N° d'ordre : 13/2004-M/MT

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE

FACULTE DES MATHEMATIQUES

THESE PRESENTEE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE MAGISTER EN MATHEMATIQUES.

Spécialité : Analyse : Systèmes dynamiques

par: Hamidi Naïma.

THEME

QUELQUES METHODES DE POINTS FIXES APPLIQUEES AUX EQUATIONS ET INCLUSIONS DIFFERENTIELES

Soutenu le 23 / 06 /2004 devant le jury suivant :

M. A. KESSI	**Professeur à l'USTHB**	**Président.**
M. M. BENCHOHRA	**Maître de Conférences à l'université SBA**	**Directeur de thèse.**
M. R. BEBBOUCHI	**Professeur à l'USTHB**	**Co-directeur de thèse.**
M. M. ABID	**Maître de Conférences à l'USTHB**	**Examinateur.**
M. S. DJEBALI	**Maître de Conférences à l'E.N.S**	**Examinateur.**

DÉDICACES

A la mémoire de mon beau frère Youcef, que Dieu le Tout Puissant Lui Accorde sa Sainte Miséricorde Et L'accueille Dans Son Vaste Paradis.

A mon mari Nabil et mes chers enfants Aymen et Amira.

A mon neveu Amine et mon beau frère Abd-Ennour.

A tous les membres de la famille HAMIDI et NEDJAI.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance à mon encadreur, monsieur Mouffak BENCHOHRA qui a constamment veillé, avec compétence et patience, à ce que ce travail se déroule dans les meilleures conditions et l'occasion m'est donc offerte de lui exprimer mon admiration pour ses grandes qualités scientifiques et humaines.

Je tiens également, à remercier vivement monsieur le Professeur Rachid BEBBOUCHI, mon co-encadreur qui m'a aidé à reprendre mes études de recherches.

J'apprécie hautement que le Professeur Arezki KESSI ait accepté de présider le jury de ce mémoire, et mes vifs remerciements vont aussi aux membres de ce jury Monsieur Mehdi ABID Maître de Conférence à l'USTHB et Monsieur Smain DJEBALI Maître de Conférence à l'E.N.S. de Kouba qui ont bien voulu examiner ce travail.

Mes remerciements vont aussi à tous les membres du laboratoire de mathématiques de l'université Djilali LIABES en particulier à monsieur Nour-Eddine AMROUN, monsieur Abdelghani OUAHAB, monsieur Abd-El-Kader BELARBI , monsieur Kamel YAHIYAOUI et mademoiselle Amaria ARARA qui m'ont soutenus durant l'élaboration de ce travail.

Un grand merci à monsieur Nacer-Eddine DERRAR et monsieur Nour-Eddine KHLIFA pour leurs soutien constant et chaleureux.

J'ajoute un grand merci à mes parents, mes beaux parents, sans oublier Amine BOUKEMIDJA , Mohamed TAIBI, Wafik KHMISSI, Kerai BOUDJEMAA, NEDJAI Abd-Enour, Mohamed et Noui.

N. Hamidi

Table des matières

INTRODUCTION

Un grand nombre de phénomènes physiques, chimiques, biologiques et autres sont décris par des équations différentielles ordinaires du premier, second, troisième ou $\text{n}^{\text{ième}}$ ordre, n représentant le nombre de variables indépendantes décrivant le système. Dans les ouvrages élémentaires, on montre qu'en général, les équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur ou égal à 2, lorsque la dérivée d'ordre supérieur s'exprime explicitement en fonction des dérivées d'ordre inférieure peuvent se mettre sous la forme d'un système d'équations différentielles d'ordre 1. De plus, dans la plupart des cas, le phénomène physique évolue durant un intervalle de temps déterminé, aussi, afin de décrire convenablement le phénomène, nous devons imposer des conditions aux limites(au début et à la fin de l'intervalle de temps en question). Nous obtenons ainsi un problème aux limites pour des équations différentielles.

Les inclusions différentielles jouent un rôle crucial dans la théorie des équations avec un second membre discontinu. La recherche de telles équations est de grande importance puisqu'elles modèlisent la performance de divers dispositifs mécaniques et électriques aussi bien que le comportement des systèmes de contrôle automatique. L'équation différentielle

$$x' = f(x)$$

avec f discontinue est un objet plutôt désagréable du point de vue mathématique. En particulier, il est impossible de prouver des théorèmes d'existence. Cependant, si des solutions de l'équation où le second membre est discontinu sont considérées pour être des solutions de l'inclusion différentielle

$$x' \in \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{co\ f(x + \epsilon B_n)},$$

alors il est possible de développer par une théorie mathématique rigoureuse les systèmes discontinus. Un des exemples les plus importants des inclusions différentielles vient de la théorie de contrôle. On considère un système de contrôle

$$x' = f(x, u), \quad u \in U,$$

où u est un paramètre de contrôle. Il s'avère que le système de contrôle et l'inclusion différentielle

$$x' \in f(x, U) = \bigcup_{u \in U} f(x, u)$$

ont les mêmes trajectoires. Si l'ensemble des contrôles dépend de x, c.-à-d., $U = U(x)$, alors nous obtenons l'inclusion différentielle

$$x' \in f(x, U(x)).$$

L'équivalence entre un système de contrôle et l'inclusion différentielle correspondante est l'idée centrale utilisée pour prouver des théorèmes d'existence dans la théorie de contrôle optimale. Les inclusions différentielles sont une généralisation de la notion d'équations différentielles ordinaires. Par conséquent, tous les problèmes considérés pour les équations, c.-à-d., l'existence des solutions, la dépendance à l'égard des conditions initiales et des paramètres, sont présents dans la théorie des inclusions différentielles. Puisqu'une inclusion différentielle a habituellement beaucoup de solutions partant d'un point donné, les nouvelles publications apparaissent, comme la recherche sur les propriétés topologiques de l'ensemble des solutions, etc... Pour plus de détails voir l'ouvrage de Gorniewicz [47]. Pour résoudre les problèmes ci-dessus, des techniques mathématiques spéciales ont été développées. Ainsi, les inclusions différentielles sont non seulement des modèles pour beaucoup de processus dynamiques mais elles fournissent également un outil puissant pour différentes branches d'analyse mathématique. Comme nous avons mentionné, les techniques d'inclusions différentielles sont appliquées pour prouver des théorèmes d'existence dans la théorie de contrôle optimal. Elles sont utilisées pour dériver les conditions suffisantes de l'optimalité, jouent un rôle essentiel dans la théorie de contrôle dans des conditions de l'incertitude et dans la théorie des jeux rectangulaires différentiels.

Ce mémoire est consacré aux équations et inclusions différentielles ordinaires et impulsives en des temps fixes à second membres univoques et multivoques soumis à des conditions initiales, périodiques et non linéaires. Trois classes d'équations sont étudiées. La première partie concerne les équations différentielles ordinaires. La second partie sera consacrée aux inclusions différentielles. La troisième partie sera consacrée aux inclusions différentielles impulsives. Plusieurs phénomènes physiques subissent au cours du temps des variations négligeables par rapport à la durée du processus. Ces variations sont modélisées mathématiquement par des impulsions et par suite on obtient un système décrit par des équations différentielles impulsives. Cette théorie des équations différentielles ordinaires avec impulsions fut introduite par Milman et Myshkis [69] en 1960. Depuis, plusieurs auteurs se sont intéresses à cette théorie où des applications en médecine [1, 57], biologie [48], théorie de contrôle [34, 78], robotique, pharmacologie, écologie, etc... ont été obtenus. Pour plus de détails sur ce type d'équations, leurs propriétés et leurs applications voir les ouvrages de Bainov et Simeonov [4, 5], Lakshmikantham, D.D. Bainov et P.S. Simeonov [61] et Samoilenko et Perestyuk [76] et les références citées là dedans, et les articles [3, 6, 7, 8, 10, 16, 17, 33, 35, 36, 49, 54, 67, 80].

Nous présentons ici un exemple d'application de cette théorie en médecine qui représente un modèle de deux compartiments donné par Kruger-Thiemer en 1966 (voir [57]). Ce modèle consiste à ajuster la distribution d'un médicament absorbé oralement dans le système gastro-intestinal du corps humain. Si on note par $x(t)$ et $y(t)$ les quantités de médicaments consommées au temps t dans le système gastro-intestinal et dans le second compartiment appelé volume apparent de distribution (celui qui distribue les médicaments dans le sang et les muscles), respectivement. On obtient ainsi le système dynamique suivant

$$x'(t) = -k_1 x(t), \tag{1}$$

$$y'(t) = -k_2 y(t) + k_1 x(t), \tag{2}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes caractéristiques. Si on suppose qu'aux instants $0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_m < T$ les médicaments sont absorbés en quantités $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_m$, nous obtenons finalement le système dynamique

$$x(t_i^+) = x(t_i^-) + \delta_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

$$y(t_i^+) = y(t_i^-), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = \delta_0, \tag{5}$$

où $x(t_i^+)$ et $x(t_i^-)$ représentent la kimite de x à droite et à guauche aux point t_i. Le problème est de minimiser la fonction $f(\delta) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{i=m} \delta_i^2$ pour obtenir l'effet thérapeutique désiré en tenant compte que la quantité des médicaments dans le second compartiment ne doit pas descendre en dessous d'un certain niveau. Le système (1)–(5) qui modélise le modèle précédent rentre bien dans le cadre des équations différentielles impulsives en des temps fixes. Ce mémoire est divisé en cinq chapitres.

Dans le chapitre 1, on présente quelques notations, définitions et préliminaires issus de l'analyse fonctionnelle et en particulier de l'analyse multivoque.

Dans le chapitre 2, on va étudier dans la première section le problème de Cauchy ou problème à valeurs initiales en utilisant une méthode développée par Granas pour le problème suivant :

$$x'(t) = f(t, x(t)), \ t \in J = [0, T], \tag{6}$$

$$x(0) = x_0. \tag{7}$$

Nous traitons ce problème pour les cas f continue et f vérifiant les conditions de Carathéodory. Dans la deuxième section on considère le problème

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \ t \in J = [0, T], \tag{8}$$

$$x(0) = 0, \tag{9}$$

$$x(T) = 0. \tag{10}$$

Nous traitons ce problème en utilisant la même méthode précédente seulement pour le cas où f est une fonction continue.

Dans le chapitre 3, on va étudier dans la première section les problèmes :

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in J = [0, T], \tag{11}$$

$$x(0) = x_0, \tag{12}$$

et

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in J = [0, T], \tag{13}$$

$$x(0) = x(T), \tag{14}$$

où f est une fonction L^1- Carathéodory. Dans la deuxième section, on considère le problème :

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in J, \tag{15}$$

$$a_1 x(0) - a_2 x'(0) = A, \tag{16}$$

$$b_1 x(T) + b_2 x'(T) = B. \tag{17}$$

où f est une fonction L^1- Carathéodory. Pour étudier les problèmes que nous venons de citer, nous ferons appel à l'argument du point fixe combiné avec les estimations à priori, et la méthode des sous et sur solutions.

Dans le chapitre 4, on va étudier dans la première section les problèmes :

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \quad \text{p.p.} \quad t \in J = [0, T], \tag{18}$$

$$L(x(0), x(T)) = 0, \tag{19}$$

et

$$x''(t) \in F(t, x(t)), \quad \text{p.p.} \quad t \in J = [0, T], \tag{20}$$

$$x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T), \tag{21}$$

où F est une fonction multivoque à valeurs convexes. Dans la deuxième section on considère les problèmes :

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in J = [0, T], \tag{22}$$

$$x(0) = x_0, \tag{23}$$

et

$$x'(t) - x(t) \in F(t, x(t)), \ t \in J = [0, T], \tag{24}$$

$$x(0) = x(T). \tag{25}$$

Où F est une application multivoque à valeurs non convexes. L'étude de ces problèmes est basée sur i/ Le théorème du point fixe de Covitz-Nadler pour les applications multivoques contractantes.

ii/ Le théorème du point fixe de Schaefer combiné avec le théorème de sélection de Bressan et Colombo pour les applications multivoques semi. continues inférieurement à valeurs non convexes.

Dans le chapitre 5, on va étudier dans la première section les problèmes

$$x' \in F(t,x), \quad t \in J = [0,T], \quad t \neq t_k, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{26}$$

$$x(t_k^+) = I_k(x(t_k^-)), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{27}$$

$$x(0) = a, \tag{28}$$

et

$$x' \in F(t,x), \quad t \in J = [0,T], \quad t \neq t_k, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{29}$$

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) = \Delta x|_{t=t_k} = I_k(x(t_k^-)), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{30}$$

$$x(0) = x(T), \tag{31}$$

où F est une fonction multivoque à valeurs convexes. Pour étudier ces problèmes, nous ferons appel à l'argument du point fixe combiné avec les estimations à priori, et la méthode des sous et sur solutions. Nous utiliserons, entre autre, les théorèmes de point fixe de Schaefer, Martelli, Covitz-Nadler et l'alternative non linéaire de Leray-Schauder. Dans la deuxième section on considère avec le même argument utilise dans la deusième section du chapitre 4 les problèmes

$$x' \in F(t,x), \quad t \in J = [0,T], \quad t \neq t_k, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{32}$$

$$\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k^-)), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{33}$$

$$x(0) = x_0, \tag{34}$$

et

$$x'(t) - \lambda x(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in J = [0,T], \quad t \neq t_k, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{35}$$

$$\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k^-)), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{36}$$

$$x(0) = x(T). \tag{37}$$

Où F est une application multivoque à valeurs non convexes.

