) + E(w)f_4(z, w)\right\}, \left\{E'(w)\left(z + f\left(z, w\right)\right) + E(w)f_4(z, w)\right\}\right\rangle \\ &\quad + \mathrm{i}\, v\left\langle E(w)\left(z + f\left(z, w\right)\right), U(w)E(w)\left(z + f\left(z, w\right)\right)\right\rangle \\ &\quad + \mathrm{o}\left(z\overline{z}v^2\right) + \textstyle\sum_{\min(k,l)\geq 2} G_{kl}\left(z, \overline{z}, u\right). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Où

$$\begin{aligned} w &= u + \mathrm{i}\, v, \\ U'(u) &= \frac{dU}{du}, E'(u) = \frac{dE}{du}(u), \\ f_u(z, w) &= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(z, w). \end{aligned}$$

Par l'introduction de la variable holomorphe $z^* = z + f(z,w)$, on obtient par l'équation (3.40)

$$
\begin{aligned}
v \; & = \langle U(w)E(w)z^*, U(w)E(w)z^*\rangle + G_{22}\left(z^*, \overline{z^*}, u\right) \\
& - \mathrm{i}\,\langle E(u)z^*, E(u)z^*\rangle \left\{U'(u)E(u)z^*, U(u)E(u)z^*\right\} - \langle U(u)E(u)z^*, U'(u)E(u)z^*\rangle \\
& - \langle U(u)E(u)z^*, U'(u)E(u)z^*\rangle \\
& - \mathrm{i}\,\langle E(u)z^*, E(u)z^*\rangle \left\{\langle E'(u)E(u)z^*, E(u)z^*\rangle - \langle E(u)z^*, E'(u)z^*\rangle\right\} \\
& G^*_{23}\left(z^*, \overline{z^*}, u^*\right) + G^*_{32}\left(z^*, \overline{z^*}, u^*\right) + \sum\nolimits_{\substack{\min(k,l)\geq 1 \\ k+l\geq 6}} G^*_{kl}\left(z^*, \overline{z^*}, u^*\right).
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

Où

$$
\begin{aligned}
G^*_{23}\left(z, \overline{z}, u\right) \; & = G_{23}\left(z, \overline{z}, u\right) + \mathrm{i}\, F^*_{11}\left(z, \overline{z}, u\right) F^*_{11}\left(z, \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(z,u)}, u\right) \\
& - \sum\nolimits_{\beta} \left(\frac{\partial G_{22}}{\partial \overline{z^{\beta}}}\right)\left(z, \overline{z}, u\right) \overline{f^{\beta}_2\left(z,u\right)} \\
& = G_{23}\left(z, \overline{z}, u\right) + \mathrm{i}\, F^*_{11}\left(z, \overline{z}, u\right) \left(\frac{\partial F^*_{12}}{\partial u}\right)\left(z, \overline{z}, u\right) \\
& - \mathrm{i}\, F^*_{11}\left(z, \overline{z}, u\right) \left(\frac{\partial F^*_{11}}{\partial u}\right)\left(z, \overline{f_2(zu)}, u\right) \\
& - \sum\nolimits_{\beta} \left(\frac{\partial G_{22}}{\partial \overline{z^{\beta}}}\right)\left(z, \overline{z}, u\right) \overline{f^{\beta}_2\left(z,u\right)}.
\end{aligned}
$$

D'après l'application biholomorphe (3.39), on obtient

$$
\begin{aligned}
v \; & = \langle z^*, z^*\rangle + H^*_{22}\left(z^*, \overline{z^*}, u^*\right) + H_{23}\left(z^*, \overline{z^*}, u^*\right) + H_{32}\left(z^*, \overline{z^*}, u^*\right) \\
& + \sum\nolimits_{\substack{\min(k,l)\geq 1 \\ k+l\geq 6}} H_{kl}\left(z^*, \overline{z^*}, u^*\right).
\end{aligned}
$$

Où

$$
\begin{aligned}
H_{22}\left(z, \overline{z}, u\right) \; & = G_{22}\left(U^{-1}(u)E^{-1}(u), \overline{U^{-1}(u)E^{-1}(u)}, u\right) \\
& - \mathrm{i}\,\langle z, z\rangle \left\{\langle U'(u)U^{-1}(u)z, z\rangle - \langle z, U'(u)U^{-1}(u)z\rangle\right\} \\
& - \mathrm{i}\,\langle z, z\rangle \left\{\langle E'(u)E^{-1}(u)U^{-1}(u)z, U^{-1}(u)z\rangle - \langle U^{-1}(u)z, E'(u)E^{-1}(u)U^{-1}(u)z\rangle\right\}.
\end{aligned}
$$

Et la dépendence de $H_{23}\left(z, \overline{z}, u\right)$ en p'' et $\overline{p}''$ et comme suit

$$
H_{23}\left(z, \overline{z}, u\right) = -2\,\langle z, z\rangle^2 \langle p''(0), z\rangle + K\left(z, \overline{z}, 0; p'(0), \overline{p'(0)}\right).
$$

on utilise l'identité suivante

$$
(\mathrm{tr})^2 \left\{\langle z, z\rangle^2 \langle p, z\rangle\right\} 2(n+1)(n+2)\,\langle p, z\rangle\,.
$$

L'équation $(\mathrm{tr})^2 H_{23} = 0$ est une équation différentièlle du second ordre

$$A_1 p'' + A_2 \overline{p}'' = B.$$

Où

1- A_1, A_2 sont des $n \times n$ matrices de fonctions et B est une fonction à valeur dans $\mathbb{C}^n$,

2- $A_1 = \mathrm{i}\, d_{n\times n} + \mathrm{o}(u)$ et $A_2 = \mathrm{o}(u)$,

3- $A_{1,} A_2$et B dépendent analytiquement de $p, \bar{p}$,

4- $A_{1,} A_2$ dépendent au plus linéairement de $p', \overline{p}'$,

5- B dépend au plus cubicalemùent de $p', \overline{p}'$.

Alors on obtient

$$\begin{aligned} p'' &= Q(u, p, p', \overline{p}, \overline{p}') \\ &= \left(A_1 - A_2 \bar{A}_1^{-1} \bar{A}_2\right)^{-1} \left(B - A_2 \bar{A}_1^{-1} \bar{B}\right). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Où la fonction Q dépend rationnellement des dérivées $p', \overline{p}'$.

Donc il existe une unique courbe analytique Γ dans M qui passe par l'origine et est tangente à un vecteur transversal à l'hyperplan tangent complexe à l'origine et qui est envoyée par l'application biholomorphique dans la u-courbe.

Etant donné que

$$\langle U(u)z, U(u)z \rangle = \langle z, z\ \rangle .$$

On a les identités

$$\left\langle U'(u) U^{-1}(u) z, z \right\rangle = \left\langle z, z U'(u) U^{-1}(u)\ \right\rangle = 0,$$

$$\mathrm{tr}(U'(u)U^{-1}(u)) + \overline{\mathrm{tr}\, U'(u)U^{-1}(u)} = 0.$$

Donc l'équation $\mathrm{tr}\, H_{22} = 0$ est donnée par

$$\begin{aligned} &\langle U'(u)U^{-1}(u)z, z\rangle + \frac{1}{2(n+2)} \langle z, z\ \rangle \,\mathrm{tr}(U'(u)U^{-1}(u)) \\ &= \frac{1}{2\,\mathrm{i}(n+2)} \mathrm{tr}\left(E^{-1}(u)z, \bar{E}^{-1}(u)z, u\right) \\ &-\frac{1}{2}\left\{\mathrm{tr}(E'(u)E^{-1}(u)) - \overline{\mathrm{tr}(E'(u)E^{-1}(u))}\right\}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

On utilise les identités suivantes

$$\mathrm{tr}\left\{\langle z, z\ \rangle \langle Az, z\ \rangle\right\} = (n+2) \langle Az, z\ \rangle + \mathrm{tr}\,(A) \langle z, z\ \rangle ,$$

$$(\mathrm{tr})^2 \{\langle z, z \rangle \langle Az, z \rangle\} = 2(n+1)\,\mathrm{tr}\,(A)\,.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\langle z, z \rangle\,\mathrm{tr}(U'(u)U^{-1}(u)) &= \frac{1}{4\,\mathrm{i}(n+1)}\,(\mathrm{tr})^2\, G_{22}\left(E^{-1}(u)\,z, \overline{E^{-1}(u)\,z}, u\right) \\ &-\frac{1}{2}\left\{\mathrm{tr}(E'(u)E^{-1}(u)) - \overline{\mathrm{tr}(E'(u)E^{-1}(u))}\right\}.\end{aligned}$$

Ainsi l'équation (3.43) est une équation differentielle du premier ordre de $U(u)$ comme suit

$$\begin{aligned}\langle U'(u)U^{-1}(u)z, z\rangle &= \frac{1}{2\,\mathrm{i}(n+2)}\,(\mathrm{tr})\,G_{22}\left(E^{-1}(u)\,z, \overline{E^{-1}(u)\,z}, u\right) \\ &-\frac{1}{8\,\mathrm{i}(n+1)(n+2)}\,\langle z, z \rangle\,(\mathrm{tr})^2\, G_{22}\left(E^{-1}(u)\,z, \overline{E^{-1}(u)\,z}, u\right) \\ &-\frac{1}{2}\left\{\langle E'(u)E^{-1}(u)z, z\rangle - \langle z, E'(u)E^{-1}(u)z\rangle\right\} \\ &-\frac{1}{4(n+2)}\,\langle z, z\rangle\left\{\mathrm{tr}(E'(u)E^{-1}(u)) - \overline{\mathrm{tr}(E'(u)E^{-1}(u))}\right\}.\end{aligned}$$

D'où en imposant $U(0) = E(0) = \mathrm{i}\,d_{n\times n}$, il existe une unique application biholomorphe

$$\begin{aligned} z^* &= U(w)E(w)\left\{z + f(z, w)\right\}, \\ w^* &= w. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Qui transforme M' en une hypersurface réelle de la forme suivante

$$v = \langle z, z\rangle + \sum_{\min(k,l)\geq 2} H_{kl}\,(z, \overline{z}, u)\,. \tag{3.45}$$

Où

$$\mathrm{tr}(H_{22}) = \mathrm{tr}(H_{23}) = 0.$$

On considère les applications suivantes

$$\begin{aligned} \phi_1 &: \begin{cases} z = z^* + p(w^*) \\ w = w^* + g(z^*, w^*) \end{cases}, \\ \phi_2 &: \begin{cases} z^* = E(w)\,(z + f(z, w)) \\ w^* = w \end{cases}, \\ \phi_3 &: \begin{cases} z^* = \left(\mathrm{sign}\left\{q'(0)\right\} q'(w)\right)^{\frac{1}{2}} uz \\ w^* = q\,(w) \end{cases}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Où $p(w), g(z,w), E(w), f(z,w)$ et $q(w)$ sont des fonctions holomorphes qui satisfont

$$\begin{gathered}\overline{g(0,u)} = g(0,u), \qquad \overline{q(u)} = q(u)\,,\\ p(0) = q(0) = 0, \quad \det q'(0) \neq 0, \det u \neq 0,\\ E(0) = \mathrm{i}\, d_{n\times n}, \qquad f(0,w) = f_z(0,w) = 0.\end{gathered}$$

L'application

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \longmapsto \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1 \tag{3.47}$$

est bijective. Donc l'application biholomorphique ϕ, $\phi|_0 = 0$, a une unique décomposition

$$\phi = \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1.$$

De (3.47), toute application biholomorphique qui preserve (3.45) et la u-courbe est donnée par

$$\begin{gathered} z^* = \left(s\,\mathrm{i}\,gn\left\{q'(0)\right\} q'(w)\right)^{\frac{1}{2}} uz,\\ w^* = q(w)\,. \end{gathered} \tag{3.48}$$

Où

$$\begin{gathered} q(\bar{w}) = \overline{q(w)}, q(0) = 0, q'(0) \neq 0,\\ U \in GL(n;\mathbb{C}), \langle Uz, Uz\rangle = \mathrm{sign}\left\{q'(0)\right\}\langle z, z\rangle\,. \end{gathered}$$

L'application (3.48) transforme l'hypersurface réelle définie par

$$\begin{aligned} v^* &= \langle z^*, z^*\rangle + H^*_{22}\left(z^*, \overline{z^*}, u^*\right) + H^*_{23}\left(z^*, \overline{z^*}, u^*\right) + H^*_{32}\left(z^*, \overline{z^*}, u^*\right)\\ &+ H^*_{33}\left(z^*, \overline{z^*}, u^*\right) + \mathrm{o}\left(z^{*4}\overline{z}^{*2}\right) + \mathrm{o}\left(z^{*2}\overline{z}^{*4}\right) + \textstyle\sum_{\substack{\min(k,l)\geq 2\\ k+l\geq 7}} H^*_{kl}\left(z^*, \overline{z^*}, u^*\right). \end{aligned}$$

