REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université des sciences et de la technologie
Houari-Boumedienne
«U.S.T.H.B»

Mémoire de Magistère

Spécialité
Analyse
Option
Systèmes dynamiques

Présenté par : **Melle RIHANI SAMIRA**
(D.E.S MATHEMATHIQUES)

emps de vie et comportement explosif d'équations d'ondes quasi –linéaires en dimension deux d'espace

Dirigé par : **Mr A.KESSAB** Chargé de recherche à l'USTHB

Soutenu publiquement le 13 Juillet 2003, devant la commission d'examen

Président :	**Mr D.TENIOU**	Professeur, U.S.T.H.B
Examinateurs :	**Mr R.BEBBOUCHI**	Professeur, U.S.T.H.B
	Mr M.ABID	Maître de conférences, U.S.T.HB
	Mr A.CHABOUR	Chargé de Cours, U.S.T.HB

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au laboratoire de systèmes dynamiques de la faculté de mathématiques de L'U.S.T.H.B,dirigé par **Mr A.Kessab,** chargé de recherche à L'U.S.T.H.B. Sur ses conseils avisés, il a guidé mes premiers pas en équations aux dérivées partielles, j'ai eu la chance de pouvoir travailler sous sa direction pendant mon année de thèse. Il m'a proposé un sujet de recherche d'un intérêt mathématique, a répondu avec beaucoup de patience et de gentillesse à mes questions, j'ai pu bénéficier de son savoir mathématique , de sa bibliothèque aussi riche que variée tout autant que ses qualités humaines.
Ses encouragements, sa motivation, sa confiance m'ont été précieux. Qu' il en soit sincèrement remercié.

Mes remerciements les plus respectueux vont à **Mr D.Teniou** , Professeur à L'U.S.T.H.B pour le grand honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury.

Je tiens également à remercier **Mr R.Bebbouchi ,** Professeur à l'U.S.T.H.B pour avoir bien voulu consacrer une partie de ses activités à la lecture de mon travail et d'avoir accepté de participer au jury.

Je remercie particulièrement **Mr A.Chabour** , Chargé de cours à l'U.S.T.H.B qui a accepté de s'intéresser à mon travail, de le juger avec compétence et bienveillance, je lui témoigne ma reconnaissance pour l'aide qu'il m' a apportée.

Je tiens donc à remercier **Mr M.Abid**, Maître de conférences à l'U.S.T.H.B pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant d'être membre de jury.

Je ne saurai oublier **Melle** Esserhane Wassila.
Qu'ils trouvent dans ces lignes l'expression de mes remerciements les plus sincères.

Table des Matières

Partie I

Notations principales.

On note dans $\mathbb{R}^3$, les variables (x_0, x_1, x_2) avec, $x_0 = t$, $x = (x_1, x_2)$,

les coordonnées polaires sont : $x_1 = r\cos\omega$, $x_2 = r\sin\omega$

on considère une fonction $f(x,t)$ dont les normes L^2, L^∞ à t fixé sont données par :

$$|f|_0 = \left(\int |f(x,t)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et,} \qquad ||f||_0 = \sup_x |f(x,t)|\,,$$

Pour une équation d'ondes quasi-linéaire à coefficients réels

$$\Box u + g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 u = 0$$

où, $\Box = \partial_t^2 - \Delta_x$, $\quad \Delta_x = \partial_1^2 + \partial_2^2$, $\quad \partial_k = \dfrac{\partial}{\partial x_k}$,

les g_{ij}^k sont des fonctions linéaires de leurs arguments, elles vérifient :

$g_{ij}^k = g_{ji}^k$, et $g_{00}^k = 0$.

Soit, L l'opérateur différentiel du premier ordre :

$$Lu = \partial_t u + \sum_{j=1}^{n} A_j(t,x,u)\partial_j u + B(t,x,u) = 0, \qquad B(0) = 0$$

où, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_0 = t$, $u \in \mathbb{R}^N$.

$A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont des matrices $N \times N$, de fonctions réelles.

on note par λ_j les valeurs propres de A, et r_j, ℓ_j les vecteurs propres à droite et à gauche correspondants.

Partie II

Introduction.

Initialement, ce sont des problèmes de géométrie des surfaces qui conduisirent les mathématiciens du $18^{ème}$ siècle (Monge, entre autres), à envisager des équations aux dérivées partielles. Mais ce sont principalement, des problèmes de physique mathématique qui sont à l'origine d'un vaste développement de la théorie des équations aux dérivées partielles. Tout au long d'une période qui prend pour point de départ les travaux de Cauchy et qui s'étend sur plus d'un siècle, d'importants progrès furent réalisés, mais confinés dans la perspective de données et de solutions régulières. C'est aux problèmes de Cauchy que nous nous intéresserons plus particulièrement.

En raison de la dégradation (explosion) des solutions et/ou de leurs dérivées du problème de Cauchy global pour des équations ou systèmes hyperboliques quasi-linéaires, de nombreuses voies ont été explorées, principalement les travaux de F.John, et S.klainermann qui ont fait suite aux travaux de G.Friedlander [12], et ont donné par la méthode dite "des poids fantômes" une solution approchée à l'équation des ondes en dimension quatre d'espace, tout en contrôlant la norme Z de la solution au lieu de sa norme ∂, ils ont pu établir une borne inférieure au temps de vie de la solution donnée par $\underline{\lim}_{\epsilon \to 0} \varepsilon T_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \geq C > 0$ [18].

Cette borne a été améliorée par L.Hörmander par des "développements asymptotiques" , où il a introduit une solution approchée , et en a estimé l'erreur obtenant en dimension deux $T_{\varepsilon} \geq \dfrac{A_0^2}{\varepsilon^2} + o(\dfrac{1}{\varepsilon})$ [15].

Ultérieurement, S.Alinhac, a étendu ce résultat par des procédés d'approximation dits de :" l'optique géométrique non linéaire" en donnant plus de précision au temps de vie des solutions et leur comportement explosif [6].

Dans certaines situations globales en x à données initiales régulières, on peut montrer l'existence d'une solution régulière pour $0 \leq t < T$. Il est alors possible de définir le temps de vie T_r de la solution (régulière) comme le plus grand de ces temps éventuellement infinis.

Si $T_r < +\infty$, le problème de l'explosion consiste à décrire le comportement de la solution u lorsque $t \to T_r$. On suppose que dans certains cas, cette explosion se produit en un point $(x_{0,}T_r)$, la solution $u(x)$ tendant vers $u_0 = u(x_0)$ pour

$(x, T) \to (x_0, T_r)$, et que la solution u est en fait une solution éclatée d'un système qu'on appelera éclaté en un certain point (x_0, T_r, u_0) .

Cette étude est conçue en trois chapitres ci-après:

Le premier chapitre est consacré à des rappels sur les équations scalaires et les systèmes hyperboliques.Au cours de cette étude, nous donnons des définitions utiles pour notre travail; puis, nous abordons la notion de problème bien posé, du problème de Cauchy avec interprétation géométrique.

Le second chapitre est consacré, dans un premier temps à l'étude de la durée de vie des solutions des équations et systèmes précités et dans un second temps, à la notion d'explosion sans lien avec la notion de singularité.

Nous terminons ce chapitre par une introduction à la méthode d'optique géométrique non-linéaire" en l'appliquant aux systèmes hyperboliques quasi-linéaires en dimension deux".

Le troisième et dernier chapitre concerne le cas modèle de l'équation d'onde quasi-linéaire en dimension deux d'espace pour des données de Cauchy de taille ε.

Successivement nous allons :

1) construire la solution approchée du problème par des méthodes d'approximation, appelées :"optique géométrique non linéaire"

2) montrer que la solution approchée est une approximation fine de la solution réelle du problème.

3) préciser la borne inférieure du temps de vie T_ε de cette solution.

Chapitre 1

Equations et systèmes d'équations aux dérivées partielles.

1.1 Rappels.

1.1.1 Symboles.

Soient $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$,

$\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} .... \partial_{x_n}^{\alpha_n}$;

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \delta \leq 1$, $m \in \mathbb{R}$.

On définit $S_{\rho,\delta}^m(X \times \mathbb{R}^N)$ comme l'ensemble des $a \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$ telles que pour tout $K \subset\subset X$ et tous $\alpha \in \mathbb{N}^n, \beta \in \mathbb{N}^N$ il existe une constante $C = C_{K,\alpha,\beta}(a)$ telle que :

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a(x, \theta) \right| \leq C(1 + |\theta|)^{m - \rho|\beta| + \delta|\alpha|}, \quad (x, \theta) \in X \times \mathbb{R}^N \qquad (1.1.1)$$

Si $a \in S^m_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ on dit que a est un symbole d'ordre m et de type (ρ, δ).[22]

Exemple.

soit $\alpha \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$ positivement homogène de degrè m dans la région $|\theta| \geq 1$;

$a(x, \lambda\theta) = \lambda^m a(x, \theta)$, $\lambda \geq 1, |\theta| \geq 1$. Alors $a \in S^m_{1,0}(X \times \mathbb{R}^N)$

1.1.2 champs de vecteurs.

Un champ de vecteurs sur une variété M est une application lisse :

$\upsilon : M \to TM$

$x \to \upsilon_x$

où, υ_x : est le vecteur tangent à M en x [24].

On appelle point singulier d'un champ de vecteurs υ un point a tel que : $\upsilon(a) = 0$

1.1.3 Champs Z.

On désigne par Z la famille de champs de vecteurs suivants sur $\mathbb{R}^n$:

$Z_j = \partial_j$, $Z_{0,j} = x_j\partial_t + t\partial_j$, et pour $1 \leq j \leq k \leq n$, $Z_{j,k} = x_j\partial_k - x_k\partial_j$

On définit l'angle de rotation par :

$R = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 \equiv \partial_\omega$, pour $n = 2$,

et, $R = x\Lambda\partial$ pour $n = 3$, tel que : $R_1 = x_2\partial_3 - x_3\partial_{2,}$ $R_2 = x_3\partial_1 - x_1\partial_3$,

$R_3 = x_1\partial_2 - x_2\partial_{1,}$

ces champs Z sont tangents à la sphère S^{n-1}, et engendrent l'espace tangent à S^{n-1}.

Nous avons , en coordonnées polaires :

$\partial_r = \sum \omega_i \partial_i,\ \ r\partial_r = x\partial_x,\ \ \partial_i = \omega_i \partial_r - \dfrac{1}{r}(\omega \Lambda Z)_i\ ;\ 1 \leq i \leq 3,$

$\Delta = \partial_r^2 + 1/r\partial_r + 1/r^2 \partial_\omega^2,\ \ n = 2,$

$\Delta = \partial_r^2 + 2/r\partial_r + 1/r^2 \Delta_\omega,\ \ \Delta_\omega = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2,\quad n = 3,$

ces champs de vecteurs vérifient les propriétés de commutation suivantes :

$[Z_{0,j}, \square] = [Z_{j,k}, \square] = 0$, $[R_i, \Delta] = 0$, et $[\partial_t^2 - \Delta, R_i] = 0$,

Les autres champs qui commutent avec l'équation d'onde sont :

$S = t\partial_t + r\partial_r,\ \ [\partial_t^2 - \Delta, S] = 2(\partial_t^2 - \Delta).$

$h_i = t\partial_t + x_i\partial_i,\quad [\partial_t^2 - \Delta, h_i] = 0.$[8].

Remarques

1/ Les champs Z_j, $Z_{j,k}$, R_i, S, h_i sont appelés les champs Z.

2/ Les champs de vecteurs $Z_{j,k}$ et h_i sont tangents au cône $C = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} /\ t^2 - x^2 = 0\}$.

1.1.4 Revêtement.

Soit D un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, $0 \in \overline{D}$, et Ψ une application continue de $\overline{D}$ dans $\mathbb{R}^n$. Ψ est dite revêtement si elle est surjective et localement un homéomorphisme [29].

1.1.5 Fibré tangent en sphère.

Soit M une variété de $\mathbb{R}^n, T_M = \underset{x\in X}{\cup} T_xM$ le fibré tangent, $X \subset M$, on appelle fibré tangent en sphère,l'ensemble $\cup T_xM = \{u \in T_xM\ /\ ||u|| = 1\}$ [29].

1.2 Equations aux dérivées partielles.

Une équation aux dérivées partielles à n variables, a pour forme générale

$$F(x_{1,}......., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial^{\alpha+\beta+.....+\mu}}{\partial x_1^{\alpha} \partial x_2^{\beta} .... \partial x_n^{\mu}}) = 0 \tag{1.2.1}$$

Etant donnée l'équation (1.2.1), toute solution $u = f(x_{1,}.........., x_n)$ est dite une courbe intégrale ou encore une surface intégrale.

Cette équation est dite d'ordre m quand elle contient au moins une dérivée partielle d'ordre m, sans toutefois contenir de dérivée qui soit d'un ordre supérieur.

L'équation (1.2.1) est dite :

a) linéaire, quand elle l'est par rapport à l'inconnue u,et non linéaire dans le cas où elle n'est pas linéaire par rapport à l'inconnue u et toute ses dérivées.

b) quasi-linéaire, quand elle n'est linéaire que par rapport aux dérivées $m^{ièmes}$, m désigant l'ordre de l'équation,

L'étude des équations aux dérivées partielles quasi-linéaires englobe celles des équations linéaires.[10,13,17]

1.2.1 Equations aux dérivées partielles quasi-linéaires du premier ordre.

Elles sont de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_{1,}.........., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x_{1,}.........., x_n, u) \tag{1.2.2}$$

Problème.

Soit Y un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(x_{1,}x_{2,}....., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ et $\quad = Y \times \mathbb{R}$ un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$, il s'agit d'étudier les solutions u de l'équation (1.2.2), lorsque a_i et b sont des fonctions : $\quad \to \mathbb{R}$ de classe C^1. L'un des a_i est au moins supposé non nul sur [17].

Systèmes différentiels et courbes intégrales.

On appelle système différentiel associé à l'équation (1.2.2) le système

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(x_{1,}.........., x_n, u), \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_n(x_{1,}.........., x_n, u), \\ \dfrac{du}{dt} = b\ (x_{1,}.........., x_n, u). \end{cases} \tag{1.2.3$_a$}$$

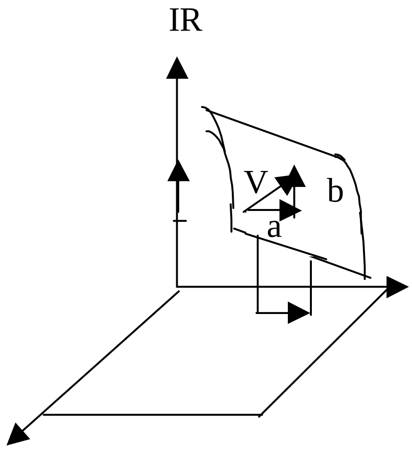

Figure 1-1:

auquel on associe

$$\frac{dx_1}{a_1} = ... = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b} \qquad (1.2.3_b)$$

appelé système caractéristique dans lequel la variable n'est pas précisée, mais on peut choisir localement des coordonnées telle que $a_i \neq 0$, $b \neq 0$,une solution du système représente une courbe régulière Γ dans appellée courbe intégrale associée à (1.2.2) d'équations paramétriques : $x_i = \varphi_i(t, c_1, ..., c_n)$, $i = 1, ..., n.$ (1.2.4)

Intérprétation géométrique.

Soit $V = (a_1(x_{1,...}, x_n, u), ..., a_n(x_{1,...}, x_n, u), b(x_{1,...}, x_n, u))$un vecteur variable de , on appelle solution du système $(1.2.3)_b$ une variété Γ dont la tangente en tout point (où V n'est pas nul) est portée par V, schématisée sur la figure1.[26].

Figure.1:Courbe intégrale dans l'espace

Remarque.

les courbes intégrales de l'équation linéaire (dont les coefficients a_i dans (1.2.2) ne dépendent pas de u) sont les projections des courbes intégrales d'équations quasi-linéaires de $Y \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.

Par chaque courbe intégrale, il passe une infinité de surfaces solutions.[28]

Intégrales premières.

Soit Γ la courbe intégrale définie par (1.2.4), qu'on peut résoudre si on détérmine les constantes $c_i(i = 1.....n)$ obtenant ainsi $c_i = F_i(x_{1,}....., x_n, u, t)$, avec $x_i^0 = x_i(0)$. On voit apparaître des fonctions $F_i(i = \overline{1, n})$ de $(t, x_{1,}....., x_n, u,)$ constantes le long de la courbe intégrale Γ,de telles fonctions sont appellées intégrales premières.

Plus généralement, on appelle intégrale première de $(1.2.3_a)$ toute fonction F constante le long d'une courbe intégrale.

Remarque.

La définition générale d'une intégrale première peut s'exprimer comme suit : soit υ un champ de vecteurs C^∞ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$,une courbe intégrale du champ υ est une application $g \in C^1(I) \to U$;

où,I est un ouvert de $\mathbb{R}$, telle que: $\forall t \in I : \dfrac{dg}{dt} = \upsilon(g(t))$,

donc, une intégrale première du champ υ est une fonction f définie sur U et constante le long de toute courbe intégrale ie, $\dfrac{df}{d\upsilon} = 0, \forall u \in U$.

Exemples.

1/ Sur $\mathbb{R}$,soit le champ de vecteurs $C^\infty(\mathbb{R})$: $v = x^2 \dfrac{\partial}{\partial x}$ qui correspond à l'équation différentielle $\dfrac{dx}{dt} = x^2$ dont une courbe intégrale passant par $(0, x_0), x_0 \neq 0$ est $x = \dfrac{x_0}{1 - tx_0}$.

2/ Sur $\mathbb{R}^2, v = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$ auquel est associé le système différentiel : $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$

dont une courbe intégrale passant par (x_0, y_0), est $x(t) = x_0 e^t$, $y(t) = y_0 e^t$. et les intégrales premières sont $F_1(x, y) = \dfrac{x}{y}, F_2(x, y) = x - \dfrac{x_0}{y_0} y$.

Bicaractéristiques.

Soit P un opérateur différentiel de symbole principal P_m (d'ordre m),

on pose : $Car\ P_m = \{(x, \zeta)\ /\ P_m(x, \zeta) = 0\}$ (ensemble caractéristique),

on appelle bicaractéristique de P (sur $\quad \times \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$) solution du système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial P_m}{\partial \zeta_i}(x(t), \zeta(t)) \\ \dfrac{d\zeta_i}{dt} = -\dfrac{\partial P_m}{\partial x_i}(x(t), \zeta(t)), \end{cases}$$

On note :

$$H_{P_m} = \frac{\partial P_m}{\partial \zeta_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial P_m}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \zeta_i} = \frac{\partial P_m}{\partial \zeta}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial P_m}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \zeta}$$

appelé champ Hamiltonien .

bicaractéristiques de P sont les courbes intégrales du système (ou bien du champ Hamiltonien) .

En d'autres termes $\begin{cases} P_m(x, \zeta) = \text{ constante sur les bicaractéristiques.} \\ \sum \zeta_i \dfrac{dx_i}{dt} = 0. \end{cases}$

Problème de Cauchy.

Pour α fixée et $k \in \mathbb{N}$, posons

$$\begin{aligned}
u_j(\alpha, x_{1,}........., x_n) &= g_{j,0}(x_1, ..., x_n), \\
\frac{\partial u_j}{\partial x}(\alpha, x_{1,}........., x_n) &= g_{j,1}(x_1, ..., x_n), \\
\frac{\partial^{k_j-1} u_j}{\partial x_j^{k-1}}(\alpha, x_{1,}........., x_n) &= g_{j,k_j-1}(x_1, ..., x_n),
\end{aligned} \qquad (1.2.5)$$

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une hypersurface, et $\varphi : S \to \mathbb{R}$ une fonction régulière

Définition.

Le problème de Cauchy pour l'équation aux dérivées partielles quasi-linéaire (1.2.2) avec la condition initiale (1.2.5), consiste à déterminer une solution u qui soit égale à φ sur S .

Problème de Cauchy pour une équation scalaire en dimension deux.

Il s'agit de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad ((x,t) \in \mathbb{R}^2) \qquad (1.2.6)$$

avec une donnée initiale $u(0,x) = u_0(x)$, $u_0 \in C_0^1(\mathbb{R})$.

La solution u de donnée u_0 est constante le long des caractéristiques, qui sont les droites $x = y + tu_0(y)$

Remarque.

L'équation (1.2.6) est appelée équation de Burger (elle sera étudiée plus en détail au chapitre II).

1.2.2 Equations aux dérivées partielles quasi-linéaires du second ordre.

Elles sont du type

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,....,x_n,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x_1,....,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) \tag{1.2.7}$$

où, $a \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$, $u \in C^2(\mathbb{R})$, et b_i, $f \in C^1, c \in C^0(\mathbb{R})$.

Surfaces intégrales.

En raison de la difficulté à détérminer les surfaces intégrales , nous adoptons le mode suivi dans le cas linéaire à condition de connaître une solution $u = \varphi(x_1,.....,x_n)$ de (1.2.7).

Surfaces intégrales.

Considérons l'opérateur

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tag{1.2.8}$$

auquel nous associons en tout point $M_0(x^0)$ $[M_0 \in \quad]$ la forme quadratique à n variables $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$

$$\phi(x^0, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x^0)\xi_i\xi_j \tag{1.2.9}$$

Définition.

Les surfaces intégrales sont les surfaces de $\mathbb{R}^n$ d'équation $S(x_{1,}....., x_n) = 0$ qui satisfont à

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial S}{\partial x_j} = 0.$$

Dans la pratique, nous déterminons Les courbes intégrales pour $n = 2$ de l'équation (1.2.7) comme suit :

a) si $a \neq 0$, elles sont solutions de l'équation diférentielle

$$a(x, y)(\frac{dy}{dx})^2 - 2b(x, y)\frac{dy}{dx} + c(x, y) = 0$$

b) si $c \neq 0$,elles sont solutions de l'équation diférentielle

$$c(x, y)(\frac{dx}{dy})^2 - 2b(x, y)\frac{dx}{dy} + a(x, y) = 0$$

c) si $a = 0$ et $c = 0$, ce sont les droites d'équations : $x = cste$ et $y = cste$

Classification. (pour n=2)

On peut les classifier en trois types [26]:

a) type hyperbolique si $b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)>0$, auquel cas l'équation (1.2.7) admet deux familles de courbes intégrales.

b) type parbolique si $b^2\ (x,y)-a(x,y)c(x,y)=0$, auquel cas l'équation (1.2.7) admet une famille de courbes intégrales.

c) type elliptique si $b^2\ (x,y)-a(x,y)c(x,y)<0$, auquel cas l'équation (1.2.7) n'admet pas de courbes intégrales réelles.

Exemples.

i) l'équation de Laplace, $\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}=0$ est elliptique sur $\mathbb{R}^n$,

ii) l'équation de la chaleur, $\dfrac{\partial u}{\partial t}-h^2(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2})$ est parabolique sur $\mathbb{R}^3$,

iii) l'équation des ondes, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\sum\limits_{j=1}^{n-1}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}=0$, est de type hyperbolique sur $\mathbb{R}^n$.

Problèmes biens posés (au sens de Hadamard).

Un problème est correct si :

i) la solution existe (quelles que soient les données initiales ou aux limites appartenant à une certaine classe).

ii) la solution est unique

iii) la solution dépend continûment des données initiales dans le cas contraire, les problèmes seront dits mal posés.

Contres-Exemples.

a) **Non existence des solutions.**

Considérons l'équation scalaire linéaire d'ordre 1 : $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$

avec les conditions $u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = f(t)\ , \ \ f(0) = 0$

La solution $u(x,t) = x - t$ dans ce cas vérifie pour $x = 0, \ \ u(0,t) = -t$

Donc, la solution considérée n'existe pas lorsque $f(t) \equiv -t$

b) **Non unicité de la solution.**

Considérons l'équation précédente, mais avec la donnée initiale $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,0) = 0$

On trouve, $u(x,t) = x - t + c$, où, c est une constante arbitraire,

alors, $u(x,0) = x + c$, et la solution n'est pas unique, car elle dépend de c.

c) la solution ne dépend pas continûment des données initiales

Considérons l'équation de Laplace : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

avec la donnée de Cauchy, $u(x,0) = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{n}\sin nx$

nous avons, $u(x,y) = \dfrac{1}{n^2}\sin nx \sinh ny.$

Lorsque n tend vers l'infini, la donnée de Cauchy tend vers 0, alors que la solution oscillera infiniment pour y=0 [17]

Conséquence.

Le problème de Cauchy pour les équations de type elliptique est mal posé au sens de Hadamard

Problème de Cauchy

Le problème de Cauchy, est celui de la détermination de la surface intégrale $u = S(x, y)$ passant par une courbe donnée Γ et admettant en chaque point de celle-ci un plan tangent donné.

1.3 Systèmes hyperboliques quasi-linéaires d'ordre1

Considérons le système hyperbolique quasilinéaire

$$Lu = \partial_t u + \sum_{j=1}^{n} A_j(t, x, u)\partial_j u + B(t, x, u) = 0, \qquad B(0) = 0 \tag{1.3.1}$$

où, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_0 = t$, $u \in \mathbb{R}^N$.

Les matrices A_j sont de taille $N \times N$, réelles et dépendent de façon C^∞ de $(t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$, et $B(t, x, 0) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, et que les B ne dépendent pas de (t, x) pour $|t| + |x|$ grand.

B est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ et est une fonction C^∞ de ses arguments.

Remarque.

Si les A_j ne dépendent pas de u , on dit que le système (1.3.1) est semi-linéaire.

Hyperbolicité.

Faisons le changement de variables dans (1.3.1) suivant : $x = \varphi$

où, $\varphi_i = \varphi_i(x, t)$ est une fonction C^1 de ses arguments , le système (1.3.1) s'écrit alors

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \varphi_j}+\sum_{i,j=1}^{n}A_j(t,x,u)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial \varphi_j}+B(t,x,u)=0, \tag{1.3.2}$$

ce qui équivaut à,

$$\Lambda\frac{\partial u}{\partial \varphi_k}+R=0$$

où,

$$\Lambda=\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}A_i(u,x,t)\right) \tag{1.3.3}$$

et R est le vecteur colonne dépendant de $t, u, x, \dfrac{\partial u}{\partial \varphi_i}$ avec $i \neq k$,

pour que le système (1.3.1) soit hyperbolique, il faut qu'il soit bien posé au sens de Hadamard, ce qui revient à chercher des u dont la dérivée $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi_k}$ est normale à la courbe intégrale S de (1.3.2) , donc, il faut que Λ^{-1} existe

c-à-d ,

$$\det\ \Lambda=\left|\frac{\partial \varphi_k}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}A_i(u,x,t)\right|\neq 0 \tag{1.3.4}$$

en divisant det Λ par $|\nabla_x\varphi_k| \equiv \left\{\sum_{i=1}^{n}(\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_i})^2\right\}^{\frac{1}{2}}$,
et en posant -$\lambda=\dfrac{\partial \varphi_k/\partial t}{|\nabla_x\varphi_k|}$, $\gamma_i=\dfrac{\partial \varphi_k/\partial x_i}{|\nabla_x\varphi_k|}$, (1.3.2) s'écrit pour i = 1,....., n
:

$$|-\lambda A_0(P)+\gamma_1A_1(P)+ \ldots\ldots\ldots\ldots +\gamma_nA_n(P)|\neq 0 \tag{1.3.5}$$

où, $P \in S$.

On pose

$$Q(P,\gamma,\lambda)=\left|\sum_{i=1}^{n}\gamma_i A_i(P)-\lambda A_0(P)\right| \tag{1.3.6}$$

qu'on appelle le polynôme caractéristique du système (1.3.2).

La dérivée normale $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi_k}$ sera déterminée en un point P de S de sorte que $Q(P,\gamma,\lambda)\neq 0$,si γ est le vecteur unité, le polynôme $Q(P,\gamma,\lambda)=0$, (1.3.5) est appelé caractéristique du système (1.3.2) par rapport à S, et S est appelée hypersurface caractéristique.

Par analogie, les sous variétés pour lesquelles $Q(P,\gamma,\lambda)\neq 0$ sont appelées non caractéristiques.

La condition $Q(P,\gamma,\lambda)=0$ classifie le système (1.3.1) en trois types selon les zéros de Q

1) Si les zéros $\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},.......,\lambda^{(n)}$de (1.3.5) sont réels et distincts le système (1.3.1) est dit hyperbolique.
2) Si les zéros $\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},.......,\lambda^{(n)}$ de (1.3.5) sont complexes, le système (1.3.1) est dit elliptique.
3) Si la forme quadratique associée à (1.3.3) est singulière, le système (1.3.1) est dit parabolique [17].

Les invariants de Riemann.

Considérons le système (1.3.1) pour $B \equiv 0$ et des $\lambda_1(u) < \lambda_2(u) < ..... < \lambda_n(u)$ considérées réelles.

Définition 1.

Les courbes intégrales du champ $L_j = \partial_t + \lambda_j(u(t,x))\,\partial_x$ sont appellées les $j^{\grave{e}mes}$caractéristiques,

En posant $u = \phi(U)$, le système (1.3.1) s'écrit

$$\partial_t U + \phi'^{-1}(U)A(\phi(U))\,\phi'(U)\partial_x U = 0.$$

On constate que les valeurs propres restent inchangées, tandis que les vecteurs propres sont changés en $\phi'^{-1} r_j(\phi(U))$ (on dit que les r_j forment un champ de vecteurs bien défini sur la variété u).

Définition 2.

On appelle invariants de Riemann les $N-1$ fonctions R_k^j indépendantes satisfaisant pour tout j,

$$r_j(u)\,\partial_u R_k^j(u) = 0, \quad k = 1, ..., N-1.$$

Dans le cas $N = 2$ on pose simplement : $R_1^1 = w_2, R_1^2 = w_1$

Puisque ∇w_j est colinéaire à ℓ_j, le système (1.3.1) s'écrit :

$${}^t\nabla w_j \partial_t u + \lambda_j(u)^t\,\nabla w_j \partial_x u = 0.$$

On suppose dans la suite que l'application $u \mapsto (w_1(u), w_2(u))$ est un difféomorphisme de $D \subset \mathbb{R}^2$,comme nous nous intéressons à l'image de u nous pouvons écrire (1.3.1) sous la forme :

$$\partial_t w + \Lambda(w)\partial_x w = 0, \quad \Lambda(w) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

C'est l'écriture d'un système en invariants de Riemann.

Le lemme suivant nous permet d'estimer la norme L^1 de la solution u.

Lemme.

soit u une solution C^2 du système (1.3.1) tel que :$\partial_x u\,(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{N} w_j(x,t) r_j\,(u(x,t))\,,$

Alors w_j vérifie le système $\quad L_i w_i = \sum \gamma_{ijk}(u) w_j w_k \quad i = 1, ..., N$

où, $L_i = \partial_t + \lambda_i(u(x,t))\partial_x$

on définit, $\Gamma_{ijk}(u)$ *par l'égalité :*

$$\sum_{j,k} \gamma_{ijk}(u) w_j w_k + w_i \sum w_k r_k(u) \partial u \lambda_i(u) = \sum_{j,k} \Gamma_{ijk}(u) w_j \supset w_k$$

Les coefficients Γ_{ijk} *satisfont les propriétés suivantes :*

(i)$\Gamma_{ijj} = 0$ *et* $\gamma_{ijj} = 0$ *pour* $j \neq 0$

(ii) si D_i est un domaine borné par une intégrale $[a, b]$ (pour $t = 0$), *deux segments de courbes intégrales issues de $(a,0), (b,0)$ et un arc γ transverse à L_i, alors :*$\int\limits_{\gamma} |w_i(dx - \lambda_i(u))|\, dt \leq \int\limits_{a}^{b} |w_i|\, dx + \int\limits_{D_i} |\sum \Gamma_{ijk} w_j w_k|\, dxdt$

Chapitre 2

Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations et de systèmes quasilinéaires.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au temps de vie d'équations scalaires (plus particulièrement l'équation de Burger), et de systèmes quasilinéaires. Par ailleurs, nous distinguerons entre explosion analytique et géométrique, en montrant que cette dernière est plus éfficace que la première, car elle donne la nature de l'explosion, ce que l'explosion analytique ne donne pas.

2.1 Temps de vie des solutions d'équations et de systèmes quasi-linéaires.

2.1.1 Solutions régulières du problème de Cauchy.

Considérons le système hyperbolique quasilinéaire (1.3.1), et supposons que L est hyperbolique symétrisable[1]

De plus, nous faisons associer au système (1.3.1) la donnée de Cauchy

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2.1.1}$$

sous les hypothèses précédentes , nous énonçons

Théorème1.

Soient G un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *avec l'entier* $s > \dfrac{n}{2} + 1$,

et $u_0(x) \in G_0$

où,G_0 *est un sous-ensemble de* G *relativement compact*[2]

Alors, pour tout $G_1 \subset G$ (voisinage de G_0) et $M \geq |u_0|_s$, il existe $T > 0$ (dépendant seulement de M et de G_1) *et une unique solution* u *de* (1.3.1)-(2.1.1) *pour* $0 \leq t \leq T$ satisfaisant :

$$u \in C^0([0,T], H^s) \cap C^1([0,T], H^{s-1}),\ u(x,t) \in G_1,\ u(x,0) = u_0(x) \tag{2.1.2}$$

[1] les A_j sont symétriques définies positives.

[2] $\overline{G}_0 \subset G$

Les solutions satisfaisant (2.1.2) sont des solutions classiques (de classe C^1) [5,26,27].

Preuve. (voir . Majda [26]).

On a alors la définition du temps de vie d'une solution classique.

Définition.

On appelle temps de vie de la solution du problème de Cauchy (1.3.1)-(2.1.1), et on le note T_s,la borne superieure de tous les T tels que :

(i) la solution u existe pour $0 \leq t \leq T$

(ii) u vérifie (2.1.2)

D'où le principe de prolongement

Théorème2.

Ou bien $T_* = +\infty$

ou bien $\lim\limits_{t \to T_*} \sup\{||u(t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + ||\partial_x u(t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\} = +\infty$ [5,26,27].

Remarques.

1) $u(t)$ désigne la fonction $x \to u(t,x)$et, $\partial_x u = (\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, \ldots.., \partial_{x_n} u)$.

2) Le cas où $T_s < +\infty, ||u(t)||_{L^\infty}$ est bornée lorsque $t \to T_s$,

et/ou $||\partial_x u(t)||_{L^\infty} \to +\infty$, correspond à la formation de chocs. [27].

3) Soit, $T_s > 0$ ($T_s = +\infty$) le temps de vie de la solution u du problème

(1.3.1)-(2.1.1).

Pour $\dfrac{n}{2} + 1 < s' \leq s$, on a $T_{s'} \geq T_s$.

Temps de vie des solutions d'équations scalaires.

Considérons l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad ((x,t) \in \mathbb{R}^2,\ a \in C^1(\mathbb{R})), \tag{2.1.3}$$

avec une donnée initiale (2.1.1) supposée de classe C^1à support compact dans $\mathbb{R}$,la solution u de donnée u_0 est constante le long des caractéristiques qui sont les droites

$$x = y + ta(u_0(y)). \tag{2.1.4}$$

La question se pose : existe-t-il des singularités ?, dans l'affirmative quelle est leur nature ?.

L'équation de Burger est un cas modèle très simple qui répond à ces deux questions .

En effet, il s'agit de l'équation : $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$ (2.1.5)

avec la donnée $u(x,0) = u_0(x) \in C_0^1(\mathbb{R})$, la solution u est donnée le long des caractéristiques qui sont les droites : $x = y + tu_0(y)$ (2.1.6)

Par dérivation de (2.1.6) nous avons

$\frac{\partial x}{\partial y} = 1 + tu_0'(y)$,donc,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_0'(y)}{1 + tu_0'(y)} \tag{2.1.7}$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ devient infinie si $\min u_0'(y) = -M$ et $t \to \frac{1}{M}$, $M > 0$.

nous en concluons qu'une solution C^1 du problème (2.1.5)-(2.1.1) existe pour

$0 \leq t < T$ avec,

$$\frac{1}{T} = \max -u_0'(y). \tag{2.1.8}$$

T est appelé temps maximal (ou durée) de vie de la solution u.

