Introduction

L'un des plus importants problèmes conçernant la théorie des fonctions entières est la relation existant entre la croissance des fonctions entières et la distribution de leurs zéros (domaine classique déja investi par Borel,Lindelôf et autres).

Une caractérisation plus précise de la croissance et la distribution des zéros des fonctions entières peut être envisagée de diverses manières .Entre autres; l'utilisation de l'indicateur de Lindelôf qui ne détermine pas complètement l'ensemble des zéros de fonction et qui en plus peut dépendre de facteur exponentiel intervenant dans la factorisation de Hadamard ou de Weierstrass .Dans certaine cas particuliers ,des relations plus précises peuvent toutefois êtres obtenues (Dans le cas où l'on se limite à des domaines spécifiques de C

Les méthodes exposés dans ce travail sont illustrés par des exemples et applications qui prouvent l'efficacité des resultats .

Le premier chapitre est" *introduction générale* sur le travaille

Le second chapitre rassemble des théorèmes classiques d'analyse complexe (théorème de JENSEN ,NEVANNLINNA et CARLEMAN

- le troisième chapitre quant à lui est consacré au contrôle (ordre ,type)de croissance en liaison avec la distribution des zéros dans le plan tout entiér .Une partie relativement réduite sera consacrée aux principe d'extension d'une telle fonction
- la relation entre les fonctions d'ordre inférieure ou égale à un et leur type est exposée au quatrième chapitre intitulé "minimum du module ".On cite aussi les fonctions d'ordre zéros .

Cinquième chapitre est consacré aux propriétés genérale des fonctions des types exponentielles .

En ordre d'idée ;nous citons quelques résultats reliant les fonctions entières de type exponentielles de croissance $_t$; $t \neq 1$ et la croissance genérale des fonctions entiéres .

Enfin le chapitre six presente une tentative de synthèse des deux ouvrages suivants HOLLAND(Introduction to the theory of entire function) LONDON 1973

et le BOAS(Entirefunction) LONDON 1954.

NB : On Analyse chacun de ces ouvrages séparement ,mais en se basant cependant essentiellement sur les premiers chapitres de BOAS et l'ouvrage de Holland.

rappels

- 1-une fonction f de variable complexe est régulière sur un domaine k si elle est analytique sur k.
- 2-une fonction **entière** est une fonction régulière sur C tout entier.(Elle est alors somme d'une serie de rayon de convergence infini)

Formules de Jensen et de Carleman

Formule de Jensen

Théorème :

- Si $f\ z$ est régulière sur le domaine
  $D\quad z\quad C\ ;0\quad |z|\ \leq\ r\quad R$ et $f\ 0\ \neq 0$
  alors on a

$$\mathrm{N}_f\ r\quad \frac{1}{2}\int_0^{2}\log|f\ re^{i}\ |d\ \ -\log|f\ 0\ |. \qquad 1.0$$

$\mathrm{N}_f\ r$ l'évaluation des zéros dans le domaine D

Preuve- $ref\ \ 7\ \ /p43$

- Si $f\ z$ est une fonction holomorphe dans le domaine fermé

$D \; z \; \mathbb{C} : 0 \leq |z| \leq r \; R$ et continue sur $\overline{D\;0;R}$
et si $f\;0 \neq 0$, alors on a

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \log|f\; re^i \;|d \quad \log|f\;0\;| \quad \log\frac{R^n}{|r_1 r_2.....r_n|}$$

où $r, r_2.,.,.,r_n, r_{n\;1} \quad R$ sont les modules des zéros de $f\;z$ dans le disque
$D \; z \; \mathbb{C}, |z| \; R$

- On a

$$\log\frac{R^n}{r_1 r_2..r_n} \quad N\;r \qquad \frac{n\;r}{r}\;dr$$

où $n\;r$ est le nombre de zéros de $f\;z$ dans le disque $\overline{D\;0;R}$

- 1)

$$r_n \leq r \leq r_{n\;1} \quad \log\frac{R^n}{r_1 r_2..r_n} \quad n\log R - \sum_{m\;1}^{n}\log r_m$$

$$\sum_{m\;1}^{n-1} m\;\log r_{m\;1} - \log r_m \quad n\;\log R - \log r_n \qquad Abel$$

- 2) Pour $r_m \leq t \leq r_{m\;1} \quad n\;t \quad m$
et $r_n \leq t \quad R \quad n\;t \quad n$

$$\log\frac{R^n}{r_1 r_2..r_n} \quad \int_0^R \frac{n\;t}{t}dt \quad \int_0^{r_1} 0\frac{dt}{t} \quad \int_{r_1}^{r_2} 1\frac{dt}{t} \quad \int^{r_3} 2\frac{dt}{t}.......... \quad \int_{r_n}^{R} n\frac{dt}{t}$$

- 3) Jensen

$$\int_0^R \frac{n\;t}{t}dt \quad \frac{1}{2}\int_0^2 \log|f\;re^i\;|d \; - \log|f\;0\;| \qquad 1$$

On remarque que

- **a**) les deux membres sont nuls pour $r \quad 0$
- **b**) Si Γ telle que;
$\Gamma \quad z \quad \mathbb{C}; |z| \leq R$; on a pour l'opération suivant

$$n\;r \quad \frac{1}{2i}\int_{|z|\leq r}\frac{f'\;z}{f\;z}dz \quad \frac{1}{2n}\int_0^2 \frac{f'\;re^i}{f\;re^i}re^i\;d$$

Pour $r_n \quad r \quad r_{n\;1} \quad R$
En dérivant nous avons:

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{\log r^n f\;0}{r_1 r_2....r_n}\right\} \quad \frac{n}{r}$$

$$\frac{d}{dr}\int_0^2 \log|f\;re^i\;|d \quad \frac{d}{dr}\int_0^2 \frac{1}{2}\log|f\;re^i\;{}^2 d\;| \quad \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{d}{dr}\left\{\log f\;re^i \quad \log\;\bar{f}\;re^{-i}\;\right\}d$$

$$\frac{1}{4}\int_0^2 \frac{f'\;re^i}{f\;re^i} \quad \frac{\bar{f}'\;re^i}{\bar{f}\;re^i}e^{-i}\;\;d$$

imlplique que $\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{d}{dr}\log|f(re^i)|d \quad \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{f'(re^i)}{f(re^i)}e^i\, d\right\}$

$$\frac{n(r)}{r} \qquad \frac{n}{r}$$

- **c**)Les deux membres de la formule de JENSEN différent d'une constante qui est en fait nulle car on a la continuité
  voir ref 7 p 45/46
- Ce lemme va nous permettre l'application du théorème de Cauchy quant à l'evoluationd'une certaine intégrale définie
  et en utilisant le résultat suivant donne l'aide pour demontrer le théorème precedent .
  lemme :
- $\frac{1}{2}\int_0^2 \log|1-e^i|d \qquad 0$
  Preuve
- On pose $z;\mathrm{Re}\, z \quad 0$
  comme est simplement connexe et $1-z \neq 0$; une determination du log existe ;
- On peut donc ecrire
  $\exp h(z) \quad 1-z$ dans avec $h(z) \quad H$
  h est entiérement determinée si on convient que $h(0) \quad 0$
  $\mathrm{Re}(1-z) \quad 0$ sur
  $\mathrm{Re}\, h(z) \quad \log|1-z|$; $|\mathrm{Im}\, h(z)| \quad \frac{}{2}$
- Pour $\quad 0$, soit Γ un chemin telle que $\Gamma(t) \quad e^{it} \quad t \quad 2 \; -$
  et soit arc du cercle de centre 1et de rayon allant de e^{-i} à e^{i} , alors on a

$$\frac{1}{2}\int^{2-} \log|1-e^i|d \qquad \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2i}\int_\Gamma \frac{h(z)}{z}dz\right]$$
$$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2i}\int \frac{h(z)}{z}dz\right]$$

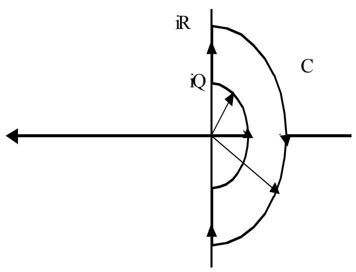
- En utilisant le théorème de CAUCHY et tenant compte du fait que la longueur verifie l'inegalite ; on a $\left|\mathrm{Re}\,\frac{1}{2i}\int \frac{h(z)}{z}dz\right| \leq c \quad \log\frac{1}{}$
  comme $c \quad \log\frac{1}{} \quad o(1)$ pour $\to 0$
  On obtient pour $\to 0$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \log|1-e^i|d \qquad 0 \qquad\qquad 2.0.2$$

C.Q.D.F.

Formule de Carleman

- Soit f une fonction régulière dans le domaine $|z| \geq Q$
  $-\frac{}{2} \leq \arg z \leq \frac{}{2}$



et soit $z_k \quad re^{i_k}$ les zéros de f à l'extérieur du contour defini par $|z| \quad Q$; $|z| \quad R$; $-\frac{}{2} \leq \arg z \leq \frac{}{2}$.
on suppose que f n'a pas de zéro sur le contour bien défini

- Pour $x \geq 0$ on a

$$\sum_{j\ 1}^{n}\left(\frac{1}{r_j}-\frac{r_j}{R^2}\right)\cos\ \ _j\quad \frac{1}{R}\int_{-\frac{}{2}}^{\frac{}{2}}\log\left|f\left(R\,e^{i}\ \right)\right|\cos\quad d$$

2.0.3

$$\frac{1}{2}\int_{Q}^{R}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{R^2}\right)\log\ |f\ iy\ ||f\ -iy\ |\ dy\quad o\ 1\ .$$

Preuve

On considère l'intégrale

$I\quad \int_C \log f\ z\ \ \frac{1}{z^2}\quad \frac{1}{R^2}\ dz$

où I est le contour de Csur C

$$I\qquad \int_C\ \log f\ z\ \ \frac{1}{z^2}\quad \frac{1}{R^2}\ dz\quad \text{et}\quad \text{est bornée}$$

$$I_1\quad \frac{1}{2i}\int^{R}\log f\ -iy\ \ \frac{1}{y^2}\quad \frac{1}{R^2}\quad -i\ dy\quad \frac{1}{2i}\int_0^R\log f\ -iy\ \ \frac{1}{y^2}-\frac{1}{R^2}\ dy$$

on prend $z\quad R\,e^{i}$; $dz\quad iR\,e^{i}\ d$ sur le grand cercle

il en résulte que :

$$\frac{1}{2i}\int_{-\frac{}{2}}^{\frac{}{2}}\log f\ Re^{i}\quad \frac{e^{-2i}}{R^2}\quad \frac{1}{R^2}\ \ ie^{i}\ Rd\qquad \frac{1}{2}\int_{-\frac{}{2}}^{\frac{}{2}}\log f\ Re^{i}\quad \frac{e^{-i}\quad e^{i}}{R^2}\quad d$$

$$\frac{1}{R}\int_{-\frac{}{2}}^{\frac{}{2}}\log f\ Re^{i}\quad \cos\ \ d$$

$$I_2\quad \frac{1}{2}\int_{-\frac{}{2}}^{\frac{}{2}}\log f\ iy\ \ \frac{1}{y^2}-\frac{1}{R^2}\ \ dy$$

- En faisant la somme des deux intégrales et on ne prenant que la partie réelle

$$I_1\quad I_2\quad \frac{1}{R}\int_c\log f\ R\,e^{i}\quad \cos\ \ d\qquad \frac{1}{2}\int_Q^R\frac{1}{y^2}\quad \frac{1}{R^2}\ \ \log|f\ iy\ ||f\ -iy\ |dy\quad o\ 1$$

d'autrepart:

en intégrant par partie sur C

$$I\quad \frac{1}{2}\int_c\log f\ z\ \ \frac{z}{R^2}-\frac{1}{Z}\ \ dz\quad \frac{1}{2}\ \log|f\ Z\ |\ \ \frac{z}{R^2}-\frac{1}{z}\ \ _c\quad \frac{1}{2i}\int_c\frac{f'z}{f\ z}\ \ \frac{1}{z}-\frac{z}{R^2}$$

si l'on suit le ref 7 ....et surtout les remarques qui suivent la preuve

Carleman est une "version demi-plan "de Jensen

Formule de Nevanlinna.

- C'est une formule qui relie les zéros de $f\ z$ avec son comportement sur la frontière du disque ou du demi -plan.
  (formule de Poisson pour le demi -disque)
- **Théorème**:
- Si $f\ z$ est une fonction régulière pour $Y\quad 0$.
  et z_k les zéros de $f\ z$:
  alors

$$\log|f(re^{i\theta})| = \sum_{|z_k|<R} \log\left|\frac{z-z_k}{z-\overline{z}_k}\,\frac{R^2-Z_kz}{z-\overline{z}_kz}\right| \quad 1.0.3$$

$$+\frac{y}{\pi}\int_{-R}^{R} P_1(R;z;t)\log|f(t)|dt$$

$$+\frac{2R_y}{\pi}\int_{c} p_2(R;z;\theta)\log|f(\mathrm{Re}^{i\theta})|$$

telle que

$$p_1 = \frac{1}{t^2-2tx+r^2}-\frac{R^2}{R^4-2tR^2x+r^2t^2}$$

$$p_2 = \frac{R^2-r^2}{|R^2e^{i\theta}-2Rxe^{i\theta}+r^2|}$$

telle que

$$p_1 = \frac{1}{t^2-2tx+r^2}-\frac{R^2}{R^4-2tR^2x+r^2t^2}$$

$$p_2 = \frac{R^2-r^2}{|R^2e^{i\theta}-2Rxe^{i\theta}+r^2|}$$

preuve :ref 7 p/ 43

Extension au principe du maximum.

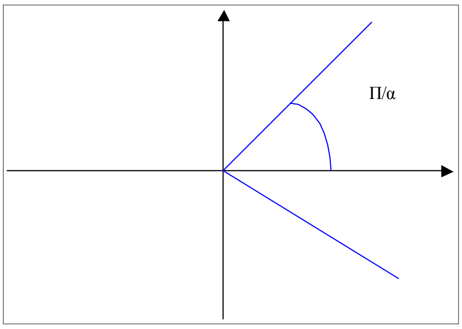
- **A)** **si** f vérifie les hypothéses ci-dessus
- 1) $f(z)$ régulière dans $x > 0$,
- 2) continue pour $x \geq 0$,
- 3) **On a**

$$f(iy) \leq M \text{ et } f(z) = o\left(e^{r^B}\right) \quad B < 1 \text{ **alors** } |f(z)| \leq M \quad \text{sur} \quad x \geq 0$$

uniformément en pour $r = r_n$ tend vers

- **B)** **si** f vérifie les hypothéses ci-dessus
- 1) $f(z)$ régulière dans le secteur D ouvert tel que

D: $|\arg z| < \frac{1}{2}\frac{\pi}{\alpha}$,



- 2) f continue sur $\overline{D}$:$|\arg z| \leq \frac{\pi}{2\alpha}$
- 3) **Si** f bornée sur ∂D (frontière)

alors $|f(z)| \leq M$

à l'extérieur de D .

