Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumediene

جامعة هواري بومدين
للعلوم والتكنولوجيا
U S T H B

Faculté de Mathématiques
Laboratoire d’Algèbre et Théorie des Nombres

Mémoire Présenté par

M[elle] **REBAINE Fatiha**

Pour l’obtention du grade de : Magister en Mathématiques

Spécialité : Algèbre et théorie des nombres

Sur L’Equation Différentielle d’Abel

Soutenu publiquement le : Mercredi 07 janvier 2004.

Devant le jury composé de :

Mr A.KESSI	Professeur à L’U.S.T.H.B	Président.
Mr K.BETINA	Professeur à L’U.S.T.H.B	Directeur de thèse.
Mr M.ZITOUNI	Professeur à L’U.S.T.H.B	Examinateur.
Mr M.S.HACHAICHI	Maître de conférences à L’U.S.T.H.B	Examinateur.

Remerciements

*Je remercie Monsieur **A.KESSI,** professeur à L'U.S.T.H.B qui me fait l'honneur de présider ce jury.*

*J'exprime ma sincère reconnaissance à mon directeur de thèse Monsieur **K.BETINA,** professeur à L'U.S.T.H.B, de m'avoir proposé ce sujet et de l'aide qu'il m'a apporté durant l'élaboration de ce travail.*

*Je remercie aussi Mr **M.ZITOUNI**, professeur à L'U.S.T.H.B, Mr **M.S.HACHAICHI**, maître de conférence à L'U.S.T.H.B pour avoir accepté de faire partie de ce jury.*

*Mes remerciements vont également à Mr **AUSTIN ROCHE** de l'université du Canada pour son aide et ses précieux conseils.*

Que tous ceux qui m'ont encouragé et aidé, de prés ou de loin, trouvent ici l'expression de ma parfaite gratitude.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

On sait, depuis les travaux d'Abel et de Galois au 19ème siècle, que certaines équations différentielles n'ont pas de solutions qui puissent être décrites par des formules.

On se propose dans ce travail d'étudier les équations différentielles (*EDO*) *dites d'Abel de la forme :*

$$y' = f_3 y^3 + f_2 y^2 + f_1 y + f_0$$

où f_3, f_2, f_1 *et* f_0 *sont des fonctions arbitraires en x.*

Une grande partie de classes intégrables de ces EDO est due à ***Abel*** *lui même et cela par la considération des facteurs intégrants.*

Une méthode générale « d'intégration exacte » pour ces EDO a été formulée la première fois par ***Liouville*** *au 19ème siècle, et est basée sur les concepts des classes, des invariants et de la solution du problème d'équivalence. D'une manière générale, deux EDO d'Abel appartiennent à la même classe d'équivalence si et seulement si l'une peut être obtenue à partir de l'autre au moyen d'une transformation de la forme* :

$$TR = \{x = F(t), y = P(t)u + Q(t)\}$$

où F, Q, P sont des fonctions arbitraires en t telles que : $F' \neq 0$ *et* $P \neq 0$.

Les équations d'Abel admettent un invariant qui a un rôle décisif pour la résolution du problème d'équivalence.

Un simple cas est présenté lorsque cet invariant est constant, la solution est alors donnée en termes de quadratures.

Au contraire, quand l'invariant n'est pas constant , juste quelques cas intégrables sont connus et la formulation de la méthode de résolution est entièrement basée sur l'équivalence entre deux EDO d'Abel de même classe dont l'une est intégrable et ceci à l'aide de la transformation TR.

Après l'étude faite par ***Abel****,* ***Appell*** *et* ***Liouville****, plusieurs personnes se sont intéressées à la résolution des équations d'Abel qui apparaissent souvent dans les réductions des équations différentielles d'ordre supérieur et aussi dans la résolution de certains problèmes physiques, qu'on se propose d'exposer.*

L'énorme développement, depuis l'année 1980, d'algorithmes et aujourd'hui de logiciels permet de trouver des solutions à ces équations mathématiques en un temps raisonnable. Parmi ces logiciels, le logiciel ***Maple*** *développé à l'université de Waterloo (Canada) pour l'utilisation efficace dans plusieurs branches des mathématiques en particulier pour la résolution de nombreuses équations différentielles.*

Dans le cas des équations différentielles d'Abel, Maple permet de résoudre les EDO d'une classe donnée par la résolution de leur transformation d'équivalence.

Le chapitre 1est consacré à quelques rappels et définitions sur les équations différentielles d'Abel et contient aussi une méthode de résolution pour le cas où les invariants sont constants.

Dans le chapitre 2, on étudie les équations d'Abel ayant des invariants non constants et on décrira l'algorithme de la détermination de la transformation d'équivalence.

Dans le chapitre 3, on présente les méthodes de résolution pour les équations d'Abel dépendantes d'un paramètre ainsi que les algorithmes utilisés.

Dans le chapitre 4, on analyse les classes intégrables des EDO d'Abel.

Enfin, le chapitre 5 contient les différents algorithmes réalisés par le logiciel Maple version 8, ainsi que quelques exemples .

CHAPITRE1

RAPPELS SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'ABEL

On se propose dans cette partie de rappeler quelques résultats et définitions sur les équations différentielles d 'Abel dérivant des travaux exposés essentiellement dans le livre de « Kamke ».

Définition 1-1 :

Une équation d'Abel est une équation différentielle ordinaire (E.D.O) non linéaire du 1er ordre de la forme :

$$y' = f_3 y^3 + f_2 y^2 + f_1 y + f_0 \qquad (1\text{-}1)$$

où $f_i = f_i(x)$ sont des fonctions arbitraires en x.

L'équation (1-1) est appelée équation d'Abel de première espèce.

La forme la plus générale des équations d'Abel est la suivante :

$$y' + \frac{a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0}{y + g} = 0 \qquad (1\text{-}2)$$

appelée équation d'Abel de deuxième espèce.

L'équation (1-2) peut être ramené sous la forme de l'équation (1-1) par le changement de variables :

$$y = \frac{1}{v(x)} - g \qquad (1\text{-}3)$$

avec les résultats :

$f_3 = a_3 - a_2 g^2 + a_1 g - a_0$

$f_2 = g - 3a_3 g^2 + 2a_2 g - a_1$

$f_1 = 3a_3 g - a_2$

$f_0 = -a_3$ (1-4)

Le livre de « Kamke » [13] rassemble quelques méthodes de résolutions des équations d'Abel qu'on se propose d'exposer.

1-1 **Equations d'Abel de 1^er^ espèce** :

a) Si f_1 est une fonction continue, f_1 et f_3 de classes C^1 avec $f_3 \neq 0$. Alors l'équation :

$$y' = \sum_{r=0}^{3} f_r(x) y^r \tag{1-5}$$

se transforme par le changement de variables :

$$y = \varpi(x)\eta(\xi) - \frac{f_2}{3f_3}, \xi = \int f_3 \varpi^2 dx$$

(avec $\varpi(x) = \exp(\int f_1 - \frac{f_2^2}{3f_3})dx)$

en la forme normale :

$$\eta' = \eta^3 + I(x) \tag{1-6}$$

avec:

$$f_3 \varpi^2 I = f_0 + \frac{d}{dx}(\frac{f_2}{3f_3}) - \frac{f_1 f_2}{3f_3} + \frac{2f_2^3}{27f_3^2}$$

b) Si u(x) est une solution de l'équation différentielle (1-1), alors cette dernière, par le changement de variables :

$$y = u(x) + \frac{E(x)}{Z(x)} \qquad \text{où} \quad E(x) = \exp \int (3f_3^2 u + 2f_2 u + f_1) dx$$

se transforme en l'équation différentielle :

$$Z' + \frac{\phi_1}{Z} + \phi_2 = 0 \tag{1-7}$$

avec

$$\phi_1(x) = f_3 E^2 \quad , \quad \phi_2(x) = (3 f_3 u + f_2) E$$

Si $\phi_2 = 0$, c'est à dire : si $u = -\frac{f_2}{3 f_3}$ est une solution de l'équation (1-5), on peut alors résoudre l'équation (1-7) et ainsi aussi (1-5).

c) Si $y' = f_3 y^3 + f_2 y^2 + f_1 y + \frac{d}{dx}(\frac{f_2}{3 f_3}) + \frac{f_2}{3 f_3}(f_1 - \frac{2 f_2^2}{9 f_3})$

on obtient la solution :

$$y(x) = E_1(x)(C - 2\int f_3 E_1^2 dx)^{-1/2} - \frac{f_2}{3 f_3}$$

avec :

$$E_1(x) = \exp(\int (f_1 - \frac{f_2^2}{3 f_3}) dx)$$

d) Si $f_0 = 0$, c'est à dire : si l'équation différentielle :

$$y' = f_3 y^3 + f_2 y^2 + f_1 y \tag{1-8}$$

est donnée et si $f_2 \neq 0$; en posant

$$y(x) = u(x)\eta(\xi) .$$

l'équation (1-8) devient

$$\eta'(\xi) = g(\xi)\eta^3 + \eta^2 \quad . \tag{1-9}$$

avec :

$$g(\xi) = u(x)\frac{f_3(x)}{f_2(x)} \quad \text{où} \quad \xi = \int u f_2 dx \quad \text{et} \quad u = \exp\int f_1 dx \quad .$$

De plus, si on pose :

$$\xi'(t) = -\frac{1}{t\eta(\xi)} \tag{1-10}$$

l'équation (1-9) devient

$$t^2\xi'' + g(\xi) = 0 \tag{1-11}$$

Si on arrive à tirer $\xi(t)$ à partir de l'équation (1-11), par l'équation (1-10) on trouve la fonction $\eta(\xi)$.

e) Si $f_0 = 0$ et $f_2 = 0$, alors l'EDO est une équation de Bernoulli qui peut être ramené grâce au changement de variables :

$$y(x) = u(x)\exp\int f_1 dx$$

à une équation à variables séparables :

$$u' = u^3 \exp 2\int f_1 dx$$

et de là, on obtient :

$$\frac{1}{u^2} = -2\int \exp(2\int f_1 dx)dx + C$$

f) Si $f_0 = 0$, $f_1 = 0$ et $\frac{d}{dx}(\frac{f_3}{f_2}) = af_2$ pour une certaine constante a ; l'équation se ramène

à une équation à variables séparables par la transformation :

$$y = \frac{f_2}{f_3}u(x)$$

et on obtient l'équation à variables séparées :

$$u' = \frac{f_2^2}{f_3}(u^3 + u^2 + au)$$

g) Si la fonction (l'invariant) donnée par :

$$\phi(x) = f_0 f_3^2 + \frac{1}{3}(f_2' f_3 - f_2 f_3' - f_1 f_2 f_3) + \frac{2}{27 f_2^3} \tag{1-12}$$

satisfait, pour une constante α convenablement choisie, l'équation :

$$f_3\phi + (f_2^2 - 3f_1 f_3 - 3f_3)\phi = 3\alpha\phi^{5/2}$$

alors la solution est donnée par :

$$y = \frac{(3\phi^{1/3}u - f_2)}{3f_3}$$

où $u = u(x)$; u est déterminée par l'équation

$$\int \frac{du}{u^3 - u\alpha + 1} + C = \int \frac{\phi^{2/3}}{f_3} dx$$

Si $\phi = 0$, alors $y = -\frac{f_2}{3f_3}$ est une solution.

L'équation différentielle se ramène à une équation de Bernoulli :

$$u = f_3 u^3 + (f_1 + \frac{f_2^2}{3f_3})u$$

par le changement de variables :

$$y = u(x) - \frac{f_2}{3f_3}$$

1-2 Equations d'Abel de $2^{\text{ème}}$ espèce :

a) $[y + g(x)]y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x)$. (1-13)

Pour :

$$u(x) = (y+g)E \quad \text{avec} \quad E = \exp(-\int f_2 dx)$$

L'équation (1-13) prend la forme spéciale :

$$u'u = (f_1 + g - 2f_2 g)Eu - (f_0 - f_1 g + f_2 g^2)E \qquad (1\text{-}14)$$

et par le changement de variables :

$$y + g = \frac{1}{u(t)}$$

l'équation se ramène à :

$$u' + (f_2 g^2 - f_1 g + f_0) + (f_1 - 2f_2 g + g)u^2 + f_2 u = 0 \qquad (1\text{-}15)$$

qui est une équation d'Abel de 1^{ere} espèce (tant que : $y + g \neq 0$).

L'équation (1-14) est de la forme :

$$y'y = f_1(x)y + f_0(x)$$

et avec la transformation :

$$y = u(x) + F(x) \quad \text{avec} \quad F(x) = \int f_1 dx$$

elle se ramène à :

$$(u + F)u' = f_0 \tag{1-16}$$

Si $f_0 \neq 0$, il s'ensuit que pour :

$$u(x) = \eta(\xi) \quad , \quad \xi = \int f_0 dx$$

on a encore :

$$(\eta + F)\eta' = 1$$

Abel a donné des solutions pour certains cas d'EDO de cette espèce.

Si par exemple dans l'équation a) de (1-2) on a : $f_1 = 2 f_2 g - g'$, alors

$$y = -g + E\left[2\int (f_0 + g'g - f_2 g^2)E^{-2}dx\right]^{1/2} \quad \text{avec} \quad E = \exp\int f_2 dx$$

et l'équation :

$$(y + g)y' = f_2 y^2 + f_1 y - f_2 g^2$$

possède comme solution :

$$y = -g + E\int (f_1 + g - 2 f_2 g)E^{-1}dx \quad \text{avec} \quad E = \exp\int f_2 dx$$

b) $[g_1(x)y + g_0(x)]y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x)$

Si $g_0(2 f_2 - g_1') = g_1(f_1 + g_0)$ et $g_0 \neq 0$ alors :

$$\frac{g_1 y^2 + 2 g_0 y}{g_1 I} = 2\int \frac{f_0}{g_1 I}dx + C \quad \text{avec} \quad I = \exp\int \frac{2 f_2}{g_1}dx$$

c) $[g_1(x)y + g_0(x)]y' = f_3(x)y^3 + f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x)$

Si g_0 et g_1 sont deux fonctions de classes C^1 et si $g_1 \neq 0$ alors l'EDO se transforme en une équation de la forme (1-1) pour les solutions y telles que :

$$g_1 y + g_0 \neq 0$$

et par la transformation :

$$g_1 y + g_0 = \frac{1}{u(x)}.$$

En particulier, si $f_0 = 0$ alors pour $y = \frac{1}{u(x)}$ apparaît l'équation différentielle ordinaire a) :

$$(g_0 u + g_1)u + f_1 u^2 + f_2 u + f_3 = 0$$

Les résultats précédents sur les EDO d'Abel de 1^ere^ et 2^eme^ espèces exposés en détail dans le livre de « Kamke » [13], ne résolvent que certaines équations vérifiants les conditions de chaque cas, d'où le problème suivant :

« Si une équation d'Abel n'est pas résoluble par les différentes méthodes décrites précédemment ; peut-on avoir une autre méthode résolvant ce type des équations ? »

1-3 Formes normales rationnelles des EDO d'Abel :

Définition1-2 :

On appelle groupe d'invariant d'une équation, le groupe de toutes les transformations qui conserve sa structure.

En général, ce groupe est appelé « le groupe infini de Lie ».

Définition1-3 :

On appelle forme normale rationnelle (FNR) d'une équation différentielle :

$$y + r(x, y) = 0$$

où *r* est une fonction rationnelle par rapport à ces arguments ;

l'équation ayant un nombre minimum de coefficients non constants obtenus en faisons une transformation rationnelle en *x* et *y*.

Pour les équations différentielles homogènes, ce concept est connu.

Si *y* et *x* représentent les variables respectivement dépendante et indépendante, la structure du groupe d'invariants est donnée par :

$$\{x = F(u), y = G(u)v\}$$

avec F et G deux fonctions arbitraires en u et $v = v(u)$.

La forme normale rationnelle pour une équation d'ordre n est l'équation équivalente avec élimination du terme proportionnel à $y^{(2n-1)}$.

Exemple :

Considérons l'équation linéaire du second ordre de la forme :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

la FNR de cette équation est :

$$y'' + r(x)y = 0$$

où est une fonction rationnelle en p et q.

Concernant les équations d'Abel, on introduit les lemmes suivants :

Lemme 1 :

La structure du groupe d'invariants d'une équation d'Abel donnée sous la forme (1-1) est :

$$\{x = F(t), y = P(t)u + Q\} \tag{1-17}$$

où $u = u(t)$ avec F,P *et* Q des fonctions arbitraires par rapport à leurs arguments.

Lemme 2 :

Il y a deux différentes possibilités de FNR pour une équation d'Abel donnée sous la forme (1-1) (c'est à dire : de 1^{ere} espèce) :

Cas (i) :

$$y' + Ay^3 + By = 0 \tag{1-18}$$

Cas (ii) :

$$y' + Ay^3 + By + 1 = 0 \tag{1-19}$$

où $A = A(x)$ et $B = B(x)$ sont des fonctions rationnelles en les coefficients f_3, f_2, f_1, f_0 et leurs dérivées, avec $A \neq 0$.

Preuve :

Si on applique la transformation (1-17) à l'équation (1-1), on obtient :

$$u' + f_3F^3P^2u^2 + (3f_3 + f_2)FPu^2 + (3f_3Q^2 + 2f_2Q + f_1 + \frac{P'}{FP})F'u$$
$$+ (3f_3Q^3 + f_2Q^2 + f_1Q + f_0)\frac{F'}{P} + \frac{Q'}{P} = 0 \quad (1\text{-}20)$$

où $$f_k = f_k(F(t)) \text{ et } ' = \frac{d}{dt}$$

Le choix de

$$Q = -\frac{f_2}{3f_3} \quad \text{et} \quad P = (f_3Q^3 + f_2Q^2 + f_1Q + f_0)F' + Q' \quad (1\text{-}21)$$

permet d'éliminer le coefficient de u^2 et si dans (1-20) le terme en P est réduit à zéro, le terme constant est alors égal à 1.

Grâce à la condition $F' \neq 0$, il n'existe pas un choix de F pour que le terme linéaire en u soit éliminé ou devient constant**.**

Par conséquent, si on choisit $F = t$, la variable indépendante u ne change pas.

Cette transformation peut être interprétée en deux étapes :

Tout d'abord, une nouvelle variable u est introduite dans (1-1) par :

$$y = u - \frac{f_2}{3f_3}$$

L'équation d'Abel devient :

$$u' + a_3u^3 + a_1u + a_0 = 0$$

avec

$$a_3 = f_3$$

$$a_1 = f_1 - \frac{f_2^2}{3f_3} \quad (1\text{-}22)$$

$$a_0 = f_0 - \frac{f_1 f_2^3}{3 f_3} + \frac{2 f_2^3}{27 f_3^2} - \frac{f_2}{3 f_3}$$

Si $a_0 = 0$, on retrouve le cas (i) (c'est à dire l'équation (1-18))

où

$$A = f_3 \quad \text{et} \quad B = a_1$$

Si non, on introduit une autre nouvelle fonction :

$$u = a_0 w \;\; ; \;\; u' = a_0 w' + a_0' w \quad .$$

ce qui conduit au cas (ii) (c'est à dire l'équation (1-19)) :

$$w + Aw^3 + Bw + 1 = 0$$

avec

$$A = a_0^2 a_3 \qquad \text{et} \qquad B = a_1 + \frac{a_0'}{a_0}$$

Remarque :

Le cas (i) du lemme précèdent est en fait l'équation de Bernoulli.

On rappelle que les équations de Bernoulli sont de la forme :

$$y' + p(x)y = q(x)y^n , n \neq 0{,}1$$

(Pour n = 0 ou 1 cette équation est linéaire)

La résolution de ce type d'équation peut être ramène à la résolution des équations linéaires par la transformation :

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}$$

et la résolution de l'équation obtenue est connue.

Liouville a donné une formule pour la loi de transformation entre l'équation originale et celle transformée par le changement de variables.