Mots Clés : Equations différentielles; inclusions différentielles impulsives; conditions initiales; périodiques et non linéaires; transversalité topologique de Granas; estimation à priori; point fixe; opérateur contractant; application multivoque; semi continuité supérieure; semi continuité inférieure; valeurs décomposables; opérateur condensé; sous et sur solutions; problème aux limites; espace de Banach.

Classification AMS : 34A12, 34A37, 34A60, 34B15, 34B27.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notations et Définitions

Dans toute la suite nous utiliserons les notations suivantes :

. $J = [0,\ T]$ est un interval dans $\mathbb{R}$

. On désigne par $p.p.$ la notation qui veut dire presque partout.

. $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues $x : \ J \longrightarrow \mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)|,\ t \in J\}.$$

. $L^1(J, \mathbb{R})$ l'espace (classe) de fonctions $y : J \to \mathbb{R}$ Lebesgue intégrables. C'est un espace de Banach avec la norme

$$\|y\|_{L^1} = \int_0^T |y(t)|dt.$$

. $L^\infty(J, \mathbb{R})$ l'espace défini par

$$L^\infty(J, \mathbb{R}) = \{x : \ J \longrightarrow \mathbb{R} \ \ mesurable : \exists C > 0 : |x(t)| \leq C \ \ p.p. \ \ t \in J\}$$

muni de la norme

$$\|x\|_{L^\infty} = \inf\{C : |x(t)| \leq C \ \ p.p. \ \ t \in J\} \ \ pour \ \ tout \ \ x \in L^\infty(J, \mathbb{R}).$$

Définition 1.1.1 *Une fonction* $x : \ J \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite absolument continue si*

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ *tel que pour toute collection dénombrable de sous intervalles disjoints* $[a_i, b_i]_{i=1}^p$ *de* J

vérifiant

$$\sum_{k=1}^{p}(b_k - a_k) < \delta, \ \textit{alors} \sum_{k=1}^{p} |x(b_k) - x(a_k)| < \varepsilon.$$

On désigne par $AC(J, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions absolument continues sur J.

On définit sur $AC(J, \mathbb{R})$ une relation d'ordre partiel en posant pour tout x, $\bar{x} \in AC(J, \mathbb{R})$

$$x \le \bar{x} \ \textit{ si et seulement si } \ x(t) \le \bar{x}(t) \textit{ pour tout } \ t \in J.$$

On désigne par

$$[\alpha, \beta] = \{x \in AC(J, \mathbb{R}) : \ \alpha \le x \le \beta\},$$

l'intervalle compact dans $AC(J, \mathbb{R})$ d'extrémités α et β.
E un espace de Banach, on désigne par $W^{1,1}(J, E)$ l'espace des fonctions $x : J \to E$ telles qu'il existe $v \in L^1(J, E)$ vérifiant $x(t) - x(0) = \int_0^t v(s)ds$ pour tout $t \in J$.
En particulier, si $E = \mathbb{R}$ alors $W^{1,1}(J, \mathbb{R}) = AC(J, \mathbb{R})$.

On désigne par $W^{2,1}(J, E)$ l'espace des fonctions $x \in W^{1,1}(J, E)$ telles que $x' \in W^{1,1}(J, E)$.

Définition 1.1.2 *Soient $(E, ||.||_1)$ et $(F, ||.||_2)$ deux espaces de Banach et soit f une fonction définie de $J \times E$ dans F. f est dite de Carathéodory si :*
1) *L'application $t \longmapsto f(t, x)$ est Lebegue mesurable pour tout $x \in E$,*
2) *L'application $x \longmapsto f(t, x)$ est continue presque pour tout $t \in J$.*

Définition 1.1.3 *Soient $(E, ||.||_1)$ et $(F, ||.||_2)$ deux espaces de Banach et soit f une fonction définie de $J \times E$ dans F. f est dite L^1-Carathéodory si*
1) *L'application $t \longmapsto f(t, x)$ est Lebegue mesurable pour tout $x \in E$,*
2) *L'application $x \longmapsto f(t, x)$ est continue presque pour tout $t \in J]$,*
3) *Pour tout $r > 0$ il existe $h_r \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ telle que pour tout $x \in E$ avec $||x||_1 < r$ on a $||f(t, x||_2 \le h_r(t)$ presque pour tout $t \in J$.*

Remarque 1.1.1 *Une fonction continue est évidemment L^1-Carathéodory.*
Les conditions 1) et 2) impliquent que f(t,x) est mesurable par rapport à t. La condition 3) implique que f(t,x) est L^1-intégrable.

Définition 1.1.4 *Soit $(E, ||.||)$ un espace de Banach, $U \subseteq E$ et $f : U \longrightarrow E$. L'application f est dite une contraction sur U s'il existe $\theta \in (0, 1)$ tel que*

$$||f(x_1) - f(x_2)|| \le \theta ||x_1 - x_2||, \forall x_1, x_2 \in U.$$

Définition 1.1.5 *Soient E, F deux espaces normés et $f : E \to F$. L'application f est dite compacte si*
i) *f est continue sur E,*
ii) *$f(E)$ est relativement compacte dans F.*

Définition 1.1.6 *Soient E, F deux espaces normés et $f : E \to F$. L'application f est dite complètement continue si*
i) *f est continue sur E,*
ii) *$f(B)$ est relativement compacte dans F pour tout sous ensemble borné B de E.*

Définition 1.1.7 *[28]. Soit K un ensemble convexe de l'espace vectoriel normé $(E, ||.||)$, et U un sous-ensemble ouvert de K. Soient $\bar{U}$ et ∂U la fermeture et la frontière de U dans K.*
i) *Une application $f : \bar{U} \longrightarrow K$ est dite admissible si f est compacte et f n'a pas de points fixes sur ∂U.*
ii) *Une application $f : \bar{U} \longrightarrow K$ est dite essentielle si toute application compacte $g : \bar{U} \longrightarrow K$ qui coïncide avec f sur ∂U admet un point fixe dans U. Autrement f est dite inessentielle. En particulier si $f : \bar{U} \longrightarrow K$ est essentielle, alors elle admet un point fixe dans U.*
iii) *Deux applications admissibles f et $g : \bar{U} \longrightarrow K$ sont dites homotopes s'il existe une homotopie admissible, c'est à dire une application compacte $h : \bar{U} \times [0,1] \longrightarrow K$ telle que $h_\lambda(u) = h(u, \lambda)$ n'a pas de points fixes sur ∂Upour tout $\lambda \in [0,1]$, $h_0 = f$ et $h_1 = g$.*

-Désignons par $M_{\partial U}(\bar{U}, K)$ la classe des applications admissibles et F^* la classe des espaces qui ont la propriété de points fixes pour les applications compactes.

1.2 Quelques Théorèmes d'Analyse Fonctionnelle

Théorème 1.2.1 *(Théorème de point fixe de Schaefer)[79] où [77]. Soient E un espace de Banach. Soit A un opérateur défini dans E tel que $A : E \longrightarrow E$ est complètement continu . Si l'ensemble*

$$\mathcal{E}(A) \doteq \{x \in E : x = \lambda A x \text{ pour un certain } \lambda \in (0,1)\} \quad \text{est} \quad \text{borné},$$

alors A possède au moins un point fixe.

Théorème 1.2.2 *(Théorème d'Arzela-Ascoli.)[28]. Soit M un sous ensemble de $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$. M est relativement compact dans $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$, (i.e. $\bar{M}$ est compacte) si et seulement si M est uniformément borné et équicontinu.*

Théorème 1.2.3 *[43]. Soit $p \in U$ et $f : \bar{U} \longrightarrow K$ l'application constante définie par $f(u) \doteq p$. Alors f est essentielle.*

Théorème 1.2.4 *[43]. Soit $f \in M_{\partial U}(\bar{U}, K)$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
i) *$f : \bar{U} \longrightarrow K$ est inessentielle,*
ii) *f est homotope à g dans $M_{\partial U}(\bar{U}, K)$ où $g : \bar{U} \longrightarrow K$ est sans points fixes.*

Théorème 1.2.5 *(Théorème de transversalité topologique)[43]. Soient f et $g \in M_{\partial U}(\bar{U}, K)$ deux applications admissibles homotopes. Alors f est essentielle si et seulement si g est essentielle.*

1.3 Quelques Définitions et Théorèmes d'Analyse Multivoque

Soit X un espace normé. On désigne par 2^X l'ensemble des parties de X.

Définition 1.3.1 *Considérons deux ensembles X et Y. Si à tout élément x de X, on fait correspondre un sous ensemble bien déterminé Γx de Y, on dit alors que la correspondance $x \longmapsto \Gamma(x)$ est une application multivoque de X dans Y. L'ensemble $\Gamma(x)$ est l'image de x par l'application multivoque Γ.*
Pour plus de détails sur les applications multivoques, voir les ouvrages de Deimling [29], Gorniewicz [47] et Hu et Papageorgiou [55].

Définition 1.3.2 *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et $G : X \longrightarrow 2^X$ une application multivoque.*
i) *G est dite à valeurs convexes (resp. fermées) si pour tout $x \in X$, $G(x)$ est convexe (resp. fermé)*
ii) *G est dite semi-continue supérieurement (s.c.s) en $x_0 \in X$ si pour tout ouvert W tel que $G(x_0)$ est dans W, il existe un voisinage ouvert $v(x_0)$ dans X tel que pour tout $x \in v(x_0)$ on a $G(x) \subset W$.*
iii) *G est dite bornée si pour tout ensemble borné B dans X, l'ensemble $G(B)$ est borné dans X, c'est-à-dire*

$$\sup_{y \in B}\{\sup\{||x|| : x \in G(y)\}\} < \infty.$$

iv) *G est dite complètement continue si $G(B)$ est relativement compact pour tout ensemble borné B dans X.*
v) *G possède un point fixe s'il existe $x \in X$ tel que $x \in G(x)$.*

Définition 1.3.3 *Soient X un éspace de Banach et $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties bornées dans X. Soit $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction telle que pour tout $B \in \mathcal{B}$*

$$\mu(B) \doteq \ inf\ \{\varepsilon > 0 : \exists (B_i)_1^n \subset \mathcal{B} : diam(B_i) < \varepsilon, i \doteq 1, \dots, n \text{ et } B \subset \bigcup_1^n B_i\}$$

où diam $(B) \doteq \sup\{||x - y|| : \ x, y \in B\}$. μ est appelée la mesure de noncompacité de Kuratowski. Pour plus de détails sur cette mesure, voir l'ouvrage [2].

Définition 1.3.4 *[68] Soient $(X, ||.||)$ un éspace de Banach et $G : X \longrightarrow 2^X$ une application multivoque s.c.s. G est dite condensée si pour tout borné B dans X tel que $\mu(B) \neq 0$, $\mu(G(B)) < \mu(B)$.*

Remarque 1.3.1 *Si G est compacte alors G est condensée.*

Définition 1.3.5 *Soient X un espace de Banach et $F : J \longrightarrow 2^X$ une application multivoque à valeurs fermées. F est dite mesurable si pour tout $x \in X$, la fonction*

$$t \longmapsto d(x, F(t)) \doteq inf\{||x - z|| : z \in F(t)\}$$

est mesurable sur J aux sens de Lebegue.

Définition 1.3.6 *Soit X un espace de Banach. Une application multivoque $F : [0, T] \times X \longrightarrow 2^X$ est dite de L^1-Carathéodory si elle vérifie :*
1) *$t \longmapsto F(t, x)$ est mesurable tout $x \in X$;*
2) *$x \longmapsto F(t, x)$ est semi-continue supérieurement pour presque tout $t \in J$;*
3) *Pour tout $r > 0$, il existe une fonction ϕ_r dans $L^1(J, \mathbb{R}_+)$ telle que pour tout $x \in X$ avec $||x|| \leq r$ alors*

$$||F(t, x)|| \doteq \sup\{||v|| : v \in F(t, x)\} \leq \phi_r(t) \ p.p.\ t \in J.$$

Soit (X, d) un espace métrique, On a les notations suivantes :

$\mathbf{P}(X) = \{Y \subset X : Y \neq \emptyset\}$, $\quad \mathbf{P}_{cl}(X) = \{Y \subset \mathbf{P}(X) : Y \text{ est fermé }\}$,

$\mathbf{P}_b(X) = \{Y \subset \mathbf{P}(X) : Y \text{ est borné }\}$, $\quad \mathbf{P}_c(X) = \{Y \subset \mathbf{P}(X) : Y \text{ est convexe }\}$,

$$\mathbf{P}_{cp}(X) = \{Y \subset \mathbf{P}(X) : Y \text{ est compact }\}.$$

On considère l' application

$$H_d : \mathbf{P}(X) \times \mathbf{P}(X) \to \mathbb{R}_+ \bigcup \{\infty\}$$

définie par :

$$H_d(A,B) = max\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(A,b)\}$$

où $d(A,b) = \inf_{a\in A} d(a,b)$ et $d(a,B) = \inf_{b\in B} d(a,b)$. $(\mathbf{P}_{b,cl}(X), H_d)$ est un espace métrique et $(\mathbf{P}_{cl}(X), H_d)$ est un espace métrique généralisé (complet) ([56]).