En une hypersurface réelle de la forme

$$\begin{aligned} v &= \langle z, z\rangle + H^*_{22}\left(Uz, \overline{Uz}, q(u)\right)\\ &\quad q'\left(|q'|\right)^{\frac{1}{2}}(w)\left\{H^*_{23}\left(Uz, \overline{Uz}, q(u)\right) + H^*_{32}\left(Uz, \overline{Uz}, q(u)\right)\right\}\\ &\quad + kq'^2 H^*_{33}\left(Uz, \overline{Uz}, q(u)\right) + \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{q''}{q'}\right)^2 - \frac{q'''}{3q'}\right\}\langle z, z\rangle^3\\ &\quad + \mathrm{o}\left(z^4\overline{z}^2\right) + \mathrm{o}\left(z^2\overline{z}^4\right)\\ &= \langle z, z\rangle + H_{22}(z, \overline{z}, u) + H_{23}(z, \overline{z}, u) + H_{32}(z, \overline{z}, u)\\ &\quad + H_{33}(z, \overline{z}, u) + \mathrm{o}\left(z^4\overline{z}^2\right) + \mathrm{o}\left(z^2\overline{z}^4\right). \end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\begin{array}{ll} H_{22}(z, \overline{z}, u) & q' H^*_{22}\left(Uz, \overline{Uz}, u\right)\\ H_{23}(z, \overline{z}, u) & q'\left(|q'|\right)^{\frac{1}{2}} H^*_{23}\left(Uz, \overline{Uz}, u\right)\\ H_{33}(z, \overline{z}, u) & kq'^2 H^*_{33}\left(Uz, \overline{Uz}, q(u)\right) + \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{q''}{q'}\right)^2 - \frac{q'''}{3q'}\right\}\langle z, z\rangle^3. \end{array} \tag{3.49}$$

Montrer que $\operatorname{tr} H_{22}^{*} = (\operatorname{tr})^2 H_{23}^{*} = 0$ quand $\operatorname{tr} H_{22} = (\operatorname{tr})^2 H_{23} = 0$. on peut achever la condition $(\operatorname{tr})^3 H_{33}^{*} = 0$ par une équation différentielle du troisième ordre comme suit

$$\frac{q'''}{3q'} - \frac{1}{2}\left(\frac{q''}{q'}\right)^2 = k(u). \tag{3.50}$$

Où

$$k(u) = -\frac{1}{6n(n+1)(n+2)} (\operatorname{tr})^3 H_{33}\left(z, \overline{z}, u\right).$$

L'équation différentielle !détermine un paramètre projectif sur la u-courbe. ce qui achève la preuve du théorème 35.

Théorème 3.6. *(3.6) : Soit M une hypersurface analytique réelle non dégénérée définie par l'équation*

$$v = F(z, z, u) \;\; F|_0 = dF|_0 = 0.$$

Alors une application biholomorphique normalisante de M , $\phi = (f, g)$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ est uniquement déterminée par les valeurs $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_0, \left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_0, \operatorname{Re}\left(\left.\frac{\partial g}{\partial w}\right|_0\right), \operatorname{Re}\left(\left.\frac{\partial^2 g}{\partial w^2}\right|_0\right)$.

Comme notée avant, une application biholomorphique ϕ qui satisfait $\phi|_0 = 0$ est uniquement décomposée en

$$\phi = \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1.$$

Où ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 sont des applications biholomorphiques de (3.47) satisfont

$$\phi_1|_0 = \phi_2|_0 = \phi_3|_0 = 0.$$

De plus

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \longmapsto \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1 \tag{3.51}$$

est bijective. L'unicité de ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 aux valeurs près

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_0, \left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_0, \operatorname{Re}\left(\left.\frac{\partial g}{\partial w}\right|_0\right), \operatorname{Re}\left(\left.\frac{\partial^2 g}{\partial w^2}\right|_0\right).$$

Assure l'unicité de l'application normalisante ϕ. l'unicité de chaque ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 est vérifiée dans la preuve du théorème 31 uniquement grace à la détermination des fonctions $p(w), E(w), q(w)$ par les valeurs initiales

$$p'(0), E(0), q'(0), q''(0).$$

On peut avoir les relations suivantes

$$\begin{aligned}
(|q'(0)|)^{\frac{1}{2}} U &= \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_0, \\
-(|q'(0)|)^{\frac{1}{2}} Up'(0) &= \left(1 - \mathrm{i}\left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_0\right)^{-1} \left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_0, \\
q'(0) &= \operatorname{Re}\left(\left.\frac{\partial g}{\partial w}\right|_0\right), \\
2q'(0)q''(0) &= \operatorname{Re}\left\{\left(1 - \mathrm{i}\left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_0\right)^{-2} \left.\frac{\partial^2 g}{\partial w^2}\right|_0\right\}.
\end{aligned}$$

Pour le cas $dF|_0 = 0$ plutôt que $F_z| = F_{\bar{z}}| = 0$, on a les relations simples

$$\begin{aligned}
(|q'(0)|)^{\frac{1}{2}} U &= \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_0, \\
-(|q'(0)|)^{\frac{1}{2}} Up'(0) &= \left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_0, \\
q'(0) &= \operatorname{Re}\left(\left.\frac{\partial g}{\partial w}\right|_0\right), \\
2q'(0)q''(0) &= \operatorname{Re}\left\{\left.\frac{\partial^2 g}{\partial w^2}\right|_0\right\}.
\end{aligned}$$

Telles que les valeurs $p'(0)$, $E(0) = U$, $q'(0)$ et $q''(0)$ sont uniquement déterminées par

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_0, \left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_0, \operatorname{Re}\left(\left.\frac{\partial g}{\partial w}\right|_0\right), \operatorname{Re}\left(\left.\frac{\partial^2 g}{\partial w^2}\right|_0\right).$$

Ce qui achève la démonstration du théorème 36

- dans le cas où $n = 1$ c'est à dire $\dim M = 3$ où l'hypersurface analytique réelle est donnée par

$$v = \langle z, z\rangle + \sum_{\min(k,l)\geq 2} F_{kl}(z, \bar{z}, u).$$

où

$$(\mathrm{tr})\, F_{22} = (\mathrm{tr})^2\, F_{23} = (\mathrm{tr})^3\, F_{33}.$$

on a $F_{22} = F_{23} = F_{33} = 0$ si $\dim M = 3$ et la forme normale de M est donnée par

$$v = zz + C_{42} z^4 \bar{z}^2 + C_{24} z^2 \bar{z}^4 + \sum_{k+l\geq 7} C_{kl} z^k \bar{z}^l. \qquad (3.52)$$

4 Points ombilicaux

Théorème 4.7 : Soit M une hypersurface analytique réelle en forme normale telle que

$$v = \langle z, z \rangle + F_l (z, \bar{z}, u) + \sum_{k+l \geq 1} F_k (z, \bar{z}, u),$$

où

$$F_k (z, \bar{z}, u) \neq 0.$$

Soit N_σ une normalisation de M et ϕ_σ un automorphisme de l'hyperquadrique réelle avec les valeurs initiales $\sigma = (C, a, \varrho, r) \in H$. on suppose que l'hyperquadrique transformée $N_\sigma (M)$ est définie par

$$v = \langle z, z \rangle + F^* (z, \bar{z}, u).$$

Alors

$$N_\sigma = \phi_\sigma +_X (l+1), \tag{4.1}$$

$$F^* = \varrho F_1 \left(C^{-1} z, \overline{C^{-1} z}, \varrho^{-1} u \right) + (l+1). \tag{4.2}$$

Avec

$$(l+1) = \sum_{k+2l' \geq l+1} \left(|z|^k |w|^{l'} \right),$$

$$_X (l+1) = ((l), ..., (l), (l+1)).$$

Preuve : Soit ϕ l'application fractionnelle

$$\phi = \phi_\sigma : \begin{cases} z^* &= \dfrac{C (z - aw)}{1 + 2 \langle z, a \rangle - w(r + \langle a, a \rangle)} \\ w^* &= \dfrac{\varrho w}{1 + 2 \langle z, a \rangle - w(r + \langle a, a \rangle)} \end{cases}.$$

Où les constantes $\sigma = (C, a, \varrho, r)$ satisfont

$$\begin{array}{ccc} a \in \mathbb{C}^n & \varrho \neq 0, & \varrho, r \in \mathbb{R} \\ C \in GL (n; \mathbb{C}) & \langle Cz, Cz \rangle & = \varrho \langle z, z \rangle \end{array}.$$

L'application ϕ se décompose en

$$\phi = \varphi \circ \psi.$$

Où

$$\psi = \begin{cases} z^* & = \dfrac{z - aw}{1 + 2\langle z, a\rangle - \langle a, a\rangle w} \\ w^* & = \dfrac{w}{1 + 2\langle z, a\rangle - \langle a, a\rangle w} \end{cases},$$

et

$$\varphi = \begin{cases} z^* & = \dfrac{Cz}{1 - rw} \\ w^* & = \dfrac{\varrho w}{1 - rw} \end{cases}.$$

Alors ψ^{-1} et φ^{-1} sont données par

$$\psi^{-1} = \begin{cases} z & = \dfrac{z^* + aw^*}{1 - 2\langle z^*, a\rangle - \langle a, a\rangle w^*} \\ w^* & = \dfrac{w}{1 - 2\langle z^*, a\rangle - \langle a, a\rangle w^*} \end{cases},$$

et

$$\varphi^{-1} = \begin{cases} z & = \dfrac{C^{-1}z^*}{1 + r\varrho^{-1}w^*} \\ w^* & = \dfrac{\varrho^{-1}w^*}{1 + r\varrho^{-1}w^*} \end{cases}.$$

Ainsi $\phi_\sigma^{-1} = \psi^{-1} \circ \varphi^{-1}$, on obtient

$$\phi_\sigma^{-1} = \phi_{\sigma^{-1}} : \begin{cases} z & = \dfrac{C^{-1}\left(z^* + \varrho^{-1}Caw^*\right)}{1 - 2\langle z^*, \varrho^{-1}Ca\rangle - w^*\left(-r\varrho^{-1} + \langle \varrho^{-1}Ca, \varrho^{-1}Ca\rangle\right)} \\ w & = \dfrac{\varrho^{-1}w^*}{1 - 2\langle z^*, \varrho^{-1}Ca\rangle - w^*\left(-r\varrho^{-1} + \langle \varrho^{-1}Ca, \varrho^{-1}Ca\rangle\right)} \end{cases}.$$

Où

$$\sigma^{-1} = \left(C^{-1}, -\varrho^{-1}Ca, \varrho^{-1}, -r\varrho^{-1}\right) \in H.$$

Donc on a

$$v - \langle z, z\rangle = (v^* - \langle z^*, z^*\rangle)\varrho^{-1}\left(1 - \delta^*\right)^{-1}\left(1 - \bar{\delta}^*\right)^{-1},$$

où

$$1 - \delta^* = 1 - 2\varrho^{-1}\langle z^*, Ca\rangle - \varrho^{-1}w^*\left(-r + \langle a, a\rangle\right).$$

Par l'application ϕ_σ qui se décompose $N_\sigma = E \circ \phi_\sigma$, on obtient que

$$v^* = \langle z^*, z^*\rangle + \varrho F_l\left(C^{-1}z^*, \overline{C^{-1}z^*}, \varrho^{-1}u^*\right) + \sum_{|i|+|J|+2k \geq l+1} \left(z^*, z^{*J}, u^{*k}\right)$$

$$= \langle z^*, z^* \rangle + \varrho F_l \left(C^{-1} z^*, \overline{C^{-1} z^*}, \varrho^{-1} u^* \right) + (l+1) \, .$$

L'hypersurface qui résulte en forme normale

$$v = \langle z, z \rangle + \varrho F_l \left(C^{-1} z, \overline{C^{-1} z}, \varrho^{-1} u \right),$$

ce qui donne

$$F^* (z, \bar{z}, u) = \varrho F_l \left(C^{-1} z^*, \overline{C^{-1} z^*}, \varrho^{-1} u^* \right) + (l+1) \, .$$

On utilise le théorème 37, la définition suivante aura le sens

Définition 4.1. *1- Si* $\dim M = 3$*, le point* p *est dit ombilical si*

$$F_{42} (z, \bar{z}, 0) = F_{24} (z, \bar{z}, 0) = 0.$$

2- Si $\dim M \geq 5$*, le point* $p \in M$ *et dit ombilical si*

$$F_{22} (z, \bar{z}, 0) = 0.$$

Soit N_σ une normalisation de M et $\phi_\sigma = \varphi \circ \psi$ un automorphisme d'une hyperquadrique réelle.

On a une décomposition de N_σ

$$N_\sigma = \phi \circ E \circ \psi,$$

où E est une normalisation de $\psi (M)$ avec la valeur initiale est l'identité. On vérifie que pour chaque $k \geq 3$

$$N_\sigma = \phi_\sigma +_X (k+1) \text{ ssi } E = +_X (k+1).$$

Théorème4.8 : Soit M une hypersurface analytique réelle de dimension 3 en forme normale. Soit N_σ une normalisation de M tel que $a \neq 0$ dans $\sigma = (C, a, \varrho, r)$. Alors la non-ombilicité à l'origine $0 \in M$ est équivalente à la condition suivante

$$N_\sigma = \phi_\sigma +_X (7) \text{ et } N_\sigma \neq \phi_\sigma +_X (8). \tag{4.3}$$

Pour la preuve, il suffit de montrer que la normalisation E dans $N_\sigma = \varphi \circ E \circ \psi$ satisfait

$$E = \phi_\sigma +_X (7) \text{ et } E \neq \phi_\sigma +_X (8),$$

si et seulement si, l'origine est non-ombilical.

On suppose que M est définie par

$$v = z\bar{z} + bz^4\bar{z}^2 + bz^2\bar{z}^4 + cz^5\bar{z}^2 + \bar{c}z^2\bar{z}^5 + dz^4\bar{z}^3 + \overline{d}z^3\bar{z}^4 + (8).$$

Où $b, c, d \in \mathbb{C}$.