Par ailleurs, pour avoir une solution C^2 du problème (2.1.5)-(2.1.1), nous dérivons (2.1.5) par rapport à x, et posons $w = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, il vient

$$Lw = -a'(u)w^2,$$

où, $L = \dfrac{\partial}{\partial t} + a(u)\dfrac{\partial}{\partial x}$,

et l'équation (2.1.7) s'écrit : $\dfrac{1}{w} - \dfrac{1}{w(0,y)} = a'(u_0(y))t$,

nous remarquons, que nous ne pouvons pas déduire comme précédemment le temps de vie , c'est pourquoi, nous considérons la donnée initiale de taille ε, où ε est un petit paramètre fixé positif.

On pose $u_0(x) = u_0(\varepsilon, .)$, $u_0 \in C_0^2(\mathbb{R})$,

le temps d'existence maximal T_ε est donné par :

$$\frac{1}{(\varepsilon T_\varepsilon)} = \max\left(-a'(u_0(\varepsilon, y)\varepsilon^{-1}\frac{\partial u_0(\varepsilon, y)}{\partial y}\right) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} \max\left(-a'(0)\frac{\partial^2 u_0(0, y)}{\partial \varepsilon \partial y}\right),$$

la solution correspondante $u(t, x) = \varepsilon u_0(y)$ est donnée asymptotiquement

sur la courbe caractéristique $x = y + ta(\varepsilon u_0(y))$ par :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} u(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x + ta(0)}{\varepsilon}) = u_0(y) \tag{2.1.9}$$

ceci signifie que la limite est une solution de l'équation de Burger :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a'(0)U\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{2.1.10}$$

avec, la donnée initiale $U(0,x) = u_0(x)$ [15].

Remarque.

Dans le cas du problème de Cauchy pour une équation scalaire non homogène

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x} = bu^2, \text{ pour } t \geq 0 \qquad ((x,t) \in \mathbb{R}^2, \ a \in C^1)$$

et la donnée initiale $u(0,x) = u_0(x)$,

nous avons $\dfrac{1}{T} = \sup(bu_0 - au_0')$ si $a \neq 0$ sur les caractéristiques

$\dfrac{dx}{dt} = au$, $\dfrac{du}{dt} = bu^2$, définies au point $(0,y)$ par

$u = \dfrac{u_0(y)}{(1-u_0(y)bt)}$, $x = y - ab^{-1}\log(1-u_0(y)bt)$.

2.1.2 Temps de vie des solutions de systèmes hyperboliques quasilinéaires.

Considérons le problème de Cauchy (1.3.1)-(2.1.1), et énonçons le théorème suivant

Théorème3.

Soit $u \in C^2$, *une solution du système quasi-linéaire* (1.3.1)-(2.1.1),

pour $0 \leq t < T$,

si $u(0,x) = 0$ *pour* $\alpha \leq x \leq \beta$,

alors, $u(t,x) = 0$ *lorsque* $0 \leq t < T$ *et* $\alpha + \lambda_N(0)t \leq x \leq \beta + \lambda_1(0)t$

En particulier, les courbes caractéristiques sont définies par

$x = \alpha + \lambda_N(0)t$ et $x = \beta + \lambda_1(0)t$.

Enonçons un lemme utile pour la détermination des solutions classiques pour le système (1.3.1)

Théorème 4.

Soit u une solution C^2 *de l'équation (1.3.1) pour* $0 \leq t < T$,

avec la donnée initiale $u(0,x) = \varepsilon u_0(x)$

si $M_1(t) = \sup_{j,x} |w_j(t,x)|$

où, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) = w(t,x) = \sum w_i(t,x) r_i(u(t,x))$,

alors , u existe pour $t < \dfrac{1}{C_1 M_1(0)}$,

où, C_1 *et* $M_1(0)$ *sont des constantes détérminées.*

Existence des solutions pour le problème de Cauchy.

Théorème 5.

Si $u_0 \in C^\infty$, *avec toutes les dérivées bornées*

alors, pour tout $\nu \geq 1$, *le problème de Cauchy*

$$\frac{\partial u^\nu}{\partial t} + a(u^{\nu-1}) \frac{\partial u^\nu}{\partial x} = 0, \quad u^\nu(0,x) = u_0(x) \tag{2.1.11}$$

admet une solution classique.

Théorème 6.

Pour tout $u_0 \in C^k$, $k \geq 1$,

on suppose $|D^\alpha u_0|$ *bornée pour* $|\alpha| \leq k$,

et, $|D^\alpha u_0|$ *assez petite pour* $|\alpha| \leq k$,

alors, (1.3.1) *admet une solution* C^k *avec la donnée* $u(0,x) = u_0(x)$

pour $0 \leq t < T$, *pourvu que*

$$T \sup |u_0'| \leq C. \tag{2.1.12}$$

où, C *est une constante dépendant de* a *seulement,*

de plus, $\sup |u| \leq C \sup |u_0|$.

Théorème 7.

La durée de vie T_ε *du problème (1.3.1)-(2.1.1) est donnée*

asymptotiquement pour $0 \leq t < T_\varepsilon$ *par*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon T_\varepsilon} = \max_{j,y} -\frac{d}{dy} \left\langle \lambda_j'(0),\ \Pi_j \frac{\partial u(0,x)}{\partial \varepsilon} \right\rangle \tag{2.1.13}$$

où, Π_j est la projection de l'espace tangent à la sous variété M en 0 sur le j^{ème} espace propre qui annule les autres.

En effet, pour $u \in \mathbb{R}^n$, $n = 2$,il suffit de choisir u_2(resp.u_1) constante le long des orbites de r_1(resp.r_2),

A devient diagonale, et le système (1.3.1) s'écrit

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_j(u) \frac{\partial u_j}{\partial x} = 0,\ j = 1, 2. \tag{2.1.14}$$

où, $u = (u_1, u_2)$ et $\lambda_1(0) < \lambda_2(0)$,

avec la donnée initiale $u(0, x) = u_0(\varepsilon, x)$.

On sait d'après le théorème 6 qu'il existe une solution pour $t < \dfrac{c}{\varepsilon}$ vérifiant

$|u(t,x)| \leq C'_\varepsilon$ si ε est assez petit, on choisit :

$c_1 = (2\lambda_1(0) + \lambda_2(0))/3$ et $c_2 = (\lambda_1(0) + 2\lambda_2(0))/3$ tel que :

$\lambda_1(u) \leq c_1 \leq c_2 + \lambda_2(u)$.

En outre, si supp $u^0 \subset \mathbb{R} \times [a,b]$, nous en concluons que :

$u_1(t,x) = 0$ pour $x > b + c_1 t$

et, $u_2(t,x) = 0$ pour $x < a + c_2 t$,

donc, la solution existe pour $a + c_2 t \leq x \leq b + c_1 t$.

Application du théorème 7.

Considérons le problème de cauchy pour l'équation d'onde quasi-linéaire, pour $n = 1$;

$$\sum_{j,k=0}^{1} g_{ij}^k(u')\partial_{jk}^2 u = 0,\ u(0,x) = \varepsilon u_0,\ \partial_t u(0,x) = \varepsilon u_1, \tag{2.1.15}$$

où, $\sum\limits_{j,k=0}^{1} g_{ij}^k(0)\partial_{jk}^2 u = \partial_0^2 - \partial_1^2$,

en posant, $U_1 = \partial_t u$, $U_2 = \partial_x u$, nous avons le système

$$\partial_t U + a(U)\partial_x U = 0, \quad U_1 = \varepsilon u_1, \quad U_2 = \varepsilon u'_0 \text{ si } t = 0.$$

où, $a(U) = \begin{pmatrix} (g_{01} + g_{10})/g_{00} & g_{11}/g_{00} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

les valeurs propres correspondantes, sont données par : $\lambda^2 g_{00} - \lambda(g_{01} + g_{10}) + g_{11}$,

si, $U = 0$, elle se réduit à $\lambda^2 = 1.$, et les vecteurs propres de $a(0)$ sont $(1, -\lambda)$,

les projections de (u_1, u'_0) sur ses directions sont $f_\lambda(1, -\lambda)$,

où, $2f_1 = u_1 - u'_0$ et $2f_{-1} = u'_0 + u_1$.

D'autre part, les dérivées des valeurs propres en 0 sont

$2\lambda d\lambda + \lambda^2 dg_{00} - \lambda d\,(g_{01} + g_{10}) + dg_{11} = 0.$

c-à-d, $2\langle d\lambda, (1, -\lambda)\rangle = \sum\limits_{j,k,\ell=0}^{1} g_{jk\ell}(-\lambda)^{j+k+\ell+1}, \;\; g_{jk\ell} = \partial g_{jk}(0)/\partial u'_\ell,$

si T_ε est le temps de vie de la solution classique de (2.1.15), avec, $u_j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors, d'après le théorème 7.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon T_\varepsilon} = \max_{\lambda=\pm 1} -\frac{1}{2}\sum_{j,k,\ell=0}^{1} g_{jk\ell}(-\lambda)^{j+k+\ell+1} f'_\lambda(y) \tag{2.1.16}$$

On voit que le problème de Cauchy pour l'équation d'onde peut être écrit sous la forme : $F_1(x-t)+ F_{-1}(-x-t)$,

où, F_1, est l'onde qui se propage vers la droite,

F_{-1}, est l'onde qui se propage vers la gauche,

pour détérminer $F_{\pm 1}$,nous avons les équations :

$$\begin{aligned} F_1(x) + F_{-1}(-x) &= u_0(x), & (1)\\ F'_1(x) + F'_{-1}(-x) &= -u_1(x), & (2) \end{aligned}$$

et la différence entre (1) et (2), nous donne :

$F'_\lambda(\lambda x) = -f_\lambda(x) \quad$ pour $\lambda = \pm 1$,

donc, (2.1.16) se réecrit en

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon T_\varepsilon} = \max_{\lambda=\pm 1}\frac{1}{2}\sum_{j,k,\ell=0}^{1} g_{jk\ell}\widetilde{\lambda}_j\widetilde{\lambda}_k\widetilde{\lambda}_\ell F''_\lambda(y), \tag{2.1.17}$$

où, $\widetilde{\lambda} = (-1, \lambda)$.

Notre objectif dans le chapitre suivant est de trouver un résultat similaire à (2.1.14) pour $n = 2$ ou $n = 3$, avec T_ε remplacée par $\sqrt{T_\varepsilon}$ et $\log T_\varepsilon$ respectivement.

Pour $n > 2$, $|\partial^\alpha u|_0 \leq (1+t)^{(1-n)/2}$.

Résultat.[16]

$$u(t,x) = \frac{1}{r^{\frac{1}{2}(n-1)}} F(\sigma, \omega, z);$$

où, $F(\sigma, \omega, z) = \frac{1}{2}(2\pi)^{\frac{1}{2}(1-n)} \int \chi_+^{\frac{1}{2}(1-n)}(s - \sigma + \sigma^2 \dfrac{z}{2}) G(s, \omega, z) ds$,

est une fonction $C^\infty(S^{n-1} \times \left[0, \frac{1}{2M}\right] \times \mathbb{R})$, avec, $\sigma \leq M$,

$G(s, 0, \omega) = R(s, g, \omega)$,

$F_0(\sigma, \omega) = \frac{1}{2}(2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \int \chi_+^{\frac{1-n}{2}}(s - \sigma) R(s, g, \omega) ds$

où, $R(s, g, \omega) = \int \delta(s - \langle \omega, y \rangle) g(y) dy = \int\limits_{\langle \omega, y \rangle} g(y) ds(y)$ désigne la transformée de radon de g.

Lemme.

Pour tout α, β, γ, on a pour $|z| \leq \dfrac{1}{2M}$,

$$\left| D_\omega^\alpha D_z^\beta D_\sigma^\gamma F(\sigma, \omega, z) \right| \leq C_{\alpha\beta\gamma} (1 + |\sigma|)^{\frac{1}{2}(1-n) + |\beta| - |\gamma|},$$

nous énonçons le théorème d'existence pour une équation d'onde quasi-linéaire.

Théorème 8.

Considérons le problème de cauchy

$\Box u + \sum_{j,k=0}^{n} \gamma^{jk}(x, u, u') \partial_{jk}^2 u = f(x, u, u')$, $u(0, x) = u_0$, $\partial_0 u(0, x) = u_1$ si $x = 0$,

où, γ^{jk} et f sont des fonctions C^∞, $\gamma^{00} = 0$, $\sum \left|\gamma^{jk}\right| < \frac{1}{2}$, $\gamma^{jk}(0) = 0$, *on suppose que f et les dérivées de f et de γ^{jk} sont bornées ,*

si $u_0 \in H^{s+1}(\mathbb{R}^n)$ et $u_1 \in H^s(\mathbb{R}^n), \exists s > (n+2)/2$, alors le problème de Cauchy a pour $T > 0$ une solution

$$u \in L^\infty \left([0,T], H^{s+1}(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^{0,1}\left([0,T], H^s(\mathbb{R}^n)\right) \tag{2.1.18}$$

où, $C^{0,1}$ désigne l'espace des fonctions lipschitziennes continues,

la seconde condition signifie que $\partial_0 u \in L^\infty([0,T], H^s)$, ceci implique que $u \in C^2([0,T], \mathbb{R}^n)$ et que $\partial^\alpha u$ est bornée quand $|\alpha| \leq 2$.

2.2 Explosion des solutions.

Nous faisons part de deux types d'explosion

2.2.1 Explosion analytique.

Lorsque nous avons étudié la durée de vie des solutions d'équations scalaires, plus particulièrement l'équation de Burger, nous avons trouvé que son temps de vie était donné approximativement par $T_s = \max(-u_0')^{-1}$,

Notre but dans cette partie est de connaître le comportement des solutions lorsque $t \to T_s$.

On sait que le graphe de la solution est l'ensemble :

$\mathbb{G} = \{(t, x+tu_0(x), u_0(x)),\ (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\}$ qui est bien défini si $1+tu_0'(x) > 0$, comme le temps d'existence maximal est donné par : $T = \max -\dfrac{1}{u_0'(x)}$, il vient que $\partial_x u(t, x_0 + tu_0(x_0)) = \dfrac{T}{T-t}$,

les singularités de la solution correspondent aux points où $\partial_x u$ s'annule (sans que u ne s'annule).

On appelle ce phénomène "explosion", sa nature ne peut être détérminée que géométriquement, sans toutefois omettre l'ambiguité entre la notion de singularité et celle de l'explosion.

Remarque.

Une solution explosive est une solution qui devient singulière en un point dans un domaine d'influence d'une zone où elle est régulière; la singularité qu'on observe est donc crée et non propagée.

Explosion des systèmes quasilinéaires en dimension deux.

Pour un système global[3] , le comportement de la solution peut être partiellement décrit

En écrivant le système (1.3.1) en invariants de Riemann, nous avons :

Théorème 8.

Considérons le problème

$$\partial_t w + \Lambda(w)\partial_x w = 0, \qquad w(x,0) = w^0 \in C_0^\infty([a,b]), \tag{2.1.19}$$

[3] $u_0 \in C_0^\infty$

On note $[m_i, M_i]$ *l'amplitude de* $w_i^0 (i = 1, 2)$, *et on pose*

$$\mu_1 = \max_{[m_2, M_2]} \lambda_1(0, w_2), \quad \mu_2 = \max_{[m_1, M_1]} \lambda_2(w_1, 0). \tag{2.1.20}$$

si les conditions suivantes sont vérifiées

(i) $\mu_1 < \mu_2$,

(ii) $\partial_{w_1}\lambda_1(\overline{w}_1, 0) \neq 0$, $\partial_{w_2}\lambda_2(0, \overline{w}_2) \neq 0$,

alors le temps de vie de (2.1.19)est fini.

2.2.2 Explosion géométrique.

On considère , au voisinage d'un point $x^0 = 0 \in \mathbb{R}^n$, $u^0 \in \mathbb{R}^N$,un système quasi-linéaire

$$Lu = \sum_{j=1}^{n} A_j(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_j} + B(x, u) = 0$$

A_j et B étant des matrices $N \times N$ et $N \times I$ réelles et C^∞ près de (x^0, u^0), u est supposée toujours réelle,

on suppose $A(x, u, \zeta) = \sum_{j=1}^{n} A_j(x, u)\zeta_j$, et $\sigma(x, u, \zeta) = \det A(x, u, \zeta)$ le symbole principal du linéarisé de L sur u

on fait sur L l'hypothèse suivante :

il existe $\zeta^0 \in \mathbb{R}^n \backslash 0$, tel que $\sigma(x^0, u^0, \zeta^0) = 0$ et une valeur propre réelle

simple $\lambda(x, u, \zeta)$ de A,définie près de (x^0, u^0, ζ^0),vérifiant :

$$\lambda(x^0, u^0, \zeta^0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta}(x^0, u^0, \zeta^0) \neq 0$$

Systèmes éclatés:

soit $\blacksquare$ $(1 \leq \blacksquare \leq n)$ un indice pour lequel $\zeta^0_{\blacksquare} \neq 0$, et P une matrice $(N-1) \times N$ telle que la matrice $\widetilde{P}$ définie par $\widetilde{P}_{1,j} = \ell_j, \widetilde{P}_{k,j} = P_{k-1,j}$ $(2 \leq \blacksquare \leq N)$, soit inversible.

On dira que le couple $(\blacksquare, P)$ est admissible.

Soient, $v(x) \in \mathbb{R}^N$ $(X \in \mathbb{R}^n, X$ près de 0) et $\varphi(X) \in \mathbb{R}, \varphi(0) = 0$.

on note pour simplifier

$$\phi(X) = (X_1, X_2, ..., X_{\blacksquare-1}, \varphi(X), X_{\blacksquare+1}, ..., X_n),$$

$$\eta(X) = (\ sgn\ \zeta^0_{\blacksquare}) \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial X_1}, ..., -\frac{\partial \varphi}{\partial X_{\blacksquare-1}}, 1, -\frac{\partial \varphi}{\partial X_{\blacksquare+1}}, ..., -\frac{\partial \varphi}{\partial X_n} \right) (X)$$

Définition :

on appelle système éclaté de L (pour $\blacksquare$ et P) le système L_e de taille $(N+1) \times (N+1)$ en les inconnues (φ, v)

$$\lambda(\phi(X), \upsilon(X), \eta(X))$$

$$^{t}\ell(\phi(X), \upsilon(X), \eta(X)) \left\{ \sum_{j \neq \blacksquare} A_j(\phi(X), \upsilon(X)) \frac{\partial \upsilon}{\partial X_j} + B(\phi(X), \upsilon(X)) \right\}$$

$$P \left\{ (\ sgn\ \zeta^0_{\blacksquare}) A(\phi(X), \upsilon(X), \eta(X)) \frac{\partial \upsilon}{\partial X_{\blacksquare}} + \frac{\partial \varphi}{\partial X_{\blacksquare}} \left[\sum_{j \neq \blacksquare} A_j(\phi(X), \upsilon(X)) \frac{\partial \upsilon}{\partial X_j} + B(\phi(X), \upsilon(X)) \right] \right\}$$

solutions éclatées.

soit $(\blacksquare, P)$ le couple défini ci-dessus pour le système L et (φ, υ) une solution du système éclaté correpondant

théorème 1

supposons qu'il existe un ouvert connexe $D, 0 \in \overline{D}$, et une application continue ψ de $\overline{D}$ dans $\mathbb{R}^n$ pour laquelle

$\psi(0) = 0, \qquad \phi(\psi(x)) = x, \qquad \phi'(\psi(x))$ *inversible pour* $x \in D$

posons $u(x) = \upsilon(\psi(x)), x \in D.$

la fonction u est alors une solution de $Lu = 0$ sur D dite "solution éclatée"de L

Exemples.

Equations scalaires.

a) Supposons $u_0''(X^0) \neq 0$: le lieu γdes points d'explosion

$$x = \overline{x} + su_0(\overline{x}), \qquad t = s, \qquad s = \frac{-1}{u_0'(\overline{x})}$$

est une courbe lisse pour $\overline{x}$ voisin de X^0,à laquelle les caractéristiques sont tangentes. La solution u définie près de $m^0 = (X^0 - \frac{u_0(X^0)}{u_0'(X^0)}, \frac{-1}{u_0'(X^0)})$, d'un côté de γ, par le fait d'être constante sur les carctéristiques, présente des singularités tout le long de γ,

écrivons le système éclaté en x ($\kappa = 1$) au point m^0,avec $\xi^0 = (-1, u_0(X^0))$,

On trouve (en notant (X, T)) plutôt que (X_1, X_2)

$$\frac{\partial v}{\partial T} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial T} = v$$

La solution $v(X,T) = u_0(X), \quad \varphi(X,T) = X + Tu_0(X)$,définie près de $(X^0, T^0 = \frac{-1}{u_0'(X^0)})$, est de type pli, car

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X}(X^0, T^0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}(X^0, T^0) \neq 0$$

La solution u considérée est la solution éclatée correspondant au choix de la plus petite (resp.grande) racine X si $u_0''(X^0) < 0$ (resp > 0).

b) Supposons $u_0''(X^0) = 0$, $u_0'''(X^0) \neq 0$

La courbe γ présente un cusp, pointant vers le bas ou vers le haut selon que $u_0'''(X^0) > 0$ ou < 0.

Dans le premier cas, la solution u est définie au moins pour $t < \frac{-1}{u_0'(X^0)}$,et singulière à la pointe du cusp.

Dans le deuxième cas, u est définie en dessous de γ et singulière le long de γ, au point m^0,avec $\xi^0 = (-1, u_0)$,La solution $v(X,T) = u_0(X)$, $\varphi(X,T) = X + Tu_0(X)$ du système éclaté est de type cusp, car

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X}(X^0, T^0) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}(X^0, T^0) = 0,$$

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial X^3}(X^0,T^0) \neq 0,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial X \partial T}(X^0,T^0) \neq 0,$$

Remarques.

1/ Si $u_0'''(X^0) > 0$,la solution u considérée en b) est la solution éclatée pour l'unique choix possible de ψ.

2/ Si $u_0'''(X^0) < 0$, la solution considérée en b) est la solution éclatée correspondant à celle des trois racines X possibles qui est entre les deux autres (on appelllera ce choix de Ψ "branche du milieu").

Systèmes hyperboliques en dimension $n = 2$.

Nous considérons des systèmes de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

où, les valeurs propres μ_j de $A(u)$ sont supposées réelles et distinctes (avec des valeurs propres à gauche ℓ_j).

On prend, $\lambda(x,t,u,\zeta,\tau) = (\zeta\mu_1(u) + \tau)$, $\ell(x,t,u,\zeta,\tau) = \ell_1(u)$, et l'on a pour une caractéristique (ζ^0,τ^0), $\zeta^0 \neq 0$.

On peut donc éclater L pour $\blacksquare = 1$ et P formée des lignes ℓ_2......., ℓ_N.On trouve pour L_e le système

$$\partial_{T\varphi} = \mu_1(V), \qquad {}^t\ell_1(V)\frac{\partial V}{\partial T} = 0, \qquad (\mu_k - \mu_1)^t\ell_k\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial \varphi}{\partial X}{}^t\ell_k\frac{\partial V}{\partial T} = 0$$

Dans le cas $N = 2$, si l'on suppose le système L écrit en invariants de Riemann, le système éclaté, (ie, A est diagonale) s'écrit

$$\partial_{T\varphi} = \mu_1(V), \qquad \frac{\partial V_1}{\partial T} = 0, \qquad (\mu_2 - \mu_1)\frac{\partial V_2}{\partial X} + \frac{\partial \varphi}{\partial X}\frac{\partial V_2}{\partial T} = 0$$

Résolution du système éclaté

Le système éclaté L_e d'un système donné est en géneral (sauf en dimension $n = 2$) complètement non linéaire par rapport à φ. La partie principale de son linéarité sur (φ, υ) s'écrit :

$$\sum_{j\neq\kappa} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi_j}(\phi, \upsilon, \eta)\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial X_j} \qquad (1)'$$

$$\text{-sgn } \xi^0_\kappa \sum_{k\neq\kappa}\frac{{}^t\partial \ell}{\partial \xi_k}\{\sum_{j\neq\kappa} A_j\frac{\partial \upsilon}{\partial X_j} + B\} + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial X_k}\,{}^t\ell\sum_{j\neq\kappa}A_j\frac{\partial \dot{\upsilon}}{\partial X_j} \qquad (2)'$$

$$P\,\{\sum_{j\neq\kappa} A_j\frac{\partial \upsilon}{\partial X_j} + B\}\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial X_k} - P\sum_{j\neq\kappa}A_j\frac{\partial \upsilon}{\partial X_\kappa}\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial X_j} \qquad (3)'$$
$$+P\ sgn\ \xi^0_\kappa\ A\frac{\partial \dot{\upsilon}}{\partial X_\kappa} + \frac{\partial \varphi}{\partial X_k}P\sum_{J\neq\kappa}A_j\frac{\partial \dot{\upsilon}}{\partial X_j}$$

On peut aisément calculer son symbole σ_e [4]à l'origine

Proposition 1.

En un point X où $\dfrac{\partial \varphi}{\partial X_\kappa} = 0$,le symbole scalaire σ_e du système vaut

$$\sigma_e = C\zeta^{N-1}(\sum_{J\neq\kappa}\frac{\partial \lambda}{\partial \xi_j}\zeta_j)^2, \qquad \text{où } C \neq 0$$

et les coefficients $\dfrac{\partial \lambda}{\partial \xi_j}(j \neq \kappa)$ ne sont pas tous nuls.

[4] $\sigma_e\ (x, u, \zeta) = \det A(x, u, \zeta)$

Le cas des systèmes 2×2.

Dans ce cas, on sait calculer partout le symbole σ_e du système éclaté.

Proposition 2.

Soit L *un système pour lequel* $N = 2$, *et* $\sigma(x, u, \xi) =^t \xi Q(x, u)\xi$ *son symbole principal,* Q *étant une matrice* $n \times n$ *symétrique. Le symbole* σ_e *du système éclaté pour* $\blacksquare = 1$ *vaut*

$$\sigma_e(X, \zeta) = C\left(\sum_{j \neq 1} \lambda_j(X)\zeta_j\right)\left\{\zeta_1 \sum_{j \neq 1} \lambda_j(X)\zeta_j + \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} q(X, \zeta_2, ..., \zeta_n)\right\}$$

où,

$$C \neq 0, \quad \ell(X, \zeta) \equiv \sum_{j \neq 1} \lambda_j(X)\zeta_j = 2\left(1, -\frac{\partial \varphi}{\partial X_2}, ..., -\frac{\partial \varphi}{\partial X_n}\right) Q(\phi, v) \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_2 \\ . \\ . \\ \zeta_n \end{pmatrix},$$

$$q(X, \zeta_2, ..., \zeta_n) = (0, \zeta_2, ..., \zeta_n) Q(\phi, v) \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_2 \\ . \\ . \\ \zeta_n \end{pmatrix}.$$

De plus, les λ_j sont non tous nuls.

Géométrie des solutions éclatées :

On suppose ■$= 1$, et on note $X = (X_1, X')$

Proposition 3.

Si $\phi(X) = (\varphi(X), X')$ *a en* $X = 0$ *une singularité pli (ie,* $\dfrac{\partial\varphi}{\partial X_1} = 0, \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial X_1^2} \neq 0)$*, l'image* $S = \phi(S_1(\phi))$ *de* $S_1(\phi) = \left\{X, \dfrac{\partial\varphi}{\partial X_1} = 0\right\}$ *est une hypersurface lisse de normale*

$$n(X) = \left(1, -\frac{\partial\varphi}{\partial X_2}, ..., -\frac{\partial\varphi}{\partial X_n}\right)(X).$$

si $h(X')$ *est définie par* $\dfrac{\partial\varphi}{\partial X_1}(h(X'), X') \equiv 0, h(0) = 0$*, une équation de* S *est* $x_1 = \varphi(h(x'), x')$

Proposition 4.

Si $\phi(X) = (\varphi(X), X')$ *de classe* C^3 *a en* $X = 0$ *une singularité cusp*
(ie, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial X_1} = 0, \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial X_1^2} = 0, \dfrac{\partial^3\varphi}{\partial X_1^3} \neq 0, d(\dfrac{\partial\varphi}{\partial X_1}) \neq 0)$*,*
notons $S_1(\phi) = \left\{X, \dfrac{\partial\varphi}{\partial X_1} = 0\right\}$ *et* $S_{1,1}(\phi) = \left\{X, \dfrac{\partial\varphi}{\partial X_1} = 0 \text{ et } \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial X_1^2} = 0\right\}$
supposons $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial X_1 \partial X_j} \neq 0$ *(pour un* $j \geq 2$*), et notons* $Y = (X_1, ..., X_{j-1}, X_{j+1}, ..., X_n)$
si $h(Y)$ *est définie par* $\dfrac{\partial\varphi}{\partial X_1}(X_1, ..., X_{j-1}, h, X_{j+1}, ..., X_n) = 0, h(0) = 0$*,*
on a : $\dfrac{\partial h}{\partial X_1}(0) = 0, \dfrac{\partial^2 h}{\partial X_1^2}(0) \neq 0$ *et un paramétrage de* $S = \phi(S_1(\phi))$ *est*

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \varphi(X_1, ..., X_{j-1}, h, X_{j+1}, ..., X_n) \\
x_2 &= X_2, ..., x_{j-1} = X_{j-1}, \\
x_j &= h, ..., x_n = X_n
\end{aligned}
$$

la surface S est lisse hors de l'arête $\Gamma = \phi(S_{1,1}(\phi))$ du cusp , qui est lisse de codimension 2.

l'hyperplan de normale $n = \left(1, -\dfrac{\partial\varphi}{\partial X_2}, ..., -\dfrac{\partial\varphi}{\partial X_n}\right)$ *est tangent aux deux feuilles de S (et, donc à Γ).*

L'espace tangent à Γ a pour normales n et $\overline{n} = \left(0, -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial X_1 \partial X_2}, ..., -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial X_1 \partial X_n}\right)$

une solution éclatée u de L, correspondant à une solution (φ, v) du système éclaté , avec $\dfrac{\partial v}{\partial X_1}(0) \neq 0$ *est donnée.*

Définitions.

Lorsque nous considérerons une solution éclatée de type pli, nous conviendrons de choisir pour domaine D la trace d'un voisinage de 0 sur le demi espace délimité par S contenu dans l'image de ϕ (ie $\pm x_1 > \pm\varphi(\overline{(h(x'), x'})$ si $\pm\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial X_1^2} > 0$).

Remarquons que dans ce cas, la surface S est caractéristique pour λ.

Lorsque nous considérerons une solution éclatée de type cusp, nous appellerons "intérieur" et "éxtérieur" du cusp les demi-espaces ouverts délimités par S, l'intérieur étant celui où pointe le vecteur $-(\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial X_1^3})(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial X_1 \partial X_j})(\dfrac{\partial\varphi}{\partial X_j}, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$

Nous conviendrons alors des choix suivants:

i) Soit D est la trace sur l'intérieur du cusp d'un voisinage de 0 et la branche ψ choisie est "celle du milieu"

ii) Soit D contient la trace sur l'extérieur du cusp d'un voisinage de 0 (auquel cas, par continuité, le choix de la branche ψ est imposé).

On appellera ces solutions éclatés "intérieurs" et "extérieures".

Explosion de ∇u

Soit u une solution éclatée de L, correspondant à une solution (φ, v) du système éclaté, avec $\frac{\partial v}{\partial X_1}(0) \neq 0$.

Proposition 5.

Posons $\xi(x) = \eta(\psi(x))$. Alors, pour $x \in D$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) = C(x)(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1})^{-1}(\psi(x))r(x, u(x), \xi(x))^t\xi(x) + R(x),$$

où $C(x)$et $R(x)$ sont continues sur $\overline{D}$, et $C(x^0) \neq 0$.

Preuve.

On a pour $x \in D, \frac{\partial u}{\partial x}(x) = \frac{\partial v}{\partial X}(\psi(x))\frac{\partial \psi}{\partial x}(x)$. Or $\phi(\psi(x)) = x$,

donc, $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x) = [\phi'(\psi(x))]^{-1}$,

et $\frac{\partial u}{\partial x_1} = (\frac{\partial \varphi}{\partial X_1})^{-1}\frac{\partial v}{\partial X_1}, \frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial X_j} - (\frac{\partial \varphi}{\partial X_1})^{-1}\frac{\partial \varphi}{\partial X_j}\,\frac{\partial v}{\partial X_1}$

D'autre part, v étant solution du système éclaté L_e avec $\frac{\partial v}{\partial X_1}(0) \neq 0$,

on a $\frac{\partial v}{\partial X_1} = \alpha r + \frac{\partial \varphi}{\partial X_1}w$, avec $\alpha(0) \neq 0$,

d'où la forme annoncée de u.

On voit donc que $\frac{\partial u}{\partial x}$explose comme une matrice de rang 1, d'image r, lorsque $x \to x^0, x \in D$.

On peut, dans le cas d'une solution pli, préciser ce comportement.

Proposition 6.

Soit une solution de type pli pour laquelle $\dfrac{\partial v}{\partial X_1}(0) \neq 0.$

i) il existe $C > 0$ *pour laquelle*

$$\frac{1}{C}d^{-\frac{1}{2}} \leq \left|(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1})^{-1}(\psi(x))\right| \leq Cd^{-\frac{1}{2}}$$

d *désigant la distance de* x *au pli* S.

ii) Il existe $N-1$ *fonctions* $R_2(x,u)$............, $R_N(x,u)$,*de classe* C^2

près de (x^0,u^0), *de différentielles en* u *indépendantes, et telles que* $\nabla(R_j(x,u(x)))$ *soit borné sur* D $(j \geq 2)$.

Preuve.

i) il s'agit d'un problème purement géométrique, pour lequel on peut supposer $\varphi(X) = X_1^2, \psi(x) = (\pm x_1^{\frac{1}{2}}, x_2, ..., x_n)$.Alors $\left|(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1})^{-1}(\psi(x))\right| = \frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}$,

et $d = x_1$.

ii) On a $\dfrac{\partial}{\partial x}(R(x,u(x))) = \dfrac{\partial R}{\partial x}(x,u(x)) + \dfrac{\partial R}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Soit $\sum(u^0 \in \sum)$ une hypersurface tranverse à $\mathbb{R}^N$; en résolvant, pour chaque X fixé, le problème de cauchy $r(\phi(X),u,\eta(X))\dfrac{\partial \widetilde{R}}{\partial x}(X,u) = 0$ à données de différentielles indépendantes sur $\sum$, on obtient $N-1$ fonctions $\widetilde{R}_j(X,u)$.Choisissons alors les $R_j(X,u) \equiv \widetilde{R}_j(\psi(x),u)$.

Compte tenu de () $\dfrac{\partial R_j}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$ est borné si $(\dfrac{\partial \varphi}{\partial X_1})^{-1}(\psi(x)r(x,u(x),\xi(x))\dfrac{\partial R_j}{\partial u}(x,u(x))$ l'est; or cette quantité vaut $(\dfrac{\partial \varphi}{\partial X_1})^{-1}(X)r(\phi(X),v(X),\eta(X))\dfrac{\partial R_j}{\partial u}(\phi(X),v(X))$

au point $X = \psi(X)$, pour $X \in S_1(\phi)$,
$\frac{\partial R_j}{\partial u}(\phi(X), u) = \frac{\partial \widetilde{R}_j}{\partial u}(X, u)$, donc $r(\phi(X), v(X), \eta(X))\frac{\partial R_j}{\partial u}(\phi(X), v(X)) = 0$
sur $S_1(\phi)$, et son quotient par $\frac{\partial \varphi}{\partial X_1}$ est borné.

Les fonctions $R_2, ..., R_N$, sont les "invariants de Riemann microlocaux" aux points $(x, \xi(x))$. Ils dépendent toutefois de la solution choisie (en fait uniquement du pli S), sauf si la dimension n est 2.

Explosion pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques.