Théorème1-4 : (Liouville)

Considérons une équation d'Abel de la forme (1-1) :

$$y + f_3 y^3 + f_2 y^2 + f_1 y + f_0 = 0 \qquad ; \quad f_k = f_k(x)$$

Le groupe d'invariants est donné par :

$$\{x = F(t) \quad , \quad y = P(t)u + Q(t)\}$$

l'invariant relatif associe est :

$$\phi_3 = f_2 f_3' - f_2' f_3 + 3 f_0 f_2^2 - f_1 f_2 f_3 + \frac{2}{9 f_2^3}.$$

Par dérivation on trouve :

$$\phi_5 = f_3 \phi_3' - 3(f_3 + \frac{1}{3 f_2^2} - f_1 f_3)\phi_3$$

Si on note f et $\widetilde{f}$ les coefficients de l'équation originale et celle transformé par le changement de variables (1-17), alors la loi de transformation entre leurs invariants associe est donnée par la formule :

$$\phi_k(\widetilde{f}) = F'^K P^K \phi_K(f)$$

Le quotient $\frac{\phi_3^5}{\phi_5^3}$ *est un invariant absolu.*

Preuve :

La preuve de ce théorème dû à Liouville était basée sur la méthode de Lie [22].

Remarque :

Les invariants et leurs propriétés seront traités en détail dans le chapitre suivant.

La valeur de l'invariant relatif ϕ_3 permet de distinguer deux types de FNR données par le lemme suivant :

Lemme 3 :

Il existe deux possibilités de FNR :

Cas (i) :

$$\phi_3 = 0 \quad , \quad y' + Ay^3 + By = 0$$

où $A = f_3$, $B = f_1 - \frac{f_2^2}{3 f_3}$ (cas d'une équation de Bernoulli)

Cas(ii) :

$$\phi_3 \neq 0 \quad , \; y + Ay^3 + By + 1 = 0$$

où $A = \dfrac{\phi_3^2}{9 f_3^3}$, $B = f_1 - \dfrac{f_2^2}{3 f_3} - \dfrac{2 f_3'}{f_3} + \dfrac{\phi_3'}{\phi_3}$.

Si une équation d'Abel est donnée sous sa forme normale rationnelle ; son invariant absolu peut être simplifie .D'où le corollaire :

Corollaire 1 :

Dans le cas (ii), l'invariant absolu est donné par :

$$K(A,B) = \frac{1}{A}(3B - \frac{A'}{A})^3 \tag{1-23}$$

Pour le cas (i), on ne connaît pas une formule simplifiant l'invariant absolu associe.

L'invariant (1-23) à un rôle décisif pour la résolution du problème d'équivalence dans le cas (ii) ; comme le montre le théorème suivant :

Théorème 1-5 :

Les deux formes normales rationnelles peuvent être considérées séparément :

Cas (i) :

Si deux EDO d'Abel sont données sous la forme :

$$y' + Ay^3 + By = 0$$

elles sont équivalentes par transformation :

$$\{x = F(t) \quad , \quad y = P(t)\, u\}$$

Cas(ii) :

Les deux équations d'Abel données par :

$$y' + A(x)\, y3 + B(x)\, y + 1 = 0 \quad et \quad u' + R(x)\, u^3 + S(x)\, u + 1 = 0$$

sont équivalentes par la transformation :

$$\{x = F(t) \quad , \quad y = F'(t)\, u\}$$

si et seulement si, pour l'invariant absolu (1-23), elles vérifiées :

$$K(A,B)\big|_{X=F(t)} = K(R,S) \qquad (1\text{-}24)$$

1-4 **Invariant d'Abel :**

Considérons l'équation différentielle :

$$y = f_3 y^3 + f_2 y^2 + f_1 y + f_0 \qquad ; \qquad f_i = f_i(x)$$

Il existe une méthode classique (dûe à Abel) qui consiste à associer un invariant à l'équation (1-1) défini comme suit.

Posons :

$$y = u - \frac{f_2}{3f_3}$$

De (1-1) on tire :

$$u = a_3 u^3 + a_1 u + a_0 \qquad (1\text{-}25)$$

où a_0, a_1, a_3 sont des fonctions en x et $a_3 \neq 0$

Si $a_0 = 0$, on pose :

$$v = u^2.$$

On obtient :

$$\frac{1}{2v} = a_3 v^2 + a_1 v$$

qui est une équation de Bernoulli.

Si $a_0 \neq 0$, posons :

$$u = a_0^{1/3}\, a_3^{-1/3} v.$$

Il en résulte :

$$a_3 v' = (a_0\, a_3^{2})^{1/3}(v3 - \alpha v + 1) \qquad (1\text{-}26)$$

où

$$\alpha = -\frac{-a_0' a_3 + a_0 a_3' + 3a_0 a_1 a_3}{3a_3^{4/3} a_0^{5/3}}$$

Définition 1-6 :

On appelle invariant d'Abel de l'équation (1-1) la quantité :

$$\Delta = -\frac{(-a_0' a_3 + a_0 a_3' + 3a_0 a_1 a_3)^3}{27 a_3^4 a_0^5} \tag{1-27}$$

Proposition 1-7 :

Si l'invariant d'Abel Δ est indépendant de la variable x, l'équation (1-26) est à variables séparées.

Preuve : (Voir [16]).

On donnera dans le dernier chapitre un exemple d'application pour les équations d'Abel ayant un invariant constant.

CHAPITRE 2

LA THEORIE CLASSIQUE DES EDO d'ABEL

On se propose dans ce chapitre d'étudier les propriétés des équations différentielles d'Abel ayant un invariant non constant.

Considérons une équation d'Abel sous la forme :

$$y' = f_3 y^3 + f_2 y^2 + f_1 y + f_0 \qquad (2\text{-}1)$$

où f_3, f_2, f_1, f_0 sont des équations arbitraires en x.

En général, la méthode de résolution est basée sur deux concepts fondamentaux :

- Les invariants.
- Les classes d'équivalences des EDO d'Abel.

Pour ce fait, il est nécessaire de donner une définition de la relation d'équivalence qui relie les deux EDO d'Abel appartenant à la même classe.

2-1 Définitions :

Définition 2-1 :

Deux équations d'Abel sont dites équivalentes si et seulement si l'une est obtenue de l'autre en utilisant la transformation :

$$\{x = F(t), y = P(t)u + Q(t)\} \qquad (2\text{-}2)$$

où t et u (t) représentent respectivement les nouvelles variables indépendante, et dépendante ; F, Q, P sont des fonctions arbitraires en t telles que :

$F' \neq 0$ et $P \neq 0$.

La transformation (2-2) est appelée aussi « transformation d'équivalence », similaire à celle donnée dans le chapitre précèdent et préservant la structure du groupe d'invariants.

Une classe d'équivalence contenant une EDO donnée (représentative de la classe) est alors l'ensemble de toutes les EDO équivalente à celle ci.

On note aussi qu'une infinité d'éléments d'une classe peuvent se ramené l'une à l'autre par le changement de variables (2-2).

Il en résulte donc une infinité de classes disjointes des EDO d'Abel.

Considérons deux équations d'Abel ; la première donnée par l'équation (2-1) et la deuxième celle obtenue de l'équation (2-1) en lui effectuant la transformation (2-2) .
On obtient l'équation :

$$u = \tilde{f}_3 u^3 + \tilde{f}_2 u^2 + \tilde{f}_1 u + \tilde{f}_0 \tag{2-3}$$

où les coefficients $\{\tilde{f}_3, \tilde{f}_2, \tilde{f}_1, \tilde{f}_0,\}$ sont relies à ceux de l'équation (2-1) par :

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_0 &= \frac{F'(f_0(F) + f_1(F)Q + f_2(F)Q^2 + f_3(F)Q^3 - Q'}{P} \\
\tilde{f}_1 &= \frac{P'}{P} - F'\left[f1(F) + 2f_2(F)Q + 3f_3(F)Q^2\right] \\
\tilde{f}_2 &= PF'\left[f_2(F) + f_3(F)Q\right] \\
\tilde{f}_3 &= P^2 F' f_2(F)
\end{aligned} \tag{2-4}$$

Définition 2-2 :

On appelle invariant absolu relativement à l'équation (2-1), la fonction *I* (*f*, *x*) des coefficients $\tilde{f}_3, \tilde{f}_2, \tilde{f}_1, \tilde{f}_0$ et de leurs dérivées par rapport à *x* telles que :
Pour tout {*F, P, Q*} dans l'équation (2-2) on a :

$$I(\tilde{f}, t)\Big|_{\tilde{f}=\tilde{f}(f,t)} = I(f, x)\Big|_{x=F(t)} \tag{2-5}$$

où $\tilde{f} = \tilde{f}(f,t)$ représentent les coefficients $\tilde{f}_3, \tilde{f}_2, \tilde{f}_1, \tilde{f}_0$ et leurs dérivées par rapport à *t*.

Définition 2-3 :

On appelle invariant relatif l'équation (2-1), une fonction *S* des coefficients de l'équation (2-1) et de leurs dérivées telles que si on applique la transformation (2-2) , on obtient une expression φ_S égale à la première en facteurs, dépendant uniquement des fonctions *F*,*P* et *Q* et indépendante des coefficients .
D'où la formule :

$$S(\tilde{f})\Big|_{\tilde{f}=\tilde{f}(f,t)} = \varphi_S(F, P, Q) S(f)\Big|_{x=F(t)} \tag{2-6}$$

Liouville a démontré que dans le cas des équations d'Abel, il existe un invariant relatif de poids 3 :

$$S_3 = f_0 f_3^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{9} f_2^3 - f_1 f_2 f_3 + f_3 f_2' + f_2 f_3'\right) \tag{2-7}$$

L'équation (2-7) peut être utilisée pour généraliser une suite infinie d'invariants relatifs S_{2m+1} de poids $2m+1$ définis par la formule suivante :

$$S_{2m+1} = f_3 S_{2m-1}' - (2m-1) S_{2m-1}\left(f_3' + f_1 f_3 - \frac{f_2^2}{3}\right) \ ; \ \mathrm{m} \geq 2 \tag{2-8}$$

Par conséquent, le produit de deux invariants relatifs de poids respectifs n et m est un invariant relatif de poids $n+m$.

La division de deux invariants relatifs de même poids peut être généralisée à une suite infinie d'invariants absolus :

$$I_1 = \frac{S_5^3}{S_3^5} \quad , \quad I_2 = \frac{S_7 S_3}{S_5^2} \quad , \quad I_3 = \frac{S_9}{S_3^3} \tag{2-9}$$

Remarque:

Le poids n représente le degré de φ_{S_n} par rapport à ($F'P$).

Dans le cas de S_3, $\varphi_{S_3} = (F'P)^3$.

2-2 Méthodes d'intégration :

La description de la méthode d'intégration lorsque l'invariant est constant est basée sur les travaux d'Abel, Appell et Liouville [1], [2], [15].

Dans ce cas , chaque membre de la classe peut systématiquement être ramené à une équation à variables séparables (représentative de la classe) et cela par un choix convenable des fonctions F, P et Q de l'équation (2-2) . [Voir 1-4]

On s'intéresse dans ce travail à la résolution des équations d'Abel ayant un invariant non constant et malheureusement on ne connaît que quelques classes intégrables (qui admettent des solutions) où la méthode est basée sur les propriétés de l'invariant non constant associé.

La détermination - quand cela est possible - des valeurs des fonctions *F, P*et *Q* de la transformation d'équivalence reliant deux EDO d'Abel de même classe permet de donner la solution de chaque membre de la classe lorsque la solution de l'équation représentative est connue .

2-3 Détermination de la transformation d'équivalence :

Dans cette partie, on donnera une méthode explicite pour la détermination des fonctions *F, P* et *Q* de la transformation d'équivalence entre deux EDO d'Abel données.

Considérons deux EDO d'Abel ; la première donnée par l'équation (2-1) et la deuxième de la même forme avec les coefficients $\left\{\tilde{f}_3, \tilde{f}_2, \tilde{f}_1, \tilde{f}_0\right\}$.

Le problème est de déterminer si on peut obtenir la deuxième équation à partir de la première par le changement de variables (2-2) .Cela peut être formulé en écrivant l'égalité entre les coefficients de l'équation transformée obtenue en appliquant la transformation (2-2) à l'équation (2-1) et la deuxième équation ; il en résulte un système d'EDO en $\{F, P, Q\}$.

D'après Liouville, il est nécessaire de noter d'abord que les invariants absolus correspondants aux deux équations sont indépendants de *P* et *Q* (voir les propriétés des invariants).

Cependant, la fonction *F* peut être obtenue en effectuant un processus d'élimination utilisant deux de ces invariants absolus, par exemple :

$$I_1 = \frac{S_5^3}{S_3^5} \qquad \text{et} \qquad I_2 = \frac{S_7 S_3}{S_5^2}$$

On obtient les résultats :

$$0=\frac{\widetilde{S}_5^3}{\widetilde{S}_3^5}-\frac{S_5^3}{S_3^5}\Big|_{x=F(t)}\quad,\quad 0=\frac{\widetilde{S}_7\widetilde{S}_3}{\widetilde{S}_5^2}-\frac{S_7S_3}{S_5^2}\Big|_{x=F(t)}\tag{2-10}$$

L'existence d'une solution commune *F (t)* des équations du système (2-10) vérifiant $F'\neq 0$, est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la transformation d'équivalence (2-2) reliant les deux EDO d'Abel.

Une fois $F(t)$ connue, le système (2-10) devient trivial en P et Q qui peuvent être formulées en fonction de $F(t)$ par un simple calcul.

D'où les formules :

$$P(t)=\frac{F\tilde{f}_3^{\,2}S_3}{f_3^{\,2}\widetilde{S}_3}\Big|_{X=F(t)}$$

$$Q(t)=\frac{F'\tilde{f}_2\,\tilde{f}_3S_3-f_2\,f_3\widetilde{S}_3}{3\,f_3^{\,2}\widetilde{S}_3}\Big|_{X=F(t)}\tag{2-11}$$

où $\{f_i,\tilde{f}_i\}$, $i=0,3$ sont les coefficients des deux équations d'Abel, S_3 est l'invariant relatif (2-7) et $\widetilde{S}_3=S_3\big|_{f_i=\tilde{f}_i}$.

Concernant la solution explicite $F(t)$ du système (2-10), on note que le but de la résolution du problème d'équivalence est qu'il conduise à la solution des différentes équations d'une classe lorsque la solution de l'équation représentative est donnée.

Chaque classe intégrable admet une équation représentative avec des coefficients rationnels et ayant par suite un invariant rationnel (voir plus loin).

Cependant, on suppose que l'une des deux équations d'Abel admet des coefficients rationnels et que le système (2-10) est obtenu en lui effectuant la transformation (2-2).

Le système (2-10) est toujours polynomial en $F(t)$ .Par suite , lorsque la solution commune $F(t)$ existe le résultant entre ces deux polynômes est réduite à zéro et il existe un facteur commun dépendant de $F(t)$ et t qui représente la solution commune obtenue par le calcul du grand diviseur commun – noté *pgcd* – entre les numérateurs des deux équations du système (2-10).

D'autre part, si le pgcd est indépendant de $F(t)$, la transformation (2-2) n'existe pas et par suite les deux EDO d'Abel ne sont pas dans la même classe .

La dépendance en $F(t)$ du $p$gcd est une condition nécessaire pour l'existence de la transformation désirée (2-2) et aussi la conséquence de la validité de l'équation (2-5) et du système (2-10) .

La preuve de la condition suffisante a été donnée par Appell [2].

L'algorithme de la détermination de l'équivalence entre deux EDO d'Abel données où l'une d'elles est rationnelle en x est résumé comme suit :

1- Le calcul de deux invariants absolus conduit au système (2-10), puis on calcul le $p$gcd entre les numérateurs des deux équations d'Abel du système (2-10).

2- Si le $p$gcd calculé dans (1) est indépendant de $F(t)$, les deux équations d'Abel ne sont pas dans la même classe . Si non, on détermine l'expression explicite de la fonction $F(t)$ à partir du $p$gcd calculé précédemment .

3- Remplacer la valeur de $F(t)$ dans les formules (2-11) pour obtenir les expressions de $P(t)$ et $Q(t)$.

Par cet algorithme, la transformation d'équivalence est complètement déterminée.

Enfin, on applique cette transformation à la solution de la première équation pour obtenir une solution pour l'autre équation d'Abel.

Pour une meilleure compréhension de la méthode décrite précédemment, on donnera dans la partie suivante un exemple d'application.

2-4 Exemple :

Considérons les deux équations d'Abel ayant un invariant non constant définies par :

$$y' = -\frac{1}{2(x+4)}\left(xy^3 + 2y^2\right) \qquad (2\text{-}12)$$

$$y' = \frac{(f'x - f)}{2(f + 3x)}\left((x - f)y^3 + 2y^2\right) - \frac{y}{x} \qquad (2\text{-}13)$$

où $f \equiv f(x)$ est une fonction arbitraire en *x*.

Dans ce type de situation ; l'une de des deux équations données admet un invariant rationnel en *x* et on connaît sa solution . C'est à dire :
Pour l'équation (2-12) on a la solution donnée par :

$$C_1 - \frac{\sqrt{y^2 x + 4y - 1}}{y} + 2\arctan\left(\frac{1 - 2y}{\sqrt{y^2 x + 4y - 1}}\right) = 0 \qquad (2\text{-}14)$$

où C_1 est une constante arbitraire.

On se propose de déterminer la transformation d'équivalence reliant les équations (2-12) et (2-13), d'où les étapes suivantes :

- On commence par (l'étape (1)) le calcul des invariants relatifs S_1 , S_2 , S_3 conduisant au système (2-10) ; on obtient :

$$0 = \frac{\left(87ft + 9f^2 + 184t^2\right)^3}{t(9f + 31t)^5} - \frac{\left(280 + 105F + 9F^2\right)^3}{(40 + 9F)^5}$$

$$(2\text{-}15)$$

$$0 = \frac{\left(81f^3 + 1431f^2 t + 7185ft^2 + 10903t^3\right)(9f + 31t)}{\left(87ft + 9f^2 + 184t^2\right)^2} - \frac{\left(81F^3 + 1674F^2 + 10290F + 19600\right)(40 + 9F)}{\left(2F^2 + 105F + 280\right)^2}$$

On note que dans le système (2-15) on a : $F \equiv F(t)$ et $f \equiv f(t)$.

- Dans l'étape (2) on calcul le *p*gcd entre les numérateurs des expressions du système précédent, puis on le résolvent pour *F* ; il en résulte :

$$27(t - tF - f) = 0 \qquad (2\text{-}16)$$

et par suite la fonction *F* est donnée par :

$$F(t) = \frac{f(t)}{t} - 1 \qquad (2\text{-}17)$$

On substitue cette valeur de F dans les équations (2-11) , puis on remplace les résultats obtenus dans (2-2) .

Finalement, la transformation de la forme (2-2) reliant les équations (2-12) et (2-13) est la suivante :

$$\left\{x=\frac{f(t)}{t}-1,\, y(x)=tu(t)\right\} \tag{2-18}$$

Pour avoir une solution à l'équation (2-13), on applique la transformation (2-18) à l'équation (2-14)(Solution de l'équation (2-12)) et on identifie les variables par $(t \to x, u \to y)$.

D'où la solution :

$$C_1-\frac{\sqrt{\left(\frac{f}{x}\right)x^2y^2+4xy-1}}{xy}+2\arctan\left(\frac{1-2xy}{\sqrt{\left(\frac{f}{x}-1\right)x^2y^2+4y-1}}\right)=0 \tag{1-19}$$

Remarque :

On donnera dans le dernier chapitre l'algorithme réalisé par le logiciel Maple relativement à cet exemple, ainsi que les commandes utilisées.