Par l'application ψ, M est transformée jusqu'au 7-ème poids en une hypersurface réelle comme suit

$$v = z\bar{z} + bz^4\bar{z}^2 + bz^2\bar{z}^4 + (c + 4\overline{a})\, z^5\bar{z}^2 + \left(\overline{c + +4\overline{a}}\right) z^2\bar{z}^5 + (d+2)\, z^4\bar{z}^3 + \left(\overline{d+2}\right) z^3\bar{z}^4 + 4bauz^3\overline{z^2} + 4\bar{b}\overline{a}uz^2\overline{z}^3 + 2b\overline{a}z^4\bar{z} + 2\bar{b}az\overline{z^4} + (8).$$

On utilise le théorème suivant :

Théorème 4.9 : Soit M une hypersurface analytique réelle dont la forme de Levi est non dégénérée définie par

$$v = F(z, \bar{z}, u),\ F|_0 = dF|_0 = 0. \tag{4.4}$$

Si $h = (f, g)$ est une application biholomorphique telle que

$$\begin{aligned} f(z, w) &= C(z - aw) + f^*(z, w), \\ g(z, w) &= \varrho(w + rw^2) + g^*(z, w), \end{aligned}$$

où les fonctions $f^*(z, w)$ et $g^*(z, w)$ satisfont la condition

$$f^*|_0 = df^*|_0 = g^*|_0 = d\, g^*|_0 = (g^*|_0) = 0, \tag{4.5}$$

et si l'hypersurface réelle $h(M)$ est définie par

$$v = F^*(z, \bar{z}, u) + (k+1), \tag{4.6}$$

où $v = F^*(z, \bar{z}, u)$ est en forme normale, alors il existe une normalisation de M, ϕ_σ avec les valeurs initiales $\sigma = (C, a, \varrho, r) \in H$ tel que

$$h = \phi_\sigma +_X (k+1).$$

On obtient la normalisation E jusqu'au poids 7

$$z^* = z + 2\overline{a}bz^4w - 2^2w^2 - \frac{1}{3}\overline{a}\bar{b}w^3 + (7),$$

$$w^* = w + \frac{2}{3}abzw^3 + (8),$$

et M est transformée jusqu'au poids 7 en une hypersurface réelle

$$v = z\bar{z} + bz^4\bar{z}^2 + bz^2\bar{z}^4 + (c + 2\overline{a})\, z^5\bar{z}^2 + \left(\overline{c + +2\overline{a}}\right) z^2\bar{z}^5 + \left(d + \frac{2}{3}\right) z^4\bar{z}^3 + \left(\overline{d + \frac{2}{3}}\right) z^3\bar{z}^4 + (8).$$

puisque $a \neq 0$, la normalisation E satisfait la condition (4.3) si et seulement si $b \neq 0$. ce qui achève la preuve.

Corollaire 4.10 : Soit M une hypersurface analytique réelle de dimension 3 avec un point non- ombilical $p \in M$, alors il existe une coordonnée normale dont le centre est $p \in M$ telle que

$$v = z\overline{z} + F_{42}(z, \bar{z}, u) + F_{24}(z, \bar{z}, u) + \sum_{@\min(k,l)\geq 2k+l\geq 7} F_{kl}(z, \bar{z}, u),$$

où

$$F_{42}(z, \bar{z}, 0) = z^2\overline{z^4}, \left\{ z^2 \left(\frac{\partial F_{42}}{\partial u}\right)(z, \bar{z}, 0) \right\} = 0, F_{43}(z, \bar{z}, 0) = 0. \tag{4.7}$$

De plus, si deux hypersurfaces réelles en forme normale sont biholomorphiquement équivalentes au voisinage de l'origine, alors elles sont liées par une application comme suit

$$z^* = \pm z, w^* = w$$

la même est vraie si on remplace la condition (4.7) par la condition suivante

$$F_{24}(z, \bar{z}, 0) = z^2\overline{z^4}, \left\{ z^2 \left(\frac{\partial F_{24}}{\partial u}\right)(z, \bar{z}, 0) \right\} = 0, F_{52}(z, \bar{z}, 0) = 0.$$

Preuve : Puisque le point p est non-ombilical, on prend une normalisation N_σ avec les valeurs initiales

$$\sigma = (1, a, 1, 0)\,,$$
$$a = \frac{3}{2b}(\text{resp } a = -\frac{\bar{c}}{2b}),$$

où on suppose que

$$\begin{aligned} F_{42}|_{u=0} &= bz^4\bar{z}^2 \neq 0, \\ F_{52}|_{u=0} &= cz^5\bar{z}^2, \\ F_{43}|_{u=0} &= dz^4\bar{z}^3. \end{aligned}$$

Alors on obtient

$$F^*_{43}|_{u=0} = 0\,(\text{Resp} \;\; F^*_{52}|_{u=0})\,. \tag{4.8}$$

Noter que $a = 0$ necessairement si $F_{43}|_{u=0} = 0$ (resp $F_{52}|_{u=0} = 0$). Supposant que $F_{43}|_{u=0} = 0$ (resp $F_{52}|_{u=0} = 0$). Alors on choisis la normalisation N_σ avec les valeurs initiales $\sigma = (\alpha, 0, \alpha\overline{\alpha}, 0)$

$$z^* = \alpha z, w = \alpha\overline{\alpha}w.$$

où

$$\alpha = \pm\left(\frac{b^6}{\overline{b}^2}\right)^{1/4}.$$

Alors on obtient

$$F^*_{42}(z, \bar{z}, 0) = z^2\overline{z^4},$$

et que $a = 0$ et $\alpha = \pm 1$ obligatoirement si

$$\begin{gathered} F_{43}|_{u=0} = 0 \text{ et } \; F_{24}|_0 = z^2\overline{z^4} \\ \left(\text{Resp} \;\; F_{52}|_{u=0} = 0 \text{ et } \; F_{42}|_0 = z^2\overline{z^4}\right). \end{gathered}$$

Alors on execute une autre normalisation avec les valeurs initiales $\sigma = (1, 0, 1, r)$

$$z^* = \frac{z}{1 - rw},\; w^* = \frac{w}{1 - rw},$$

sur une hypersurface réelle M jusqu'au poids 8 par l'équation suivante :

$$v = z\bar{z} + z^4\bar{z}^2 + z^2\bar{z}^4 + duz^4\bar{z}^2 + \overline{d}uz^2\bar{z}^4 + \left(|z|^7\right) + (9).$$

Alors M est transformée jusqu'au poids 8 en une hypersurface réelle comme suit :

$$v = z\bar{z} + z^4\bar{z}^2 + z^2\bar{z}^4 + (d - 4r)\,uz^4\bar{z}^2 + \left(\overline{d} - 4r\right)uz^2\bar{z}^4 + \left(|z|^7\right) + (9).$$

On prend

$$r = \left(\frac{d}{4}\right).$$

Qui donne

$$\left(\frac{\partial F_{24}^{*}}{\partial u} \bigg|_{0} \right) = 0.$$

Ainsi il existe une coordonnée normale en un point ombilical dans M tel que

$$F_{42}(z, \bar{z}, 0) = z^2 \overline{z^4}, \left\{ z^2 \left(\frac{\partial F_{24}}{\partial u} \right) (z, \bar{z}, 0) \right\} = 0, F_{43}(z, \bar{z}, 0) = 0.$$

$$\left(\text{Resp } F_{24}(z, \bar{z}, 0) = z^2 \overline{z^4}, \left\{ z^2 \left(\frac{\partial F_{24}}{\partial u} \right) (z, \bar{z}, 0) \right\} = 0, F_{52}(z, \bar{z}, 0) = 0 \right).$$

Clairement, une normalisation N_σ entre ces coordonnées normales a des valeurs initiales telles que

$$\sigma = (\pm 1, 0, 1, 0).$$

Qui achève la preuve.

Lemme 4.11 : Soit M une hypersurface analytique réelle de dim ≥ 5 en forme normale, qui est définie jusqu'au poids 6 par l'équation suivante

$$\begin{aligned} v \ &= \langle z, z \rangle + A_{\alpha\beta\overline{\gamma}\overline{\delta}} z^\alpha z^\beta z^{\bar{\gamma}} z^{\bar{\delta}} + u B_{\alpha\beta\overline{\gamma}\overline{\delta}} z^\alpha z^\beta z^{\bar{\gamma}} z^{\bar{\delta}} \\ &+ C_{\alpha\beta\gamma\bar{\delta}\bar{\eta}} z^\alpha z^\beta z^\gamma z^{\bar{\eta}} + C_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar{\delta}\bar{\eta}} z^\alpha z^\beta z^{\bar{\gamma}} z^{\bar{\delta}} z^{\bar{\eta}} \\ &+ D_{\alpha\beta\gamma\delta\overline{\eta}\overline{\varsigma}} z^\alpha z^\beta z^\gamma z^\delta z^{\bar{\eta}} z^{\bar{\varsigma}} + (z^2 \overline{z^4}) + (z^4 \overline{z^2}) + (6) \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} &\overline{A_{\alpha\beta\overline{\gamma}\overline{\delta}}} = A_{\gamma\delta\overline{\alpha}\overline{\beta}}, \overline{B_{\alpha\beta\overline{\gamma}\overline{\delta}}} = B_{\gamma\delta\overline{\alpha}\overline{\beta}}, \overline{C_{\alpha\beta\gamma\bar{\delta}\bar{\eta}}} = C_{\delta\eta\overline{\alpha}\overline{\beta}\overline{\gamma}}, \\ &\overline{D_{\alpha\beta\gamma\bar{\delta}\overline{\eta}\overline{\varsigma}}} = D_{\delta\overline{\eta}\overline{\varsigma}\overline{\alpha}\overline{\beta}\gamma}, A^{\alpha}_{\alpha\beta\cdot\bar{\delta}} = B^{\alpha}_{\alpha\beta\cdot\bar{\delta}} = 0, \\ &C^{\alpha\beta}_{\alpha\beta\cdot\cdot\bar{\eta}} = C^{\alpha\beta\gamma}_{\alpha\beta\gamma\cdots} = 0, \end{aligned}$$

et les tous les indices barrés et non-barrés sont respectivement symétriques. Soit $N_\sigma = \varphi \circ E \circ \psi$ une normalisation avec les valeurs initiales $\sigma = (C, a, \varrho, r)$. Alors l'application normalisante E est donnée jusqu'au 6-ème poids comme suit

$$\begin{aligned} z^{*\alpha} \ &= z^\alpha + 2 g^{\alpha\bar{\delta}} A_{\beta\gamma\bar{\delta}\bar{\eta}} a^{\bar{\eta}} z^\beta z^\gamma w + 4^{\alpha\bar{\varsigma}} A_{\beta\gamma\overline{\eta}\overline{\varsigma}} a^{\bar{\eta}} z^{\bar{\beta}} z^\gamma \\ &\langle z, a \rangle w + 2 g^{\alpha\bar{\eta}} C_{\beta\gamma\delta\overline{\eta}\overline{\varsigma}} z^\beta z^\gamma z^\delta a^{\bar{\varsigma}} w - 8^{\alpha\bar{\varsigma}} A_{\beta\gamma\overline{\eta}\overline{\varsigma}} z^{\bar{\beta}} z^\gamma a^{\bar{\eta}} a^{\bar{\varsigma}} w \\ &+ 2 g^{\alpha\bar{\beta}} A_{\beta\gamma\bar{\delta}\bar{\eta}} z^\beta z^\gamma a^\gamma a^{\bar{\eta}} w^2 \\ &- \frac{3}{n+2} g^{\alpha\bar{\delta}} \left\{ C^{\eta}_{\eta\beta\gamma\delta} z^\beta a^\gamma + C^{\eta}_{\eta\beta\bar{\delta}\bar{\gamma}} z^\beta a^{\bar{\gamma}} \right\} w^2 + (7), \\ w^{*} \ &= w - 4_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar{\delta}} z^\alpha z^\beta a^{\bar{\gamma}} a^{\bar{\delta}} w^2 + (7). \end{aligned}$$

Preuve : Par l'application ψ de la décomposition $N_\sigma = \varphi \circ E \circ \psi$, M est transformée jusqu'au 6-ème poids en une hypersurface de la forme

$$\begin{array}{ll} v & = \langle z, z\rangle + F_{02}(z,\bar z,u) + F_{20}(z,\bar z,u) \\ & F_{12}(z,\bar z,u) + F_{21}(z,\bar z,u) + F_{13}(z,\bar z,u) + F_{31}(z,\bar z,u) \\ & F_{22}(z,\bar z,u) + F_{23}(z,\bar z,u) + F_{32}(z,\bar z,u) + F_{33}(z,\bar z,u) \\ & (z^2\overline{z^4}) + (z^4\overline{z^2}) + (7). \end{array}$$