Considérons maintenant un système quasi-linéaire hyperbolique que nous écrirons ($x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$)

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n-1} A_j(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x_j} + B(x, t, u)$$

avec l'hypothèse d'hyperbolicité stricte en direction de l'axe des t (ie. la matrice $\sum A_j \xi_j$ a toutes ses valeurs propres réelles et distinctes pour $\xi \neq 0$).

Dans certaines situations globales en x à données initiales régulières , on peut montrer l'existence d'une solution régulière pour $0 \leq t < T$. Il est alors possible de définir le temps de vie T_r de la solution (régulière)comme le plus grand de ses nombres T (éventuellement infinis).

Si $T_r < +\infty$, le problème de l'explosion consiste à décrire le comportement de la solution u lorsque $t \to T_r$.

On croit que dans certains cas, cette explosion se produit en un point (x_0,T_r), la solution $u(x)$ tendant vers $u_0 = u(0)$ pour $(x,T) \to (x_0,T_r)$, et que la solution u est en fait une solution éclatée de L en un certain point caractéristique (x_0,T_r,u_0).

2.3 Optique géométrique non linéaire.(d'après S.Alinhac)

Considérons le système

$$\partial_t u + A(u)\partial_x u = 0 \tag{2.3.1}$$

avec, $u(x,0) = u_0(x) = \varepsilon u_0^1(x) + \varepsilon^2 u_0^2(x) + ...$ (2.3.2)

$u_0 \in C_0^\infty([a,b])$

en prenant $a_{jk}(te_k) = \delta_{jk}\lambda_k(te_k)$ il vient en particulier

$\partial_k^q a_{jk}(0) = 0, j \neq k, q \in \mathbb{N}$ (2.3.3)

Analyse formelle.

pour résoudre (2.3.1) on développe $A(u) = \sum_\alpha A_\alpha u^\alpha$ et on cherche des solutions formelles pour

$u(x,t,\varepsilon) = u(x,t) = \sum\limits_{p\geq 1} \varepsilon^p u^{(p)}(x,t)$

avec $L = \partial_t + A(o)\partial_x$, les $u^{(p)}$ satisfont :

$Lu^{(1)} = 0, u^{(1)}(x,0) = u_0^{(1)}(x)$

$Lu^{(p)} = f^{(p)}, u^{(p)}(x,0) = u_0^{(p)}(x)$

où $f^{(p)}$ est un polynôme en $u_j^{(q)}, (q \leq p-1)$, qui peut être calculée à partir des termes $u_j^{(p)}$

Pour décrire la structure des termes $u_j^{(p)}$ on introduit les notations :

$c = \inf\limits_{1 \leq j \leq N-1} \ (\lambda_{j+1}(\mathbf{0}) - \boldsymbol{\lambda}_j(0), \gamma = \dfrac{\lambda_{N-1}(0) - \lambda_2(0)}{c}$

$\alpha_j \ = (\lambda_j(0), 1)$

$K_T = \{(x,t), a + \lambda_2(0)t \leq x \leq b + \lambda_{N-1}(0)t, 0 \leq t \leq T\}$

$T_1 = 0, T_P = \dfrac{b-a}{c} \qquad \sum\limits_{0 \leq q \leq p-2} (1+\gamma)^q \, , p \geq 2$

$K_p = K_{Tp},$

$K_p^j = (K_p + \mathbb{R}\alpha_j) \cap \{t \leq T_p\}$

On donne l'expression des $u^{(p)}$par le théorème ci - après

Théorème 1:

Pour tout $p \geq 1$ et $1 \leq j \leq N$, on a :

$$u_j^{(p)}(x,t) = \sum_{0 \leq q \leq p-1} t^q \upsilon_{jq}^{(p)}(\sigma_j(x,t)) + r_j^{(p)}(x,t) \tag{2.3.4}$$

$\sigma_j(x,t) = x - \lambda_j(0)t$

où, $r_j^{(p)} \in C_0^\infty(K_p^j)$ et $u_j^{(p)}$ est à support dans $K_p + \mathbb{R}_+\alpha_j$

Définition 1.

les fonctions $\upsilon_{j0}^p(\sigma_j), j = 1, ..., N$ sont appelées profiles libres (d'ordre p), elles sont détérminées par la valeur initiale u_0 et sont calculées par récurrence pour $x \geq b + \lambda_{N-1}(0)t, \upsilon_{jq}^p = 0 \ \ \forall j \leq N-1$,ce qui entraîne $u_j = 0, \forall j \leq N-1$

Même conclusions si $x \leq a + \lambda_2(0)t, U_j = 0 \quad (j \geq 2)$

Temps lent et équations réduites.

En sommant les termes $u_j^{(p)}$, nous obtenons

$$u_j(x,t) = \varepsilon \sum_{0 \leq q \leq p-1} \varepsilon^{p-q-1}(\varepsilon t)^q \upsilon_{jq}^{(p)}(\sigma_j(x,t)) + R_j(x,t) \tag{2.3.5}$$

où $R_j(x,t) = \sum\limits_{p\geq 1} \varepsilon^p r_j^p(x,t)$

On introduit le temps lent $\tau = \varepsilon t$ comme nouvelle variable et considérons u_j en négligeant R_j comme fonction u_j de σ_j et τ (dépendant continûment de ε)

Fixons $s \in \mathbb{N}$ et posons : $\quad u_j^s = \sum\limits_{1\leq p\leq s} \varepsilon^p u_j^p$

Si $t \geq \overline{T}_s, r_j^{(p)} = 0(U_j^{(p)})$

Si les bandes $K_s + \mathbb{R}\alpha_j$ sont disjointes ($t > C_s$), les composantes U_j^s de U_j sont à supports disjoints on prolonge u^s en un temps plus long, nous faisons l'hypothèse : $u_j(x,t) = \varepsilon w_j(\sigma_j(x,t),\tau), \qquad j = 1, ..., N.$ (2.3.6)

Les u_j sont à supports disjoints, (2.3.1) s'écrit (en invariants de Riemann)

$$\sigma_\tau w_j + \overset{\frown}{\lambda}_j(w_j,\varepsilon)\partial_\sigma w_j = 0, \qquad j = 1, ..., N \tag{2.3.7}$$

où $\overset{\frown}{\lambda}_j(w_j,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}(\lambda_j(0, ..., 0, \varepsilon w_j, 0, ..., 0) - \lambda_j(0)$ (2.3.8)

Ces équations sont appelées : "équations réduites".

de plus, on impose à (2.3.7) la condition $w_j(\sigma,0) = \sum\limits_{p\geq 1} \varepsilon^{p-1} \upsilon_{j0}^{(p)} \sigma$ (2.3.9)

La solution approchée est obtenue en recollant la solution obtenue en temps lent et celle obtenue en temps long donnée par (2.3.6)

(i) fixons s comme précédemment) et posons :

$$u_j^s = \sum_{1\leq p\leq s} \varepsilon^p u_j^p$$

On résoud (2.3.7) et (2.3.9) où la somme dans le membre de droite est limitée à $1 \leq p \leq s$, et on note les solutions correspondantes par w_j^s

(ii) Avec, $x \in C^\infty(\mathbb{R}), x(n) = 1$ pour $n \leq 0$ et $x(n) = 0$ pour $n \geq 1$

soit $\widetilde{u}_j^s = x(t - C_s)u_j^s(x,t) + (1 - x(t - C_s))\varepsilon w_j^s(\sigma_j(x,t),\tau)$

$\widetilde{u}_j^s$ est appelée solution approchée.

Durée de vie et approximation des solutions.

Proposition 1.

Si toutes les valeurs propres du système (2.3.1) sont GNL[5] (vraiment non linéaire), alors , la solution approximée u^s est définie pour $0 \leq \tilde{T}_\varepsilon^s$, avec

$$\varepsilon \tilde{T}_\varepsilon^s = \inf M_j + 0(\varepsilon), \quad M_j^{-1} = \max -\partial_j \lambda_j(0)(u_0^{(1)})_j' \tag{2.3.10}$$

Existence, approximation et explosion :

(a) existence et approximation:

On obtient une solution pour un temps long en connaissant la solution approchée, en restant en dehors de la région de l'explosion.

On sait que le temps de vie d'une solution du système (2.3.1) a une borne inférieure donnée par $\bar{T}_\varepsilon \geq C\varepsilon^{-1}$ $c > 0$ telle que lim $inf\ \varepsilon\ \bar{T}_\varepsilon \geq \inf M_j$ [14,13]

Où les M_j sont définies par (2.3.10)

De plus, pour $A < \inf M_j$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon_A$, nous pouvons décrire le comportement de u qualitativement mais, il n'est pas possible de le contrôler en s'approchant de $\tilde{T}_\varepsilon^s$ de $\widetilde{u}_j^s$,

cependant , pour tout $A < M_j$ et ε assez petit, w_j dans (2.3.7) n'explose pas par suite $\partial_{x,t}^\alpha u = 0(\varepsilon^{s-N_0})$, N_0 fixé

(b) comportement explosif de la solution

[5] $\lambda(x, u, \zeta) = 0$, $\dfrac{\partial \lambda}{\partial \zeta}(x, u, \zeta) \neq 0$

On résoud le système éclaté dans la bande $\{\tau_1 \leq \varepsilon t \leq \tau_2\}$

soient Γ_a^2 et Γ_b^2 les deux courbes caractéristiques du système (2.3.1) issues de $(a, 0)$ et $(b, 0)$ La solution est une onde simple à droite de Γ_b^2 et à gauche de Γ_a^2,comme nous nous interessons à l'explosion au milieu on suppose que :

$M_2 < \inf(M_1, M_3)$, $\quad \lambda_2(0) = 0$ pour $\tau = \varepsilon t$, le système (2.3.1) s'écrit :

$\varepsilon\partial_\tau \widetilde{u} + A(\widetilde{u})\partial_x \widetilde{u} = 0$, $\widetilde{u}(x, \tau) = u(x, \tau\varepsilon^{-1})$

Le système éclaté (pour λ_2) correspondant :

$\varepsilon\partial_T \phi = \lambda_2(\widetilde{v})$; ${}^t l_2(\widetilde{v})\partial_T \widetilde{v} = 0$

${}^t l_i(\widetilde{v}) \{\varepsilon\partial_x \phi \partial_T + (\lambda_1 - \lambda_2)(\widetilde{v})\partial_x\} \widetilde{v} = 0, \quad i = 1, 3$

on fixe $0 < \tau_0 < M_2 < \tau_1$,et notons par $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon)$ les points d'intersection des points Γ_a^2 et Γ_b^2 avec la droite $\{\varepsilon t = \tau_0\}$,le comportement de u est décrit par

Théorème 1.

soit $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$

(a) pour ε assez petit, il existe une solution $(\widetilde{v}, \phi)$ du système éclaté (2.3.1) dans le réctangle $R = \{(x, T), \alpha \leq x \leq \beta, \tau_0 \leq T \leq \tau_1\}$ de la forme $\widetilde{v} = \varepsilon D_\varepsilon w$,

$D_\varepsilon = diag(\varepsilon^p, 1, \varepsilon^p)$

w est une solution régulière de $(X, T, \varepsilon) \in k \times [0, \varepsilon_0]$

(b) Le temps d'explosion $\tau_\varepsilon$est défini pour $\tau < t(\varepsilon)$ par

$$\widetilde{u}(\phi(X, T), T) = \tilde{v}(X, T),\ u(x, t) = \widetilde{u}(x, \varepsilon t)$$

donc, pour $\tau_0 \leq \varepsilon t \leq t(\varepsilon)$ et u entre Γ_a^2 et Γ_b^2.

Chapitre 3

Temps de vie et comportement explosif d'équations d'ondes quasi-linéaires en dimension deux d'espace.

Nous étudions à priori le modèle de l'équation d'onde quasi-linéaire en dimension deux d'espace pour des données de Cauchy de taille ε.

$$\partial_t^2 u - \Delta_x u + g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 u = 0, \tag{3.1.1}$$

où, la sommation est étendue aux indices $0 \leq i, j, k \leq 2$.

On note (3.1.1) sous l'une des deux formes abrégées

$$\Box u + g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 u = 0, \quad \text{(3.1.1')}$$

$$\partial_t^2 u + g_{ij}(\nabla u)\partial_{ij}^2 u = 0, \quad \text{(3.1.1")}$$

chacune de ses deux formes a son propre intérêt

Nous considérons, pour $\varepsilon > 0$, le problème de Cauchy

$$(\text{E}) \begin{cases} \Box u + g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 u = 0, \\ u(x,0) = u^0(x,\varepsilon), \\ \partial_t u(x,0) = u^1(x,\varepsilon). \end{cases}$$

Où, u^0 et u^1 sont des fonctions de classe C^∞ et à support

compact[1] dans $\mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon_0[$ pour lesquelles on a

$u^0(x,\varepsilon) = \varepsilon u_1^0(x) + \varepsilon^2 u_2^0(x) + ...,\qquad u^1(x,\varepsilon) = \varepsilon u_1^1(x) + \varepsilon^2 u_2^1(x) + ...$

On suppose en outre, que les g_{ij}^k,sont des fonctions linéaires de leurs arguments, et qu'elles vérifient : $g_{ij}^k = g_{ji}^k$, $g_{00}^k = 0$,

nous nous proposons de construire une solution approchée du problème (E) qu'on note u_a, en établissant le comportement et l'erreur correspondants près du bord du cône de lumière.

Cette construction se fait dans deux zones d'espace temps et trois périodes de temps schématisées sur la figure1.

[1] $|x| \leq M$

On note : $u_a^{I,i}, u_a^{II,i}, u_a^{III,i}$ les solutions approchées construites en zone intérieure

et en périodes I, II et III,

de même pour $u_a^{I,e}, u_a^{II,e}, u_a^{III,e}$

où, e : désigne la zone extérieure

Enfin nous procédons dans chacune des périodes I, II et III au recollement des solutions $u_a$obtenues dans les deux zones d'espace temps par des troncatures.

$$\text{Pour } \theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \theta(s) = \begin{cases} 1 & pour \;\; s \leq 1 \\ 0 & pour \;\; s \geq 2 \end{cases}$$

On pose :

$$u_a^I = (1-\theta)(r-t+C_0-1)\; u_a^{I,e} + \theta(r-t+C_0-1)\; u_a^{I,i},$$

$$u_a^{II} = (1-\theta)(r-t+C_0-1)\; u_a^{II,e} + \theta(r-t+C_0-1)\; u_a^{II,i},$$

$$u_a^{III} = (1-\theta)(r-t+C_0-1)\; u_a^{III,e} + \theta(r-t+C_0-1)\; u_a^{III,i},$$

le raccordement d'une période à une autre se fait par recollement de

- u_a^I et u_a^{II} sur $t = \varepsilon^{-\lambda}$, il en résulte

$$u_a = \theta\;(t\;\varepsilon^{\lambda})\left\{\theta(r-t+C_0+1)\; u_a^{I,i} + (1-\theta(r-t+C_0-1))\; u_a^{I,e}\right\}$$

$$+(1-\theta)(t\varepsilon^{\lambda})\left\{\theta(r-t+C_0-1)\ u_a^{II,i}+(1-\theta(r-t+C_0-1))\ u_a^{II,e}\right\}.$$

- u_a^{II} et u_a^{III} sur $t\ =\dfrac{A^2}{\varepsilon^2}$, il en ressort

$$\mathrm{u}_a=\theta\ (t\ \frac{\varepsilon^2}{A^2})\left\{\theta(r-t+C_0-1)\ u_a^{II,i}+(1-\theta(r-t+C_0-1))\ u_a^{II,e}\right\}$$

$$+(1-\theta)(te^{\lambda})\left\{\theta(r-t+C_0-1)\ u_a^{III,i}+(1-\theta(r-t+C_0-1))\ u_a^{III,e}\right\}.$$

On recolle en premier les solutions obtenues dans les deux zones en période I, ensuite, le recollement se fait entre solutions en zones extérieures (resp.en zones intérieures) en période de transition (le passage de la période I à la période II), et le recollement se fait entre les solutions obtenues pour avoir la solution en période II, cette procédure reste la même en période III.

3.1 Construction de la solution approchée.

3.1.1 Construction en période I.

En zone extérieure. nous cherchons les solutions formelles de u qui s'écrivent

$$u=\sum_{j\geq 1}\varepsilon^j u_j=\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+.....,$$

avec, u_j vérifiant :

(i) pour $j=1$,

$$\begin{cases}\Box u_1=0,\\ \\ u_1(x,0)=u_1^0,\ \partial_t u_1(x,0)=u_1^1.\end{cases}$$

(ii) pour $j\geq 2$,

$$\begin{cases}\Box u_j+Q_j=0,\\ \\ u_j(x,0)=u_j^0,\ \partial_t u_j(x,0)=u_j^1,\end{cases}$$

où, $Q_p = \sum_{\ell\,+\,\ell'\,=\,p} g_{ij}^k \partial_k u_\ell \partial_{ij}^2 u_{\ell'}$.

Les approximations de u_j à l'extérieur sont formulées comme suit :

Proposition 3.1.

pour tous $N, N' \in \mathbb{N}$, le terme u_k peut s'écrire

$$u_k = \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\{ \sum_{\substack{\ell\geq 0\\ 2\ell\leq k-1}} (\log t)^\ell L_k^\ell(r-t,\omega,\frac{1}{r}) + \sum_{\substack{\ell\geq 1\\ \ell+2\ell'\leq k-1}} t^{\frac{\ell}{2}}(\log t)^{\ell'} R_k^{\ell,\ell'}(r-t,\omega,\frac{1}{r})\} + r_k \tag{3.1.2}$$

où,

(i) $r_k = O(z^N)$,

(ii) $\Box \dfrac{L_k^\ell}{r^{\frac{1}{2}}} = O(z^{N'})$

(iii) *de plus, si $\ell = 2p$ $(p \geq 1)$, $R_k^{\ell,0}$ne contient pas de terme en $(\dfrac{1}{r_k})^p$.*

*Enfin si l'on pose $U_k = \sum_{\ell\geq 1} \varepsilon^\ell u_\ell$,*on a

$$\begin{aligned} \Phi_k &\equiv \Box U_k + g\partial U_k \partial^2 U_k && (3.1.3)\\ &= \frac{\varepsilon^2}{r} \sum_{\substack{h\geq k-1\\ m+2p\leq h}} \varepsilon^{h-m-2p}\tau^m \zeta^p F_{m,p}(\sigma,\omega,z), && (3.1.3') \end{aligned}$$

avec la majoration

$$\Phi_k = O(\varepsilon^{k+1} t^{\frac{k-3}{2}}). \tag{3.1.4}$$

Preuve.

Pour la preuve , nous introduisons le lemme ci-après

Lemme 3.1.

Soit S une fonction C^∞ de ses arguments,

(a) *pour tous $\mu \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$,on a l'identité*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^\mu (\log t)^k} \Box \frac{t^\mu (\log t)^k}{r^{\frac{1}{2}}} S(r-t,\omega,\frac{1}{r},\tau,\xi) \quad = \quad & \frac{-2\partial_\sigma S}{t\sqrt{r}}(\mu + \frac{k}{\log t}) + \frac{QS}{r^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{t^2\sqrt{r}}(\mu(\mu-1) + \frac{(2\mu - 1}{\log t} \\
& + \frac{k(k-1)}{(\log t)^2})S + \frac{\varepsilon}{\sqrt{rt}}\left[-(\partial^2_{\tau\sigma}S + \frac{z}{4}\partial_\tau S) + \frac{\partial_\tau S}{t} + (\mu + \right. \\
& + \frac{\varepsilon^2}{t\sqrt{r}}\left[\frac{\partial^2_\tau S}{4} - 2\partial^2_{\zeta\sigma}S - z\partial_\zeta S + \frac{2}{t}\partial_\zeta S(\mu + \frac{k}{\log t})\right] \\
& + \frac{\varepsilon^3}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{r}}\partial^2_{\zeta\tau}S + \frac{\varepsilon^4}{t^2\sqrt{r}}\partial^2_\zeta S,
\end{aligned}$$

$$\text{où, } QS = -(\frac{1}{4} + \partial^2_\omega)S + \partial_{z\sigma}S - 2z\partial_z S - z^2\partial^2_z S.$$

(b) Pour toute fonction $S(r-t,\omega)$,tous $\mu \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$ et $N' \in \mathbb{N}$,

il existe des fonctions $\sum_\ell(r-t,\omega,\frac{1}{r})(0 \leq \ell \leq k)$ et $L_\ell(r-t,\omega,\frac{1}{r})(0 \leq \ell \leq k+1)$,

telles que

$$\begin{aligned}
\Box \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\left\{\sum_{\ell \leq k} t^{\mu+\frac{3}{2}}(\log t)^\ell \textstyle\sum_\ell + \displaystyle\sum_{\ell \leq k+1}(\log t)^\ell L_\ell\right\} &= t^\mu(\log t)^k S + O(z^N), \quad (3.1.6) \\
\Box \frac{L_\ell}{r^{\frac{1}{2}}} &= O(z^{N'}),
\end{aligned}$$

et $\sum_0$ ne contient pas de termes en $(\frac{1}{r})^{\mu+\frac{3}{2}}$.

Preuve.

Nous posons désormais, et pour toute la suite

$z = \dfrac{1}{r}$, $\tau = \varepsilon\sqrt{t}$, $\zeta = \varepsilon^2 \log t, \sigma = r - t, S' = \partial_\sigma S, , S'' = \partial_\sigma^2 S$, $\dot{S} = \partial_\tau S$, $\ddot{S} = \partial_\tau^2 S$,

(a) En effectuant le calcul $\Box t^\mu (\log t)^k u$,nous obtenons

$$\Box t^\mu (\log t)^k u = t^\mu (\log t)^k \left\{ \Box u + \frac{2}{t}(\mu + \frac{k}{(\log t)})\partial_t u + \frac{1}{t^2}\left[\mu(\mu-1) + \frac{(2\mu-1)k}{\log t} + \frac{k(k-1)}{(\log t)^2}\right] u \right\}.(1$$

d'autre part, $\Box \dfrac{S}{r^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\left\{\partial_t^2 - \partial_r^2 - \dfrac{A}{r^{\frac{1}{2}}}\right\} S$,

où, $A = \dfrac{1}{4} + \partial_\omega^2$;

en écrivant $t = r - \sigma = r(1 - \sigma z)$ et $r = t(1 + \dfrac{\sigma}{t})$,il vient

$$\begin{aligned}
\partial_r^2 S &= \frac{2}{r^2}\partial_z S - \frac{1}{r^2}\{2\partial_{z\sigma}^2 S \partial_r S - \frac{1}{r^2}\partial_z^2 S + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}\partial_{z\tau}^2 S + \frac{\varepsilon^2}{t}\partial_{z\zeta}^2 S\}, \\
\partial_t^2 S &= -\frac{\varepsilon}{4t^{\frac{3}{2}}}\partial_\tau S + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}\{-2\partial_{\tau\sigma}^2 S - \frac{1}{r^2}\partial_{z\tau}^2 S + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}\partial_\tau^2 S + \frac{\varepsilon^2}{t}\partial_{\zeta\tau} S\} \\
&\quad - \frac{\varepsilon^2}{t^2}\partial_\zeta S + \frac{\varepsilon^2}{t}\{-2\partial_{\zeta\sigma}^2 S - \frac{1}{r^2}\partial_{\zeta z}^2 S + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}\partial_{\zeta\tau}^2 S + \frac{\varepsilon^2}{t}\partial_\zeta^2 S\},
\end{aligned}$$

ainsi,

$$\begin{aligned}
\Box \frac{S}{r^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\{-\frac{2}{r^2}\partial_z S - \frac{1}{r^2}(-2\partial_{z\sigma}^2 S \partial_r S + \frac{1}{r^2}\partial_z^2 S - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}\partial_{z\tau}^2 S - \frac{\varepsilon^2}{t}\partial_{z\zeta}^2 S) \\
&\quad - \frac{\varepsilon}{4t^{\frac{3}{2}}}\partial_\tau S + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}(-2\partial_{\tau\sigma}^2 S - \frac{1}{r^2}\partial_{z\tau}^2 S + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}\partial_\tau^2 S + \frac{\varepsilon^2}{t}\partial_{\zeta\tau}^2 S) \\
&\quad - \frac{\varepsilon^2}{t^2}\partial_\zeta S + \frac{\varepsilon^2}{t}(-2\partial_{\zeta\sigma}^2 S - \frac{1}{r^2}\partial_{\zeta z}^2 S + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}\partial_{\zeta\tau}^2 S + \frac{\varepsilon^2}{t}\partial_\zeta^2 S) - \frac{S}{4r^2} - \frac{\partial_\omega^2}{r^2};
\end{aligned}$$

en posant : $QS = -(\dfrac{1}{4} + \partial_\omega^2)S + 2\partial_{z\sigma} S - z\partial_z S - z^2\partial_z^2 S$, nous avons :

$$\square \frac{S}{r^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{r^{\frac{5}{2}}} QS + \frac{\varepsilon}{\sqrt{rt}}(-2\partial^2_{\tau\sigma} S - \frac{z}{4}\partial_\tau S) + \frac{\varepsilon^2}{t\sqrt{r}}(\frac{\partial^2_\tau S}{4} - 2\partial^2_{\zeta\tau} S - z\partial_\zeta S) + \frac{\varepsilon^3}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{r}}\partial^2_{\zeta\tau} S + \frac{\varepsilon^4}{t^2\sqrt{r}}\partial^2_\zeta S. \quad (2)$$

Finalement, en combinant (1) avec (2) nous obtenons le résultat.

(b)En mettant en pratique la formule (3.1.5) à des fonctions independantes

de τ et ζ, nous avons

$$\square \frac{t^{\mu+\frac{3}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \left\{ \sum_{0\le\ell\le k} (\log t)^\ell \textstyle\sum_\ell (r-t,\omega,\frac{1}{r}) \right\} = -t^{\mu+\frac{3}{2}} \sum_{\ell\le k} \frac{2\sum'_\ell}{t\sqrt{r}} \left[\left(\mu+\frac{3}{2}\right) + \frac{\ell}{\log t} \right] + \frac{Q}{r^{\frac{5}{2}}} \sum_{\ell \le k} \textstyle\sum_\ell + \frac{1}{t^2\sqrt{r}} \sum_{\ell\le k} \left[\left(\mu+\frac{3}{2}\right)\left(\mu+\frac{1}{2}\right) + \frac{2\,(\mu+1)}{\log t} + \frac{\ell(\ell-1}{(\log t)^2}\right.$$

si $\mu \neq \frac{3}{2}$,on choisit $\sum_\ell$ de sorte que

$$\textstyle\sum_k(\sigma,\omega) = \frac{-1}{2(\mu+\frac{3}{2})} \int_M^\sigma S(\sigma,\omega)\, ds,$$

il en découle,

$$\square \frac{t^{\mu+\frac{3}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \left\{ \sum_{0\le\ell\le k} (\log t)^\ell \textstyle\sum_\ell (r-t,\omega) \right\} = t^\mu (\log t)^k S + \sum_{\substack{\ell\ \geq\ 0 \\ \ell'\ \leq\ k}} t^{\mu-1-\ell} (\log t)^{\ell'} S_{\ell,\ell'}(\sigma,\omega).$$

où; $S_{\ell,\ell'}$ sont des fonctions de $\sum_\ell$

De même, on prend

$$L(\sigma,\omega,0)=\frac{-1}{2(k+1)}\int_M^\sigma S(\sigma,\omega)\ ds,$$

avec, L solution à un certain ordre en z de $QL=0$;

donc,

$$\Box(\log t)^{k+1}L(r-t,\omega,\frac{1}{r})=t^\mu(\log t)^k S+\sum_{\substack{\ell\ \geq\ 0\\ \ell'\ \leq\ k}} t^{\mu-1-\ell}(\log t)^{\ell'}S_{\ell,\ell'}(r-t,\omega)+O(z^N\ ).$$

En outre, $\sum_{q,0}=0$

d'où, l'écriture (3.1.6).

Preuve de la proposition 3.1.

(a) Nous raisonnons par récurrence sur k,l'égalité (3.1.2) est vraie pour $k=1$,

et on a $u_1=\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}R_0^{(0,0)}(r-t,\omega,\frac{1}{r})$ [13]

supposons la formule (3.1.2) vraie pour $j\leq k-1$, et démontrons là pour $j=k$,

pour cela, il suffit de calculer Q_k à partir de u_k, et de résoudre l'équation

$\Box v_k+\ Q_k=0$ (v_k sera précisée plus loin).

Comme toute dérivée (en x ou t) de u_j a encore la même forme, et en négligeant les $\frac{L_k^\ell}{r^{\frac{1}{2}}}$ dans la noyau de $\Box$, on obtient :

$$Q_k=g\partial_k u\partial_{ij}^2 u=\sum_{\substack{\ell\ \geq\ 0,\ q\ \geq\ 0\\ \ell+2\ell'\leq\ j-1,\ q+2q'\leq\ j'-1\\ j+j'\ =\ k}}\frac{1}{r}t^{\frac{1}{2}}(\log t)^{\ell'}.t^{\frac{q}{2}}(\log t)^{q'}R_j^{\ell,\ell'}R_{j'}^{\ell,\ell'},$$

où, $Q_k=g\partial_k u\partial_{ij}^2 u$

en tenant compte de l'égalité $\Box \dfrac{L_k^\ell}{r^{\frac{1}{2}}} = O(z^{N'})$, nous avons

$$Q_k = \sum_{\substack{\ell \geq 0 \\ 2\ell \leq k-1}} (\log t)^{\ell'} L_k^\ell(r-t,\omega,\frac{1}{r}) + \sum_{\substack{\ell \geq 0,\ q \geq 0 \\ \ell+2\ell' \leq\ j-1,\ q+2q' \leq\ j'-1 \\ j+j' = k}} \frac{1}{r} t^{\frac{1}{2}} (\log t)^{\ell'} . t^{\frac{q}{2}} (\log t)^{q'} R_j^{\ell,\ell'} R_{j'}^{\ell,\ell'},$$

que nous pouvons écrire, (d'après le lemme 3.1 a)

$$Q_k = \sum_{p \geq 0,\ m \geq 0} t^{(m-2\ell)/2} (\log t)^p S_{m,p}(r-t,\omega,\frac{1}{r}); \quad \ell \geq 1, m+2p \leq k-2$$

le lemme 3.1., nous permet de résoudre $\Box v_k + Q_k = 0$ sous la forme :

$$v_k = \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} \{ \sum_{\substack{m+2p \leq k-1 \\ m \geq 1}} t^{\frac{m}{2}} (\log t)^p \textstyle\sum_{m,p}(r-t,\omega,\frac{1}{r}) + \displaystyle\sum_{\substack{2p \leq k-1 \\ p \geq 1}} (\log t)^p L_p(r-t,\omega,\frac{1}{r}) \}.$$

En effet, ceci s'explique par les points suivants :

• les termes en $t^{-\frac{3}{2}} (\log t)^p$ dans Q_k n'apparaissent que pour $m \geq 1$;

donc, pour $2p \leq k-3$ ce qui correspond aux termes en $(\log t)^{p+1}$

dans v_k, avec $2(p+1) \leq k-1$.