CHAPITRE 3

LES CLASSES DES EDO D'ABEL DEPENDANTES

DE PARAMETRES

On se propose dans ce chapitre de donner une formulation du problème d'équivalence dans le cas des classes des EDO d'Abel dépendantes de paramètres présentées dans [8].

Définition 3-1 :

Une classe paramétrée représente une classe des EDO d'Abel dépendante de paramètres symboliques qui ne sont pas éliminables par le changement de variables (2-2).

Le but de la résolution des classes paramétrées est clair ; à chaque ensemble de paramètres, correspondent de différentes classes des EDO d'Abel.

Cependant, la formulation du problème d'équivalence dans ce cas permet de résoudre toutes les autres EDO quand la solution d'une EDO représentative d'une classe donnée est connue.

Pour simplifier la discussion, on considèrera le problème d'une classe des EDO d'Abel dépendantes d'un seul paramètre, par exemple c.

De plus, on peut distinguer deux types différents de paramètres :

i) Le problème d'équivalence admet une solution pour une valeur numérique spécifique du paramètre c.

ii) Le problème d'équivalence admet une solution pour une valeur symbolique du paramètre c.

On commencera notre étude par le cas numérique, puis on donnera dans la partie qui suit la discussion du cas symbolique et on verra qu'on peut le ramené à la résolution de plusieurs cas numériques.

Définition 3-2 :

Lorsque le paramètre c dépend d'autres symboles rationnels, la méthode utilisée est appelée « la méthode de l'interpolation rationnelle ».

3-1 Solution pour certaines valeurs numériques du paramètre c :

Considérons le problème d'équivalence entre deux EDO d'Abel ; la première sous la forme de l'équation (2-2) et la deuxième dépendant d'un paramètre c.

Si cette équivalence existe , elle existe pour une valeur spécifique du paramètre c, donc on n'a pas de solutions pour une valeur arbitraire de c.

[L'existence d'une solution dans ce cas signifie que la classe ne dépend pas –en réalité- d'un paramètre].

Par conséquent, la solution commune du système (2-10) ne peut être correctement déterminée par cette valeur, ce qui rend l'algorithme du chapitre précèdent impossible à exécuter.

Pour cela, on calcul de plus un autre invariant absolu .Par exemple : $\frac{S_3 S_7}{S_5^2}$.

Le système (2-10) devient :

$$\begin{aligned}
&(1) \quad 0=\frac{\widetilde{S}_5^3}{\widetilde{S}_3^5}-\frac{S_5^3}{S_3^5}\Big|_{x=F(t)} \\
&(2) \quad 0=\frac{\widetilde{S}_3\widetilde{S}_7}{\widetilde{S}_5^2}-\frac{S_3 S_7}{S_5^2}\Big|_{x=F(t)} \qquad\qquad (1\text{-}3) \\
&(3) \quad 0=\frac{\widetilde{S}_5\widetilde{S}_7}{\widetilde{S}_3^4}-\frac{S_5 S_7}{S_3^4}\Big|_{x=F(t)}
\end{aligned}$$

On se propose de chercher une solution pour ce système vérifiant : $F' \neq 0, c' = 0$.

Dans ce cas, on suit les étapes suivantes :

- On élimine c des deux expressions (1) et (2) dans (3-1) ; puis on prend le résultant entre les deux expressions qui résulte .On obtient R_1.
- On élimine c des deux expressions (1) et (3) dans (3-1) ; puis on prend le résultant entre les deux expressions qui résulte .On obtient R_2.

Lorsque la solution existe, le résultant entre R_1et R_2 est nulle par rapport à F(t).
En d'autre terme, l'algorithme du chapitre précédent est valable pour R_1 et R_2 .
Si le *p*gcd entre R_1 et R_2 est un facteur dépendant de F(t) et t, on aura la solution souhaitée F (t).

La méthode expliquée précédemment est correcte et simple en théorie mais elle n'est pas pratique, vue la complexité du calcul des expressions même avec des exemples simples.

Une solution pour ce problème consiste à réduire le système (3-1) et pour lequel l'algorithme soit plus rapide à exécuter.

L'idée de cet algorithme est résumé comme suit :

1- D'après les considérations précédentes, quand la solution du problème d'équivalence existe ; le résultant entre deux expressions dans (3-1) ne sera pas réduit à zéro pour toute valeur de t. Alors on n'a pas introduit une valeur correcte (inconnu pour l'instant) du paramètre c .
Par conséquent, si on insert dans (3-1) une valeur numérique pour t et puis on calcule le *p*gcd défini précédemment, ce *p*gcd ne contiendra aucun facteur en F(t).
Ce fait est un premier test de l'existence d'une solution avant d'aller plus loin.

2- Si le système (3-1) est évalué pour $t = t$o où t_0 est un nombre vérifiant l'étape (1), on calcule les numérateurs des expressions qui résultes en suite on calcul le résultant de chaque couple de numérateurs par rapport à *F*(t).On obtient $\widetilde{R}_1$ et $\widetilde{R}_2$.
Aucun des deux résultants n'est réduit à zéro puisque le pgcd de l'étape précédente est indépendant de *F*(t).De plus le calcul de $\widetilde{R}_1$ et $\widetilde{R}_2$ devient maintenant assez simple puisque l'expression est indépendante de *t*.

3- Si la solution du problème existe, le gcd entre $\widetilde{R}_1$ et $\widetilde{R}_2$ donnera un facteur dépendant uniquement de c.
La résolution de ce facteur conduit à la solution commune c pour $\widetilde{R}_1$ et $\widetilde{R}_2$.

Plus précisément, on aura dans ce cas un ensemble de candidats (y compris la valeur correcte) de c. Ces candidats ne conduisent pas tous forcément à la solution F(t) du problème d'origine.

3-2 Exemple :

Considérons le problème d'équivalence entre une équation d'Abel donnée :

$$u' = \frac{(1 - t^4 - t^8)u^3}{t^7} + 4\frac{u^2}{t^4} + \frac{u}{t} \tag{3-2}$$

et celle présentée dans les mémoires d'Abel :

$$y' = \frac{(cx^4 + x^2 + 1)y^3}{x^3} + y^2 \tag{3-3}$$

Pour la détermination de la transformation d'équivalence dans ce cas, l'algorithme décrit précédemment se déroulera comme suit :

Les équations du système (3-1) sont de la forme $I(F(t),c)$, alors on essaie de les simplifier par la substitution de t par un nombre, par exemple : 0,1,2, etc.

On commence par $t = 0$, ici on est obligé de faire plusieurs opérations et cela par l'utilisation du logiciel Maple.

On prend les numérateurs de chaque équation dans le système (3-1), puis on prend les coefficients de ces numérateurs qui sont des polynômes en $F(t)$ et c .

Pour cela, on doit utiliser « collect » avec les options « distributed » et « normal » avant de prendre les coefficients avec « coeffs ».

Finalement, on met $t = 0$ dans chaque coefficient.

Si cet valeur n'est pas bonne on passe à la valeur suivante $t = 1$, puis on effectue les étapes suivantes de l'algorithme.

Les résultats de ces calculs sont interprètés comme suit :

- La substitution de la valeur de $t = 0$ dans les trois expressions conduit à la conclusion : '$t = 0$ est un mauvais point '.

- Le système (3-1) est évalué à $t = 1$.
- Le *p*gcd entre chaque deux expressions du système (3-1) est indépendant de *F*, donc le premier test pour l'existence de la solution est vérifié.
- Dans l'étape (2), le calcul des résultants $\widetilde{R}_1$ et $\widetilde{R}_2$ définis précédemment relativement aux équations (3-2) et (3-3) se fait sans problème concernant la taille des expressions.
- Le pgcd de l'étape (3) est un polynôme en *c* et sa factorisation conduit aux trois facteurs suivants : $9c$-2 ,$36c$-5, c+1.
- La résolution de ces facteurs par rapport à c donne 3 candidats pour le paramétre c :

$$c \in \left\{ \frac{2}{9}, \frac{5}{36}, -1 \right\}$$

- Dans l'étape (4), on remplace chaque fois une valeur de ces candidats dans les équations du système (3-1), puis on calcul le *p*gcd par la méthode indiquée précédemment.
- Les calculs avec Maple montre que les valeurs de $c = 2/9$ et $c = 5/36$ ne conduisent pas à des facteurs dépendants de *F* et *t* et par suite le problème d'équivalence n'admet pas de solution.
- Par contre la valeur de c = -1 conduit à un facteur qui dépend de *F* et *t* définit par :

$$F^2 t^4 - 1$$

. Il en résulte que pour c = -1, le problème d'équivalence admet deux solutions :

$$F = -\frac{1}{t^2}, \frac{1}{t^2}$$

[On choisit une de ces valeurs pour retrouver la transformation d'équivalence].

Finalement, si on introduit la valeur $F = \frac{1}{t^2}$ dans la formule des expressions de *P*et *Q* (c'est à dire les équations (2-11)), on obtient la transformation de la forme :

$$\left\{ x = \frac{1}{t^2}, y = -\frac{u(t)}{t} \right\} \qquad (3\text{-}4)$$

La solution de l'équation est obtenue par Maple avec la commande « dsolve ».

Si on applique la transformation d'équivalence (3-4) à la solution de l'équation (3-2) puis on substitue c = -1 ; on obtiendra une solution à l'équation (3-3).

[La solution de (3-3) et obtenue à partir de celle de (3-2) par la commande « dchange » qui existe dans Maple.]

Remarque :

L'algorithme concernant cet exemple sera donné dans le dernier chapitre .

3-3 Solution quand le paramètre c est une fonction rationnelle d'autres symboles :

On considère le cas où le paramètre c dépend d'autres symboles, par exemple $\{\alpha\}$.Alors si cette dépendance est rationnelle, il est possible de ramener la détermination de $c(\alpha)$ à une suite de problèmes ayant pour solutions une valeur numérique de c.

Par suite chacun de ces problèmes numériques peut être résolu on utilisant l'algorithme de la partie précédente.

L'idée dans cette partie consiste à attribuer des valeurs numériques au symbole $\{\alpha\}$ dans l'expression de l'invariant pour déterminer $c\,(\alpha)$ par la méthode de l'interpolation rationnelle.

Pour facilité la présentation, on discute d'abord le cas où $\{\alpha\}$ représente un seul paramètre puis on fait une extension de l'algorithme pour le cas où $\{\alpha\}$ représente plusieurs paramètres par la considération d'un exemple concret.

Cas où {α } représente un seul paramètre :

Lorsque $\{\alpha\}$représente un seul paramètre l'interpolation rationnelle est résumée comme suit :

1- On prend le système (3-1) et on donne une valeur numérique pour α (on vérifie tous les points possibles) ; il en résulte donc un système qui dépend uniquement de x, c et F.

2- Entrer l'étape (2) dans l'algorithme de la partie précédente et continuer toutes les autres étapes.

(a) si on a pas de solution pour c et F tels que : $c' = 0$ et $F' \neq 0$; on arrête le processus.

- Soit l'EDO donnée n'appartient pas à cette classe, ou bien la solution ne représente pas une dépendance rationnelle en $\{\alpha\}$ de *c*.

(b) Par contre, si la solution pour *c* et *F* existe, la donnée d'une valeur de *c* et α représente un point de la courbe $c(\alpha)$.

3- Utiliser ces points, interpréter *c* comme une fonction de α et tester si la valeur interprétée résoud toujours le problème pour une valeur arbitraire de α .

(a) Dans ce cas, le problème est résolu.

(b) Si non, on change la valeur de α et on recommence l'étape (2) de cet algorithme.

Remarque :

La méthode de l'interpolation rationnelle de $c(\alpha)$ repose sur la connaissance préalable du degré des polynômes en α des numérateurs et des dénominateurs.

Cette information n'est pas disponible d'avance, mais on connaît le fait que la somme de ces degrés est égale à $n-1$, où *n* représente le nombre des points interprétées.

L'interpolation de l'étape (3) avant de passer à l'étape (3b) permet de tester les différentes interpolations possibles ; on commence par le degré maximum possible pour le numérateur et on termine par celui de dénominateur. [Voir le dernier chapitre]

Cas où {α } représente plus d'un paramètre :

L'extension de l'algorithme précédant dans le cas où {α } représente plusieurs paramètres ; par exemple {a, b} est simple et plus illustrée par la donnée d'un exemple concret.

Considérons le problème d'équivalence entre les deux équations d'Abel données par :

$$y' = \frac{c(2x^2c-2)y^3 - 3cy^2 + cxy}{1-x^2c} \qquad (3\text{-}5)$$

et

$$y' = \frac{a\left(2x^2a - 2b\right)y^3 - 3ay^2b + abxy}{b\left(b - x^2a\right)} \qquad (3\text{-}6)$$

La solution dans ce cas est évidemment l'identité ($x \to x, y \to y$) qui existe uniquement quand $c = \frac{a}{b}$.

On se propose dans ce paragraphe de déterminer que $c = \frac{a}{b}$ (fonction rationnelle de deux paramètres) en utilisant l'algorithme décrit précédemment.

Cet algorithme est réalisé par le logiciel du calcul formel Maple version 8 et les résultats obtenus sont interprétés comme suit :

- On commence par l'étape (1) :

On prend le système d'équations (3-1) relativement aux équations (3-5) puis attribuons des valeurs numériques pour le premier paramètre *a* (vérifier pour quelques valeurs possibles). On prend $a = 1$; le système dépend uniquement du second paramètre *b* puis on donne des valeurs numériques à *b*.

Le système dans ce cas est évalué à $a = 1, b = 2$ et qui dépend maintenant de *x, F* et *c*.

- On démarre l'étape (2) :(actuellement l'algorithme de la partie 3-1)

Avec le système de l'étape précédente on détermine la valeur de $c = \frac{1}{2}$ qui conduit à la solution $F = x$.

Donc la solution qui vérifie $c' = 0$ et $F' \neq 0$ existe.

- Dans l'étape (3), on fait l'interpolation de $c(b)$ (pour l'instant, on a au juste un point : $c(b) = \frac{1}{2}$) puis on fait le test de cette valeur pour une valeur arbitraire de *b* et on vérifie que cette interpolation est complète.

Le système (3-1) avec $a = 1$ et *b* arbitraire ne satisfait pas les conditions $c = \frac{1}{2}$ et $F = x$; on est donc dans l'étape (3b).

Dans ce cas on attribue une nouvelle valeur numérique au paramètre *b* et les calculs donnent que le système est évalué pour $a = 1$, $b = 3$.

- On redémarre l'étape (2) avec $c = \frac{1}{3}$ conduisant à $F = x$.

On enregistre ce nouveau point (étape (2b)), puis on fait l'interpolation – on utilise les deux points obtenus jusqu'à présent -.

- Notre première interpolation est de degré 1 en b :

$$c(b) = \frac{5-b}{6}$$

Cette interpolation ne résoud pas le problème pour une valeur arbitraire de *b*.

- On fait augmenter de 1 le degré du dénominateur dans l'interpolation.

Il en résulte : $c(b) = \frac{1}{b}$

On vérifie que cette seconde interpolation résoud effectivement le système pour une valeur arbitraire de *b*.

Donc, l'interpolation pour b avec $a = 1$ est complète.

- On retourne alors à l'interpolation de $c(a,b)$ par rapport à a mais en tenant compte que pour $a = 1$, il y a une solution : $c(b) = \frac{1}{b}$.

On teste cette solution pour une valeur arbitraire de a (étape (3) par rapport à a), puis on vérifie que l'interpolation pour a est toujours complète.

- On redémarre l'étape (1) pour le nouveau point $a = 2, b = 4$, ensuite en recommence le processus de la détermination de $c(b)$.

En suivant les même étapes décrites précédemment pour $a = 2$, on trouve que $c(b) = \frac{2}{b}$ résoud le problème pour une valeur arbitraire de *b*.

Ce fait conduit au second point dans l'interpolation de $c(a,b)$ par rapport à *a*.

- On arrive à l'étape (3) ; on fait l'interpolation de c par l'utilisation des deux points obtenus pour l'instant.

Il en résulte : $c(a,b) = \frac{a}{b}$

Cette valeur de $c(a,b)$ satisfait le système (3-1) pour une valeur arbitraire de a et b par conséquent le problème est alors résolu.

Remarque :

Bien que les calculs de l'algorithme précédent soient très chers à exécuter, ils présentent un grand intérêt pour la résolution du problème d'équivalence et ceci dans un temps raisonnable.

Dans cet exemple,le logiciel Maple met moins de 12 secondes pour calculer les invariants absolus , le système (3-1) ,la simplification de ce dernier , le déroulement des différentes étapes de la détermination de $c(a,b)$ et $F(t)$ ainsi que les formules de $Q(t)$ et $P(t)$ à partir des équations (2-11), et finalement obtenir une solution pour l'équation (3-2).

CHAPITRE 4

LES CLASSES INTEGRABLES DES EDO D'ABEL

On se propose dans ce chapitre d'analyser les classes intégrables des EDO d'Abel ; on commencera par celles basées sur la littérature, puis on donnera des nouvelles classes intégrables découlant des travaux précédents.

4-1 Les classes intégrales des EDO d'Abel basées sur la littérature :

Dans cette partie, on examine les classes des EDO d'Abel fondées sur la littérature et recouvrant la majorité des références usuelles ; en particulier : les livres de « E .Kamke » et «G.Murphy », les travaux originaux d'Abel, Liouville et d'autres qui se sont intéressés à ce sujet.

L'un des points important dans ces références est le fait que la présentation des classes intégrables est la classification en termes de leurs invariants.

Par conséquent, un grand nombre de ces EDO peuvent être obtenues l'une de l'autre par la transformation d'équivalence (2-2), et par suite elles appartiennent à la même classe.

Cependant, le but de ces travaux est d'utiliser cette classification pour l'obtention d'une large collection des classes intégrables des EDO d'Abel et non pas la résolution des EDO d'Abel.

Ce travail est possible grâce aux algorithmes définis précédemment.

Notation :

- Les classes dépendantes de paramètres sont notées par des nombres ; par exemple « classe 1 ».
- Les classes indépendantes de paramètres sont notées par des lettres ; par exemple « classe A ».

Remarque :

Les solutions des équations représentatives de ces classes seront données dans le dernier chapitre.

On note que les classes qui sont reliées à la littérature sont des cas particuliers de celles présentées par Abel, Liouville et Appell dans leurs mémoires.

On se propose dans cette partie de revoir et analyser une section de ces travaux.

4-1-1 Les travaux d'Abel :

La plus grande présentation des classes intégrables des EDO d'Abel est dû à Abel lui même[1].
L'idée de ses travaux est basée sur la considération des facteurs intégrants de la forme :

$$\mu = e^{r(x,y)} \tag{4-1}$$

et cela pour des équations d'Abel écrites en termes de deux fonctions arbitraires p et q tels que :

$$\Phi \equiv yy' + p(x) + q'(x)y = 0 \tag{4-2}$$

Cas non triviaux :

1- Le premier cas non trivial discuté dans les mémoires d'Abel consiste à prendre la fonction $r(x,y)$ quadratique en y :

$$\mu = e^{(\alpha + \beta y + \gamma y2)} \tag{4-3}$$

avec α, β et γ des fonctions arbitraires en x.

La famille des EDO d'Abel qui résulte admet des invariants non constants, et Abel a montré dans ses mémoires qu'on trouve des classes dépendantes d'une fonction arbitraire $q(x)$ et de deux constantes arbitraires C_i ;

$$yy' - \frac{q'}{2C_1 q + C_2} + q'y = 0 \tag{4-4}$$

qui est une équation d'Abel de deuxième espèce .

La formulation du problème d'équivalence pour ce type d'équations est assez difficile.