Où

$$\begin{array}{ll} F_{02}(z,\bar z,u) & = 4u^2 A_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta} a^\alpha a^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta}, \\ F_{12}(z,\bar z,u) & = 2u A_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta} z^\alpha a^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta}, \\ F_{13}(z,\bar z,u) & = -4\left\langle a, z\right\rangle A_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta} z^\alpha a^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} + 4_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta} z^\alpha z^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} \\ & +4\left\langle z, z\right\rangle A_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta} a^\alpha a^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} + 2u C_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta\overline{\eta}} z^\alpha a^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} \\ & +3u C_{\alpha\beta\gamma\bar\delta\overline{\eta}} z^\alpha z^\beta a^\gamma z^{\bar\delta} z^{\bar\eta} + 3u C_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta\overline{\eta}} z^\alpha a^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} z^{\bar\eta}, \\ F_{22}(z,\bar z,u) & = A_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta} z^\alpha z^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} + 4\left\langle a, z\right\rangle A_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta} z^\alpha a^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} + 4\left\langle a, z\right\rangle A_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta} z^\alpha a^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} \\ & -4\left\langle a, z\right\rangle A_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta} z^\alpha z^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} + 4B_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta} z^\alpha z^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} \\ & +3u C_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta\overline{\eta}} z^\alpha z^\beta a^\gamma z^{\bar\delta} z^{\bar\eta} + 3u C_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta\overline{\eta}} z^\alpha z^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} z^{\bar\eta} \\ F_{23}(z,\bar z,u) & = C_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta\overline{\eta}} z^\alpha z^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} z^{\bar\eta} - 2\left\langle a, z\right\rangle A_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta} z^\alpha z^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} \\ & +2\left\langle z, z\right\rangle A_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta} z^\alpha z^\beta z^\gamma z^{\bar\delta} \\ F_{33}(z,\bar z,u) & = D_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta\overline{\eta}} z^\alpha z^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} z^{\bar{\bar\eta}} z^{\bar{\bar\varsigma}} - 2\left\langle a, a\right\rangle \left\langle z, z\right\rangle A_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta} z^\alpha z^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} \\ & +4\left\langle z, a\right\rangle \left\langle a, z\right\rangle A_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta} z^\alpha z^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} - 4\left\langle z, z\right\rangle \left\langle a, z\right\rangle A_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta} z^\alpha a^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} \\ & -4\left\langle a, z\right\rangle \left\langle z, z\right\rangle A_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta} z^\alpha z^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} - 4\left\langle a, z\right\rangle^2 A_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta} z^\alpha a^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} \\ & \quad -2\left\langle a, z\right\rangle C_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta\overline{\eta}} z^\alpha z^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} + 2\left\langle z, a\right\rangle C_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta\overline{\eta}} z^\alpha z^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} z^{\overline{\eta}} \\ & \quad +3\left\langle , z\right\rangle C_{\alpha\beta\gamma\bar\delta\overline{\eta}} z^\alpha z^\beta a^\gamma z^{\bar\delta} z^{\bar\eta} - 3\left\langle z, z\right\rangle C_{\alpha\beta\overline{\gamma}\bar\delta\overline{\eta}} z^\alpha z^\beta z^{\bar\gamma} z^{\bar\delta} z^{\bar\eta}. \end{array}$$

Ainsi M est en forme normale, $E = +_X(5)$ et la fonction $p(u)$ satisfait

$$p(u) = \frac{1}{2}p''(0)u^2 + (6)$$

Théorème 4.12 : Soit M une hypersurface analytique réelle non-dégénérée dans une variété complexe et U un sous-ensemble ouvert de M formé des poits ombilicaux. Alors le sous-ensemble ouvert U est localement biholomorphique à une hyperquadrique réelle.

Pour la preuve, on distingue 2 cas :

Pour le cas $n = 1$, $(\mathbb{C}^n)$. on a $F_{22} = F_{23} = F_{33} = 0$.

On utilise la définition du point ombilical pour $n = 1$, en tous point de U, on a

$$F_{24} = F_{42} = 0.$$

On suppose qu'il exste un entier positif $k' \geq 7$ et des coordonnées normales en un point p de U tel que

$$v = z\overline{z} + \sum_{\min(k,l)\geq 2k+l=k'} F_{kl}(z,\bar{z},u) + \sum_{\min(k,l)\geq 2k+l\geq k'+1} F_{kl}(z,\bar{z},u), \qquad (4.9)$$

où

$$\sum_{\min(k,l)\geq 2k+l=k'} F_{kl}(z,\bar{z},0) \neq 0.$$

on utilise le lemme 3.13.

Lemme 4.13 : Soit k' un entier ≥ 7. On suppose que M est une hypersurface réelle en forme normale telle que

$$v = z\overline{z} + \sum_{@\min(k,l)\geq 2k+l=k'} F_{kl}(z,\bar{z},u) + \sum_{@\min(k,l)\geq 2k+l\geq k'+1} F_{kl}(z,\bar{z},u),$$

où

$$\sum_{@\min(k,l)\geq 2k+l\geq k'+1} F_{kl}(z,\bar{z},0) \neq 0.$$

Alors il existe un vecteur $a \in \mathbb{C}^{\ltimes}$ et une normalisation de M, N_σ, $\sigma = ({}_{n\times n}, a, 1, 0)$ telle que

$$F^*(z,\bar{z},u) = \sum_{@\min(k,l)\geq 2k+l=k'-1} F^*_{kl}(z,\bar{z},u) + \sum_{@\min(k,l)\geq 2k+l\geq k'} F^*_{kl}(z,\bar{z},u).$$

Où l'hypersurface réelle $N_\sigma\,(M)$ est définie par

$$v = \langle z, z\rangle + F^*(z,\bar{z},u),$$

et

$$\sum_{@\min(k,l)\geq 2k+l=k'-1} F^*_{kl}(z,\bar{z},0) \neq 0.$$

Il existe une contradiction dans le choix de l'entier k. Donc M est définie par

$$v = z\overline{z}.$$

Pour tout système ou coordonnées normales et tout $p \in U$. Pour le cas où $n \geq 2$, toujours par le lemme 3.12, il suffit de montrer que

$$F_{22} = F_{23} = F_{33} = 0.$$

Ainsi, puisque la forme est invariante sous la transformation le long de la u-courbe, on a

$$F_{22} = 0.$$

En toute coordonnée normale et pour tout point de U, on suppose qu'il existe un point $p \in U$ et une coordonnée normale en p tel que $F_{23} \neq 0$. Sans perdre la généralité on peut supposer que $F_{23}(z, \bar{z}, 0) \neq 0$ de sorte que

$$F_{23}(z, \bar{z}, 0) = C_{\alpha\beta\bar{\gamma}\bar{\delta}\bar{\eta}} z^{\alpha} z^{\beta} z^{\bar{\gamma}} z^{\bar{\delta}} z^{\bar{\eta}} \neq 0.$$

De la preuve du théorème 3.14.

Théorème 4.14 : Soit M une hypersurface réelle de dim ≥ 5 en forme normale définie par

$$v = \langle z, z \rangle + \sum_{\min(k,l) \geq 2} F_{kl}(z, \bar{z}, u). \tag{4.10}$$

On suppose que l'origine $0 \in M$ est ombilical.

Soit N_{σ} une normalisation telle que le paramètre a dans $\sigma = (C, a, \varrho, r)$ satisfait la condition

$$\sum_{\alpha} a^{\alpha} \left(\frac{\partial F_{22}}{\partial z^{\alpha}} \right) (z, \bar{z}, 0) \neq 0. \tag{4.11}$$

Alors N_{σ} satisfait la condition

$$N_{\sigma} = \phi_{\sigma} +_X (5) \ \text{ et } N_{\sigma} \neq \phi_{\sigma} +_X (6)\,,$$

inversement, s'il existe une normalisation N_{σ} satisfait la condition (4.11), alors l'origine est ombilical.

On obtient l'identité suivante pour tout $a \in \mathbb{C}^{\ltimes}$

$$\begin{aligned} F_{22}^{*}(z, \bar{z}, u) \ &= 3uC_{\alpha\beta\bar{\gamma}\bar{\delta}\bar{\eta}} z^{\alpha} z^{\beta} a^{\gamma} z^{\bar{\delta}} a^{\bar{\eta}} + 3uC_{\alpha\beta\bar{\gamma}\bar{\delta}\bar{\eta}} z^{\beta} a^{\bar{\gamma}} z^{\bar{\delta}} a^{\bar{\eta}} \\ &- \frac{12}{n+2} u \langle z, z \rangle \left\{ C^{\delta}_{\delta\alpha\beta\bar{\gamma}} z^{\alpha} a^{\beta} z^{\bar{\gamma}} + C^{\delta}_{\delta\alpha\overline{\beta}\overline{\gamma}} z^{\alpha} z^{\bar{\beta}} a^{\bar{\gamma}} \right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc on obtient

$$(n+2)\, C_{\alpha\beta\gamma\bar{\delta}\bar{\eta}} = h_{\alpha\bar{\delta}} C^{\varrho}_{\varrho\beta\gamma\bar{\eta}} + h_{\beta\bar{\delta}} C^{\varrho}_{\varrho\alpha\gamma\bar{\eta}} + h_{\alpha\bar{\eta}} C^{\varrho}_{\varrho\beta\gamma\bar{\delta}} + h_{\alpha\bar{\eta}} C^{\varrho}_{\varrho\alpha\gamma\bar{\delta}}.$$

On contracte la pair $\left(\gamma, \bar{\delta}\right)$ donne

$$C^{\varrho}_{\varrho\beta\gamma\bar{\eta}} = 0,$$

qui donne

$$C_{\alpha\beta\bar{\gamma}\bar{\delta}\bar{\eta}} = 0.$$

Qui est une contradiction avec les hypothèses que

$$F_{23}(z, \bar{z}, 0) = C_{\alpha\beta\bar{\gamma}\bar{\delta}\bar{\eta}} z^{\alpha} z^{\beta} z^{\bar{\gamma}} z^{\bar{\delta}} z^{\bar{\eta}} \neq 0.$$

ainsi

$$F_{23} = F_{32} = 0,$$

pour tout point de U.

On suppose qu'il existe un point $p \in U$ et une coordonnées normale telle que

$$F_{24} + F_{33} + F_{42} \neq 0.$$

Sans perte la généralité, on suppose

$$F_{24}(z, \bar{z}, 0) \neq 0 \text{ ou } F_{33}(z, \bar{z}, 0) \neq 0.$$

On a

$$\begin{aligned} F_{24}(z, \bar{z}, 0) &= A_{\alpha\beta\bar{\gamma}\bar{\delta}} z^{\alpha} z^{\beta} z^{\bar{\gamma}} z^{\bar{\delta}} z^{\bar{\eta}} z^{\bar{\sigma}}, \\ F_{33}(z, \bar{z}, 0) &= A_{\alpha\beta\bar{\gamma}\bar{\delta}} z^{\alpha} z^{\beta} z^{\bar{\gamma}} z^{\bar{\delta}} z^{\bar{\eta}} z^{\bar{\sigma}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$F^{*}_{32}(z, \bar{z}, 0) = 0.$$

On abouti à une contradiction avec les hypothèses

$$F_{24}(z, \bar{z}, 0) \neq 0 \text{ ou } F_{33}(z, \bar{z}, 0) \neq 0.$$

Donc $F_{24} = F_{42} = F_{33} = 0$. Pour toute coordonnée normale et pour tout point de U.

Du lemme 3.13, M est définie par

$$v = \langle z, z \rangle \, .$$

Ce qui achève la preuve.

Ainsi on a construit une transformation holomorphe qui envoie M dans une forme normale et la preuve d'existence est réduite à des équations différentielles ordinaires. Le choix des valeurs initiales pour $p'(0) \in \mathbb{C}^{\ltimes}$, $U(0)$, $'(0)$ et $''(0)$ nous permet de satisfaire la condition de normalisation (2.9) de §2. En effet, ces $2n+n^2+1+1=(n+1)^2+1$ Paramètres réels caractérisent précisément un élément du groupe d'isotropie H. Ainsi on a montrer

Théorème 4.15 : Si M est une variété analytique réelle. L'unique transformation formelle du théorème 2.2 qui envoie M dans une forme normale, et qui satisfait la condition de normalisation est donnée par des séries convergentes. i.e. définissent une application holomorphe.

Contraction des tenseurs symétriques

Guy Roos

5 Contraction de tenseurs

Tous les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

Si V est un espace vectoriel, on note V^* l'espace dual de V et

$$\langle\ ,\ \rangle : V^* \times V \to \mathbb{C}$$

l'accouplement canonique de V et V^*.

5.1 Produit tensoriel

Soient V_1, V_2 deux espaces vectoriels. Leur *produit tensoriel* $V_1 \otimes V_2$ est l'espace vectoriel, solution (unique à isomorphisme près) du « problème universel » :

Il existe une application bilinéaire $\otimes : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2$ *telle que toute application bilinéaire* $\phi : V_1 \times V_2 \to W$ *possède une factorisation unique* $\phi = \widetilde{\phi} \circ \otimes$*, où* $\widetilde{\phi} : V_1 \otimes V_2 \to W$ *est linéaire.*

Si $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, on note $v_1 \otimes v_2$ l'image de (v_1, v_2) par $\otimes$. Si $(e_1, \ldots, e_n)$, $(f_1, \ldots, f_p)$ sont des bases de V_1, V_2, alors $(e_j \otimes f_k)_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}}$ est une base de $V_1 \otimes V_2$.