Définition 1.3.7 *Soit $N : X \to \mathbf{P}_{cl}(X)$ un opérateur multivoque, N est dit*
a) *$\gamma -$ Lipschitz si et seulement si il existe $\gamma > 0$ telle que*

$$H_d(N(x), N(y)) \leq \gamma d(x,y), \; \forall (x,y) \in X \times X.$$

b) *Contraction si et seulement s'il est $\gamma -$ Lipschitz avec $\gamma < 1$.*

L'ensemble des points fixes de N est noté par $FIX(N)$.

Définition 1.3.8 *Soit A un ensemble de $J \times E$. On dit que A est $\mathcal{L} \bigotimes \mathcal{B}$ mesurable ($\mathcal{L}$ la mesure de Lebegue et $\mathcal{B}$ les Boreliens de E) si A appartient à la σ-algebre engendrée par tous les ensembles de la forme $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ où $\mathcal{N}$ est mesurable au sens de Lebegue dans J et $\mathcal{D}$ est mesurable au sens de Borel dans E.*

Définition 1.3.9 *Un sous ensemble B de $L^1(J,E)$ est décomposable si pour tout u,$v \in B$ et pour tout sous ensemble $\mathcal{N}$ de J, la fonction $u\chi_{\mathcal{N}} + v\chi_{J-\mathcal{N}} \in B$,*
où χ c'est la fonction caractéristique définie par

$$\chi_{\mathcal{N}}(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x \in \mathcal{N}, \\ 0 \; si \; x \in J - \mathcal{N}. \end{cases}$$

Définition 1.3.10 *Soit E un espace de Banach, X un sous ensemble non vide, fermé de E et $G : X \to 2^E$ un opérateur multivoque à valeurs non vides, fermées. G est dit semi continu inférieurement (s.c.i) si l'ensemble $\{x \in X : G(x) \bigcap C \neq \emptyset\}$ est ouvert pour tout ensemble ouvert C dans E.*

Exemple 1.3.1 *I) L'application mutivoque $F_1 : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ définie par*

$$F_1(x) = \begin{cases} [-1,1] \; si \; x = 0, \\ \{0\} \; \; si \; x \neq 0. \end{cases}$$

est s.c.s en $x = 0$ et n'est pas s.c.i. en $x = 0$.

II) L'application multivoque $F_2 : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ définie par

$$F_2(x) = \begin{cases} \{0\} \; si \; x = 0, \\ [-1,1] \; \; si \; x \neq 0. \end{cases}$$

est s.c.i en $x = 0$ et n'est pas s.c.s. en $x = 0$.

Définition 1.3.11 *Soit X un espace métique séparable et soit $N : X \to 2^{L^1(J,E)}$ un opérateur multivoque. On dit que N a la propriété (BC) si*
1) N est semi-continu inférieurement;
2) N est un opérateur à valeurs non vides, fermées et décomposables.
Soit $F : J \times E \to 2^E$ une application multivoque à valeurs non vides et compacts. On associe à F l'oppérateur multivoque

$$\mathcal{F} : \Omega \to 2^{L^1(J,E)}$$

défini par

$$\mathcal{F}(x) = \{\omega \in L^1(J,E) : \omega(t) \in F(t, x(t)) \text{ p.p. } t \in J\}$$

où Ω est un espace de Banach convenablement choisi. L'oppérateur $\mathcal{F}$ est dit l'oppérateur de Niemytzki associé avec F.

Lemme 1.3.1 *[75]. Soient X un espace de Banach et $N : X \longrightarrow 2^X$ une application complètement continue à valeurs convexes et compactes, alors N est s.c.s si et seulement si le graphe de N est fermé ,i.e. ,$x_n \longrightarrow x_0$ et $y_n \longrightarrow y_0$, $y_n \in N(x_n)$ alors $y_0 \in N(x_0)$.*

Pour tout $x \in \mathcal{C}(J, \mathrm{I\!R})$, on considère l'ensemble

$$S_{F,x} :\doteq \{g \in L^1(J, \mathrm{I\!R}) : g(t) \in F(t, x(t))\, p.p.\ t \in J\}.$$

$S_{F,x}$ est appelé l'ensemble des sélections de F. Si F est à valeurs fermées, bornées et convexes, alors $S_{F,x}$ est non vide (voir [58]).

Lemme 1.3.2 *[58] Soit J un intervalle compact dans $\mathrm{I\!R}$ et X un espace de Banach. Soit $F : J \times X \longrightarrow 2^X : (t,x) \longrightarrow F(t,x)$ une fonction multivoque mesurable par rapport à t pour tout $x \in X$ s.c.s par rapport à x presque partout sur J à valeurs convexes et compacts . On se donne un opérateur linéaire continu $\Gamma : L^1(J,X) \longrightarrow \mathcal{C}(J,X)$. Alors l'application multivoque :*

$$\Gamma \circ S_F : \mathcal{C}(J,X) \longrightarrow 2^{\mathcal{C}(J,X)}$$

$$x \longrightarrow (\Gamma \circ S_F)(x) :\doteq \Gamma(S_{F,x})$$

est à graphe fermé dans $\mathcal{C}(J,X) \times \mathcal{C}(J,X)$.

Lemme 1.3.3 *(théorème de Martelli)[68]. Soit X un espace de Banach et $N : X \longrightarrow \mathbf{P}_{b,cp,c}(X)$ une application multivoque s.c.s et condensée. Si l'ensemble*

$$\mathcal{M} :\doteq \{v \in X : \lambda v \in Nv \text{ pour un certain } \lambda > 1\}$$

est borné, alors N possède au moins un point fixe.

Lemme 1.3.4 *(Alternative Non-Linéaires de Leray-Schauder)[32]. Soient X un espace de Banach et C un ensemble convexe dans X. On suppose qu'il existe un ouvert U dans C tel que $0 \in U$ et une application $G : \bar{U} \longrightarrow 2^C$ compacte à valeurs convexes fermées et s.c.s. Alors ou bien G admet au moins un point fixe dans $\bar{U}$, ou bien il existe un point $u \in \partial U$ et un certain $\lambda \in (0,1)$ tel que $u \in \lambda G(u)$.*

Lemme 1.3.5 *(théorème de point fixe de Covitz-Nadler)[27]. Soit (X, d) un espace métrique complet. Si $N : X \to \mathbf{P}_{cl}(X)$ est une contraction, alors N possède au moins un point fixe.*

Lemme 1.3.6 *(théorème de Bressan-Colombo)[22]. Soit Y un espace métrique séparable et $N : Y \to 2^{L^1(J,\mathbb{R})}$ un opérateur multivoque qui a la propriété (BC). Alors N a une sélection continue, i.e, il existe une fonction univoque continue $g : Y \to L^1(J, \mathbb{R})$ telle que $g(y) \in N(y)$, $\forall y \in Y$.*

Chapitre 2

Méthode de la transversalité topologique de Granas

2.1 Introduction

En 1959, Granas introduisait avec sa théorie de transversalité topologique pour les applications compactes dans les espaces de Banach, des techniques topoloqiques permettant l'étude de problèmes aux limites. Cette approche que nous utilisons dans ce chapitre est basée sur la notion d'applications "essentielles" pour les opérateurs compacts. La méthode consiste à introduire un paramètre et dés lors à considérer une famille d'équations différentielles sur laquelle une majoration à priori des solutions est obtenue. Cette famille de problème aux limites ou à valeure initiale est ensuite transformée en problème de point fixe d'opérateurs compacts. L'invariance par homotopie de la propriété d'être essentielle permet d'obtenir une solution au problème original. Pour plus de détails sur cette méthode, voir Dugundji-Granas [32]. Cette technique de "borne a priori" a été introduite par S. Bernstein en 1912 et les résultats obtenus ont été alors généralisés en 1978 par Granas, Guenther et Lee [45].

2.2 Problème de Cauchy

On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in J = [0, T], \tag{2.1}$$

$$x(0) = x_0. \tag{2.2}$$

Nous traitons ce problème dans les deux cas suivants :
(1) f continue.
(2) f vérifiant les conditions de Carathéodory.

2.2.1 Problème de Cauchy avec un second membre continu

On suppose que $f : J \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue ($J = [0, T]$ et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$). Soit $\mathcal{C}_0^1(J, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions continues dérivables sur J à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ satisfaisant $x(0) = x_0$ pour $x \in \mathcal{C}_0^1(J, \mathbb{R}^n)$. On désigne sa norme par

$$||x||_1 = \max(||x||_0 \,, ||x'||_0),$$

où

$$||x||_0 = \sup_{t \in I} ||x(t)||.$$

Pour tout $\lambda \in [0, 1]$, considérons le problème suivant :

$$(2.1)_\lambda \qquad \begin{cases} x'(t) & = \lambda f(t, x(t)),\ t \in J \\ x(0) & = x_0. \end{cases}$$

Ce problème se réduit à (2.1)-(2.2) pour $\lambda = 1$. On a le résultat suivant.

Théorème 2.2.1 *[62] Supposons qu'il existe une constante b, indépendante de λ, telle que pour toute solution x de $(2.1)_\lambda$ on ait $||x||_1 \leq b$. Alors le problème (2.1)-(2.2) admet au moins une solution x dans $\mathcal{C}_0^1(J, \mathbb{R}^n)$.*

Preuve : Soit

$$K_b = \{x \in \mathcal{C}_0^1(J, \mathbb{R}^n)\,;\, \|x\|_1 < b + 1\}.$$

Pour $\lambda \in [0, 1]$, on définit les opérateurs suivants :

$$T_\lambda : \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n) \quad \text{par} \quad (T_\lambda x)(t) = \lambda f(t, x),$$

$$\mathcal{J} : \mathcal{C}_0^1(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}_0(J, \mathbb{R}^n) \quad \text{par} \quad (\mathcal{J}x)(t) = x(t),$$

$$F : \mathcal{C}_0^1(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n) \quad \text{par} \quad (Fx)(t) = x'(t).$$

On montre que T_λ est continu, $\mathcal{J}$ est continu et complètement continu et que F est linéaire, continu et bijectif. En effet
$Fx = 0 \Longrightarrow x'(t) = 0 \Longrightarrow x(t) = x_0$ puisque $x(0) = x_0\ \forall t \in J$
et si $z \in \mathcal{C}(J; \mathbb{R}^n)$, alors $x(z)(t) = \displaystyle\int_0^t z(s)ds + x_0$, donc $x(z) \in \mathcal{C}_0^1(J, \mathbb{R}^n)$. Donc F est inversible et son inverse F^{-1}est défini par

$$F^{-1} : \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}_0^1(J, \mathbb{R}^n) \quad \text{par} \quad (F^{-1}z)(t) = \int_0^t z(s)ds + x_0.$$

F^{-1} est linéaire continue. Soit maintenant l'application

$$H_\lambda = F^{-1} T_\lambda \mathcal{J} \,:\, \bar{K}_b \longrightarrow \mathcal{C}_0^1(J; \mathbb{R}^n).$$

On montre que H_λ est une homotopie compacte ($\mathcal{J}$ étant complètement continu) et que ses points fixes sont exactement les solutions du problème $(2.1)_\lambda$. En effet, il est clair que $u = H_\lambda(u)$ si et seulement si

$$u(t) = x_0 + \lambda \int_0^t f(s, u(s))ds.$$

L'homotopie H_λ n'a pas de points fixes sur ∂K_b, donc d'après le Théorème 1.2.5 puisque H_0 est essentielle ($H_0 = x_0$), alors H_1 est essentielle et par suite H_1 admet un point fixe qui est solution du problème (2.1)-(2.2).

Théorème 2.2.2 *[62] Supposons f satisfait*

$$||f(t,x)|| \leq \psi(||x||) \ , \ \forall (t,x) \in J \times \Omega$$

où ψ est une fonction positive définie sur $[0, +\infty[$ telle que

$$\frac{1}{\psi} \text{ est intégrable sur tout intervalle borné de } [0, +\infty[\text{ et } \int_{||x_0||}^{+\infty} \frac{du}{\psi(u)} > T.$$

Alors le problème (2.1)-(2.2) admet au moins une solution x dans $\mathcal{C}_0^1(J, \mathbb{R}^n)$.