• les termes en $t^{(m-2\ell)/2} (\log t)^p$ dans Q_k correspondent aux termes en

$t^{(m+3-2\ell)/2}$ $(\log t)^p$ de v_k pour $m - 2\ell \neq -3$,

nous écrivons $t^{(m+3-2\ell)/2} = t^{(m+1)/2} \dfrac{1}{t^{\ell-1}}$ pour $(m+1)+2p \leq k-1$,

il en résulte que, $\Box v_k + Q_k$ est de l'ordre d'une puissance de z arbitraire[2];

[2] $\Box v_k + Q_k = O(z^N), \forall N$

donc, $\Box(u_k - v_k)$ est de décroissance arbitraire à l'extérieur avec une vitesse finie de propagation $u_k - v_k$ coïcidant à l'extérieur avec la solution w de $\Box w = f$ où, f est de décroissance arbitraire [1]

ainsi, w diffère d'une solution libre par une fonction de décroissance arbitraire

$$u_k - v_k = \frac{L_k^0}{r^{\frac{1}{2}}}(r-t,\omega,\frac{1}{r}) + r_k.$$

(b) Comme $\Box U_k + g\partial U_k \partial^2 U_k = \sum_{k+1 \leq \ell+\ell' \leq 2k} \varepsilon^{\ell+\ell'} g\partial u_\ell \partial^2 u_{\ell'}$,on a

$$|\partial^\alpha u_\ell| \leq C\frac{t^{(\ell-1)/2}}{r^{\frac{1}{2}}} \text{ et } \Box U_k + g\partial U_k\partial^2 U_k = O(\varepsilon^{k+1}t^{\frac{k-3}{2}}),$$

en effet, en dérivant u_ℓ par rapport à ses variables, il en ressort

$$\begin{aligned}
\partial_t u_\ell &= \partial_t\{\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}}(\log t)^{\ell'} R_k^{\ell,\ell'}(r-t,\omega,\frac{1}{r})\} \\
&= \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\{\frac{\ell}{2}t^{\frac{\ell}{2}-1}(\log t)^{\ell'} R_k^{\ell,\ell'}(r-t,\omega,\frac{1}{r}) + t^{\frac{\ell}{2}}\frac{\ell'}{t}(\log t)^{\ell'-1}R_k^{\ell,\ell'}(r-t,\omega,\frac{1}{r}) \\
&\quad -t^{\frac{\ell}{2}}(R_k^{\ell,\ell'})'(r-t,\omega,\frac{1}{r})\}, \\
\partial_{x,t}u_\ell &= -\frac{1}{2r^{\frac{3}{2}}}\{\frac{\ell}{2}t^{\frac{\ell}{2}-1}(\log t)^{\ell'}R_k^{\ell,\ell'}(r-t,\omega,\frac{1}{r}) + t^{\frac{\ell}{2}}\frac{\ell'}{t}(\log t)^{\ell'-1}R_k^{\ell,\ell'}(r-t,\omega,\frac{1}{r}) \\
&\quad -t^{\frac{\ell}{2}}R_k^{\ell,\ell'}(r-t,\omega,\frac{1}{r}) \\
&\quad +\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\{\frac{\ell}{2}t^{\frac{\ell}{2}-1}(\log t)^{\ell'}(R_k^{\ell,\ell'})'(r-t,\omega,\frac{1}{r}) + t^{\frac{\ell}{2}}\frac{\ell'}{t}(\log t)^{\ell'-1}(R_k^{\ell,\ell'})'(r-t,\omega,\frac{1}{r}) \\
&\quad +t^{\frac{\ell}{2}}\frac{\ell'}{t}(\log t)^{\ell'-1}\partial_\omega R_k^{\ell,\ell'}(r-t,\omega,\frac{1}{r}) - t^{\frac{\ell}{2}}(R_k^{\ell,\ell'})''(r-t,\omega,\frac{1}{r}) \\
&\quad -t^{\frac{\ell}{2}}\partial_\omega(R_k^{\ell,\ell'})'(r-t,\omega,\frac{1}{r})\}.
\end{aligned}$$

On sait que R se comporte comme un symbole[3] d'ordre $-\frac{1}{2}$

et de type $(1,0)$ (voir.[1]), et vérifie les inégalités

$$\left|\partial_\omega^\alpha \partial_{\frac{1}{r}}^\beta \partial_{r-t}^\gamma R(r-t,\omega,\tfrac{1}{r})\right| \leq C(1+|r-t|)^{-\frac{1}{2}+|\beta|-|\gamma|},$$

ce qui implique,
$$\begin{aligned} |\partial_{x,t}u_\ell| \leq\ & \frac{1}{2r^{\frac{3}{2}}}\frac{\ell}{2}t^{\frac{\ell}{2}-1}(\log t)^{\ell'}(1+|r-t|)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2r^{\frac{3}{2}}}\frac{\ell'}{2}t^{\frac{\ell}{2}}(\log t)^{\ell'-1}(1+|r-t|)^{-\frac{1}{2}} \\ & + \frac{1}{2r^{\frac{3}{2}}}t^{\frac{\ell}{2}}(1+|r-t|)^{-\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\frac{\ell}{2}t^{\frac{\ell}{2}-1}(\log t)^{\ell'}(1+|r-t|)^{-\frac{1}{2}} \\ & + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\frac{t^{\frac{\ell}{2}}}{t}\ell'(\log t)^{\ell'-1}(1+|r-t|)^{-\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{t}\ell'(\log t)^{\ell'-1}(1+|r-t|)^{-\frac{1}{2}} \\ & + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{\ell}{2}}(1+|r-t|)^{-\frac{1}{2}-2} + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{\ell}{2}}(1+|r-t|)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

comme, $t \leq 2\varepsilon^{-\lambda}$ $\quad (\lambda = \frac{14}{9})$, on a $\log t \leq t$, (1)

d'autre part, $-C_0 \leq r-t \leq M \Longrightarrow r \geq Ct$, $(C = -C_0+1)$

donc, $(1+|r-t|) \geq (1+t)$, (2)

(1) et (2) entraînent

$$\begin{aligned} |\partial_{x,t}u_\ell| \leq\ & C'\{\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}t^{\frac{1}{2}(\ell+2\ell'-3)} + \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}t^{\frac{1}{2}(\ell+\ell'-3)} + \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}t^{\frac{1}{2}(\ell-3)} + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}(\ell-3)} + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}(\ell+2\ell'-5)} + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}(\ell+4\ell'-7)} \\ & + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}(2\ell'-5)} + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}(\ell-5)} + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}(\ell-1)}\} \\ \leq\ & C\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}(\ell-1)}. \end{aligned}$$

En itérant le procédé, nous avons $|\partial^\alpha u_\ell| \leq C\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}(\ell-1)}$,

[3] d'opérateurs pseudo-différentiels

par conséquent,

$$\begin{aligned}
\Box U_k + g\partial U_k \partial^2 U_k &= \sum_{k+1\leq\ \ell+\ell'\leq\ 2k} \varepsilon^{\ell+\ell'} g\partial u_\ell \partial^2 u_{\ell'} \\
&\quad \leq_{k+1\leq\ \ell+\ell'} C\varepsilon^{k+1} t^{\frac{1}{2}(\ell-1)} t^{\frac{1}{2}(\ell'-1)} . \frac{1}{r} \\
&\leq C\varepsilon^{k+1} t^{\frac{1}{2}(\ell+\ell'-2)} . \frac{1}{t} \\
&\leq C\varepsilon^{k+1} t^{\frac{1}{2}(k-3).},
\end{aligned}$$

ainsi, $\Box U_k + g\partial U_k \partial^2 U_k = O(\varepsilon^{k+1} t^{\frac{1}{2}(k-3).})$,

on écrit donc,

$$\begin{aligned}
\varepsilon^k u_k &= \frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}} \sum \varepsilon^{k-1-\ell-2\ell'} \tau^\ell \zeta^{\ell'} R_k^{\ell,\ell'}(\sigma,\omega,z), \\
\Phi_k &= \frac{\varepsilon^2}{r} \sum_{\substack{m\ \geq\ 0 \\ p\ \geq\ 0 \\ h\ \geq\ k-1 \\ m+2p\ \leq\ h}} \varepsilon^{h-m-2p} \tau^m \zeta^p F_{m,p}(\sigma,\omega,z).
\end{aligned}$$

zone intérieure

Ici le procédé diffère de celui suivi en zone précédente, nous cherchons des approximations pour chacun des termes u_ℓ^i,

on pose,

$$u_a^{I,i} = \sum_{\ell=1}^{q} \varepsilon^\ell u_\ell \tag{3.1.7}$$

avec les conditions

(1) $u_1$est la solution de $\Box u_1 = 0$ à laquelle nous associons les données

$u_1(x,0) = u_1^0,\ \partial_t u_1(x,0) = u_1^1,$

c'est-à-dire, $u_1^i \equiv {}^4 u_1$

où,

$$u_1 \sim \frac{R(r-t,\omega)}{r^{\frac{1}{2}}} \qquad [14].$$

(2) u_2 est la solution de $\Box u_2 + g_{ij}^k \partial_k u_1 \partial_{ij}^2 u_1 = 0$,

avec les données :

$u_2(x,0) = u_2^0,\ \partial_t u_2(x,0) = u_2^1,$

c'est-à-dire, $u_2^i \equiv u_2,$

pour établir le comportement de u_2 , nous introduisons le lemme ci-après

Lemme 3.2.

soit la troncature $\chi = \chi(\frac{r}{1+t}),$

où $\chi \in C_0^\infty$ $(\mathbb{R})$ *et définie par:*

$$\chi(s) = \begin{cases} 0 & pour \quad s \leq \frac{1}{2} \\ 1 & pour \quad s \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

en posant, $\overline{u}_2 = (1-\theta(t))\frac{g}{2}\sqrt{\frac{t}{r}}\chi R'^2$,*pour* $\theta \in C^\infty$ $(\mathbb{R})$ *et valant 1 près de* $t=0,$

on a $u_2 = \overline{u}_2 + z,$

avec, z *vérifiant les propriétés suivantes :*

il existe une fonction $L(\sigma,\omega)$ *de classe* C^∞, *supportée dans* $\sigma \leq M$,

[4]désigne noté

avec, $\left|\partial^k_\omega L\right| \leq C_k(1+|\sigma|)^{\frac{1}{2}}$,

et pour $\ell \geq 1, \int \left|\partial^k_\omega \partial^\ell_\sigma L\right|^2 (\sigma,\omega) d\sigma \leq C_{k,\ell}$, $\int \left|\partial^k_\omega \partial^\ell_\sigma L\right| \leq C_{k,\ell}$,

deux cas se présentent

(i) Pour $r \leq Ct, (C<1), |\alpha| \geq 1, \left|\partial^\alpha_{x,t}\partial^\beta_\omega\ z\right| \leq \dfrac{C}{(1+t)^{1+\frac{3}{4}\inf(|\alpha|,4)}}$.

(ii) Pour $r \geq Ct, (C<1), |\alpha| \geq 1, \left|\partial^\alpha_{x,t}\partial^\beta_\omega\left(\ z - \dfrac{L(r-t,\omega)}{r^{\frac{1}{2}}}\right)\right| \leq C_{\alpha,\beta}\left\{\dfrac{S_{\frac{-1}{2}} + h_t(r-t,\omega)}{1+t} + \dfrac{S}{(1+}\right.$

où $\int |h_t(\sigma,\omega)|^2\, d\sigma \leq 1$.

Preuve.

Comme, $\Box u_2 + Q_2 = 0$,il suffit de montrer que: $\Box(\overline{u}_2 + z) + Q_2 = 0$,

pour cela exprimons premièrement le terme quadratique $Q_2 = g^k_{ij}\partial_k u_1 \partial^2_{ij} u_1$.

On sait que $u_1 = \dfrac{1}{r^{\frac{1}{2}}} F(r-t,\omega,\frac{1}{r})$, (voir.[13])

où, $\left|\partial^\alpha_\omega \partial^\beta_z \partial^\gamma_\sigma F(\sigma,\omega,z)\right| \leq C(1+|\sigma|)^{-\frac{1}{2}+|\beta|-|\gamma|}$, (1)

de plus, $\left|\partial^\alpha_{x,t} u_1\right| \leq \dfrac{c_\alpha}{(1+t)^{1+|\alpha|}}$;

en effet, estimons $\partial^\alpha u_1$.

Comme, $x_1 = r\cos\omega$;$x_2 = r\sin\omega$,nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial \omega}.\frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial r} = \cos\omega\frac{\partial u}{\partial x_1} + \sin\omega\frac{\partial u}{\partial x_2} \quad , \tag{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \omega} = \frac{\partial u}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial \omega} + \frac{\partial u}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial \omega} = -r\sin\omega\frac{\partial u}{\partial x_1} + r\cos\omega\frac{\partial u}{\partial x_2} \ , \tag{4}$$

en combinant (2),(3)et (4), il en ressort

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_1} &= \cos\omega\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\omega}{r}\frac{\partial F}{\partial \omega} \\
&= \cos\omega\{-\frac{1}{2r^{\frac{3}{2}}}F + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\partial_\sigma F - \frac{1}{r^{\frac{5}{2}}}\partial_z F\} - \frac{\sin\omega}{r}\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial F}{\partial \omega},
\end{aligned}$$

il en découle

$$\begin{aligned}
\partial_{t,x_1}u &\leq \cos\omega\{\frac{1}{2r^{\frac{3}{2}}}(1+|\sigma|)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}(1+|\sigma|)^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{r^{\frac{5}{2}}}(1+|\sigma|)^{-\frac{1}{2}}\} + \frac{\sin\omega}{r^{\frac{3}{2}}}(1+|\sigma|)^{-\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2r^{\frac{3}{2}}(1+|\sigma|)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}(1+|\sigma|)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{r^{\frac{5}{2}}(1+|\sigma|)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2r^{\frac{3}{2}}(1+|\sigma|)^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}$$

or,$r \leq Ct$ et $r - t \geq \dfrac{1}{t} \underset{C<1}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{Ct(1+|\sigma|)} \leq \dfrac{1}{1+t}$, (pour $t > 0$)

donc, $\partial_{t,x_1}u \leq \dfrac{C_1}{(1+t)^3} + \dfrac{C_2}{(1+t)^3} + \dfrac{C_3}{(1+t)^3} + \dfrac{C_4}{(1+t)^3} \leq \dfrac{C}{(1+t)^3}$,

par conséquent, $|\partial^2 u_1| = O\left(\dfrac{1}{(1+t)^2}\right)$.

En itérant le procédé , nous obtenons

$$\left|\partial^\alpha_{t,x}u\right| \leq \frac{C_\alpha}{(1+t)^{1+|\alpha|}} \quad . \qquad (5)$$

Afin de détérminer Q_2, on en distingue deux cas :

(a) Pour, r $\leq Ct$ $(C < 1)$,

$$Q_2 = O(\frac{1}{(1+t)^5}),$$

car, $Q_2 = g^k_{ij}\partial_k u_1 \partial^2_{ij} u,$

(b) Pour , r $\geq Ct$: l'estimation (5) n'est plus applicable;

en posant $u_1 = \frac{S_{\frac{-1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} + \frac{S_{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{3}{2}}} + ... + \frac{S_{\frac{k}{2}-1}}{r^{\frac{k}{2}}},$

il en résulte :$\nabla u_1 = \frac{S_{\frac{-3}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} + \frac{S_{\frac{-1}{2}}}{r^{\frac{3}{2}}} + ... + \frac{S_{\frac{k}{2}-2}}{r^{\frac{k}{2}}},$

et,$\nabla^2 u_1 = \frac{S_{\frac{-5}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} + ... + \frac{S_{\frac{k}{2}-3}}{r^{\frac{k}{2}}}$

Donc, $Q_2 = \nabla u_1 \nabla^2 u_1 = \frac{S_{-4}}{r} + \frac{S_{-3}}{r^2} + \frac{S_{-2}}{r^3} + \frac{S_{-1}}{r^4} + \frac{S_0}{r^5} + ...$

soit alors , $\frac{S_{-4}}{r} = \frac{g(\omega)}{r} R'R''.$

D'autre part, considérons : $L \in S_m$,

où, S_m est une classe de fonctions du type symbole d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m en la variable σ,

donc,pour $L \in S_m$, on a

$$\begin{aligned}
\Box\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}} &= \frac{2r^{\frac{1}{2}}}{(1+t)^3}\chi_t L + \frac{r^{\frac{3}{2}}}{(1+t)^4}\chi_{tt}L + \frac{2r^{\frac{1}{2}}}{(1+t)^2}\chi_t\partial_\sigma L + \frac{\chi}{r^{\frac{1}{2}}}\partial^2_\sigma L - \frac{3}{2}\frac{1}{r^{\frac{5}{2}}}\chi L \\
&+ \frac{5}{2r^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{1+t}\chi' L + \frac{3}{2r^{\frac{3}{2}}}\chi\partial_\sigma L - \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{(1+t)^2}\chi'' L - \frac{2}{r^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{1+t}\chi'\partial_\sigma L \\
&- \frac{1}{r^{\frac{5}{2}}}(\frac{1}{4} + \partial^2_\omega)\chi L \\
&\leq \{\frac{2r^{\frac{1}{2}}}{(1+t)^3}\chi_t + \frac{r^{\frac{3}{2}}}{(1+t)^4}\chi_{tt} - \frac{3}{2}\frac{1}{r^{\frac{5}{2}}}\chi + \frac{5}{2r^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{1+t}\chi' - \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{(1+t)^2}\chi'' - \frac{1}{r^{\frac{5}{2}}}(\frac{1}{4} + \partial^2_\omega)\chi\}L \\
&+ \{\frac{2r^{\frac{1}{2}}}{(1+t)^2}\chi_t + \frac{3}{2r^{\frac{3}{2}}}\chi - \frac{2}{r^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{1+t}\chi'\}\partial_\sigma L + \frac{\chi}{r^{\frac{1}{2}}}\partial^2_\sigma L
\end{aligned}$$

or, $r \geq Ct \Longrightarrow 1 + |\sigma| \geq \widetilde{C}t, (\widetilde{C} = C - 1)$ et L est un symbole d'ordre m, il en découle,

$$
\begin{aligned}
\Box\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}} &\leq \chi\frac{S_m}{r^{\frac{5}{2}}} + \{(\frac{2r^{\frac{1}{2}}}{(1+t)^3}\chi_t + \frac{r^{\frac{3}{2}}}{(1+t)^4}\chi_{tt}L + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}(1+t)^2}\chi'')(1+t)^m \\
&\quad +(\frac{2r^{\frac{1}{2}}}{(1+t)^3}\chi_t + \frac{3}{r^{\frac{3}{2}}}\chi + \frac{2}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}\chi')(1+t)^{m-1} \\
&\leq \chi\frac{S_m}{r^{\frac{5}{2}}} + \{\frac{2r^{\frac{1}{2}}}{t^{3-m}} + \frac{2r^{\frac{3}{2}}}{t^{4-m}} + \frac{1}{t^{\frac{5}{2}-m}} + \frac{2r^{\frac{1}{2}}}{t^{3-m}} + \frac{3}{2t^{\frac{5}{2}-m}}\},
\end{aligned}
$$

donc, $\qquad \Box\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}} \leq \chi\frac{S_m}{r^{\frac{5}{2}}} + O(\frac{1}{t^{\frac{5}{2}-m}})$

de même, $\qquad \Box(\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}}t^{\mu}) = t^{\mu-2}\chi\frac{S_m}{r^{\frac{1}{2}}} - 2\mu\chi L'\frac{t^{\mu-1}}{r^{\frac{1}{2}}} + O(\frac{1}{t^{\frac{5}{2}-m-\mu}}),$

on sait que, $t^{\alpha} = r^{\alpha} + \sum_{k\ \geq\ 1}\frac{S_{+k}}{r^{k-\alpha}}$ [5],

il en ressort,

$$\Box(\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}}t^{\mu}) = -2\mu\chi\frac{L'}{r^{\frac{3}{2}-\mu}} + \chi(\frac{S_m}{r^{\frac{5}{2}-\mu}} + \frac{S_{m+1}}{r^{\frac{3}{2}-\mu}} + ...) + O(\frac{1}{t^{\frac{5}{2}-m-\mu}}),$$

en prenant, $\mu = \frac{1}{2},\ m = -3,$

$$\Box(\chi L) = -\chi\frac{L'}{r} + \chi(\frac{S_{-3}}{r^2} + \frac{S_{-2}}{r} + ...) + O(\frac{1}{t^5}),$$

l'hypothèse (ii) du lemme 3.2. entraîne que

$$\Box(\overline{u}_2 + +\chi(\frac{S_{-3}}{r^2} + \frac{S_{-2}}{r} + ...) + Q_2) = O(\frac{1}{t^5}),$$

en ne prenant que les termes dominants et en considérant $L = 0$

(ce qui ne change à rien),nous obtenons(après arrangement)

$$\Box(\overline{u}_2 + +\chi(\frac{S_{-2}}{r} + \frac{S_{-1}}{r^2} + \frac{S_0}{r^3}.........)) + Q_2 = O(\frac{1}{t^5}),$$

avec, $\left|O(\frac{1}{t^5})\right|_0 \leq \frac{C}{t^4}$

Coséquence 1.

$$u_2 - \frac{g(\omega)}{2}(R'^2) \sim \frac{L(r-t,\omega)}{r^{\frac{1}{2}}} \qquad r \to +\infty,\ \theta \longrightarrow 1. \tag{3.1.8}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
u_2 &= \overline{u}_2 + z \\
&= (1-\theta(t))\frac{g}{2}\sqrt{\frac{t}{r}}\chi R'^2 + \chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{g(\omega)}{2}\chi R'^2 - \theta(t)\frac{g(\omega)}{2}\chi R'^2 + \chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{g(\omega)}{2}\chi R'^2 + \chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}} \\
&= \chi(\frac{g(\omega)}{2}R'^2 + \frac{L}{r^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$u_2 - \frac{g(\omega)}{2}R'^2 \equiv \frac{L}{r^{\frac{1}{2}}}.$$

(3) u_3 est la solution de $\Box u_3 + Q_3$,

où, $Q_3 = g_{ij}^k \partial_k u_1 \partial_{ij}^2 u_2 + g_{ij}^k \partial_k u_2 \partial_{ij}^2 u_1$,

avec, les données :

$\mathrm{u}_3(x,0) = u_3^0,\ \partial_t u_3(x,0) = u_3^1$,

c'est-à-dire, $u_3^i \equiv u_3$.

On pose, $u_3 = \overline{u}_3 + \overline{\overline{u}}_3$

où, $\overline{u}_3 = (1-\theta(t))\chi \frac{t}{\sqrt{r}} \frac{g^2}{6} (R'^3)'$,

$$\overline{\overline{u}}_3 = (1-\theta(t))\chi g \sqrt{\frac{t}{r}} R'L'.$$

Ce choix s'explique par une analyse du terme d'intéraction cubique

$Q_3 = g_{ij}^k \partial_k u_1 \partial_{ij}^2 u_2 + g_{ij}^k \partial_k u_2 \partial_{ij}^2 u_1$,

le comportement de u_3 est établi dans le lemme ci-après:

Lemme 3.3.

en psant,

$$Q_3 = \chi \frac{g^2}{3} (R'^3)'' \frac{\sqrt{t}}{r} + \chi \frac{g}{r} (R'L')'' + W_1 \ ,$$

il vient, $\Box\ u_3 + Q_3 = W_2$

avec,

$$\left|\partial_{x,t,\omega}^{\alpha} W_1\right|_0 + \left|\partial_{x,t,\omega}^{\alpha} W_2\right|_0 \leq \frac{C_\alpha}{1+t} \ .$$

Preuve.

étant donné,

$$u_2 = \overline{u}_2 + z = \left(\overline{u}_2 + \chi \frac{L}{r^{\frac{1}{2}}}\right) + \left(z - \chi \frac{L}{r^{\frac{1}{2}}}\right),$$
et, $u_1 = \left(u_1 - \chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}}\right) + \chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}}$,

il en ressort,

$$
\begin{aligned}
Q_3 &= g_{ij}^k \partial_k u_1 \partial_{ij}^2 u_2 + g_{ij}^k \partial_k u_2 \partial_{ij}^2 u_1 \\
&= \left\{ g_{ij}^k \partial_k \left(\chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \partial_{ij}^2 \left(\overline{u}_2 + \chi \frac{L}{r^{\frac{1}{2}}} \right) + g_{ij}^k \partial_k \left(\overline{u}_2 + \chi \frac{L}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \partial_{ij}^2 \left(\chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \right\} \\
&\quad + \left\{ g_{ij}^k \partial_k \left(u_1 - \chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \partial_{ij}^2 \left(z - \chi \frac{L}{r^{\frac{1}{2}}} \right) + g_{ij}^k \partial_k \left(z - \chi \frac{L}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \partial_{ij}^2 \left(u_1 - \chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \right\} \\
&\quad + \left\{ g_{ij}^k \partial_k \left(\chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \partial_{ij}^2 \left(z - \chi \frac{L}{r^{\frac{1}{2}}} \right) + g_{ij}^k \partial_k \left(z - \chi \frac{L}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \partial_{ij}^2 \left(\chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \right\} \\
&\quad + \left\{ g_{ij}^k \partial_k \left(u_1 - \chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \partial_{ij}^2 \left(z - \chi \frac{L}{r^{\frac{1}{2}}} \right) + g_{ij}^k \partial_k \left(z - \chi \frac{L}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \partial_{ij}^2 \left(u_1 - \chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= g_{ij}^k \left\{ \partial_k \left(\chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \partial_{ij}^2 \left(\overline{u}_2 + \chi \frac{L}{r^{\frac{1}{2}}} \right) + g_{ij}^k \partial_k \left(\overline{u}_2 + \chi \frac{L}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \partial_{ij}^2 \left(\chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \right\} \\
&\quad + g_{ij}^k \left\{ \partial_k \left(u_1 - \chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \partial_{ij}^2 \left(\overline{u}_2 + \chi \frac{L}{r^{\frac{1}{2}}} \right) + g_{ij}^k \partial_k \left(\overline{u}_2 + \chi \frac{L}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \partial_{ij}^2 \left(u_1 - \chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \right\} \\
&\quad + g_{ij}^k \left\{ \partial_k \left(\chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \partial_{ij}^2 \left(z - \chi \frac{L}{r^{\frac{1}{2}}} \right) + g_{ij}^k \partial_k \left(z - \chi \frac{L}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \partial_{ij}^2 \left(\chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}} \right) \right\} \\
&\equiv Q_3^0 + Q_3^1 + Q_3^2 \; .
\end{aligned}
$$

Estimons la norme L_2 des termes Q_3^0, Q_3^1, Q_3^2,

(a) Estimation de $|\partial^\alpha Q_3^1|_0$,

pour cela, nous estimons $|\partial^\alpha u_2|_0$ et $\left|\partial^\alpha (u_1 - \chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}})\right|_0$,

(a.i) Estimation de $\left|\partial^\alpha (u_1 - \chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}})\right|_0$

comme, $|\partial^\alpha u_1| \leq \dfrac{C_\alpha}{(1+t)^{1+|\alpha|}}$, il nous reste à estimer $\left|\partial^\alpha \chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}}\right|_0$

pour cela, calculons $\partial_t (\chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}})$ et $\partial_{x,t} (\chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}})$

$$\partial_t(\chi\frac{R}{r^{\frac{1}{2}}}) = \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\{\frac{-r}{(1+t)^2}\chi_t R - \chi\partial_\sigma R\},$$

$$\begin{aligned}
\partial_{x,t}(\chi\frac{R}{r^{\frac{1}{2}}}) &= \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}(1+t)^2}\chi_t R + \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}\chi\partial_\sigma R - \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}(1+t)^2}\chi_t R - \frac{r^{\frac{1}{2}}}{(1+t)^3}\chi_t' R - \frac{r^{\frac{1}{2}}}{(1+t)^2}\chi_t\partial_\sigma R \\
&\quad -\frac{r^{\frac{1}{2}}}{(1+t)^2}\chi\partial_\omega R - \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}(1+t)}\chi'\partial_\sigma R - \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\chi\partial_\sigma^2 R - \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\chi\partial_{\omega\sigma}^2 R \\
&\le \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}(1+t)^2}(1+|\sigma|)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}(1+|\sigma|)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}(1+t)^2}(1+|\sigma|)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad +\frac{1}{(1+t)^3}(1+|\sigma|)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}(1+|\sigma|)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}(1+|\sigma|)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad +\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}(1+t)}(1+|\sigma|)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}(1+|\sigma|)^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}(1+|\sigma|)^{-\frac{1}{2}}\ ,
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité (4) de la preuve du lemme 3.2.

$$\begin{aligned}
\partial_{x,t}(\chi\frac{R}{r^{\frac{1}{2}}}) &\le \frac{C_1}{(1+t)^3} + \frac{C_2}{(1+t)^3} + \frac{C_3}{(1+t)^3} + \frac{C_4}{(1+t)^{\frac{7}{2}}} + \frac{C_5}{(1+t)^3} + \frac{C_6}{(1+t)^2} \\
&\quad +\frac{C_7}{(1+t)^2} + \frac{C_8}{(1+t)^3} + \frac{C_9}{(1+t)} \\
&\le \frac{C}{(1+t)},
\end{aligned}$$

ainsi,

$$\partial_{x,t}(\chi\frac{R}{r^{\frac{1}{2}}}) \le \frac{C}{(1+t)}\ .$$

Par itération du procédé, nous obtenons

$$\partial^\alpha_{x,t}(\chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}}) \leq \frac{C}{(1+t)^{1+|\alpha|}},$$

par conséquent,

$$\begin{array}{rcl}\left|\partial^\alpha(u_1 - \chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}})\right| & \leq & |\partial^\alpha u_1| + \left|\partial^\alpha \chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}}\right| \\ & \leq & \frac{C_\alpha}{(1+t)^{1+|\alpha|}} + \frac{C}{(1+t)^{1+|\alpha|}} \leq \frac{C}{(1+t)^{1+|\alpha|}},\end{array}$$

ce qui entraîne,

$$\left|\partial^\alpha(u_1 - \chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}})\right|_0 \leq \frac{C}{(1+t)^{\frac{1}{2}+\alpha}}$$

donc,

$$\left|\partial^\alpha(u_1 - \chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}})\right|_0 \leq \frac{C}{(1+t)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{pour } |\alpha| \geq 1 \quad . \tag{1}$$

(a.ii) Estimation de $|\partial^\alpha u_2|_0$.

Comme, $u_2 = \overline{u}_2 + z$,

où, $\overline{u}_2 = (1-\theta(t))\frac{g}{2}\sqrt{\frac{t}{r}}\chi R'^2$,

et z vérifie les propriétés indiquées au lemme 3.2., il vient

$$\overline{u}_2 = (1-\theta(t))\frac{g}{2}\sqrt{\frac{t}{r}}\chi R'^2 = \frac{g}{2}\sqrt{\frac{t}{r}}\chi R'^2 - \theta(t)\frac{g}{2}\sqrt{\frac{t}{r}}\chi R'^2,$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \overline{u}_2 &= \frac{g}{2}\frac{1}{2\sqrt{rt}}\chi R'^2 - \frac{g}{2}\sqrt{\frac{t}{r}}\frac{r}{(1+t)^2}\chi_t R'^2 - \frac{g}{2}\sqrt{\frac{t}{r}}\chi 2R'R'' \\
&\quad -\theta(t)\frac{g}{2}\sqrt{\frac{t}{r}}\chi R'^2 - \theta(t)\frac{g}{2}\frac{1}{2\sqrt{rt}}\chi R'^2 + \theta(t)\frac{g}{2}\sqrt{\frac{t}{r}}\frac{r}{(1+t)^2}\chi_t R'^2 \\
&\quad +\theta(t)\frac{g}{2}\sqrt{\frac{t}{r}}\chi R'R'', \\
\partial_{x,t}\overline{u}_2 &= -(1-\theta(t))\frac{g}{8r^{\frac{3}{2}}t^{\frac{1}{2}}}\chi R'^2 + (1-\theta(t))\frac{g}{4}\frac{1}{\sqrt{rt}(1+t)}\chi' R'^2 + (1-\theta(t))\frac{g}{2}\frac{1}{\sqrt{rt}}\chi R'R'' \\
&\quad -(1-\theta(t))\frac{g}{4}\sqrt{\frac{t}{r}}\frac{1}{(1+t)^2}\chi_t R'^2 - (1-\theta(t))\frac{g}{2}\frac{\sqrt{rt}}{(1+t)^3}\chi'_t R'^2 + (1-\theta(t))\frac{g}{4}\frac{1}{\sqrt{rt}}\frac{1}{(1+t)}\chi' I \\
&\quad +(1-\theta(t))\frac{g}{2}\frac{1}{\sqrt{rt}}\chi R'R'' - (1-\theta(t))\frac{g}{2}\sqrt{\frac{t}{r}}\frac{1}{(1+t)^2}\chi_t R'^2 - (1-\theta(t))\frac{g}{2}\frac{\sqrt{rt}}{(1+t)^3}\chi'_t R'^2 \\
&\quad -(1-\theta(t))g\frac{\sqrt{rt}}{(1+t)^2}\chi_t R'R'' - (1-\theta(t))g\sqrt{\frac{t}{r}}\chi_t \partial_\omega R'R'' + (1-\theta(t))g\frac{\sqrt{t}}{r^{\frac{3}{2}}}\chi R'R'' \\
&\quad -(1-\theta(t))g\sqrt{\frac{t}{r}}\frac{1}{(1+t)}\chi' R'R'' - (1-\theta(t))g\sqrt{\frac{t}{r}}\chi R''^2 - (1-\theta(t))g\sqrt{\frac{t}{r}}\chi R'R''' \\
&\quad +\theta'(t)\frac{g}{4}\frac{\sqrt{t}}{r^{\frac{3}{2}}}\chi R'^2 - \theta'(t)\frac{g}{2}\sqrt{\frac{t}{r}}\frac{\chi'}{(1+t)}R'^2 - \theta'(t)g\sqrt{\frac{t}{r}}\chi R'R'' - \theta'(t)g\sqrt{\frac{t}{r}}\chi\partial_\omega R'R' \\
&\leq \frac{C_1}{r^{\frac{3}{2}}t^{\frac{1}{2}}}(1+|\sigma|)^{-3} + \frac{C_2}{\sqrt{rt}(1+t)}(1+|\sigma|)^{-3} + \frac{C_3}{\sqrt{rt}}(1+|\sigma|)^{-4} + C_4\sqrt{\frac{t}{r}}\frac{1}{(1+t)^2}(1+|\sigma|)^{-3} \\
&\quad +C_5\frac{\sqrt{rt}}{(1+t)^3}(1+|\sigma|)^{-3} + C_6\frac{\sqrt{rt}}{(1+t)^2}(1+|\sigma|)^{-4} + C_7\sqrt{\frac{t}{r}}(1+|\sigma|)^{-3} \\
&\quad +C_8\sqrt{\frac{t}{r}}\frac{1}{(1+t)}(1+|\sigma|)^{-4} + C_9\sqrt{\frac{t}{r}}(1+|\sigma|)^{-4} + C_{10}\sqrt{\frac{t}{r}}(1+|\sigma|)^{-5} \\
&\quad +C_{11}\frac{\sqrt{t}}{r^{\frac{3}{2}}}(1+|\sigma|)^{-5} + C_{12}\sqrt{\frac{t}{r}}\frac{1}{(1+t)}(1+|\sigma|)^{-3} + C_{13}\sqrt{\frac{t}{r}}(1+|\sigma|)^{-3} \\
&\quad +C_{14}\sqrt{\frac{t}{r}}(1+|\sigma|)^{-4} + C_{15}\sqrt{\frac{t}{r}}(1+|\sigma|)^{-2},
\end{aligned}$$

or, $r \geq Ct \Longrightarrow \sqrt{\frac{t}{r}} \leq 1$,il en résulte

$$\begin{aligned}
\partial_{x,t}\overline{u}_2 \;\leq\; & \frac{C_1}{r^{\frac{3}{2}}t^{\frac{1}{2}}(1+|\sigma|)^3} + \frac{C_2}{\sqrt{rt}(1+t)(1+|\sigma|)^3} + \frac{C_3}{\sqrt{rt}(1+|\sigma|)^4} + C_4\frac{1}{(1+t)^2(1+|\sigma|)^3} \\
& + C_5\frac{1}{(1+t)^2(1+|\sigma|)^3} + C_6\frac{1}{(1+t)(1+|\sigma|)^4} + C_7\frac{1}{(1+|\sigma|)^3} + C_8\frac{1}{r(1+|\sigma|)^4} \\
& + C_9\frac{1}{(1+t)(1+|\sigma|)^4} + C_{10}\frac{1}{(1+|\sigma|)^5} + C_{11}\frac{1}{(1+|\sigma|)^5} + C_{12}\frac{1}{r(1+|\sigma|)^3} \\
& + C_{13}\frac{1}{(1+t)(1+|\sigma|)^3} + C_{14}\frac{1}{(1+|\sigma|)^4} + C_{15}\frac{1}{(1+|\sigma|)^2} \\
\leq\; & \frac{C}{(1+t)^2},
\end{aligned}$$

ainsi, $\partial_{x,t}\overline{u}_2 \leq \dfrac{C}{(1+t)^2}$.

Par itération, nous avons

$$\partial_{x,t}\overline{u}_2 \leq \frac{C}{(1+t)^2} \quad , \quad |\alpha| \geq 1 \tag{2}$$

d'autre part,

$$\forall\alpha, \left|\partial^{\alpha}_{x,t}z\right| \leq \frac{C}{(1+t)^4} \ , \qquad\qquad \text{(cf. lemme3.2.)} \tag{3}$$

de (2) et (3), nous déduisons

$$|\partial^{\alpha}u_2| \leq \frac{C}{(1+t)^{\alpha}} + \frac{C}{(1+t)^4} \leq \frac{C}{(1+t)^{\alpha}} \leq C \qquad , \quad \text{pour } \ |\alpha| \geq 1$$

donc, $|\partial^\alpha u_2| \leq C$,

ce qui entraîne, $|\partial^\alpha u_2|_0 \leq C(1{+}t)^{\frac{1}{2}}$, (4)

d'après (1) et (4)

$$\left|\partial^\alpha Q_3^1\right|_0 \leq |\partial^\alpha u_2|_0 \left|\partial^\alpha (u_1 - \chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}}\right|_0 \leq C(1+t)^{\frac{1}{2}} \ .\frac{C}{(1+t)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{C}{1+t} \tag{5}$$

(b) Estimation de $|\partial^\alpha Q_3^2|_0$

de la même mamanière , nous estimons $|\partial^\alpha Q_3^2|_0$,

en effet,

$$Q_3^2 = g_{ij}^k \partial_k (\chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}}) \partial_{ij}^2 (z - \chi \frac{L}{r^{\frac{1}{2}}}),$$

d'après (a), $\left|\partial^\alpha \chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}}\right| \leq \frac{C}{1+t}$,

ce qui entraîne,

$$\left|\partial^\alpha \chi \frac{R}{r^{\frac{1}{2}}}\right|_0 \leq \frac{C}{(1+t)^{\frac{1}{2}}} \tag{6}$$

d'autre part,

$$\left|\partial^\alpha (z - \chi \frac{L}{r^{\frac{1}{2}}})\right| \leq \frac{C}{1+t} \qquad \text{(cf. lemme 3.2.)}$$

il en ressort,

$$\left|\partial^\alpha(z-\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}})\right|_0 \leq \frac{C}{(1+t)^{\frac{1}{2}}} \ , \tag{7}$$

de (1) et (2), nous avons

$$\left|\partial^\alpha Q_3^2\right|_0 \leq \left|\partial^\alpha \chi\frac{R}{r^{\frac{1}{2}}}\right|_0 \left|\partial^\alpha(z-\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}})\right|_0$$

donc,$|\partial^\alpha Q_3^2|_0 \leq \dfrac{C}{1+t}$. (8)

(c) Estimation de Q_3^0,

où, $Q_3^0 = g_{ij}^k\partial_k(\chi\dfrac{R}{r^{\frac{1}{2}}})\partial_{ij}^2(\overline{u}_2+\chi\dfrac{L}{r^{\frac{1}{2}}}) + g_{ij}^k\partial_k(\overline{u}_2+\chi\dfrac{L}{r^{\frac{1}{2}}})\partial_{ij}^2(\chi\dfrac{R}{r^{\frac{1}{2}}})$,

l'estimation de Q_3^0 est plus subtile, pour cela nous dérivons les symboles par rapport à la variable $r-t$ seulement,

il en découle,

$$\begin{aligned}
& g_{ij}^k\left\{\left(\chi\frac{R}{r^{\frac{1}{2}}}\right)'\left((1-\theta(t))\frac{g}{2}\sqrt{\frac{t}{r}}\chi(R'^2)+\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}}\right)''\right\}' + \left\{\left((1-\theta(t))\frac{g}{2}\sqrt{\frac{t}{r}}\chi(R'^2)+\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}}\right)'\Big(\chi \right. \\
= \ & g_{ij}^k\left\{\left((\chi\frac{R'}{r^{\frac{1}{2}}})((1-\theta(t))\frac{g}{2}\sqrt{\frac{t}{r}}\chi(R'^2)''\right)' + \left((\chi\frac{R'}{r^{\frac{1}{2}}})(\chi\frac{L''}{r^{\frac{1}{2}}})\right)'\right\} \\
& +g_{ij}^k\left\{\left((1-\theta(t))\frac{g}{2}\sqrt{\frac{t}{r}}\chi(R'^2))'\chi\frac{R''}{r^{\frac{1}{2}}}\right)' + \left(\chi\frac{L'}{r^{\frac{1}{2}}}\chi\frac{R''}{r^{\frac{1}{2}}}\right)'\right\} \\
= \ & \chi^2\frac{g^2}{3}(R'^3)''\sqrt{\frac{t}{r}} + \chi^2\frac{g}{r}(R'L')' + O(\frac{1}{t^{\frac{5}{2}}}),
\end{aligned}$$

évaluons la norme L^2 de la différence du terme résultant avec le terme donné;

cette différence s'écrit:

$$(\chi-\chi^2)\frac{g^2}{3}(R'^3)''\sqrt{\frac{t}{r}}+(\chi-\chi^2)\frac{g}{r}(R'L')', \qquad (9)$$

il en résulte ,$\left|(\chi-\chi^2)\frac{g^2}{3}(R'^3)''\sqrt{\frac{t}{r}}+(\chi-\chi^2)\frac{g}{r}(R'L')'\right|_0 \leq \dfrac{C}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}$

par conséquent, tous les termes ont leur norme L^2 bornée par $\dfrac{C}{1+t}$.