Plus généralement, si $V_1, \ldots, V_p$ sont des espaces vectoriels, leur *produit tensoriel* $V_1 \otimes \cdots \otimes V_p$ est l'espace vectoriel, solution du « problème universel » :

Il existe une application multilinéaire $\otimes : V_1 \times \cdots \times V_p \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_p$ *telle que toute application multilinéaire* $\phi : V_1 \times \cdots \times V_p \to W$ *possède une factorisation unique* $\phi = \widetilde{\phi} \circ \otimes$*, où* $\widetilde{\phi} : V_1 \otimes \cdots \otimes V_p \to W$ *est linéaire.*

Pour $v_i \in V_i$, on note encore $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$ l'image de $(v_1, \ldots, v_p)$ par $\otimes$.

Le produit tensoriel est « associatif », au sens que l'application linéaire

$$\begin{aligned} (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 &\to V_1 \otimes V_2 \otimes V_3, \\ (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 &\mapsto v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \qquad (v_i \in V_i) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Il est « commutatif », au sens que l'application linéaire

$$\begin{aligned} &V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1, \\ &v_1 \otimes v_2 \mapsto v_2 \otimes v_1 \qquad (v_i \in V_i) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Les applications

$$\begin{gathered} \mathbb{C} \otimes V \to V \to V \otimes \mathbb{C} \\ 1 \otimes v \mapsto v \mapsto v \otimes 1 \end{gathered}$$

sont également des isomorphismes.

Si V_1, V_2 sont des espaces vectoriels, l'application

$$\begin{gathered} (V_1^* \otimes V_2^*) \times (V_1 \otimes V_2) \to \mathbb{C} \\ ((f_1 \otimes f_2), (v_1 \otimes v_2)) \mapsto \langle f_1, v_1 \rangle \langle f_2, v_2 \rangle \end{gathered}$$

est une dualité entre $V_1 \otimes V_2$ et $V_1^* \otimes V_2^*$, qui permet d'identifier $(V_1 \otimes V_2)^*$ et $V_1^* \otimes V_2^*$. Cette propriété s'étend au produit tensoriel de p espaces vectoriels $V_1, \ldots, V_p$.

Si V est un espace vectoriel et $k \in \mathbb{N}$, sa *puissance tensorielle d'ordre k* est

$$\otimes_k V = \begin{cases} \mathbb{C} & (k = 0), \\ V & (k = 1), \\ \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k \text{ fois}} & (k > 1). \end{cases}$$

On déduit de ce qui précède des isomorphismes naturels

$$(\otimes_k V) \otimes (\otimes_l V) \to \otimes_{k+l} V$$

et

$$(\otimes_k V)^* \to \otimes_k V^*.$$

On note

$$\otimes^k V = \otimes_k V^*.$$

5.2 Tenseurs

Soit V un espace vectoriel. Un *tenseur* de type (k, l) (k-covariant, l-contravariant) sur V est une application multilinéaire

$$T : V^k \times (V^*)^l \to \mathbb{C}$$

$$\left((u_1,\ldots,u_k),\left(f^1,\ldots,f^l\right)\right)\mapsto T\left(u_1,\ldots,u_k;f^1,\ldots,f^l\right).$$

Par la propriété universelle du produit tensoriel, T est associé à l'application

$$\begin{aligned}\widetilde{T}:(\otimes_k V)\otimes\left(\otimes^l V\right)&\to\mathbb{C}\\(u_1\otimes\cdots\otimes u_k)\otimes\left(f^1\otimes\cdots\otimes f^l\right)&\mapsto T\left(u_1,\ldots,u_k;f^1,\ldots,f^l\right).\end{aligned}$$

Par la propriété de dualité, on associe à $\widetilde{T}$ l'élément $\widehat{T}$ de $\left(\otimes^k V\right)\otimes(\otimes_l V)$ défini par

$$\left\langle(u_1\otimes\cdots\otimes u_k)\otimes\left(f^1\otimes\cdots\otimes f^l\right),\widehat{T}\right\rangle=T\left(u_1,\ldots,u_k;f^1,\ldots,f^l\right).$$

On associe également à T les applications linéaires

$$T_*:\otimes_k V\to\otimes_l V,$$

définie par

$$\left\langle f^1\otimes\cdots\otimes f^l,T_*\left(u_1\otimes\cdots\otimes u_k\right)\right\rangle=T\left(u_1,\ldots,u_k;f^1,\ldots,f^l\right)$$

et

$$T^*:\otimes^l V\to\otimes^k V,$$

définie par

$$\left\langle T^*\left(f^1\otimes\cdots\otimes f^l\right),u_1\otimes\cdots\otimes u_k\right\rangle=T\left(u_1,\ldots,u_k;f^1,\ldots,f^l\right).$$

Les applications T_* et T^* sont duales l'une de l'autre et chacune d'elles détermine T. Si on désigne par $\mathcal{T}_l^k(V)$ l'espace vectoriel des tenseurs de type (k,l) sur V, on a des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_l^k(V)&\simeq\left((\otimes_k V)\otimes\left(\otimes^l V\right)\right)^*\simeq\left(\otimes^k V\right)\otimes(\otimes_l V)\\&\simeq\mathrm{H}\,om\left(\otimes_k V,\otimes_l V\right)\simeq\mathrm{H}\,om\left(\otimes^l V,\otimes^k V\right)\end{aligned}$$

définis par les correspondances

$$T\leftrightarrow\widetilde{T}\leftrightarrow\widehat{T}\leftrightarrow T_*\leftrightarrow T^*$$

ci-dessus.

Si $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V et si $\mathbf{e}^* = (e^1, \ldots, e^n)$ est la base duale, les *coefficients de T dans* $\mathbf{e}$ sont

$$T_{i_1 \cdots i_k}^{j_1 \cdots j_l} = T\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}; e^{j_1}, \ldots, e^{j_l}\right) \qquad (1 \leq i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l \leq n).$$

Si

$$u_p = \sum_i u_p^i e_i, \quad f^q = \sum_j f_j^q e^j,$$

on a

$$T\left(u_1, \ldots, u_k; f^1, \ldots, f^l\right) = \sum T_{i_1 \cdots i_k}^{j_1 \cdots j_l} u_1^{i_1} \cdots u_k^{i_k} f_{j_1}^1 \cdots f_{j_l}^l.$$

Cette relation peut aussi s'écrire

$$\widehat{T} = \sum T_{i_1 \cdots i_k}^{j_1 \cdots j_l} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}.$$

5.3 Trace d'un endomorphisme

Soit T un tenseur de type $(1,1)$ sur un espace vectoriel V :

$$T : V \times V^* \to \mathbb{C}.$$

On lui associe comme précédemment $\widehat{T} \in V^* \otimes V$, $T_* : V \to V$, $T^* : V^* \to V^*$. L'accouplement canonique

$$\langle\ ,\ \rangle : V^* \times V \to \mathbb{C}$$

se factorise en

$$\langle\ ,\ \rangle = \mathrm{t}\, r \circ \otimes, \tag{5.1}$$

avec $\otimes : V^* \times V \to V^* \otimes V$ et

$$\mathrm{t}\, r : V^* \otimes V \to \mathbb{C}.$$

La *trace* du tenseur T est par définition

$$\mathrm{t}\, r T = \mathrm{t}\, r \left(\widehat{T}\right).$$

Soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de V et soient $\left(T_i^j\right)$ les coefficients de T dans cette base. Alors

$$\widehat{T} = \sum_{i,j} T_i^j e^i \otimes e_j.$$

Comme $\mathrm{t\,r}\,(e^i \otimes e_j) = \langle e^i, e_j \rangle = \delta^i_j$, on a

$$\mathrm{t\,r}T = \mathrm{t\,r}\left(\widehat{T}\right) = \sum_i T^i_i.$$

Comme $\left(T^j_i\right)$ est aussi la matrice de T_* dans la base $\mathbf{e}$, la trace du tenseur T est égale à la trace de T_*, au sens habituel de la trace des endomorphismes.

5.4 Contraction de tenseurs

Soit $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l \geq 1$. Soit

$$\theta^1_1 : \left(\otimes^k V\right) \otimes (\otimes_l V) \simeq V^* \otimes V \otimes \left(\otimes^{k-1} V\right) \otimes (\otimes_{l-1} V) \tag{5.2}$$

l'isomorphisme défini par

$$\theta^1_1 \left(f^1 \otimes \cdots \otimes f^k \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_l\right) = f^1 \otimes u_1 \otimes f^2 \otimes \cdots \otimes f^k \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_l.$$

On considère

$$\begin{aligned} &\mathrm{t\,r} \otimes \mathrm{i\,d}_{\left(\otimes^{k-1}V\right)\otimes(\otimes_{l-1}V)} : \\ &\qquad V^* \otimes V \otimes \left(\otimes^{k-1} V\right) \otimes (\otimes_{l-1} V) \to \left(\otimes^{k-1} V\right) \otimes (\otimes_{l-1} V), \end{aligned} \tag{5.3}$$

où $\mathrm{t\,r}$ est l'application (5.1) et on définit

$$\mathrm{t\,r}^1_1 : \left(\otimes^k V\right) \otimes (\otimes_l V) \to \left(\otimes^{k-1} V\right) \otimes (\otimes_{l-1} V) \tag{5.4}$$

comme le composé

$$\mathrm{t\,r}^1_1 = \left(\mathrm{t\,r} \otimes \mathrm{i\,d}_{\left(\otimes^{k-1}V\right)\otimes(\otimes_{l-1}V)}\right) \circ \theta^1_1 \tag{5.5}$$

de (5.3) et (5.2). En utilisant les isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^k_l(V) &\simeq \left(\otimes^k V\right) \otimes (\otimes_l V), \\ \mathcal{T}^{k-1}_{l-1}(V) &\simeq \left(\otimes^{k-1} V\right) \otimes (\otimes_{l-1} V), \end{aligned}$$

on transpose l'application (5.4) en une application, également notée $\mathrm{t\,r}^1_1$,

$$\mathrm{t\,r}^1_1 : \mathcal{T}^k_l(V) \to \mathcal{T}^{k-1}_{l-1}(V).$$

Si T est un tenseur de type (k,l), le tenseur $\mathrm{t}\,r_1^1 T$ est appelé *contraction de* T (par rapport à la première variable covariante et à la première variable contravariante).

Si $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V et si $\left(T^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k}\right)$ sont les *coefficients de* T *dans* $\mathbf{e}$, on a

$$\widehat{T} = \sum T^{j_1\cdots j_l}_{i_1\cdots i_k} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}$$

et

$$\mathrm{t}\,r_1^1 \widehat{T} = \sum T^{ij_2\cdots j_l}_{ii_2\cdots i_k} e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_2} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}.$$

Les coefficients de $S = \mathrm{t}\,r_1^1 T$ dans $\mathbf{e}$ sont donc

$$S^{j_2\cdots j_l}_{i_2\cdots i_k} = \sum_i T^{ij_2\cdots j_l}_{ii_2\cdots i_k}. \tag{5.6}$$

5.5 Contractions itérées

Dans ce paragraphe, on note $\theta = \theta_1^1$ et $\mathrm{t}\,r = \mathrm{t}\,r_1^1$.

Soit $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l \geq r$. La contraction itérée

$$(\mathrm{t}\,r)^r : \left(\otimes^k V\right) \otimes (\otimes_l V) \to \left(\otimes^{k-r} V\right) \otimes (\otimes_{l-r} V)$$

est, par application des définitions, égale à

$$(\mathrm{t}\,r)^r = \left(\underbrace{\mathrm{t}\,r \otimes \cdots \otimes \mathrm{t}\,r}_{r \text{ fois}} \otimes \mathrm{i}\,d_{\left(\otimes^{k-1}V\right)\otimes(\otimes_{l-1}V)}\right) \circ \theta^r,$$

avec $\mathrm{t}\,r : V^* \otimes V \to \mathbb{C}$ défini par (5.1) et

$$\theta^r : \left(\otimes^k V\right) \otimes (\otimes_l V) \simeq \underbrace{V^* \otimes V \otimes \cdots \otimes V^* \otimes V}_{r \text{ fois}} \otimes \left(\otimes^{k-r} V\right) \otimes (\otimes_{l-r} V)$$

$$f^1 \otimes \cdots \otimes f^k \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_l \mapsto$$
$$f^1 \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes f^r \otimes u_r \otimes f^{r+1} \otimes \cdots \otimes f^k \otimes u_{r+1} \otimes \cdots \otimes u_l.$$

5.6 Divisibilité par $\langle\ ,\ \rangle$

5.6.1 Tenseurs de type $(1,1)$.

Soit $\delta = \langle\ ,\ \rangle$ le « tenseur de Kronecker », i.e. tel que $\delta_* = \mathrm{i}\,d_V$; si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V, on a $\widehat{\delta} = \sum e^i \otimes e_i$ et $\mathrm{t}\,r\delta = n = \dim V$. On

en déduit
$$V^* \otimes V = \mathbb{C}\widehat{\delta} \oplus \ker \mathrm{t}\, r.$$
Si T est un tenseur de type $(1,1)$, la décomposition de T est

$$T = \frac{\mathrm{t}\, rT}{n}\delta + \left(T - \frac{\mathrm{t}\, rT}{n}\delta\right).$$

5.6.2 Tenseurs de type (k,l).

Soient $k,l \geq 1$. Si $S \in \mathcal{T}_{l-1}^{k-1}(V)$, soit $\widehat{S}$ l'élément correspondant de $\left(\otimes^{k-1}V\right) \otimes (\otimes_{l-1}V)$. Soit $T \in \mathcal{T}_l^k(V)$ défini par

$$\theta\left(\widehat{T}\right) = \delta \otimes \widehat{S}; \tag{5.7}$$

on a alors
$$\mathrm{t}\, rT = nS,$$
ce qui montre que $\mathrm{t}\, r : \mathcal{T}_l^k(V) \to \mathcal{T}_{l-1}^{k-1}(V)$ est surjective et que

$$\mathcal{T}_l^k(V) = \delta \otimes \mathcal{T}_{l-1}^{k-1}(V) \oplus \ker \mathrm{t}\, r,$$

où on note $\delta \otimes \mathcal{T}_{l-1}^{k-1}(V)$ le sous-espace des tenseurs vérifiant (5.7) pour $S \in \mathcal{T}_{l-1}^{k-1}(V)$, autrement dit

$$T\left(u_1, \ldots, u_k; f^1, \ldots, f^l\right) = \langle u_1, f_1 \rangle\, S\left(u_2, \ldots, u_k; f^2, \ldots, f^l\right).$$

6 Contraction des tenseurs symétriques

6.1 Puissances tensorielles symétriques

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension n.