- 4) $f(z) = o(e^{r^B})$,$B < \alpha$ uniformément pour $r = r_n$ tendant vers
- **C)**
- 1) Si $f(z)$ tend vers a, z tend vers pour $y = y_1$ et $y = y_2$
- 2) et si $f(z)$ régulière et bornée dans le secteur entre les deux axes **alors** $|f(z)|$ tend

vers a uniformément sur le secteur entier

- **D**) **Si**
- 1) $f\ z$ analytique dans S: $a \quad x \quad b; y \quad 0$
- 2) $f\ z$ bornée dans S
- 3) $f\ z$ tend vers L quand y tend vers pour certains de x

  Alors $f\ z$ converge uniformément vers L sur $\leq x \leq b -\ ; \quad 0$
- **remarques** :ces théorémes dus à de Phragmen -Lindelôf permettent l'extension à des secteurs réspectif du plan C
- A) de l'intérieur vers la frontière .
- B) de l'intérieur d'un secteur vers son extérieur
- C) extension de convergence .
- D)La convergence uniforme sur la bande entier.

  Du principe du maximum classique.

Propriétés générales des fonctions entières d'ordre fini.

Mesures de vitesse de croissance.

1. Définition:

L'ordre d'une fonction entière $f\ z$ non nulle est défini par la formule

-

$$_f \quad \lim_{r\to} \frac{\log \log M\ r, f}{\log r}; \qquad 0, \qquad 3.0.0$$

. **Exemples**:

les fonctions suivantes

$$f\ z \quad \sin z \quad \frac{e^{\ iz} - e^{-iz}}{2}$$

$$h\ z \quad \cos z \quad \frac{e^{\ iz} \quad e^{-iz}}{2}$$

$$g\ z \quad e^z$$

sont d'ordre 1

- 1) $h\ z \quad \cos z;$

$$M\ r,h \qquad M\ r,\cos z \qquad \frac{e^{r} \quad e^{-r}}{2} \qquad e^{r}.\frac{1 \quad e^{-2r}}{2}$$

$$h\ z \qquad chr$$

ainsi.

$$\lg \lg M\ r,h \qquad \lg\ r \quad O\ 1 \qquad \lg r \quad o\ 1$$

$$\lg r \quad \lg\ 1 \quad O\ \frac{1}{r}$$

$$\lg r \quad O\ \frac{1}{r}$$

$$\lg r \quad O\ 1$$

$$\frac{\lg \lg M\ r,h}{\lg r} \qquad 1 \quad o\ 1$$

$$\limsup_{r \to} \frac{\lg \lg M\ r,h}{\lg r} \qquad 1$$

$$_{h}\ 1$$

même démarche pour les fonctions f et g.

Remarques

- Dans toute la suite ;on considère par convention que la constante non nul est d'ordre 0
- soit $f\ z$ une fonction d'ordre fini si et seulement si il existe $A \quad 0$ tel que pour $|z|$ suffisament grand ;
  on ait

$$|f\ z\ | \leq o\ e^{r^{A}}$$

. donc $f\ z$ est d'ordre fini au plus si on a

$$0, \qquad |f\ z\ | \leq o\ \exp r$$

2. **Proposition**

- A soient $f_1\ z$ et $f_2\ z$ deux fonctions entières d'ordre respectivement $_1$et $_2$;
  soit $\max\ _1;\ _2$,
- a on a
  ordre $f_1 \quad f_2 \leq$
  et si

$$_1 \neq \ _2 \quad \textbf{alors} \quad l'\text{ordre de } f_1 \quad f_2 \quad .$$

$$_1 \qquad _2 \quad \textbf{alors} \quad l'\text{ordre de } f_1 \quad f_2$$

- b)
  on a : ordre de ($f_1 \quad f_2$.

$$_1 \leq \ _2 \ \textbf{alors} \ l'\text{ordre de } \ f_1 \quad f_2 \leq \max\ _1,\ _2 \ \leq \ .$$

.

preuve.

on suppose que $_1 \qquad _2$;

- **1)posons**

$$\lim \frac{\log \log M\{r;\ f_1 \quad f_2\}}{\log r}$$

il vient

$$M\ r;f_1 \quad f_2 \ \leq M\ r;f_1 \quad M\ r;f_2$$

.

$$\leq \quad e^{r^{\ 1}} \quad e^{r^{\ 2}}$$

$$\leq 2e^{r^{\ 2}} \ ;\text{pour } \ r \quad r_0 \quad .$$

et si $\ \leq \ _2$. évident que $\ \leq \ _2$ **1**

- d'apres la définition de l'ordr d'une fonction ;Il existe aussi pour une certain suite de nombre $r_n$tendant vers l$'$ infini
  nous avons $M \ r_n;f_2 \quad \exp r_n{}^{2-}$ pour un assez petit
- Et donc

$$M \ r;f_1 \quad f_2 \ \geq \exp r_n{}^{2-} \ - \exp r^{\ 1}$$
$$\geq \quad \exp r_n{}^{2-} \ \left\{1 - \exp \ r_n{}^{1} \quad - r_n{}^{2-} \right\}$$
$$\geq \ 1/2 \exp r_n{}^{2-}$$

pour que

$$_1 \qquad _2 -$$

et n suffisament grand

- Alors $\ \geq \ _2$ **2**
  En conclusion de (**1**) et (**2**) on a l'ordre de la somme est $\ _2$..

- **Exemple**:
  1)

$$f_1 \ z \quad e^z, \qquad f_2 \ z \quad -e^z$$

$_1 \quad _2 \quad 1$

$$F \ z \quad f_1 \ z \quad f_2 \ z \quad 0$$

l'ordre de $F \ z \quad 0$.
donc on dit que si $\ _1 \leq \ _2$ implique $\ \leq \ _2$.

- **2**) on pose

$$F \ z \quad f_1 \ z \quad f_2 \ z$$

et $\ _1 \leq \ _2$.
Quelque soit $\ 0$; il existe $R \quad R$ telle que $r \geq R$ on a

$$M \ r,F \ \leq M \ r;f_1 \ .M \ r,f_2 \ ;$$

Donc

$$M \ r;F \ \leq \exp r^{\ 1} \ .\exp r^{\ 2}$$

.

$$\leq \exp 2r^{\ 2} \ .$$

alors $\ \leq \ _2$ ainsi que pour $\ \to 0$: $\ _2$.d'où le résultat .

3.**Proposition** :

`Une fonction et sa derivé sont de même ordre`

Preuve

Ceci peut être démontré directement ;

- soient

$$M_1\ r,f' \quad \max_{|z|\ r}|f'\ z\ |; \qquad M\ r,f \quad \max_{|z|\ r}|f\ z\ |.$$

- On a

$$f\ z \qquad \int_0^z f'\ w\ dw \quad f\ 0$$

avec l'intégration suivant le seguement .

$$M\ r;f\ \leq rM_1\ r;f' \quad |f\ 0\ |.$$

Si

$$|z| \quad r \quad f'\ z \qquad \int_{|z|\ r} \frac{f\ w}{w-z^{\ 2}}dw.$$

Ainsi que

$$\frac{M\ r;f\ -|f\ 0\ |}{r} \leq M_1\ r;f\ \leq M\ 2r;f\ /r$$

alors le résultat est une suite de la définition de l'ordre

Exemples

1) tout polynôme est d'ordre **0**.

On utilise l'ordre de la somme :on montre que z est d'ordre 0.

0; $\frac{z}{e^{|z|}}$ est borneé;

mais

$$e^{|z|} \quad 1 \quad \frac{|z|}{1!} \quad \frac{|z|^2}{2!} \quad \frac{|z|^3}{3!} \quad . \quad .... \quad \frac{|z|^m}{m!}.$$

On choisit m telle que $m \quad 1/$ alors

$$e^{|z|} \quad |z|/m! \ \left| z \right| \geq 1;$$

Ainsi que $e^{|z|} \quad |z|/m!$ d'où $M\ r;f \quad 0\ e^r$.

2)

- **a**) $f\ z$ est une fonction entière d'ordre ; p est un polynôme non identiquement nul implique $f\ z\ .p\ z$ est d'ordre .
- **b**) Si $\frac{f\ z}{p\ z}$ est une fonction entière implique l'ordre de $\frac{f}{p}$ est d'ordre .

Preuve

De la proposition précédente on a l'ordre $\leq \quad _1$;

- **a**$_1$)

$_2$ l'ordre de f, est l'ordre de $f.p$ comme $p\ z \quad 1$ pour un z suffisamment grand;
alors

$$|f\ z\ .p\ z\ | \geq |f\ z\ |.$$

- **a**$_2$

l'ordre de $|f\ z\ .p\ z\ | \geq$ l'ordre de $f\ z$

en conclusion de $a_1$et a_2 on a $\quad _2$.

. [End Proof]

Raffinement de cette notion de mesure

1.**Définition**:

- Une fonction entière $f\ z$ d'ordre est de type ;

si

$$\lim_{r\to} \frac{\log M\ r,f}{r} \qquad 0; \qquad 3.2.0$$

- **Exemple**:

$f\ z\quad e^z$; d'ordre 1 et de type 1.

2. **Théoréme** :

Le type d'une fonction entière d'ordre $\quad 0 \quad$ est donné par la formule

$$\lim_{r\to} \frac{\log M\ r,f}{r}$$

.

Preuve:

inf k equivalent à dire quelque soit $\quad 0$; il exist $R \quad 0$ telle que $r \quad R$ on a :

$$M\ r,f\ \leq \exp \quad .r\ ;$$

donc il existe $r_n \quad _{n\ C}$ une suite telle que $r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad .... \quad .r_n \quad ....$ et

$$M\ r_n;f \quad \exp \quad - \quad r_n$$

.

Puisque

$$\log M\ r;f\ /r$$

pour $r \quad R \quad$.

D'où

$$\log M\ r_n;f\ /r \quad ;$$

d'où

$$\log M\ r;f \quad -$$

pour n trés grand .

On fait tendre $\quad \to 0$ on trouve ;

$$\overline{\lim} M\ r,f\ /r \quad .$$

Exemple:

$$\frac{e^r - 1}{2} \leq \max_{|z|\ r} |\sin z| \leq \frac{er \quad 1}{2};$$

Alors $\sin z$ est d'ordre 1et de type 1.

3.2.1 **type de la dérivé**:

1.**Théoréme**

Si $f\ z$ une fonction entière *alors* f et f' sont de même type.

Preuve:

même démonstration avec l'ordre ;

à l'infini on applique la définition du type sur le max de$M\ r;f$ et $M_1\ r,f'$.

les autres relations entre $M_1\ r\ ;M\ r$ sont donneés par les résultats suivants :

$$\underline{\lim}_{r\to} \log\ rM_1\ r\ /M\ r \quad \leq \overline{\lim} \frac{\log\ rM_1\ r\ /M\ r}{\log r} \quad .$$

2.**Théorème**:

Soit $f\ z$ une fonction entière

f est de type fini *si* et seulement si

$$0; \quad M\ r;f \quad 0\ e^{\quad r} \ .$$

Remaques:

a) Une fonction de croissance 1, ; est dite de type exponentielle.

b) On aura aussi pour l'ordre le plus petit des tel que

$$\lim_{r\to} \log \log M \; r; f \; / \log r.$$

Détermination de l'ordre et du type en fonction des coefficients.

Soit $f \; z \quad \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une fonction entière donne sous forme d'une série entière; la suite $a_n \quad n \; \mathrm{N}$ détermine complètement la fonction; il est possible donc de voir toutes les propriétés de la fonction en examinant ses coefficients .

1.**Théorème**:

`La fonction entière est d'ordre fini si et seulement si`

$$\lim \frac{n \log n}{\log 1/a_n}$$

`et on a l'ordre`

.

Preuve

si $a_n \quad 0$ implique que 0.

On va montrer que $\leq$ et $\leq$.

1er cas:

Si implique que contredit l'hypothése f entière ;

On suppose que 0

Si 0 implique que ≥ 0 rien à démontrer car est positif

On suppose que 0 .

On utilise le fait que

$$|a_n| \quad \left| \frac{f^n \quad 0}{n!} \right| \leq 1/2 \quad {}_{|z| \; r} \frac{f \; z}{|z|^{n \; 1}} |dz| \leq \frac{M \; r}{r^n} \qquad a$$

Soit 0 telle que0 et de

$$\lim \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|a_n|}}.$$

pour n trés grand

$$n \log n \geq \quad - \quad \log \; 1/|a_n|$$

Ainsi que

$$\log |a_n| \geq - \quad - \quad {}^{-1} n \log n \qquad b$$

De l'inégalité (**a**) on a :

$$\log M \; r \;\; \geq \log |a_n| \quad n \log n$$

on remplace par **b** donne alors

$$\log M \; r \;\; \geq -n \quad - \quad {}^{-1} \log n \quad n \log n$$

$$\geq n \; \log n - \quad - \quad {}^{-1} \log n$$

Pour simplifier l'écriture de l' inégalité

On pose

$$r \quad en \quad \frac{1}{-}$$

Alors

$$\log M \; r \geq \frac{n}{-} \qquad \frac{r \; -}{e \quad -}$$

et donc

$$c \log \log M \; r, f \; / \log r \geq \quad - \quad - \frac{\log e \quad -}{\log r}$$

$$\lim \log \log M \; r; f \; / \log r \geq \quad - \quad \left\{ \begin{array}{ll} - & \text{Si} \\ & \text{si} \end{array} \right\}$$

comme est arbitraire et en faisant tendre vers 0 on vas obtenir

On a $\geq$ 1

2^{em}*cas*

$\leq$

Si ; $\leq$ rien à démontrer car $\neq$.

On suppose que

soit 0,

$$f \; z \qquad \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

et de l'égalité suivante

$$\lim_{n \to} \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|a_n|}}$$

pour n trés grand

$$0 \leq n \log n / \log 1/|a_n| \leq$$

$$n \log n \leq - \qquad \log |a_n|$$

$$n \qquad {}^{-1} \log n \geq \log |a_n| \text{ equivaut à dire que } |a_n| \leq n^{-n/}$$

ce qui implique que la fonction f est entière donc si on ajoute un polynôme à f l'ordre ne change pas .

Si n 0 $a_0 \leq 1$

alors

$$|a_n| \leq n^{-\frac{n}{\quad}} \qquad \text{pour} \quad n \quad \mathrm{N}.$$

Donc

$$M \; r; f \leq \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n \leq \sum_{n \geq 0} n^{-n/} \quad r^n \quad S_1 \quad S_2$$

telle que S_1 contient les termes pour n $2r$

la somme est partagé en deux valeurs motivè par le fait que le maximum est atteint en n $e^{-1} r$ donc

$$S_1 \leq r^{- \; 2r} \quad \sum_{n \quad 2r} n^{-\frac{n}{\quad}} \quad o \; e^{2r} \quad \log r \quad o \; e^{r}$$

Si $n \to$ alors S_1 converge.

concernant S_2 $n \geq \; 2r$ donc

$$r n^{-\frac{1}{\quad}} \quad \frac{1}{2};$$

$$S_2 \leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2}^{n} \quad o\ 1 \qquad S_2$$

converge.