Dans le cas de l'équation (4-4), les paramètres C_i ainsi que la fonction $q(x)$ peuvent être éliminés comme suit :

i) On ramène l'équation (4-4) à une équation d'Abel de première espèce par changement de variables :

$$y(x) = \frac{1}{v(x)}$$

ii) On appliquer ensuite la transformation de la forme (2-2) :

$$\left\{x = F(t), v(x) = u(t)\sqrt{-2C_1}\right\} \tag{4-5}$$

avec F définie par :

$$2C_1 q(F) + t\sqrt{-2C_1} + C_2 = 0 .$$

On obtient une équation représentative plus simple que l'équation (4-3) :

$$y' = \frac{y^3}{x} + y^2 \tag{4-6}$$

qui une équation qui ne dépend d'aucun paramètre .

2- La classe intégrable suivante est celle prouvée par Abel dans ses mémoires ; elle est obtenue de l'équation (4-2) en considérant un facteur intégrant de la forme :

$$\mu = \exp\left(\frac{1}{\alpha + \beta y}\right) \tag{4-7}$$

Avec la même méthode du cas précédent, Abel a trouvé une autre classe intégrable des EDO d'Abel ayant un invariant non constant.

Cas d'invariant constant :

Abel a considéré un facteur intégrant de la forme :

$$\mu = (\alpha + \beta y)^n \tag{4-8}$$

Ce fait ne conduit pas à des classes ayant des invariants non constants.

Cependant, la considération d'un facteur intégrant de la forme (4-8) est une première présentation pour une méthode concernant le cas d'invariant constant.

De plus, Liouville et d'autres après lui redécouvrent cette méthode, présentée dans les livres de E.Kamke, M.Chni et G.M.Murphy ; par l'utilisation des changements de variables qui ramènent les équations d'Abel à des équations à variables séparées et dont la méthode de résolution a été déjà vue dans le chapitre 1.

Classe A :(Dépendante d'un seul paramètre arbitraire**)**

D'après Abel [1], on considère le facteur intégrant de la forme :

$$\mu = (A + y)^a (B + y)^b y \tag{4-9}$$

où $A(x)$, $B(x)$ sont des fonctions arbitraires en x et a, b des constantes arbitraires.

Le choix de $b = -a$ dans l'équation (4-9) permet d'obtenir la classe intégrable définie par :

$$yy' + \frac{q'}{4q}\left(\left(q + 2\frac{C_1}{q}\right)^2 - \frac{q^2}{a^2}\right) + q'y = 0 \tag{4-10}$$

La fonction arbitraire $q(x)$ ainsi que la constante C_1 peuvent être éliminées en ramenant l'équation (4-10) en une équation de première espèce, et ceci par un choix convenable des fonctions $\{F, P, Q\}$ dans la transformation (2-2).

Il en résulte une équation représentative pour cette classe dépendante d'un seul paramètre α définie par :

$$y' = \left(\alpha x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right) y^3 + y^2 \qquad (4\text{-}11)$$

4-1-2 Travaux de Halphen et Liouville :

On discutera dans cette partie les classes intégrables des EDO d'Abel extraites du compte rendu de « Halphen » [11] et des papiers de « Liouville » [15] et présentées dans l'article [8].

Classe 1 :

Halphen a noté l'existence d'une relation entre les fonctions elliptiques- doublement périodiques et l'équation d'Abel donnée par :

$$y' = \frac{3y(1+y) - 4x}{x(8y-1)} \qquad (4\text{-}12)$$

et qui se ramène par une série de changements rationnels de variables à une autre équation d'Abel dont la solution est déterminée.

Classe 2 :

Liouville a traité dans ses papiers l'un des cas délicat des équations d'Abel connues à cette époque (1903) ; puis il a présenté d'autres nouvelles EDO.

Cependant, Liouville a analysé les travaux d'Abel et considéré pour l'équation (4-2) un facteur intégrant de la forme (4-1) avec $r(x, y)$ une fonction cubique en y ; il arrive à la famille intégrable donnée par :

$$y' = 3a\left(2xy^2 + y^3\right) \qquad (4\text{-}13)$$

L'équation (4-12) dépend d'un paramètre a qu'on peut éliminer par le changement de variables

$$\left\{ y = -\frac{u(t)}{\sqrt[3]{3a}}, x = \frac{t}{\sqrt[3]{3a}} \right\} \qquad (4\text{-}14)$$

On obtient une classe intégrable sans paramètre représentée par :

$$y' = -2y^2 x + y^3 \qquad (4\text{-}15)$$

Classe B :(Dépendante d'un seul paramètre**)**

Une généralisation de l'équation (4-15) (présentée dans les papiers de Liouville) est donnée par :

$$y' + \left(3mx^2 + 4m^2x + n\right)y^3 + 3xy^2 = 0 \qquad (4\text{-}16)$$

où m et n sont deux paramètres et qui se ramène à une équation de Riccati.

L'équation (4-15) est un élément de la classe représentée par l'équation (4-16) après la substitution $m = 0$.

Cependant, deux cas se présentent :

- Si $m = 0$, n peut être éliminé de l'équation (4-16) par le changement de variables :

$$\left\{x = t\sqrt[3]{n}, y(x) = \frac{tu(t)}{n^{2/3}}\right\} \qquad (4\text{-}17)$$

Il en résulte une classe indépendante de paramètres – actuellement représentée par l'équation (4-15) –.

- Si $m \neq 0$, on peut remplacé les paramètres n et m à l'aide du changement de variables :

$$\left\{x = mt, y = \frac{u(t)}{m^2}\right\} \qquad (4\text{-}18)$$

et on introduit de plus le nouveau paramètre $a = \dfrac{n}{m^3}$.

On obtient :

$$y' = -\left(3x^2 + 4x + a\right)y^3 - 3xy^2 \qquad (4\text{-}19)$$

Remarque :

L'équation (4-16) ne dépende pas en réalité de deux paramètres, mais plutôt elle inclut deux classes différentes représentées par les équations (4-15) qui ne dépend d'aucun paramètre et (4-19) dépendante du paramètre a.

Classe 3 :

D'après les papiers de Liouville [15], si on échange les rôles des variables x et y dans l'équation (4-16), on arrive à une autre classe intégrable d'Abel.

Après avoir ramené l équation qui en résulte en une EDO de première espèce et en appliquant la transformation d'équivalence (2-2), une simple EDO représentative de cette classe intégrable est donnée par :

$$y' = \frac{y^3}{4x^2} - y^2 \qquad (4\text{-}20)$$

4-1-3 Les classes intégrables présentées dans le livre de Kamke et autres références :

a) Dans cette partie, on examine les classes intégrables des EDO d'Abel présentées dans le livre de « Kamke » [1].

La première classification concerne 69 EDO d'Abel ; donnée par le tableau suivant :

Classification	Les EDO d'Abel présentées dans Kamke
4 en forme générale	50, 219, 250,269
40 avec invariants constants	38,41,46,49,51,188,204,213,214,215,216,218,221, 222,223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 231, 236,238, 239,243 244,245, 246, 247, 248, 249, 251, 252, 254, 255, 260,261, 262,264
24 avec invariants non constants	36,37,40,42,43,45,47,48,111,145,146, 147,151,169, 185, 203, 205, 206, 234, 235, 237, 253, 257,265
10 données sans solutions	40, 47, 48, 203, 205, 206, 234, 237, 253,265

Tableau 1.

On rappelle que les EDO d'Abel qui admettent des invariants constants se ramènes d'une manière systématique en des EDO à variables séparées (voir le livre de Murphy).

Cependant, le cas qui nous intéresse à présent est celui des 24 EDO ayants des invariants non constants.

On note que 10 parmi ces 24 EDO sont présentées dans le livre sans solution, par suite on ne connaît pas de méthodes pour les intégrer.

D'où, le nombre des classes intégrables par cette classification est 18.

On donne dans la partie suivante plus de détail sur cette classification :

Classe 4 :

$$(xy + a)y' + by = 0 \tag{4-22}$$

Cette équation possède deux paramètres arbitraires $\{a, b\}$.

Une simple EDO représentative de cette classe –ne contenant pas de paramètres- est obtenue en transformant l'équation (4-22) en EDO de première espèce à l'aide du changement de variables :

$$\left\{x = t, y = \frac{1}{tu(t)} - \frac{a}{t}\right\}$$

puis on applique la transformation :

$$\left\{x = \frac{a}{tb}, y = \frac{tu(t)}{a}\right\}$$

On obtient :

$$y' = y^3 - \frac{x+1}{x} y^2 \tag{4-23}$$

4-1-4 Commentaires :

Dans ce paragraphe, on présente quelques remarques sur des équations particulières extraites du livre de Kamke [13].

De plus, on respectera la numérotation des exemples dans ce livre.

- **Exemple K 1.47 :**

Considérons l'équation :

$$y' - a(x^n - x)y^3 - y^2 = 0 \tag{4-24}$$

présentée dans le livre de Kamke sans solution qui se ramène à une équation de second ordre.

On note que l'équation qui en résulte admet deux points de symétrie si l'un des cas suivants se présente : $\left\{a = -\frac{2n+n}{9+6n+n^2}\right\}$ ou $\left\{n = 2, a = \frac{6}{25}\right\}$

Il en résulte deux différentes classes intégrables.

D'après le cas précédent, à partir de l'équation (4-24) on arrive à l'équation :

$$y' + \frac{(2n+2)(x^n - x)y^3}{9+n^2+6n} - y^2 = 0 \qquad (4\text{-}25)$$

Cependant, cette équation se transforme par le changement de variables :

$$\left\{x = t^{\frac{2}{1-n}}, y = -u(t)\frac{n+3}{2}t^{\frac{n+1}{n-1}}\right\} \qquad (4\text{-}26)$$

en l'équation (4-38), avec $n = \dfrac{a+2}{a-2}$; elle appartienne donc à la classe C.

De même, si on prend $\left\{n = 2, a = \dfrac{6}{25}\right\}$ dans l'équation (4-24), puis on applique le changement de variables :

$$\left\{x = \frac{t^2-1}{t^2}, y = \frac{5}{2u(t)t^3}\right\} \qquad (4\text{-}27)$$

on arrive encore à l'équation (4-38), avec $a = 6$.
L'équation (4-27) est aussi dans la classe C.

- **Exemple K 1.237 :**

Considérons l'équation :

$$x(y+a)y' + by + cx = 0 \qquad (4\text{-}28)$$

qui dépende de trois paramètres arbitraires. Elle est présentée dans le livre de Kamke sans solution.

On note que la transformation $\{x \to y, y \to x\}$conduite à une équation d'Abel de deuxième espèce qui se ramène à une équation de première espèce à l'aide du changement de variables :

$$\left\{x = t, y = \frac{1}{cu(t)} - \frac{bt}{c}\right\} \qquad (4\text{-}29)$$

Si de plus, on remplace y par y' ; on obtient une équation de second ordre admettant deux points de symétrie quand $a = -2b$.Il en résultera une classe intégrable.

Si on pose a = -2b dans l'équation (4-28), puis on transforme l'équation qui en résulte en une équation de première espèce par la transformation :

$$\left\{ x = t, y = -\frac{1}{tu(t)} + 2b \right\} \tag{4-30}$$

et si on applique le changement de variables :

$$\left\{ x = -\frac{b^2(t+4)}{2c}, y = \frac{2cu(t)}{b^3(t+4)} \right\} \tag{4-31}$$

on obtient une simple équation représentative- indépendante du paramètre- pour cette classe donnée par :

$$y' = \frac{-xy^3 + 2y^2}{2(x+4)} \tag{4-32}$$

Cependant, avec la transformation :

$$\left\{ x = \frac{4(1-t^2)}{t^2}, y = \frac{-u(t)t}{2} \right\}$$

on arrive encore à l'équation (4-38), avec a $= -\frac{1}{2}$.

Donc, l'équation (4-32) appartient aussi à la classe C.

La classification des 18 EDO ayants des invariants non constants est résumée comme suit :

Classe 2	Classe 3	Classe 4	Classe A	Classe B	Classe C	Classe D
36, 40	145, 147	235	257	42, 43	45, 47, 48, 151,185, 237	37, 111, 146, 169

Tableau 2.

où les classes C et D seront définies dans la partie suivante.

Remarque :

Les 58 équations résolubles extraites du livre de Kamke sont des cas particuliers des classes intégrables présentées par Abel, Appell et LiouvIlle [1, 2, 15] dans leurs papiers.

b) Dans ce paragraphe, on donne les classes intégrables des EDO d'Abel présentées dans le livre de « Murphy » [16].

La classification des classes intégrables ayant des invariants non constants est la suivante :

CLASSE 2	CLASSE 3	CLASSE B	CLASSE C	CLASSE D
78, 80	275	86	304, 383, 593	79, 345

Tableau 3.

On note que le livre de Murphy [16] présente d'autres classes intégrables mais avec des invariants constants.

c) Une large collection des classes intégrables d' EDO d'Abel est celle présentée dans le livre de « Polyanin » et « Zaitsev » [18].

Ce livre est récent (1995) et recouvrant un nombre intéressant de problèmes des EDO intégrables qui ne se trouvent pas dans d'autres ouvrages.

La classification des EDO d'Abel est présentée non pas par rapport à leurs invariants (constants ou non), mais plutôt relativement à leurs formes. L'origine des solutions de ces équations n'est pas mentionnée dans cet ouvrage.

De plus, ce livre contient une large section des équations qui illustrent la relation entre les EDO d'Abel et celles d'ordres supérieurs. Les exemples présentés dans ce cas ne sont pas tous traitables par les algorithmes décrits précédemment (En particulier dans les cas où le paramètre c représente des valeurs symboliques).

Les analyses des EDO présentées dans [18] permettent de donner une classification de 20 EDO obtenues à partir de l'équation :

$$yy' - y = sx + Ax^m \qquad (4\text{-}33)$$

par la donnée des valeurs particulières aux paramètres m et s (A est arbitraire).

Ces EDO sont données dans la partie 1.3.1 de [18] sous les numéros : 1, 2, 10, 16, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 32, 33, 45, 46, 47, 48, 53, 54, 55 et 56.

La classification de ces équations est résumée dans le tableau suivant :

INVARIANTS ONSTANTS	CLASSE 1	CLASSE 2	CLASSE 3	CLASSE C	CLASSE D
1, 2, 26	23	32	33	10, 29, 22, 45, 46, 47, 53,54	16

Tableau 4.

On note que les équations 20, 27, 48, 55 et 56 sont données sous formes générales.

Remarque :

Les équations présentées précédemment seront données à la fin du chapitre 5.

4-2 Les nouvelles classes intégrables des EDO d'Abel dérivants des travaux précédents :

Classe C :(Dépendante d'un seul paramètre arbitraire**)**

Abel a étudie une nouvelle forme de facteur intégrant conduisant à des nouveaux cas qui ne sont pas mentionnés dans ses mémoires [1].

Cette forme est obtenue on posant $b = a$ dans l'équation (4-9); il en résulte la famille des EDO donnée par :

$$yy' - q'y - \frac{q'n^2\left(-\frac{q}{n} + C_1^2\left(\frac{q}{n}\right)^{2n-1}\right)}{(n-1)^2} = 0 \qquad (4\text{-}34)$$

avec $n \neq -1$.

L'équation (4-34) est reliée avec (4-9) par : $n = \frac{-1}{2a+1}$.

On note que par l'utilisation de la même méthode que dans l'équation (4-10) ,on peut éliminé la fonction $q(x)$ ainsi que le paramètre C_1 .On obtient :

$$y' = n\left(x - x^{2n-1}\right)y^3 - (n+1)y^2 \qquad (4\text{-}35)$$

qui se ramène à une équation exacte en lui effectuant le facteur intégrant définit par :

$$\mu = \frac{\left(1 + \left(\left(x^2 - x^{2n}\right)y - 2x\right)y\right)^{-\frac{n+1}{2n}}}{y^{\frac{2n-1}{n}}} \qquad (4\text{-}36)$$

Une simple équation représentative de cette classe est obtenue par le changement de variables suivant :

$$\left\{ y = u(t)t^{\frac{n}{n-1}}, x = t^{\frac{1}{1-n}} \right\} \qquad (4\text{-}37)$$

et en introduisant un nouveau paramètre $n = \frac{\alpha}{\alpha - 2}$, on obtient :

$$y' = \frac{\alpha\left(1-x^2\right)y^3}{2x} + (\alpha-1)y^2 - \frac{\alpha y}{2x} \qquad (4\text{-}38)$$

Une solution implicite à cette classe est donnée par :

$$C_1 + \frac{\alpha}{x}\left(1 - \frac{(1-xy)^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 2\int^{\frac{1-xy}{y}} \left(1-z^2\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dz = 0 \qquad (4\text{-}39)$$

Classe D : (Dépendante d'un seul paramètre arbitraire**)**

Dans [2], Appell a construit une série de classes intégrables dérivant des solutions de l'équation donnée par :

$$u' = A(u) + B(u)t \qquad (4\text{-}40)$$

Avec le changement de variables

$$\left\{ t = \frac{1}{y} - \frac{A(x)}{B(x)}, u = x \right\} \qquad (4\text{-}41)$$

l'équation (4-40) se ramène à une équation d'Abel

$$y' = -\frac{y^3}{B} - \left(\frac{A}{B}\right)' y^2 \qquad (4\text{-}42)$$

où A et B sont des fonctions arbitraires en *x*.

Certaines valeurs particulières de $\{A, B\}$ conduisent à des cas résolubles dans l'équation (4-41), et par suite à des classes intégrables des EDO d'Abel dans l'équation (4-41).
Parmi ces valeurs on retrouve celles considérées dans [2] –où l'équation (4-41) se ramène à une équation linéaire, homogène ou de type de Riccati–.

On rappelle que l'équation de Riccati est de la forme :

$$y' = \alpha_2(x)y^2 + \alpha_1(x)y + \alpha_0(x) \qquad (4\text{-}43)$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha 3$ sont des fonctions arbitraires en *x* ;
et se ramène à une équation linéaire du second ordre à l'aide d'un changement de variables de fonction inconnue.

Le cas d'une équation de Riccati est obtenu à partir de :

$$A = ax^2bx + c\,, \qquad B = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad (4\text{-}44)$$

Il en résulte une équation d'Abel dépendante de six paramètres $\{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma\}$donnée par :

$$y' = -\frac{y^3}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} - y^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{ax^2 + bx + c}{\alpha x^2 + \beta x + c}\right) \tag{4-45}$$

où la solution de cette dernière est exprimée en termes de la solution de l'équation de Riccati :

$$y' = (a + \alpha x)y^2 + (b + \beta x)y + c + \gamma x \tag{4-46}$$

Cependant, on ne peut pas résoudre l'équation (4-46) pour des valeurs arbitraires des paramètres $\{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma\}$et [2] ne donne pas une indication pour sa méthode de résolution.

D'après [8], on considère l'équation du second ordre obtenue en posant $y = y'$ dans l'équation (4-45). Cette équation admet deux points de symétrie si et seulement si $\alpha = 0$. Avec cette symétrie on est capable de résoudre l'équation du seconde ordre, et ainsi aussi l'équation (4-46) quand $\alpha = 0$.

Dans ce cas l'équation (4-45) – qui dépendante actuellement de cinq paramètres – se transforme par un choix convenable d'une transformation de la forme (2-2) :

$$\left\{ x = \frac{t\sqrt{\beta}}{a} - \frac{\gamma}{\beta}, y = \sqrt{\beta}u(t) \right\} \tag{4-47}$$

avec la condition $a \neq 0$ et $\beta \neq 0$, et d'un nouveau paramètre

$$C = -\frac{(\beta^2 c + \alpha\gamma^2)a - \alpha\beta\gamma b}{\beta^2} \tag{4-48}$$

en une simple équation représentative de cette classe définie par :

$$y' = -\frac{y^3}{x} - \frac{(C + x^2)y^2}{x^2} \tag{4-49}$$

On note que l'équation (4-49) est définie sous la condition $a \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

Considérons maintenant les cas : $a = 0$ et $\beta = 0$.

- Si $a = 0$, on obtient une autre équation de la classe représentée par l'équation (4-49).
- Si $\beta = 0$, on obtient une équation appartenant à la classe représentée par l'équation (4-15).