Pour $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, soit
$$T : V^k \to W$$
une application multilinéaire. L'application symétrisée de T est l'application $S(T)$ définie par

$$S(T)\left(u_1, \ldots, u_k\right) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{k}}} T\left(u_{\sigma_1}, \ldots, u_{\sigma_k}\right).$$

On a $S(S(T)) = S(T)$; l'application T est symétrique si et seulement si $S(T) = T$.

En particulier, la symétrisée $S(\otimes_k)$ de l'application canonique

$$\otimes_k : V^k \to \otimes_k V$$

se factorise en

$$S(\otimes_k) = \mathrm{S}\,ym_k \circ \otimes_k;$$

de manière équivalente, l'application

$$\mathrm{S}\,ym_k : \otimes_k V \to \otimes_k V$$

est définie par

$$\mathrm{S}\,ym_k (u_1 \otimes \cdots \otimes u_k) = \tfrac{1}{k!} \textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\mathfrak{k}} u_{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma_k}.$$

On a

$$\mathrm{S}\,ym_k \circ \mathrm{S}\,ym_k = \mathrm{S}\,ym_k.$$

Définition 6.1. *L'image de* Sym_k *est appelée* puissance tensorielle symétrique *(d'ordre k) de V et est notée $\odot_k V$. Pour $k = 0$, on convient que* $\mathrm{Sym}_0 = \mathrm{id}_\mathbb{C}$ *et* $\odot_0 V = \mathbb{C}$.

Soit $T : V^k \to W$ une application multilinéaire, $S(T)$ sa symétrisée. Les applications linéaires associées $\widetilde{T} : \otimes_k V \to W$ et $\widetilde{S(T)} : \otimes_k V \to W$ sont alors liées par

$$\widetilde{S(T)} = \widetilde{T} \circ \mathrm{S}\,ym_k.$$

Une application multilinéaire *symétrique* $T : V^k \to W$ est donc caractérisée par

$$\widetilde{T} = \widetilde{T} \circ \mathrm{S}\,ym_k.$$

Les applications linéaires $\widetilde{T} : \otimes_k V \to W$ qui vérifient cette relation sont déterminées par leur restriction $\underline{T} : \odot_k V \to W$ à l'image du projecteur $\mathrm{S}\,ym_k$.

Soient $k, l \in \mathbb{N}$. Pour $u \in \odot_k V$, $v \in \odot_l V$, on définit

$$u \odot v = \mathrm{S}\,ym_{k+l} (u \otimes v).$$

Le produit $\odot$ est étendu de manière naturelle à

$$\odot_* V = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \odot_k V,$$

qui est alors une algèbre associative, appelée *algèbre symétrique* de V.

Si $u_1, \ldots, u_k \in V$, on a

$$u_1 \odot \cdots \odot u_k = \mathrm{S}\,ym_k \left(u_1 \otimes \cdots \otimes u_k\right).$$

On note $\odot^k V$ l'espace $\odot_k V^*$.

Si $u_1, \ldots, u_k \in V$, $f^1, \ldots, f^k \in V^*$, on a

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{S}\,ym_k \left(u_1 \otimes \cdots \otimes u_k\right), f^1 \otimes \cdots \otimes f^k \right\rangle &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\mathfrak{k}} \left\langle u_{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma_k}, f^1 \otimes \cdots \otimes f^k \right\rangle \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\mathfrak{k}} \left\langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_k, f^{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes f^{\sigma^{-1}(k)} \right\rangle \\ &= \left\langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_k, \mathrm{S}\,ym_k \left(f^1 \otimes \cdots \otimes f^k\right) \right\rangle.\end{aligned}$$

On en déduit, pour $u \in \otimes_k V$, $f \in \otimes^k V$,

$$\langle \mathrm{S}\,ym_k u, f \rangle = \langle u, \mathrm{S}\,ym_k f \rangle.$$

Si $\underline{T} : \odot_k V \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire, soit $\widetilde{T} : \otimes_k V \to \mathbb{C}$ la forme linéaire telle que $\widetilde{T} = \widetilde{T} \circ \mathrm{S}\,ym_k$ dont la restriction à $\odot_k V$ est $\underline{T}$ et soit $f = \widehat{T}$ l'élément associé de $\otimes^k V$. On a alors

$$\mathrm{S}\,ym_k f = f,$$

c'est-à-dire $f \in \odot^k V$. Les espaces $\odot_k V$ et $\odot_k V^*$ sont ainsi en dualité.

On note $\mathcal{S}^k(V)$ l'espace vectoriel des applications multilinéaires symétriques $T : V^k \to W$. On a ainsi décrit des isomorphismes naturels

$$\begin{gathered}\mathcal{S}^k(V) \simeq (\odot_k V)^* \simeq \odot^k V \\ T \longleftrightarrow \underline{T} \longleftrightarrow \widetilde{T}.\end{gathered}$$

6.2 Tenseurs symétriques

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Un *tenseur* de type (k, l)

$$\begin{gathered}T : V^k \times (V^*)^l \to \mathbb{C} \\ \left((u_1, \ldots, u_k), \left(f^1, \ldots, f^l\right)\right) \mapsto T\left(u_1, \ldots, u_k; f^1, \ldots, f^l\right)\end{gathered}$$

est dit *symétrique* si quelles que soient les permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{k}}$, $\tau \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{l}}$, on a

$$T\left(u_{\sigma_1}, \ldots, u_{\sigma_k}; f^{\tau_1}, \ldots, f^{\tau_l}\right) = T\left(u_1, \ldots, u_k; f^1, \ldots, f^l\right).$$

Si $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V et si $\left(T_{i_1 \cdots i_k}^{j_1 \cdots j_l}\right)$ sont les *coefficients de T dans* $\mathbf{e}$, il est équivalent de dire que les coefficients $T_{i_1 \cdots i_k}^{j_1 \cdots j_l}$ sont invariants par permutations des indices $(i_1, \ldots, i_k)$ et $(j_1, \ldots, j_l)$. L'application

$$\begin{aligned} \widetilde{T} : (\otimes_k V) \otimes \left(\otimes^l V\right) &\to \mathbb{C} \\ (u_1 \otimes \cdots \otimes u_k) \otimes \left(f^1 \otimes \cdots \otimes f^l\right) &\mapsto T\left(u_1, \ldots, u_k; f^1, \ldots, f^l\right) \end{aligned}$$

associée à un tenseur symétrique T est déterminée par sa restriction

$$\underline{T} : (\odot_k V) \otimes \left(\odot^l V\right) \to \mathbb{C}.$$

Par les propriétés de dualité, on associe à $\underline{T}$ l'élément $\widehat{T}$ de $\left(\odot^k V\right) \otimes (\odot_l V)$ défini par

$$\left\langle (u_1 \odot \cdots \odot u_k) \otimes \left(f^1 \odot \cdots \odot f^l\right), \widehat{T} \right\rangle = T\left(u_1, \ldots, u_k; f^1, \ldots, f^l\right).$$

Si on désigne par $\mathcal{S}_l^k(V)$ l'espace vectoriel des tenseurs symétriques de type (k, l) sur V, on a des isomorphismes naturels

$$\mathcal{S}_l^k(V) \simeq \left((\odot_k V) \otimes \left(\odot^l V\right)\right)^* \simeq \left(\odot^k V\right) \otimes (\odot_l V) \tag{6.1}$$

définis par les correspondances

$$T \leftrightarrow \underline{T} \leftrightarrow \widehat{T}$$

ci-dessus.

6.2.1 Produit symétrique

Soient $T : V^k \times (V^*)^l \to \mathbb{C}$, $T' : V^{k'} \times (V^*)^{l'} \to \mathbb{C}$ deux tenseurs symétriques. Leur produit tensoriel

$$\begin{aligned} T \otimes T' : V^{k+k'} \times (V^*)^{l+l'} &\to \mathbb{C} \\ (T \otimes T')\left((u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_{k'}), \left(f^1, \ldots, f^l, g^1, \ldots, g^{l'}\right)\right) & \\ = T\left(u_1, \ldots, u_k; f^1, \ldots, f^l\right) T'\left(v_1, \ldots, v_{k'}; g^1, \ldots, g^{l'}\right) & \end{aligned}$$

n'est en général pas symétrique.

Si $T : V^k \times (V^*)^l \to \mathbb{C}$ est un tenseur de type (k,l), on définit son (double) symétrisé $S(T)$ par

$$S(T)\left((u_1,\ldots,u_k),\left(f^1,\ldots,f^l\right)\right) = \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\mathfrak{k}},\tau\in\mathfrak{S}_{\mathfrak{l}}} T\left(u_{\sigma_1},\ldots,u_{\sigma_k};f^{\tau_1},\ldots,f^{\tau_l}\right).$$

Le tenseur T est symétrique ssi $S(T)=T$.

Si $T : V^k \times (V^*)^l \to \mathbb{C}$, $T' : V^{k'} \times (V^*)^{l'} \to \mathbb{C}$ sont deux tenseurs symétriques, leur *produit tensoriel symétrique* est défini par

$$T \odot T' = S\left(T \otimes T'\right).$$

Si

$$\widetilde{T} \in \left(\odot^k V\right)\otimes\left(\odot_l V\right),\ \widetilde{T'} \in \left(\odot^{k'} V\right)\otimes\left(\odot_{l'} V\right),\ \widetilde{T\odot T'} \in \left(\odot^{k+k'} V\right)\otimes\left(\odot_{l+l'} V\right)$$

sont les éléments associés par les isomorphismes (6.1), on a

$$\widetilde{T\odot T'} = \widetilde{T}\odot\widetilde{T'},$$

où le produit symétrique de $u\otimes f \in \left(\odot^k V\right)\otimes\left(\odot_l V\right)$ et $v\otimes g \in \left(\odot^{k'} V\right)\otimes\left(\odot_{l'} V\right)$ est défini comme

$$\left(u\otimes f\right)\odot\left(v\otimes g\right) = \left(u\odot v\right)\otimes\left(f\odot g\right).$$

6.3 Contraction des tenseurs symétriques

L'application $\mathrm{t}\,r = \mathrm{t}\,r_1^1$

$$\mathrm{t}\,r : \left(\otimes^k V\right)\otimes\left(\otimes_l V\right) \to \left(\otimes^{k-1} V\right)\otimes\left(\otimes_{l-1} V\right)$$

définie par (5.5) vérifie

$$\mathrm{t}\,r\left(\left(\odot^k V\right)\otimes\left(\odot_l V\right)\right) \subset \left(\odot^{k-1} V\right)\otimes\left(\odot_{l-1} V\right)$$

et se restreint par conséquent en une application

$$\mathrm{t}\,r : \left(\odot^k V\right)\otimes\left(\odot_l V\right) \to \left(\odot^{k-1} V\right)\otimes\left(\odot_{l-1} V\right). \tag{6.2}$$

Utilisant l'isomorphisme (6.1), on en déduit, pour $k, l \geq 1$, l'opération de *contraction des tenseurs symétriques*

$$\mathrm{t}\,r : \mathcal{S}_l^k(V) \to \mathcal{S}_{l-1}^{k-1}(V) \tag{6.3}$$

et, pour $k, l \geq r$, ses itérées

$$(\mathrm{t}\,r)^r : \mathcal{S}_l^k(V) \to \mathcal{S}_{l-r}^{k-r}(V).$$

(Par abus de langage, l'application (6.2) sera également appelée contraction des tenseurs symétriques).