Ainsi que $\leq$ 2

Pour $\to 0$ on obtient $\leq$ 2

De 1 et 2 on a ..d'où le résultat du théorème pour la formule de type d'une fonction d'ordre fini;

On suppose que 0

posons

$$\lim_{n\to} n|a_n|^{\overline{\ n\ }}.$$

2.**Théorème**:

Si $f\ z$ est une fonction entiére d'ordre fini et de type alors e

$$\frac{1}{e} \lim_{n\to} n|a_n|^{\overline{\ n\ }}.$$

preuve:

On montre séparémant que

$$\leq \frac{1}{e} \lim_{n\to} n|a_n|^{\overline{\ n\ }}$$

et que

$$\geq \frac{1}{e} \lim_{n\to} n|a_n|^{\overline{\ n\ }}$$

1)

on suppose que fini

Pour un k fini donné il existe $R \quad R\ k \quad 0$ telle que

$$M\ r;f \quad \exp\ kr \quad : r \quad R\ k$$

L'inégalité de CAUCHY donne

$$|a_n| \leq M\ r;f\ /r^n \quad \exp\ kr\ /r^n \qquad r \quad R.$$

La valeur minimum de $\frac{e^{kr}}{r^n}$ atteint pour

$$r \quad n/k^{\ \frac{1}{\ }} \quad |a_n| \quad e\ k/n^{\ n/}.$$

Si

$$n \quad N \quad \text{et} \quad r \quad n/k^{\ \frac{1}{\ }} \quad R\ k \ \text{ alors } k \quad \frac{1}{e} n|a_n|^{\overline{\ n\ }}$$

et donc pour n trés grand nous avons

$$k \quad \frac{1}{e} \lim_{n\to} n|a_n|^{\overline{\ n\ }}$$

Comme k arbitraire on peut prendre $k \leq$ et donc

$$\geq \frac{1}{e} \quad .$$

2)

k_1 nombre telle que

$$k_1 \geq \frac{1}{e}.$$

donc

il existe N tel que $N\ k_1 \quad 0 \quad |a_n| \quad e\ k_1/n\ \overline{n}$ est fini $\quad n \quad N$

Et alors il existe $r \quad r \quad 0$ tq $M\ r \quad \exp \quad k \quad r \quad r \quad R.$

Ce qui implique que

$$\leq \frac{1}{e} \varliminf_{n\to} n|a_n|\ \overline{n}$$

Vitesse de croissance et distribution des zéros.

La formule de Jensen montre qu'une fonction f enère croit d'autant plus vite qu'elle n'a de zéros;

on suppose que $f\ 0 \quad 1$ et on note par $0 \quad r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad .... \quad r_n \quad ...$

les modules de zéros de $f\ z$;

$n\ t$:nombre de zéros dans $|z| \leq t$;

On pose

$$N\ r \qquad \int_0^r t^{-1} n\ t\ dt.$$

1.**Définitions**:

L'exposant de convergence des zéros d'une fonction entière

1) **L'exposant** de convergence des zéros de $f\ z$ est le plus petit entier pour le nombre 0 de la convergence de la serie $\sum_{n\ 1} |a_n|^{1-}$

2) Le plus petit entier positif pour la convergence de $\sum_{n\ 1} |a_n|^{1-}$;

On le note $p \quad 1$ telle que: p est **le genre** de l'ensemble $z\ f$ des zéros de $f\ z$.

2.**Lemme**:

Si $\quad 0$

La série

$$\sum_{n\geq 1} r_n^{-}$$

et l'integrale

$$\int_0 t^{-\ -1} n\ t\ dt$$

sont de même nature

Preuve:

La somme partielle de la série précédent est de la forme

$$\sum_{n\ 1}^{n\ T} r_n^{-} \qquad \int_0^T t^{-}\ dn\ t$$

$$T^{-\ -1} n\ t \qquad \int_0^T t^{-\ -1} n\ t\ dt.$$

Pour T tend vers :

$$\int_0^T t^{-}\ dn\ t \text{ est bornée pour } T \to \ .$$

et comme

$$T^{-\ -1} n\ t \qquad \int_0^T t^{-\ -1} n\ t\ dt \leq \int_0^T t^{-}\ d\ n\ t\ .$$

Comme $n\ t$ decroissante et

$$_{0}^{T} t^{-\ -1}dt \quad \text{converge}$$

Alors

$$_{0} t^{-\ -1}n\ t\ dt$$

converge .

si

$$_{0} t^{-\ -1}n\ t\ dt \qquad \text{converge}$$

et des que $n\ t$ est decroissante on a :

$$^{-1}\ 1-2^{-}\ \ T^{-}\ n\ T \quad n\ t\ _{T}^{2T} t^{-\ -1}dt \le \ _{T}^{2T} t^{-\ -1}n\ t\ dt$$

$$\le\ _{0}^{2T} t^{-\ -1}n\ t\ dt.$$

Et alors

$$n\ T \quad 0\ T\ \ .$$

Ce qui implique que

$$T^{-}\ n\ t \qquad _{0}^{T} t^{-\ -1}n\ t\ dt \quad _{0}^{T} t^{-}\ dn\ t \quad \text{converge}$$

$$\sum_{n\ 1}^{n\ T} r_n^{-} \quad \text{converge.}$$

3.3.2 **Théorèmes de Weierstrass sur le Produit infini**:

On continue avec les relations entre la croissance de la fonction et la localisation de ses zéros ;

on a besoin pour les fonctions entiéres transcendantes d'un analogue de factorisation de polynômes en facteurs lineaires ,

Les complications viennent du fait que l'on peut multiplier par une fonction entiére sans zeros ;et le fait que le produit infini formé exclusivement à partir des zeros ne converge pas toujours; d'apres **le théorème de WEIERSTRASS** stipule que n'importe quelle fonction entière peut être écrire comme

produit infini (en fait ce théorème est plus genéral).

Pour les fonctions d'ordre fini il y a plusieurs possibilites de factorisation dus à HADAMARD qu'on va voir en partie plus loin .

Dans cette section nous citons quelques préliménaires sur les produits infinis ,nous commonçons par l'étude des proriétés générales des produits infinis .

1. **Rappels**

notation :

Soit une suite de nombres complexes $p_1, p_2, p_3, ...p_n$

Notons

$$\equiv \ _{k\ 1}\ 1 \quad p_k \qquad \text{le produit infini}$$

$$\equiv \prod_{k=1}^{n} 1 \quad p_k \qquad n$$

.

2.**Définition**:

On dit que :

$$\prod_{k=m}^{n} 1 \quad p_k \qquad 1 \le m \le n \quad \text{converge} \qquad m\,n$$

S'il existe un nombre fini L tel que

$$\lim_{n\to} \quad n \qquad \lim_{n\to} \prod_{k=0}^{n} 1 \quad p_k \qquad L$$

3.**Théorème**:

Si p_K 0 quelque soit k entier alors le produit infini

$$\prod_{k=m} 1 \quad p_k \quad \text{et} \quad \sum_{k\ge 1} p_k \text{ sont de même nature}$$

Preuve :

voir 7

4.**Définition**:

Si produit infini

$$\prod_{k=m}^{n} 1 \quad |p_k| \qquad \textit{converge.}$$

Alors le produit infini $\prod_{k=m} 1 \quad p_k$ converge

preuve :voir 1

6.**Définition**:

Soit $p_k\ z \quad {}_{k\ \mathbb{N}}$ est une suite de fonction définies et continue dans un domain D de plan complexe

Soit S sous ensemble compact de D .

le produit infini

$$\prod_{k=m} 1 \quad p_k\ z \qquad\qquad z$$

converge uniformement sur S.

1) Si il exist n_0: entier fixée telle que $w_k\ z \neq -1$ pour $k \quad N_0 \qquad k \quad N_0$
$z \quad S$.

2)

$$0 \quad ; \ M \quad n \qquad \text{telleque } N \quad n \quad m \quad m_0$$

$$z \quad S \qquad \left| \quad {}_{m\,n} \right| . \left| {}_{n\ 1\,n\ P} \quad z \ -1 \right| \qquad p \ge 1.$$

Lemmes concernant les produits infinis:

Le premier facteur de WEIERSTRASS

$$E\ u,0 \quad 1 - u;$$

$$E\ u,p \quad 1 - u\ \exp\left\{u \quad \frac{1}{2}u^2 \quad \frac{1}{3}u3 \quad \ldots \quad \ldots.P^{-1}u^p\right\},p \quad 0 \qquad 3.4.0$$

on note que :

$$\log E\ u,p \quad -\sum_{k\ p} k^{-1}u^k; \qquad |u| \quad 1$$

$$\log E\ u,p \ \leq -\sum_{k\ p} |u^k| \leq |u|^{p\ 1}/\ 1 - \qquad |u| \qquad 1;$$

$$\log E\ u,p \quad 0 \quad \text{pour } u \quad 0$$

soit $z_n\ _1$ une suite de nombres complexes en ordre décroissant des modules ;avec z $\neq 0$; et d'exposant $_1$

$$p\ z \qquad \underset{n\ 1}{} E\ z/z_{n,}p$$

s'appelle produit canonique **de genre** p.

Definition :

Le genre d'une fonction entière d'ordre est la partie entière de si n'est pas entier.

1 .**Théoreme**:

Le produit canonique $p\ z$ *de genre* p est une fonction entière de ordre egale à l' exposant de convergence de ces zéros .

preuve:

soit l'ordre de $p\ z$

on a $_1 \leq$

reste a montrer que $_1 \geq$.

soit $r_n\ |z_n|$;

on va poser cette démonstration dans deux lemme

2. **Lemme 1**

$$\log|E\ z/z_{n,}p\ | \leq \left\{\begin{array}{ll} Ar^p \sum_{n\ 1}^{n} r_n^{-p}; & p \quad 0; \\ \sum_{n\ 1}^{n} \log\ 1 \quad r/r_n & p \quad 0 \end{array}\right\}$$

3. **Lemme 2**

$$\sum_{n\ N\ 1} \log|E\ z/z_{n,}p\ | \leq Ar^{p\ 1} \sum_{n\ N\ 1} r_n^{-n-1}.$$

A dépends de p

preuve:

On écrivant la somme de l'intégrale sous la forme de STEILTJES ; integrant le par partie

$$\sum_{n\ N\ 1} \log|E\ z/z_{n,}p\ | \leq K\left\{r^p \int_0^r tn\ t\ dt \quad r^{p\ 1} \int_r t^{-n-2}n\ t\ dt\right\}$$

où Kest un nombre dépendant de P

L'inégalité

$$\sum_{n\ 1} \log|E\ \ z/z_{n},p\ \ | \leq k^{'} r^{p\ \ 1} \quad {}_{0} \ \frac{n\ \ t}{t^{p\ \ 1}\ \ t\ \ \ r} dt$$

équivalent à $k^{'}$;
pour prouver **Lemme 2** on sépare la somme on deux parties S_1 et S_2
dans l'equelle $r_n \leq 2r\ et\ r_n \quad 2r$ respéctivement ;
pour S_2 on applique le fait que

$$\log|E\ \ u,p\ \ | \leq \sum_{n\ \ p\ \ 1} |u|^k \leq \frac{|u|^{p\ \ 1}}{1 -} \qquad |u| \qquad 1.$$

avec $' \quad \frac{1}{2}$

$$\log\left|E\left(\frac{z}{z_n},p\right)\right| \leq 2\left|\frac{z}{z_n}\right|^{p\ \ 1} \leq \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p};$$

ainsi que

$$S_1 \leq \sum_{2r\ \ r_n \leq r_N} \left(\frac{r}{r^n}\right)^p \quad r^p \sum_{2r\ \ r_n \leq r_N} r^{-n};$$

pour $p \quad 0;$ dans S_1

On aura $\frac{r}{r^n} \geq 1/2 \qquad et \qquad \left(\frac{r}{r^n}\right)^k \leq 2^{p-k}\left(\frac{r}{r^n}\right)^p \qquad 0 \leq k \leq p$

alors

$$\log\left|E\left(\frac{z}{z_n};p\right)\right| \leq \log\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| \quad \left|\frac{z}{z_n}\right| \quad 1/2\left|\frac{z}{z_n}\right|^2 \quad .... \quad p^{-1}\left|\frac{z}{z_n}\right|^p$$

$$\leq \log\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| \quad 2^p\left|\frac{z}{z_n}\right|^p.$$

$$\leq 2^{p\ \ 1}\left|\frac{z}{z_n}\right|^p$$

dés que

$$\log|1 \quad w| \leq \log\ 1 \quad |w| \quad \leq |w|\ ;$$

alors :

$$S_1 \leq 2^{P\ \ 1} r^p \sum_{r_n \leq 2r} r_n^{-p}$$

On combine ça avec S_2 on obtient **lemme 1**
Pour $p \quad 0$ on obtient **lemme 1** directement de

$$\log|1 \quad w| \leq \log 1 \quad |w| \leq |w|;$$

pour la preuve de **lemme 2** se resemble à ce qui procède .
On partage la somme on deux partie S_1et S_2 avec $r_n \leq 2r\ et \qquad r_n \quad 2r$
dans S_2 on utilise

$$\log\left|E\left(\frac{z}{z_n};p\right)\right| \leq \left|\frac{z}{z_n}\right|^p$$

alors

$$S_2 \leq 2\sum_{r_n\ \ 2r}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p\ \ 1} \quad 2r^{p\ \ 1}\sum_{r_n\ \ 2r} r_n^{-p-1} \qquad\qquad a$$

pour S_1
on a $2\frac{r}{r_n} \geq 1;$

et

$$\log\left|E\left(\frac{z}{z_n};p\right)\right| \le \log\left|1-\frac{z}{z_n}\right|$$

$$\le 2^{p\ 1}\left|\frac{z}{z_n}\right|^{p}$$

se raméne à

$$\log\left|E\left(\frac{z}{z_n};p\right)\right| \le 2^{p\ 2}\left|\frac{r}{r_n}\right|^{p\ 1}$$

ainsi que

$$S_1 \le 2^{p\ 2} r^{p\ 1} \sum_{r_n \le 2r} r_n^{-p-1} \qquad b$$

de a et b donne le lemme 2

pour prouver le théorème

On applique le lemme1 à S_1pour

0; on trouve

$$\sum_{r_n \le 2r} r_n^{-p} \le A r^{p}\ 2r^{\ 1-p} \sum_{r_n \le 2r} r_n^{-\ 1-} \qquad O\ r^{\ 1\ 2}$$

Ainsi que $\sum r_n^{-\ 1-}$ est bornée car $_1 l'$exposant de convergence de Z_n ;

pour S$_2$on a pour chaque p $_1 - 1$ ou bien p $_1 - 1$;

1er*cas*

grace à cet lemme on a:

$$S_2 \le A r^{p\ 1} \sum_{r_n \ge 2r} r_n^{-p-1} \quad A r^{p_1} \sum_{r_n\ 2r} r_n^{-p-1} \quad O\ r^{\ 1}$$

dès que $_1$ p 1 et $\sum r_n^{-p-1}$converge par definition de p

2^{em}*Cas*

$_1$ p 1 pour suffisament petit et aussi par lemme 2.