(d) u_4 est la solution de $\Box u_4 + Q_4 = 0$

où, $Q_4 = g_{ij}^k \partial_k u_2 \partial_{ij}^2 u_2 + g_{ij}^k \partial_k u_1 \partial_{ij}^2 u_3 + g_{ij}^k \partial_k u_3 \partial_{ij}^2 u_1$,

avec les données : $u_4(x,0) = u_4^0,\ \partial_t u_4(x,0) = u_4^1$,

c'est-à-dire, $u_4^i \equiv u_4$,

le comportement de u_4 est établi dans le lemme suivant :

Lemme 3.4.

en posant : $u_4 = \overline{u}_4 + \overline{\overline{u}}_4$,

avec, $\overline{u}_4 = \chi\dfrac{g^3}{6}\dfrac{t^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}(3R'^2R''^2 + R'^3R''')$, $\overline{\overline{u}}_4 = \chi\dfrac{g^2}{2}\dfrac{t}{r^{\frac{1}{2}}}(2R'R''L' + R''L'')$,

On a $\Box u_4 + Q_4 = W_3$,

avec, $\left|\partial_{x,t,\omega}^{\alpha} W_3\right|_0 \leq \dfrac{C_\alpha}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}$

Preuve.

On a

$$\begin{aligned} Q_4 &= g_{ij}^k \partial_k u_2 \partial_{ij}^2 u_2 + g_{ij}^k \partial_k u_1 \partial_{ij}^2 u_3 + g_{ij}^k \partial_k u_3 \partial_{ij}^2 u_1 \\ &= [g_{ij}^k \partial_k \overline{u}_2 \partial_{ij}^2 \overline{u}_2 + g_{ij}^k \partial_k \overline{u}_2 \partial_{ij}^2 \left(\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}}\right) + g_{ij}^k \partial_k \overline{u}_2 \partial_{ij}^2 \left(z - \chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}}\right) + g_{ij}^k \partial_k \left(\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}}\right) \partial_{ij}^2 \overline{u}_2 \\ &\quad + g_{ij}^k \partial_k \left(z - \chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}}\right) \partial_{ij}^2 \overline{u}_2 + g_{ij}^k \partial_k \left(\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}}\right) \partial_{ij}^2 \left(\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}}\right) + g_{ij}^k \partial_k \left(z - \chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}}\right) \partial_{ij}^2 \left(\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}}\right)] \end{aligned}$$

$$+[g_{ij}^k\partial_k\left(\chi\frac{L}{r^{\frac12}}\right)\left(\partial_{ij}^2\overline{u}_3+\partial_{ij}^2\overline{\overline{u}}_3\right)+g_{ij}^k\partial_k\left(\overline{u}_3+\overline{\overline{u}}_3\right)\partial_{ij}^2\left(\chi\frac{L}{r^{\frac12}}\right)+g_{ij}^k\partial_k\left(u_1-\chi\frac{R}{r^{\frac12}}\right)\partial_{ij}^2u_3$$
$$+g_{ij}^k\partial_k u_3\partial_{ij}^2\left(u_1-\chi\frac{R}{r^{\frac12}}\right)]$$
$$=Q_4^0+Q_4^1$$

estimons les normes L^2 de Q_4^0 et Q_4^1.

(i) Estimation de Q_4^0

De façon analogue, en dérivant les symboles dans Q_4^0 par rapport à la variable $r-t$, il en résulte :

(a)

$$\left|\partial\left({}_k\overline{u}_2\partial_{ij}^2\overline{u}_2\right)\right|=\left|\frac{g^2}{4}\frac{t}{r}\chi^2\omega_k\omega_i\omega_j(R'^2)'(R'^2)''\right|$$

par itération, nous avons :

$$\left|\partial^\alpha\left({}_k\overline{u}_2\partial_{ij}^2\overline{u}_2\right)-\frac{g^2}{4}\frac{t}{r}\chi^2\omega_k\omega_i\omega_j(R'^2)'(R'^2)''\right|\le C$$

par conséquent,

$$\left|\partial^\alpha\left({}_k\overline{u}_2\partial_{ij}^2\overline{u}_2\right)-\frac{g^2}{4}\frac{t}{r}\chi^2\omega_k\omega_i\omega_j(R'^2)'(R'^2)''\right|_0\le\frac{1}{(1+t)^{\frac12}},$$

de même nous avons les estimations :

(b)

$$\left|\partial^\alpha\left(\partial_k\overline{u}_2\partial_{ij}^2(\chi\frac{L}{r^{\frac12}})\right)-\chi^2\frac{g}{2}\frac{\sqrt{t}}{r}\omega_k\omega_i\omega_j(R'^2)'L''\right|_0\le\frac{C}{(1+t)^{\frac12}},$$

(c)

$$\left|\partial^\alpha\left(\partial_k\overline{u}_2\partial_{ij}^2(z-\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}})\right)-\chi^2\frac{g}{2}\frac{\sqrt{t}}{r}(R'^2)'L''\right|_0\leq\frac{C}{(1+t)^{\frac{1}{2}}},$$

(d)

$$\left|\partial^\alpha\left(g_{ij}^k\partial_k(\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}})\partial_{ij}^2\overline{u}_2\right)-\chi^2\frac{g}{2}\frac{\sqrt{t}}{r}(R'^2)''L'\right|_0\leq\frac{C}{(1+t)^{\frac{1}{2}}},$$

(e)

$$\left|\partial^\alpha\left(g_{ij}^k\partial_k(z-\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}})\partial_{ij}^2\overline{u}_2\right)-\chi^2\frac{g}{2}\frac{\sqrt{t}}{r}(R'^2)''L'\right|_0\leq\frac{C}{(1+t)^{\frac{1}{2}}},$$

(f)

$$\left|\partial^\alpha g_{ij}^k\partial_k(\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}})\partial_{ij}^2(\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}})-\frac{\chi^2}{r}L'L''\right|_0\leq\frac{C}{(1+t)^{\frac{1}{2}}},$$

(g)

$$\left|\partial^\alpha(g_{ij}^k\partial_k(z-\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}})\partial_{ij}^2(\chi\frac{L}{r^{\frac{1}{2}}})-\frac{\chi^2}{r}L'L''\right|_0\leq\frac{C}{(1+t)^{\frac{1}{2}}},$$

On en conclut que la norme L^2de tous les termes de Q_4^0 est bornée par $\dfrac{C}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}$, ce qui entraîne

$$\left|\partial^\alpha\left\{Q_4^0-\chi\frac{g^3}{2}\left(R'^2R''^2\right)'+\frac{g^2}{r^{\frac{1}{2}}}(R'R''L')'\right\}\right|\leq\frac{C}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}.$$

(ii) Estimation de Q_4^0

Par des procédés similaires, nous estimons tous les termes de Q_4^1,

on en conclut,

$$\left|\partial^\alpha \left\{ Q_4^1 - \chi \frac{g^3}{2} \left(R'(R'^3)''\right)' + \frac{g^2}{r^{\frac{1}{2}}} (R'(R'L')')' \right\}\right|_0 \leq \frac{C}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous constatons que la construction est laborieuse ; c'est pourquoi en ne tenant compte que des principaux termes de u_j, nous avons l'estimation pour u_j , $j = 5, 6, 7$,

en posant, $\overline{u}_\ell = \chi\ a_\ell^1(r-t,\omega)\ t^{\frac{1}{2}(\ell-2)}$: le terme principal de u_ℓ,

Il en ressort

$Q_\ell = \chi\ t^{\frac{1}{2}(\ell-4)} g \sum (a_{\ell'}^1)\ (a_{\ell''}^1)$: le terme principal de Q_ℓ ,

$S_m\ \times t^{\frac{1}{2}(\ell-4)-\frac{1}{2}}$: le terme non principal de Q_ℓ ,

d'où l'estimation des termes $\overline{u}_5, \overline{u}_6, \overline{u}_7$

$$\left|\partial^\alpha(\Box\overline{u}_\ell + Q_\ell)\right|_0 \leq C(1+t)^{\frac{1}{2}(\ell-4)},$$

en effet, après des calculs nous obtenons que l'ordre du terme

$\frac{1}{4r^3}\chi a_\ell^1 \frac{1}{2}(\ell-2)t^{\frac{1}{2}(\ell-4)}$ l'emporte sur les autres.

On sait que, $\sum\limits_{\ell\,\geq\,1} \tau^{\ell-1} a_\ell^1(\sigma,\omega)$ est le développement de Taylor en τ de la solution $R(\sigma,\omega,\tau), \tau = \varepsilon\sqrt{t}$ [13]

càd, $R(\sigma,\omega,\tau) = a_1^1(\sigma,\omega) + \tau a_2^1(\sigma,\omega) + \tau^2 a_3^1(\sigma,\omega) + ...$,

on prend en général, $R(\sigma,\omega,\tau) = a_1^1(\sigma,\omega)$

d'où, l'estimation $\left|\frac{1}{4r^3}\chi a_\ell^1 \frac{1}{2}(\ell-2)t^{\frac{1}{2}(\ell-4)}\right| \leq C \underset{(r\,\leq\,C\,t\,\Longrightarrow \frac{1}{r}\,\leq\,1)}{\left|a_\ell^1 t^{\frac{1}{2}(\ell-4)}\right|} \leq C(1+\tau)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}(\ell-4)}$,

comme, $\tau = \varepsilon\sqrt{t}$ et $0 \leq t \leq \varepsilon^{-\lambda}$ $(\lambda = \frac{14}{9})$,

nous avons : $\tau \geq t$,

par suite,

$$\left|\frac{1}{4r^3}\chi a_\ell^1 \frac{1}{2}(\ell-2)t^{\frac{1}{2}(\ell-4)}\right|_0 \leq Ct^{\frac{1}{2}(\ell-4)},$$

ainsi,

$$|\partial\Box\overline{u}_\ell|_0 \leq Ct^{\frac{1}{2}(\ell-4)} \tag{1}$$

par itération, nous obtenons

$$|\partial^\alpha\Box\overline{u}_\ell|_0 \leq Ct^{\frac{1}{2}(\ell-4)},$$

il nous reste à estimer $|\partial^\alpha Q_\ell|_0$

où,$Q_\ell = \chi t^{\frac{1}{2}(\ell-4)} g\sum(a_{\ell'}^1)'(a_{\ell''}^1)'' \qquad (\ell'+\ell''=\ell)$,

il en découle que $\chi t^{\frac{1}{2}(\ell-4)} g\sum(a_{\ell'}^1)'(a_{\ell''}^1)''$ est le terme qui a le plus grand ordre,

ainsi,

$$\left|\chi t^{\frac{1}{2}(\ell-4)} g\sum(a_{\ell'}^1)'(a_{\ell''}^1)''\right|_0 \leq Ct^{\frac{1}{2}(\ell-14)},$$

il en résulte,

$$|\partial^\alpha\Box Q_\ell|_0 \leq Ct^{\frac{1}{2}(\ell-14)} \tag{2}$$

(1) et (2) entraînent que

$$\begin{aligned}|\partial^\alpha(\Box\overline{u}_\ell + Q_\ell)|_0 &\leq C(1+t)^{\frac{1}{2}(\ell-4)} + C(1+t)^{\frac{1}{2}(\ell-14)}\\ &\leq C(1+t)^{\frac{1}{2}(\ell-4)},\end{aligned}$$

par conséquent,

$$|\partial^\alpha(\Box u_a + Q_a)|_0 \leq C(1+t)^{\frac{1}{2}(\ell-4)}.$$

Nous résumons les résultats obtenus en période I, comme suit :

(i) $u_1 \sim \dfrac{R(r-t,w)}{r^{\frac{1}{2}}}$ $\qquad r \to +\infty,\ \theta \to 1,$

(ii) $u_2 - \dfrac{g(w)}{2}(\partial_\sigma R)^2 \sim \dfrac{L(r-t,w)}{r^{\frac{1}{2}}},$

(iii) $\Box u_3 + Q_3 = W_2,$

avec, $\left|\partial^\alpha_{x,t,w}\, W_1\right|_0 + \left|\partial^\alpha_{x,t,w}\, W_2\right|_0 \leq \dfrac{C_\alpha}{1+t},$

(iv) $\Box u_4 + Q_4 = W_3,$

avec, $\left|\partial^\alpha_{x,t,w}\, W_3\right|_0 \leq \dfrac{C_\alpha}{(1+t)^{\frac{1}{2}}},$

(v)$|\partial^\alpha(u_\ell + Q_\ell)|_0 \leq C(1+t)^{\frac{1}{2}(\ell-4)}$ pour $\ell = 5, 6, 7.$

il en résulte:

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha(u_a + Q_\ell)|_0 \ \leq\ & \frac{C_\alpha}{1+t} + C_\alpha(1+t)^{\frac{1}{2}} + \frac{C_\alpha}{1+t} + \frac{C_\alpha}{(1+t)^{\frac{1}{2}}} + C_\alpha(1+t)^{\frac{1}{2}} \\ & + C_\alpha(1+t) + C_\alpha(1+t)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

nous pouvons à présent recoller les solutions trouvées à l'intérieur et à l'extérieur

Recollement entre zones intérieure et extérieure en période I.

La solution u_a^I est obtenue par recollement des morceaux à l'aide de troncatures

,

pour $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $\quad \theta(s) = \begin{cases} 1 & \text{pour } s \leq 1 \\ 0 & \text{pour } s \geq 2 \end{cases}$

On pose

$u_a^I = (1-\theta)(r-t+C_0-1)\ u_a^{I,e} + \theta(r-t+C_0-1)\ u_a^{I,i}$,

où, $u_a^{I,i} = \varepsilon u_1^i + \varepsilon^2 u_2^i + ... + \varepsilon^7 u_7^i$,

$u_a^{I,e} = U_k$.

Estimation de l'erreur en période I.

Nous évaluons l'erreur associée à la solution approchée $u_a$de u en appréciant le terme

$J_a = J_a^I = \square u_a^I + g_{ij}^k \partial_k u_a^I \partial_{ij}^2 u_a^I$

où, J_a est l'erreur associé à u_a

proposition 3.2.

On pose

$$u_a = u_a^I = \varepsilon u_1^i + \varepsilon^2 u_2^i + ... + \varepsilon^7 u_7^i,$$

où, les u_j^i ont été construits précédemment,

alors, pour $t \leq \dfrac{cste}{\varepsilon^2}$

$$\left|\partial_{x,t,\omega}^\alpha J_a\right|_0 \leq C_\alpha \left\{ \frac{\varepsilon^3}{1+t} + \varepsilon^5 (1+t)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^8 (1+t)^{\frac{5}{2}} \right\}. \qquad (3.1.11)$$

Preuve :

Comme, $J_a = \Box u_a + Q$,

où, $Q = g\partial u_a \partial^2 u_a$,

(3.1.10) et (3.1.11) impliquent

$$\begin{aligned}
\left|\partial^\alpha_{x,t,\omega} J_a\right|_0 &\leq C_\alpha \left\{ \frac{\varepsilon}{1+t} + \varepsilon^2 (1+t)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon^3}{1+t} + \frac{\varepsilon^4}{(1+t)^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^5 (1+t)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^6 (1+t) + \varepsilon^7 (1+t)^{\frac{5}{2}} \right\} \\
&\leq C_\alpha \left\{ \frac{\varepsilon^3}{1+t} + \varepsilon^5 (1+t)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon^4}{(1+t)^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^6 (1+t) + \varepsilon^7 (1+t)^{\frac{5}{2}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\leq C_\alpha \left\{ \frac{\varepsilon^3}{1+t} + \varepsilon^5 (1+t)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^8 (1+t)^{\frac{5}{2}} \right\} \qquad (3.1.12)$$

Proposition 3.3.

Pour tout k et $t \leq \dfrac{cste}{\varepsilon^2}$,on peut choisir N et N'en sorte que

$$\left|\partial^\alpha_{x,t,\omega} J_a\right|_0 \leq C_\alpha \left\{ \frac{\varepsilon^3}{1+t} + \varepsilon^5 (1+t)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^8 (1+t)^{\frac{5}{2}} \right\} |\log t|^{k-1} \qquad (3.1.13)$$

et de plus,

pour $r - t \geq -C_0$

$$\left|\left|\partial^\alpha_{x,t,\omega} J_a\right|\right|_0 \leq C_\alpha \ \varepsilon^{k+1} t^{\frac{k-3}{2}}. \qquad (3.1.13')$$

La preuve est une conséquense de la propositon 3.2. à l'intérieur et de la proposition 3.1. à l'extérieur.

Conclusion.

$$u^e - u^i = \sum_{3\leq\ j\ \leq 7} \frac{\varepsilon^\ell}{r^{\frac{1}{2}}} \left\{ \sum_{\substack{\ell\ \geq\ 1\\ \ell\ \leq 2j-1}} (\log t)^\ell L_j^\ell + \sum_{\substack{\ell\ \geq\ 1\\ \ell'\ \geq\ 1\\ \ell+2\ell'\leq\ j-1}} t^{\frac{1}{2}} (\log t)^{\ell\prime} R_k^{\ell,\ell'} + \sum_{\ell\ \leq\ j-3} t^{\frac{l}{2}} R_k^{\ell,0} \right\}$$

$$+ \sum_{8\leq\ j\leq\ k} \varepsilon^j u_j, ,$$

Principaux résulats obtenus en période I

i) Il a été établi au lemme 3.2. que

$$u_2 - \frac{g(\omega)}{2}(\partial_\sigma R)^2 \sim \frac{L(r-t,\omega)}{r^{\frac{1}{2}}} \qquad (r \to \infty, r-t \geq -C),$$

ii) $$u^e - u^i = \sum_{3\leq j\leq 7} \frac{\varepsilon^j}{r^{\frac{1}{2}}} \left\{ \sum_{\substack{\ell\geq 1\\ \ell\leq 2j-1}} (\log t)^\ell L_j^\ell + \sum_{\substack{\ell\geq 1\\ \ell'\geq 1\\ \ell+2\ell'\leq j-1}} t^{\frac{1}{2}} (\log t)^{\ell\prime} R_k^{\ell,\ell'} + \sum_{l\leq j-3} t^{\frac{l}{2}} R_k^{\ell,0} \right\}$$

$$+ \sum_{8\leq j\leq k} \varepsilon^j u_j,$$

iii) $$u_a^{I,e} \sim \frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}} F(r-t, \omega, \tfrac{1}{r}, \tau, \zeta), \tag{3.1.14}$$

3.1.2 Construction en période II.

Dans cette période, nous prolongeons la solution construite précédemment

pour $\varepsilon^{-\lambda} \leq t \leq \dfrac{A^2}{\varepsilon^2}$,où A est un nombre positif fixé,

nous considérons à présent et dans toute la suite que $0 < A < A_0$,

(A_0 est une constante que des calculs ultérieurs détérmineront).

En zone extérieure.

Nous cherchons à construire une solution $u_a^{II,i}$ qui se raccorde bien avec $u_a^{I,i}$

dans un intervalle $0 \le \tau \le \tau_1$,

où, $\tau_1 = A_0 + O(\varepsilon)$,

comme, $u_a^I \sim \dfrac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}} F(r-t, \omega, \frac{1}{r}, \tau, \zeta)$,

nous cherchons une solution approchée sous la forme $u = \dfrac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}} F(\sigma, \omega, \frac{1}{r}, \tau, \zeta)$,

pour cela, on pose : $F = F_0 + \tau G$,

avec, $F_0 = F_0(\sigma, \omega, \frac{1}{r}, \zeta) = F(\sigma, \omega, z, 0, \zeta)$ satisfaisant l'équation

$QF_0 \equiv \left\{ -(\frac{1}{4} + \partial_\omega^2) + 2(1-\sigma z)\partial_{z\sigma}^2 - z^2 \partial_z^2 \right\} F_0 = 0$,

ce choix s'explique par le lemme suivant

Lemme3.5.

Pour toute fonction F régulière, en posant :

$u = \dfrac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}} F(r-t, \omega, \frac{1}{r}, \varepsilon\sqrt{t}, \varepsilon^2 \log\, t)$

on a,

$\partial_i u = \frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}}(\omega_i F' + z A_i F)$, $\partial_{ij}^2 u = \frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}}(\omega_i \omega_j F'' + z A_{ij} F)$,

où, A_i et A_{ij} sont des opérateurs différentiels en $(\sigma, \omega, \frac{1}{r}, \tau, \zeta)$,

de plus,

$$\begin{aligned} \Box u + g\partial u \partial^2 u \quad = \quad & \frac{\varepsilon}{r^{\frac{5}{2}}} QF_0 + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{rt}} \{ z(1-\sigma z) QG - (\partial_{\sigma\tau} F + \frac{z}{4} \partial_\tau F) \\ & + \frac{\tau z}{(1-\sigma z)} (\frac{\partial_\tau^2 F}{4} - 2\partial_{\sigma\zeta} F - z\partial_\zeta F) \\ & + \frac{\tau^2 z^2}{(1-\sigma z)^2} \partial_{\zeta\tau}^2 F + \frac{\tau^3 z^3}{(1-\sigma z)^3} \partial_\zeta^2 F \\ & + (1-\sigma z)^{\frac{1}{2}} g_{ij}^k (\omega_k F' + z A_k F)(\omega_i \omega_j F'' + z A_{ij} F) \}. \quad (3.2.1) \end{aligned}$$

Preuve.

(c.f. à la preuve du lemme 3.1(a) pour $\mu = k = 0$).

La formule (3.2.1) s'écrit sous forme abrégée

$\Box u + g\partial u \partial^2 u = \frac{\varepsilon}{r^{\frac{5}{2}}} QF_0 + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{rt}}\{HF + q(F,F)\}$

où, l'opérateur H et la forme quadratique q s'expriment ainsi

$$
\begin{aligned}
HF &= z(1-\sigma z)QG - (\partial_{\sigma\tau}F + \frac{z}{4}\partial_\tau F) - \frac{\tau z}{(1-\sigma z)}(2\partial_{\sigma\zeta}F + z\partial_\zeta F) + \frac{\tau^2 z^2}{(1-\sigma z)^2}\partial^2_{\zeta\tau}F \\
&\quad + (1-\sigma z)^{\frac{1}{2}} g^k_{ij}(\omega_k F' + zA_k F) z A_{ij} F,
\end{aligned}
$$

$$
q(F,F) = \frac{\tau z}{(1-\sigma z)}\frac{\partial^2_\tau F}{4} + \frac{\tau^3 z^3}{(1-\sigma z)^3}\partial^2_\zeta F + (1-\sigma z)^{\frac{1}{2}} g^k_{ij}(\omega_k F' + zA_k F)\omega_i\omega_j F''
$$

résolvons l'équation d'ondes $\Box u + g\partial u \partial^2 u$ à des approximations arbitraires $O(z^N) + O(\zeta^{N'})$.

Proposition 3.4.

Pour tous N, N' et toutes fonctions $\varphi_\ell(\sigma,\omega)$ $(\ell \leq N-2)$,on peut trouver une fonction $F = F_0 + \tau G$ définie pour $\tau \in [0,\tau_1]$ telle que,

$QF_0 = O(z^N)$,

$HF + q(F,F) = O(z^N) + O(\zeta^{N'})$,

$$\partial^{2\ell}_\tau \partial^\ell_z F(\sigma,\omega,0,0,0) = \varphi_\ell(\sigma,\omega) \text{ pour } 0 \leq \ell \leq N-2, \tag{3.1.15}$$

de plus,

si une fonction $F = F_0 + \tau G$ *verifie*

$$QF_0 = O(z^N), \tag{3.1.16}$$

$$HF + q(F,F) = O(z^N) + O(\zeta^{N\prime}),$$

et, $\partial_\tau^{2\ell}\partial_z^\ell F(\sigma,\omega,0,0,0) = \varphi_\ell(\sigma,\omega)$ *pour* $0 \leq \ell \leq N-2$,

elle est determinée à $O(z^{N-1}) + O(\zeta^{N\prime})$ *près.*

Preuve.

(a) Puisque toutes les fonctions dont on a tenu compte sont supportées pour $\sigma \leq M$, notons $F_0 \mid_{z=0}$le jet[5] en z d'une solution de $QF_0 = 0$, donc, il existe bien une fonction $F = F_0 + \tau G$ tel que $QF_0 = O(z^N), \forall N$.

Réciproquement, on peut trouver une solution F_0 de QF_0

pour laquelle $F_0 \mid_{z=0}$est donnée.

(b) Pour établir l'égalité : $HF + q(F,F) = O(z^N) + O(\zeta^{N\prime})$,

avec, $\partial_\tau^{2\ell}\partial_z^\ell F(\sigma,\omega,0,0,0) = \varphi_\ell(\sigma,\omega)$ pour $0 \leq \ell \leq N-2$,

[5] développement en série de Taylor

l'équation $HF + q(F,F) = 0$ est équivalente à,

$$
\Big[-z(\frac{1}{4} + \partial_\omega^2)G + 2z(1-z)\partial_{z\sigma}^2 G - z^3\partial_z^2 G + \sigma z^2(\frac{1}{4} + \partial_\omega^2)G - 2\sigma z^2(1-z)\partial_{z\sigma}^2 G + \sigma z^4 \partial_z^2 G\Big]
$$
$$
- \Big[\partial_{\sigma\tau}^2 F_0 + \tau\partial_{\sigma\tau}^2 G + \frac{z}{4}\partial_\tau F_0 + \frac{z}{4}\partial_\tau G)\Big] + (\tau z + \tau\sigma z^2 + ... + \tau\sigma^{k-1}z^k + \tau\sigma^k z^{k+1} + ...) \times
$$
$$
\Big[\ \frac{\partial_\tau^2 F_0}{4} + \tau\frac{\partial_\tau^2 G}{4} - 2\partial_{\sigma\zeta}F_0 - \tau 2\partial_{\sigma\zeta}G - z\partial_\zeta F_0 - \tau z\partial_\zeta G\Big] + (\tau^2 z^2 - 2\tau^2\sigma z^3 +
$$
$$
..... + \frac{(-2)(-2-1)....(-2-k)}{(k-1)\,!}\tau^2(-\sigma z)^{k-1}) \times \big[\partial_{\zeta\tau}^2 F_0 + \tau\partial_{\zeta\tau}^2 G\big] + (\tau^3 z^3 + 3\tau^3\sigma z^4 +
$$
$$
.... + \frac{(-3)(-3-1)....(-3-k+1)}{(k-2)\,!}(-\sigma)^{k-2}\tau^3 z^{k+1}) \times \big[\partial_\zeta^2 F_0 + \tau\partial_\zeta^2 G\big] + (1 - \frac{\sigma}{2}z + ...
$$
$$
+ \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)....(\frac{1}{2}-k+1)}{k\,!}(-\sigma^k z^k) \times \big[g_{ij}^k(\omega_k F_0' + \tau\omega_k G' + zA_k F_0 + \tau z A_k G)\big] \times
$$
$$
[\omega_i\omega_j F_0'' + \tau\omega_i\omega_j G_0'' + zA_{ij}F_0 + \tau z A_{ij} G]
$$
$$
= \quad 0
$$

pour $z = 0$ nous avons

$$
-\partial_{\tau\sigma}^2 F_0 - \tau\partial_{\tau\sigma}^2 G_0 \; + \; g(\partial_\sigma f_0 + \tau\partial_\sigma G_0)(\partial_\sigma^2 f_0 + \tau\partial_\sigma^2 G_0) = 0,
$$

par ailleurs, les termes en z^{k-1} dans QG s'écrivent

$$
-(\tfrac{1}{4} + \partial_\omega^2)G_{k-1} + 2kG_k' - 2(k-1)G_{k-1}' - (k-1)(k-2)G_{k-1},
$$

nous ne considérons dans $q(F,F)$ que le terme en z^k et non pas en z^{k-1} ;

car, les opérateurs zA_iF , $zA_{ij}F$ intervenant dans $q(F,F)$ ont des dérivées en z

de la forme $z^k\,\partial_z, k \geq 2$ dont tous leurs termes en z^k n'ont de coefficients

autres que f_j, G_j pour $j \leq \ell - 1$,

on note $q_k(F,F)$ le terme en z^k dans $q(F,F)$ et nous tirons q_1

$$\begin{aligned}
q_k(F,F) &= g\{(f_0'+\tau G_0')(f_k''+\tau G_k'')+...+(f_k'+\tau G_k')(f_0''+\tau G_0'')\} \\
&-\frac{\sigma}{2}g\{(f_0'+\tau G_0')(f_{k-1}''+\tau G_{k-1}'')+...+(f_{k-1}'+\tau G_{k-1}')(f_0''+\tau G_0'')\} \\
&+g_{ij}^p\omega_i\omega_j\{(f_0''+\tau G_0'')A_p(f_{k-1}+\tau G_{k-1})+... \\
&+(f_{k-1}''+\tau G_{k-1}'')A_p(f_0+\tau G_0)\}+g_{ij}^p\omega_p\{(f_0'+\tau G_0')A_{ij}(f_{k-1}+\tau G_{k-1})+... \\
&+(f_{k-1}'+\tau G_{k-1}')A_{ij}(f_0+\tau G_0)\}\ +(\text{termes pour } j\leq k-2) \\
q_1(F,F) &= g\{(f_0'+\tau G_0')(f_1''+\tau G_1'')+...+(f_1'+\tau G_1')(f_0''+\tau G_0'')\} \\
&-\frac{\sigma}{2}g\{(f_0'+\tau G_0')(f_0''+\tau G_0'')+...+(f_0'+\tau G_0')(f_0''+\tau G_0'')\}+ \\
&g_{ij}^p\omega_i\omega_j\{(f_0''+\tau G_0'')A_p(f_0+\tau G_0)+...+(f_0''+\tau G_0'')A_p(f_0+\tau G_0)\} \\
&+g_{ij}^p\omega_p\{(f_0'+\tau G_0')A_{ij}(f_0+\tau G_0)+...+(f_0'+\tau G_0')A_{ij}(f_0+\tau G_0) \\
&+.......
\end{aligned}$$

en prenant le terme en $\tau=0$,nous avons

$g\{f_0'\tau G_1''+f_1''\tau G_0'+.....+f_1'\tau G_0''+f_0''\tau G_1'\}-\frac{\sigma}{2}g\{f_0'\tau G_0''+f_0''\tau G_0'+...+f_0'\tau G_0''$

$+f_0''\tau G_0'+...\}+g_{ij}^p\omega_i\omega_j\{f_0''A_p\tau G_0+f_0A_p\tau G_0''+...+f_0''A_p\tau G_0+f_0A_p\tau G_0''\}$

$+g_{ij}^p\omega_p\{f_0'A_{ij}\tau G_0+f_0A_{ij}\tau G_0'+.....f_0'A_{ij}\tau G_0+f_0A_{ij}\tau G_0'\}=0,$

en posant, $G_1=\sum\limits_{\ell\geq 0}G_1^\ell\tau^\ell$,il en résulte,

$g\{f_1''G_0'+f_0'G_1^{0\prime\prime}+f_1'G_0''+f_0''G_1^{0\prime}-\frac{\sigma}{2}(f_0'G_0''+f_0''G_0')\}+..........=0,$

d'autre part, le terme en z^k dans $HF+q(F,F)$ est donné par

$$-\tau\partial^2_{\sigma\tau}G_k+(2k-1)\partial_\sigma G_k+\{-(\frac{1}{4}+(k-1)(k-2)+\partial^2_\omega)G_{k-1}-2(k-1)\partial_\sigma G_{k-1}$$
$$-\frac{1}{4}(\tau\partial_\tau G_{k-1}+G_{k-1})+\frac{\tau}{4}(\tau\partial^2_\tau G_{k-1}+2\partial_\tau G_{k-1})-2\tau^2\partial_{\zeta\sigma}G_{k-1}\}+q_k(F,F) \qquad (1)$$

$$= \text{termes en } F_{0,}\ G_j\ (\ j\leq k-2),$$

pour $k=1\ \ et\ \ \tau=0,$

$$G_1^{0\prime}-(\frac{1}{2}+\partial^2_\omega)G_0\ +\ \ q_1(F,F)\mid_{\tau=0}+\text{termes en }\ f_0=0, \qquad (2)$$

nous avons également,

$$-2\partial_\zeta f_0'+g\{f_1''G_0'+f_0'G_1^{0\prime\prime}+f_1'G_0''+f_0''G_1^{0\prime}-\frac{\sigma}{2}(f_0'G_0''+f_0''G_0')\}....+\text{termes en } f_0=0 \quad (3)$$

de (1), nous avons

$$G_1^{0\prime}=(\frac{1}{2}+\partial^2_w)G_0-\text{termes en }\ f_0 \qquad (4)$$

En combinant (3) avec (4) nous obtenons

$$-2\partial_\zeta f_0'+g\{G_0'f_1''+f_0'G_1^{0\prime\prime}+f_1'G_0''+f_0''(\tfrac{1}{2}+\partial^2_w)G_0-\text{termes en } f_0)-\frac{\sigma}{2}(f_0'G_0''+f_0''G_0')\}$$
$$+\text{termes en }\ f_0=0.$$

Donc,

$-2\partial_\zeta f_0' +$ (termes en f_0 sans dérivées en ξ) $= 0$,

d'où, le choix de f_0 à $O(\xi^{N'})$ près; puisque $f_0|_{\xi=0} = \varphi_{0,}$

ainsi, on peut résoudre f_0 sur un certain intervalle $[0, \tau_1]$, par suite, tous les $f_k$et G_1^0 à la même approximation,

On note

$$\begin{aligned} G_1 &= G_1^0 + \tau^2 \widetilde{G}_1 - \tau \widetilde{G}_1 - \frac{G}{\tau^2} \widetilde{G}_1 + g(f_0' + \tau G_0') \tau \widetilde{G}_1'' + g(f_0'' + \tau G_0'') \tau \widetilde{G} \quad (5) \\ &= \text{termes connus;} \end{aligned}$$

c'est une équation linéaire qui possède une solution unique sur l'intervalle $[0, \tau_1]$,

nous avons également résolu G_1près de son noyau,

Plus généralement,

Pour $k \geq 2$,l'équation (1) pour des termes en $(k-1)$ s'écrit

$-\tau \dot{G}_{k-1}' + (2k-3) G_{k-1}' + \{-(\frac{1}{4} + (k-2)(k-3) + \partial_\omega^2) G_{k-2} - 2(k-2) G_{k-2}'$

$-\frac{1}{4}(\tau \dot{G}_{k-2} + G_{k-2}) + \frac{\tau}{4}(\tau \ddot{G}_{k-2} + 2\dot{G}_{k-2}) - 2\tau^2 \partial_\zeta G_{k-2}'\} + q_{k-1}(F, F)$

$=$termes en F_0, G_0 $(j \leq k-3)$ (S)

on pose : $v = G_{k-1}'$

en combinant (1) avec (2), les fonctions v constituent le noyau de (S),

où, $-\tau \dot{v} + (2k-3)v + \tau g(f_0' + \tau G_0')v' = 0$,

il en découle, $v = h\tau^{2k-3} + \tau^{2k-2}\widetilde{h}$,

avec, h fonction arbitraire,

et, $\widetilde{h}$ est determinée à partir de h,

en d'autres termes,

$v = h\tau^{2k-3} + gf_0'h'\tau^{2k-3} + \frac{1}{2}\{g^2(f_0'^2)h'' + (g^2 f_0 f_0'' + gG_0')h'\}\tau^{2k-1} + \tau^{2k} + ...$

donc, les G_k^ℓ sont indiqués pour $\ell \leq 2k-4$ en fonction de h en annulant le terme en τ^{2k-1}, nous avons l'expression

de h : $-2\partial_\zeta h' +$ (termes en h sans dérivée en ζ) $=$ termes connus

en l'identifiant à son équation semblable en f nous détérminons h à $O(\xi^{N'})$ près

avec $h|_{\xi=0} = \varphi_{k-1}$,

donc, il existe sur un intervalle $[0, \tau_1]$ une solution de (1) sous la forme

$G_k = \sum\limits_{0\leq\ell\leq 2k-\ell} G_k^\ell\ \tau^\ell + \tau^{2k}\widetilde{G}^k$ avec $\widetilde{G}^k$ satisfaisant une équation linéaire.