Exemple 2.2.1 $\psi(u) = u + 1 \ , \ \psi(u) = u \log(u+1) \ , \ u > 0$

Preuve : On suppose que $n = 1$, le cas $n > 1$ est pratiquement similaire. Soit x une solution de $(2.1)_\lambda$, alors $|x'(t)| = |\lambda f(t, x(t))| \leq \psi(|x(t)|)$.
On a : $(|x(t)|)^2 = x^2(t)$. On dérivant membre à membre on obtient :

$$2 \times |x(t)| \times (|x(t)|)' = 2x(t) \times x'(t).$$

D'où, pour tout $t \in J$ avec $x(t) \neq 0$ on a

$$|x(t)|' = \frac{x(t)}{|x(t)|} \times x'(t) \leq |x'(t)| \leq \psi(|x(t)|)$$

$$\frac{|x(t)|'}{\psi(|x(t)|)} \leq 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{|x(s)|}{\psi(|x(s)|)} ds \leq t \leq T.$$

En posant : $u(t) = |x(t)|$ on obtient

$$\int_{|x_0|}^{u(t)} \frac{du}{\psi(u)} \leq T < \int_{|x_0|}^{\infty} \frac{du}{\psi(u)}.$$

Cette dernière inégalité montre qu'il existe une constante M_0 telle que $|x(t)| \leq M_0$, c'est à dire $||x(t)||_0 \leq M_0$, $\forall t \in J$. L'équation $x'(t) = \lambda f(t, x(t))$ donne

$$|x'(t)| \leq \max_{(t,x)\in J\times[-M_0,M_0]} |f(t,x)| = M_1,$$

où

$$||x||_1 = max(||x||_0 \ , ||x'||_0) \leq max(M_0 \ ,M_1) = M_2.$$

Le Théorème 2.2.1 nous permet de conclure à ce que le problème (2.1)-(2.2) admet au moins une solution $x \in \mathcal{C}_0^1(J, \mathbb{R})$.

Considérons le problème suivant :

$$x' - p(t)x = f(t,x), \ t \in J, \tag{2.3}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2.4}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et $p \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^+)$. On suppose que f satisfait la condition suivante

(H) $|f(t,x)| \leq \psi(|x|)$, $\forall (t,x) \in J \times \mathbb{R}$,

où ψ est une fonction positive définie sur $(0, +\infty[$ telle que $\frac{1}{\psi}$ est intégrable sur tout intervalle borné de $(0, +\infty[$ vérifiant $\psi(\frac{|y(t)|}{g(t)}) \leq \frac{1}{g(t)}\psi(|y(t)|$ et

$$\int_{|x_0|}^{+\infty} \frac{du}{\psi(u)} > T.$$

Où

$$g(t) = e^{-\int_0^t p(\tau)d\tau}.$$

En multipliant les deux membres de la première équation de (2.3)-(2.4) par g nous obtenons :

$$(gx)'(t) = g(t)(x'(t) - p(t)x(t)) = g(t)f(t,x(t)).$$

Posons maintenant $y(t) = g(t)x(t)$. On obtient alors le problème suivant :

$$y' = F(t,y) \tag{2.5}$$

$$y(0) = y_0, \tag{2.6}$$

où $F : J \times \mathbb{R}$ est la fonction définie par $F(t,y) = g(t)f(t, \frac{y(t)}{g(t)})$.
Toute solution de (2.3)-(2.4) est solution de (2.5)-(2.6) et réciproquement.

Montrons à présent que la fonction F vérifie les conditions du le Théorème 2.2.2 En effet, d'après la condition (H) on a :

$$|f(t,x)| \leq \psi(|x(t)|)\ \forall (t,x) \in J \times \mathbb{R},$$

d'où

$$|F(t,y)| = g(t)|f(t,\frac{y(t)}{g(t)})| \leq g(t)\psi(\frac{|y(t)|}{g(t)}) \leq g(t)\frac{1}{g(t)}\psi(|y(t)| = \psi(|y(t)|).$$

Théorème 2.2.3 *Si f satisfait la condition (H), alors le problème (2.3)-(2.4) admet au moins une solution x dans $\mathcal{C}_0^1(J,\mathbb{R})$.*

Remarque 2.2.1 *Si $x_0 = 0$ et $f(t_0, 0) \neq 0$ pour un certain $t_0 \in J$, alors toute solution du problème (2.3)-(2.4) est non identiquement nulle.*

Considérons le problème suivant

$$x'(t) = f(t, x(t)),\ t \in J = [0,T], \tag{2.7}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2.8}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.2.2 (Croissance linéaire et semi-linéaire) *Supposant*

$$|\ f(t,x)\ | \leq A(t)\ |\ x\ |^p + B(t), \qquad p \leq 1,$$

pour $A(t)$ et $B(t)$ deux fonctions bornées et positives. Si A_0 et B_0 sont les bornes supérieures de $A(t)$ et $B(t)$ respectivement, alors

$$|\ f(t,x)\ | \leq A_0\ |\ x\ |^p + B_0 = \psi(|\ x\ |)$$

et

$$T_\infty = \int_{|x_0|}^{\infty} \frac{du}{A_0 u^p + B_0} = \infty.$$

Par conséquence, le problème (2.7)-(2.8) admet au moins une solution dans l'intervalle J pour tout $T > 0$.

Exemple 2.2.3 (Croissance pôlynomiale) *Supposant que*

$$|\ f(t,x)\ | \leq A(t)\ |\ x\ |^m + B(t)$$

pour $m > 1$ et pour $A(t)$ et $B(t)$ des fonctions bornées positives. Si A_0 et B_0 sont les bornes supérieures de $A(t)$ et $B(t)$ respectivement, alors

$$|\ f(t,x)\ | \leq A_0\ |\ x\ |^m + B_0 = \psi(|\ x\ |), \quad T_\infty = \int_{|x_0|}^{\infty} \frac{du}{A_0 u^m + B_0},$$

et le problème (2.7)-(2.8) admet une solution sur J pour tout $T < T_\infty$.

2.2.2 Problème de Cauchy avec second membre de Carathéodory

Dans cette partie, on considère le problème (2.1)-(2.2) avec f satisfaisant les conditions de Carathéodory. Par solution faible du problème (2.1)-(2.2), on entend une fonction x absolument continue sur J avec $x' \in L^2(J, \mathbb{R}^n)$, $x(0) = x_0$ et $x' = f(t,x)$ presque partout sur J. L'étude de ce problème sera basée sur le théorème de transversalité topologique de Granas et sur quelques résultats d'espaces de Sobolev.
Soit $H^1 = H^1(J, \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions g absolument continue sur J et qui ont une dérivée $g' \in L^2(J, \mathbb{R}^n)$. Pour $g \in H^1$, on défini sa norme par

$$||g||_{H^1} = ||g||_{L^2} + ||g'||_{L^2}.$$

$(H^1; ||.||_{H^1})$ est un espace de Banach. Soit $\tilde{H}^1(J; \mathbb{R}^n) = \{g \in H^1; g(0) = x_0\}$. Pour l'étude du problème (2.1)-(2.2), nous utiliserons les résultats auxiliaires suivants donnés sous forme de théorèmes.

Théorème 2.2.4 *[39] $\tilde{H}^1(J, \mathbb{R}^n)$ est inclus dans $\mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$ avec injection compacte, c'est à dire, l'opérateur injection : $\mathcal{J} : H^1(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$ défini par $(\mathcal{J}g)(t) = g(t)$ est continu et complètement continu.*

Théorème 2.2.5 *[39] Supposons que f vérifie les conditions suivantes :*
(A_1) f satisfait aux conditions de Carathéodory
(A_2) Il existe une fonction $\psi : [0, +\infty[\longrightarrow (0, +\infty)$ telle que

$$\psi \text{ et } \frac{1}{\psi} \in L^\infty_{loc}([0, +\infty[) \text{ et } ||f(t,x)|| \leq \psi(||x||) \text{ par rapport } t \in J.$$

Alors l'opérateur $F : \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(J, \mathbb{R}^n)$ défini par $(Fg)(t) = f(t, g(t))$ est bien défini et continu.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$ et soit $u_0 \in \mathcal{C}(J; \mathbb{R}^n)$. Montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que le fait que $\|u - u_0\|_0 < \delta$ implique que $\|Fu - Fu_0\|_{L^2} < \epsilon$. Posons

$$G_{vm} = \{t \in [0,T] : \|v - u_0(t)\| < \frac{1}{m} \Longrightarrow \|f(t,v) - f(t, u_0(t))\| < \frac{\varepsilon}{R}\}$$

où $v \in \mathbb{R}^n$ et R est une constante positive qui sera déterminée ultérieurement. G_{vm} est mesurable puisque f satisfait (A_1). Soit $E_{m\varepsilon} = \bigcap_{v \in \mathbb{R}^n} G_{vm}$. Cet ensemble est mesurable et $E_{1\varepsilon} \subset E_{2\varepsilon} \subset ...$ Soit

$$\mathbf{N} = \{t \in (0,T) : f(t,.) \text{ n'est pas continue}\}.$$

Par hypothèse, $mes(\mathbf{N}) = 0$ et on a $(0,T)\backslash\mathbf{N} \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_{m\varepsilon}$. En effet, si $t_0 \in (0,T)\backslash\mathbf{N}$, alors il existe m tel que pour $\|v - u_0(t_0)\| < \frac{1}{m}$ on a

$$\|f(t_0, v) - f(t_0 - u_0(t_0))\| < \frac{\varepsilon}{R}$$

car $f(t_0, .)$ est continue. Donc $t_0 \in E_{m\varepsilon}$.

Par conséquent, $mes(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_{m\varepsilon}) = T$. Il existe donc $m_0 \in \mathbf{N}$ tel que $mes(E_{m_0\varepsilon}) > T - \frac{\varepsilon}{R}$.

Soit

$$K = ess \sup_{x \leq 1+\|u_0\|_0} \psi(x) < \infty \text{ et } \eta < (\frac{\varepsilon}{4K})^2.$$

On pose $0 < \delta < \frac{1}{m_0}$ et $R > max(\frac{\varepsilon}{\eta}, (2T)^{\frac{1}{2}})$. Soit $u \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^n)$ telle que $||u - u_0||_0 < \delta$. Montrons que

$$||Fu - Fu_0||_{L^2} < \varepsilon.$$

Si $t \in E_{m_0\varepsilon}$ alors $|f(t, u(t)) - f(t, u_0(t))| < \frac{\varepsilon}{R}$ et ainsi

$$\int_{Em_0} |f(t, u(t)) - f(t, u_0(t))|^2 dt < \frac{\varepsilon^2 T}{R^2} < \frac{\varepsilon^2 T}{2T} = \frac{\varepsilon^2}{2}$$

$mes(E_{m_0\varepsilon}) < \frac{\varepsilon}{R} < \frac{\varepsilon n}{\varepsilon} = \eta$, d'où

$$\begin{aligned} \int_{E_{m_0}} |f(t, u(t)) - f(t, u_0(t))|^2 dt &\leq 2 \int_{Em_0} \{[\psi(|u(t)|)]^2 + [\psi(|u_0(t)|)]^2\} dt \\ &\leq 4K^2\eta \\ &< \tfrac{4K^2\varepsilon^2}{8K^2} \\ &= \tfrac{\varepsilon^2}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$||Fu - Fu_0||_{L^2} < \varepsilon.$$

D'où F est continue.

Théorème 2.2.6 *[39] Soit f une fonction qui satisfait les conditions (A_1) et (A_2)du* Théorème 2.2.5. *Supposons qu'il existe une constante K indépendante de λ telle que $||x||_{H^1} \leq K$ pour toute solution x du problème* $(2.1)_\lambda$. *Alors le problème (2.1)-(2.2) admet au moins une solution x dans $\tilde{H}^1$.*

Preuve : Soit

$$V = \{u \in \tilde{H}^1\,;\, ||y||_{H^1} < K\}.$$

On définit

$$F_\lambda : \mathcal{C}((0,T); \mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2((0,T); \mathbb{R}^n) \text{ par } (F_\lambda v)(t) = \lambda f(t, v(t)).$$

qui est continu D'après le Théorème 2.2.5. On considère l'injection

$$\mathcal{J} : \tilde{H}^1((0,T),\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}((0,T);\mathbb{R}^n) \text{ définie par } \mathcal{J}u = u$$

qui est complètement continu D'après le Théorème 2.2.4.Soit l'opérateur

$$N : \tilde{H}^1((0,T);\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2((0,T);\mathbb{R}^n) \text{ défini par} Nx = x'.$$

Il est clair que N est linéair et continu. Soit l'homotopie $H_\lambda = N^{-1}F_\lambda J : \bar{V} \longrightarrow \tilde{H}^1((0,T);\mathbb{R}^n)$. Les points fixes de H_λ sont les solutions de $(2.1)_\lambda$ et H_λ n'a pas de points fixes sur ∂V. Par la compacité de $\mathcal{J}$ et la continuité de N^{-1} et F_λ, H_λ est continu et complèment continu, H_0 est essentielle, d'après le théorème de la transversalité topologique le Théorème 1.2.5 , alors H_1 est essentielle, et donc le problème (2.1)-(2.2) possède au moins une solution.