On a évidemment $\mathcal{S}_1^1(V) = \mathcal{T}_1^1(V)$. Rappelons que le tenseur de Kronecker $\delta = \langle\ ,\ \rangle \in \mathcal{S}_1^1(V)$ vérifie

$$\widehat{\delta} = \sum e^i \otimes e_i$$

dans toute base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V, et que l'on a

$$\mathrm{t}\,r\delta = n = \dim V.$$

Lemme 6.1. *Soit $T \in \mathcal{S}_1^1(V)$. On a alors*

$$\mathrm{tr}\,(\delta \odot T) = \frac{n+2}{4} T + \frac{1}{4}\,(\mathrm{tr}\,T)\,\delta. \tag{6.4}$$

Démonstration. On démontre la relation correspondante pour $\widehat{\delta}$ et

$$\widehat{T} \in V^* \otimes V.$$

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V. Comme la relation à démontrer est linéaire en T, il suffit de la démontrer pour

$$\widehat{T} = e^i \otimes e_j.$$

On a $\mathrm{tr}\,\widehat{T} = \delta_i^j$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\widehat{\delta} \odot \widehat{T} &= \sum_k \left(e^k \odot e^i\right) \otimes (e_k \odot e_j) \\ &= \frac{1}{4} \sum_k \left(e^{ki} + e^{ik}\right) \otimes (e_{kj} + e_{jk})\,,\end{aligned}$$

où on note $e^{ij} = e^i \otimes e^j$ et $e_{ij} = e_i \otimes e_j$. On en déduit

$$\mathrm{tr}\left(\widehat{\delta} \odot \widehat{T}\right) = \frac{n}{4}\widehat{T} + \frac{1}{4}\widehat{T} + \frac{1}{4}\widehat{T} + \frac{1}{4}\delta_i^j\widehat{\delta} = \frac{n+2}{4}\widehat{T} + \frac{1}{4}\left(\mathrm{tr}\,\widehat{T}\right)\widehat{\delta}.$$

□

Corollaire 6.2.

$$\operatorname{tr}(\delta \odot \delta) = \frac{n+1}{2}\delta, \tag{6.5}$$

$$\operatorname{tr}^2(\delta \odot \delta) = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{6.6}$$

Proposition 6.3. *Tout tenseur symétrique F de type $(2,2)$ s'écrit d'une manière unique*

$$F = \delta \odot G + N, \tag{6.7}$$

avec $\operatorname{tr} N = 0$ *et*

$$G = \frac{4}{n+2}\operatorname{tr} F - \frac{2\delta}{(n+1)(n+2)}(\operatorname{tr})^2 F. \tag{6.8}$$

Démonstration. Si F admet l'écriture (6.7) avec $\operatorname{tr} N = 0$, le lemme 6.1 donne

$$\operatorname{tr} F = \frac{n+2}{4}G + \frac{1}{4}(\operatorname{tr} G)\,\delta.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}^2 F &= \frac{n+2}{4}\operatorname{tr} G + \frac{n}{4}\operatorname{tr} G = \frac{n+1}{2}\operatorname{tr} G,\\
\operatorname{tr} G &= \frac{2}{n+1}\operatorname{tr}^2 F,\\
G &= \frac{4}{n+2}\operatorname{tr} F - \frac{1}{n+2}(\operatorname{tr} G)\,\delta\\
&= \frac{4}{n+2}\operatorname{tr} F - \frac{2\delta}{(n+1)(n+2)}(\operatorname{tr})^2 F,
\end{aligned}$$

ce qui montre l'unicité de la décomposition (6.7).

Inversement, si G est défini par (6.8), on a

$$\operatorname{tr}(\delta \odot G) = \frac{n+2}{4}G + \frac{1}{4}(\operatorname{tr} G)\,\delta = \operatorname{tr} F.$$

□

Lemme 6.4. *Soit $T \in \mathcal{S}_2^2(V)$. On a alors*

$$\operatorname{tr}(\delta \odot T) = \frac{n+4}{9}T + \frac{4}{9}\delta \odot \operatorname{tr} T. \tag{6.9}$$

Démonstration. On démontre la relation (6.9) pour $\widehat{\delta}$ et $\widehat{T} \in \odot^2 V \otimes \odot_2 V$. Comme $\odot_2 V$ est engendré par les éléments de la forme $x \odot x$, $x \in V$, on peut se limiter au cas où

$$\widehat{T} = \left(e^j \odot e^j\right) \otimes \left(e_k \odot e_k\right) = e^{jj} \otimes e_{kk}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \widehat{\delta} \odot \widehat{T} &= \sum_i \left(e^i \odot e^j \odot e^j\right) \otimes \left(e_i \odot e_k \odot e_k\right) \\ &= \frac{1}{9} \sum_i \left(e^{ijj} + e^{jij} + e^{jji}\right) \otimes \left(e_{ikk} + e_{kik} + e_{kki}\right). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left(\widehat{\delta} \odot \widehat{T}\right) &= \frac{n}{9} e^{jj} \otimes e_{kk} + \frac{1}{9} e^{jj} \otimes e_{kk} + \frac{1}{9} e^{jj} \otimes e_{kk} \\ &+ \frac{1}{9} e^{jj} \otimes e_{kk} + \frac{\delta^j_k}{9} \sum_i e^{ij} \otimes e_{ik} + \frac{\delta^j_k}{9} \sum_i e^{ij} \otimes e_{ki} \\ &+ \frac{1}{9} e^{jj} \otimes e_{kk} + \frac{\delta^j_k}{9} \sum_i e^{ji} \otimes e_{ik} + \frac{\delta^j_k}{9} \sum_i e^{ji} \otimes e_{ki} \\ &= \frac{n+4}{9} \widehat{T} + \frac{4}{9} \widehat{\delta} \odot \operatorname{tr} \widehat{T}, \end{aligned}$$

car $\operatorname{tr} \widehat{T} = \delta^j_k e^j \otimes e_k$. □

Corollaire 6.5.

$$\operatorname{tr}\left(\delta \odot \delta \odot \delta\right) = \frac{n+2}{3} \delta \odot \delta, \tag{6.10}$$

$$\operatorname{tr}^2\left(\delta \odot \delta \odot \delta\right) = \frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{6} \delta, \tag{6.11}$$

$$\operatorname{tr}^3\left(\delta \odot \delta \odot \delta\right) = \frac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{6}. \tag{6.12}$$

Démonstration. Appliquant le lemme 6.4 et le corollaire 6.2, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left(\delta \odot \delta \odot \delta\right) &= \frac{n+4}{9} \delta \odot \delta + \frac{4}{9} \delta \odot \operatorname{tr}\left(\delta \odot \delta\right) \\ &= \frac{n+4}{9} \delta \odot \delta + \frac{4}{9} \delta \odot \frac{n+1}{2} \delta \end{aligned}$$

$$= \frac{n+2}{3}\delta \odot \delta,$$

d'où la relation (6.10). Les relations (6.11)-(6.12) résultent alors du corollaire 6.2. $\square$

Proposition 6.6. *Tout tenseur symétrique de type* $(3,3)$ *s'écrit*

$$F = G\delta \odot \delta \odot \delta + N, \tag{6.13}$$

avec $(\mathrm{tr})^3 N = 0$ *et*

$$G = \frac{6}{n(n+1)(n+2)} (\mathrm{tr})^3 F. \tag{6.14}$$

Ceci résulte directement de la relation (6.12).

Lemme 6.7. *Soit* $T \in \mathcal{S}_0^1(V)$*. On a alors*

$$\mathrm{tr}(\delta \odot T) = \frac{n+1}{2} T. \tag{6.15}$$

Démonstration. Il suffit de montrer la relation pour

$$\widehat{\delta} = \sum e^i \otimes e_i$$

et $\widehat{T} = e^j$. On a alors

$$\widehat{\delta} \odot \widehat{T} = \sum_i \left(e^i \odot e^j\right) \otimes e_i = \frac{1}{2} \sum_i e^{ij} \otimes e_i + \frac{1}{2} \sum_i e^{ji} \otimes e_i$$

et

$$\mathrm{tr}\left(\widehat{\delta} \odot \widehat{T}\right) = \frac{n}{2} e^j + \frac{1}{2} e^j.$$

$\square$

Lemme 6.8. *Soit* $T \in \mathcal{S}_1^2(V)$*. On a alors*

$$\mathrm{tr}(\delta \odot T) = \frac{n+3}{6} T + \frac{1}{3} (\mathrm{tr}\, T) \odot \delta. \tag{6.16}$$

Démonstration. Il suffit de montrer la relation (6.16) pour $\widehat{\delta}$ et $\widehat{T} = \left(e^j \odot e^k\right) \otimes e_l$. On a dans ce cas

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta} \odot \widehat{T} &= \sum_i \left(e^i \odot e^j \odot e^k\right) \otimes \left(e_i \odot e_l\right) \\
&= \frac{1}{12} \sum_i \left(e^{ijk} + e^{ikj} + e^{jik} + e^{jki} + e^{kij} + e^{kji}\right) \otimes \left(e_{il} + e_{li}\right),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\left(\widehat{\delta} \odot \widehat{T}\right) &= \frac{n}{12} e^{jk} \otimes e_l + \frac{1}{12} e^{jk} \otimes e_l + \frac{n}{12} e^{kj} \otimes e_l + \frac{1}{12} e^{kj} \otimes e_l \\
&\quad + \frac{1}{12} e^{jk} \otimes e_l + \frac{\delta_l^j}{12} \sum_i e^{ik} \otimes e_i + \frac{1}{12} e^{kj} \otimes e_l + \frac{\delta_l^j}{12} \sum_i e^{ki} \otimes e_i \\
&\quad + \frac{1}{12} e^{kj} \otimes e_l + \frac{\delta_l^k}{12} \sum_i e^{ij} \otimes e_i + \frac{1}{12} e^{jk} \otimes e_l + \frac{\delta_l^k}{12} \sum_i e^{ji} \otimes e_i \\
&= \frac{n}{6} \widehat{T} + \frac{1}{2} \widehat{T} + \frac{1}{6} \left(\delta_l^i e^k + \delta_l^k e^j\right) \odot \widehat{\delta} = \frac{n+3}{6} \widehat{T} + \frac{1}{3} \left(\operatorname{tr} \widehat{T}\right) \odot \widehat{\delta}.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 6.9. *Soit $T \in \mathcal{S}_0^1(V)$. On a alors*

$$\operatorname{tr}\left(\delta \odot \delta \odot T\right) = \frac{n+2}{3} \delta \odot T, \tag{6.17}$$

$$\operatorname{tr}^2\left(\delta \odot \delta \odot T\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{6} T. \tag{6.18}$$

On applique le lemme précédent à $U = \delta \odot T$, puis le lemme 6.7, d'où

$$t\,r\left(\delta \odot \delta \odot T\right) = \frac{n+3}{6} \delta \odot T + \frac{1}{3} \left(t\,r\left(\delta \odot T\right)\right) \odot \delta = \frac{n+2}{3} \delta \odot T$$

et

$$t\,r^2\left(\delta \odot \delta \odot T\right) = \tfrac{(n+1)(n+2)}{6} T.$$

Ce corollaire entraîne immédiatement

Proposition 6.10. *Tout tenseur symétrique F de type $(3,2)$ s'écrit de manière unique*

$$F = \delta \odot \delta \odot G + N, \tag{6.19}$$

avec $(\operatorname{tr})^2 N = 0$ et

$$G = \frac{6}{(n+1)(n+2)} (\operatorname{tr})^2 F. \tag{6.20}$$

7 Contraction de polynômes réels par rapport à une forme hermitienne

7.1 Polynômes réels sur un espace vectoriel complexe

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie n. On désigne par $\overline{V}$ l'espace vectoriel conjugué (i.e., muni du produit $\lambda \cdot v = \overline{\lambda} v$).

Un *polynôme réel de type* (k, l) est une application

$$P : V \to \mathbb{C}$$

telle qu'il existe une forme $\mathbb{C}$-multilinéaire symétrique (sur V^k et $\overline{V}^l$ respectivement)

$$p : V^k \times \overline{V}^l \to \mathbb{C}$$

vérifiant

$$P(z) = p\left(\underbrace{z, \ldots, z}_{k \text{ fois}}; \underbrace{z, \ldots, z}_{l \text{ fois}}\right).$$

La forme p est unique et appelée *forme polaire* du polynôme P ; on a

$$p\left(u_1, \ldots, u_k; v_1, \ldots, v_l\right) = \frac{1}{k!l!} \partial_{u_1} \cdots \partial_{u_k} \overline{\partial}_{v_1} \cdots \overline{\partial}_{v_l} P.$$

On donne le même nom de forme polaire au tenseur symétrique associé à p

$$\widehat{P} \in \left(\odot^k V\right) \otimes \left(\odot^l \overline{V}\right)$$

défini par

$$\left\langle \left(u_1 \odot \cdots \odot u_k\right) \otimes \left(v_1 \odot \cdots \odot v_l\right), \widehat{P} \right\rangle = p\left(u_1, \ldots, u_k; v_1, \ldots, v_l\right).$$

Si

$$q : V^k \times \overline{V}^l \to \mathbb{C}$$

est une forme multilinéaire (non nécessairement symétrique), l'application

$$P : V \to \mathbb{C}$$

définie par

$$P(z) = q\left(\underbrace{z, \ldots, z}_{k \text{ fois}}; \underbrace{z, \ldots, z}_{l \text{ fois}}\right)$$

est un polynôme réel de type (k,l), dont la forme polaire p est la symétrisée de q :

$$p\left(u_1,\ldots.u_k;v_1,\ldots,v_k\right)=\frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_\mathfrak{k},\tau\in\mathfrak{S}_\mathfrak{l}}q\left(u_{\sigma_1},\ldots,u_{\sigma_k};v_{\tau_1},\ldots,v_{\tau_l}\right).$$