On se propose de diminuer le nombre des paramètres dans l'équation (4-45), pour cela on cherche les changements de variables de la forme (2-2) pour éliminer le maximum de ces paramètres.

Si les paramètres sont tous différents de zéro, on introduit les nouveaux paramètres définis par :

$$\alpha = \frac{\beta^2 + 4A^4}{4\gamma}$$

$$b=\frac{8\beta\gamma^2 aA^2B+C}{2\gamma A^2B\left(\beta^2+4A^4\right)}$$

$$c=\frac{A^2BC+16\gamma^2 aA^6B+\beta C+4\beta^2\gamma^2 aA^2B}{A^2B\left(\beta^2+4A^4\right)^2}$$

$$\gamma=\frac{C}{2A^3BG\left(\beta^2+4A^4\right)} \tag{4-50}$$

puis on effectue la transformation :

$$\left\{x=\frac{C\left(2tA^2-\beta\right)}{\left(\beta^2+4A^4\right)^2A^3BG},\,y=u(t)A\right\} \tag{4-51}$$

On obtient une équation représentative – dépendante de deux paramètres – de la même classe définie par :

$$y'=-\frac{y^3}{x^2+1}+\frac{G\left(Bx+x^2-1\right)y^2}{\left(x^2+1\right)^2} \tag{4-52}$$

Dans le cas où l'un des paramètres est différent de zéro l'équation (4-45) conduit soit à une équation de la forme (4-49), soit à des équations avec des invariants constants.

Trois nouvelles classes indépendantes de paramètres :

D'après l'article de E.S.Cheb-Terrab et A.D.Roche [8], l'analyse de [1], [2], [15] et les exemples du livre de Kamke [13] conduisent à des nouvelles classes intégrables 5, 6 et 7. Les équations représentatives ainsi que leurs solutions sont données comme suit :

Classe 5 :

$$y'=-\frac{(2x+3)(x+1)y^3}{2x^5}+\frac{(5x+8)y^2}{2x^3} \tag{4-53}$$

et la solution est donnée par :

$$C_1+\frac{\sqrt{A}}{\sqrt[4]{4\dfrac{(x+1)^2}{x^2A}+1}}+\int^{2\frac{x+1}{x\sqrt{A}}}\left(z^2+1\right)^{-\frac{5}{4}}dz=0 \tag{4-54}$$

où $A=\dfrac{4}{y}-\dfrac{10}{x}-\dfrac{6}{x^2}-4.$

Classe 6 :

$$y' = -\frac{y^3}{x^2(x-1)^2} + \frac{(1-x-x^2)y^2}{x^2(x-1)^2} \tag{4-55}$$

et la solution est donnée par :

$$C_1 - Ei\left(1, \frac{y+x^2-x}{xy(x-1)}\right) + \frac{(x-1)ye^{\frac{x-y-x^2}{xy(x-1)}}}{x+y-1} = 0 \tag{4-56}$$

où $Ei(n,x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n} dt.$

Classe 7 :

$$y' = \frac{(4x^4+5x^2+1)y^3}{2x^3} + y^2 + \frac{(1-4x^2)y}{2x(x^2+1)} \tag{4-57}$$

et la solution est donnée par :

$$C_1 + 2\frac{x+A}{\sqrt[4]{A^2+1}(Ax-1)} + \int^A (z^2+1)^{-\frac{5}{4}} dz = 0 \tag{4-58}$$

où $A = \frac{x-2yx^4-3yx^2-y}{x(x+yx^2+y)}.$

Remarque :

L'article [8] ne donne aucune indication pour la méthode de résolution des représentatives correspondantes aux classes 5, 6 et 7.

On va essayer de donner plus de détails dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 5

MAPLE ET LA RESOLUTION DES EDO D'ABEL

On se propose dans ce chapitre de présenter les algorithmes utilisés dans les parties précédentes et d'illustrer l'efficacité du logiciel du calcul formel Maple pour la résolution des équations différentielles, en particulier celles d'Abel. Quelques exemples réalisés par le Maple version 8 sont aussi présentés.

Cependant, on définit dans ce travail les commandes utilisées pour la résolution des équations d'Abel.

5-1 La commande dsolve :

Description :

Commande de résolution des équations et systèmes différentiels.

Différentes formes :

La commande dsolve peut être employée sous les formes suivantes :

dsolve(ODE)

dsolve(ODE, y(x), extra_args)

dsolve({ODE, ICs}, y(x), extra_args)

dsolve({sysODE, ICs}, {funcs}, extra_args)

Paramètres:

`ODE` - une équation différentielle ordinaire.

`y(x)` - une fonction indéterminée d'une seul variable.

`ICs` - conditions initiales.

`{sysODE}` - système d'équations différentielles ordinaires.

`{funcs}` - un ensemble de fonctions indéterminées.

`extra_args` – une option qui dépend du problème posé.

Ici {x, y(x)} représente tout couple de variables indépendantes et dépendantes.

Maple peut aussi donner des solutions explicites (resp.implicites) à l'aide de l'option **explicit** (resp.**implicit**).

Comme la résolution concerne les équations différentielles d'Abel, `extra_args` est représentée ici par [Abel]. La solution implicite peut être testée dans Maple à l'aide de la commande **odetest.**

Exemple :

Les solutions des équations de l'exemple 2-3 donné dans le 2ème chapitre sont données par:

```
> restart:
> with(PDEtools,dchange);
```

$$[dchange]$$

```
> eq2_12:=diff(y(x),x)=-1/2*(x*y(x)^3+2*y(x)^2)/(x+4);
```

$$eq2\_12 := \frac{\partial}{\partial x}\, y(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{x\, y(x)^3 + 2\, y(x)^2}{x+4}$$

```
> sol:=dsolve(eq2_12);
```

$$sol := \_C1 - \frac{\sqrt{y(x)^2\, x + 4\, y(x) - 1}}{y(x)} + 2\arctan\left(\frac{1 - 2\, y(x)}{\sqrt{y(x)^2\, x + 4\, y(x) - 1}}\right) = 0$$

```
> odetest(sol,eq2_12);
```

$$0$$

```
> tr:={x=(f(t)/t-1),y(x)=t*u(t)};
```

$$tr := \left\{x = \frac{f(t)}{t} - 1,\ y(x) = t\, u(t)\right\}$$

```
> subs([t=x, u=y], PDEtools[dchange](tr,sol,[u(t),t]) );
```

$$\_C1 - \frac{\sqrt{x^2\, y(x)^2 \left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) + 4\, y(x)\, x - 1}}{x\, y(x)} + 2\arctan\left(\frac{1 - 2\, y(x)\, x}{\sqrt{x^2\, y(x)^2 \left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) + 4\, y(x)\, x - 1}}\right) = 0$$

(La solution de l'équation (2-13) est obtenue par la commande **dchange**).

L'algorithme de la détermination de la transformation d'équivalence est le suivant :

```
> restart:
> eq2_12:=diff(y(x),x)=-1/2*(x*y^3-2*y^2)/(x+4);
> eq2_13:=diff(u(t),t)=1/2*(diff(f(t),t)*t-f(t))*((-
f(t)+x)*u^3+2*u^2)/(f(t)+3*t)-u/t;
> match(rhs(eq2_12) = f3*y^3+f2*y^2+f1*y+f0, y, 't1');t1;
> match(rhs(eq2_13) = ~f3*u^3+~f2*u^2+~f1*u+~f0, u, 't2');t2;
> f3(x):=-1/2*(x/(x+4));f2(x):=-1/(x+4);f1(x):=0;f0(x):=0;
> ~f3(t):=1/2*(-x*diff(f(t),t)*(t)-
t*f(t)+t^2*diff(f(t),t)+f(t)^2)/(f(t)+3*t);
~f2(t):=(diff(f(t),t)*t-f(t))/(f(t)+3*t);~f1(t):=-1/t;~f0(t):=0;
> for m from 2 to 3 do
> s[3](x):=f0(x)*f3(x)^2+1/3*((2*f2(x)^3/9)-
f1(x)*f2(x)*f3(x)+f3(x)*diff(f2(x),x)-f2(x)*diff(f3(x),x));
> s[2*m+1](x):=f3(x)*diff(s[2*m-1](x),x)-(2*m-1)*s[2*m-
1](x)*(diff(f3(x),x)+f1(x)*f3(x)-f2(x)^2/3);
> I1:=s[5](x)^3/s[3](x)^5;
> I2:=s[3](x)*s[7](x)/s[5](x)^2;
> ~s[3](t):=~f0(t)*~f3(t)^2+1/3*((2*~f2(t)^3/9)-
~f1(t)*~f2(t)*~f3(t)+~f3(t)*diff(~f2(t),t)-
~f2(t)*diff(~f3(t),t));
> ~s[2*m+1](t):=~f3(t)*diff(~s[2*m-1](t),t)-(2*m-1)*~s[2*m-
1](t)*(diff(~f3(t),t)+~f1(t)*~f3(t)-~f2(t)^2/3);
> ~I1:=~s[5](t)^3/~s[3](t)^5;
> ~I2:=~s[3](t)*~s[7](t)/~s[5](t)^2;
> od;
> eq2_15_1:=simplify((subs(f(t)=f,~I1)-subs(x=F,I1))/2916);
> eq2_15_2:=simplify((subs(f(t)=f,~I2)-subs(x=F,I2))*6);
> numer(eq2_15_1);
> numer(eq2_15_2);
> GCD:=gcd(numer(eq2_15_1),numer(eq2_15_2));
> F:=solve(GCD,F);
```

$$F := -\frac{t-f}{t}$$

5-2 Les commandes useinfo et infolevel :

Description :

Pour avoir plus d'informations sur les différentes étapes du calcul de la solution des équations d'Abel, sa classification ainsi que la détermination explicite de la transformation d'équivalence quand cela est possible, on utilise les commandes **useinfo et infolevel**.

La forme générale :

userinfo(lev, fn, e1, e2 ...)

Paramètres:

`lev` – un entier positive.

`fn` - le non de la procédure.

`e1` - une expression.

`e2` - une option, représente une autre expression.

1- **Cas d'invariant constant :(** Exemple K 1.41 du livre de Kamke**)**

```
> restart:
> infolevel[dsolve]:=4;
```

$$infolevel_{dsolve} := 4$$

```
> ode[41]:= diff(y(x),x) + a*x*y(x)^3 + b*y(x)^2=0;
```

$$ode_{41} := \left(\frac{\partial}{\partial x}\, y(x)\right) + a\, x\, y(x)^3 + b\, y(x)^2 = 0$$

```
> sol:=dsolve(ode[41],[Abel],implicit);
Classification methods on request
Methods to be used are:   [Abel]
Trying to isolate the derivative dy/dx...
Successful isolation of dy/dx

----------------------------
* Tackling ODE using method:   Abel
   -> Trying classification methods
   trying Abel


  The first absolute invariant s5^3/s3^5 is:
2916*(3*a+b^2)^3/b^2/(9*a+2*b^2)^2
   Abel successful
```

$$sol := \int^{\frac{27\, a^2\, x\, y(x) + 9\, a\, x\, y(x)\, b^2 + 9\, b\, a + 3\, b^3}{(9\, a + 2\, b^2)\, b}} \frac{1}{\frac{1}{27}\, \frac{\_a^3\, b^2\, (9\, a + 2\, b^2)^2}{(3\, a + b^2)^3} - \_a + 1}\, d\_a + \ln(x) + \frac{\frac{1}{3}\ln(x)\, b^2}{a} - \_C1 = 0$$

```
> odetest(sol,ode[41]);
```

$$0$$

Dans cet exemple, Maple a donné la valeur constante du 1er invariant absolu, puis il donne la solution implicite.

2- Cas d'invariants non constants :

Dans ce cas, Maple détermine la classification des équations d'Abel et les valeurs explicites des fonctions *F*, *P*, *Q* ainsi qu'une solution implicite.

- **Cas d'une équation d'Abel de 2ème espèce :**

```
> restart:
> ode:=(x*y(x)+a)*diff(y(x),x)+b*y(x)=0;
```

$$ode := (x\,\mathrm{y}(x) + a)\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right) + b\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> infolevel[dsolve]:=4;
```

$$infolevel_{dsolve} := 4$$

```
> dsolve(ode,[Abel],implicit);
Classification methods on request
Methods to be used are:   [Abel]
Trying to isolate the derivative dy/dx...
Successful isolation of dy/dx
----------------------------

* Tackling ODE using method:   Abel
   -> Trying classification methods
   trying Abel
   Abel ODE is of second kind


   The equivalent Abel ODE of 1st kind is:   diff(u(x),x) = -
a/x^2*b*u(x)^3+(a+b*x)/x^2*u(x)^2
   The relative invariant s3 is:   1/27*(-
3*x^2*a*b^2+2*a^3+6*a^2*b*x+2*b^3*x^3)/x^6
   The first absolute invariant s5^3/s3^5 is:
2916*(8*a^2*b^3*x^3+10*a^4*b*x+5*a^3*b^2*x^2-
5*a*b^4*x^4+2*a^5+2*b^5*x^5)^3/(-3*x^2*a*b^2+2*a^3+6*a^2*b*x+2*b^3*x^3)^5
   The second absolute invariant s3*s7/s5^2 is:   1/3*(-
3*x^2*a*b^2+2*a^3+6*a^2*b*x+2*b^3*x^3)*(8*a^3*b^4*x^4+105*a^5*b^2*x^2+110*a^4
*b^3*x^3+60*a^2*b^5*x^5-
35*a*b^6*x^6+70*a^6*b*x+10*a^7+10*b^7*x^7)/(8*a^2*b^3*x^3+10*a^4*b*x+5*a^3*b^
2*x^2-5*a*b^4*x^4+2*a^5+2*b^5*x^5)^2
                            ...

                            ...
   inverse of the transformation solving the problem is:   {t = a/b/x, u(t) =
b*y(x)}
   Abel successful
```

$$\_C1\;a + \mathbf{e}^{\left(\frac{\mathrm{y}(x)}{b}\right)}\,b\,x - \mathrm{Ei}\left(1, -\frac{\mathrm{y}(x)}{b}\right)a = 0$$

Dans ce genre de situation, Maple donne d'abord l'équation équivalente de 1ère espèce, puis il utilise les différentes étapes expliquées précédemment pour retrouver une solution implicite à l'équation donnée.

Dans la partie suivante, on donne quelques exemples réalisés par le logiciel Maple et ceci pour les équations d'Abel dépendantes d'un paramètre.

- **Cas d'une classe dépendante d'un paramètre : (**Cas numérique**)**

Considérons le problème d'équivalence entre les équations (3-2) et (3-3) ; l'algorithme de la détermination de la valeur numérique du paramètre c conduisant à la fonction $F(t)$ telle que $F' \neq 0, c' = 0$ est le suivant :

```
restart:
> eq3_2:=diff(u(t),t)=8*(1-t^4-
t^8)*u(t)^3/t^7+4*u(t)^2/t^4+u(t)/t;
> eq3_3:=diff(y(x),x)=(c*x^4+x^2+1)*y(x)^3/x^3+y(x)^2;
> s[3],s[5],s[7]:=-1/27*(-2*x^4+9*c*x^4-9*x^2-27)/x^4,1/27*(-
72*x^6*c+54*x^4+36*x^2-270*c*x^4+135-
15*c*x^8+27*c^2*x^8+15*x^6+2*x^8)/x^8,-1/181*(-2835+243-
495*x^8+14175*c*x^4-2349*x^4-1917*x^10*c^2-927*x^6-10*x^12-
105*x^10+4806*x^6*c+4131*c*x^8-8505*c^2*x^8+900*x^10*c-
360*c^2*x^12+405*c^3*x^12+105*c*x^12)/x^12;
>
~s[3],~s[5],~s[7]:=64/27*(11+9*t^2+27*t^8)/t^12,1024/27*(87*t^4+
324*t^8+36*t^12+135*t^16+44)/t^20,16384/81*(2922*t^4+13131*t^8+5
733*t^12+16524*t^16-243*t^20+2835*t^24+880)/t^28;
> eq3_1_1:=('~s[5]'^3/'~s[3]'^5-subs(x=F,s[5]^3/s[3]^5))/729;
> e3_1_1:=eval(eq3_1_1):
> eq3_1_2:=('~s[3]'*'~s[7]'/'~s[5]'^2-
subs(x=F,s[3]*s[7]/s[5]^2))*3;
> e3_1_2:=eval(eq3_1_2);
> eq3_1_3:=('~s[5]'*'~s[7]'/'~s[3]'^4-
subs(x=F,s[5]*s[7]/s[3]^4))/243;
> e3_1_3:=eval(eq3_1_3);
>
subs(t=0,[coeffs(collect(numer(e3_1_1),[c,F],distributed,normal)
,[F,c])]);
>
subs(t=0,[coeffs(collect(numer(e3_1_2),[c,F],distributed,normal)
,[F,c])]);
>
subs(t=0,[coeffs(collect(numer(e3_1_3),[c,F],distributed,normal)
,[F,c])]);
> n1:=subs(t=1,numer(e3_1_1));
> n2:=subs(t=1,numer(e3_1_2));
> n3:=subs(t=1,numer(e3_1_3));
```

```
> R1:=resultant(n1,n2,F);
> R2:=resultant(n1,n3,F);
> G:=gcd(R1,R2);
> factor(G);
> subs(c=2/9,e3_1_1);
> subs(c=2/9,e3_1_2);
> numer(%%),numer(%);
> gcd(%);
> solve(%,F);
> subs(c=2/9,e3_1_1);
> subs(c=2/9,e3_1_2);
> numer(%%),numer(%);
> gcd(%);
> solve(%,F);
> subs(c=5/36,e3_1_1);
> subs(c=5/36,e3_1_2);
> numer(%%),numer(%);
> gcd(%);
```

$$F^4 + 12\,F^2 + 36$$

```
> solve(%,F);
```

$$I\sqrt{6},\ -I\sqrt{6},\ I\sqrt{6},\ -I\sqrt{6}$$

Ce résultat montre que la valeur de c = 5/36 ne satisfait pas la condition : $F' \neq 0, c' = 0$.

```
> subs(c=-1,e3_1_1);
> subs(c=-1,e3_1_2);
> numer(%%),numer(%);
> gcd(%);
>  solve(%,F);
```

La valeur de c = -1, conduit à un facteur dépendant de t, et par suite la transformation d'équivalence existe.

- **Exemple d'une classe dépendante d'un paramètre c :(** Cas utilisant l'interpolation rationnelle**)**

Considérons le problème d'équivalence entre les équations (3-5) et (3-6).
Cet exemple illustra l'utilisation de la méthode de l'interpolation rationnelle.

```
> restart:
> infolevel[dsolve]:=4;
```

$$infolevel_{dsolve} := 4$$

```
> ode:=diff(y(x),x)= (a*(2*x^2*a-2*b)*y(x)^3-
3*a*y(x)^2*b+a*b*x*y(x))/b/(b-a*x^2);
```

$$eq24 := \frac{\partial}{\partial x}\, \mathrm{y}(x) = \frac{a\,(2\,x^2\,a - 2\,b)\,\mathrm{y}(x)^3 - 3\,a\,\mathrm{y}(x)^2\,b + a\,b\,x\,\mathrm{y}(x)}{b\,(b - x^2\,a)}$$

```
> dsolve(ode,[Abel],useint,implicit);
Classification methods on request
Methods to be used are: [Abel]
Trying to isolate the derivative dy/dx...
Successful isolation of dy/dx
----------------------------
* Tackling ODE using method: Abel
--- Trying classification methods ---

trying Abel
The relative invariant s3 is:   2*a^3/b*(-b*x+x^3*a+b)/(-b+x^2*a)^3
The first absolute invariant s5^3/s3^5 is:   1/a^3*b^2*(-
15*a*b*x+15*x^3*a^2+9*a*b-4*b*x^2*a+2*x^4*a^2+2*b^2)^3/(-b*x+x^3*a+b)^5
The second absolute invariant s3*s7/s5^2 is:   a/b*(-b*x+x^3*a+b)*(60*b^3-
60*a*b^2*x^2-60*b*x^4*a^2+60*x^6*a^3-4*b^3*x+12*b^2*x^3*a-
12*b*x^5*a^2+4*x^7*a^3-315*a*b^2*x+315*b*x^3*a^2+135*a*b^2)/(-
15*a*b*x+15*x^3*a^2+9*a*b-4*b*x^2*a+2*x^4*a^2+2*b^2)^2
                               ...