Théorème 2.2.7 *[39] Soit f une fonction qui satisfait les conditions (A_1) et (A_2) du* Théorème 2.2.5 *et*

$$\int_{||x_0||}^{+\infty} \frac{du}{\psi(u)} > T.$$

Alors le problème (2.1)-(2.2) admet au moins une solution x dans H^1.

Preuve : Pour prouver l'existence de la solution dans $H^1((0,T);\mathbb{R}^n)$ on fait appel au Théorème 2.2.6. Soit x une solution possible de $(2.1)_\lambda$. Alors puisque $\|\lambda f(t,x)\| \leq \psi(\|x\|)$, on a pour tout $t \in [0,T]$

$$\int_0^t \frac{\|x(s)\|'}{\psi(\|x(s)\|)} ds \leq t \leq T.$$

On suppose que $x(t) \neq 0$, pour un $t \in [0,T]$. Puisque $x(0) = x_0$, il existe un intervalle $[a,t] \subset [0,T]$ tel que $\|x(s)\| > \|x_0\|$ pour tout $a \leq s \leq t$ et $\|x(a)\| = \|x_0\|$, alors pour tout t où $x(t) \neq 0$

$$\int_a^t \|x(s)\|' ds = \int_a^t \frac{x(s) \times x'(s)}{\|x(s)\|} \leq \int_a^t \|x'(s)\| ds.$$

Donc

$$\int_a^t \frac{\|x(s)\|'}{\psi(\|x(s)\|)} ds \leq T < \int_{||x_0||}^{\infty} \frac{du}{\psi(u)}$$

En utilisant un changement de variable, on obtient

$$\int_{||x_0||}^{\|x(t)\|} \frac{du}{\psi(u)} \leq T < \int_{||x_0||}^{\infty} \frac{du}{\psi(u)}.$$

Donc, il existe une constante $M < \infty$ telle que $|x(t)| < M$.

$$||x'||_{L^2} = \left(\int_0^T |x'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^T \psi^2(|x(t)|)\right)^{\frac{1}{2}} \leq M_1 T^{\frac{1}{2}}$$

où $M_1 = ess \sup_{0 \leq x \leq M} \psi(x)$. *Donc* $||x||_{H^1} \leq K = MT^{\frac{1}{2}} + M_1 T^{\frac{1}{2}}$.

2.3 Problème aux limites du second ordre

On s'intéresse au problème suivant

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)),\ t \in J, \tag{2.9}$$

$$x(0) = 0, \tag{2.10}$$

$$x(T) = 0. \tag{2.11}$$

Nous traitons ce problème dans le cas où f est une fonction continue. On suppose que $f : J \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue .
Soit $\mathcal{C}_0^2(J, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions continues deux fois dérivables sur J à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ satisfaisant $(2.10) - (2.11)$. On désigne sa norme par

$$\|x\|_2 = \max(\|x\|_0, \|x'\|_0, \|x''\|_0).$$

Considérons le problème suivant :

$$(2.7)_\lambda \qquad \begin{cases} x''(t) = \lambda f(t, x(t), x'(t)),\ \lambda \in [0,1],\ t \in J \\ \qquad x(0) = 0 \qquad\qquad x(T) = 0. \end{cases}$$

Ce problème se réduit à (2.9)-(2.11) pour $\lambda = 1$. On a les résultats suivants :

Théorème 2.3.1 *Supposons qu'il existe une constante b_1 indépendante de λ telle que pour toute solution x de $(2.7)_\lambda$, on ait $||x||_2 \leq b_1$. Alors le problème $(2.9) - (2.11)$ admet au moins une solution x dans $\mathcal{C}_0^2(J, \mathbb{R}^n)$.*

Preuve : Soit

$$K_{b_1} = \{x \in \mathcal{C}_0^2(J, \mathbb{R}^n)\,;\ ||x||_2 < b_1 + 1\}.$$

Pour $\lambda \in [0,1]$, on définit les opérateurs suivants :

$$\mathcal{T}_\lambda : \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n) \quad \text{par} \quad (\mathcal{T}_\lambda x)(t) = \lambda f(t, x, x'),$$

$$\mathcal{J} : \mathcal{C}_0^2(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}_0^1(J; \mathbb{R}^n) \quad \text{par} \quad (\mathcal{J} x)(t) = x(t),$$

$$L : \mathcal{C}_0^2(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}(J; \mathbb{R}^n) \text{ par } (Lx)(t) = x''(t).$$

On montre que $\mathcal{T}_\lambda$ est continu , $\mathcal{J}$ complètement continu et que L est linéaire , continu et bijectif.

$$z \in \mathcal{C}(J; \mathbb{R}^n) : Lx = z \Longrightarrow x'' = z.$$

La seule solution du problème

$$x''(t) = 0, \tag{2.12}$$

$$x(0) = 0, \tag{2.13}$$

$$x(T) = 0, \tag{2.14}$$

est la solution triviale, cela implique d'après l'alternative de Fridhom, qu'il n'y a qu'une solution au système

$$x''(t) = z(t),\ t \in J, \tag{2.15}$$

$$x(0) = 0, \tag{2.16}$$

$$x(T) = 0, \tag{2.17}$$

pour $z \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$ quelconque, donnée par

$$x(t) = \int_0^T G(t,s)z(s)ds,$$

où

$$G(t,s) = \frac{1}{T}\begin{cases} (t-T)s & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq T, \\ (s-T)t & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq T. \end{cases}$$

La fonction G est la fonction de Green associèe à (2.15)-(2.17).
Alors L est inversible et son inverse $L^{-1} : \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}_0^2(J, \mathbb{R}^n)$ est défini par :

$$(L^{-1}z)(t) = \int_0^T G(t,s)z(s)ds, \quad t \in [0,T].$$

Soit maintenant l'application $H_\lambda : L^{-1}\mathcal{T}_\lambda\mathcal{J} : \overline{K}_{b_1} \longrightarrow \mathcal{C}_0^2(J, \mathbb{R}^n)$. On montre que H_λ est une homotopie compacte ($\mathcal{J}$ étant complètement continu) et que ses points fixes sont exactement les solutions du problèmes $(2.7)_\lambda$. En effet, il est clair que $u = H_\lambda(u)$ si et seulement si

$$u(t) = \lambda \int_0^T G(t,s)f(s, u(s), u'(s))ds.$$

L'homotopie H_λ n'a pas de points fixes sur ∂K_{b_1} donc d'après le théorème de transversalité topologique (Théorème 1.2.5), puisque H_0 est essentielle, alors H_1 est essentielle et par suite H_1 admet un points fixe qui est solution du problème (2.9)-(2.11).

Théorème 2.3.2 *Soit* $f : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et satisfait*

i) *Il existe une constante* M_0 *telle que*

$$xf(t,x,0) > 0 \text{ pour tout } x, |x| > M_0$$

ii) *Pour tout* $(t,x,p) \in [0,T] \times [-M_0, M_0] \times \mathbb{R}$, $f(t,x,p) \leq \psi(|p|)$ *où* $\psi > 0$

$$\text{et } \frac{1}{\psi} \text{ est intégrable sur } [0,+\infty) \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\psi(x)} > 2M_0.$$

Alors le problème (2.9)-(2.11) admet une solution x *dans* $\mathcal{C}_0^2(J,\mathbb{R})$.

Pour démontrer ce théorème on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3.1 *Soit* $f : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfaisant* ***i)*** *et* ***ii)*** *du* Théorème 2.3.2 , *alors il existe une constante* M_1 *telle que si* x *est solution de (2.9)-(2.11),* $|x(t)| \leq M_0$ *et* $|x'(t)| \leq M_1$ *, pour tout* $t \in [0,T]$.

Preuve du Lemme : On remarque que l'hypothèse $i)$ implique que la solution de (2.9)-(2.11) est majorée par une constante indépendante de λ. Supposons le contraire, soit $x \in \mathcal{C}_0^2(J,\mathbb{R})$ solution de (2.9)-(2.11) telle que $|x(t_0)| \geq M_0$, $t_0 \in J$, puisque la fonction $t \to |x(t)|$ est continue alors $|x|$ doit atteindre un maximum positif en $t_0 \in (0,T)$. On suppose que $x(t_0) > 0$. On a

$$0 \geq x''(t_0) = f(t_0, x(t_0), 0),$$

d'ou

$$x(t_0)f(t_0,x(t_0),0) \leq 0$$

ce qui est une contradiction avec l'hypothèse $i)$. Si $x(t_0) < 0$ on obtient de la même manière une contradiction.
Si $t_0 = 0$, on aura

$$x(0)f(0,x(0),0) = 0.$$

C'est une contradiction.
Un raisonnement analogue si $t_0 = T$. Alors

$$|x(t_0)| \leq M_0 \;\; \text{et donc} \;\; |x(t)| \leq M_0, \forall t \in [0,T].$$

On suppose maintenant que x est une solution de (2.9)-(2.11), nous établissons une estimation à priori sur x'. Puisque x' s'annule au moins une fois dans $[0,T]$, chaque t dans $[0,T]$ pour lequel $x'(t) \neq 0$ appartient à un intervalle $[a,b]$ tel que x' a un signe constant sur $[a,b]$ et $x'(a) = 0$ et/ou $x'(b) = 0$. On suppose $x'(a) = 0, x'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a,b]$, donc de l'hypothèse $ii)$ on a

$$\frac{x'x''}{\psi(x')} \leq x'$$

on intègre de a à t il suit

$$\int_a^t \frac{x'(s)x''(s)}{\psi(x'(s))}ds \leq x(t) - x(a) = x(t) \leq 2M_0.$$

On pose $u(t) = x'(t)$, d'où

$$\int_0^{x'(t)} \frac{udu}{\psi(u)} \leq 2M_0.$$

D'où

$$\int_0^{x'(t)} \frac{xdx}{\psi(x)} \leq 2M_0.$$

Donc, il existe une constante M_1 telle que $|x'(t)| \leq M_1$, si non sa sera une contradiction avec le fait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\psi(x)} > 2M_0$.

Preuve du Théorème 2.3.2 On a

$$x''(t) \leq \max_{t \in J} |f(t, x(t), x'(t))| = M_2.$$

Le maximum existe car f est continue sur $J \times [-M_0, M_0] \times [-M_1, M_1])$. D'où

$$||x||_2 = \max\{||x||_0, ||x'||_0\ , ||x''||_0\} \leq \max\{M_0, M_1, M_2\} = M_3.$$

D'après le Théorème 2.3.1, le problème (2.9)-(2.11) admet au moins une solution $x \in \mathcal{C}_0^2(J, \mathbb{R})$.

Chapitre 3

Méthode des sous et sur solutions

3.1 Introduction :

La notion de sous et sur solutions remonte jusqu'au travaux de E. Picard en 1893. Ce dernier avait suggérer pour le problème de Dirichlet suivant

$$x''(t) = f(t, x(t)), \quad x(a) = x(b) = 0,$$

la construction d'une suite convergente $(\alpha_n)_n$ d'approximations, décroissante vers x suivant le schéma

$$\alpha_n'' = f(t, \alpha_{n-1}), \quad \alpha_n(a) = \alpha_n(b) = 0,$$

où f est supposée continue. Sans le vouloir ces approximations sont en faite des sous solutions. L'idée d'utiliser les sous et sur solutions d'un problème aux limites est due essentiellement à G. Scorza Dragoni en 1931 où il considère des sous et sur solutions de classe C^2. En 1938 le même auteur généralise ses résultats au cas L^1-Carathéodory. En 1954 M. Nagumo utilise les sous et sur solutions avec coins ouvrant ainsi la voie à de multitude de variantes et d'énorme applications de la méthode dans la théorie des équations différentielles, ensuite par S. Moretto entre 1958 et 1959. En 1963 H. Knobloch a prolongé le résultat de M. Nagumo en un problème périodique, ensuite plusieurs auteurs se sont intéressés à cette méthode comme par exemple, V. Lakshmikantham et A.S. Vatsala entre 1984-1985, J.J. Nieto en 1989, A. Cabada en 1990.
Ce chapitre est consacré à l'application de la méthode des sous et sur solutions à différentes classes de problèmes à valeur initiale ou aux limites. Pour plus de détails sur cette méthode et ses applications nous recommandons les ouvrages de Bernfeld-Lakshmikantham [21], Heikkila-Lakshmikantham [52], Ladde-Lakshmikantham-Vatsala [59], la thèse de doctorat de De Coster [30], et les articles de Carl-Heikkila-Kumpulainen [24], Cabada [23], Frigon [37], Frigon-O'Regan [39], Heikkila-Cabada [53], Lakshmikantham-Leela [60], Nieto [71, 72], C. De Coster et P. Habet et Nkashama [73].