$$S_2 \le A r^{p\ 1} \sum_{r_n\ 2r} r_n^{-p-1} \quad A r^{p\ 1}\ 2r^{\ -p-1\ \ 1} \sum_{r_n\ 2r} r_n^{-\ 1-}$$

$$O\ r^{\ 1}$$

Ainsi que

$$s_1 \quad s_2 \quad O\ r^{\ 1}$$

dans chaque cas alors $\le$ $_1$

ainsi que $_1$

Remarque

Le théorème détermine l'ordre de produits canoniques mais il est plus difficile pour déterminer en general le type d'un produit infini

toutefois on a les quelques resultats suivants

4. **Lemme**:

Soit $p\ z$ produit canonique d'ordre

Si son type et sont deux nombre positive

Alors pour chaque r ; suffisament grand

On a $\log|p\ z| \quad -r$

dès que z est à l'extérieure de disque de centre $z_n$et de rayon

r_n^{-} ; avec $|r_n|$ 1.

preuve

$$\log|p\ z\ | \quad \sum_{r_n\le 2r}\log\left|1-\frac{z}{z_n}\right| \quad \sum_{r_n\le 2r}\log\left|\exp\left\{\frac{z}{z_n} \quad \ldots \quad p^{-1}\ \frac{z}{z_n}\ ^{p}\right\}\right|$$

$$\sum_{r_n\ \ r/r_n}\log\left|E\ \frac{z}{z_n};p\ \right|$$

pour la somme

$$\sum_{r_n\le 2r}\log\left|\exp\left\{\frac{z}{z_n} \quad \ldots \quad p^{-1}\ \frac{z}{z_n}\ ^{p}\right\}\right| \le$$

$$\sum_{r_n\le 2r}\log\left|1-\frac{z}{z_n}\right| \quad 2^p\left|\frac{z}{z_n}\right| \qquad .p \quad 0$$

$$\log|p\ z\ | \ge \begin{cases} \sum_{r_n\le 2r}\log\left|1-\frac{z}{z_n}\right|-2\sum_{r_n\ 2r} r/r_n \\ \sum_{r_n\le 2r}\log\left|1-\frac{z}{z_n}\right|-2^p\sum_{r_n\ 2r} r/r_n\ ^{p\ 1} \end{cases}$$

$$\sum_{r_n\le 2r}\log\left|1-\frac{z}{z_n}\right|-O\ r$$

maintenant si :

$$|z-z_n| \quad r^{-}\ etr \quad 2r$$

$$|1-z/z_n| \quad r_n^{-1-} \quad 2r\ ^{-1-}$$

$$\ge -1 \qquad 2r\ \log\ 2r$$

par le théorème si $f\ z$ est d'ordre

$$n\ r \quad o\ r \qquad 0$$

on applique ça à $p\ z$

$$\sum_{r_n\le 1}\log|1-z/z_n| \quad 0 \quad si\ \ r \quad 2.$$

Théorème de factorisation de Hadamard:

Le théorème suivant ,qui est dû à Hadamard ,joue un rôle trés important dans la théorie des fonctions entiére d'ordre fini.

On peut établir la factorisation standard d'une fonction entière d'ordre fini.

1.**Théorème** (**Factorisation de Hadamard**)

- Si $f\,z$ est une fonction entiére d'ordre avec m-zéros multiple à l'origine
  on a

$$f\,z \quad z^m e^{Q\ z}\,p\ z \qquad 3.5.0$$

ou $Q\ z$ est un polynôme de degrée d inférieur ou égale à $p\ z$ le produit canonique de genre p formé par les zéros z 0 de $f\,z$

Définition :

Le genre d'une fonction

$$f\,z \quad z^m e^{Q\ z}\,p\ z \qquad \text{est} \quad \max\ p,q$$

Preuve(**de théorème**)

On sait que $p(z)$ est une fonction entiére d'ordre $\rho_1 \leq \rho$;

Alors $z^{-m}f(z)/p(z)$ est entiére et n'a pas de zéros donc en peut l'écrire sous la forme $e^{Q(z)}$ ou $Q(z)$ est entiére n'a pas de zéros

donc on ce ramène à montrer que $Q(z)$ est un polynôme de degré au plus

Si on choisir la valeur de rayon $|z| = r$ à l'éxtérieure de disque est fini

$$Re\, Q(z) \leq r \qquad 0$$

sur le disque

arbitrairement grand sera possible seulement si $Q(z)$ est un polynôme de degré au plus

.

3.**Théorème** :

Si $f(z)$ est d'ordre alors

$$m(r) \neq o(e^{-r}) \qquad quelque\ soit \qquad 0$$

Preuve :

$$f(z) = z^m e^{Q(z)} p(z) \qquad p(z) \qquad e^{-r}$$

et z est de module plus grand

aussi d'après le **Lemme 2** $|e^{Q(z)}| \quad e^{-r}$ pour et plus grand

$$0 \qquad M(r) \neq o(M(r)^{-1-})$$

Théorème de Laguerre sur la séparation des zéros.

1.**Théorème**:

Si $f(z)$ est une fonction entiére;non constante ;$f(z)$ réelle pour z réel pour les zéros réels

Alors les zéros de $f'(z)$ sont aussi des réels et sont séparées par les zéros de $f(z)$

Preuve :

$f(z)$ fonction entiére ;$f(z) \neq$ constante ;

$$f(z) \quad Re f(z) \quad f(Re z) \qquad \text{avec} \quad z \quad x \quad iy$$

f est de genre 0 ou bien 1

$$f(z) \quad Cz^k \quad (1 - z/z_n)$$

$$f(z) \quad Cz^k e^{az} \quad (1 - z/z_n)\, e^{z/z_n};$$

ou c, a, z_n sont réel

alors

$$f'(z)/f(z) \quad k/z \quad \sum_{n\ 1} (z - z_n)^{-1}$$

ou bien

$$f'(z)/f(z) \quad k/z \quad a \quad \sum_{n\ 1} (z - z_n)^{-1};$$

dans l'autre part la partie imaginaire de $f'(z)/f(z)$ est

$$-iy\ (k/x^2 \quad y^2 \quad \sum_{n\ 1} \frac{1}{(x - z_n)^2 \quad y^2}) \neq 0$$

ne s'annule pas sauf quant y 0 donc $f'(z)$ a seulement de zéros réel

$$f'(z)/f(z) \quad -k/z^2 - \sum_{n\ 1} (z - z_n)^{-1},$$

c'est un réel et ces réel zéros sont négatives ;donc $f'(z)/f(z)$ décroissante ou elle est continue

c-t -a -dire entre les zéros de $f(z)$; et précisament s'annule entre deux paire de zéros ;

si $f(z)$ d'ordre 2 f' a le même ordre et le théorème peut être appliquer à $f'(z)$.

Definition : fonction transandante

Fonction transandante est une fonction entièrepossèdant une singularité éssentilles à l'infini et peut être

caractérisé par le fait que leur devloppement de TAYLOR possède une infinité de coefficients different de zéros.

2.**Théorème**:

Si $f(z)$ est une fonction entière transandante , d'ordre inférieure où égal à 2 ;

et si $f(z) = \sum_{n=0} c_n z^n$ réelle pour des zéros réels ;

alors

$$(n+1)c_{n+1}c_{n-1} \le nc_n^2.$$

Preuve :

$$\{f'(z)/f(z)\}' = \frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} \le 0$$

$$f(x)f''(x) \le (f'(x))^2$$

on applique la dérive jusqu à l'ordre $n-1$ on a pour $f^{(n-1)}(x)$;

$$f^{(n-1)}(x)f^{(n+1)}(x) \le (f^{(n)}(x))$$

pour $x = 0$ on a

$$(n+1)c_{n+1}c_{n-1} \le nc_n^2.$$

d'où le résultat [End Proof]

Les zéros de fonction d'ordre non entier:

soit $f(z) = z^m e^{Q(z)} P(z)$ est une fonction entière d'ordre ρ ;

Ou $Q(z)$ est un polynôme de degrée q

$P(z)$ le produit canonique de genre p formée par les zéros de $f(z)$ different de($z = 0$)

Si ρ n'est pas entier alors $q \le p$ et le comportement de $f(z)$ est dominé par le produit canonique $P(z)$.

3. **Théorème** :

si ρ n'est pas un entier, $\rho = \rho_1$

telle que ρ_1 est l'ordre de produit canonique de la fonction entière .

preuve:

si $\rho_1 \le \rho$ alors $f(z)$ est d'ordre égale ρ_1 et $e^{Q(z)}$ est d'ordre q (car q est un entier q≤ ρ n'est pas entier) nous pouvons faire l 'ordre de $f(z)$ inférieure ρ .

[End Proof]

4. **Théorème**:

1) Une fonction entiére d'ordre non entier possède un ensemble infini de zéros .

2) Si ρ n'est pas entier alors pour $\varepsilon > 0$ on a $n(r) \neq 0(r^{\rho-\varepsilon})$.

3) si ρ n'est pas entier ;$n(r) \neq o(\log M(r))$.

4) si ρ est un entier positif;la fonction est de type zéros

si et seulmement si $n\ r \quad 0\ r$; et de type fini si et seulmement si $n\ r \quad O\ r$.

5. **Théorème de LINDELÖF**

1)Si est un entier positif; la fonction entiére d'ordre est de type fini si et seulement $n\ r \quad o\ r$ et la somme $s\ r \quad \sum_{|z_n|} z_n^{-}$ est bornée

2)Si est un entier positif ;la fonction entière $f\ z$ est d'ordre est de type zéros si et seulement si l'une des conditions suivantes soit réalisé

a

$$n\ r \quad o\ r \ ; \quad p$$

et

$$\sum_{n\ 1} z_n^{-} \qquad 0$$

$$\text{ou} \sum_{n\ 1} z_n^{-} \qquad 0$$

est le coefficient de z^p dans $Q\ z$ est le factorisation de HADAMARD

Ou bien

b)

$$p \quad -1; \text{et} \ _0 \quad 0.$$

en particulier

une fonction entiére d'ordre entier est de type zéro si son genre est inférieure à son ordre .

Preuve :

voir ref 1

3. **Lemme**:

Si $f\ z$ est une fonction entiére $f\ 0 \quad 1;$ est un nombre positif et

$$2\ rL \quad ;r$$

c'est la longuer de cercle $|z| \quad r$ et

$$|f\ re^{i} \ | \quad M\ r\ ^{-}$$

Alors pour r grand

$$L \quad ;r \ \leq \ 1 \qquad .$$

Preuve :

c'est une conséquence de Théorème de JENSEN;

Sur $|z| \quad r$ la partie précise on a

$$2 \quad ^{-1} \quad \log|f\ re^{i} \ |d \ \leq - \ L \quad ;r \ \log M\ r$$

sur le reste de cercle

$$\log|f\ re^{i} \ |d \ \leq \log M\ r$$

Donc

$$1/2 \quad \log|f\ re^{i} \quad |d \leq 1 - L \quad ;r \quad \log M\ r$$

d'aprés le théorème de JENSEN

$$1 - L \quad ;r \quad \log M\ r - L \quad ;r\ \log M\ r \geq 0$$

si

$$p \quad - 1 \quad S\ r \quad \sum |z_n|^{-}$$

converge et $S\ r$

Si $f\ z$ est de type fini on a

$$n\ r \quad 0\ r$$

$$- L \quad ;r \leq 1 - L \quad ;r \quad \log M\ r$$

d'autre part le théorème de JENSEN donne

$$1/2 \quad \log|f\ re^{i} \quad |d \geq 0$$

$$1 - L \quad ;r \quad \log M\ r - L \quad ;r\ \log M\ r \geq 0$$

[End Proof]

- 4.**Lemme**:
  Si $\sum r_n^{-}$ *converge*; le produit canonique

$$p\ z \quad E\ z/z_n; \quad - 1$$
$$n\ 1$$

est de croissance (;0

Preuve :

par un lemme précédent

$$_{0}\ t^{-\ -1} n\ r\ dt$$

converge

Alors

$$n\ r\ r^{-} \leq n\ r \quad _{r} t^{-\ -1} dt \leq \quad _{r} n\ r\ t^{-\ -1} dt \quad 0\ 1\ ;r \to \quad .$$

$$n\ r \quad 0\ r_n\ ;n \quad 0\ r_n\ ;$$

et donc

$$\log|p\ z\ | \leq Kr \quad _{0} \frac{n\ r}{t\ r\ t} dt$$

$$\leq Kr^{\ -1} \ _{0}^{r} t^{-}\ n\ t\ dt \quad Kr \quad _{r} t^{-\ -1} n\ t\ dt$$

$$\leq Kr^{\ -1} \ _{0}^{r} 0\ r\ dt \quad Kr\ 0\ 1$$

$$\leq 0\ r$$

4.**Théorème**:

Si $f\,z$ non constante ;d'ordre entier et de même genre que son produit canonique. alors

$$\limsup_{r \to} \frac{n\ r \quad r}{\log M\ r} \quad \text{est finie}$$

pour chaque r positive telle que

$$\int_0 x^{-1} \quad r^{-1} dx \quad \text{converge}$$

preuve:

La demonstration de ce théorème suggère un autre résultat du même type à savoir: [End Proof]

.

5. **Théorème**:

Si $f\, z$ est une fonction entière et d'ordre positif alors

$$\int_0^2 \log|f\, re^i| d \quad 0\; r \qquad 0$$

Si $f\, z$ est de type fini

$$\int_0^2 \log|f\, re^i| d \quad 0\; r$$

et si $f\, z$ est de type zéro

$$\int_0^2 \log|f\, re^i| d \quad 0\; r$$

Preuve :

En conséquence

Si $f\, z$ est de type fini d'ordre et est bornée ;mesurable alors

$$0 \leq \int_0^2 \log|f\, re^i| d$$

ainsi

$$\int_0^2 \log^-|f\, re^i| d \leq \int_0^2 \log |f\, re^i| d \leq 2 \log M\; r$$

Alors

$$\int_0^2 \log|f\, re^i| d \leq 4 \log M\; r$$

d'ou la conclusion

Fonctions de genre zéro

Le genre d'une fonction d'ordre est si n'est pas entier mais celui d'une fonction entiére d'ordre entier positive peut être ou -1

les fonctions entières d'ordre 1

1. **Théorème**

Il existe des fonctions entiéres f(z) d'ordre 1 et de genre 0 telle que f(z)-a soit de genre 1

$si\; a \neq 0$ et $f\, z - f\, {-z}$ est aussi de genre 1

Exemple

$$f\, z \quad \prod_{n\, 2} 1 \quad \frac{z}{n \log n}\;, \qquad 1 \qquad 2$$

C'est clair que le genre d'une fonction entière n'est pas nécessairement additif.