The third absolute invariant s5*s7/s3^4 is:   1/4/a^2*(60*b^3-60*a*b^2*x^2-
60*b*x^4*a^2+60*x^6*a^3-4*b^3*x+12*b^2*x^3*a-12*b*x^5*a^2+4*x^7*a^3-
315*a*b^2*x+315*b*x^3*a^2+135*a*b^2)*b*(-15*a*b*x+15*x^3*a^2+9*a*b-
4*b*x^2*a+2*x^4*a^2+2*b^2)/(-b*x+x^3*a+b)^4
 ->           ======================================
 ->               ...checking Abel class D (by Appell)
Trying a = 0
Trying a = 1
Trying b = 0
Trying b = 1
Trying b = 2
 -> Step 1: checking for a disqualifying factor on F after evaluating x at a
number
Trying x =   0
*** No disqualifying factor on F was found ***
 -> Step 2: calculating resultants to eliminate F and get candidates for C
*** Candidates for C are   [0, 1/2, 4/27], ***
 -> Step 3: looking for a solution F depending on x
_____________________________
"C = 1/2 leads to the solutions [{F = x}]"
Interpolated candidate for the class parameter C is: C = 1/2
General testing of the candidate C = 1/2 with arbitrary b

Interpolation is still incomplete; trying next value of b
_____________________________
Trying b = 3
 -> Step 1: checking for a disqualifying factor on F after evaluating x at a
number
Trying x =   0
*** No disqualifying factor on F was found ***
 -> Step 2: calculating resultants to eliminate F and get candidates for C
*** Candidates for C are   [0, 4/27, 1/3], ***
 -> Step 3: looking for a solution F depending on x
_____________________________
"C = 1/3 leads to the solutions [{F = x}]"
Interpolated candidate for the class parameter C is: C = -1/6*b+5/6
Fast testing of C = -1/6*b+5/6 with next b = 4
Interpolation is still incomplete; trying rising the degree in b of the
denominator, from 0 to 1
_____________________________
```

```
Interpolated candidate for the class parameter C is: C = 1/b
Fast testing of C = 1/b with next b = 4
_____________________________
"C = 1/4 leads to the previous solution [F = x]"
Fast test of C = 1/b passed OK
General testing of the candidate C = 1/b with arbitrary b
_____________________________
"C = 1/b leads to the previous solution [F = x]"

General test of C = 1/b passed OK; interpolation for b in this level is
complete
_____________________________
Interpolated candidate for the class parameter C is: C = 1/b
General testing of the candidate C = 1/b with arbitrary a
_____________________________
"C = 1/b leads to a useless solution (F does not depend on x)"
Interpolation is still incomplete; trying next value of a
_____________________________
Trying a = 2

Trying b = 0
Trying b = 1
Trying b = 2
Trying b = 3
Trying b = 4
 -> Step 1: checking for a disqualifying factor on F after evaluating x at a
number
Trying x =   0
*** No disqualifying factor on F was found ***
 -> Step 2: calculating resultants to eliminate F and get candidates for C
*** Candidates for C are   [0, 1/2, 4/27], ***
 -> Step 3: looking for a solution F depending on x
_____________________________
"C = 1/2 leads to the solutions [{F = x}]"
Interpolated candidate for the class parameter C is: C = 1/2
General testing of the candidate C = 1/2 with arbitrary b
Interpolation is still incomplete; trying next value of b
_____________________________

Trying b = 5
 -> Step 1: checking for a disqualifying factor on F after evaluating x at a
number
Trying x =   0
*** No disqualifying factor on F was found ***
 -> Step 2: calculating resultants to eliminate F and get candidates for C

*** Candidates for C are   [0, 2/5, 4/27], ***
 -> Step 3: looking for a solution F depending on x
_____________________________
"C = 2/5 leads to the solutions [{F = x}]"
Interpolated candidate for the class parameter C is: C = -1/10*b+9/10
Fast testing of C = -1/10*b+9/10 with next b = 6
Interpolation is still incomplete; trying rising the degree in b of the
denominator, from 0 to 1
_____________________________
Interpolated candidate for the class parameter C is: C = 2/b
Fast testing of C = 2/b with next b = 6
_____________________________
"C = 1/3 leads to the previous solution [F = x]"
Fast test of C = 2/b passed OK
General testing of the candidate C = 2/b with arbitrary b
_____________________________
"C = 2/b leads to the previous solution [F = x]"
```

```
General test of C = 2/b passed OK; interpolation for b in this level is
complete
_______________________________
Interpolated candidate for the class parameter C is: C = a/b
Fast testing of C = a/b with next a = 3
_______________________________
"C = 3/b leads to the previous solution [F = x]"

Fast test of C = a/b passed OK
General testing of the candidate C = a/b with arbitrary a
_______________________________
"C = a/b leads to the previous solution [F = x]"
General test of C = a/b passed OK; interpolation for a in this level is
complete
_______________________________
Value of the Class parameter solving the problem is:   C =
9/4/b^(1/2)*a^(1/2)


Inverse of the transformation solving the problem is:   {u(t) = -
2/3/a^(1/2)/b^(1/2)*(x*a-a^(1/2)*b^(1/2))*y(x), t = -9/2*a^(1/2)/(x*a^(1/2)-
b^(1/2))}
<- Abel successful
```

$$\_C1 + \Bigg(\left(\frac{9}{4}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+2\right)\mathrm{WhittakerM}\left(-\frac{9}{16}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{a}\,(3\,\mathrm{y}(x)\,x\,a-b)^2\,(x\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{b}\,(x\,a-\sqrt{a}\,\sqrt{b})^2\,\mathrm{y}(x)^2\,(x\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right) - \left(-\frac{3}{2}\frac{\sqrt{a}\,(3\,\mathrm{y}(x)\,x\,a-b)}{\sqrt{b}\,(x\,a-\sqrt{a}\,\sqrt{b})\,\mathrm{y}(x)}+\frac{\frac{9}{4}\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)\mathrm{WhittakerM}\left(\frac{1}{4}-\frac{9}{16}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{a}\,(3\,\mathrm{y}(x)\,x\,a-b)^2\,(x\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{b}\,(x\,a-\sqrt{a}\,\sqrt{b})^2\,\mathrm{y}(x)^2\,(x\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right)\Bigg) \Bigg/ \Bigg(\frac{9}{8}\frac{\sqrt{a}\ \mathrm{W}}{} - \left(-\frac{3}{2}\frac{\sqrt{a}\,(3\,\mathrm{y}(x)\,x\,a-b)}{\sqrt{b}\,(x\,a-\sqrt{a}\,\sqrt{b})\,\mathrm{y}(x)}+\frac{\frac{9}{4}\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)\mathrm{WhittakerW}\left(\frac{1}{4}-\frac{9}{16}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{a}\,(3\,\mathrm{y}(x)\,x\,a-b)^2\,(x\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{b}\,(x\,a-\sqrt{a}\,\sqrt{b})^2\,\mathrm{y}(x)^2\,(x\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right)\Bigg) = 0$$

5-3 La résolution des classes intégrables des EDO d'Abel par Maple :

Cette partie est consacrée à la résolution des différentes classes présentées dans le chapitre précédant.

Classe 1 :

```
> restart:
```

```
> class[1]:=diff(y(x),x)=(3*y(x)^2-3*y(x)-x)/x/(8*y(x)-9);
```

$$class_1 := \frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x) = \frac{3\,\mathrm{y}(x)^2 - 3\,\mathrm{y}(x) - x}{x\,(8\,\mathrm{y}(x) - 9)}$$

```
> infolevel[dsolve]:=4;
```

$$infolevel_{dsolve} := 4$$

```
> dsolve(class[1],[Abel],implicit,useInt);

Classification methods on request
Methods to be used are:   [Abel]


Trying to isolate the derivative dy/dx...
Successful isolation of dy/dx
----------------------------

   * Tackling ODE using method:   Abel
   -> Trying classification methods
   trying Abel
   Abel ODE is of second kind
   The equivalent Abel ODE of 1st kind is:   diff(u(x),x) = 1/512*(-
27+64*x)/x*u(x)^3-15/32/x*u(x)^2-3/8/x*u(x)
   The relative invariant s3 is:   5/131072*(320*x-119)/x^3
   The first absolute invariant s5^3/s3^5 is:   -343/25*(20480*x^2-
36480*x+11169)^3/(320*x-119)^5
   The second absolute invariant s3*s7/s5^2 is:   45/7*(320*x-119)*(-
1183744*x^2+1109696*x-271779+262144*x^3)/(20480*x^2-36480*x+11169)^2
                           ...
                           ...
   inverse of the transformation solving the problem is:   {t = 64/9*x, u(t)
= 3/8*y(x)}
   Abel successful
```

$$\begin{aligned}&(729\,\_C1\;x^4 + 108\,\_C1\;x^5 - 972\,\_C1\;x^4\,\mathrm{y}(x) + 216\,\_C1\;x^4\,\mathrm{y}(x)^2 - 108\,\_C1\;x^3\,\mathrm{y}(x)^3\\&\quad + 108\,\_C1\;x^3\,\mathrm{y}(x)^4 + 256\,x^6 + 1536\,x^5\,\mathrm{y}(x)^2 - 4608\,x^5\,\mathrm{y}(x) + 3840\,x^4\,\mathrm{y}(x)^4\\&\quad - 18432\,x^4\,\mathrm{y}(x)^3 + 5120\,x^3\,\mathrm{y}(x)^6 + 27648\,x^4\,\mathrm{y}(x)^2 - 27648\,x^3\,\mathrm{y}(x)^5 + 3840\,x^2\,\mathrm{y}(x)^8\\&\quad + 55296\,x^3\,\mathrm{y}(x)^4 - 18432\,x^2\,\mathrm{y}(x)^7 + 1536\,x\,\mathrm{y}(x)^{10} - 55296\,x^3\,\mathrm{y}(x)^3\\&\quad + 27648\,x^2\,\mathrm{y}(x)^6 - 4608\,x\,\mathrm{y}(x)^9 + 256\,\mathrm{y}(x)^{12}) \Big/ (\\&\quad 27\,x + 4\,x^2 - 36\,x\,\mathrm{y}(x) + 8\,x\,\mathrm{y}(x)^2 - 4\,\mathrm{y}(x)^3 + 4\,\mathrm{y}(x)^4) = 0\end{aligned}$$

Classe 2 :

```
> restart:
> class[2]:=diff(y(x),x)=-2*y(x)^2*x+y(x)^3;
```

$$class_2 := \frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x) = -2\,\mathrm{y}(x)^2\,x + \mathrm{y}(x)^3$$

```
> infolevel[dsolve]:=4;
```

$$infolevel_{dsolve} := 4$$

```
> dsolve(class[2],[Abel],implicit,useInt);
Classification methods on request
Methods to be used are:   [Abel]
Trying to isolate the derivative dy/dx...
```

```
Successful isolation of dy/dx
----------------------------
* Tackling ODE using method:   Abel
   -> Trying classification methods
   trying Abel
   The relative invariant s3 is:   -2/3-16/27*x^3
   The first absolute invariant s5^3/s3^5 is:
46656*x^6*(15+8*x^3)^3/(9+8*x^3)^5


   The second absolute invariant s3*s7/s5^2 is:
5/6*(9+8*x^3)*(9+42*x^3+16*x^6)/x^3/(15+8*x^3)^2
   ...checking Abel class AIL (45)
   ...checking Abel class AIL (310)

   ...checking Abel class AIR (36)
   inverse of the transformation solving the problem is:   {t = x, u(t) =
y(x)}

  Abel successful
```

$$\_C1 + \frac{x \operatorname{AiryAi}\left(x^2 - \frac{1}{y(x)}\right) + \operatorname{AiryAi}\left(1, x^2 - \frac{1}{y(x)}\right)}{x \operatorname{AiryBi}\left(x^2 - \frac{1}{y(x)}\right) + \operatorname{AiryBi}\left(1, x^2 - \frac{1}{y(x)}\right)} = 0$$

Classe 3 :

```
> restart:
> class[3]:=diff(y(x),x)=y(x)^3/4/x^2-y(x)^2;
```

$$class_3 := \frac{\partial}{\partial x} y(x) = \frac{1}{4}\frac{y(x)^3}{x^2} - y(x)^2$$

```
> infolevel[dsolve]:=4;
```

$$infolevel_{dsolve} := 4$$

```
> dsolve(class[3],[Abel],implicit,useInt);
Classification methods on request
Methods to be used are:   [Abel]
Trying to isolate the derivative dy/dx...
Successful isolation of dy/dx
----------------------------
* Tackling ODE using method:   Abel
   -> Trying classification methods
   trying Abel
   The relative invariant s3 is:   -1/54/x^3*(9+4*x^3)
   The first absolute invariant s5^3/s3^5 is:
729/4*(27+60*x^3+16*x^6)^3/x^3/(9+4*x^3)^5
   The second absolute invariant s3*s7/s5^2 is:
4/3*(9+4*x^3)*(450*x^3+81+420*x^6+80*x^9)/(27+60*x^3+16*x^6)^2
                                                          ...
   inverse of the transformation solving the problem is:   {t = x, u(t) =
y(x)}
   Abel successful
```

$$\_C1 + \frac{\left(x - \frac{1}{y(x)}\right) \operatorname{AiryAi}\left(\left(x - \frac{1}{y(x)}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{x}\right) + \operatorname{AiryAi}\left(1, \left(x - \frac{1}{y(x)}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{y(x)}\right) \operatorname{AiryBi}\left(\left(x - \frac{1}{y(x)}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{x}\right) + \operatorname{AiryBi}\left(1, \left(x - \frac{1}{y(x)}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{x}\right)} = 0$$

Classe 4 :

```
> restart:
> class[4]:=diff(y(x),x)=y(x)^3-(x+1)*y(x)^2/x;
```

$$class_4 := \frac{\partial}{\partial x}\, \mathrm{y}(x) = \mathrm{y}(x)^3 - \frac{(x+1)\, \mathrm{y}(x)^2}{x}$$

```
> infolevel[dsolve]:=4;
```

$$infolevel_{dsolve} := 4$$

```
> dsolve(class[4],[Abel],implicit,useInt);
Classification methods on request
Methods to be used are:   [Abel]
Trying to isolate the derivative dy/dx...
Successful isolation of dy/dx
----------------------------
* Tackling ODE using method:   Abel
   -> Trying classification methods
   trying Abel
   The relative invariant s3 is:   -1/27*(6*x^2-3*x+2*x^3+2)/x^3
   The first absolute invariant s5^3/s3^5 is:
2916*(10*x^4+5*x^3+2*x^5+8*x^2-5*x+2)^3/(6*x^2-3*x+2*x^3+2)^5
   The second absolute invariant s3*s7/s5^2 is:   1/3*(6*x^2-
3*x+2*x^3+2)*(105*x^5+110*x^4+70*x^6+8*x^3+60*x^2-
35*x+10*x^7+10)/(10*x^4+5*x^3+2*x^5+8*x^2-5*x+2)^2
                          ...
                          ...
   inverse of the transformation solving the problem is:   {t = x, u(t) =
y(x)}
   Abel successful
```

$$\_C1 + \frac{\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{\mathrm{y}(x)} - x\right)}}{x} - \mathrm{Ei}\left(1, -\frac{1}{\mathrm{y}(x)} + x\right) = 0$$

Classe 5 :

```
> restart:
> class[5]:=diff(y(x),x)=-
(2*x+3)*(x+1)*y(x)^3/2/x^5+(5*x+8)*y(x)^2/(2*x^3);
```

$$class_5 := \frac{\partial}{\partial x}\, \mathrm{y}(x) = -\frac{1}{2}\, \frac{(2\,x+3)\,(x+1)\, \mathrm{y}(x)^3}{x^5} + \frac{\frac{1}{2}\,(5\,x+8)\, \mathrm{y}(x)^2}{x^3}$$

```
> infolevel[dsolve]:=4;
```

$$infolevel_{dsolve} := 4$$

```
> dsolve(class[5],[Abel],implicit,useInt);

Classification methods on request
Methods to be used are:   [Abel]
Trying to isolate the derivative dy/dx...
Successful isolation of dy/dx
----------------------------
* Tackling ODE using method:   Abel
```

```
   -> Trying classification methods

   trying Abel
   The relative invariant s3 is:   5/108*(x+1)^2/x^9*(7*x+16)
   The first absolute invariant s5^3/s3^5 is:
729/25/(x+1)^4*(91*x^3+468*x^2+762*x+448)^3/(7*x+16)^5
   The second absolute invariant s3*s7/s5^2 is:
1/3*(7*x+16)*(5915*x^5+47320*x^4+147716*x^3+234128*x^2+188836*x+62720)/(91*x^
3+468*x^2+762*x+448)^2
                          ...
                          ...
   inverse of the transformation solving the problem is:   {t = x, u(t) =
y(x)}


  Abel successful
```

$$\_C1 + \frac{\sqrt{4\frac{1}{y(x)} - 4 - \frac{10}{x} - \frac{6}{x^2}}}{\left(4\frac{(x+1)^2}{x^2\left(4\frac{1}{y(x)} - 4 - \frac{10}{x} - \frac{6}{x^2}\right)} + 1\right)^{(1/4)}} + \int^{2\frac{x+1}{x\sqrt{4\frac{1}{y(x)} - 4 - \frac{10}{x} - \frac{6}{x^2}}}} \frac{1}{(\_a^2+1)^{(5/4)}}\, d\_a = 0$$

Classe 6 :

```
> restart:
> class[6]:=diff(y(x),x)=-y(x)^3/x^2/(x-1)^2+(1-x-
x^2)*y(x)^2/x^2/(x-1)^2;
```

$$class_6 := \frac{\partial}{\partial x}\, y(x) = -\frac{y(x)^3}{x^2\,(x-1)^2} + \frac{(1-x-x^2)\,y(x)^2}{x^2\,(x-1)^2}$$

```
> infolevel[dsolve]:=4;
```

$$infolevel_{dsolve} := 4$$

```
> dsolve(class[6],[Abel],implicit,useInt);
Classification methods on request
Methods to be used are:   [Abel]
Trying to isolate the derivative dy/dx...
Successful isolation of dy/dx
----------------------------
* Tackling ODE using method:   Abel
   -> Trying classification methods
   trying Abel
   The relative invariant s3 is:   -1/27*(27*x^4-10*x^3-9*x^2-12*x^5-
2+6*x+2*x^6)/x^6/(x-1)^6
   The first absolute invariant s5^3/s3^5 is:   2916*(-2-
188*x^7+54*x^4+28*x^3+85*x^8-20*x^9+2*x^10-218*x^5+276*x^6-
25*x^2+10*x)^3/(27*x^4-10*x^3-9*x^2-12*x^5-2+6*x+2*x^6)^5
   The second absolute invariant s3*s7/s5^2 is:   1/3*(27*x^4-10*x^3-9*x^2-
12*x^5-2+6*x+2*x^6)*(-14086*x^7-377*x^4+530*x^3+16169*x^8-
```

```
13244*x^9+7853*x^10+875*x^12-140*x^13+10*x^14-10-3190*x^11-1964*x^5+7759*x^6-245*x^2+70*x)/(-2-188*x^7+54*x^4+28*x^3+85*x^8-20*x^9+2*x^10-218*x^5+276*x^6-25*x^2+10*x)^2
                                     ...
   inverse of the transformation solving the problem is:   {t = x, u(t) = y(x)}

   Abel successful
```

$$\_C1 - \mathrm{Ei}\left(1, -\frac{1}{x} + \frac{1}{y(x)} + \frac{1}{x-1}\right) + \frac{e^{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y(x)} - \frac{1}{x-1}\right)}}{\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{x-1}} = 0$$

Classe 7 :

```
> restart:
> class[7]:=diff(y(x),x)=(4*x^4+5*x^2+1)*y(x)^3/2/x^3+y(x)^2+(1-4*x^2)*y(x)/2/x/(x^2-1)^2;
```

$$class_7 := \frac{\partial}{\partial x} y(x) = \frac{1}{2} \frac{(4\,x^4 + 5\,x^2 + 1)\,y(x)^3}{x^3} + y(x)^2 + \frac{\frac{1}{2}(1 - 4\,x^2)\,y(x)}{x\,(x^2-1)^2}$$

```
> infolevel[dsolve]:=4;
```

$$infolevel_{dsolve} := 4$$

```
> dsolve(class[7],[Abel],implicit,useInt);
Classification methods on request
Methods to be used are:   [Abel]
Trying to isolate the derivative dy/dx...
Successful isolation of dy/dx
----------------------------
* Tackling ODE using method:   Abel
   -> Trying classification methods
   trying Abel
   The relative invariant s3 is:   -1/108/x^4*(64*x^8-362*x^6+46*x^4+27*x^2-45)/(x-1)^2/(x+1)^2
   The first absolute invariant s5^3/s3^5 is:   -729*(315-5392*x^8+11928*x^6-5420*x^10+1280*x^16-18536*x^14+39276*x^12+2271*x^4-1422*x^2)^3/x^4/(x-1)^2/(x+1)^2/(64*x^8-362*x^6+46*x^4+27*x^2-45)^5
   The second absolute invariant s3*s7/s5^2 is:   1/3*(64*x^8-362*x^6+46*x^4+27*x^2-45)*(1325202*x^8-381411*x^6-3697566*x^10+2989560*x^16+6425820*x^14-9032356*x^12-21045448*x^18+15893760*x^20-3252768*x^22+128000*x^24-8505-379161*x^4+99873*x^2)/(315-5392*x^8+11928*x^6-5420*x^10+1280*x^16-18536*x^14+39276*x^12+2271*x^4-1422*x^2)^2
                                     ...
                                     ...