3.2 Equations différentielles du premier ordre

3.2.1 Equations différentielles avec conditions initiales

On s'intéresse aux problème

$$x'(t) = f(t, x(t)),\ t \in J := [0, T], \tag{3.1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{3.2}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Définition 3.2.1 *Une fonction $x \in AC(J, \mathbb{R})$ est dite solution du problème (3.1)-(3.2) si x satisfait $x'(t) = f(t, x(t)),\ t \in J$ et $x(0) = x_0$.*

Définition 3.2.2 *Une fonction $\alpha \in AC(J, \mathbb{R})$ est dite sous solution du problème (3.1)-(3.2) si $\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)), p.p\ \ t \in [0, T]$ et $\alpha(0) \leq x_0$.*
-Une fonction $\beta \in AC([0, T])$ est dite sur solution du problème (3.1)-(3.2) si $\beta'(t) \geq f(t, \beta(t))$, p.p $t \in [0, T]$ et $\beta(0) \geq x_0$.

On considère les hypothèses suivantes
(H$_1$) f une fonction L^1 - Carathéodory.
(H$_2$) Il existe une sous solution α et une sur solution β de (3.1)-(3.2) telle que $\alpha \leq \beta$.

Théorème 3.2.1 *Si f satisfait (H_1) et (H_2), alors il existe au moins une solution du problème (3.1)-(3.2) telle que*

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \quad \in J.$$

Preuve : On considère le problème modifié suivant

$$x'(t) = f(t, (\tau x)(t)),\ t \in [0.T], \tag{3.3}$$

$$x(0) = x_0, \tag{3.4}$$

où $\tau : \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$ est l'opérateur de troncature défini par

$$(\tau x)(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{si } x(t) \leq \alpha(t) \\ x(t) & \text{si } \alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t) \\ \beta(t) & \text{si } x(t) \geq \beta(t). \end{cases}$$

Remarque 3.2.1 *Il existe $\theta \in L^1([0, T], \mathbb{R}^+)$ telle que*

$$||f(t, (\tau x(t)))|| \leq \theta(t) \quad \forall x \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}).$$

On transforme le problème (3.3)-(3.4) en un problème de point fixe. On considère l'opérateur $N : \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})$ défini par

$$(Nx)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, (\tau x)(s))ds.$$

Il est clair que les points fixes de N sont les solutions du problème (3.3)-(3.4). On montre que N est continu et complètement continu.

Etape 1 : N est continu.

Soit $\{x_n\} \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})$ une suite qui tend vers x^* où $x^* \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})$. On montre que $N(x_n)$ tend vers $N(x^*)$. On a

$$N(x_n) - N(x^*) = \int_0^t f(s, \tau(x_n(s)))ds - \int_0^t f(s, \tau(x^*(s)))ds.$$

D'où

$$||N(x_n) - N(x^*)|| \leq \int_0^t ||f(s, \tau(x_n(s))) - f(s, \tau(x^*(s)))||ds.$$

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a

$$||N(x_n) - N(x^*)|| \leq \int_0^T ||f(s, \tau(x_n(s))) - f(s, \tau(x^*(s)))||ds \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Etape 2 : N transforme tout borné de $\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})$ en un ensemble relativement compact. On montre d'abord que $N(B_k)$ est borné. Soit

$$B_k = \{x \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}); ||x||_\infty \leq k\}$$

un borné et $x \in B_k$, alors $\forall t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} ||Nx(t)|| &\leq ||x_0|| + \int_0^t ||f(s, \tau x(s))||ds \\ &\leq ||x_0|| + \int_0^T \varphi(s)ds. \end{aligned}$$

D'où

$$||Nx||_\infty \leq ||x_0|| + ||\varphi||_{L^1} < \infty \text{ car } \varphi \in L^1.$$

$N(x)$ est équicontinu. En effet pour tous $t_1, t_2 \in [0,T]$, on a

$$\|Nx(t_1) - Nx(t_2)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\varphi(t)dt.$$

Quand $t_1 \longrightarrow t_2$, $||Nx(t_1) - Nx(t_2)|| \longrightarrow 0$.

Etape 4 : On montre que si x est solution de (3.3)-(3.4), alors

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Montrons que

$$\alpha(t) \leq x(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

Supposons le contraire, alors il existe $t_1 < t_2 \in [0, T]$ tel que $x(t_1) = \alpha(t_1)$ et

$$x(t) < \alpha(t), \quad \forall t \in (t_1, t_2].$$

D'où

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_1, t_2] : x(t) &= x(t_1) + \int_{t_1}^{t} x'(s) ds \\ &= x(t_1) + \int_{t_1}^{t} f(s, \alpha(s)) ds. \end{aligned}$$

Puisque α est une sous solution du problème (3.1)-(3.2), alors :

$$\alpha(t) - \alpha(t_1) \leq \int_{t_1}^{t} f(s, \alpha(s)) ds.$$

Par suite

$$\alpha(t) \leq x(t_1) + \int_{t_1}^{t} f(s, \alpha(s)) ds.$$

Donc, $\alpha(t) \leq x(t), \forall t \in [t_1, t_2]$, qui est une contradiction. De même, on pourra montrer que

$$x(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Etape 3 : L'ensemble

$$\Omega = \{x \in \mathcal{C}([0, T], \mathrm{I\!R}) : \lambda x = Nx, \quad \textit{pour un certain} \quad \lambda > 1\}$$

est borné. Soit $x \in \Omega$, d'où $\lambda x = N(x)$ pour un certain $\lambda > 1$, alors

$$x(t) = \lambda^{-1} x_0 + \lambda^{-1} \int_0^t f(s, (\tau x)(s)) ds, \quad t \in [0, T].$$

Donc, $\forall t \in [0, T]$,

$$|x(t)| \leq \|x_0\| + \|\theta\|_{L^1}.$$

Ce qui montre que Ω est borné.

Etape 4 : On montre que si x est solution de (3.3)-(3.4), alors

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Montrons que

$$\alpha(t) \leq x(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

Supposons le contraire, alors il existe $t_1 < t_2 \in [0, T]$ tel que $x(t_1) = \alpha(t_1)$ et

$$x(t) < \alpha(t), \quad \forall t \in (t_1, t_2].$$

D'où

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_1, t_2] : x(t) &= x(t_1) + \int_{t_1}^{t} x'(s)ds \\ &= x(t_1) + \int_{t_1}^{t} f(s, \alpha(s))ds. \end{aligned}$$

Puisque α est une sous solution du problème (3.1)-(3.2), alors :

$$\alpha(t) - \alpha(t_1) \leq \int_{t_1}^{t} f(s, \alpha(s))ds.$$

Par suite

$$\alpha(t) \leq x(t_1) + \int_{t_1}^{t} f(s, \alpha(s))ds.$$

Donc, $\alpha(t) \leq x(t), \forall t \in [t_1, t_2]$, qui est une contradiction. De même, on pourra montrer que

$$x(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

D'après le théorème du point fixe de Schaefer, N possède au moins un point fixe x dans $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ qui est solution du problème (3.3)-(3.4), et puisque $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$, alors $f(t, (\tau x)(t)) = f(t, x(t))$. Donc, la solution de (3.3)-(3.4) est la solution du problème (3.1)-(3.2).

3.2.2 Equations différentielles avec conditions périodiques

On s'intéresse au problème suivant :

$$x'(t) = f(t, x(t)), \; t \in J, \tag{3.5}$$

$$x(0) = x(T). \tag{3.6}$$

Définition 3.2.3 - *Une fonction $x \in AC(J, \mathbb{R})$ est dite solution du problème (3.5)-(3.6) si x satisfait $x'(t) = f(t, x(t)),\ t \in J$ et $x(0) = x(T)$.*

Définition 3.2.4 *Une fonction $\alpha \in AC(J, \mathbb{R})$ est dite sous solution du problème (3.5)-(3.6) si $\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t))$, p.p $t \in [0, T]$ et $\alpha(0) \leq \alpha(T)$.*
Une fonction $\beta \in AC(J, \mathbb{R})$ est dite sur solution du problème (3.5)-(3.6) si $\beta'(t) \geq f(t, \beta(t))$, p.p $t \in [0, T]$ et $\beta(0) \geq \beta(T)$.

On considère les hypothèses suivantes :
(H_3) f une fonction L^1- Carathéodory.
(H_4) Il existe une sous solution α et une sur solution β de (3.5)-(3.6) telles que $\alpha \leq \beta$

Lemme 3.2.1 *[70] Soit $g \in L^1([0,T], \mathbb{R})$, alors le problème périodique*

$$(\mathbf{P}) \qquad \begin{cases} x'(t) + x(t) = g(t), \ \forall t \in [0,T] \\ x(0) = x(T) \end{cases}$$

possède une unique solution x donnée par

$$x(t) = \int_0^T G(t,s)g(s)ds,$$

où G est la fonction de Green définie par

$$G(t,s) = \frac{1}{e^T - 1} \begin{cases} e^{T+s-t} & si \ \ 0 \leq s \leq t \leq T \\ e^{s-t} & si \ \ 0 \leq t \leq s \leq T. \end{cases}$$

Théorème 3.2.2 *Si f satisfait (H_3) et (H_4), alors le problème (3.5)-(3.6) possède au moins une solution $x \in AC([0,T], \mathbb{R})$ telle que*

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \ \forall t \in [0,T].$$

Preuve : On considère le problème modifié suivant :

$$x'(t) + x(t) = f_1(t, x(t)), \text{ p .p } t \in [0.T] \tag{3.7}$$

$$x(0) = x(T), \tag{3.8}$$

où f_1 est la fonction définie par :

$$f_1(t,x(t)) = \begin{cases} f(t,\alpha(t)) + \alpha(t) \text{ si } x(t) \leq \alpha(t)) \\ f(t,x(t)) + x(t) \ \text{ si } \alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t) \\ f(t,\beta(t)) + \beta(t) \ \text{ si } \ x(t) \geq \beta(t). \end{cases}$$

On transforme ce problème en un problème de point fixe. On considère l'opérateur $N : \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})$ défini par

$$(Nx)(t) = \int_0^T G(t,s)f_1(s,x)ds.$$

Remarque 3.2.2 *On note que f_1 est une fonction L^1-Carathéodory et qu'il existe une fonction $\phi \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ telle que*

$$\|f_1(t,x(t))\| \leq \phi(t) + \max(\sup_{t\in J}|\alpha(t)|, \sup_{t\in J}|\beta(t)|) \ \ p.p. \ \ t \in J \ \ et \ \ \forall x \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}).$$

D'après le Lemme 3.2.1,la solution du problème (3.7)-(3.8) n'est autre que le point fixe de l'opérateur N. On montre que N possède un point fixe.

Etape 1 : On peut facilement montrer que N est continu et complètement continu.

Etape 2 : L'ensemble

$$\Omega = \{x \in \mathcal{C}([0,T], \mathrm{I\!R}) : \lambda x = Nx, \quad pour \quad un \quad certain \quad \lambda > 1\}$$

est borné. Soit $x \in \Omega$, d'où $\lambda x = N(x)$ pour un certain $\lambda > 1$, alors

$$x(t) = \lambda^{-1} \int_0^T G(t,s) f_1(s, x(s)) ds, \quad t \in [0,T].$$

Donc, $\forall t \in [0,T]$,

$$|x(t)| \leq |G(t,s)| \int_0^T |f_1(s, x(s))| ds.$$

Par suite

$$\|x\|_\infty \leq \frac{e^T}{e^T - 1} [\|\phi\|_{L^1} + T \max(\sup_{t\in J} |\alpha(t)|, \sup_{t\in J} |\beta(t)|)] := K_1.$$

Ce qui montre que Ω est borné. D'après le théorème de point fixe de Schaefer le Théorème 1.2.1, N possède au moins un point fixe x dans $\mathcal{C}(J, \mathrm{I\!R})$ qui est solution du problème (3.7)-(3.8).

Etape 3 : Montrons que la solution x de (3.7)-(3.8) satisfait

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t) \quad \text{pour tout} \quad t \in J.$$

Soit x une solution de (3.7)-(3.8). On prouve que $x(t) \leq \beta(t)$ pour tout $t \in [0,T]$. On suppose que $x - \beta$ atteint son maximum positif en t_0 dans J, c'est à dire,

$$(x - \beta)(t_0) = \max\{x(t) - \beta(t) : t \in J\} > 0.$$

si $t_0 \in (0,T)$, il existe $t_0^* \in (0, t_0)$ tel que

$$0 < x(t) - \beta(t) \leq x(t_0) - \beta(t_0) \;\; \text{pour tout} \;\; t \in [t_0^*, t_0].$$

Donc pour $t = t_0^*$, on a

$$\beta(t_0) - \beta(t_0^*) \leq x(t_0) - x(t_0^*). \tag{3.9}$$

D'après la définition de f_1, on a

$$x(t_0) - x(t_0^*) = \int_{t_0^*}^{t_0} (f(s, \beta(s)) + \beta(s) - x(s)) ds \;\; p.p. \, t \in J.$$

Puisque β est une sur solution de (3.5)-(3.6), on aura

$$x(t_0) - x(t_0^*) \leq \beta(t_0) - \beta(t_0^*) - \int_{t_0^*}^{t_0} (x(s) - \beta(s))ds$$
$$< \beta(t_0) - \beta(t_0^*).$$

C'est une contradiction avec l'hypothèse (3.9).
Si $t_0 = 0$, alors,

$$\beta(T) \leq \beta(0) < x(0) = x(T).$$

C'est une contradiction.
Un raisonnement analogue si $t_0 = T$.
De manière analogue on montre que $\alpha(t) \leq x(t)$ pour tout $t \in J$.
Puisque $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$ pour tout $t \in J$, alors x est une solution du problème (3.5)-(3.6), ce qui achève la démonstration.