Choix de $\mathbf{u}_a^e$

D'après la proposition 3.1; $u_k = \sum\limits_{\ell\leq k} \varepsilon^\ell u_\ell$,

On a donc, $(\frac{r^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}u_k)(\sigma, \omega, 0, 0, 0) = \sum\limits_{\ell\leq k} \varepsilon^\ell L_\ell^0(\sigma, \omega, 0) = \varphi_0(\sigma, \omega)$,

par conséquent, on prend pour u_a^e la fonction $\frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}}F$ (où F, est donnée par la proposition 3.4) à laquelle

correspondent les fonctions : $\varphi_0, \varphi_1 = 0, ...\varphi_\ell = 0$,

où, $\varphi_0 = f_0|_{\xi=0}$,

On en déduit que $v = f_0 + \tau G_0$ est solution de $\partial_\tau v = \frac{g}{2}(\partial_\sigma v)^2$,

avec $v(\sigma, \omega, 0, \xi) = f_0(\sigma, \omega, \xi)$

$$= R(\sigma, \omega) + O(\varepsilon) + O(\xi),$$

La solution $u_a^{II,e}$ construite existe et est régulière pour $0 \leq \tau \leq A$ et ε assez petit.

Ainsi, nous construisons dans un intervalle $0 \leq \tau \leq \tau_1(où, \tau_1 = A_0 + O(\varepsilon))$, une fonction $F(\sigma, \omega, z, \tau, \xi)$ qui se raccorde bien à ${u_a}^{I,e}$.

Recollement entre zones extérieures en périodes I et II..

pour $\varepsilon^{-\lambda} \leq t \leq 2\,\varepsilon^{-\lambda}$, la solution $u_k$de $\Box u + g\partial u \partial^2 u = 0$ est en période de transition approximée à $\varepsilon^{k+1-\lambda(\frac{k-3}{2})}$

près (cf.proposition 3.3.1) par une solution de la forme $\dfrac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}}F$,

en outre, les deux solutions diffèrent peu pour N,N' et k assez grands (d'après l'unicité de la proposition 3.4)

En zone intérieure.

Il s'agit de prolonger la solution construite en période I à l'intérieur

pour $0 \leq \tau \leq A$, on définit $S = S_\varepsilon(\sigma, \omega, \tau)$ comme la solution de

$$\partial_\tau S - \frac{g}{2}(\partial_\sigma S)^2 = 0, \quad S(\sigma, \omega, 0) = R(\sigma, \omega) + \varepsilon L(\sigma, \omega), \tag{3.1.17}$$

on pose : $u = u_a^i = \varepsilon u_1^i + \varepsilon^2 z + \chi \frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}} K(r - t, \omega, \tau)$,

où, $K(\sigma, \omega, \tau) = S(\sigma, \omega, \tau) - S(\sigma, \omega, 0)$.

Lemme 3.6.

le choix entrepris conduit à l'approximation

$$\left|\partial_{x,t,\omega}^{\alpha} J_a\right|_0 \leq C_\alpha \frac{\varepsilon}{t^2}. \tag{3.1.18}$$

Preuve.

Comme $J_a = \Box u + g\partial_k u \partial_{ij}^2 u = 0$,

calculons $\Box u$,

$\Box u = \varepsilon \Box(u_1^i) + \varepsilon^2 \Box z + \frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}} \Box\ (\chi K)$,

d'après le lemme 3.2, $\quad \Box z = W$, $W \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

il s'ensuit,

$$\begin{aligned}
\Box(\frac{\varepsilon\chi K}{r^{\frac{1}{2}}}) &= \frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}} \left\{ (\chi_{tt} - \chi'')K - 2K'(\chi_t + \chi') + \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}} \partial_\tau K (\chi_t - \frac{\chi}{4t}) + \chi \frac{\varepsilon^2}{4t} \partial_\tau^2 K - \frac{\chi}{r^2}(\frac{1}{4} + \partial_\omega^2) K \right\} \\
&\quad - \frac{\varepsilon^2 \chi}{\sqrt{rt}} \partial_\tau K',
\end{aligned}$$

soit, $H_1 = \Box(\frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}} \chi K) + \frac{\varepsilon^2 \chi}{\sqrt{rt}} \partial_\tau K'$,

d'autre part, on peut écrire

$$\begin{aligned}
u &= \chi \frac{\varepsilon S(r-t,\omega,\tau)}{r^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon(u_1 - \chi \frac{R(r-t,\omega)}{r^{\frac{1}{2}}}) + \varepsilon^2 (z - \chi \frac{L(r-t,\omega)}{r^{\frac{1}{2}}}) \\
&= \chi \frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}} S(r-t,\omega,\tau) + \varepsilon r_1,
\end{aligned}$$

et $g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 u = \varepsilon^2 g \frac{\chi^2}{r} S' S'' + \varepsilon^2 H_2$, avec,

$$\begin{aligned}
H_2 &= \left\{ g_{ij}^k \partial_k \left(\frac{\chi S}{r^{\frac{1}{2}}}\right) \partial_{ij}^2 \left(\frac{\chi S}{r^{\frac{1}{2}}}\right) - g \frac{\chi^2}{r} S' S'' \right\} + \left\{ g_{ij}^k \partial_k \left(\frac{\chi S}{r^{\frac{1}{2}}}\right) \partial_{ij}^2 r_1 + g_{ij}^k \partial_k r_1 \partial_{ij}^2 \left(\frac{\chi S}{r^{\frac{1}{2}}}\right) + g_{ij}^k \partial_k r_1 \partial_{ij}^2 r_1 \right\} \\
&= H_2^1 + H_2^2,
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$J_a = \varepsilon^2 W - \frac{\varepsilon^2 \chi}{\sqrt{rt}} \partial_\tau K' + H_1 + \varepsilon^2 g \frac{\chi^2}{r} S' S'' + \varepsilon^2 H_2,$$

il nous reste à estimer H_1 et H_2,

on sait que S est bornée en σ,et S' est essentiellement en $\frac{1}{\sigma}(\sigma \to +\infty)$[1],

ce qui entrîne que , $K = \frac{g}{2} \int\limits_0^\tau R'^2(\sigma, \omega, s) ds$ se comporte en $\frac{1}{\sigma^2}$,

de plus, la fonction S ne présente à l'intérieur aucune singularité pour $\tau \leq A$ à cause de l'hypothèse de non dégénérescence suivante faite sur R et g

$$(\mathrm{ND}) \begin{cases} \text{il existe un point } (\sigma_0, \omega_0) \text{ et un nombre } \blacksquare \geq 2 \text{ tels que} \\ (i) \quad -g(\omega_0) \partial_\sigma^2 R(\sigma_0, \omega_0) < 0, \\ (ii) \quad \forall A, \exists C > 0 \text{ avec, pour } |\sigma - \sigma_0| + |\omega - \omega_0| \leq A, \\ -g(\omega) \partial_\sigma^2 R(\sigma, \omega) \geq -g(\omega_0) \partial_\sigma^2 R(\sigma_0, \omega_0) + C \left(|\sigma - \sigma_0| + |\omega - \omega_0| \right)^{\blacksquare}, \end{cases}$$

on a alors,

$|\partial^\alpha H_1|_0 \leq \frac{C\varepsilon^2}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}$ et $|\partial^\alpha H_2|_0 \leq \frac{C\varepsilon}{(1+t)^2}$,

donc, $|\partial^\alpha J_a| \leq \frac{C\varepsilon^2}{(1+t)^{\frac{3}{2}}} + \frac{C\varepsilon}{(1+t)^2}$

$\leq \frac{C\varepsilon}{(1+t)^2}.$

Recollement entre zones intérieures en périodes I et II.

d'après ce qui précède, $u^I = \varepsilon u_1 + \chi\frac{g}{2r^{\frac{1}{2}}}\varepsilon\tau R'^2 + \varepsilon^2 z + \chi\frac{g^2}{6r^{\frac{1}{2}}}\varepsilon\tau^2(R'^3)' + \chi\frac{g}{2r^{\frac{1}{2}}}\varepsilon\tau R'^2$

$$+\chi\frac{g^3}{6r^{\frac{1}{2}}}\varepsilon\tau^3(3R'^2R''^2+R'^3R''')+\chi\frac{g^2}{2r^{\frac{1}{2}}}\varepsilon^2\tau^2(3R'R''L'+R'^2L'')$$

$$+\varepsilon^5\overline{u}_5 + \varepsilon^6\overline{u}_6 + \varepsilon^7\overline{u}_7,$$

$$\begin{aligned}u^{II} - \ u^I = \chi\frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}}\{S(r-t,\omega,\tau) - R - \frac{g}{2}\tau R'^2 - \frac{g^2}{6}\tau^2(R'^3)'\\ -\frac{g^3}{6}\tau^3(3R'^2R''^2 + R'^3R''') - a_5^1\tau^4 - a_6^1\tau^5 - a_7^1\tau^6\}\\ -\chi\frac{\varepsilon^2}{r^{\frac{1}{2}}}\{L + g\tau R'L' + \frac{g^2}{2}\tau^2(2R'R''L' + R'^2L'')\},\end{aligned}$$

afin d'expliciter les termes principaux $\overline{u}_\ell$ de u_ℓ,

où, $\overline{u}_\ell = \chi a_\ell^1(r-t,\omega)t^{\frac{1}{2}(\ell-2)}$,

$a_1^1(\sigma,\omega) = R(\sigma,\omega)$,

nous énonçons le lemme ci-après

Lemme 3.7.

L'expression $\sum_{\ell\geq 1}\tau^{\ell-1}\ \ a_\ell^1(\sigma,\omega)$ *est le développement de Taylor en* τ *de la solution* $R(\sigma,\omega,\tau)$ *de l'équation*

$$\partial_\tau R = \frac{g}{2}(\partial_\sigma R)^2, \quad R(\sigma,\omega,0) = R(\sigma,\omega). \tag{3.1.20}$$

Preuve.

(a) Comme, $Q_\ell = \sum_{\ell'+\ell''=\ell} g_{ij}^k\partial_k u_{\ell'}\partial_{ij}^2 u_{\ell''}$, le terme principal de Q_ℓ est donné par

$$\begin{aligned}\overline{Q}_\ell &= \chi g t^{\frac{1}{2}(\ell-4)} \sum (a^1_{\ell'})'(a^1_{\ell''})'' \\ &= \chi g t^{\frac{1}{2}(\ell-4)} g \left\{ \sum_{\substack{\ell'\leq\ell'' \\ \ell'+\ell''=\ell}} (a^1_{\ell'})'(a^1_{\ell''})' + \frac{1}{2}\left[(a^1_{\ell/2})'\right]^2 \right\}' .\end{aligned}$$

(b) Soit $A(\sigma,\omega,\tau)$ la solution de

$$\partial_\tau A = \frac{g}{2}(A')^2, A(\sigma,\omega,0) = A(\sigma,\omega), \tag{1}$$

A s'écrit formellement,

$$A = A_1 + \tau A_2 + ... + \tau^k A_{k+1}, \tag{2}$$

de (1) et (2), nous avons

$$A_2 + 2\tau A_3 + ... + k\tau^{k-1}A_{k+1}....... = \frac{g}{2}\{A'_1 + \tau A'_2 + ... + \tau^k A'_{k+1}\}^2,$$

par identification des deux membres

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{g}{2}(A'_1)^2, \\ (k-1)A_k &= \frac{g}{2}\{2 \sum_{\substack{\ell'\leq\ell'' \\ \ell'+\ell''=k}} A'_{\ell'}A'_{\ell''} + (A'_{k/2})^2\}, \end{aligned}$$

et le lemme est démontré compte tenu de l'égalité $a_1^1(\sigma,\omega) = R(\sigma,\omega)$.

De la même manière, nous explicitons les termes sous-principaux $\overline{\overline{u}}_\ell$ de u_ℓ.

Lemme 3.8.

L'expression $\sum_{\ell\geq 2} \tau^{\ell-2}\ a_\ell^2(\sigma,\omega)$ *est le développement de Taylor en* τ *de la solution* $L(\sigma,\omega,\tau)$ *de l'équation*

$$\partial_\tau L = g(\partial_\sigma R)(\partial_\sigma L), \quad L(\sigma,\omega,0) = L(\sigma,\omega). \tag{3.1.21}$$

Preuve.

(a) En notant le terme sous-principal de u_ℓ : $\overline{\overline{u}}_\ell = \chi\ a_\ell^2(r-t,\omega)t^{\frac{1}{2}(\ell-3)}$

avec, $a_1^2 = 0$, $a_2^2 = L$,

le terme sous-principal de Q_ℓ s'écrit alors

$$\begin{aligned}\overline{\overline{Q}}_\ell &= \sum_{\ell'+\ell''=\ell} \{g_{ij}^k \partial_k \overline{u}_{\ell'} \partial_{ij}^2 \overline{\overline{u}}_{\ell''} + g_{ij}^k \partial_k \overline{\overline{u}}_{\ell'} \partial_{ij}^2 \overline{u}_{\ell''}\} \\ &= \chi\ t^{\frac{1}{2}(\ell-5)} g \sum_{\ell'+\ell''=\ell} \{(a_{\ell'}^1)'(a_{\ell''}^2)'' + (a_{\ell'}^2)'(a_{\ell''}^1)''\},\end{aligned}$$

pour $\ell \geq 2$,

$$a_\ell^2 = \frac{g}{\ell-2}\{\sum_{\substack{\ell'<\ell'' \\ \ell'+\ell''=\ell}} (a_{\ell'}^1)'(a_{\ell''}^2)' + (a_{\ell''}^1)'(a_{\ell'}^2)' + (a_{\ell/2}^1)'(a_{\ell/2}^2)'\}.$$

(b) Soit $B(\sigma,\omega,\tau)$ la solution de

$$\partial_\tau B = gA'B', \quad B_2(\sigma,\omega,0) = B(\sigma,\omega),$$

où, A a été définie dans le lemme précédent.

et, $B = B_2 + \tau B_3 + ... + \tau^k B_{k+2} + ...$ tel que

$B_3 + ...k\tau^{k-1}B_{k+2}.... = g(A'_1 + ... + \tau^k A'_{k+1} + ...)(B'_2 + ... + \tau^j B'_{j+2} + ...)$,

par identification des deux membres, nous obtenons $(\ell-2)B_\ell = g \sum_{\ell'+\ell''=\ell} A'_{\ell'}B'_{\ell''}$.

d'où, l'écriture de $u^{II} - u^I$, le premier terme est étudié dans le lemme suivant :

Lemme 3.9.

La solution $S(\sigma,\omega,\tau)$ exprimée en (3.1.17) s'écrit

$$S(\sigma,\omega,\tau) = R(\sigma,\omega,\tau) + \varepsilon L(\sigma,\omega,\tau) + \varepsilon^2 \widetilde{S}(\sigma,\omega,\tau); \tag{3.1.22}$$

où, R et L sont définies par (3.1.20), (3.1.21) et (3.1.22),

et, $\widetilde{S}$ est intégrable en σ.

Preuve.

d'après,(3.1.20) et (3.1.22)

$$\begin{aligned}
\partial_\tau R &= \frac{g}{2}(\partial_\sigma R)^2, \\
&= \partial_\tau(R(\sigma,\omega,\tau)+\varepsilon L(\sigma,\omega,\tau)+\varepsilon^2\widetilde{S}(\sigma,\omega,\tau)) \\
&= \frac{g}{2}(\partial_\sigma R+\varepsilon\partial_\sigma L+\varepsilon^2\partial_\sigma\widetilde{S})^2 \\
&= \frac{g}{2}(\partial_\sigma R)^2 + +\varepsilon g(\partial_\sigma R)(\partial_\sigma L)+\varepsilon^2 g(\partial_\sigma R\partial_\sigma\widetilde{S}+\frac{1}{2}(\partial_\sigma L)^2) \\
&\quad +\varepsilon^3 g\partial_\sigma L\partial_\sigma\widetilde{S}+\frac{g}{2}\varepsilon^4(\partial_\sigma\widetilde{S})^2
\end{aligned}$$

soit, $\partial_\tau\widetilde{S} = g(\partial_\sigma R+\varepsilon\partial_\sigma L)\partial_\sigma\widetilde{S}+\varepsilon^2\frac{g}{2}(\partial_\sigma\widetilde{S})^2+g(\partial_\sigma R)(\partial_\sigma L)$, $\widetilde{S}(\sigma,\omega,\tau)=0$,

or, $R(\sigma,\omega,\tau)$ se comporte comme un symbole d'ordre $-\frac{1}{2}$ en σ,

et, $\partial_\sigma L\in L^2(\mathbb{R})$ [1];

donc, $\widetilde{S}$ est intégrable en σ..

Estimation de l'erreur en zone de transition et choix de λ.

Pour $\varepsilon^{-\lambda}\leq t\leq 2\ \varepsilon^{-\lambda}$,on pose

$u=u_a=\theta(t\varepsilon^\lambda)u^I+(1-\theta(t\varepsilon^\lambda))u^{II}$.

Lemme 3.10.

En zone de transition,on a, si $\dfrac{3}{2}\leq\lambda\leq\dfrac{14}{9}$,

$$\left|\partial^\alpha_{x,t,\omega}\ J_a\right|_0\leq\frac{C_\alpha\varepsilon}{t^2}. \tag{3.1.23}$$

Preuve.

On écrit

$$\begin{aligned}
J_a &= \theta\Box u^I + (1-\theta)\Box u^{II} + 2\varepsilon^{\lambda}\theta'(u^I - u^{II}) + 2\varepsilon^{2\lambda}\theta''(u^I - u^{II}) \\
&\quad + g^k_{ij}\theta^2\partial_k u^I\partial^2_{ij}u^I + g^k_{ij}(1-\theta)^2\partial_k u^{II}\partial^2_{ij}u^{II} \\
&\quad + \theta(1-\theta)g^k_{ij}(\partial_k u^I\partial^2_{ij}u^{II} + \partial_k u^{II}\partial^2_{ij}u^I) + r.
\end{aligned}$$

où, r regroupe les termes contenant au moins une dérivée de θ,

donc,

$$\begin{aligned}
J_a &= \theta J^I_a + (1-\theta)J^{II}_a + r + (2\varepsilon^{\lambda}\theta' + \varepsilon^{2\lambda}\theta'')(u^I - u^{II}) + \theta(1-\theta)\{g^k_{ij}\partial_k u^I\partial^2_{ij}u^I \\
&\quad + g^k_{ij}\partial_k u^{II}\partial^2_{ij}u^{II} - g^k_{ij}(\partial_k u^I\partial^2_{ij}u^{II} + \partial_k u^{II}\partial^2_{ij}u^I)\} + \theta(\theta-1)g^k_{ij}(\partial_k u^I\partial^2_{ij}u^{II} + \partial_k u^{II}\partial^2_{ij}u^I)
\end{aligned}$$

en estimant chacun des termes, il vient

$$\begin{aligned}
|\partial^{\alpha}\ J_a|_0 &\leq C\{\frac{\varepsilon^3}{1+t} + \varepsilon^5(1+t)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^8(1+t)^{\frac{5}{2}} + \frac{\varepsilon}{(1+t)^2} + \frac{\varepsilon^{2+\lambda}}{(1+t)^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \varepsilon^{\lambda+8}(1+t)^{\frac{7}{2}} + \varepsilon^{16}(1+t)^{6.5}\} \\
&\leq C\frac{\varepsilon}{(1+t)} \quad \text{pour } \frac{3}{2} \leq \lambda \leq \frac{14}{9}, \qquad (3.1.24)
\end{aligned}$$

c'esi ainsi qu'on a fixé $\lambda = \dfrac{14}{9}$.

Le recollement entre zones intérieure et extérieure en péride II.

d'après la proposition 3.4,

$$\begin{aligned}
u_a^e &= \frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}} F(r-t,\omega,\frac{1}{r},\tau,\zeta), \\
F &= f_0 + \tau G_0 + O(z), \\
\upsilon &= f_0 + \tau G_0 \text{ est solution de } \dot{\upsilon} = \frac{g}{2}(\partial_\sigma \upsilon)^2,\ \upsilon(\sigma,\omega,0,\zeta) = f_0(\sigma,\omega,\zeta). \qquad (3.1.25)
\end{aligned}$$

et f_0 satisfait par construction

$$f_0 = \varphi_0 + O(\zeta) = R(\sigma,\omega) + \varepsilon L(\sigma,\omega) + \sum_{2\leq \ell\leq k} \varepsilon^\ell L_\ell^0(\sigma,\omega,0) + O(\zeta),$$

on en déduit

Lemme 3.11.

Pour $u_a = u_a^{II} = \theta u_a^i + (1-\theta) u_a^e$ *on a*

$$\left|\partial_{x,t,\omega}^\alpha\ J_a\right|_0 \leq C_\alpha \frac{\varepsilon \log t}{t^2}. \qquad (3.1.26)$$

Lemme 3.12.

Pour $0 < A < A_0$ et ε petit, on a, pour $t \leq \dfrac{A^2}{\varepsilon^2}$,

$$\left|\partial^{\alpha}_{x,t,\omega}\ \nabla(u - u_a)\right|_0 \leq C_\alpha \varepsilon^{\frac{23}{9}} \left|\log t\right| \tag{3.1.27}$$

3.1.3 Construction en période III.

l'hypothèse suivante de non dégénérescence faite sur R et g

$$(\mathrm{ND})\left\{\begin{array}{c} \text{il existe un point } (\sigma_0, \omega_0) \text{ et un nombre } \blacksquare \geq 2 \text{ tels que} \\ (i) \quad -g(\omega_0)\partial^2_\sigma R(\sigma_0, \omega_0) < 0, \\ (ii) \quad \forall A, \exists C > 0 \text{ avec, pour } |\sigma - \sigma_0| + |\omega - \omega_0| \leq A, \\ -g(\omega)\partial^2_\sigma R(\sigma, \omega) \geq -g(\omega_0)\partial^2_\sigma R(\sigma_0, \omega_0) + C\left(|\sigma - \sigma_0| + |\omega - \omega_0|\right)^{\blacksquare}, \end{array}\right.$$

entraîne que la solution $u_a^{II,i}$n'explose pas à l'intérieur,

on prend donc, $u_a^{III,i} = u_a^{II,i}$.

Nous abordons l'étude en zone extérieure pour τ s'approchant de la valeur critique $\tau_*(\varepsilon)$.

Pour $0 < A < A_0$ on a $z = \dfrac{\varepsilon^2}{r^2}(1 + \dfrac{\sigma\varepsilon^2}{\tau^2})^{-1}$.

Lemme 3.13.

Pour toute fonction F *, en posant* $u = \dfrac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}} F(r - t, \omega, \tau)$ *, on a :*

$$
\begin{aligned}
\Box u \ + g\partial u\partial^2 u \ &= \ \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{rt}}\{-\dot{F}' + gF'F'' + \varepsilon^2(-\frac{1}{\tau^2}(\frac{1}{4}+\partial_\omega^2))F - \frac{\sigma g}{2\tau^2}F'F'' - \frac{\dot{F}}{4\tau^2} + \frac{\ddot{F}}{4\tau} \\
&\quad + g_{ij}^k(\omega_k F' A_{ij}F' + \omega_i\omega_j F'' A_k F)) + \varepsilon^4 R(F)\}
\end{aligned}
$$

où, les A_k, A_{ij} sont des opérateurs différentiels en $\partial_\omega, \partial_\sigma$ d'ordre 1 à coefficients réguliers en $(\omega, \tau, \varepsilon^2\sigma)$

et R est une expression quadratique de dérivées de F à préciser.

Preuve.

On sait que

$$
\Box u \ = \frac{-\varepsilon}{r^{\frac{5}{2}}}(\frac{1}{4}+\partial_\omega^2)F - \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{rt}}(\dot{F}' + \frac{\dot{F}}{4r}) + -\frac{\varepsilon^3}{\sqrt{r}t}\frac{\ddot{F}}{4},
$$

et pour $i \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\partial}_i F \ &= \ r^{\frac{1}{2}}\partial_i \frac{F}{r^{\frac{1}{2}}} \\
&= \ \omega_i F' + \frac{\varepsilon^2}{\tau^2}(\frac{t}{r})(\frac{-\omega_i}{2}F + \omega_i\partial_\omega F),
\end{aligned}
$$

$$
\widetilde{\partial}_0 F = \partial_0 F = -F' + \tfrac{\varepsilon^2}{2\tau}\dot{F},
$$

on prend,

$\widetilde{\partial}_{ij}F = \omega_i\omega_j F'' + \varepsilon^2 A_{ij}F' + \varepsilon^4 B_{ij}F$ de telle sorte que les termes quadratiques $g\partial u\partial^2 u$ s'écrivent

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon^2} g\partial u\partial^2 u &= g_{ij}^k \frac{1}{r}\widetilde{\partial}_k F \widetilde{\partial}_{ij}^2 F \\
&= \frac{1}{r}\{gF'F'' + \varepsilon^2 g_{ij}^k (A_k F\omega_i\omega_j F'' + \omega_k F' A_{ij} F') \\
&\quad +\varepsilon^4 g_{ij}^k (A_k F A_{ij} F' + \omega_k F' B_{ij} F) + \varepsilon^6 g_{ij}^k A_k F B_{ij} F\},
\end{aligned}$$

on obtient le résultat, avec

$$\begin{aligned}
E(F) &= (\frac{t}{r})^{\frac{1}{2}}\{g_{ij}^k (A_k F A_{ij} F' + \omega_k F' B_{ij} F) + \varepsilon^2 g_{ij}^k A_k F B_{ij} F\} \\
&\quad + * \, g_{ij}^k (\omega_k F' A_{ij} F' + \omega_i\omega_j F'' A_k F) + \sum_{|\alpha|\leq 2} *\partial_{\sigma,\omega,\tau}^{\alpha} F
\end{aligned}$$

*: désigne les coefficients réguliers en (σ,ω,τ).

On notera dans la suite

$$\begin{aligned}
E(F) &= -\frac{1}{\tau^3}\{-\dot{F}' + gF'F'' + \varepsilon^2(-\frac{1}{\tau^2}(\frac{1}{4}+\partial_\omega^2))F - \frac{\sigma g}{2\tau^2}F'F'' - \frac{\dot{F}}{4\tau^2} + \frac{\ddot{F}}{4\tau} \\
&\quad + g_{ij}^k (\omega_k F' A_{ij} F' + \omega_i\omega_j F'' A_k F)) + \varepsilon^4 R(F)\}. \qquad (3.1.28)
\end{aligned}$$

Si on désigne par $F_A(\sigma,\omega)$ la valeur prise en $\tau = A$ par $\dfrac{r^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon} u_a^e$, on note alors

F la solution de

$$\partial_\tau F = \frac{g}{2}(\partial_\sigma F)^2, \qquad F(\sigma,\omega,A) = F_A(\sigma,\omega)\ , \qquad (3.1.29)$$

G la solution de

$$\partial_\tau G - g\partial_\sigma F \partial_\sigma F = \int_M^\sigma E(F)ds, \quad G(\sigma,\omega,A)\ , \tag{3.1.30}$$

Enfin, posons

$$u_a = u_a^{III,e} = \frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}}(F(r-t,\omega,\tau) + \varepsilon^2 G(r-t,\omega,\tau)). \tag{3.1.31}$$

estimation de l'erreur :

Pour $\tau = A$, on estime le raccord entre périodes I et II par le lemme ci-après

Lemme 3.14.

La fonction S définie précédemment vérifie

i) $F_A(\sigma,\omega) = S\ (\sigma,\omega,A) + O(\varepsilon^2 \log\varepsilon),$ (3.1.32)

ii) pour $\tau = A\ , \left|\left|\partial^\alpha_{x,\omega}(\partial_t^+)(u-u_a)\right|\right|,$ (3.1.33)

où, ∂_t^+ *désigne la dérivée à droite en* $t = \dfrac{A^2}{\varepsilon^2}.$

Preuve.

(i) C'est l'inégalité.(3.1.29)

(ii) On note $u_a^I = \dfrac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}}F_\pm(r-t,\omega,\tau)$ les solutions en périodes I et II (pour $t \leq \dfrac{A^2}{\varepsilon^2}$ et $t \geq \dfrac{A^2}{\varepsilon^2}$ respectivement),

exprimées en variables (σ,ω,τ) au voisinage de $\tau = A$.

Pour $\tau = A$, on a

$$\begin{aligned}
\partial_t^+(u-u_a) &= \partial_t u - \frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}}(-F'_+ + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}\dot{F}_+),\\
\partial_t^-(u-u_a) &= \partial_t u - \frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}}(-F'_- + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}\dot{F}_-).
\end{aligned}$$

D'après (3.1.28) et (3.1.29)

$$\begin{aligned}
\partial_t^+(u-u_a) - \partial_t^-(u-u_a) &= \frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}}\left((F_+ - F_-)' - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}(\overbrace{F_+ - F_-}^{\cdot})\right)\\
&= \frac{\varepsilon^2}{2\sqrt{rt}}(\overbrace{F_+ - F_-}^{\cdot}).
\end{aligned}$$

Or, si une fonction régulière F satisfait une équation du type

$$-\dot{F}' + gF'F'' + \varepsilon^2\,[\text{dérivées de } F] + ... = r,$$

La donnée $F \underset{\tau=A}{|}$ détermine $\dot{F} \underset{\tau=A}{|}$ à une erreur près de l'ordre de r.

Pour F_-, r est arbitrairement petit, tandis que $r = O(\varepsilon^4)$ pour F_+;

donc

$$(\overbrace{F_+ - F_-}^{\cdot}) = O(\varepsilon^4).$$

Comme d'autre part, on sait d'après [1] que $\left|\left|\partial^\alpha_{x,\omega}(\partial_t^-)^k(u-u_a)\right|\right|_0 \leq C_\alpha \varepsilon^p$,on obtient (ii).

3.2 Estimation des dérivées de F, G, u_a.

Afin d'estimer les dérivées de F, G, u_a , on considère

$$\upsilon = -gF' \text{ solution de l'équation de Burger.} \tag{3.1.34}$$

3.2.1 Solutions de l'équation de Burger

Lemme 3.15

Soit $\upsilon = \upsilon(\sigma, \omega, \tau)$ la solution de l'équation de Burger

$$\partial_\tau + \upsilon\ \partial_\sigma \upsilon = 0, \qquad \upsilon(\sigma, \omega, 0) = w(\sigma, \omega), \tag{3.1.35}$$

où, $\omega \in C^\infty$ est supposée telle que $\underset{\sigma,\omega}{inf}\ \partial_\sigma w = \dfrac{-1}{\tau*} <\ 0$ pour $0 \leq \tau < \tau_*$,

on peut définir $X = X(\sigma, \omega, \tau)$ et $D = D(X, \omega, \tau)$ par

$$X + \tau w(X, \omega) = \sigma, \qquad D(X, \omega, \tau)\ =\ 1 + \tau\ (\partial_\sigma w)(X, \omega), \tag{3.1.36}$$

Alors toute dérivée $\partial_\sigma^i \partial_\omega^j \partial_\tau^l \upsilon (i + j + \ell = k)$ est de la forme

$$\partial_\sigma^i \partial_\omega^j \partial_\tau^l \upsilon(\sigma, \omega, \tau) = \sum_{\substack{0 \leq 2p \leq k-1+q \\ q \leq k-1}} a_{pq}(X, \omega, \tau) \frac{(\partial_\sigma^2 w)^q}{D^{k+p}}(X, \omega, \tau), \tag{3.1.37}$$

pour certains coefficients a_{pq}réguliers.

En particulier,

$$\left|\, \partial_\sigma^i \partial_\omega^j \partial_\tau^\ell \upsilon(\sigma,\omega,\tau)\right| \leq \frac{C}{D^{\frac{3k}{2}-\frac{1}{2}}}. \tag{3.1.38}$$

Preuve.

(a) On sait que que

$$\upsilon(\sigma,\omega,\tau) = w(X,\omega), \qquad [5] \tag{3.1.39}$$

pour $k=1$,nous avons d'après (3.1.35) et (3.1.38)

$\partial_\sigma \upsilon = (\partial_\sigma w)\partial_\sigma X,$

$\partial_\omega \upsilon = (\partial_\sigma w)\partial_\omega X + \partial_\omega w,$

$\partial_\tau \upsilon = (\partial_\sigma w)\partial_\tau X,$

avec,

$$\partial_\sigma X = \frac{1}{D}, \qquad \partial_\omega X = -\tau\frac{\partial_\omega w}{D}, \qquad \partial_\tau X = -\frac{w}{D},$$

ainsi, le lemme est prouvé pour $j=\ell=0$.

(b) Supposons (3.1.36) vraie à l'ordre $k+p$,et montrons la à l'ordre $k+p+1$,en dérivant le terme

$a_{pq}(\partial_\sigma^2 w)^q/\ D^{k+p}$ (en σpar exemple),on obtient

$$\partial_\sigma \left\{ a_{pq}(X,\omega,\tau)\frac{(\partial_\sigma^2 w)^q}{D^{k+p}} \right\}\ \partial_X a_{pq}\frac{(\partial_\sigma^2 w)^q}{D^{k+p+1}} + \frac{a_p}{D^{k+p}} q(\partial_\sigma^2 w)^{q-1}\frac{(\partial_\sigma^3 w)}{D} - (k+p)a_{pq}\frac{(\partial_\sigma^2 w)^q}{D^{k+p+1}}(\partial_\sigma^2 w)\frac{1}{D}.$$

d'où (3.1.36) par récurrence.

Finalement, montrons l'inégalité (3.1.37), pour cela, on utilise l'inégalité suivante

si $D \geq 0$ alors $|\nabla_{x,\omega} D| \leq C D^{\frac{1}{2}}$.

d'après (3.1.35), on a

$$\begin{aligned}
|\nabla_{x,\omega} D| &\leq \tau(\left|\partial_\sigma^2 \omega\right| + |\partial_\omega \partial_\sigma \omega|) \\
&\leq Cte\ D^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{Cte\ D^{\frac{1}{2}}}{D^{k+p}} \\
&\leq \frac{Cte\ D^{\frac{1}{2}}}{D^{\frac{3k-1}{2}+\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

L'équation de Burger inhomogène.

Lemme 3.16.

Soit $h = h(\sigma, \omega, \tau)$ la solution de l'équation

$$\partial_\tau h + \upsilon\ \partial_\sigma h + h \partial_\sigma \upsilon = \Psi(X, \omega, \tau), \qquad h(\sigma, \omega, 0) = W(\sigma, \omega), \tag{3.1.40}$$

où, υ et X sont définis au lemme 3.15, Ψ est donnée.