2.**Théorème**:

Si $f z$ est une fonction entière d'ordre entier toute fonction $f z - a$ sauf pour quelques valeurs de a possède le même genre

preuve

on a déja vu qu' une condition suffisante pour une fonction entiére $f z$ soit d'ordre 1et de genre 0 est :

3. **Théorème**:

Si $f z$ est une fonction entiére de genre 0 si est seulement si

$$\int_0 r^{-2} \log M\ r\ dr \qquad \text{converge}$$

Preuve

on pose

$f\ 0 \quad 1$et $f z$ n'est pas constante

on a

$$f z \quad \prod_{n\ 1} 1 - z/z_n ,$$

avec

$$\sum 1/|z_n|$$

dès que le produit converge absolument on l'arrange sous la forme

$f z \quad \prod_{n\ 1} 1 - z^2/\ {}_n^2 ; \quad \mathrm{R}\ {}_n \geq 0$

et on a maintenant la valeur absolu

$$|f z| \quad \prod_{n\ 1} 1 \quad r^2/|\ {}_n|^2 ,$$

et donc il est suffisant de prouver ce théorème pour une fonction de la forme

$$f z \quad \prod_{n\ 1} 1 \quad z^2/\ {}_n^2$$

pour $f r \quad M r$

posons

$g z \quad f z^{\frac{1}{2}} \quad \prod_{n\ 1} 1 \quad z^2/\ {}_n^2$

alors $g\ z$ est d'ordre au plus $\frac{1}{2}$ et donc la fonction attient son module maximum pour la valeur de z réel et positive

En utilisant le théorème suivant :

Si $f z$ est d'ordre entier positif et de la classe $\sum r^{-}$ diverge

$r^{-1-} \log M\ r\ dr$ diverge

nous aurons $r^{\frac{-3}{2}} \log g\ r\ dr$ converge alors $r^{-2} \log g\ r^2\ dr \quad r^{-2} \log f\ r\ dr$ converge

d'où le résultat [End Proof]

Si $f\ z$ est d'ordre 0;particuliérement si elle est de croissance lente

$\log M\ r \quad o \quad \log r^{\ 2}$;

4.**Théorème** :

si

$$\log M(r) \quad (\log r)^2$$

où bien

$$n(r) \quad o(\log r)$$

alors

$$\log m(r) \sim \log M(r)$$

sur D de C

Preuve :

On a: $r \quad O(\log r)$ par un lemme précédent on suppose que f(z) n'est pas un polynôme on aura

$$\log M(r)/\log r \to 0$$

$$\log M(r)/\log r \to$$

pour fixée

$O(r) \to$ arbitrairement lente

Ainsi que

$$O(r) \quad r \quad O(\log M(r))$$

et Par

$$\log|f(z)| \geq \log M(R)$$

$$\log M(r) \geq (1-o(1))\log M(r) \geq (1-o(1))\log M(r)$$

d'ou la conclusion [End Proof]

Le minimum du module:

Les fonctions d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$

Les théorèmes dans ce chapitre donnent des resultats sur la borne inférieur du module

$m(r)$ s'annule quand $f(z)$ à un zéro de module r mais nous allons montrer que $m(r)$ n'est pas toujours trés petit ces resultats sont trés imprtant dans les applications

nous avons remarquer que $m(r) \neq 0(e^{-r})$ pour chaque 0

1.**Théorème**:

Si $f(z) \neq 0$ est de croissance $(1/2;0)$ et différent d'une constante; $\lim\sup m(r)$

Preuve :

on pose

$f(0) \quad 1$ alors

$$f(z) \quad (1 - z/z_n)_{i \, 1}$$

soit

$$g(z) \quad (1 - z/r_n)_{i \, 1}$$

dès que

$$|1 - z/z_n| \geq |1 - r/r_n|;$$

$$m_f\ r \ \geq mg\ r \quad |g\ -1\ |$$
$$M_f\ r \ \leq g\ r \quad M_r\ r$$

par le théorème precédent g(z) est aussi de croissance $1/2;0$ d'ou le resultat

2.**Théorème**:

Une fonction entiére g(z) de croissance $1/2;0$ n'est pas bornée sur n'importe quelle demi -droite

(sauf si $g\ z$ est constante).

Preuve

on considère $h\ z \quad g\ z^2$

$g\ z^2$ est de croissance $1;0$

si $g\ z$ est bornée sur la demi -droite ;$h\ z$ est bornée sur tout la droite que l'on peut prendre comme étant l'axe des y

en utilisant le théorème précèdent on en conclut que $h\ z$ est constante

d'où le résultat. [End Proof]

3. **Théorème**:

Si $f\,z$ est de croissance $;0\ ;0 \quad 1/2$et $f\,z$ différent d'une constante alors il existe une suite $r_n \to$ telle que

$$\log m\ r \quad \cos \quad \log M\ r_n$$

Preuve:

on suppose $f\ 0 \quad 1$

$$f\ z \quad \prod_{i\ 1} 1 - z/z_n$$

Soit

$$g\ z \quad \prod_{i\ 1} 1 \quad z/z_n$$

$g\ z$ ayant des zéros réels négatifs

On considère $G\ z \quad g\ z^2$ telle que $G\ z$ est régulière pour

$$x \geq 0; |G\ iy\ | \leq m\ y^2$$

et

$$|G\ z\ |$$

non bornée ;

On utilisant le théorème précedent avec $y \quad m\ y^2$ on trouve

$$\log M\ r \quad \sin \quad \log m\ r_n \quad r_n \to$$

pour une fonction d'ordre 1/2 et de type positive $m\ r$ non bornée d'ou le resultat suivant :

4.**Théorème**:

Si $m\,r$ est bornée et

$$\lim_{r \to} r^{1/2} \log M\ r$$

alors

$$\lim r \log M\ r \ \text{ existe}$$

Preuve :

voir . 1 . [End Proof]

Fonction d’ordre inférieur à 1.

1. **Théorème** :

Si 0 1 et $f z$ est de croissance ,0 alors

$$\lim\sup \log m\ r\ /\log M\ r\ \geq \cos\ ;$$

Preuve :

de

$$m_f\ r\ \geq m_g\ r\quad |g\ -r\ | ;\qquad M_f\ r\ \leq g\ r$$

On a

$g\ r\quad Mg\ r$

on considère la fonction $g\ z$ telle que $g\ z\quad {}_{i\ 1}\ 1\quad z/z_n$ à la place de $f\ z$ c’est evident quant 1/2

dés que l’on remplace $f\ z$ par $g\ z$ $m\ r$ diminue et $M\ r$ augmente cos ≥ 0 pour $\geq 1/2$;

on suppose que $f\ 0\quad 1$

et on propose z' telle que $|z'|\quad r$ et $f\ z'\quad m\ r$ on a

$$|g\ r\ g\ -r\ | \leq |f\ z'\ f\ -z'\ | \leq m\ r\ M\ r \quad \text{des que}$$

$$|\ 1\quad r/r_n\quad 1 - r/r_n\ |\qquad |1 - r^2/r_n^2| \leq |1 - z'/z_n'|$$

$$|1 - z'/z_n'|\qquad |\ 1\quad z'/r_n\quad 1 - z'/r_n\ |$$

si

$$|g\ -r\ |\qquad |g\ r\ |^{\cos\quad -}$$

pour une valeur de r arbitrairement grand

alors

$$m\ r\ M\ r\ \geq |g\ r\ g\ -r\ |\qquad |g\ r\ |^{1\ \cos}$$

$$|g\ r\ |^{1\ \cos\quad -}\ \geq M\ r^{\ 1\ \cos\quad -}$$

d’ou le resultat

On a besoin de la valeur de deux intégrals définie précédant

La premiere se calculant par parties

et la seconde concernant le contour .

[End Proof]

2. Lemme:

Si 0 1

alors on a

$$\int_0 \frac{x^{-\ -1}\log\ 1\quad x}{1} dx \quad — \cos$$

$$r^{\ de}\ on$$

$$\int_0 x^{-\ -1}\log|1 - x|dx \quad — \cot$$

ainsi on a:

$$0\qquad \int_0 \frac{\log|1 - t| - \cos\quad \log|1\quad t|}{r^1} dt$$

Preuve:

de ça on peut conclure que :

$$\int_0 \frac{\log|g\ -r\ | - \cos\quad \log g\ r}{r\quad ^1} dr\quad 0$$

ce qui implique que le numérateur est positif au moins pour la valeurde r ainsi choisit ;on a toutefois besoin de genéraliser ce résultat à n'importe quelle valeur de r

$$\int_x \frac{\log|g\ -r\ | - \cos\quad \log g\ r}{r\ \ 1} dr \quad 0 \qquad\qquad x \quad 0$$

pour faire ceci

on pose

$$0; \quad 0 \quad 0 \quad \text{alors} \quad x \quad - \int_0^x t^{-1-} \quad t\ dt \qquad 0;$$

$$x \qquad \int_x t^{-1-} \quad t\ dt$$

$$t \qquad \log|1 - t| - \cos \quad \log|1 \quad t|$$

alors on a

$$0; \quad 0 \quad 0 \quad alors \quad x \quad - \int_0^x t^{-1-} \quad t\ dt$$

t nulle au voisinage de zéro

t négative au voisinage de zéro

t change une fois de signe sur 0;

x s'annule à 0 et et positive dans 0 x

Si on pose :

$$x \qquad x\ x\ /\log\ 1 \quad x \quad \text{alors}$$

$$^{-1}\ 1 - \cos \quad ; \quad 0 \qquad 1 - \quad ^{-1}\ 1 \quad \cos$$

alors x continue ;ne s'annule pas pour 0 x et possède des limites positives en 0 et à

x à un minimum K(x) alors

$$x \ \geq k \quad x^{-}\ \log\ 1 \quad x \qquad 0 \quad x \qquad ;$$

et donc

$$\int_{x/r_n} \frac{\log|1 - t| - \cos \quad \log\ 1 \quad t}{t^{1\ \ r}} dt \geq K \quad r_n/x \quad \log\ 1 \quad x/r_n$$

$$\log|g\ -r\ | \quad \sum_{n\ 1} \log|1 - r/r_n|$$

$$\log|g\ r\ | \quad \sum_{n\ 1} \log|1 \quad r/r_n|$$

et si

on a $\sum r_n$ converge

et on aura

$$\int_x r^{-1-}\ \log g\ r\ dr \quad \sum_{n\ 1} \int_x r^{-1-}\ \log\ 1 \quad \frac{r}{r_n}\ dr$$

$$\sum_1 \int_x r^{-1-}\ \log\ 1 \quad \frac{r}{r_n}\ dr \quad \sum_{n\ 1} r_n^{-} \quad \int_{\frac{r}{r_n}} t^{-1-}\ \log\ 1 \quad t\ dt$$

On peut changer entre les opèrations des limites car toute est positive

$$\sum_{n\ 1} r_n^{-} \int_{\frac{r}{r_n}} t^{-1-} \log\ 1 - t\ dt$$

et comme l'itégrale est dominée par un intégrale converge alors

$$\sum_{n\ 1} r_n^{-1-} \int |\log|g\ -r\ ||dt \quad \sum_{n\ 1} \int_x r^{-1-} \log\left|\ 1 - \frac{r}{r_n}\ \right|dr \quad \sum_{n\ 1} r_n^{-} \int_0 t^{-1-} \log\ 1 - t\ dt$$

ainsi que

$$\int_0 \log|g\ -r\ |\cos \quad \log|g\ r\ |dr \quad \sum_1 r_n^{-} \int_{x/r_n} \frac{\log|1 - t| - \cos \quad \log|1 \quad t|}{t^1} dt$$

$$\sum_1 r_n^{-} \int_{x/r_n} \frac{\log|1 - t| - \cos \quad \log|1 \quad t|}{t^1} dt \geq K \quad x^{-}$$

. [End Proof]

Fonction d'ordre 1

Ces théorèmes sont des cas particulier des précedents

1.Théorème :

Si $f\ z$ est une fonction entiére d'ordre 1

Alors pour chaque

$$0 \qquad \limsup m\ r\ M\ r^{\ 1}$$

$\limsup m\ r\ M\ r^{\ 1}$

Preuve:

Soient z_n les zéros de $f\ z$,$|z_n|$ r_n alors

$$g\ z \quad f\ z\ f\ -z \quad \prod_{n\ 1} 1 - \frac{z^2}{r_n^2}$$

$h\ z \quad \prod_{n\ 1} 1 - \frac{z^2}{r_n^2}$ est une fonction entiére de même ordre que $g\ z$ de type expentiel si $g\ z$ l'est

-de type zéros exponnentiel si $g\ z$ l'est

En plus $g\ z$ est une fonction entiére d'ordre au plus $\frac{1}{2}$

$g\ z$ est de croissance $(\frac{1}{2},0$ ou bien $(\frac{1}{2},c\ ,c$ 0 est determinée par son nombre des zéros même chose pour $h\ z^{\frac{1}{2}}$

on montre pour x réel et pour chaque 0 $h\ x \neq o\ M_f\ x^{-}$ $x \to$ dés que on a :$|g\ z\ | \geq |h\ z\ |$

$|g\ z\ | \geq M_f\ r$ pour une suite de r non bornée

$$|f\ z\ | \quad g\ z\ |f\ -z\ | \geq M_f\ r^{-1-}$$

pour même valeur de r

On suppose que $h\ x$ $M_f\ r^{-}$ 0 x

si $f\ z$ est de type exponentielle est de type 0 alors $h\ z$ l'est aussi et donc contradiction .