3.3 Equations différentielles du second ordre

3.3.1 Equations différentielles avec conditions aux limites

Considérons le problème aux limites suivant

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in J, \tag{3.10}$$
$$a_1 x(0) - a_2 x'(0) = A, \tag{3.11}$$
$$b_1 x(T) + b_2 x'(T) = B, \tag{3.12}$$

où $A,\ B \in \mathbb{R},\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2 \in \mathbb{R}_+,\ a_1 + a_2 > 0,\ b_1 + b_2 > 0,$ et $f : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction L^1-Carathéodory .

Remarque 3.3.1 *Le probl'eme (3.10)-(3.12) englobe le problème de Dirichlet* $(a_2 = b_2 = A = B = 0)$ *et celui de Neuman* $(a_1 = b_1 = A = B = 0)$.

Définition 3.3.1 *Une fonction* $x \in W^{2,1}([0,T], \mathbb{R})$ *est dite solution du problème (3.10)-(3.12) si* x *satisfait* $x''(t) = f(t, x(t), x'(t)),\ t \in J,\ a_1 x(0) - a_2 x'(0) = A,\ \ b_1 x(T) + b_2 x'(T) = B$.

Définition 3.3.2 - *Une fonction* $\alpha \in W^{2,1}([0,T], \mathbb{R})$ *est dite sous solution du problème (3.10)-(3.12) si* $\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t), \alpha'(t))$, *p.p* $t \in J,\quad a_1\alpha(0) - a_2\alpha'(0) \leq A,,\ \ b_1\alpha(T) + b_2\alpha'(T) \leq B$.
-*Une fonction* $\beta \in W^{2,1}([0,T], \mathbb{R})$ *est dite sur solution du problème (3.10)-(3.12) si* $\beta''(t) \leq f(t, \beta(t), \beta'(t))$, *p.p* $t \in J,\ a_1\beta(0) - a_2\beta'(0) \geq A,\ b_1\beta(T) + b_2\beta'(T) \geq B$.

Définition 3.3.3 *Soit* $\alpha,\ \beta \in W^{2,1}([0,T],\mathbb{R})$ *telle que* $\alpha \leq \beta$,

$$E = \{(t,x,p) \in J \times \mathbb{R}^2\ :\ \alpha(t) \leq \beta(t)\} \tag{3.13}$$

et $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}_+^*)$ *vérifiant*

$$\int_0^\infty \frac{udu}{\psi(u)} = \infty. \tag{3.14}$$

On dit que $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfait la condition de Nagumo si*

$$\forall (t,x,p) \in E, \qquad |f(t,x,p)| \leq \psi(|p|). \tag{3.15}$$

Ainsi on a le résultat suivant.

Théorème 3.3.1 ([30], proposition 1.1, p.111) *Soient* $\alpha,\ \beta \in W^{2,1}([0,T],\mathbb{R})$, *avec* $\alpha \leq \beta$, $E \subset J \times \mathbb{R}^2$ *défini par* (3.13) *et* $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}_+^*)$ *vérifiant* (3.14). *Alors il existe* $R > 0$, *tel que pour toute fonction* $f : E \to \mathbb{R}$ L^1-*Carathéodory vérifiant* (3.15), *et toute solution* x *de* (3.10) *dans* J *vérifiant* $\alpha \leq x \leq \beta$, *on a*

$$\|x'\|_{L^1} < R.$$

Preuve : Soit x une solution de (3.10) vérifiant $\alpha \leq x \leq \beta$.
Posons

$$r = \max\left\{\frac{\beta(T)-\alpha(0)}{T},\ \frac{\beta(0)-\alpha(T)}{T},\ 0\right\}$$

et R tels que

$$\int_r^R \frac{udu}{\psi(u)} \geq \max_t \beta(t) - \min_t \alpha(t). \tag{3.16}$$

Observons, que de la définition de r, il existe $t^* \in J$ avec $|x'(t^*)| \leq r$.
Si ce n'est pas le cas, supposons d'abord pour tout $t \in J,\ x'(t) > r$. Ceci mènerais à la contradiction

$$\beta(T) - \alpha(0) \geq x(T) - x(0) = \int_0^T x'(t)dt > Tr \geq \beta(T) - \alpha(0).$$

De la même façons, si $x'(t) < -r$ dans J, on obtient la contradiction

$$\beta(0) - \alpha(T) \geq u(0) - u(T) = -\int_0^T x'(t)dt > Tr \geq \beta(0) - \alpha(T).$$

Considérons maintenant un intervalle $I = [t_0, t_1]$ tel que $x'(t) \geq 0$ dans I, $x'(t_0) = r,\ x'(t_1) > r$. Alors on a

$$\begin{aligned}\int_{x'(t_0)}^{x'(t_1)} \frac{u}{\psi(u)} du &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{x'(t)x''(t)}{\psi(x'(t))} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{x'(t)f(t,x(t),x'(t))}{\psi(x'(t))} dt \\ &\leq |x(t_1) - x(t_0)| \\ &\leq \max_t \beta(t) - \min_t \alpha(t).\end{aligned}$$

De (3.16) on a $x'(t_1) \leq R$.
Le même raisonnement montrerai que $x'(t) \geq -R$.

Remarque 3.3.2 *On peut toujours estimer la borne à priori par* $N \geq R$ *en posant*

$$\int_r^N \frac{udu}{\psi(u)} \geq \max_t \beta(t) - \min_t \alpha(t),$$

lorsque $r = \max\left\{\dfrac{\beta(T) - \alpha(0)}{T},\ \dfrac{\beta(0) - \alpha(T)}{T},\ 0\right\}.$

La condition (3.14) peut être remplacée par (3.17) ci-dessous

Théorème 3.3.2 ([31], proposition 4.1, p. 9) *Soient* $\alpha,\ \beta \in W^{2,1}([0,T], \mathbb{R})$, *avec* $\alpha \leq \beta,\ E \subset J \times \mathbb{R}^2$ *défini par* (3.13) *et* $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}_+^*)$ *vérifiant*

$$\int_r^\infty \frac{udu}{\psi(u)} > \max_t \beta(t) - \min_t \alpha(t) \tag{3.17}$$

où $r = \max\left\{\dfrac{\beta(T) - \alpha(0)}{T},\ \dfrac{\beta(0) - \alpha(T)}{T},\ 0\right\} \geq 0.$
Alors il existe $R > 0$, *tel que pour toute fonction* $f : E \to \mathbb{R}$ L^1-*Carathéodory vérifiant* (3.15), *et toute solution* x *de* (3.10) *dans* J *vérifiant* $\alpha \leq x \leq \beta$, *on a*

$$\|x'\|_{L^1} < R.$$

Preuve : Soit $R > 0$ tel que

$$\int_r^R \frac{udu}{\psi(u)} \geq \max_t \beta(t) - \min_t \alpha(t),$$

et considérons une solution x de (3.10) vérifiant $\alpha \leq x \leq \beta$.
D'après la preuve du Théorème 3.3.1, il existe $t^* \in J$ avec $|x'(t^*)| \leq r$.

Considérons ensuite un intervalle $I = [t_0, t_1]$ ou bien $[t_1, t_0]$ tel que $x'(t) \geq r$ dans I, et $x'(t_0) = r$.
Alors on a

$$\begin{aligned} \int_{x'(t_0)}^{x'(t_1)} \frac{udu}{\psi(u)} &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{x'(t)x''(t)}{\psi(x'(t))} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{x'(t)f(t, x(t), x'(t))}{\psi(x'(t))} dt \\ &\leq |x(t_1) - x(t_0)| \leq \max_t \beta(t) - \min_t \alpha(t). \end{aligned}$$

Remarque 3.3.3 *Notons que la condition de croissance de type Bernstein*

$$|f(t, x, p)| \leq A + Bp^2$$

implique que f satisfait la condition de Nagumo.

Nous avons le résultat d'existence suivant

Théorème 3.3.3 ([30], th. 1.3, p. 116) *Supposons α, $\beta \in W^{2,1}([0, T], \mathbb{R})$ respectivement une sous-solution et sur-solution du problème* $(3.10) - (3.12)$ *avec $\alpha \leq \beta$, E l'ensemble défini par* (3.13), $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}_+^*)$ *vérifiant* (3.17) *et supposons $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction L^1-Carathéodory vérifiant* (3.15).
Alors le problème $(3.10) - (3.12)$ *admet au moins une solution $x \in W^{2,1}([0, T], \mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in J$ on a $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$.*

Preuve : La démonstration se fait en 4 étapes.

Etape 1 : Soit R tel que

$$\int_r^R \frac{udu}{\psi(u)} \geq \max_t \beta(t) - \min_t \alpha(t) \tag{3.18}$$

et

$$\max_t \{|\alpha'(t)|,\ |\beta'(t)|\} \leq R.$$

Considérons le problème modifié suivant

$$\begin{cases} x'' - x = \widetilde{f}(t, \tau x(t), x') - \tau x(t), \\ x(0) - a_2 x'(0) = A - a_1 \tau x(0)) + \tau x(0)), \\ x(T) + b_2 x'(T) = B - b_1 \tau x(T)) + \tau x(T)). \end{cases} \tag{3.19}$$

où

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(t, \tau x(t), p) &= \max\{\min\{f(t, \tau x(t), p),\ R\},\ -R\} \\ &= \begin{cases} f(t, \tau x(t),\ -R) & \text{si} \quad p < -R, \\ f(t, \tau x(t), p) & \text{si} \quad -R \leq p \leq R, \\ f(t, \tau x(t),\ R) & \text{si} \quad p > R. \end{cases} \end{aligned}$$

τ étant l'opérateur de troncature défini précédement.

Etape 2 : *Le problème* (3.19) *admet au moins une solution.*
En effet si on écrit (3.19) sous la forme $Lx = Nx$ où L et N sont les opérateurs définis par

$$\begin{aligned} L \quad : \quad & W^{2,1}([0,T],\mathrm{I\!R}) \longrightarrow L^1(J) \times \mathrm{I\!R}^2 \\ & x \mapsto (x'' - x,\ x(0) - a_2 x'(0),\ x(T) + b_2 x'(T)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} N \quad : \quad & \mathcal{C}^1(J) \longrightarrow L^1(J) \times \mathrm{I\!R}^2 \\ & u \mapsto\ \widetilde{f}(t, \tau x(t), x') - \tau x(t), \\ & A - a_1 \tau x(0) + \tau x(0), \quad B - b_1 \tau x(T) + \tau x(T). \end{aligned}$$

Par le théorème de l'application ouverte L admet un inverse L^{-1} continu. Ainsi le problème (3.19) est équivalent au suivant

$$x = \mathcal{T}x, \quad x \in W^{2,1}([0,T],\mathrm{I\!R})$$

avec $\mathcal{T} \equiv L^{-1}N$ et comme pour un certain $K \in \mathrm{I\!R}$,

$$|\ \widetilde{f}(t, \tau x(t)) - \tau x(t)| \leq h(t) + K, \quad h \in L^1,$$

on a donc $\mathcal{T}(\mathcal{C}^1(J))$ un ensemble borné et d'après le théorème Arzela -Ascoli l'opérateur $\mathcal{T}$ est complètement continu.
On conclu, en remarquant, que si on considère le problème

$$x = \lambda \mathcal{T}x, \quad x \in W^{2,1}([0,T],\mathrm{I\!R}), \quad \lambda \in [0,\ 1] \tag{3.20}$$

et en vue de la définition de τ, qui est une fonction continue et bornée et que $\widetilde{f}$ est une fonction L^1-Carathéodory, il existe une constante $C > 0$ indépendante de λ telle que toute solution de (3.20) vérifie $\|x\|_{L^1} \leq C$. Ainsi, en appliquant le théorème de Schaefer on en déduit que le problème (3.19) admet une solution.