Les éléments associés $\widehat{P}\in\left(\odot^kV\right)\otimes\left(\odot^l\overline{V}\right)$ et $\widehat{q}\in\left(\otimes^kV\right)\otimes\left(\otimes^l\overline{V}\right)$ sont liés par

$$\widehat{P}=\left(\mathrm{S}\,ym_k\otimes\mathrm{S}\,ym_l\right)\widehat{q}.$$

Si P_1,P_2 sont deux polynômes réels de types respectifs (k_1,l_1) et (k_2,l_2), leur produit $P=P_1P_2$ est un polynôme de type $(k,l)=(k_1+k_2,l_1+l_2)$. Si

$$\widehat{P}\in\left(\odot^kV\right)\otimes\left(\odot^l\overline{V}\right),\ \widehat{P_1}\in\left(\odot^{k_1}V\right)\otimes\left(\odot^{l_1}\overline{V}\right),\ \widehat{P_2}\in\left(\odot^{k_2}V\right)\otimes\left(\odot^{l_2}\overline{V}\right)$$

sont leurs formes polaires respectives, on a

$$\widehat{P}=\left(\mathrm{S}\,ym_k\otimes\mathrm{S}\,ym_l\right)\left(\widehat{P_1}\otimes\widehat{P_2}\right)=\widehat{P_1}\odot\widehat{P_2}.$$

Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de V, qui est également une base de $\overline{V}$. On note $(e^1,\ldots,e^n)$ la base duale dans V ; la base duale dans $\overline{V}$ est alors $\left(\overline{e^1},\ldots,\overline{e^n}\right)$. Dans ces bases, le tenseur $\widehat{P}$ s'écrit

$$\widehat{P}=\sum_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_l}p_{i_1\cdots i_k\overline{j_1}\cdots\overline{j_l}}e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_k}\otimes\overline{e^{j_1}}\otimes\cdots\otimes\overline{e^{j_l}},$$

où les coefficients $p_{i_1\cdots i_k\overline{j_1}\cdots\overline{j_l}}$ sont symétriques par rapport aux indices $(i_1,\ldots,i_k)$ et $(j_1,\ldots,j_l)$. La valeur du polynôme P correspondant en $z=\sum_i z^ie_i\in V$ est

$$P(z)=\sum_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_l}p_{i_1\cdots i_k\overline{j_1}\cdots\overline{j_l}}z^{i_1}\ldots z^{i_k}\overline{z^{j_1}}\ldots\overline{z^{j_l}}.$$

7.2 Contraction par rapport à une forme hermitienne non dégénérée

7.2.1

Soit

$$h:V\times\overline{V}\to\mathbb{C}$$

une forme hermitienne *non dégénérée* sur V. Cette forme hermitienne définit alors un isomorphisme

$$\begin{aligned} \alpha : V &\to \overline{V}^* \\ z &\mapsto \alpha(z) \end{aligned}$$

où $\alpha(z)$ est caractérisé par

$$\langle t, \alpha(z) \rangle = h(z,t) \qquad \left(t \in \overline{V}\right).$$

On désigne par $\beta = a^{-1} : \overline{V}^* \to V$ l'isomorphisme inverse.

Si $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V et si $\left(h_{i\bar{j}}\right)$ est la matrice de h dans cette base, on a

$$\alpha\left(e_i\right) = \sum_j h_{i\bar{j}} \overline{e^j}.$$

Si $\left(h^{k\bar{l}}\right)$ est la matrice inverse de $\left(\overline{h_{i\bar{j}}}\right) = \left(h_{j\bar{i}}\right)$ (au sens $\sum_j h^{k\bar{j}} h_{i\bar{j}} = \delta_i^k$), on a

$$\beta\left(\overline{e^k}\right) = \sum_i h^{i\bar{k}} e_i. \tag{7.1}$$

7.2.2

On déduit de β un isomorphisme

$$B = \mathrm{i}\, d_{\otimes_k V^*} \otimes (\beta \otimes \cdots \otimes \beta) : (\otimes_k V^*) \otimes \left(\otimes_l \overline{V}^*\right) \to (\otimes_k V^*) \otimes (\otimes_l V),$$

qui commute avec les opérations de symétrisation $\mathrm{S}\,ym_k \otimes \mathrm{S}\,ym_l$ et se restreint par conséquent en un isomorphisme, également noté B,

$$B = \mathrm{i}\, d_{\odot_k V^*} \otimes (\beta \odot \cdots \odot \beta) : (\odot_k V^*) \otimes \left(\odot_l \overline{V}^*\right) \to (\odot_k V^*) \otimes (\odot_l V).$$

Si $\widehat{h} \in V^* \otimes \overline{V}^*$ est associé à h, $B\left(\widehat{h}\right)$ est égal au tenseur de Kronecker :

$$B\left(\widehat{h}\right) = \delta.$$

Définition 7.1. *Soient $k, l \geq 1$. Soit F un polynôme de type (k,l) et soit $\widehat{F} = U \in \left(\odot^k V\right) \otimes \left(\odot^l \overline{V}\right)$ sa forme polaire. La* contraction de U par rapport à la forme hermitienne h *est*

$$\mathrm{tr}_h\, U \in \left(\odot^{k-1} V\right) \otimes \left(\odot^{l-1} \overline{V}\right)$$

défini par

$$B\left(\operatorname{tr}_h U\right) = \operatorname{tr} B(U).$$

La contraction de F par rapport à la forme hermitienne h *est le polynôme* $G = \operatorname{tr}_h F$ *de type* $(k-1, l-1)$ *tel que*

$$\widehat{G} = \operatorname{tr}_h U.$$

Si

$$F(z) = \sum_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_l} a_{i_1\cdots i_k\overline{j_1}\cdots\overline{j_l}} z^{i_1}\ldots z^{i_k}\overline{z^{j_1}}\ldots\overline{z^{j_l}},$$

où les coefficients $a_{i_1\cdots i_k\overline{j_1}\cdots\overline{j_l}}$ sont symétriques par rapport aux indices $(i_1,\ldots,i_k)$ et $(j_1,\ldots,j_l)$, on a

$$\widehat{F} = \sum_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_l} a_{i_1\cdots i_k\overline{j_1}\cdots\overline{j_l}} e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_k}\otimes\overline{e^{j_1}}\otimes\cdots\otimes\overline{e^{j_l}}.$$

Utilisant (7.1), on a

$$B\left(\widehat{F}\right) = \sum_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_l} a_{i_1\cdots i_k\overline{j_1}\cdots\overline{j_l}} e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_k}\otimes\sum_i h^{i\overline{j_1}} e_i\otimes\beta\overline{e^{j_2}}\otimes\cdots\otimes\beta\overline{e^{j_l}}$$

et

$$\operatorname{t} r B\left(\widehat{F}\right) = \sum_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_l} h^{i_1\overline{j_1}} a_{i_1\cdots i_k\overline{j_1}\cdots\overline{j_l}} e^{i_2}\otimes\cdots\otimes e^{i_k}\otimes\beta\overline{e^{j_2}}\otimes\cdots\otimes\beta\overline{e^{j_l}}.$$

On en déduit

$$\operatorname{t} r_h\widehat{F} = \textstyle\sum_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_l} h^{i_1\overline{j_1}} a_{i_1\cdots i_k\overline{j_1}\cdots\overline{j_l}} e^{i_2}\otimes\cdots\otimes e^{i_k}\otimes\overline{e^{j_2}}\otimes\cdots\otimes\overline{e^{j_l}}$$

et

$$\left(\operatorname{t} r_h F\right)(z) = \sum_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_l} h^{i_1\overline{j_1}} a_{i_1\cdots i_k\overline{j_1}\cdots\overline{j_l}} z^{i_2}\ldots z^{i_k}\overline{z^{j_2}}\ldots\overline{z^{j_l}}. \tag{7.2}$$

La relation (7.2) est la définition de la contraction utilisée dans l'article de Chern-Moser [3].

7.3 Applications

Soit $\mathcal{F}_{kl}$ l'espace vectoriel des polynômes réels de type (k, l) sur V. Soit h une forme hermitienne sur V. L'isomorphisme $F \mapsto B\left(\widehat{F}\right)$ entre $\mathcal{F}_{kl}$ et $(\odot_k V^*) \otimes (\odot_l V)$ transforme h en δ, le produit de polynômes en produit symétrique de tenseurs, et la contraction par rapport à h en contraction des tenseurs symétriques. Les propositions 6.3, 6.10, 6.6 se traduisent donc immédiatement (en notant $\mathrm{t}\,r = \mathrm{t}\,r_h$ et $\langle z, z\rangle = h(z, z)$) en :

Proposition 7.1. *On a*

$$\mathcal{F}_{22} = \mathcal{F}_{11} \langle z, z\rangle \oplus \mathcal{N}_{22},$$

où

$$\mathcal{N}_{22} = \{N \in \mathcal{F}_{22} \mid \operatorname{tr} N = 0\}.$$

Tout élément $F \in \mathcal{F}_{22}$ s'écrit

$$F = G \langle z, z\rangle + N,$$

avec $\operatorname{tr} N = 0$ *et*

$$G = \frac{4}{n+2} \operatorname{tr} F - \frac{2\langle z, z\rangle}{(n+1)(n+2)} (\operatorname{tr})^2 F.$$

Proposition 7.2. *On a*

$$\mathcal{F}_{32} = \mathcal{F}_{10} \langle z, z\rangle^2 \oplus \mathcal{N}_{32},$$

où

$$\mathcal{N}_{32} = \left\{N \in \mathcal{F}_{32} \mid (\operatorname{tr})^2 N = 0\right\}.$$

Tout élément $F \in \mathcal{F}_{32}$ s'écrit

$$F = G \langle z, z\rangle^2 + N,$$

avec $(\operatorname{tr})^2 N = 0$ *et*

$$G = \frac{6}{(n+1)(n+2)} (\operatorname{tr})^2 F.$$

Proposition 7.3. *On a*

$$\mathcal{F}_{33} = \mathcal{F}_{00} \langle z, z \rangle^3 \oplus \mathcal{N}_{33},$$

où

$$\mathcal{N}_{33} = \left\{ N \in \mathcal{F}_{33} \mid (\mathrm{tr})^3 N = 0 \right\}.$$

Tout élément $F \in \mathcal{F}_{33}$ *s'écrit*

$$F = G \langle z, z \rangle^3 + N,$$

avec $(\mathrm{tr})^3 N = 0$ *et*

$$G = \frac{6}{n(n+1)(n+2)} (\mathrm{tr})^3 F.$$

8 Contraction de séries formelles

On décompose un élément F de $\mathcal{F}$ en termes homogènes de bidegré (k, l) en $(z, \bar{z})$

$$F = \sum_{k,l \geq 0} F_{kl},$$

avec

$$F_{kl}(\lambda z, \mu \overline{z}, u) = \lambda^k \overline{\mu}^l F_{kl}(z, \overline{z}, u) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}).$$

La composante F_{kl} de type (k, l) s'écrit

$$F_{kl} = \sum a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_l}} z^{\alpha_1} \ldots z^{\alpha_k} \overline{z^{\beta_1}} \ldots \overline{z^{\beta_l}}, \tag{8.1}$$

où les coefficients $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \overline{\beta_1} \ldots \overline{\beta_l}}$ sont des séries formelles en u, symétriques par rapport aux indices $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ et $(\beta_1, ..., \beta_l)$.

Des trois lemmes précédents, on déduit

Proposition 8.1. *L'espace vectoriel* $\mathcal{F}$ *des séries formelles est la somme directe*

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{N}$$

de

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{\min(k,l) \leq 1} \mathcal{F}_{kl} \oplus \mathcal{F}_{11} \langle z, z \rangle \oplus \mathcal{F}_{10} \langle z, z \rangle^2 + \mathcal{F}_{00} \langle z, z \rangle^3$$

de

$$\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} \mid N_{kl} = 0 \text{ si } \min(k,l) \leq 1,\ \operatorname{tr} N_{22} = 0,$$
$$(\operatorname{tr})^2 N_{32} = 0,\ (\operatorname{tr})^3 N_{33} = 0\}.$$

Définition 8.1. *On désigne par $P : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{R}$ la projection associée à la décomposition $\mathcal{F} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{N}$. Pour $F \in \mathcal{F}$, on a*

$$PF = \sum_{\min(k,l)\leq 1} F_{kl} + G_{11} \langle z,z\rangle + (G_{10} + G_{01}) \langle z,z\rangle^2 + G_{00} \langle z,z\rangle^3, \qquad (8.2)$$

où

$$G_{11} = \frac{4}{n+2} \operatorname{tr}(F_{22}) - \frac{2\langle z,z\rangle}{(n+1)(n+2)} (\operatorname{tr})^2 (F_{22}),$$
$$G_{10} = \frac{6}{(n+1)(n+2)} (\operatorname{tr})^2 F_{32},$$
$$G_{00} = \frac{6}{n(n+1)(n+2)} (\operatorname{tr})^3 F_{33}.$$

Références

[1] M.S. Baouendi, P.Ebenfelt, L.P. Rothschild, Local Geometric Properties of Real Submanifolds in Complex Spaces, *Bull. AMS (New Series)* **37**(3) (2000), 309-336.

[2] E. Cartan, Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de deux variables complexes, I. *Ann. Math. Pura Appl.*, (4) 11 (1932) 17-90 (ou *Œuvres* II, 2, 1231-1304) ; II, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, (2) 1 (1932) 333-354 (ou *Œuvres* III, 2, 1217-1238).

[3] S.S. Chern, J.K. Moser, Real Hypersurfaces in Complex Manifolds, *Acta Math.* **133** (1975), 219-271.

[4] Won K. Park, *Normal forms of real hypersurfaces with nondegenerate Levi forms,* `arXiv:math.CV/9902034 v1`, 4 Feb 1999.

[5] Won K. Park, *Umbilic points and real hyperquadrics,* `arXiv:math.CV/9902035 v1`, 4 Feb 1999.

[6] Guy. Roos, *Contraction des tenseurs symtriques,* (25 Avril 2004).