   The third absolute invariant s5*s7/s3^4 is:   -243/4*(1325202*x^8-381411*x^6-3697566*x^10+2989560*x^16+6425820*x^14-9032356*x^12-21045448*x^18+15893760*x^20-3252768*x^22+128000*x^24-8505-379161*x^4+99873*x^2)/x^4/(x-1)^2/(x+1)^2*(315-5392*x^8+11928*x^6-5420*x^10+1280*x^16-18536*x^14+39276*x^12+2271*x^4-1422*x^2)/(64*x^8-362*x^6+46*x^4+27*x^2-45)^4
    ->         ======================================
    ->             ...checking Abel class D (by Appell)
```

```
   -> Step 1: checking for a disqualifying factor on F after evaluating x at
a number
   Trying x =   0
   Trying x =   1
   Trying x =   2
   *** No disqualifying factor on F was found ***
    ->                 . . .
    ->  Step 3: looking for a solution F depending on x
   *** No solution F of x was found ***
    ->         ======================================
    ->             ...checking Abel class B (by Liouville)
    -> Step 1: checking for a disqualifying factor on F after evaluating x at
a number
   Trying x =   0
   *** No disqualifying factor on F was found ***
    -> Step 2: calculating resultants to eliminate F and get candidates for C
   *** Candidates for C are   [1, 4, 1/4], ***
    -> Step 3: looking for a solution F depending on x
   _____________________________
   C = 1/4 leads to a useless solution (F does not depend on x)
   *** No solution F of x was found ***
    ->         ======================================
    ->             ...checking Abel class A (by Abel)
    -> Step 1: checking for a disqualifying factor on F after evaluating x at
a number
   Trying x =   0
   Trying x =   1

   Trying x =   2
   *** No disqualifying factor on F was found ***
    -> Step 2: calculating resultants to eliminate F and get candidates for C
   *** Candidates for C are   [0, -1/4], ***
    -> Step 3: looking for a solution F depending on x
   *** No solution F of x was found ***
    ->         ======================================
    ->             ...checking Abel class C (by Abel)
    -> Step 1: checking for a disqualifying factor on F after evaluating x at
a number
   Trying x =   0
   Trying x =   1
   Trying x =   2
   *** No disqualifying factor on F was found ***
    -> Step 2: calculating resultants to eliminate F and get candidates for C
   *** Candidates for C are   [0, 2, 9/5, -1], ***
    -> Step 3: looking for a solution F depending on x
   *** No solution F of x was found ***
    ->         ======================================
    ->             ...checking Abel class AIL 1.6
    -> Step 1: checking for a disqualifying factor on F after evaluating x at
a number
   Trying x =   0
   Trying x =   1
   Trying x =   2
   *** No disqualifying factor on F was found ***
    -> Step 2: calculating resultants to eliminate F and get candidates for C
   *** Candidates for C are   [0, 16, -4], ***

   -> Step 3: looking for a solution F depending on x
   _____________________________
   C = -4 leads to a useless solution (F does not depend on x)
   *** No solution F of x was found ***
    ->         ======================================
    ->             ...checking Abel class AIL 1.8
```

```
   -> Step 1: checking for a disqualifying factor on F after evaluating x at
a number
   Trying x =   0

   Trying x =   1
   Trying x =   2

 *** No disqualifying factor on F was found ***
   -> Step 2: calculating resultants to eliminate F and get candidates for C
   *** Candidates for C are   [0], ***
   -> Step 3: looking for a solution F depending on x
   *** No solution F of x was found ***
   ->         ======================================
   ->             ...checking Abel class AIL 1.9
   -> Step 1: checking for a disqualifying factor on F after evaluating x at
a number
   Trying x =   0
   Trying x =   1
   Trying x =   2
   *** No disqualifying factor on F was found ***
   -> Step 2: calculating resultants to eliminate F and get candidates for C
   *** Candidates for C are   [0, -2/9, -1/9], ***
   -> Step 3: looking for a solution F depending on x
   _____________________________
   C = -2/9 leads to a useless solution (F does not depend on x)

   *** No solution F of x was found ***
   trying to map the Abel into a solvable 2nd order ODE
```

Classe A :

```
> restart:
> class[A]:=diff(y(x),x)=(alpha*x+1/x+1/x^3)*y(x)^3+y(x)^2;
```

$$class_A := \frac{\partial}{\partial x}\,y(x) = \left(\alpha\,x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) y(x)^3 + y(x)^2$$

```
> infolevel[dsolve]:=4;
```

$$infolevel_{dsolve} := 4$$

```
> dsolve(class[A],[Abel],implicit,useInt);
Classification methods on request
Methods to be used are:   [Abel]
Trying to isolate the derivative dy/dx...
Successful isolation of dy/dx
----------------------------
* Tackling ODE using method:   Abel
   -> Trying classification methods
   trying Abel
   The relative invariant s3 is:   -1/27/x^4*(9*alpha*x^4-9*x^2-27-2*x^4)


  The first absolute invariant s5^3/s3^5 is:   -2916*(27*alpha^2*x^8-
72*alpha*x^6-270*alpha*x^4-
15*alpha*x^8+54*x^4+36*x^2+15*x^6+135+2*x^8)^3/x^4/(9*alpha*x^4-9*x^2-27-
2*x^4)^5
   The second absolute invariant s3*s7/s5^2 is:   1/3*(9*alpha*x^4-9*x^2-27-
2*x^4)*(-2835+14175*alpha*x^4-2349*x^4+243*x^2-495*x^8-927*x^6-
8505*alpha^2*x^8+4806*alpha*x^6+4131*alpha*x^8-10*x^12-105*x^10-
1917*alpha^2*x^10+900*alpha*x^10+405*alpha^3*x^12-
360*alpha^2*x^12+105*alpha*x^12)/(27*alpha^2*x^8-72*alpha*x^6-270*alpha*x^4-
15*alpha*x^8+54*x^4+36*x^2+15*x^6+135+2*x^8)^2
```

```
                         ...
                         ...
   Looking for potential symmetries
   .. changing x -> 1/x, trying again
   Looking for potential symmetries
   Found potential symmetries:   [0, 1], [-exp(-2*u)*x, exp(-2*u)]
   Proceeding with integration step.
   Abel successful
```

$$-\frac{1}{2}\left(-x^3\, e^{\left(\int -\frac{1}{2}\frac{x^2\, y(x)}{y(x)+x} -2\frac{1}{\_a\,(4\,\alpha\,\_a^2-2\,\_a+1)}\,d\_a\right)} + 2\int^{-\frac{1}{2}\frac{x^2\, y(x)}{y(x)+x}} e^{\left(\int -2\frac{1}{\_b\,(4\,\alpha\,\_b^2-2\,\_b+1)}\,d\_b\right)}\,d\_b\; y(x) + 2\int^{-\frac{1}{2}\frac{x^2\, y(x)}{y(x)+x}} e^{\left(\int -2\frac{1}{\_b\,(4\,\alpha\,\_b^2-2\,\_b+1)}\,d\_b\right)}\,d\_b\; x\right)/(y(x)+x)+\_C1=0$$

Classe B :

```
> restart:
> class[B]:=diff(y(x),x)=2*(x^2-alpha^2)*y(x)^3+2*(x+1)*y(x)^2;
```

$$class_B := \frac{\partial}{\partial x}\,y(x) = 2\,(x^2-\alpha^2)\,y(x)^3+2\,(x+1)\,y(x)^2$$

```
> infolevel[dsolve]:=4;
```

$$infolevel_{dsolve} := 4$$

```
> dsolve(class[B],[Abel],implicit,useInt);
```

```
Classification methods on request
Methods to be used are:   [Abel]
Trying to isolate the derivative dy/dx...
Successful isolation of dy/dx
----------------------------
* Tackling ODE using method:   Abel
   -> Trying classification methods
   trying Abel
   The relative invariant s3 is:   4/9*x^2-4/3*alpha^2-8/9*x+16/27*x^3+16/27
   The first absolute invariant s5^3/s3^5 is:   11664*(2*x^3-6*x*alpha^2-
10*x^2-5*x^4+10*x+15*x^2*alpha^2-4*x^5+6*alpha^2-4)^3/(-3*x^2+9*alpha^2+6*x-
4*x^3-4)^5


   The second absolute invariant s3*s7/s5^2 is:   -1/3*(-3*x^2+9*alpha^2+6*x-
4*x^3-4)*(35*x^6+20*x^7-9*alpha^4+30*x*alpha^2-117*x^2*alpha^2-
```

```
80*x^3+76*x^4+15*x^5+20+30*x^3*alpha^2+45*alpha^4*x-105*alpha^2*x^4+105*x^2-
15*alpha^2-70*x)/(2*x^3-6*x*alpha^2-10*x^2-5*x^4+10*x+15*x^2*alpha^2-
4*x^5+6*alpha^2-4)^2
                              ...
                              ...
   The third absolute invariant s5*s7/s3^4 is:   -972*(35*x^6+20*x^7-
9*alpha^4+30*x*alpha^2-117*x^2*alpha^2-
80*x^3+76*x^4+15*x^5+20+30*x^3*alpha^2+45*alpha^4*x-105*alpha^2*x^4+105*x^2-
15*alpha^2-70*x)*(2*x^3-6*x*alpha^2-10*x^2-5*x^4+10*x+15*x^2*alpha^2-
4*x^5+6*alpha^2-4)/(-3*x^2+9*alpha^2+6*x-4*x^3-4)^4
    ->         ======================================
    ->             ...checking Abel class D (by Appell)
   Trying _z1 = 0
   Trying _z1 = 1
   Trying _z1 = 2
                              ...
                              ...

   *** No solution F of x was found ***
    ->         ======================================
    ->             ...checking Abel class B (by Liouville)
   Trying _z1 = 0
   Trying _z1 = 1
   Trying _z1 = 2
   Trying _z1 = 3
    -> Step 1: checking for a disqualifying factor on F after evaluating x at
a number
   Trying x =   0
   *** No disqualifying factor on F was found ***
    -> Step 2: calculating resultants to eliminate F and get candidates for C
   *** Candidates for C are   [1, 3, 4, 1/4], ***
    -> Step 3: looking for a solution F depending on x
   _____________________________
   C = 3 leads to the solutions [{F = x}]
   Interpolated candidate for the class parameter C is: C = 3
   General testing of the candidate C = 3 with arbitrary _z1
   Interpolation is still incomplete; trying next value of _z1
   _____________________________
   Trying _z1 = 4
    -> Step 1: checking for a disqualifying factor on F after evaluating x at
a number
   Trying x =   0

   *** No disqualifying factor on F was found ***
    -> Step 2: calculating resultants to eliminate F and get candidates for C
   *** Candidates for C are   [1, 4, 1/4], ***
    -> Step 3: looking for a solution F depending on x
   _____________________________
   C = 4 leads to the solutions [{F = x}]
   Interpolated candidate for the class parameter C is: C = _z1
   Fast testing of C = _z1 with next _z1 = 5
   _____________________________
   C = 5 leads to the previous solution [F = x]
   Fast test of C = _z1 passed OK

   General testing of the candidate C = _z1 with arbitrary _z1
   _____________________________
   C = _z1 leads to the previous solution [F = x]
   General test of C = _z1 passed OK; interpolation for _z1 in this level is
complete
   _____________________________
   Value of the Class parameter solving the problem is:   C = alpha^2
```

```
   Inverse of the transformation solving the problem is:   {u(t) = y(x), t =
x}

  Abel successful
```

$$\_C1+\left(-(\alpha+x)\,\mathrm{BesselK}\left(\alpha,-\sqrt{-\alpha^2+x^2+\frac{1}{y(x)}}\right)-\mathrm{BesselK}\left(\alpha+1,-\sqrt{-\alpha^2+x^2+\frac{1}{y(x)}}\right)\sqrt{-\alpha^2+x^2+\frac{1}{y(x)}}\right)\Big/\left(-(\alpha+x)\,\mathrm{BesselI}\left(\alpha,-\sqrt{-\alpha^2+x^2+\frac{1}{y(x)}}\right)+\mathrm{BesselI}\left(\alpha+1,-\sqrt{-\alpha^2+x^2+\frac{1}{y(x)}}\right)\sqrt{-\alpha^2+x^2+\frac{1}{y(x)}}\right)=0$$

Classe C :

```
> restart:
> class[C]:=diff(y(x),x)=alpha*(1-x^2)*y(x)^3/2/x+(alpha-
1)*y(x)^2-alpha*y(x)/2/x;
```

$$class_C := \frac{\partial}{\partial x}\,y(x)=\frac{1}{2}\,\frac{\alpha\,(1-x^2)\,y(x)^3}{x}+(\alpha-1)\,y(x)^2-\frac{1}{2}\,\frac{\alpha\,y(x)}{x}$$

```
> infolevel[dsolve]:=4;
```

$$infolevel_{dsolve} := 4$$

```
> dsolve(class[C],[Abel],implicit,useInt);
Classification methods on request
Methods to be used are:   [Abel]
Trying to isolate the derivative dy/dx...
Successful isolation of dy/dx
----------------------------
* Tackling ODE using method:   Abel
   -> Trying classification methods
   trying Abel


   The relative invariant s3 is:   -1/108*(alpha-1)*(2+alpha)*(-
9*alpha+x^2*alpha-4*x^2)/x^2
   The first absolute invariant s5^3/s3^5 is:   729/(2+alpha)^2/(alpha-
1)^2*(-24*alpha^2*x^2-6*x^4*alpha^2+12*x^4*alpha-18*alpha^2-60*x^2*alpha-
6*alpha^3*x^2+alpha^3*x^4-16*x^4-27*alpha^3)^3/x^2/(-9*alpha+x^2*alpha-
4*x^2)^5
   The second absolute invariant s3*s7/s5^2 is:   1/3*(-9*alpha+x^2*alpha-
4*x^2)*(-15*alpha^5*x^4-225*alpha^5*x^2+5*alpha^5*x^6-936*alpha^4*x^2-
192*alpha^4*x^4+140*x^6*alpha^3-40*x^6*alpha^4-320*x^6*alpha^2+400*x^6*alpha-
432*alpha^4-405*alpha^5-320*x^6-1440*alpha^2*x^2-480*x^4*alpha^2-
1680*x^4*alpha-2124*alpha^3*x^2-468*alpha^3*x^4-108*alpha^3)/(-
24*alpha^2*x^2-6*x^4*alpha^2+12*x^4*alpha-18*alpha^2-60*x^2*alpha-
6*alpha^3*x^2+alpha^3*x^4-16*x^4-27*alpha^3)^2
                              ...
                              ...
   Proceeding with integration step.