Si $0,$ la fonction entiére de type exponentiel est de type la fonction entiére de type 0 et fini on applique théorème de Carleman à $h\ z$ sur le plan supérieure on obtient :

$$0 \leq o\ 1\ -\ \int_1^r x^{-2} - r^{-2}\ \log M\quad d \qquad r^{\ -1}\ \int_0 \log h\ \ re^{i}\ \ \sin\ d$$

$$\leq\ o\ r\ -\ \int_0^r x^{-2} \log M_f\ x\ dx \qquad r^{-1} \log\ M \qquad 2\quad r^{\ -1} \log M_h\ r$$

Si f est de type fini positif et d'ordre 1; les deux derniers termes sont bornés, et si f et de type fini

positif alors $\int_0 r^{-1-}\ \ \log M\ r\ dr \rightarrow$

Finalement

Si $f\ z$ est d'ordre1 et de type infini on a

$$\log M_f\ r \qquad \log \prod_{n\ 1} \ 1 \quad \frac{r^2}{r_n^2} \qquad r^2 \int_0 \frac{n\ t}{t\ t^2\quad r^2} dt \leq r^2 \int_0^r \qquad \int_r \leq N\ r \qquad r^2 \int_r \frac{dN\ t}{t\ t^2\quad r^2}$$

$$\frac{N\ r}{2} \qquad 2r^2 \int_r \frac{N\ t\ t}{t^2 \quad r^2\ ^2} dt$$

$$\leq \frac{\log M_f\ r}{2} \qquad 2r^2 \int_r t^{-3} \log M_f\ r\ dt$$

Alors on a

$$0 \leq o\ u\ -\ \int_1 x^{-2} \log M_f\ x\ /2 \quad \left(x \quad \frac{1}{2}\right) r^{-1} \log M_f\ r\ dx \quad \frac{2}{}r \int_r x^{-3} \log M_f\ x\ dx$$

ce qui impossible

On utilisant le lemme suivant dans le quelle

$$x \qquad \log M_f\ x$$

3. **Lemme**:

Si x est positive et $\int_1 x^{-2-} \quad x\ dx$ existe

Alors

$$\limsup x \int_1 t^{-2} \frac{t}{a \quad x} dt \quad bx \quad t^{-3} \quad t\ dt \geq \frac{1-}{1 - \quad a \quad b}$$

pour C, a, b, sont des constante positives

Preuve: On montre ce lemme par l'absurde

Pour $r \quad R$ on a

$$x \qquad \int_1^x t \quad t\ dt \leq c\ \ ax^{-1} \quad x \quad bx \int_x t^{-3} \quad t\ dt$$

Où

$$C \qquad \frac{1-}{1- \quad a \quad b}$$

Alors

$$x \qquad \int_1 t^{-2} \quad t\ dt \int_t x^{-1-}\ dx \qquad ^{-1} \quad t^{\ -} \quad t\ dt \int_t x^{-1-} \quad x\ dx$$

$$\leq ca \int_R x^{-2-} \quad x\ dx \quad Cb \int_R x^{-}\ dx \int_x t^{-2-} \quad t\ dt$$

converge

De

$$x^{-1-} \quad x\,dx \le ca \;{}_R\; x^{-2-} \quad x\,dx \quad Cb \;{}_R\; x^{-}\,dx \;{}_x\; t^{-3} \quad t\,dt$$
$$\le ca \;{}_R\; x^{-2-} \quad x\,dx \quad Cb \;{}_R\; x^{-3} \quad t\,dt \;{}_r^t\; x^{-}\,dx$$
$$\le \left\{ca \quad \frac{cb}{1-}\right\} \;{}_R\; x^{-2-} \quad x\,dx$$
$${}_R\; x^{-2-} \quad x\,dx \quad {}_R\; x^{-}\,d \quad x \quad {}_R\; x^{-\;-1} \quad x\,dx$$

Dés que x $o\,x$ ainsi que

$${}_R\; x^{-\;-1} \quad x\,dx \le \; c\left\{a \quad \frac{b}{1-}\right\} \;{}_R\; x^{-1-} \quad x\,dx$$

ce qui contredit au c $\left\{a \quad \frac{b}{1-}\right\}$ 1. [End Proof]

. [End Proof]

Le module minimum d'un polynôme

1. Lemme :

de Boutroux-Cartan

Soit $p\,z$ $\;{}_1^n\; 1 - z$

Pour H 0. $|P\,z|$ $r\,\frac{H}{e}\;{}^n$ se raméne à l'extérieure de disque de rayon au plus $2H$

Preuve /voir - 1

Quelques lemmes sur les fonctions de petit ordre

Les lemmes suivants sont interéssants et nous allons les grouper

2. **lemme 1**

Si $f\,z$ est une fonction entiére de genre 0 avec $f\,0$ 1

On a $\log M\,r \le N\,r \quad Q\,r$; où $Q\,r \quad r \;{}_r\; t^{-2} n\,t\,dt$

Preuve

On a

$N\,r \le \log M\,r$ par le théorème de JENSEN

et alors $N\,r \le \log M\,r \le N\,r \quad Q\,r$ l'erreur pouvant être estimée

on remplaçant $\log M\,r$ par $N\,r$ ou nombre des zéros

$$f\,z \qquad {}_{n\;1}\; 1 - \frac{z}{z_n}$$

$f\,z$ décroit si on remplace $1 - \frac{z}{z_n}$ par $1 \quad \frac{r}{r_n}$

on utilisant

L'inégalité $\log\;1 \quad x \le x \quad x \quad 0$

et le fait que $n\,x$ $o\,x$

$$\log M\,r \le \log \;{}_{n\;1}\; 1 \quad \frac{r}{r_n} \quad {}_0\; \log\;1 \quad \frac{r}{t} \quad r \;{}_0\; \frac{n\,t}{t\,t \quad r}dt$$
$$r \;{}_0^r\; \quad {}_r\; \frac{n\,t}{t\,t \quad r}dt$$
$$\le N\,r \quad Q\,r$$

. [End Proof]

3.**Lemme2**

Si $f\ z$ est d'ordre 0 et n'est pas constante

$$\overline{\lim}_{\to}\ \frac{N\ r}{Q\ r}$$

Preuve:

Pour 0

On a du théorème precédent que lim $\sup_{n\to} \frac{N\ r}{Q\ r}$ dés que $N\ r \ \le \log M\ r$ et

$Q\ r \quad _r t^{-2} n\ t\ dt \ge rn\ r \quad _r t^{-2} dt \quad n\ r$

On suppose que lim sup $N\ r\ /Q\ r$ est faux

Si 0 1 $\neq 1$

on a

$$u^{-1-}\ n\ u\ du$$

converge

et aussi

$$si \quad _R t^{-\ -1} Q\ t\ dt \quad _R t^{-}\ dt \quad _1 u^{-2} n\ u\ du$$

$$_R u^{-2} n\ u\ du \quad _R^u t^{-}\ dt$$

$$\le\ 1 - \quad ^{-1} \quad _R u^{-1-}\ n\ u\ du$$

Par $N\ r \ \le \ Q\ r$

On a

$$_R t^{-\ -1} Q\ t\ dt \le\ 1 - \quad ^{-1} \quad _R t^{-}\ d\ N\ t$$

$$\le \quad 1 - \quad ^{-1} \quad _R t^{-\ -1} N\ t\ dt$$

$$\le \quad 1 - \quad ^{-1} \quad _r t^{-\ -1} Q\ t\ dt$$

dés que 1 − 1 et $Q\ t \ \neq 0$ ceci contredit l'hypothèse

et alors $N\ r \ \le \ Q\ r \quad r \quad R$ pour R plus grand

Si $\log M\ r \quad O\ \log r\ ^2 ; Q\ r \quad O\ \log r$

par un lemme précédent $N\ r \quad O \ \log r\ ^2$

et **alors** :

$$n\ r\ \log r \quad n\ r \ _r^{r^2} t^{-1} dt \le \ _r^{r^2} t^{-1} n\ t\ dt$$

$$_r^{r^2} t^{-1} n\ t\ dt \le N\ r^2 \quad O \ \log r\ ^2$$

Et donc $n\ r \quad O\ \log r$

$$Q\ r \quad r \quad t^{-2} n\ t\ dt \quad O\ r \quad _r t^{-2} \log t dt$$

$$O\ r^{\frac{1}{2}} \log r \quad _r t^{\frac{-3}{2}} dt$$

$$O\ \log r$$

a appliquer **lemme de Betroux -Cartan** pour obtenir la valeur prélimenaire pour le module minimum d'une fonction entière de genre 0

. [End Proof]

4. **Lemme** :

Si $f z$ est de genre 0, $f 0 \quad 1$, 0 et 0

il existe une fonction $r \to$ lentement pour un R suffisament grand

$\log|f z| \geq \log M' R - Q r \quad r \quad r \quad R$

Preuve

à l'intérieure d'une ensemble du disque de rayon au plus R

Dés que $\log M r$ croit $Q r$ décroit

Sa implique en particulier que

$\log m r \geq \log M r - Q r \quad r$ ou $r \to$ lent

si on a $g z$ est de genre 0

$$|f z| \quad \prod_{n \; 1} \left|1 - \frac{z}{z_n}\right| \geq \prod_{r_{\leq kk}} \left|1 - \frac{z}{z_n}\right| . \prod_{r_n \; R} \left|1 - \frac{z}{z_n}\right| \quad p_1 p_2$$

on a $r_n \quad |z|$ et $|z| \quad r \leq R \quad 1$

Donc on a $\left|1 - \frac{z}{z_n}\right| \geq \left|1 - \frac{z}{r_n}\right|$ alors $n r \quad o r$

$$\log p_2 \geq \log M \; 1 - \frac{r}{r_n} \qquad \int_R \log \; 1 - \frac{r}{t} \; d \; n \; t$$

$$\geq r \frac{n \quad R}{R} - \frac{R}{- 1} \int_R t^{-2} n \; t \; dt$$

$$\geq r \frac{n \quad R}{R} - \frac{r}{R \quad - 1} Q \quad R$$

pour p_1 on a applique le lemme de Bourtroux-Cartan

On deduit que si z appartient à l'extérieur d'un disque de rayon $2 \quad H$

$$\log p_1 \geq n \quad R \; \log H \quad \log \prod_{r \; R} r_n^{-1}$$

$$\geq n \quad R \; \log H - \int_0^R \log t d \; n \; t$$

$$n \quad R \; \log \frac{H}{R} \qquad N \quad R$$

On combine le résultat de p_1 et p_2

On utilisant $\log M r \leq N r \quad Q r$ à l'extérieur de disque alors pour R trés grand le coefficient de $n \quad R$

$$\log|f z| \geq n \quad R \quad \frac{r}{R} \quad \log \frac{H}{R} \qquad N \quad R - \frac{r}{R \quad - 1} Q \quad R$$

$$\geq n \quad R \quad \frac{r}{R} \quad \log \frac{H}{R} \qquad \log M r - 1 \quad \frac{r}{R \quad - 1} Q \quad R$$

On suppose $H R \quad o r$ à l'extérieur de disque

pour R trés grand le coefficient de $n \quad R$ est négative et dés que $n r \leq Q r$

On a

$$\log|f z| \geq \log M \quad R - \quad r \, Q \quad R \qquad \text{pour } r \quad R$$

et comme $r \to$ lentement à l'éxterieur de l'ensemble des disque la valeur de rayon est $o \; R$

Fonction d'ordre zéro

Si $f z$ est d'ordre 0 particuliérement si sa croissance est lente alors

$\log M r \quad o \quad \log r^{\,2}$

la relation entre $M(r)$ et $m(r)$ est simple.
1.**Théorème** :
Si $\log M(r) = o(\log r)^2$ ou bien equivalent $n(r) = o(\log M(r))$
alors $\log m(r) \sim \log M(r)$ sur l'ensemble d'unité
Preuve: voir [1]
2.**Théorème**
Si $f(z)$ est d'ordre 0; $\log m(r) \sim \log M(r)$
pour une suite $r = r_n \to \infty$.
Preuve:
par $f(z)$ est d'ordre 0 non constante

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{n(r)}$$

$\frac{Q(t)}{N(t)} \to 0$ pour $t = t_n \to \infty$
dès que

$$\frac{Q(t)}{N(t)} = r \int_r^{\infty} t^{-2} \frac{n(t)}{N(r)} dt \geq r \int_{2r}^{\infty} t^{-2} \frac{n(t)}{N(r)} dt$$

$$= \frac{Q(2r)}{2N(r)}$$

$\frac{Q(t)}{N(t)} \to 0$ dans l'intervalle $[t_n; 2t_n]$ pour t_n trés grand contient la valeur de r
pour lequelle on peut ralentir la convergence de la limite $r \to \infty$
on peut mettre $\varepsilon(r) = \frac{Q(r)}{N(r)} \to 0$ pour cette valeur de r dès que

$$N(r) \leq \log M(r); Q(r) = N(r) = o(\log M(r))$$

pour même valeur

Si $f(z)$ est d'ordre 0 particuliérement si sa croissance est lente alors $\log M(r) = o(\log r)^2$ la relation
entre $M(r)$ et $m(r)$ est simple
3.**Théorème**:
Si $\log M(r) = o(\log r)^2$ ou bien equivalent $n(r) = o(\log M(r))$
alors $\log m(r) \sim \log M(r)$ sur la densiteé de l'ensemble d'unité
Si $\log M(r) = o(\log r)^2$
Preuve :voir [1]

Les fonctions de grand ordre

Pour $0 < \rho < 1$ ou bien si $f(z)$ est d'ordre 1
On peut deduire sa de $\log M(r) = o(r)$ sur un ensemble d'unité .
1. **Theorème**
Si $f(z)$ est une fonction entière de croissance $(\rho; 0)$
alors pour chaque $\varepsilon > 0$ et η pour un r suffisament grand
On a :

$$\log|f(z)| > -R^{\rho+\varepsilon}; \quad |z| = R$$

sauf sur un ensemble de disque de rayons au plus ηR
Preuve Voir [1]
2.**Corollaire**
Si $f(z)$ est decroissance $(1;0)$; $\log m(r) = o(r)$ sur l'ensemble de

densité de l'unité

3.**Théorème** :

Si $f(z)$ est de croissance ; ;alors

Pour chaque 0; et K 1 pour R suffisament grand

On a

$$\log|f(z)| \quad -H \quad KR \quad |z| \quad R$$

sauf sur un ensemble de disque de rayons à au plus 2 KR;

H dependant seulement de et de K

Preuve

On suppose que $f(0)$ 1

et on s'interésse seulement à R trés grand

on va montrer que'il existe H telle que

$$\log|f(z)| \quad -H\log M(R) \ .... \quad (1)$$

pour $|z| \leq \frac{R}{K}$ sauf sur des disques de rayon 2 kR

$$\log M(kR) \leq \quad kR$$

pour un R suffisament grand

l'inégalité (1) est une résultat du lemme Boutroux-cartan

et par l'inégalité de CARATHEODORY on prend k_1 telle que

$$1 \quad k_1 \quad k \quad et f(z) \quad f_1(z) f_2(z)$$

ou

$$f_2(z) \quad \prod_{|z_n|\leq \frac{R}{k_1}} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

z_n c'est les zéros de $f(z)$

Si m est le nombre du facteur

$$1 - \frac{z}{z_n} \quad \left|1 - \frac{z}{z_n}\right|^{-1} \quad 1 - \frac{z}{z_n} \quad |z_m|^{-m} \quad \frac{R}{e} \quad m$$

A l'extérieur de disque du rayon 2 R

dès que m $n\left(\frac{R}{k_1}\right)$ et $|z_m|$

Propriétes genérales des fonctions de type exponentielle

Dans ce chapitre ;on suppose que $f(z)$ est reguliére et de type exponentielle sur un angle fermé

La fonction indicatrice de $f(z)$ est définie par

$$h \quad \limsup_{r\to} \log|f(re^{i})| ; \quad | \, |$$

Si est fini ou $-$

1.**Définition**

- Les fonctions entières d'ordre premier et de type normal s'appelle les fonctions de type exponentiel et le type ce calcule de la façon suivant :

$$\lim \frac{\lg M_f(r)}{r}$$

ainsi que les fonctions d'ordre inferieure ou égal à un , et de type minimum sont appelés les fonctions de type zéros

2. Notation:

On note h h_f lorsque il est necessaire de préciser f

3. **Théorème**

Si

$$|\ _1| \leq \ , |\ _2| \leq \ , \ 0 \ \ _2 - \ _1$$

$$h \ _1 \leq h_1, \quad h \ _2 \leq h_2$$

et si

$$H \quad \frac{h_1 \sin \ _2 - \quad h_2 \sin \ - \ _1}{\sin \ _2 - \ _1}$$

est l'unique fonction sinusoidale telle que $H \ _1$ h_1 ;$H \ _2$ h_2

Alors

$h \leq H$

Preuve:

soient 0;

$$H \quad a \cos \quad b \sin$$

être sinusoidale prend les valeurs$H \ _1$ h_1 ;$H \ _2$ h_2

$$F\ z \quad f\ z \ \exp - a \ - ib \quad ;\ldots\ldots a$$

Soit

$$|F\ z| \quad |f\ z| \exp -H \quad r \ ;$$

et alors $f\ z$ est bornée sur arg$z$ $_1$

et comme 0 $_2 - \ _1$ consequence de théorème du Phragmen Lindelôf $F\ z$ est bornée sur $_1 \leq \ \leq \ _2$ et de a on a

$$f\ z \quad O \ \exp\ H \quad r$$

uniformément sur le secteur et ainsi que

$$h \leq H \quad \text{et}\ H \ \to H \quad \text{pour} \ \to 0$$

d'ou le résultat

avec un peut de modification même démonstration

si $h \ _1$ ou bien $h \ _2$ egals a $-$ alors h $-$

h $-$ pour chaque dans le secteur où bien $-$

Les ensembles convexes

On va voir les grands propriétés de la fonction entiére de type expentielle qui est décrit convenablement par les propriétes géometriques des ensembles convexes

Cette section contient le matériel necessaire pour les aplications .