Alors, pour $\tau < \tau_*$, toute dérivée $\partial_\sigma^i \partial_\omega^j \partial_\tau^l h (i + j + \ell = k)$ est de la forme

$$\partial_\sigma^i \partial_\omega^j \partial_\tau^\ell h(\sigma, \omega, \tau) = \sum_{\substack{\ell'' \leq k \\ \ell' \leq 2(k-\ell'') \\ q \geq 2\ell' - 3(k-\ell'')}} *(X, \omega, \tau) \frac{(\partial_\sigma^2 W)^q}{D^{1+\ell'+\ell''}} \partial_{X,\omega,\tau}^{\ell''} C, \tag{3.1.41}$$

où, $C(X,\omega,\tau)=\int\limits_0^\tau (D\Psi)(X,\omega,s)ds.$

En particulier,

$$\left|\ \partial_\sigma^i \partial_\omega^j \partial_\tau^\ell h\right| \le C \sum_{\ell''\le k} \frac{1}{D^{1+\frac{3k-\ell''}{2}}} \left|\partial_{X,\omega,\tau}^{\ell''} C\right|. \qquad (3.1.42)$$

Preuve.

en posant $h(\sigma,\omega,\tau)=H(X,\omega,\tau)$,

l'équation (3.1.39) s'écrit

$$\partial_\tau H + \frac{\partial_\sigma w}{D} H = \Psi, \qquad (3.1.40')$$

en faisant le changement $H=\dfrac{C}{D}$, (3.1.40') s'écrit encore

$$\partial_\tau C = D\Psi,$$

où, $C=\int\limits_0^\tau D\Psi ds,$

en raisonnant de la même manière que précédemment, nous obtenons

$\partial_\sigma h = \dfrac{1}{D}\partial_X C \dfrac{1}{D} - \dfrac{C\tau}{D^3}\partial_\sigma^2 w,$

$\partial_\omega h = \dfrac{1}{D}(\partial_X C \partial_\omega X + \partial_\omega C) - \dfrac{C}{D^2}(\partial_X D \partial_\omega X + \partial_\omega D),$

ainsi le leme est prouvé pour $k=1$.

Plus généralement, si l'on dérive (3.1.40) par rapport à σ, on obtient

$$*\frac{(\partial_\sigma^2 w)^q \partial^{\ell''} C}{D^{2+\ell'+\ell''}} + *q\frac{(\partial_\sigma^2 w)^{q-1}}{D^{2+\ell'+\ell''}}\partial^{\ell''} C + *\frac{(\partial_\sigma^2 w)^{q+1}}{D^{3+\ell'+\ell''}}\partial^{\ell''} C + *\frac{(\partial_\sigma^2 w)^q}{D^{2+\ell'+\ell''}}\partial^{\ell''+1} C$$

comme, $q \geq 2\ell' - 3(k - \ell'')$, (3.3.13) est prouvée.

Estimation de F et G.

D'après (3.1.28), (3.1.29) et (3.1.30), nous avons

$v = -gF'$,

$h = -gG'$,

$w = -gF'_A$,

Oon note par $\widetilde{X}$ et $\widetilde{D}$ les fonctions définies au lemme 3.15.

τ_* est le temps de vie pour w.

Pour $\tau < \tau_*(A, \varepsilon)$, on pose

$X(\sigma, \omega, \tau) = \widetilde{X}(\sigma, \omega, \tau - A)$, $D(\sigma, \omega, \tau) = 1 + (\tau - A)(\partial_\sigma w)(x, \omega)$.

Lemme 3.17.

Pour $\tau < A + \tau_*(A, \varepsilon)$, on a les inégalités

(i) $|F| + |\nabla_{\sigma,\omega,\tau} F| \leq C,$ (3.1.43)

(ii) $\left|\partial^\alpha_{\sigma,\omega,\tau} F\right| \leq C_\alpha \left| D(X, \omega, \tau)^{\frac{3k}{2} - \frac{1}{2}} \right|$ *pour* $|\alpha| = k \geq 1.$ (3.1.44)

Preuve.

On démontre (i) et (ii) simultanément,

(a) si $i \geq 1 \quad \partial^i_\sigma \partial^j_\omega F = \partial^j_\omega \partial^{i-1}_\sigma (-\dfrac{v}{g}),$

en appliquant (3.1.37), nous obtenons

$$|\partial^i_\sigma \partial^j_\omega F| \leq \frac{1}{g} |\partial^j_\omega \partial^{i-1}_\sigma v| \leq \frac{C}{D} \leq C.$$

D'autre part, si $\ell \geq 1, \partial_\tau F = \dfrac{v^2}{2g}$,on a

$$(\partial^i_\sigma \partial^j_\omega \partial^\ell_\tau F) = (\partial^i_\sigma \partial^j_\omega \partial^{\ell-1}_\tau)(\frac{v^2}{2g}) = \sum_{k'+k'' \leq k-1} * \partial^{k'} v \partial^{k''} v,$$

en appliquant l'inégalité (3.1.38),nous avons le résultat.

(b) Comme, $F(\sigma,\omega,\tau) = -\frac{1}{g}\int\limits_M^\sigma v(s,\omega,\tau)ds$,

on pose le changement de variable $x = X(s,\omega,\tau)$, $dx = \frac{ds}{D}$,il en rssort

$$F(\sigma,\omega,\tau) = -\frac{1}{g}\int\limits_M^X w(\sigma,\omega)D(X,\omega,\tau)dx,$$

par suite,

$$\begin{aligned}
\partial_\omega(gF(\sigma,\omega,\tau)) &= -(Dw)(X,\omega,\tau)\partial_\omega X - \int\limits_M^X \partial_\omega(wD)dx \\
&= \tau(w\partial_\omega w)(X,\omega,\tau) - \int\limits_M^X \partial_\omega(wD)dx,
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
\partial_\omega^2(gF(\sigma,\omega,\tau)) &= \tau\partial_\omega(w\partial_\omega w)(X,\omega,\tau) - \partial_\omega\left(\int\limits_M^X \partial_\omega(wD)dx\right) \\
&= \tau\partial_\omega(w\partial_\omega w)(X,\omega,\tau) - \partial_\omega(wD)\partial_\omega X - \int\limits_M^X \partial_\omega^2(wD)dx,
\end{aligned}$$

or, $\partial_\omega X = -\tau\frac{\partial_\omega w}{D}$

donc,

$$\partial_\omega^2(gF(\sigma,\omega,\tau)) = \tau\partial_\omega(w\partial_\omega w) - \tau^2\partial_X(w\partial_\omega w)\frac{\partial_\omega w}{D} + \tau\partial_\omega(wD)\frac{\partial_\omega w}{D} - \int\limits_M^X \partial_\omega^2(wD)dx,$$

et le résultat découle des lemmes 3.14 et 3.15.

(c) On sait que,

$$
\begin{aligned}
E(F) \quad = \quad & -\frac{1}{\tau^3}(\frac{1}{4}+\partial_\omega^2)F+\{-\dot{F}'+gF'F''+\varepsilon^2[-\frac{1}{\tau^3}(\frac{1}{4}+\partial_\omega^2)F-\frac{\sigma g}{2\tau^2}F'F'' \\
& -\frac{\dot{F}'}{4\tau^2}+\frac{\ddot{F}}{4\tau}+g_{ij}^k(\omega_k F'A_{ij}F'+\omega_i\omega_j F''A_kF)] \\
& +\varepsilon^4(\frac{t}{r})^{\frac{1}{2}}[g_{ij}^k(A_kFA_{ij}F'+\omega_kF'B_{ij}F)+\varepsilon^2 g_{ij}^k A_kFB_{ij}F] \\
& +*\,g_{ij}^k(\omega_kF'A_{ij}F'+\omega_i\omega_jF''A_kF)+\sum_{|\alpha|\le 2}*\partial_{\sigma,\omega,\tau}^\alpha F\},
\end{aligned}
$$

comme, $\upsilon=-gF'$, $h=-gG'$

on obtient après arrangement des termes

$E(F)=-\frac{1}{\tau^3}(\frac{1}{4}+\partial_\omega^2)F-\frac{\sigma g}{2\tau^2}\upsilon\upsilon'+*\upsilon^2+*\upsilon^2\upsilon'+*\upsilon\nabla\upsilon+*\upsilon'\nabla F,$

par ailleurs, en posant dans (3.1.29) $h=-gG'$,on obtient l'équation (3.1.40) avec

$\Psi(X,\omega,\tau)=-gE(F)$

de sorte que $D\Psi$ soit une fonction régulière de (X,ω,τ) et C,

il s'ensuit

$$
|\ \partial_\sigma^i\partial_\omega^j\partial_\tau^\ell h|\le C\sum_{\substack{\ell''\le k\\ \ell''=0}}\frac{1}{D^{1+\frac{3k-\ell''}{2}}}\left|\partial_{X,\omega,\tau}^{\ell''}C\right|\le C\frac{1}{D^{1+\frac{3k}{2}}},
$$

donc,

$$
|\ \partial_\sigma^i\partial_\omega^j\partial_\tau^{\ell-1}h|\le C\frac{1}{D^{\frac{3k}{2}-1}},
$$

et

$$G(\sigma,\omega,\tau) \leq -\frac{1}{g}\int_M^\sigma \frac{C}{D}(X,\omega,\tau)ds$$
$$\leq -\frac{1}{g}\int_M^X C(x,\omega,\tau)dx,$$

ce qui entraîne,

$$\partial_\omega(gG) = \tau\partial_\omega w\frac{C}{D} - \int_M^X \partial_\omega C dx.$$

Estimation de $u_a$et de ses dérivées

Comme $u_a = \frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}}(F+\varepsilon^2 G)$,

et dérivéées de F dominent celles de G si $\frac{\varepsilon^2}{D^{\frac{3}{2}}} \leq C$,

de plus, $\partial_i(F(r-t,\omega,\tau)) = F'\omega_i + \partial_\omega F O(\varepsilon^2)$, $\quad \partial_t(F(r-t,\omega,\tau)) = -F' + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}\dot{F}$,

pour évaluer u_a, il suffit de considérer F et de négliger ω et τ.

Lemme 3.18.

Pour $\tau < A + \tau_*(A,\varepsilon)$, on a les estimations

(i) $|u_a| + |\nabla_{x,t,\omega} u_a| \leq C\varepsilon^2$,

(ii) pour $|\alpha| = k \geq 2$, $\left|\partial^\alpha_{x,t,\omega} u_a\right| \leq C_\alpha \frac{\varepsilon^2}{D(X,\omega,\tau)^{\frac{3k}{2}-\frac{1}{2}}}$.

Preuve.

(i) voir [25].

(ii) conséquence des lemmes 3.14. et 3.15.

3.2.2 Estimation de J_a et de ses dérivées.

Lemme 3.19.

On a pour $\tau < A + \tau_*(A, \varepsilon)$,

(i) $|J_a| \leq C\dfrac{\varepsilon^8}{D^{\frac{7}{2}}}$,

(ii) $|\nabla_x J_a| + |\partial_\omega J_a| \leq C\dfrac{\varepsilon^8}{D^5}$,

(iii) $\left|\nabla_x^2 J_a\right| + |\partial_\omega \nabla_x J_a| + |\partial_\omega^2 J_a| \leq C\dfrac{\varepsilon^8}{D^{\frac{13}{2}}}$.

Preuve.

d'après (3.1.28) et le choix de F et G,on a

$$J_a = \frac{\varepsilon^6}{\sqrt{rt}}\{+gG'G'' - \frac{1}{\tau^3}(\tfrac{1}{4} + \partial_\omega^2)G - \frac{\sigma g}{2\tau^2}(F'G'' + F''G') - \frac{\dot{G}}{4\tau^2} + \frac{\ddot{G}}{4\tau}$$
$$+g_{ij}^k(\omega_k F' A_{ij} G' + \omega_k G' A_{ij} F' + \omega_i\omega_j F'' A_k G + \omega_i\omega_j G'' A_k F)$$
$$+Q(F + \varepsilon^2 G, F + \varepsilon^2 G) + \varepsilon^2(\frac{-\sigma g}{2\tau^2}G'G'' + g_{ij}^k(G' A_{ij} G' + \omega_i\omega_j G'' A_k G))\}.$$

3.2.3 Non dégénérescence et estimation L^2 des erreurs.

Avec l'hypothèse de non dégénéréscence (faite sur R et g), (ND) il existe un point (σ_0, ω_0) et un nombre $\blacksquare \geq 2$ tels que :

(i) $-g(\omega_0)\partial_\sigma^2 R(\sigma_0, \omega_0) < 0$,

(ii) $\forall A, \exists C > 0$ avec, pour $|\sigma - \sigma_0| + |\omega - \omega_0| \leq A$,

$$-g(\omega)\partial_\sigma^2 R(\sigma, \omega) \geq -g(\omega_0)\partial_\sigma^2 R(\sigma_0, \omega_0) + C(|\sigma - \sigma_0| + |\omega - \omega_0|)^{\blacksquare}.$$

On peut préciser le temps de vie de $\tau_*(A, \varepsilon)$ de la solution de l'équation (3.1.29) et une borne inférieure au dénominateur D des estimations des lemmes 3.16 et 3.17.

Lemme 3.20.

Sous l'hypothèse (ND), il existe C tel que, en posant

$$\widetilde{\tau} = \widetilde{\tau}(\varepsilon) = \tau_*(\varepsilon) - C\varepsilon^{\frac{\blacksquare}{\blacksquare-1}} - C\varepsilon^2 \left|\log \varepsilon\right|,$$

(i) $\tau_*(A, \varepsilon) \geq \widetilde{\tau} - A$,

(ii) $\dfrac{C}{(\widetilde{\tau} - \tau)} \leq \sup_{\sigma,\omega} \left|gF''(\sigma, \omega, \tau)\right| \leq C + \dfrac{1}{(\widetilde{\tau} - \tau)}$,

(iii) *il existe une fonction $\sigma_0(\varepsilon)$ et une constante $C_1 > 0$ telles que*

$$D(x, \omega, \tau) \geq C(\widetilde{\tau} - \tau + C_1(|\omega - \omega_0| + |x - \sigma_0(\varepsilon)|)^{\blacksquare}).$$

Preuve.

D'après l'hypothèse (ND)

$$-gR''(\sigma, \omega) \geq \ -gR''(\sigma_0, \omega_0) + Cd^{\blacksquare},$$

où, $d = |\sigma - \sigma_0| + |\omega - \omega_0|$,

ce qui implique,

$$\begin{aligned} -g(R'' + \varepsilon L'')(\sigma, \omega) \ &\geq \ -g(R''(\sigma_0, \omega_0) + \varepsilon L''(\sigma_0, \omega_0)) \\ &\quad -C'\varepsilon(|\sigma - \sigma_0| + |\omega - \omega_0|) + Cd^{\blacksquare}, \\ &\geq \ -g(R''(\sigma_0, \omega_0) + \varepsilon L''(\sigma_0, \omega_0)) - C''\varepsilon^{\frac{\blacksquare}{\blacksquare-1}} + \frac{C}{2}d^{\blacksquare}, \end{aligned}$$

on considère le difféomorphisme ϕ tel que ϕ^{-1} corresponde au déplacement sue les caractéristiques de l'équation de Burger à ω fixé entre $\tau = 0$ et $\tau = A$,vérifiant : $\phi^{-1}(\sigma_0, \omega_0) = (\sigma_0(\varepsilon), \omega_0)$.

Les propriétés élémentaires de l'équation de Burger donnent

$$\begin{aligned} -gS''(\sigma, \omega, A) &= \left(A + \frac{1}{-g(R'' + \varepsilon L'')(\phi(\sigma, \omega))} \right)^{-1} \\ &\geq \left(A + \frac{1}{-g(R'' + \varepsilon L'')(\sigma_0, \omega_0) + \frac{C}{2} \left| \phi(\sigma, \omega) - (\sigma_0, \omega_0) \right|} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

comme ϕ est un difféomorphisme et $A < A_{0,}$

$|\phi(\sigma, \omega) - (\sigma_0, \omega_0)| \geq C\widetilde{d}$,

où, $\widetilde{d} = |\omega - \omega_0| + |\sigma - \sigma_0(\varepsilon)|$,

donc, $\exists C_1 > 0$ tel que

$$-gS''(\sigma, \omega, A) \geq \left(A + \frac{1}{-g(R'' + \varepsilon L'')(\sigma_0, \omega_0)} \right)^{-1} - C\varepsilon^{\frac{\blacksquare}{\blacksquare-1}} + C_1 \widetilde{d}^{\blacksquare},$$

Par ailleurs, S' est une dérivée de S satisfaisant une équation de Burger,

on pose alors,

$$A_0 = \frac{1}{g(\omega_0) \partial_\sigma^2 R(\sigma_0, \omega_0)}, \; A_1 = -A_0^2 g(\omega_0) \partial_\sigma^2 L(\sigma_0, \omega_0),$$

et, $\tau_* = \tau_*(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1$.

Compte tenu de l'hypothèse de non dégénérescence ,

A_0: le temps de vie de S pour $\varepsilon = 0$,

$\tau_*(\varepsilon)$: approche le temps de vie de S à $O(\varepsilon^2)$,

il vient, $\dfrac{1}{g(R'' + \varepsilon L'')(\sigma_0, \omega_0)} = A_0 + \varepsilon A_1 + O(\varepsilon^2)$,

d'après le lemme 3.14.(i), $F_A(\sigma, \omega) = S\ (\sigma, \omega, A) + O(\varepsilon^2 \log \varepsilon)$,

ce qui entraîne

$$\begin{array}{rcl} -gF_A''(\sigma, \omega) & \geq & \dfrac{-1}{-A + A_0 + \varepsilon A_1} - C\varepsilon^{\text{[redacted]}} - C\varepsilon^2 \left|\log \varepsilon\right| + C_1 \widetilde{d}^{\text{[redacted]}} \\ & \geq & \dfrac{1}{A - \tau_*} + O(\varepsilon^2 \left|\log \varepsilon\right|), \end{array}$$

il en découle, $\tau_*(A, \varepsilon) = \inf \dfrac{1}{gF_A''} \geq \widetilde{\tau} - A$,

et, $\sup\limits_{\sigma,\omega} |gF''| \leq$cste $+ \dfrac{1}{\tau_*(A, \varepsilon) - (\tau - A)}$,

par suite,

$$\begin{array}{rcl} D(x, \omega, \tau) & = & 1 - (\tau - A) gF_A''(x, \omega) \\ & \geq & \text{cste} \left(\tau_* - \tau - C\varepsilon^{\text{[redacted]}} - C\varepsilon^2 \left|\log \varepsilon\right| + C_1 \widetilde{d}^{\text{[redacted]}}\right). \end{array}$$

Lemme 3.21.

Il existe $\nu_1 > 0$ tel que, pour $A \leq \tau < \widetilde{\tau}$, dans la zone extérieure on ait

(i) $|J_a|_0 \leq \dfrac{C\varepsilon^7}{(\widetilde{\tau} - \tau)^{3-\nu_1}}$,

(ii) $|\nabla J_a|_0 + |\partial_\omega J_a|_0 \leq \dfrac{C\varepsilon^7}{(\widetilde{\tau} - \tau)^{\frac{9}{2}-\nu_1}}$,

(iii) $\left|\nabla^2 J_a\right|_0 + |\partial_\omega \nabla J_a|_0 + |\partial_\omega^2 J_a|_0 \leq \dfrac{C\varepsilon^7}{(\widetilde{\tau} - \tau)^{6-\nu_1}}$.

Preuve.

On suppose que le fonction $f(\sigma, \omega, \tau) \geq 0$ remplisse la condition

$f(\sigma, \omega, \tau) \leq \dfrac{1}{D(X, \omega, \tau)^{\lambda}}$,

il s'ensuit,

$$\begin{aligned} \int f^2(\sigma, \omega, \tau) d\sigma d\omega &\leq \int d\sigma \int \frac{d\omega}{D(X, \omega, \tau)^{2\lambda}} \\ &\leq \int d\omega \int \frac{d\sigma}{D(X, \omega, \tau)^{2\lambda}}, \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variables $x = X(s, \omega, \tau)$, $dx = \dfrac{ds}{D}$,

il en découle,

$$\int f^2(\sigma, \omega, \tau) d\sigma d\omega \leq \ cste \ \int d\omega \int \frac{dx}{(\widetilde{\tau} - \tau + C_1 \left| x - \sigma_0(\varepsilon) \right|^{\blacksquare})^{2\lambda - 1}},$$

or, $\left| x - \sigma_0(\varepsilon) \right|^{\blacksquare} \geq \widetilde{\tau} - \tau$,

entraîne,

$$\left(\int f^2(\sigma, \omega, \tau) d\sigma d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{cste}{(\widetilde{\tau} - \tau)^{\lambda - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\blacksquare}}},$$

et le lemmes est démontré pour $f = |J_a|$, $\lambda = \left\{ \frac{7}{2}, 5, \frac{13}{2} \right\}$, et $\nu_1 = \frac{1}{2\blacksquare}$.

La solution de la solution approchée u_a étant achevée,

avec $u_a = \dfrac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}} F(r - t, \omega, \tau) + \varepsilon^2 G(r - t, \omega, \tau)$,

F et G vérifient (3.1.28) et (3.1.29), nous pouvons à présent etimer la précision de l'approximation.

3.2.4 La précision de l'approximation.

Elle résulte des estimations de $u - u_a$ (en $t = \frac{A^2}{\varepsilon^2}$) et $J_a = \Box u_a + g\partial_k u_a \partial_{ij}^2 u_a$

(pour $A \leq \tau < \widetilde{\tau}$).

Par ailleurs, d'après ce qui précède la solution approchée u_a construite est en fait bien meilleure en zone extérieure D_e qu'en zone intérieure D_i.

d'après les lemmes 3.21 et 3.12

dans D_e,on a pour un $\nu_1 > 0$,

$$\begin{cases} i) \quad |J_a|_0 \leq C\dfrac{\varepsilon^7}{(\widetilde{\tau} - \tau)^{3-\nu_1}}, \\ ii) \quad |\nabla J_a|_0 + |\partial_\omega J_a|_0 \leq C\dfrac{\varepsilon^7}{(\widetilde{\tau} - \tau)^{\frac{9}{2}-\nu_1}}, \\ iii) \quad \left|\nabla^2 J_a\right|_0 + |\partial_\omega J_a|_0 + |\partial_\omega^2 J_a|_0 \leq C\dfrac{\varepsilon^7}{(\widetilde{\tau} - \tau)^{6-\nu_1}}. \end{cases}$$

dans D_i ,on a

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_t^j \partial_\omega^\ell J_a\right|_0 C_\alpha \varepsilon \log t / t^2.$$

Les estimations de $u - u_a$ au bord du cône de lumière par la méthode d'énergie.

Nous nous proposons d'évaluer $\dot{u} = u - u_a$ pour $\tau = \varepsilon\sqrt{t} \geq A$ $(t \geq t_0 = \frac{A^2}{\varepsilon^2})$,

$u_a$étant la solution approchée de (E) construite dans la première partie de ce chapitre.

On écrit (3.1.1) sous la forme

$$L\dot{u} \equiv \Box\ \dot{u} + g_{ij}^{k}\partial_k u \partial_{ij}^{2}\ \dot{u} +\ g_{ij}^{k}\partial_{ij}^{2}\ u_a\ \partial_k \dot{u} = -J_a\ . \tag{3.2.1}$$

Choisissons $\nu_2 > 0,\ \nu_2 < \dfrac{1}{k-1},\ \nu_2\ < \dfrac{\nu_1}{4}.$

Nous supposerons que la solution u de (E), pour ε assez petit, existe et est régulière dans $0 \leq t \leq T_0$,pour un T_0vérifiant

$$A\ < \varepsilon\sqrt{T_0} \leq \widetilde{\tau}(\varepsilon) - \varepsilon^{1+\nu_2}. \tag{3.2.2}$$

Définissons un domaine $\widetilde{D}_e$ par

$$t - (1 - C_1\varepsilon^2)r \leq C_2, \qquad r + t \leq \frac{C_3}{\varepsilon^2}, \tag{3.2.3}$$

où, $C_1 > 0, C_3 \gg 1$,et C_2 telle que $\widetilde{D}_e \subset D_e$.

On a $||\nabla u_a||_0 \leq C_0\varepsilon^2$,et l'on choisit $C_1 \gg C_0$.

Pour établir les inégalités d'énergie, il est nécéssaire de faire des hypothèses à priori sur $\dot{u}$;

Choisissons un $\nu_3 > 0, \nu_3 \leq \nu_1 - 4\nu_2$, et supposons que pour ε assez petit, il existe T, $\dfrac{A^2}{\varepsilon^2} = t_0 \; < T < T_0$ avec, pour $t_0 < t < T$

$$\begin{aligned} \text{Dans } \widetilde{D}_e, \quad \nabla \dot{u} &< \frac{\varepsilon^{6-\nu_3}}{(\ \widetilde{\tau} - \tau)^{\frac{7}{2}-\nu_1}}, \qquad (3.2.4_b) \\ \left|\left|\nabla^2 \dot{u}\right|\right|_0 + ||\partial_w \nabla \dot{u}||_0 &< \frac{\varepsilon^{6-\nu_3}}{(\ \widetilde{\tau} - \tau)^{5-\nu_1}} \\ \text{Partout }, ||\nabla \dot{u}||_0 &< \varepsilon^{\frac{23}{9}-\nu_3} \qquad (3.4.3_b) \\ \left|\left|\nabla^2 \dot{u}\right|\right|_0 + ||\partial_w \nabla \dot{u}||_0 &< \varepsilon^{\frac{23}{9}-\nu_3} + \frac{\varepsilon^{6-\nu_3}}{(\ \widetilde{\tau} - \tau)^{5-\nu_1}}. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède , un tel T existe ($T = \dfrac{B^2}{\varepsilon^2}$, $B > A$)

le choix de ν_2 et ν_3 et les inégalités (3.2.2) donnent

$$\begin{aligned} \text{Dans } \; \widetilde{D}_e, ||\nabla u||_0 &\leq C\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^{6-\nu_3}}{(\ \widetilde{\tau} - \tau)^{\frac{7}{2}-\nu_1}} \leq C\varepsilon^2, \qquad (3.2.4'_a) \\ \left|\left|\nabla^2 u\right|\right|_0 + ||\partial_w \nabla u||_0 &\leq C\frac{\varepsilon^2}{\widetilde{\tau} - \tau} + \frac{\varepsilon^{6-\nu_3}}{(\ \widetilde{\tau} - \tau)^{5-\nu_1}} \leq C\frac{\varepsilon^2}{\widetilde{\tau} - \tau}, \\ \text{hors de } \widetilde{D}_e, ||\nabla u||_0 &\leq C\varepsilon^2, \qquad (3.2.4'_b) \\ \left|\left|\nabla^2 u\right|\right|_0 + ||\partial_w \nabla u||_0 &\leq C\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^{6-\nu_3}}{(\ \widetilde{\tau} - \tau)^{5-\nu_1}}. \end{aligned}$$

Nous pouvons à présent estimer $u - u_a$ par la méthode d'énérgie,

pour cela, nous aurons besoin d'équations vérifiées par $\nabla \; \dot{u}$, $\partial_\omega \; \dot{u}$, $\nabla^2 \; \dot{u}$, $\partial_\omega \nabla \dot{u}$

et $\partial_\omega^2 \; \dot{u}$.

Les équations sur les dérivées de $\dot{u}$.

Lemme 3.22.

Les équations sur les dérivées de $\dot{u}$ *s'écrivent :*

i) $L\partial_\ell \dot{u} + g^k_{ij}\partial^2_{k\ell}u\partial^2_{ij}\dot{u} = -\{\partial_\ell J_a + g^k_{ij}\partial^3_{ij\ell}u_a\partial_k\dot{u}\} = F_\ell$

ii) $L\partial_\omega \dot{u} = -\{\partial_\omega J_a) + g^k_{ij}(\partial_\omega\partial_k u)\partial^2_{ij}\dot{u} + g^k_{ij}\partial_k u[\partial_\omega, \partial^2_{ij}]\dot{u}$

$$+g^k_{ij}\partial_\omega\partial^2_{ij}u_a\partial_k\dot{u} + g^k_{ij}\partial^2_{ij}u_a[\partial_\omega, \partial_k]\dot{u}\} = F_\omega$$

iii) $L\partial^2_{q\ell} \dot{u} + g^k_{ij}\partial^2_{\ell k}u\partial^3_{qij}\dot{u} + g^k_{ij}\partial^3_{q\ell k}\dot{u}\partial^2_{\ell k}\dot{u} + g^k_{ij}\partial^2_{qk}u\partial^3_{ij\ell}\dot{u}$

$$= -\{\partial^2_{q\ell}\ J_a + g^k_{ij}\partial^3_{q\ell k}u_a\partial^2_{ij}\dot{u} + g^k_{ij}\partial^3_{ij\ell}u_a\partial^2_{qk}\dot{u} + g^k_{ij}\partial^3_{qij}u_a\partial^2_{k\ell}\dot{u} + g^k_{ij}\partial^4_{q\ell ij}u_a\partial_k\dot{u}\}$$

$$= F_{ql}$$

iv) $L\partial_\ell\partial_\omega \dot{u} + g^k_{ij}(\partial^2_{\ell k}\partial_\omega\dot{u})\partial^2_{ij}\dot{u} + g^k_{ij}\partial^2_{\ell k}u\partial^2_{ij}\partial_\omega\dot{u}$

$$= -\{\partial_\ell\partial_\omega J_a + g^k_{ij}(\partial_\omega\partial_k u)\partial^3_{ij\ell}\dot{u} + g^k_{ij}\partial_k u[\partial_\omega, \partial^2_{ij}]\dot{u} + g^k_{ij}\partial^3_{ij\ell}u_a\partial_k\partial_\omega\dot{u}$$

$$+g^k_{ij}(\partial_\ell\partial_\omega\partial_k u_a)\partial^2_{ij}\dot{u} + g^k_{ij}\partial^2_{\ell k}u[\partial_\omega, \partial^2_{ij}]\dot{u} + g^k_{ij}(\partial_\omega\partial^2_{ij}u_a)\partial^2_{k\ell}\dot{u}$$

$$+g^k_{ij}\partial^2_{ij}u_a[\partial_\omega, \partial_k]\partial_\ell\dot{u} + g^k_{ij}(\partial_\ell\partial_\omega\partial^2_{ij}u_a)\partial_k\dot{u} + g^k_{ij}\partial^3_{ij\ell}u_a[\partial_\omega, \partial_k]\dot{u}\}$$

$$\equiv F_{\ell\omega}$$

v) $L\partial^2_\omega \dot{u} + g^k_{ij}\partial^2_\omega\partial_k\dot{u}\partial^2_{ij}\dot{u} = -\{\partial^2_\omega J_a + 2g^k_{ij}(\partial_\omega\partial_k u)\partial^2_{ij}\partial_\omega\dot{u}+$

$$g^k_{ij}\partial_k u[\partial_\omega, \partial^2_{ij}]\partial_\omega\dot{u} + g^k_{ij}\partial_k u\partial_\omega[\partial_\omega, \partial^2_{ij}]\dot{u}$$

$$+\ g^k_{ij}(\partial_\omega\partial^2_{ij}u_a)\partial_k\partial_\omega\dot{u} + g^k_{ij}\partial^2_{ij}u_a[\partial_\omega, \partial_k]\partial_\omega\dot{u}$$

$$+g^k_{ij}\partial_\omega\partial^2_{ij}u_a\partial_\omega\partial_k\dot{u} + g^k_{ij}\partial^2_{ij}u_a\partial_\omega[\partial_\omega, \partial_k]\dot{u}$$

$$+\ g^k_{ij}(\partial^2_\omega\partial_k u_a)\partial^2_{ij}\dot{u} + 2g^k_{ij}(\partial_\omega\partial_k u)[\partial_w, \partial^2_{ij}]\dot{u}$$

$$+g^k_{ij}(\partial^2_\omega\partial^2_{ij}u_a)\partial_k\dot{u} + g^k_{ij}\partial_\omega\partial^2_{ij}u_a[\partial_w, \partial_k]\dot{u}\}$$

$$\equiv F_{w^2}$$

Preuve : a) En dérivant (3.2.1), il vient

$$-\partial_\ell J_a\ = g^k_{ij}\partial^2_{\ell k}u\partial^2_{ij}\ \dot{u} + g^k_{ij}\partial^3_{\ell ij}u_a\partial_k\dot{u} + L\partial_\ell\dot{u}$$

b) Comme $L\dot{u} \;= \Box\dot{u} + g^k_{ij}\partial_k u\partial^2_{ij}\dot{u} + g^k_{ij}\partial^2_{ij}u_a\partial_k\dot{u}$,

$$\partial_\omega\; L\dot{u} = L\partial_\omega\; u + g^k_{ij}(\partial_\omega\partial_k u)\partial^2_{ij}\dot{u} + g^k_{ij}\partial_k u[\partial_w, \partial^2_{ij}]\dot{u} + g^k_{ij}\partial_\omega\partial^2_{ij}u_a\partial_k\dot{u}$$

$$+g^k_{ij}\partial^2_{ij}u_a[\partial_\omega, \partial_k]\dot{u}.$$

c) On a ensuite

$$-\partial^2_{q\ell}J_a = g^k_{ij}\partial^3_{q\ell k}u\partial^2_{ij}\dot{u} + g^k_{ij}\partial^2_{\ell k}u\partial^3_{qij}\dot{u} + g^k_{ij}\partial^4_{q\ell ij}u_a\partial_k\dot{u} +$$

$$g^k_{ij}\partial^3_{\ell ij}u_a\partial^2_{qk}\dot{u} + g^k_{ij}\partial^2_{qk}u\partial^3_{ijl}u + g^k_{ij}\partial^3_{qij}u_a\partial^2_{kl}\dot{u} \;\; +L\partial^2_{ql}\dot{u}$$

d) $\partial_\ell\partial_\omega L\dot{u} = g^k_{ij}\partial^2_{\ell k}u\partial^2_{ij}\;\partial_\omega\dot{u} + g^k_{ij}\partial^3_{\ell ij}u_a\partial_k\partial_\omega\dot{u} + L\partial_\ell\partial_w\dot{u} + g^k_{ij}(\partial_\ell\partial_w\partial_k u)\partial^2_{ij}\dot{u}$

$$+g^k_{ij}(\partial_w\partial_k u)\partial^3_{ijl}\dot{u} + g^k_{ij}\partial^2_{\ell k}u[\partial_\omega, \partial^2_{ij}]\dot{u} + g^k_{ij}\partial_k u[\partial_\omega, \partial^2_{ij}]\partial_\ell\dot{u}$$

$$+g^k_{ij}\partial_\ell\partial_\omega\partial^2_{ij}u_a\partial_k\dot{u} + g^k_{ij}\partial_\omega\partial^2_{ij}u_a\partial^2_{k\ell}\dot{u}$$

$$+g^k_{ij}\partial^3_{ijl}u_a[\partial_\omega, \partial_k]\dot{u} + g^k_{ij}\partial^2_{ij}u_a[\partial_\omega, \partial_k]\partial_\ell\dot{u}$$

e) $\partial^2_\omega L\dot{u} = L\partial^2_\omega\dot{u} + 2g^k_{ij}(\partial_w\partial_k u)\partial^2_{ij}\partial_\omega\dot{u} + g^k_{ij}\partial_k u[\partial_\omega, \partial_k]\partial_\omega\dot{u}$

$$+g^k_{ij}\partial_\omega\partial^2_{ij}u_a\partial_k\partial_w\dot{u} + g^k_{ij}\partial^2_{ij}u_a[\partial_\omega, \partial_k]\partial_\omega\dot{u}$$

$$+g^k_{ij}(\partial^2_w\partial_k u)\partial^2_{ij}\dot{u} + 2g^k_{ij}\partial_w\partial_k u[\partial_\omega, \partial^2_{ij}]\dot{u}$$

$$+g^k_{ij}\partial_k u\partial_w[\partial_\omega, \partial^2_{ij}]\dot{u} + g^k_{ij}\partial^2_w\partial^2_{ij}u_a\partial_k\dot{u}$$

$$+g^k_{ij}\partial_\omega\partial^2_{ij}u_a\partial_w\partial_k\dot{u} + g^k_{ij}\partial_\omega\partial^2_{ij}u_a[\partial_\omega, \partial_k]\dot{u}$$

$$+g^k_{ij}\partial^2_{ij}u_a\partial_\omega[\partial_\omega, \partial_k]\dot{u}$$

L'inégalité d'énergie pour L.(par, S.Alinhac)

La fonction F étant définie par (3.1.2),

on pose $d = \frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}}F''(r-t, \omega, \tau)$, et $a = e^{B\frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}}F'\psi g}$, où, $B > 0$ est une (grande) constante à choisir, et $\psi(r-t,\omega,\tau)$, $0 \leq \psi \leq 1$,est une troncature convenable fixée telle que $\psi dg \geq 0$,on a alors l'inégalité d'énergie suivante:

Lemme 3.23.