   Abel successful
```

$$\frac{e^{\left(\int^{\frac{1}{(y(x)\,x-1)\,x}+\frac{1}{x}} \frac{1}{-1/2\,\_a\,\alpha+1/2\,\_a^3\,\alpha}\,d\_a\right)}}{(y(x)\,x-1)\,x} - \int^{\frac{1}{(y(x)\,x-1)\,x}+\frac{1}{x}} e^{\left(\int \frac{1}{-1/2\,\_b\,\alpha+1/2\,\_b^3\,\alpha}\,d\_b\right)}\,d\_b + \_C1 = 0$$

Classe D :

```
> restart:
> class[D]:=diff(y(x),x)=-y(x)^3/x-(alpha+x^2)*y(x)^2/x^2;
```

$$class_D := \frac{\partial}{\partial x}\,y(x) = -\frac{y(x)^3}{x} - \frac{(\alpha+x^2)\,y(x)^2}{x^2}$$

```
> infolevel[dsolve]:=4;
```

$$infolevel_{dsolve} := 4$$

```
> dsolve(class[D],[Abel],implicit,useInt);
Classification methods on request
Methods to be used are:   [Abel]
Trying to isolate the derivative dy/dx...
Successful isolation of dy/dx
----------------------------
* Tackling ODE using method:   Abel
   -> Trying classification methods
   trying Abel
   The relative invariant s3 is:   -1/27*(-
9*x^4+9*x^2*alpha+2*alpha^3+6*x^2*alpha^2+6*alpha*x^4+2*x^6)/x^6
   The first absolute invariant s5^3/s3^5 is:
2916*(alpha+x^2)^3*(2*alpha^4+8*x^2*alpha^3+15*x^2*alpha^2+12*x^4*alpha^2+8*x
^6*alpha+2*x^8-15*x^6+9*x^4)^3/(-
9*x^4+9*x^2*alpha+2*alpha^3+6*x^2*alpha^2+6*alpha*x^4+2*x^6)^5
   The second absolute invariant s3*s7/s5^2 is:   1/3*(-
9*x^4+9*x^2*alpha+2*alpha^3+6*x^2*alpha^2+6*alpha*x^4+2*x^6)*(10*alpha^7-
27*x^8+27*x^6*alpha+180*alpha^3*x^4+180*alpha^2*x^6+180*x^8*alpha-

105*x^12+10*x^14+315*x^4*alpha^4+210*x^6*alpha^3-210*x^8*alpha^2-
315*x^10*alpha+105*x^2*alpha^5+70*alpha^6*x^2+210*alpha^5*x^4+350*alpha^4*x^6
+350*alpha^3*x^8+210*alpha^2*x^10+70*x^12*alpha+180*x^10)/(alpha+x^2)^2/(2*al
pha^4+8*x^2*alpha^3+15*x^2*alpha^2+12*x^4*alpha^2+8*x^6*alpha+2*x^8-
15*x^6+9*x^4)^2
                           ...
                           ...
   The third absolute invariant s5*s7/s3^4 is:   243*(10*alpha^7-
27*x^8+27*x^6*alpha+180*alpha^3*x^4+180*alpha^2*x^6+180*x^8*alpha-
105*x^12+10*x^14+315*x^4*alpha^4+210*x^6*alpha^3-210*x^8*alpha^2-
315*x^10*alpha+105*x^2*alpha^5+70*alpha^6*x^2+210*alpha^5*x^4+350*alpha^4*x^6
+350*alpha^3*x^8+210*alpha^2*x^10+70*x^12*alpha+180*x^10)*(alpha+x^2)*(2*alph
a^4+8*x^2*alpha^3+15*x^2*alpha^2+12*x^4*alpha^2+8*x^6*alpha+2*x^8-
15*x^6+9*x^4)/(-
9*x^4+9*x^2*alpha+2*alpha^3+6*x^2*alpha^2+6*alpha*x^4+2*x^6)^4
    ->         ======================================
    ->             ...checking Abel class D (by Appell)


   Trying alpha = 0
   Trying alpha = 1
    ->                        ...
                              ...
```

```
   *** No disqualifying factor on F was found ***
  -> Step 2: calculating resultants to eliminate F and get candidates for C
*** Candidates for C are   [0, 4/27, 64/81], ***
  -> Step 3: looking for a solution F depending on x
_____________________________
C = 4/27 leads to a useless solution (F does not depend on x)
_____________________________
C = 64/81 leads to the solutions [{F = 9/8*(-1+x^2)/(1+x^2)}]
Interpolated candidate for the class parameter C is: C = 64/81
General testing of the candidate C = 64/81 with arbitrary alpha
_____________________________
C = 64/81 leads to a useless solution (F does not depend on x)
Interpolation is still incomplete; trying next value of alpha
_____________________________
Trying alpha = 2
                           ...
                           ...
  -> Step 3: looking for a solution F depending on x
_____________________________
C = 4/27 leads to a useless solution (F does not depend on x)
_____________________________
C = 256/81 leads to the solutions [{F = 9/16*(-2+x^2)/(2+x^2)}]
Interpolated candidate for the class parameter C is: C = 64/27*alpha-
128/81
Fast testing of C = 64/27*alpha-128/81 with next alpha = 3
_____________________________
C = 448/81 leads to a useless solution (F does not depend on x)
Interpolation is still incomplete; trying rising the degree in alpha of
the denominator, from 0 to 1
_____________________________
Interpolated candidate for the class parameter C is: C = -256/243/(alpha-
7/3)
Fast testing of C = -256/243/(alpha-7/3) with next alpha = 3
_____________________________
C = -128/81 leads to a useless solution (F does not depend on x)
Interpolation is still incomplete; trying next value of alpha
_____________________________
Trying alpha = 3
  ->                           ...
                               ...
*** Candidates for C are   [0, 4/27, 64/9], ***
  -> Step 3: looking for a solution F depending on x
_____________________________
C = 4/27 leads to a useless solution (F does not depend on x)
_____________________________
C = 64/9 leads to the solutions [{F = 3/8*(-3+x^2)/(3+x^2)}]
Interpolated candidate for the class parameter C is: C = 64/81*alpha^2
Fast testing of C = 64/81*alpha^2 with next alpha = 4
_____________________________
C = 1024/81 leads to the solutions [{F = 9/32*(-4+x^2)/(4+x^2)}]
Fast test of C = 64/81*alpha^2 passed OK

General testing of the candidate C = 64/81*alpha^2 with arbitrary alpha
_____________________________

C = 64/81*alpha^2 leads to the solutions [{F = -9/8*(alpha-
x^2)/alpha/(alpha+x^2)}]
General test of C = 64/81*alpha^2 passed OK; interpolation for alpha in
this level is complete
_____________________________
Value of the Class parameter solving the problem is:   C = 2*alpha
Inverse of the transformation solving the problem is:   {u(t) =
1/2/x*y(x), t = 2*alpha+2*x^2}
Abel successful
```

$$\_C1 + \left((2\,\alpha + 2)\,\mathrm{WhittakerM}\left(-\frac{1}{2}\,\alpha - \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\,\frac{(\alpha\,y(x) - x^2\,y(x) + x)^2}{y(x)^2\,x^2} \right) - \left(2\,x^2 - \frac{2\,x}{y(x)}\right)\mathrm{WhittakerM}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\,\alpha, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\,\frac{(\alpha\,y(x) - x^2\,y(x) + x)^2}{y(x)^2\,x^2} \right) \right) \Bigg/ \left(\alpha\,\mathrm{WhittakerW}\left(-\frac{1}{2}\,\alpha - \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\,\frac{(\alpha\,y(x) - x^2\,y(x) + x)^2}{y(x)^2\,x^2} \right)(1+\alpha) - \left(2\,x^2 - \frac{2\,x}{y(x)}\right)\mathrm{WhittakerW}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\,\alpha, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\,\frac{(\alpha\,y(x) - x^2\,y(x) + x)^2}{y(x)^2\,x^2} \right) \right) = 0$$

5-4 La commande odeadvisor :

Description :

Une commande qui permet d'identifier le type d'une équation différentielle donnée.

Différentes formes :

odeadvisor(ODE)
odeadvisor(ODE, y(x), [type1, type2, ...], help)

Paramètres:

`ODE`	-	une équation différentielle ordinaire.
`y(x)`	-	une fonction indéterminée.
`type1, type2,...`	-	une option, elle représente un sous ensemble de type des classes.
`help`	-	une option, elle représente les différentes références.

Exemple 1:

```
> restart:
> with(DEtools, odeadvisor);
```

$$[odeadvisor]$$

```
> ode:=diff(u(t),t)=8*(1-t^4-t^8)*u(t)^3/t^7+4*u(t)^2/t^4+u(t)/t;
```

$$ode := \frac{\partial}{\partial t}\,u(t) = 8\,\frac{(1 - t^4 - t^8)\,u(t)^3}{t^7} + \frac{4\,u(t)^2}{t^4} + \frac{u(t)}{t}$$

```
> odeadvisor(ode);
```

$$[\_rational, \_Abel]$$

Pour avoir plus d'information sur la méthode de la classification par Maple, on considère l'exemple suivant :

Exemple 2:

Dans cet exemple, on se propose de donner une solution à une équation différentielle d'Abel sans supposer aucune information sur son type et ceci à l'aide de l'option **class.**

```
> restart:
> ode := diff(y(x),x) - y(x)^3 - a*exp(x)*y(x)^2;
```

$$ode := \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x)\right) - \mathrm{y}(x)^3 - a\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{y}(x)^2$$

```
> infolevel[dsolve]:=4;
```

$$infolevel_{dsolve} := 4$$

```
> dsolve(ode,class);
Methods for first order ODEs:
Trying to isolate the derivative dy/dx...
Successful isolation of dy/dx
-> Trying classification methods
trying a quadrature
trying 1st order linear

trying Bernoulli
trying separable
trying inverse linear
trying homogeneous types:
trying Chini
differential order: 1; looking for linear symmetries
trying exact
trying Abel
The relative invariant s3 is:   1/27*a*exp(x)*(9+2*a^2*exp(x)^2)
The first absolute invariant s5^3/s3^5 is:
2916/a^2/exp(x)^2*(15*a^2*exp(x)^2+2*exp(x)^4*a^4+9)^3/(9+2*a^2*exp(x)^2)^5
The second absolute invariant s3*s7/s5^2 is:
1/3*(9+2*a^2*exp(x)^2)*(27+180*a^2*exp(x)^2+105*exp(x)^4*a^4+10*a^6*exp(x)^6)
/(15*a^2*exp(x)^2+2*exp(x)^4*a^4+9)^2
...checking Abel class AIL (45)
...checking Abel class AIL (310)
...checking Abel class AIR (36)
...checking Abel class AIL (301)
...checking Abel class AIL (1000)
inverse of the transformation solving the problem is:   {t = a*exp(x), u(t) =
y(x)}
Abel successful
```

$$\_C1 + \frac{\mathrm{e}^{\left(-1/2\left(a\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{\mathrm{y}(x)}\right)^2\right)}}{a\,\mathrm{e}^x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{1}{2}\left(a\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{\mathrm{y}(x)}\right)\sqrt{2}\right)\sqrt{2}\,\sqrt{\pi} = 0$$

On remarque que Maple a identifié le type de l'équation donnée sans avoir aucune information préalable.

Les équations différentielles d’Abel présentées dans le livre de Kamke :

```
ode[36] := dy + y^3 + a*x*y^2 :
ode[37] := dy - y^3 - a*exp(x)*y^2:
ode[38] := dy - a*y^3 - b*x^(-3/2):
ode[40] := dy + 3*a*y^3 + 6*a*x*y^2:
ode[41] := dy + a*x*y^3 + b*y^2:
ode[42] := dy - x*(x+2)*y^3 - (x+3)*y^2:
ode[43] := dy + (3*a*x^2 + 4*a^2*x + b)*y^3 + 3*x*y^2:
ode[44] := dy + 2*a*x^3*y^3 + 2*x*y:
ode[45] := dy + 2*(a^2*x^3 - b^2*x)*y^3 + 3*b*y^2:
ode[46] := dy - x^a*y^3 + 3*y^2 - x^(-a)*y -x^(-2*a) + a*x^(-a-1):
ode[47] := dy - a*(x^n - x)*y^3 - y^2:
ode[48] := dy - (a*x^n + b*x)*y^3 - c*y^2:
ode[49] := dy + a*diff(phi(x),x)*y^3 + 6*a*phi(x)*y^2 +
(2*a+1)*y*diff(phi(x),x,x)/diff(phi(x),x) +2*(a+1):
ode[50] := dy - f3(x)*y^3 - f2(x)*y^2 - f1(x)*y - f0(x):
ode[51] := dy - (y-f(x))*(y-g(x))*(y-(a*f(x)+b*g(x))/(a+b))*h(x)
- diff(f(x),x)*(y-g(x))/(f(x)-g(x)) -
diff(g(x),x)*(y-f(x))/(g(x)-f(x)):
ode[111] := x*dy + y^3 + 3*x*y^2:
ode[145] := x^2*dy + a*y^3 - a*x^2*y^2:

ode[146] := x^2*dy + x*y^3 + a*y^2:
ode[147] := x^2*dy + a*x^2*y^3 + b*y^2:
ode[151] := (x^2+1)*dy + (y^2+1)*(2*x*y - 1):
ode[169] := (a*x+b)^2*dy + (a*x+b)*y^3 + c*y^2:
ode[185] := x^7*dy + 2*(x^2+1)*y^3 + 5*x^3*y^2:
ode[188] := x^(2*n+1)*dy - a*y^3 - b*x^(3*n):
ode[203] := y*dy+y+x^3:
ode[204] := y*dy+a*y+x:
ode[205] := y*dy+a*y+(a^2-1)/(4)*x+b*x^n:
ode[206] := y*dy+a*y+b*exp(x)-2*a:
ode[213] := (y+1)*dy-y-x:
ode[214] := (y+x-1)*dy-y+2*x+3:
ode[215] := (y+2*x-2)*dy-y+x+1:
ode[216] := (y-2*x+1)*dy+y+x:
ode[218] := (y-x^2)*dy+4*x*y:
ode[219] := (y+g(x))*dy-f2(x)*y^2-f1(x)*y-f0(x):
ode[221] := (2*y+x+1)*dy-(2*y+x-1):
ode[222] := (2*y+x+7)*dy-y+2*x+4:
ode[223] := (2*y-x)*dy-y-2*x:
ode[224] := (2*y-6*x)*dy-y+3*x+2:
ode[225] := (4*y+2*x+3)*dy-2*y-x-1:
ode[226] := (4*y-2*x-3)*dy+2*y-x-1:
ode[227] := (4*y-3*x-5)*dy-3*y+7*x+2:
ode[228] := (4*y+11*x-11) *dy-25*y-8*x+62:
ode[229] := (12*y-5*x-8)*dy-5*y+2*x+3:
ode[231] := (a*y+b*x+c)*dy+alpha*y+beta*x+gamma:
ode[234] := x*y*dy-y^2+x*y+x^3-2*x^2:
ode[235] := (x*y+a)*dy+b*y:
ode[236] := x*(y+4)*dy-y^2-2*y-2*x:
ode[237] := x*(y+a)*dy+b*y+c*x:
ode[238] := (x*(y+x)+a)*dy-y*(y+x)-b:
ode[239] := (x*y-x^2)*dy+y^2-3*x*y-2*x^2:
ode[243] := x*(2*y+x-1)*dy-y*(y+2*x+1):
ode[244] := x*(2*y-x-1)*dy+y*(2*x-y-1):
ode[245] := (2*x*y+4*x^3)*dy+y^2+112*x^2*y:
ode[246] := x*(3*y+2*x)*dy+3*(y+x)^2:
ode[247] := (3*x+2)*(y-2*x-1)*dy-y^2+x*y-7*x^2-9*x-3:
ode[248] := (6*x*y+x^2+3)*dy+3*y^2+2*x*y+2*x:
ode[249] := (a*x*y+b*x^n)*dy+alpha*y^3+beta*y^2:
```

```
ode[250] :=
(B*x*y+A*x^2+a*x+b*y+c)*dy-B*g(x)^2+A*x*y+alpha*x+beta*y+gamma:
ode[251] := (x^2*y-1)*dy+x*y^2-1:
ode[252] := (x^2*y-1)*dy-(x*y^2-1):
ode[253] := (x^2*y-1)*dy+8*(x*y^2-1):
ode[254] := x*(x*y-2)*dy+x^2*y^3+x*y^2-2*y:
ode[255] := x*(x*y-3)*dy+x*y^2-y:
ode[257] := x*(x*y+x^4-1)*dy-y*(x*y-x^4-1):
ode[260] := (2*x^2*y+x)*dy-x^2*y^3+2*x*y^2+y:
ode[261] := (2*x^2*y-x)*dy-2*x*y^2-y:
ode[262] := (2*x^2*y-x^3)*dy+y^3-4*x*y^2+2*x^3:
ode[264] := 2*x*(x^3*y+1)*dy+(3*x^3*y-1)*y:
ode[265] := (x^(n*(n+1))*y-1)*dy+2*(n+1)^2*x^(n-1)*(x^(n^2)*y^2-1):
ode[269] := (g1(x)*y+g0(x))*dy-f1(x)*y-f2(x)*y^2-f3(x)*y^3-f0(x):
```

Les équations différentielles d'Abel présentées dans le livre de Polyanin :

```
Ode:= y*dy-y=s*x+A*x^m:

        [m=m, s=-2*(m+1)/(m+3)^2, A=(m+1)/2*((m-1)/(m+3))^(m+1)*a^(1-m)],
        [m=-7, s=15/4],
        [m=-4, s=6],
        [m=-5/2, s=12],
        [m=-2, s=0],
        [m=-2, s=2],
        [m=-5/3, s=-3/16],
        [m=-5/3, s=-9/100],
        [m=-5/3, s=63/4],
        [m=-7/5, s=-5/36],
        [m=-1, s=0],
        [m=-1/2, s=-2/9],
        [m=-1/2, s=-4/25],
        [m=-1/2, s=0],
        [m=-1/2, s=20],
        [m=0, s=s],
        [m=0, s=0],
        [m=1/2, s=-12/49],
        [m=2, s=-6/25],
        [m=2, s=6/25],
```

Conclusion

Ce travail présente une première classification basée sur la théorie des invariants des EDO d'Abel ayant un invariant non constant, un ensemble de classe est obtenue par les travaux d'Abel, Appell et Liouville et d'autres nouvelles classes et qui sont présentées aussi dans l'article [8].

Le logiciel Maple développé à l'université de Waterloo (Canada) permet de résoudre chaque élément d'une classe par la détermination de la transformation d'équivalence, et la solution est donnée uniquement sous la forme implicite.

Messieurs E.S.Cheb-Terrab et Austin Roche dans l'article [10] donnent une généralisation des équations intégrables présentées dans ce travail (Les classes AIA, AIR et AIL) et ils préparent un autre article pour donner des nouveaux algorithmes pour la résolution des équations d'Abel.

Une autre approche pour la résolution des équations d'Abel est celle basée sur la symétrie de Lie et ceci pour les équations où la méthode de la classification présentée dans ce travail ne marche pas.

Dans ce cas le logiciel Maple utilise les commandes de la symétrie pour la résolution de ce type d'équation.

Pour les équations d'Abel qui n'appartiennent pas aux classes décrites précédemment et pour lesquelles la méthode de la symétrie ne donne pas la solution, le problème reste toujours ouvert et nécessite des recherches plus profondes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N.H.Abel, *Oeuvres Complètes II.* S.Lie and L.Sylow, Eds, Christiana, 1881.

[2] P.Appell, *Sur les invariants de quelques équations différentielles,* Journal de Mathématique 5 (1889), 361-423.

[3] F.Boulier, D.Lazard, E.Ollivier et M.Petitot, *Representation for the radical of a finitely generated differential ideal,* Proc. ISSAC 1995, ACM Press (1995), 158-166.

[4] E.S. Cheb-Terrab, L.G.S. Duarte et L.A.C.P. da Mota, *Computer Algebra Solving of First Order ODEs Using Symmetry Methods*, Computer Physics Communications, 101 (1997) 254.

[5] E.S. Cheb-Terrab, L.G.S. Duarte et L.A.C.P. da Mota, *Computer Algebra Solving of Second Order ODEs Using Symmetry Methods*, Computer Physics Communications, 108 (1998) 90.

[6] E.S. Cheb-Terrab, A.D. Roche, *Symmetries and first order ODE patterns*, Computer Physics Communications 113 (1998) 239.

[7] E.S. Cheb-Terrab, A.D. Roche, *Integrating Factors for Second Order ODEs*, Journal of Symbolic Computation V. 27, No. 5, p. (1999) 501-519.

[8] E.S. Cheb-Terrab, A.D. Roche, *Abel ODEs*: *Equivalence and Integrable Classes,* Computer Physics Communications 130 (2000).

[9] E.S. Cheb-Terrab, T.Kolokolnikov, First *order ODEs, Symmetries and Linear Transformations,* European Journal of Applied Mathematics (2000).

[10] E.S. Cheb-Terrab, A.D. Roche, An *Abel ODE class generalizing known integrable classes*, Computer Physics Communications (2000).

[11] Ph.Fortin, R.Pomès, *Premiers pas en Maple.* Vuibert supérieur

[12] M.Halphen, *Sur la multiplication de fonctions elliptiques,* Compte Rendus T. LXXXVIII, N° 9 (1879).

[13] E.L. Ince, *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, New York, 1956.

[14] E.Kamke, *Differentialgleichungen: Losungsmethoden und Losungen*. Chelsea Publishing Co, New York (1959).

[15] R.Liouville, *Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre et sur les formations invariantes qui s'y rapportent,* Compte Rendus 103 (1887), 460-463.

[16] R.Liouville, *Sur une équation différentielle du premier ordre,* Acta Mathematica 27 (1903), 55-78.

[17] G.M.Murphy, *Ordinary Differential Equations and their Solutions*. Van Nostrand, Princeton, 1960.

[18] P.Olver, *Equivalence, Invariants and Symmetry,* Cambridge University Press 1995.

[19] A.D.Polyanin, V.F.Zaitsez, *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations,* CRC Press, Boca Raton (1995).

[20] G.J.Reid, A.D.Wittkopf and A.Boulton, *Reduction of systems of nonlinear partial differential equations to simplified involutive forme,* Eur.J.Appl.Math. 7 (1996), 604-635.

[21] F.Schwarz, *Symmetry Analysis of Abel's Equation,* Applied Mathematics 100 (1998), 269-294.

[22] F.Schwarz, *Algorithmic Solution of Abel's Equation,* Computing 61(1998), 39-46.

[23] F.Schwarz, *Equivalence Classes and Symmetries of Abel's Equation* (1998).