1. **Definition**

Soit K un ensemble non vide ,fermé borné contient des points $z \quad x \quad iy$

On dit que K est convexe si

pour n'importe quel couple de points $z_1;z_2$ dans K

On peut joindre z_1 à z_2 par un segment

ie $z_1 t \quad 1 - t\ z_2$ est dans K pour $0 \leq t \leq 1$

Si $0 \leq \quad \leq 2$

On projete K sur les droites d ’$\arg z$

on note K la distance entre l’origine et les points projetes dans la direction positive

K est maximum de

$$\mathrm{Re}\ ze^{-i} \qquad x\cos \qquad y\sin$$

pour $z \quad K$

dès que K est fermée ;la ligne

$$x\cos \qquad y\sin \quad - K \qquad 0$$

contient au plus un point de K

K est liée entiérement à l'exterieure de la ligne si

$$r\cos \quad - \quad \leq K$$

si $z \quad re^{i}$

Cet droite s’appelle **la ligne support de** K et K s’appelle **fonction support de** K

Les elements z à l’extérieure de K sont caractérisés par

$$x\cos \qquad y\sin \quad - K \qquad 0 \qquad \textit{pour quelques}$$

Ce n’est pas toujour simple de calculer la fonction de support pour n’importe quelle ensemble convexe

la somme de deux ensembles convexes $K_1; K_2$ est une ensemble de points $z_1 \quad z_2$ telleque $z_1 \quad K_1$ et $z_2 \quad K_2$

On la note $K_1 \quad K_2$ pour les ensembles et on utilise $K_1 \quad K_2$

L’ensemble $K_1 \quad K_2$ est une ensemble convexe et sa fonction de support est $K_1 \qquad K_2$

Si $z_0 \quad K_2$; $K_1 \quad K_2$ est la translation de K_2 par le vecteur $0; z_0$

Si K_2 est un disque pour $|z| \leq \quad K_1 \quad K_2$ à une fonction de support K et tout les elements de K_2 sont à l’intérieure de $K_1 \quad K_2$.

Pour les ensembles particulier on a le tableau suivant

$l'ensemble$ K	$fonction$ $support$
$x_0 \quad iy_0$	$x_0 \cos \quad y_0 \sin$
$-a; a$	$a|\cos \quad |$
$-ia; ia$	$a|\sin \quad |$
le disque $|z| \leq R$	$K \quad x_0 \cos \quad y_0 \sin$
k rotationnée de l'angle	$K \quad -$
$K_1 \quad K_2$	$K_1 \quad K_2$
le plus petit ensemble convexe contient $K_1 \quad K_2$	$\max \; K_1 \quad ; K_2$
rectangle de sommet $a \quad ib$	$a|\cos \quad | \quad b|\sin \quad |$
demi disque $r \leq 1$,$| \quad | \leq \frac{}{2}$	$1; | \quad | \leq \frac{}{2}; |\sin \quad |; \frac{}{2} \leq \quad \leq \frac{3}{2}$

La fonction de support est une fonction de période 2 mais le conteaire est faux

2.Théorème:

La fonction K est une fonction de support de tout ensemble non vide bornée fermée convexe si et seulement si la fonction périodique et de période 2

et pour $_1 \quad _2 \quad _3 \; ; \; _2 - \; _1 \quad , \; _3 - \; _2$

on a $K \; _1 \; \sin \; _3 - \; _2 \quad K \; _2 \; \sin \; _1 - \; _3 \quad K \; _3 \; \sin \; _2 - \; _1 \; \geq 0$

Preuve:voir 1

3..Théorème:

a)

Si $f\,z$ est une fonction entiére de type exponentiel son indicateur h est lui même la fonction de support

b)

le bord d'un ensemble non vide fermé ; borné;convexe est un point de seguement ou secteur

Preuve: **voir** 1

Diagramme de l'indicateur

On va maintenant associer à chaque fonction entiére de type exponentiel

1. Théorème

$$f\,z \quad \sum_{n \; 0} a_n z^n ... \qquad \#$$

est une fonction entiére de type exponentielle si est seulement si

$$F\ z \quad \sum_{n\ 0} n!\frac{a_n}{z^{n\ 1}} \quad \sum_{n\ 0} \Gamma\ n \quad 1\ a_n z^{-n-1} \qquad \#$$

$$tel\ que \quad \Gamma\ n \quad 1 \qquad n! \qquad \#$$

est convergente pour au moins une valeur finie de z .

Si le rayon de convergence de la série 1 précedente est ,

$f\,z$ est d'ordre 1 et de type si , 0 et est exponentielle de type 0 si

0

Preuve:

Si $f\ z$ est d'ordre 1 est de type

$$\lim\sup_{n\to} |f^{\ n}\ \ 0\ |^{\frac{1}{n}} \qquad par\ \ définition$$

et le rayon de la convergence de la série

$$\sum_{n\ 0} n!\frac{a_n}{w^{n\ 1}} \quad est$$

La fonction $F\ z$ s'appelle la transformée de BOREL de $f\ z$ et celle de LAPLACE

lorsque la partie réelle de z est positive suffisament grande

Si $z \quad x \quad iy$ et x

$$_0\ f\ t\ e^{-zt}dt \quad \sum a_n \quad te^{-zt}dt \quad \sum_{n\ 0} n!\frac{a_n}{z^{n\ 1}} \quad F\ z$$

le théorème de FUBUNI justifiant l'intégartion terme par terme car

$$_0 \sum |a_n|t^n e^{-xt}dt \quad \sum_{n\ 0} n!|a_n|x^{-n-1}$$

$\sum n!|a_n|x^{-n-1}$converge pour x vue que lim sup $n!|a_n|^{\frac{1}{n}}$

$f\ z \quad \sum_{n\ 0} a_n z^n$ fonction entiére de type expontiel

On note D l'intersection des ensembles convexes fermées bornées

Ou $F\ z$ est reguliére alors$D$ c'est le plus petit fermée convexe ou $F\ z$ est régulière **s'appelle le diagramme de l'indicateur conjugue de** $f\ z$.

2.Théorème

Si $f\,z$ est une fonction entiére de type Exponentielle D le conjugue de diagramme de l'indicateur et C'est le contour de qui contient D

Alors

$$f\ z \quad \frac{1}{2i} \quad _c F\ w\ e^{zw}dw \qquad \#$$

Preuve :

C w C telle que $|w|$, 0 cercle
le type de $f\ z$
soit Γ w C telle que $|w|$, 0
C Γ
Alors

$$\int_C f\ w\ e^{zw}dw \quad \int_\Gamma \sum_{n\ 0} n!a_n w^{-n-1} \sum_{k\ 0} \frac{z^k w^k}{k!} \quad 2i \sum_{n\geq 0} a_n z^n \quad 2i\ f\ z$$

la convergence uniforme de la série sur Γ permetant de faire l'intégration terme à terme ce qui établit l'égalité $f\ z$ $2i$ $\int_C F\ w\ e^{zw}dw$.

3.Théorème

la fonction de support de D est $h-$ ou h est la fonction de l'indicateur de $f\ z$.

Preuve:

On suppose que

z est réel positif dans l'integrale

On pose

$$zt \quad u$$

On obtient

$$F\ z \quad \int_0 f\ \frac{u}{z}\ e^{-u}du$$

l'intégrale précédent est régulière pour $|z|$ suffisament grand et alors égale à $F\ z$ qui est régulière

Soit

$$t \quad re^{i}$$

dans le domaine de la convergence de l'integral et on pose

$$u \quad rt$$

alors

$$F\ z \quad e^{-i} \int_0 f\ te^{-i}\ \ e^{-rt}dt$$

ou l'intégrale converge pour r $h-$
à la fin on remplace r par sa valeur w e^{i} ,
la fonction $F\ we^{i}$ est régulière pour $|w|$ plus grand mais l'intégrale

$$e^{-i} \int_0 f\ te^{-i}\ \ e^{-wt}dt$$

converge pour

$$\mathrm{R}\ w \quad \cos \quad h-$$

et aussi $f\ we^{i}$ est régulière dans le demi -plan
ou bien F e^{i} est réguliére pour

$$\cos \quad - \quad h- \quad .$$

dès que $h-$ est la fonction de support
alors $F\ z$ est reguliére à L'extérieure de l'ensemble fermé borné ou $h-$ la fonction support
ainsi que D est l'intersection de tout les ensembles fermés convéxes l'extérieure où $F\ z$
est réguliére ,

on a $h - \quad \geq k \quad$ ou $k \quad$ est la fonction support de D
d' autre part

$$|f\ re^{i}\ | \leq\ 2 \quad ^{-1}L \max_{c}|F\ w\ | \max_{c} \exp\ r\mathrm{R}\ we^{i}$$

ou L est la longeur de c ;
et donc $h \quad \leq \max \mathrm{R}\ we^{i}$
soit c est le bord de D et le disque $|z| \leq$ la fonction support de cet ensemble est k ;
et alors par définition de la fonction support

$$h \quad \leq k -$$

et on a

$$h \quad \leq k \quad \text{pour} \quad \lim \rightarrow 0$$

et on avait deja $h \quad \leq k -$

Propriétés de diagramme de l'indicateur

$h -$ la fonction de support de l'ensemble convexe D
la forme

$$f\ z \quad 2i \quad \int_C F\ w\ e^{zw}dw$$

se ramaine par une demonstration à plusieure propriété de h

1.Théorème

1) Si $f\ z$ est une fonction entière d'ordre 1son type est le maximum de h

2) Si $f\ z$ est une fonction entière de type exponentielle et pour chaque ;

$$|f\ re^{i}\ | \leq e^{-rw\ r},$$

ou $w\ r \rightarrow$,

Alors $f\ z \equiv 0$

3) $h \quad 0$ seulement pour $f\ z \equiv 0$ dans un intervalle de longeur

Preuve:

voir 1 -

3.Propriétés:

1) Le diagramme de l'indicteure de la somme deux fonctions est continue dans le plus petit ensemble contient la réunion de la somme de daigramme de l'indicateur

2) Le diagramme de l'indicateur de produit de deux fonctions est continue dans la somme de diagramme de ces facteurs

3) le daigramme de l'indicateur de la fonction derivé f' est un sous ensemble de diagramme de la fonction f c'est le même de fonction f sauf quant w 0 est un point extrimum de diagramme et le pôle simple du la transformation de BORELde f z

La Transformation de BOREL sur le bord d'un diagramme d'indicateur conjugué

Sous les condition de contour C dans la presentation de PÖLYAd'une fonction entière de type exponentiel ;

On peut remplacer par le bord B le conjugué de diagramme indicateur

.1.**Théorème** :

Si r est une fonction positive telle que :

1

$$|f\ z\ | \leq \quad r\ e^{rh}$$

pour chaque

et

2

$$\quad_1 \quad r\ dr$$

Alors

$$f\ z \qquad 2i \quad ^{-1} \quad _B F\ w\ e^{zw} dw.$$

Preuve:

On doit montrer que

1 et 2 implique $F\ z$ est bornée à l'extérieur de D

Soit

$$C \quad w : |w| \qquad , \quad 0$$

pour montrer que $F\ z$ est bornée on utilise

$$e^{-i} \quad _0 f\ te^{-i} \quad e^{-wt}dt$$

$$F\ we^{i} \qquad e^{-i} \quad _0 f\ te^{-i} \quad e^{-wt}dt, \qquad \mathrm{R}\ w \quad h -$$

et par

$$\quad_1 \quad r\ dr$$

on a

$$|F\ we^{i} \quad | \leq \quad _0 \quad t\ \exp \quad h - \quad - \mathrm{R}\ w \quad t\ dt,$$

si $\mathrm{R}\ w \quad h -$

$$_0 \quad t\ \exp \quad h - \quad - \mathrm{R}\ w \quad t\ dt \quad \text{est bornée}$$

Alors $|F \quad e^{i} \quad |$ est uniformement bornée pour

$$\cos \quad - \qquad h -$$

c-t-d sur le demi - droite positif D qui est perpendiculaire à la direction de
si sa est valable pour alors
$F\ z$ est bornée à l'exterieure de D

Les fonction de type exponentielle dans un angle donnée.

La présentation précedente est dû à pôlya-des fonction entières de type Exponentielle ,

l'integrale sur le contour peut être generaliser et appliquer au fonctions quelles sont approchées au fonctions de type exponentielle dans un angle

Une consequence de plusieurs resultats qui sont genénalisée de fonctions entiéres de type exponentielle seulement et dans un angle .