Pour, $t_0 = \dfrac{A^2}{\varepsilon^2}$ *,A ayant été fixé,* $0 < A < A_0$

on pose $E(t,\upsilon) = E(t) = \frac{1}{2} = \int (a(\partial_t\upsilon)^2 - g_{ij}(\nabla u)\partial_i\upsilon\partial_j\upsilon)\, dx.$

Pour tout $B \geq 1$*, il existe une fonction* $\alpha_B \geq 0$*, vérifiant* $\int\limits_{t_0}^{T} \alpha_B(t)dt \leq C(1+B)$*,*

et pour tout $\eta > 0$*, une constante* C_η *telles que , pour tout* $\lambda \leq 10$ *on ait*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} a\Psi dg\{(B-C_\eta)\sum_{i\,\geq\,1}(\partial_i\upsilon+\omega_i\partial_t\upsilon)^2 + 2(\lambda-\frac{1}{2}-\eta)(\partial_t\upsilon)^2\}dxdt \\
+\,E(t) \quad &\leq \quad E(t_0) + \int_{t_0}^{T} aL\upsilon\partial_t\upsilon dxdt + \int_{t_0}^{T}\{\alpha_B(t) + \frac{\varepsilon\lambda}{\sqrt{t}(\widetilde{\tau}-\tau)}\}E(t)dt \qquad (3.2.5)
\end{aligned}$$

Preuve.

(a) on a

$$\begin{aligned}
\partial_t^2\upsilon a\partial_t\upsilon &= \frac{1}{2}\partial_t(a(\partial_t\upsilon)^2) - \frac{1}{2}(\partial_t a)(\partial_t\upsilon)^2, \\
g_{0i}\partial_{it}^2\upsilon a\partial_t\upsilon &= \frac{1}{2}\partial_i(ag_{0i}(\partial_t\upsilon)^2) - \frac{1}{2}\partial_i(ag_{0i})(\partial_t\upsilon)^2, \\
\sum_{i,j\geq 1} g_{ij}\partial_{ij}^2\upsilon a\partial_t\upsilon &= \sum\partial_i(ag_{ij}\partial_j\upsilon\partial_t\upsilon) - \frac{1}{2}\partial_t(\sum ag_{ij}\partial_i\upsilon\partial_j\upsilon) - (\partial_t\upsilon)(\sum\partial_i(ag_{ij})\partial_j\upsilon) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum\partial_t(ag_{ij})\partial_i\upsilon\partial_j\upsilon,
\end{aligned}$$

donc, avec $\alpha = \lambda dg$,

$$\begin{aligned} Lva\partial_t\upsilon + \frac{a\alpha}{2}((\partial_t\upsilon)^2 - \sum_{i,j\geq 1} g_{ij}\partial_i\upsilon\partial j\upsilon) &= \partial_t\{\frac{a}{2}((\partial_t\upsilon)^2 - \sum_{i,j\geq 1} g_{ij}\partial_i\upsilon\partial j\upsilon + \sum_{i\geq 1}\partial_i\{ag_{0i}(\partial_t\upsilon)^2 \\ &+ \sum_{i,j\geq 1} ag_{ij}\partial_j\upsilon\partial_t\upsilon\} + Q(\nabla\upsilon), \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

où,

$$\begin{aligned} Q(\nabla\upsilon) &= -(\partial_t\upsilon)^2[\frac{1}{2}(\partial_t a) + \sum_{i\geq 1}\partial_i(ag_{0i}) - ag^0_{ij}\partial^2_{ij}u_a - \frac{a\alpha}{2}] + \frac{1}{2}\sum_{i,j\geq 1}[\partial_t(ag_{ij}) - a\alpha g_{ij}]\partial_i\upsilon\partial j\upsilon \\ &- \sum_{i,j\geq 1}\partial_i(ag_{ij})\partial_j\upsilon\partial_t\upsilon + \sum_{k\geq 1} ag^k_{ij}\partial^2_{ij}u_a\partial_k\upsilon\partial_t\upsilon. \end{aligned}$$

Séparons dans Q, les termes qui contiennent une dérivée de a des autres

$$\begin{aligned} Q(\nabla\upsilon) &= -(\partial_t\upsilon)^2[\frac{1}{2}(\partial_t a) + \sum_{i\geq 1}(\partial_i a)g_{0i}] + \frac{1}{2}\sum_{i,j\geq 1}(\partial_t a)g_{ij}\partial_i\upsilon\partial_j\upsilon \\ &- \sum_{i,j\geq 1}(\partial_i a)g\upsilon\partial_j\partial_t\upsilon + a[(\partial_t\upsilon)^2(\frac{\alpha}{2} + g^0_{ij}\partial^2_{ij}u_a - \sum_{i\geq 1}\partial_i(g_{0i})) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j\geq 1}[\partial_t(g_{ij}) - \alpha g_{ij}]\partial_i\upsilon\partial_j\upsilon - \sum_{i,j\geq 1}\partial_i(g_{ij})\partial_j\upsilon\partial_t\upsilon \\ &+ \sum_{k\geq 1} g^k_{ij}\partial^2_{ij}u_a\partial_k\upsilon\partial_t\upsilon] \\ &\equiv Q_1 + a[Q_2]. \end{aligned}$$

b) Explicitons Q_2

$$Q_2(\nabla\upsilon) = (\partial_t\upsilon)^2(\tfrac{\alpha}{2} + g^0_{ij}\partial^2_{ij}u_a - \sum_{i\geq 1} g^k_{i0}\partial^2_{ik}u) + \tfrac{1}{2}\sum_{i,j\geq 1}[g^k_{ij}\partial_t\partial_k u - \alpha g_{ij}]\partial_i\upsilon\partial_j\upsilon$$

$$-\sum_{i,j\geq 1} g_{ij}^k \partial_{ik}^2 u \partial_j \upsilon \partial_t \upsilon + \sum_{k\geq 1} g_{ij}^k \partial_{ij}^2 u_a \partial_k \upsilon \partial_t \upsilon.$$

Compte tenu des lemmes 3.20 , 3.21 (3.1.4) et de $(3.2.4)_a$, on a

$$\left\| \partial_{ij}^2 u - \frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}} \omega_i \omega_j F'' \right\|_0 \leq C \frac{\varepsilon^4}{(\,\widetilde{\tau} - \tau)^{\frac{5}{2}}} + C \frac{\varepsilon^{6-\upsilon_3}}{(\,\widetilde{\tau} - \tau)^{5-\nu_1}} \equiv \alpha_1(t),$$

on peut donc écrire

$$\begin{aligned} Q_2 &= (\partial_t \upsilon)^2 \left(\frac{\alpha}{2} + g_{ij}^0 \omega_i \omega_j d - \sum_{i\geq 1} g_{i0}^k \omega_i \omega_k d\ \right) \\ &\quad -\frac{1}{2} \sum_{i,j\geq 1} [g_{ij}^k \omega_k d + \alpha g_{ij}(0)] \partial_i \upsilon \partial_j \upsilon - \sum_{i,j\geq 1} g_{ij}^k \omega_i \omega_k d\ \partial_j \upsilon \partial_t \upsilon \\ &\quad + \sum_{k\geq 1} g_{ij}^k \omega_i \omega_j d \partial_k \upsilon \partial_t \upsilon + \widetilde{Q}_2 \\ &= dQ_2^0 + \widetilde{Q}_2. \end{aligned}$$

où,

$$\left| \widetilde{Q}_2 \right| \leq C\alpha_1(t) \left| \nabla \upsilon \right|^2$$

c) L'équation (3.2.6) implique que $-gF'$ est une solution de l'équation de Burger.

Les hypothèses (ND) de non dégénérescence faites sur R montrent qu'il existe une fonction de troncature $\psi(\sigma, \omega, \tau)$,indépendante de ε,telle que,

sur supp ψ, $|g| \geq cte\ > 0$, et $gF'' \geq cte\ > 0$, la fonction ψest donc, concentrée près des caractéristiques de l'équation de Burger le long desquelles l'explosion a lieu au plutôt, c'est à dire à peu près au temps $\tau_*(\varepsilon)$. Sur supp $(1-\psi)$, par suite, $\nabla^2 F$est bornée, et n'explose pas pour $\tau \to \tau_*(\varepsilon)$.

d) On écrit donc

$$Q_2 = \psi d Q_2^0 + \widetilde{Q}_2,$$

où,

$$\widetilde{Q}_2 = (1-\psi) d Q_2^0 + \widetilde{Q}_2 \text{ vérifie } \left|\widetilde{Q}_2\right| \leq C \left|\nabla \upsilon\right|^2 (\varepsilon^2 + \alpha_1(t)).$$

Nous faisons apparaître maintenant les variables $\partial_i \upsilon + \omega_i \partial_t \upsilon$ dans Q_2^0,

$$\begin{aligned} Q_2^0 &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j\geq 1} [g_{ij}^k \omega_k + \lambda \delta_{ij}](\partial_i \upsilon + \omega_i \partial_t \upsilon)(\partial_j \upsilon + \omega_j \partial_t \upsilon) \\ &\quad + \sum_{k\geq 1} g_{ij}^k \omega_i \omega_j (\partial_k \upsilon + \omega_k \partial_t \upsilon)\partial_t \upsilon + \lambda g \sum_{i\geq 1} (\partial_i \upsilon + \omega_i \partial_t \upsilon) \\ &\quad \omega_i \partial_t \upsilon + q_2^0 (\partial_t \upsilon)^2, \end{aligned}$$

où, $q_2^0 = (\lambda - \frac{1}{2}) g(w)$.

e) AnalysonsQ_1

Compte tenu du choix de a et de $g_{0i}(0) = 0$,nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha B} Q_1 &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}} g \partial_t (\Psi F') \left\{ -(\partial_t \upsilon)^2 + \sum_{i,j\geq 1} g_{ij} \partial_i \upsilon \partial_j \upsilon \right\} \\ &\quad - \sum_{i,j\geq 1} \varepsilon \partial_i \left(\frac{\Psi F' g}{r^{\frac{1}{2}}} \right) g_{ij} \partial_j \upsilon \partial_t \upsilon \\ &= \frac{\Psi d g}{2} \sum_{i\geq 1} (\partial_i \upsilon + \omega_i \partial_t \upsilon)^2 + \widetilde{Q}_1, \end{aligned}$$

avec,

$$\left|\widetilde{Q}_1\right| \leq C \left|\nabla \upsilon\right|^2 \varepsilon^2.$$

(f) Finalement,

$$\begin{aligned}
Q(\nabla \upsilon) &= \frac{aB\Psi dg}{2}\sum_{i\geq 1}(\partial_i\upsilon+\omega_i\partial_t\upsilon)^2+aB\widetilde{Q}_1+a\Psi dQ_2^0+a\overline{Q}_2\\
&= \frac{a}{2}\Psi dg\{B\sum_{i\geq 1}(g_{ij}^k\omega_k+\lambda\delta_{ij})\,(\partial_i\upsilon+\omega_i\partial_t\upsilon)^2+\frac{1}{g}\sum_{i,j\geq 1}(\partial_i\upsilon+\omega_i\partial_t\upsilon)\,(\partial_j\upsilon+\omega_j\partial_t\upsilon)\\
&\quad +\frac{2}{g}\sum_{k\geq 1}g_{ij}^k\omega_i\omega_j\,(\partial_k\upsilon+\omega_k\partial_t\upsilon)\,\partial_t\upsilon+2\lambda\sum_{i\geq 1}(\partial_i\upsilon+\omega_i\partial_t\upsilon)\,\omega_i\partial_t\upsilon+2(\lambda-\frac{1}{2})(\partial_t\upsilon)^2\}\\
&\quad +\alpha B\widetilde{Q}_1+a\overline{Q}_2,
\end{aligned}$$

pour tout $\eta>0$, il existe C_η telle que

$$Q(\nabla\upsilon)\geq\frac{a}{2}\Psi dg\{(B-C_\eta)\sum(\partial_i\upsilon+\omega_i\partial_t\upsilon)^2+2(\lambda-\frac{1}{2}-\eta)(\partial_t\upsilon)^2\}+\widetilde{Q},$$

avec,

$$\left|\widetilde{Q}\right|\leq Ca\left|\nabla\upsilon\right|^2(\varepsilon^2+\alpha_1(t)+B\varepsilon^2\},$$

g) En intégrant (3.4.5) dans $\widetilde{D}_e$,on trouve

$$\begin{aligned}
E(t)-E(t_0)+\int\frac{a}{2}\Psi dg\{] &\leq \int aL\upsilon\partial_t\upsilon+\int\frac{a\lambda dg}{2}[(\partial_t\upsilon)^2-g_{ij}\partial_i\upsilon\partial_j\upsilon]dxdt\\
&\quad +C\int a\left|\nabla\upsilon\right|^2((1+B)\varepsilon^2+\alpha_1(t))dxdt.
\end{aligned}$$

la dernière intégrale est majorée par $C\int_{t_0}^{T}\{(1+B)\varepsilon^2+\alpha_1(t)\}E(t)dt$,

dans l'avant-dernière, nous avons

$$d=\frac{\varepsilon}{t^{\frac{1}{2}}}F''+O(\frac{\varepsilon^4}{\widetilde{\tau}-\tau});$$

grâce au lemme 3.21.

$$\int \frac{a\lambda dg}{2}[(\partial_t \upsilon)^2 - g_{ij}\partial_i\upsilon\partial_j\upsilon]dxdt \leq \int_{t_0}^{T} \frac{\varepsilon\lambda}{\sqrt{t}(\widetilde{\tau}-\tau)}E(t)dt + C\int_{t_0}^{T}(\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^4}{\widetilde{\tau}-\tau})E(t)dt$$

finalement, nous obtenons le résultat, avec

$$\alpha_B(t) = C((1+B)\varepsilon^2 + \alpha_1(t)) + C\frac{\varepsilon^4}{\widetilde{\tau}-\tau}$$

et,

$$\int_{t_0}^{T} \alpha_B(t)dt \leq CB + C\frac{\varepsilon^2}{(\widetilde{\tau}-\tau)^{\frac{3}{2}}} + C\frac{\varepsilon^{4-\nu_3}}{(\widetilde{\tau}-\tau)^{4-\nu_1}} \leq C(1+B)$$

car, $\nu_3 \leq \nu_1 - 4\nu_2 + \nu_1\nu_2$ par hypothèse.

Estimation de $\left|\nabla \dot{u}\right|_0$.

Lemme 3.24.

On a dans $\widetilde{D}_e$,

$$\left|\nabla \dot{u}\right|_0 \leq C\frac{\varepsilon^5}{(\widetilde{\tau}-\tau)^{2-\nu_1}}. \tag{3.2.7}$$

Preuve.

En appliquant (3.4.4), nous avons pour $\upsilon = \dot{u}$, $\lambda = \frac{1}{2}+\eta$, $B = C_\eta$, nous obtenons

$$\left|\nabla \dot{u}\right|_0 \leq C\varepsilon^7(\widetilde{\tau}-\tau)^{\frac{1}{2}+\eta} + C\varepsilon^7(\widetilde{\tau}-\tau)^{\lambda}\int_{t_0}^{T}\frac{dt}{(\widetilde{\tau}-\tau)^{3-\nu_1-\lambda}} \leq C\varepsilon^5(\widetilde{\tau}-\tau)^{2-\nu_1}.$$

Estimation de $\left|\nabla^2 \dot{u}\right|_0$ et $\left|\nabla\partial_\omega \dot{u}\right|_0$.

Lemme 3.25.

On a dans $\widetilde{D}_e$,

$$\left|\nabla^2\dot{u}\right|_0 + \left|\nabla\partial_\omega\dot{u}\right|_0 \leq C\frac{\varepsilon^5}{(\widetilde{\tau}-\tau)^{\frac{7}{2}-\nu_1}}. \tag{3.2.8}$$

Preuve.

Ecrivant (3.2.5) pour $\upsilon = \partial_\ell\dot{u},\ \ \ell = 0,1,2,$nous avons

$$\begin{aligned}
&\sum_\ell E(T,\partial_\ell\dot{u}) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} a\Psi dg\{(B-C_\eta)\sum_\ell\sum_{i\geq 1}(\partial_i\partial_\ell\dot{u}+\omega_i\partial_t\partial_\ell\dot{u})^2 \\
&+2(\lambda-\frac{1}{2}-\eta)\sum_\ell\sum_{i\geq 1}(\partial_t\partial_\ell\dot{u})^2\}dxdt \\
\leq\ &\sum_\ell E(t_0,\partial_\ell\dot{u}) + \int_{t_0}^{T}\{(B-C_\eta)\sum_\ell\sum_{i\geq 1}(\partial_i\partial_\ell\dot{u}+\omega_i\partial_t\partial_\ell\dot{u})^2 \\
&+2(\lambda-\frac{1}{2}-\eta)\sum_\ell\sum_{i\geq 1}(\partial_t\partial_\ell\dot{u})^2\}\sum_\ell E(t,\partial_\ell\dot{u})dt \\
&+\sum_\ell\{\int_{t_0}^{T} aF_\ell\partial_i\partial_\ell\dot{u}dxdt - \int_{t_0}^{T} ag_{ij}^{k}\partial_{k\ell}^2 u\partial_{ij}^2\dot{u}\partial_t\partial_\ell\dot{u}dxdt\}.
\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Le terme

$\int_{t_0}^{T} a\Psi dg\{(B-C_\eta)\sum_\ell\sum_{i\geq 1}(\partial_i\partial_\ell\dot{u}+\omega_i\partial_t\partial_\ell\dot{u})^2 + 2(\lambda-\frac{1}{2}-\eta)\sum_\ell\sum_{i\geq 1}(\partial_t\partial_\ell\dot{u})^2\}dxdt$

est appelé par abus " terme de l'énergie contrôlée"; en transposant ce terme au membre de droite de (3.2.8), il vient

$$
\begin{aligned}
& (B-C_\eta)\sum_{i\geq 1}(\partial_i\partial_\ell\dot{u}+\omega_i\partial_t\partial_\ell\dot{u})^2+2(\lambda-\frac{1}{2}-\eta)\sum_\ell\sum_{i\geq 1}(\partial_t\partial_\ell\dot{u})^2\}dxdt \\
& +(B-C_\eta)\sum_\ell\sum_{i\geq 1}(\partial_i\partial_\ell\dot{u}+\omega_i\partial_t\partial_\ell\dot{u})^2+2(\lambda-\frac{1}{2}-\eta) \\
& +\sum_{\ell\geq 1}[(\partial_t\partial_\ell\dot{u}+\omega_\ell\partial_\ell^2\dot{u})^2+\omega_\ell^2(\partial_t^2\dot{u})^2 \\
& -2\omega_\ell\partial_t^2\dot{u}(\partial_t\partial_\ell\dot{u}+\omega_\ell\partial_\ell^2\dot{u})] \\
= \;& (B-C_\eta)\sum_\ell\sum_{i\geq 1}(\partial_i\partial_\ell\dot{u}+\omega_i\partial_t\partial_\ell\dot{u})^2+4(\lambda-\frac{1}{2}-\eta)(\partial_t^2\dot{u})^2 \\
& +2(\lambda-\frac{1}{2}-\eta)\sum_{\ell\geq 1}[(\partial_t\partial_\ell\dot{u}+\omega_\ell\partial_\ell^2\dot{u})^2-2\omega_\ell(\partial_t^2\dot{u})(\partial_t\partial_\ell\dot{u}+\omega_\ell\partial_t^2\dot{u})] \\
\geq \;& 4(\lambda-\frac{1}{2}-\eta-\eta')(\partial_t^2\dot{u})^2+(B-C_\eta-C_{\eta'})\sum_{i\geq 1,\ell}(\partial_i\partial_\ell\dot{u}+\omega_i\partial_t\partial_\ell\dot{u})^2.
\end{aligned}
$$

D'autre part,

$$\partial_t\partial_j\dot{u}=\partial_t\partial_j\dot{u}+\omega_j\partial_t^2\dot{u}-\omega_j\partial_t^2\dot{u}\qquad (j\geq 1),$$

et,

$$\partial_{ij}^2\dot{u}=\partial_{ij}^2\dot{u}+\omega_j\partial_t\partial_j\dot{u}-\omega_j(\partial_t\partial_j\dot{u}+\omega_j\partial_t^2\dot{u})+\omega_i\omega_j\partial_t^2\dot{u},\quad (i,j\geq 1),$$

d'après (3.2.4)

$$
\begin{aligned}
ag_{ij}^k\partial_{k\ell}^2u\partial_{ij}^2\dot{u}\partial_t\partial_\ell\dot{u} \;=\;& \Psi a g_{ij}^k\frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}}\omega_k\omega_\ell F''\{-\omega_i\omega_j\omega_\ell(\partial_t^2\dot{u})^2 \\
& +\sum *(\partial_{ij}^2\dot{u}+\omega_i\partial_t\partial_j\dot{u})(\partial_t\partial_\ell\dot{u}+\omega_\ell\partial_t^2\dot{u} \\
& +\sum *(\partial_t^2\dot{u})(\partial_{ij}^2\dot{u}+\omega_i\partial_t\partial_j\dot{u})\}.
\end{aligned}
$$

Le premier terme vaut

$$-\Psi ad(\partial_t^2\dot{u})^2\sum g_{ij}^k\omega_i\omega_j\omega_k\omega_\ell^2=-2a\Psi dg(\partial_t^2\dot{u})^2.$$

les autres termes sont majorés par

$$\Psi a\left|d\right|\left(C_{\eta''}\sum_{i\geq 1,j}(\partial_{ij}^2\dot{u}+\omega_i\partial_t\partial_j\dot{u})^2+\eta''(\partial_t^2\dot{u})^2\right).$$

Finalement, comme $dg=\left|dg\right|\geq C\left|d\right|$, sur le support de Ψ,nous obtenons

pour tout $\lambda>\frac{3}{2}$, pour des choix convenables de η,η',η'', et de B, l'inégalité

$$\begin{aligned}\sum_\ell E(T,\partial_\ell\dot{u}) \quad\leq\quad & \sum_\ell E(t_0,\partial_\ell\dot{u})+\int_{t_0}^{T}\{\alpha_B+\frac{\varepsilon\lambda}{\sqrt{t}(\widetilde{\tau}-\tau)}+C(\varepsilon^2+\alpha_1(t))\}\left(\sum_\ell E(t,\partial_\ell\dot{u})\right)dt\\ &+\sum\int aF\partial_t\partial_\ell\dot{u}dxdt.\end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité d'énergie, nous avons le résultat.

Estimation de $\left|\nabla^3\dot{u}\right|_0$ **,** $\left|\nabla^2\partial_\omega\dot{u}\right|_0$ **et** $\left|\nabla\partial_\omega^2\dot{u}\right|_0$.

Lemme 3.26.

On a dans $\widetilde{D}_e$

$$\left|\nabla^3\dot{u}\right|_0+\left|\nabla^2\partial_\omega\dot{u}\right|_0+\left|\nabla\partial_\omega^2\dot{u}\right|_0\leq C\frac{\varepsilon^5}{(\widetilde{\tau}-\tau)^{5-v_1}}$$

Preuve :

a) On procède avec l'équation sur $\partial_{q\ell}^2\dot{u}$ exactement comme au lemme 3.25 On somme les inégalités d'énergie avec $\upsilon = \partial_t^2\dot{u}, \partial_t\partial_l\dot{u}$, (ℓ= 1, 2), $\partial_{ql}^2\dot{u}$ $(q, \ell \geq 1)$.

· Les "termes d'énergie controlée" sont :

$$(B - C_\eta) \sum_{i\geq 1}(\partial_i\partial_t^2\dot{u} + \omega_i\partial_t^3\dot{u}) + 2(\lambda - \tfrac{1}{2} - \eta)(\partial_t^3\dot{u})^2$$

$$+(B - C_\eta) \sum_{i,\ell\geq 1}(\partial_i\partial_\ell\partial_t\dot{u} + \omega_i\partial_t^2\partial_\ell\dot{u})^2 + 2(\lambda - \tfrac{1}{2} - \eta)\sum_{\ell\geq 1}(\partial_t^2\partial_\ell\dot{u})^2$$

$$+(B - C_\eta) \sum_{i,q,\ell\geq 1}(\partial_i\partial_{q\ell}^2\dot{u} + \omega_i\partial_t\partial_{q\ell}^2\dot{u})^2 + 2(\lambda - \tfrac{1}{2} - \eta) \sum_{q,\ell\geq 1}(\partial_t\partial_{q\ell}^2\dot{u})^2$$

On écrit $\partial_t^2\partial_\ell\dot{u} = \partial_t^2\partial_\ell\dot{u} + \omega_\ell\partial_t^3\dot{u}$

$$\partial_t\partial_{q\ell}^2\dot{u} = \partial_t\partial_{q\ell}^2\dot{u} + \omega_q\partial^2\partial_\ell\dot{u} - \omega_q(\partial_t^2\partial_\ell\dot{u} + \omega_\ell\partial_t^3\dot{u}) + \omega_q\omega_\ell\partial_t^3\dot{u}$$

$$\partial_{q\ell}^3\dot{u} = \partial_{q\ell}^3\dot{u} + \omega_i\partial_t\partial_{q\ell}^2\dot{u} - \omega_i(\partial_t\partial_{q\ell}^2\dot{u} + \omega_q\partial_t^2\partial_\ell\dot{u}) + \omega_i\omega_q(\partial_t^2\partial_\ell\dot{u} + \omega_\ell\partial_t^3\dot{u})$$

$$-\omega_i\omega_q\omega_\ell\partial_t^3\dot{u}$$

et l'on obtient la minoration

$$2(\lambda - \tfrac{1}{2} - \eta')(1 + \sum_{\ell\geq 1}\omega_\ell^2 + \sum_{q,\ell\geq 1}\omega_q^2\omega_\ell^2)(\partial_t^3\dot{u})$$

$$+(B - C_\eta - C_{\eta^{\text{fl}}}) \sum_{i\geq 1,q,\ell}(\partial_i\partial_{q\ell}^2\dot{u} + \omega_i\partial_t\partial_{q\ell}^2\dot{u})^2.$$

· Les "termes quadratiques additionnels "

$$-ag_{ij}^k\partial_{k\ell}^2 u\partial_{qij}^3\dot{u}\partial_t\partial_{q\ell}^2\dot{u} - ag_{ij}^k\partial_{ij}^2\dot{u}\partial_{qk\ell}^3\dot{u}\partial_t\partial_{q\ell}^2\dot{u}$$

$$-ag_{ij}^k\partial_{qk}^2 u\partial_{ij\ell}^3\dot{u}\partial_t\partial_{q\ell}^2\dot{u}$$

s'écrivent, modulo des termes contrôlés par $C(\varepsilon^2 + \alpha_1(t))\sum_{q,\ell} E(t, \partial_{q\ell}^2\dot{u})$(parmi lesquels les termes de la deuxième somme),

$$-a\Psi d\{-g_{ij}^k\omega_i\omega_j\omega_k\omega_\ell^2\omega_q^2\}(\partial_t^3\dot{u})^2 + a\Psi d\{\sum *(\partial_i\partial_{q\ell}^2\dot{u} + \omega_i\partial_t\partial_{q\ell}^2\dot{u})(\partial_j\partial_{pk}^2\dot{u} + \omega_j\partial_{pk}^2\dot{u}$$

$$+\sum *(\partial_t^3\dot{u})(\partial_i\partial_{q\ell}^2\dot{u} + \omega_i\partial_t\partial_{q\ell}^2\dot{u})\}.$$

Le premier terme vaut 6 $a\Psi dg(\partial_t^3\dot{u})^2$ tandis que les seconds sont majorés par $\Psi a\,|d|\,(C_{\eta''}\sum(\partial_i\partial_{q\ell}^2\dot{u}+\omega_i\partial_t\partial_{q\ell}^2\dot{u})^2+\eta''(\partial_t^3\dot{u})^2)$.

· Au total, on obtient, pour $\lambda>\frac{5}{2}$, avec $|F_{q\ell}|_0\leq C\varepsilon^7\delta^{6-v_1}$

$\left|\nabla\dot{u}\right|_0\leq C\varepsilon^7\delta^7+C\varepsilon^7\delta^\lambda\int_{t_0}^{T}\frac{dt}{(\widetilde{\tau}-\tau)^{6-v_{1-\lambda}}}\leq C\varepsilon^5\delta^{5-v_1}$

Théorème.

Sous l'hypothèse (ND), il existe $\nu>0$ tel que le temps de vie de la solution classique de (E) satisfasse,

pour $\varepsilon>0$ assez petit, à

$$T_\varepsilon\geq\frac{A_0^2}{\varepsilon^2}+2\frac{A_0A_1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon^{1-\nu}},$$

nous introduisons l'estimation $(1-C_1\varepsilon^2)r+t\leq\frac{A_0^2}{\varepsilon^2}(1+\gamma)$ dans un domaine D [13], si C_1 est assez grand, D est un domaine d'influence pour L,

si $A-A_0>0$ est assez petit , et que l'on choisit γ petit, on a donc $u_a\equiv 0$,

les inégalités d'énergie précedentes montrent que la solution u existe pour

$\varepsilon\sqrt{t}\leq\widetilde{\tau}(\varepsilon)-\varepsilon^{1+\nu_2}$, c'est-à-dire $t\leq\frac{A_0^2}{\varepsilon^2}+2\frac{A_0A_1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon^{1-\nu}}$ pour $0<\nu<\nu_2$ et ε petit ce qui achève la preuve par le lemme 3.20.

3.2.5 Conclusion.

L'objet de ce travail est, d'une part, la caractérisation du temps de vie de la solution d'une équation d'onde quasi-linéaire en dimension deux d'espace pour des données de Cauchy de taille ε ; et d'autre part, l'évaluation de ce temps .

Cette étude a permis de mettre en évidence les points ci-après :

Pour des données initiales régulières , on a pu définir un temps de vie T pour la solution régulière ,

Dans le cas d'une équation scalaire , l'étude montre que le gradient de la solution explose comme l'inverse de la différentielle d'une application de corang 1; c'est ce qu'on appelle : " l'explosion géométrique "

La description de la solution explosive a permis de mettre en évidence la

différence essentielle entre une solution singulière et une solution explosive qui devient singulière en un point d'un domaine d'influence d'une zone où elle est régulière ; la singularité qu'on observe est donc crée et non propagée.

Lorsqu'on a établit la borne :

$$T_\varepsilon \geq \frac{A_0^2}{\varepsilon} \; + \; 2 \, \frac{A_0 A_1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^{1-v}}$$

pour un certain $\nu \, > \, 0$ et A_1 constante explicite , on a montré que ce sont les dérivées secondes de la solution qui explosent à l'approche de T_ε

Enfin pour des essais futurs , il serait interessant de développer cette étude auquel cas la solution explose à l'infini, comme l'équation d'ondes quasi-linéaire dans

$\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t$

$$\partial_t^2 u - c^2(u) \Delta_x u = 0, \quad c(u) = 1 + u$$

avec des données de taille ε.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] **Alinhac.S**, « Une solution approchée en grand temps des équations d'Euler compressibles axisymétriques en dimension deux », Comm.Partial Differential Equations, 17, p.447-490, (1992).

[2] **Alinhac.S**, « Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasi-linéaire en dimension deux,I» Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4[e]série, t.28, p. 225-251 (1995).

[3] **Alinhac.S**, « Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasi-linéaire en dimension deux,II» Duke Mathematical journal., Vol. 73, N°.3 March (1994)

[4] **Alinhac.S**, « Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasi-linéaire en dimension deux» Preprint, Orsay Paris-Sud, (1992).

[5] **Alinhac.S**, « Blowup for non linear hyperbolic equations », Prog.non.diff.equa.app, vol 17, (1995).

[6] **Alinhac.S**, « Approximation près du temps d'explosion des solutions d'équations d'onde quasi-linéaires en dimension deux », SIAM.J.MATH.ANAL, Vol 26, p.529-565, (1995).

[7] **Alinhac.S**, « Un exemple d'explosion à l'infini pour une équation d'ondes quasi-linéaire » Centre de mathématiques., U.M.R. DU CNRS 7640., Séminaire 2001-2002 .

[8] **Alinhac.S**, « A minicourse on global existence and blowup of classical solutions to multidimensional quasilinear wave equations » Journées équations aux dérivées partielles ., Forges-les-Eaux. 3-7 juin 2002., GDR 2434 (CNRS).

[9] **J-Y-Chemin**, « Equations d'ondes non linéaires», Séminaire BOURBAKI, 51[ème] année, n°850 , p.7-20, Novembre 1998,

[10] **Courant-Hilbert**, « methods of mathematical physics », vol lI, interscience publishers, (1962)

[11] **De Bruuijn.N.G**, « Asymptotic methods in analysis », Ed. North-Holland Publishing Company(1970)

[12] **Friedlander.G**, « On the radiation field of pulse solutions of the wave equation »I, II, Proc.Roy.London, Vol 269, p.53-65 (1962), Vol 279, 386-394, (1964).

[13] **Garabedian.P.R**, « Partial differential equations », Ed.John Wiley &sons, Inc, (1964).

[14] **Hörmander. L**, « The lifespan of classical solutions of non linear hyperbolic equations» Mittag-leffler Report N° 5, (1985).

[15] **Hörmander. L**, « The lifespan of classical solutions of non linear hyperbolic equations» Lecture Notes in Math., Vol. 1256, Spriger-Verlag, New York, Berlin, 214-280; (1986).

[16] **Hörmander. L**, « Lectures on non linear hyperbolic equations », Ed.Springer Verlag,(1997).

[17] **Jeffrey.A**, « Quasilinear hyperbolic systems and waves », Pitman Publishing.(1976)

[18] **John.F et Klainermann.S,** « Almost global existence to nonlinear wave equations in three space dimensions » , Comm. Pure Appl. Math., 37, 443-455, (1984).

[19] **John.F,** « Blow up of radial solutions of $u_{tt} = c^2(u_t)\,\Delta u$ in three space dimensions» , Math. Applicada e Comp., 4, 3-18, (1985).

[20] **John.F,** «Existence for large times of strict solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions for small initial data » , Comm. Pure Appl. Math., 40, 79-109, (1987).

[21] **John.F,** «Solutions of quasilinear wave equations with small initial data ; third phase» Non liear hyperbolic equations , Proceedings, Bordeaux (1988).

[22] **Kessab. A,** «Introduction aux opérateurs pseudo-différentiels», cours de post-graduation, U.S.T.H.B ; (2002).
[23]**Klainerman.S**,« Global existence for non linear waves equations »,comm.pur.appl.math, vol XXXIII, 43- 101, (1980).
[24] **Lafontaine. J,** «Introduction aux variétés différentiels », Presses universitaires de Grenoble ; (1996).
[25] **Lax.D.Peter**, « On the notion of hyperbolic » ; comm.pur.appl.math, vol XXXIII, p.395-397, (1980).
[26] **Majda**.**A**, « Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables», Applied mathematical sciences53, Ed.SpringerVerlag,(1984).
[27] **Guy Métivier**, «Problèmes de Cauchy et ondes non linéaires», (preprint).
[28] **Reinhard .H**, « Equations aux dérivées partielles », Ed.DUNOD, Paris, (1995).
[29] **Spivak**, «Differential Geometry», Publisher Perish; (1979).
[30] **Treves.F**, « Basic linear partial differential equations », Ed.academic press.(1975)
[31] **Wasow.W**, « Asymptotic expansions for ordinary differential equations», Krieger, New york, (1976).