1.Théorème:

Si $f\ z$ est reguliére et de type Expenentielle dans l'angle $|\arg z| \leq \quad \leq \frac{}{2}$ alors sa transformée de LAPLACE

$$F\ z \quad \int_0 f\ t\ e^{-zt} dt$$

définie une fonction reguliére à l'exterieur de l'ensemble convexe non bornée

ou son support de fonction est $h - \quad \leq$ si
0

est un nombre suffisament grand

C'est le composée de deux droites qui se croise dans et faite un angle de $\frac{}{2}$

avec l'axe réel

Alors

$$f\ z \quad \int_c e^{wz} F\ w\ dw \qquad |\arg z|$$

Preuve:

Le domaine de la régularité de $F\ z$ est inclut dans dans le secteur composée de l'arc de la

$|\arg z| \leq$ de cercle $|z| \quad c$

$$F\ z \quad \int_0 e^{-zt} f\ t\ dt$$

$F\ z$ reguliére pour $x \quad h\ 0$

$$F\ z \quad \int_0 f\ w\ e^{-zw} dw$$

l'integrale est sur la droite $\arg w \quad -$ ou $F\ z$ regulièr sur l'exterieur de l'intersection des demi-plans

$$\mathrm{R}\ z e^{-i} \quad h - \qquad |\ |$$

ensemble convexe non bornée

La presentation :

$$F\ z \quad \int_0 f\ w\ e^{-zw} dw$$

On a $|F\quad e^{i}\quad| \leq \;_0 |f\; te^{-i}\quad|e^{-t\;\cos\;\;-}\;\; dt$

Si $\quad |\;| \leq \qquad |f\; te^{-i}\quad| \leq e^{t\;h\;-}$ *pour* $r \quad r$

uniformement en pour fixée

alors

$$|F\quad e^{i}\quad| \leq \int_0^r |f\; te^{-i}\;|e^{-t\;\cos\;\;-}\;\; dt \qquad \int_r e^{-t\;\cos\;\;-\;\;-h\;-\;\;-}\; dt; \qquad |\;| \qquad \overline{2}$$

Si $\mathsf{R}\; ze^{-i} \qquad \max\; h - \;\;; 0$

L'exposant est negatif dans la premiere integrale;

$$\int_0^r |f\; te^{-i}\;|e^{-t\;\cos\;\;-}\;\; dt \quad O \quad ^{-1}$$

uniformement en $|\;\;| \leq \qquad \overline{2} \qquad \overline{2}$

le même on l'applique au integral

$$\int_r e^{-t\;\cos\;\;-\;\;-h\;-\;\;-}\; dt$$

si

$$\cos\quad - \quad -h - \qquad 2$$

si z est fixée au moins a une distance positive à l'extérieur de

$\mathsf{U} \quad z \quad \mathsf{C}$: *telleque* $f\; z$ regulière

Ainsi que $F\; z \qquad O\; \frac{1}{|z|}$ dans une partie de U definie par

$$\mathsf{R}\; ze^{-i} \qquad \max\; h - \;\;; 0$$

on l'appelle V

Soit z satisfaite $|\arg z|$ et soit 0

et soit B un nombre réel supérieur a $c \sin$

C_1 secteur commence à $w \quad B$,continue dans V et asymptotique à la ligne $w \qquad \overline{2}$

C_2 le reflection sur l'axe réel

on consider la fonction

$f\quad z \qquad 2\;\; i\;^{-1} \int_{c_1} e^{zw}F\; w\; dw - \;2\;\; i\;^{-1} \int_{c_2} e^{zw}F\; w\; dw;$

ou la ligne de l'intégration commence à w pour chaque intégral

sur C_1 et C_2 on cette presentation

$$F\; z \qquad \int_0 f\; w\; e^{-zw}dw$$

avec $\quad - \quad$ et

on utilise l'integral iterative

$$\int_{C_1} e^{zw}dw \quad \int_0 e^{-wt}f\; t\; dt$$

qui converge absolument et uniformement pour $|\arg z| \leq$

implique $f\quad z$ est regulière

le calcul de l'integrale donnant

$f\quad z \qquad 2i\quad^{-1} \int_0^{e^{-i}} \frac{e\quad^{z-t}}{t-x} f\; t\; dt - \;2i\quad^{-1} \int_0^{e^{i}} \frac{e\quad^{z-t}}{t-x} f\; t\; dt$

d'autre part on a pour x réel positive

$$f\; x\; e^{-\;\;z} \qquad 2\;\; i\;^{-1} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\;\;t}f\; t}{t-x} dt$$

ou Γest le secteur bornée par les droites $\arg t$ et larc de $|z|$ R x ou $|\arg t|$

dès que $C \sin$ et $f\ t \leq e^{c|t|}$ pour t plus grand ;l'integrale sur l'arc tend vers 0 pour $R \to$

et

$$f\ x \quad 2\ i^{-1} \int_0^{e^{-i}} \frac{e^{\ z-t}}{t-x} f\ t\ dt - 2i^{-1} \int_0^{e^{i}} \frac{e^{\ z-t}}{t-x} f\ t\ dt \quad f\ t$$

alors $f\ t$ $f\ t$ pour x réel positif est à l'exterieur du secteur $|\arg z| \leq$

maintenant on doit verifier la convergence absolue de

$$\int_{C_1} e^{zw} dw \int_0 e^{-wt} f\ t\ dt$$

à l'interieur de l'integrale

$$|f\ t\ | \quad e^{|t|h\ -} \quad \text{pour} \quad t \text{ plus grand}$$

et quand e^{-wt} exp $-|t|\mathrm{R}\ we^{-i}$;des que R we^{-i} $h -$, 0

pour $|w|$ plus grand dans C_1;l'interieur de l'integral convergent absolument et la valeur absolut de l'integral a une borne supérieure independant de w suivant c_1

e^{zw} exp $-|z||w| \sin\ \arg z$,et alors à l'exterieur l'integral converge absolument dans n'import quelle angle contient $|\arg z|$. fin

synthese:

L'ouvrage HOLLAND

L'ouvrage se donne pour but d'inetier une formation sur l'analyse de base et les notions de base dans l'anlyse complexe ;les grands théorêmes et les résultats des fonctions entières;une sous famille des fonctions méromorphiques qui ont été prise en charge par les spécialistes

La courte monographie nous a montré un peut l'intéréssant du sujet (les partie reliée aux analyses et les fonctios qui est loin d'êtr terminée en forme successive ,

Les chapitres sont dévloppés en ordre de compréhétion logique pour qui ne sont pas familliés avec la théorie des fonctions .

Un travaille a été fait pour prouver complètement les resultats ,ce travaille est destinée à n'importe qui avec un premier cours de la théorie des fonctions et analyse complexe .

Une partie considérable a été acomplie la distribution des zéros ;les espaces de hilbert de fonctions entières

L'ouvrage a été conçue pour repondre aux exigences

de la théorie des fonctions entière

L'ouvrage :BOAS

Le but est pour donner un compte sur la théorie moderne et approfondie des fonctions de type interprêtés .

Le domaine naturel pour ces fonctions genéralement le demi-plan ou un angle qu'un plan complet par consequence ce livre n'est pas

un traité compréhensible dans les fonctions entières et n'est pas concernée par les fonctions entières quoi qu 'un titre resonable et exact malgré le sujet limite des fonctions entières et necessite le traiter

On rencontre des réfèrence à des traveaux originaux dans les cas peu frequent où les resultats complementaires sont données sans demonstration. La notion de sujet sont important ;les théorêmes de picard avec toute les idées qui ils sont liées ;les fonction de type interprètes où plusieurs applictions dans des autres domaines .

Signalons que l'essentiel du BOAS concernne les fonctions à croissance exponentiel basée sur tout à l'ordre 1 non necessairement entière [definie sur les secteures du plans] ; alors que le HOLLAND fait l'étude sur les fonctions entières

On regardant sur la croissance certe l'ouvrage de BOAS est plus genérale et technnique ;mais ces deus ouvrages sont fait l'un complementaire à l'autre

Le théorême de PICARD est traité en detaille dans le HOLAND

Alors de ce qu'il sagit d'autour de (BOREL .SCHOTTQUIY;LANDAU sur les a −points sans dire du fait déja relevé ci dessus que le HOLLAND fait moins d'hypothéses sur la croissance et quelques lignes sur les diver applications de la théorie des fonctions entière où ces type de croissance contrôlé

Si par exemple on se refère au chapitre 12 du BOAS on peut trouver ....$implique$ B voir 12 B

D'ailleure la connexion non seulement avec 12 B mais il ya d'autre chapitre par exemple 9.12[Polya et Hardy] $f\ z \quad 2^z$ est la plus petite fonction entière transcendante et envoyant $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

donnons maintenant sous forme condencé les continues essentielles de chacun de ces ouvrages

régularité isolée

$\frac{1}{z-a};e^{-z}$ ramification non permise

1 .1 .1 Weistrass B.

1.10.1 $f\ z$ entière ne peut pas être algebrique.

Ordre

$$\overline{\lim}_r \frac{\log\ \log M\ r;f}{\log r}$$

Le chapitre 2 est pour l'essentiel consacré au théorême de Picard

$Q\ z$ méromorphe transcendente

L'equation $Q\ z \quad A \quad \mathbb{C}$ a une infinité de solutions sauf par fois pour deux valeurs de A au plus

Exemple

$$e^z \quad A, A \neq 0, A \neq$$

BOAS l'ingore.

Elementaire singularité Hurewiche

$$f_n\ z \ \to f\ z \quad 0$$

convergence uniforme dans D

$$f_n\ z_{n_k} \quad 0$$

implique qu'il existe

$$z_n \to z_0; f_n\ z_n \quad 0$$

$$f_{n_k}\ z_{n_k} \quad 0 \qquad donne \quad le\ \ résultat$$

Le chapitre 3

On fait intervenir $\quad A\ r \quad \max_{|z|\ r} \mathrm{Re} f\ z$

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

$$|a_n|r^n \leq \max(4A(r);0) - 2\mathrm{Re} f(0)$$

Formule de Poisson(son noyau)

Et surtout le plus important

$$Jensen - Poisson$$

Le chapitre 4

Generalités sur **l'ordre** et **le type** $\overline{\lim} \frac{\log M(r)}{r}$

$n(R)$ $O(R)$ **L'exposant de convergence**

Weistrass Hadamard ,Polya les produit Euleriens

Le chapitre 5

$\Gamma(z)$ classique manque le devloppement assymptotique

BESSEL $J_v(z)$ et le trés imporant

Théorême de (LAGUERRE)

$f(z)$ entière réelle sur $\mathbb{R}$ d'ordre 2 avec des zéros réels *implique* que $f'(z)$ aussi et de même exposant de C

Mittag -Leffler

$f(z)$ meromorphe ,pôles et partie principales choisisant l'implication de Riemann-ROCH

Il y on a trois preuves pour

$$\cot g(z) \; \frac{1}{z} \; \sum \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

On ne s'ocupe par les fonctions equivalents aux fonctions entières .

Le chapitre 6

Le caractère réel des zeros *stabilité* de $m(r)$

quelques théorêmes de convergence

Le chapitre 7

Phragmèn et Lindelöf

Sa fonction indicatrice

$$h \quad \overline{\lim} \frac{\log|f(re^{i})|}{V(r)}$$

en genéral $V(r)$ r

7.9.3 | *Polya* $m(r_k)$ $M(r_k)^{\cos}$ $r_k \rightarrow$

plus precise pour l'ordre 1et de **type exponentiel**

$f(z)$ $O(e^{kr})$ $m(r)$ $e^{-k\ r}$ *mieux*7.9.3et Kjellberg 1.9.6

$f(z)$ entière non constante quelque soit $0;1$ où

1)$\log m(r_k)$ $\cos$ $.\log M(r)$ $r_k \rightarrow$

si non $\lim \frac{\log M(r)}{r}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$

Le chapitre 8

Borel: $\mathbb{N}$ densite des $a -$ points

sauf peut être pour une exeption etendu en 8.4 et 8.5

La preuve initiale utilise les fonctions modulaire ici

8.7.2 Shottky l'implique mieux on a Landau

en tout cas Picard completement ignoré par BOAS est serieusement approfondi.

Connection entre croissance et distributioin des zéros .

Le chapitre 9

Nevalina correctement.

Le chapitre 12

Applications de la théorie des fonctions entières de type exponentiel

1 12.2.1 $\overline{\lim} \left| \int_a^b t^n f\ t\ dt \right|^{\frac{1}{n}}$ b

Utile pour les moments ;où en deduit

Si f est intégrable sur a,b et si pour 0 on a $\int_a^b t^n\ f\ t\ dt$ O a ^{n} pour

0 on a $f \equiv 0$ $p.p$

2 Completion d'espaces fonctionnels ,utilises en Physique

Une famille f_n $_n$ $\mathbb{N}$ est compléte pour un espacede fonctions

Si g et $\int_a^b f_n.g$ 0 quelque soit n sa implique g 0

La théorie est applicale pour f_n z f $_nz$ avec f entière

Exemple 12.4.5.

$f\ z$ exp i $_nz$ 0 $_1$ $_2$......... $_{n-1}$ $_n$......

L $_{-b,b}$ si b et $\underline{\lim} \frac{n}{n} \geq 1$

3 Série de Fourier Lacunaire entre autres

f intégrable sur $-$, ,si les coefficients de fourier d'indice négatif sont nuls sur un ensemble d'entièr de densité d alors $f \equiv 0$ $p.p$ sur I de longeure ≥ 2 d implique

$f \equiv 0$ $p.p$

polya 12.6.3

$f\ z$ $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ c_{n_k} 0 '{n_k de densité D

Tout arc de cercle de convergence d'angle 2 $1 - D$ contient au moins un point singulier

Landau 12.6.10 $f\ z$ $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ R 1 $c_n \geq 0$ z 1 singulier

4 Séries de Dirichlet

c'est plus dûr mais on a 12.7.8.

5 Fonctios entières Lacunaires *Polya*

$f\ z$ entière de type expenentiel borneésur l'axe des X

f ^{n} 0 0, $\sum_{n\ 0\ 2} \frac{1}{n}$, $\sum_{n\ 1\ 2} \frac{1}{n}$ divergent *implique que* $f \equiv 0$

(**6**) **Fonctions generatrices** [**reféré à BOAS**]

(**7**) **E D O d'ordre**

$$\sum_{k\geq 0} a_k F^k\ x \quad G\ x$$

on etudie $A\ t$ $\sum_{k\geq 0} a_k t^k$ on écrit alors (FRENEL)

$A\ D\ F$ G soit F $A\ D^{-1} G$ quand ça marche

(**8**) **Généralistion de stone -Weirstrass**

on remplace les polynômes par des fonctions entières

(**9**) **Théorie des nombres**

Non signalé particulièrement Gelfand-Schneidre

la seule methode connue à ma conaissance pour constriure des nombres transcendants .

1 (B) Ralph Philip Boas "(Entire functions)"

2 (W) W.Rudin "Analyse réelle et complexe "

3 (R) Robert B.Ash "Complex Variables"

4 (B) B.Ja. Levin "Distribution of Entire Function "

5 (L) Lars Hormonder "An Introduction To Complex Analysis in several Variables"

6 (S) S.Saks et A.Zygmund "Fonctions Analytiques "

7 (H) HOLLAND "Introduction to The Theory Of Entire Functions "Acadimic press New

york 1973
8 (C) Cartan H “Sur la fonction de croissance attaée à une fonction méromorphe de deux variables ;et c’est applications aux fonctions méromorphes d’une variable ”C.R.ACAD. SCI .PARIS 189 (1929)521-523.
9 (B) Buck ,R.C
(1) “A class of entire functions ”Duke Math.j.13(1946)5541-559.
(2) “On the distrbution of the zeros of an entire function ”J.Indian math.soc.16 (1952)147-149.
10 (Ph) “Caractérisations des zéros des fonctions de certaines classes de type Nevanlinna dans le bidisque” Annales de l’institut Fourier ,tome 34,N°1 1984 ;$p.57-98$.
11 (C) Copson, E.T ”An introduction to the theory of functions of a complex variable ”corrected ed Oxferd ser .(1) 12 (1941)108-111.
12 (lu) Clunie, J
(1) ”the minimum modulus of a polynomial on the circle ” Quart J Math .Oxford ser (2) 10 (1959) 95 -98.
(2)“On the determination of an integral function of finite order from its Taylor series” J.london Math .SOC .28 (1953)58-66.
(3)“ On function meromorphic in the unit circle ” J ; Lolndon Math.soc 32 (1957) 65-67.
(4)“The The assymptotic behaviour of integral functions ”Quart.J.Math OXFORD (2 6 1955 $1-3$.
13 (aa) Arima ;k “On maximum modulus of integral functions .J.Math .soc .Japan 4,62-66(1952).
14 (be) Beskovitch ,a.s “on integral function of order 1.Math .Ann.97 .677-695 (1927).