Etape 3 : *Toute solution x de* $(3.10) - (3.12)$ *vérifie pour tout $t \in J$*

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t).$$

Supposons au contraire que $x - \alpha$ admet un minimum strictement négatif en un point t_0.
Si $t_0 \in (0,\ T)$ on obtient la contradiction

$$0 = x'(t_0) - \alpha'(t_0) \quad = \int_{t_0}^{t} [\quad \widetilde{f}(s, \alpha(s), \alpha'(s)) + x(s) - \alpha(s) - \alpha''(s)] ds < 0.$$

Si $t_0 = 0$, on obtient la contradiction

$$0 = A + (1 - a_1)\tau x(0) - x(0) + a_2 x'(0) > A - a_1\alpha(0) + a_2\alpha'(T) \geq 0$$

ce qui est impossible.
Un raisonnement analogue si $t_0 = T$.

Etape 4 : Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(s) = \begin{cases} \psi(u) & \text{si} \quad u \leq R, \\ \psi(R) & \text{si} \quad u > R, \end{cases}$$

Observons que pour tout $(t, x, p) \in E$

$$|\widetilde{f}(t, x, p)| \leq \varphi(|p|),$$

et φ vérifie (3.18).
Par le Thèoréme 3.3.1 toute solution x de (3.19) satisfait $\|x'\|_\infty \leq R$. Ainsi on a démontré que le problème (3.19) admet une solution x qui vérifie $\alpha \leq x \leq \beta$ et $\|x'\|_\infty \leq R$ i.e. on a $x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$, $a_1 x(0) - a_2 x'(0) = A$, $b_1 x(T) + b_2 x'(T) = B$. Alors x est une solution de (3.10)-(3.12).

Exemple 3.3.1 *Considérons le problème de Dirichlet suivant*

$$x'' = x'^2 \ln(x'^2 + 1) - t, \quad x(0) = 0, \; x(1) = 1.$$

On a une sous-solution $\alpha(t) = 0$, et une sur-solution $\beta(t) = 2t$. La fonction $f(t, x, p) = p^2 \ln(p^2 + 1) - t$ vérifie la condition de Nagumo, i.e.

$$|f(t, x, p)| \leq (p^2 + e) \ln(p^2 + e)$$

et

$$\int_0^\infty \frac{sds}{(s^2 + e)\ln(s^2 + e)} = \frac{1}{2} \ln(\ln(p^2 + e))|_0^\infty = \infty.$$

Remarquons que la condition de croissance de type Bernstein (la remarque 3.3.3) ne s'applique pas.

Nous pouvons considérer le cas particulier des sous- et des sur-solutions constantes

Corollaire 3.3.1 *Soint α, β deux réels tels que $\alpha \leq \beta$, et E définie par (3.13). Si on a pour tout $t \in J$*

$$f(t, \alpha, 0) \leq f(t, \beta, 0),$$

et

$$a_1\alpha \leq A \leq a_1\beta, \quad b_1\alpha \leq B \leq b_1\beta.$$

Si de plus il existe $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}_+^*)$ *tel que* $\displaystyle\int_r^\infty \frac{sds}{\psi(s)} > \beta - \alpha$*,où* $r = \dfrac{\beta-\alpha}{T}$.
Alors le problème aux limites $(3.10) - (3.12)$ *admet aux moins une solution* x *telle que pour tout* $t \in J$

$$\alpha \leq x(t) \leq \beta.$$

Chapitre 4

Inclusions différentielles

4.1 Introduction

Parmi les théories les plus développés de ce siècle, il y a la théorie des inclusions différentielles et ses applications qui géneralise la théorie des équations différentielles, c'est l'école Polonaise qui a initié cette branche des mathématiques par les travaux de Marchaud et Zaremba durant les années 1934-1936 et puis en 1960-1970 Wazewski et ses collaborateurs ont publiés une série de travaux concernant les inclusions différentielles, mais c'est Fillipov en 1959-1960 le premier à considérer une inclusion différentielle et l'éxistence de ses solutions dans le contexte des problémes de contrôle optimale et les équations avec second membre discontinu, mais ces travaux ont connu de grand critiques surtout par les physiciens qui réclamaient une nouvelle théorie inutile. Et depuis 1959 par l'apparition du livre de Berge le dévelopement de l'analyse multivoque n'a cessé d'augmenter jusqu'au aujourd'hui,surtout par la combinaison de la théorie des points fixes, la théorie des semi-groupes et l'analyse convexe.
Ce chapitre est consacré à l'étude de certaines classes d'inclusions différentielles. En faisant appel à la méthode des sous et sur solutions utilisée récemment dans certains travaux de Halidias et Papageorgiou [51] et Benchohra, Boucherif et Ntouyas [9, 11, 12, 13, 15], nous traitons le cas où le second membre est à valeurs convexes. D'autres résultats pour le cas non convexe seront obtenus à l'aide de l'argument de point fixe.

4.2 Inclusions différentielles avec second membre convexe

4.2.1 Inclusions différentielles du premier ordre

On considère le problème :

$$x'(t) \in F(t, x(t)) \text{ p.p. } t \in J = [0, T], \tag{4.1}$$

$$L(x(0), x(T)) = 0, \tag{4.2}$$

où $F : J \times \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$ une application multivoque à valeurs compactes, convexes, $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application univoque continue.

Définition 4.2.1 *Une fonction $x \in AC(J, \mathbb{R})$ est dite solution du problème (4.1)-(4.2) s'il existe une fonction $v \in L^1(J, \mathbb{R})$ telle que $v(t) \in F(t, x(t))$ p.p.. $t \in J$ et $x'(t) = v(t)$ p.p. $t \in J$ et $L(x(0), x(T)) = 0$.*

Définition 4.2.2 *[12] Une fonction $\alpha \in AC(J, \mathbb{R})$ est dite sous solution du problème (4.1)-(4.2) s'il existe $v_1 \in L^1(J, \mathbb{R})$ telle que $v_1(t) \in F(t, \alpha(t))$ p.p. $t \in J$,*
$\alpha'(t) \leq v_1(t)$ p.p. $t \in J$ et $L(\alpha(0), \alpha(T)) \leq 0$.
-Une fonction $\beta \in AC(J, \mathbb{R})$ est dite sur solution du problème(4.1)-(4.2) s'il existe $v_2 \in L^1(J, \mathbb{R})$ telle que $v_2(t) \in F(t, \beta(t))$ p.p. $t \in J$, $\beta'(t) \geq v_2(t)$, p.p. $t \in J$ et $L(\beta(0), \beta(T)) \geq 0$.

On a les résultats suivants :

Théorème 4.2.1 *[12]. On suppose que $F : J \times \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$ est une application multivoque L^1-Carathéodory. On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites*

H1) *Il existe deux fonctions α, $\beta \in AC(J, \mathbb{R})$ sous et sur solutions du problème (4.1)-(4.2) telles que $\alpha \leq \beta$.*

H2) *L est une fonction univoque continue par rapport à $(x, y) \in [\alpha(0), \beta(0)] \times [\alpha(T), \beta(T)]$ et croissante par rapport à $y \in [\alpha(T), \beta(T)]$.*

Alors le problème (4.1)-(4.2) possède au moins une solution $x \in AC(J, \mathbb{R})$ telle que

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \ \forall t \in J.$$

Remarque 4.2.1 *On remarque que si $L(x, y) = ax - by - c$, avec $a, b \geq 0, a + b > 0$, on aura le problème*

$$\begin{cases} x'(t) \in F(t, x(t)), \quad \text{p.p. } t \in J, \\ ax(0) - bx(T) = c. \end{cases}$$

i) si $a = b = 1,\ c = 0$ *on a des conditions périodiques* $x(0) = x(T)$,
ii) si $a = 1,\ b = 0$, *on a des conditions initiales* $x(0) = c$,
iii) si $a = 0,\ b = -1$, *on a des conditions terminales* $x(T) = c$.

Preuve : On transforme le problème (4.1)-(4.2) en un problème de point fixe. On considère le problème modifié (voir [23])

$$x'(t) + x(t) \in F_1(t, x(t)) \quad p.p.\ t \in J, \tag{4.3}$$

$$x(0) = \tau(0, x(0) - L(\bar{x}(0), \bar{x}(T)), \tag{4.4}$$

où

$$F_1(t, x) = F(t, \tau(t, x)) + \tau(t, x),$$
$$\tau(t, x) = \max(\alpha(t),\ \min(x, \beta(t))$$

et

$$\bar{x}(t) = \tau(t, x(t)).$$

Remarque 4.2.2 ***i)*** *Notons que* F_1 *est* L^1-*Carathéodory et qu'il existe une fonction* $\phi \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ *telle que*

$$\|F_1(t, x(t)) \leq \phi(t) + \max(\sup|\alpha(t)|, \sup|\beta(t)|) \quad p.p. \quad t \in J\ \forall x \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}).$$

ii) *Par la définition de* τ, *il est clair que* $\alpha(0) \leq x(0) \leq \beta(0)$.
La solution du problème (4.3)-(4.4) est le point fixe de l'opérateur $N : \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) \to 2^{\mathcal{C}(J,\mathbb{R})}$ *défini par :*

$$N(x) = \{h \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) : h(t) = x(0) + \int_0^t [v(s) + \bar{x}(s) - x(s)]ds, \quad v \in \tilde{S}_{F,\bar{x}}\},$$

où

$$\tilde{S}_{F,\bar{x}} = \{v \in S_{F,\bar{x}} : v(t) \geq v_1(t) \quad p.p. \quad t \in A_1 \text{ et } v(t) \leq v_2(t) \quad p.p. \quad t \in A_2\}.$$
$$S_{F,\bar{x}} = \{v \in L^1(J, \mathbb{R}) : v(t) \in F(t, \bar{x}(t)),\ p.p.\ t \in J\}.$$
$$A_1 = \{t \in J : x(t) < \alpha(t) \leq \beta(t)\},$$
$$A_2 = \{t \in J : \alpha(t) \leq \beta(t) < x(t)\}.$$

Remarque 4.2.3 ***i)*** *Pour* $x \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$, *l'ensemble* $S_{F,x}$ *est non vide (voir [58]).*
ii) *Pour tout* $x \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$, *l'ensemble* $\tilde{S}_{F,x} \neq \phi$. *En effet, de i), il existe* $v \in S_{F,x}$. *Soit la fonction*

$$w = v_1\chi_{A_1} + v_2\chi_{A_2} + v_3\chi_{A_3},$$

où

$$A_3 = \{t \in J : \alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)\}.$$

Alors, par décompossabilité $w \in \tilde{S}_{F,\bar{x}}$.

On montre que N est complètement continu, s.c.s à valeurs convexes, fermées.

Etape 1 : $N(x)$ est convexe, $\forall x \in \mathcal{C}(J, \mathrm{I\!R})$.

En effet, si $h,\ \bar{h} \in N(x)$, alors il existe $v \in \tilde{S}_{F,\bar{x}}$ et $\bar{v} \in \tilde{S}_{F,\bar{x}}$ telles que :

$$h(t) = x(0) + \int_0^t [v(s) + \bar{x}(s) - x(s)]ds,\ t \in J$$

et

$$\bar{h}(t) = x(0) + \int_0^t [\bar{v}(s) + \bar{x}(s) - x(s)]ds,\ t \in J.$$

Soit $1 \leq k \leq 1$. $\forall t \in J$ on a :

$$[kh + (1-k)\bar{h}](t) = x(0) + \int_0^t [kv(1) + (1-k)\bar{v}(s) + \bar{x}(s) - x(s)]ds.$$

Puisque $\tilde{S}_{F,\bar{x}}$ est convexe (F à valeurs convexes), alors $kh + (1-k)\bar{h} \in N(x)$.

Etape 2 : N transforme tout borné en un borné dans $\mathcal{C}(J, \mathrm{I\!R})$.

Soit $B_r = \{x \in \mathcal{C}(J, \mathrm{I\!R}) : \|x\|_\infty \leq r\}$, un ensemble borné dans $\mathcal{C}(J, \mathrm{I\!R})$ et $x \in B_r$, alors pour tout $h \in N(x)$, il existe $v \in \tilde{S}_{F,\bar{x}}$ telle que

$$h(t) = x(0) + \int_0^t [v(s) + \bar{x}(s) - x(s)]ds,\ t \in J.$$

Donc, pour tout $t \in J$ on a

$$\begin{aligned} |h(t)| &\leq |x(0)| + \int_0^t [|v(s)| + |\bar{x}(s)| + |x(s)|]ds \\ &\leq \max(\alpha(0), \beta(0)) + \|\phi_r\|_{L^1} + T\max(r, \sup_{t\in J}|\alpha(t)|, \sup_{t\in J}|\beta(t)|) + T_r := K. \end{aligned}$$

Etape 3 : L'image par N de tout borné dans $\mathcal{C}(J, \mathrm{I\!R})$ est équicontinue.

Soit $u_1,\ u_2 \in J,\ u_1 < u_2$ et $B_r = \{x \in \mathcal{C}(J, \mathrm{I\!R}) : \|x\|_\infty \leq r\}$ un ensemble borné dans $\mathcal{C}(J, \mathrm{I\!R})$ et $x \in B_r$. Pour chaque $h \in N(x)$, il existe $v \in \tilde{S}_{F,\bar{x}}$ telle que

$$h(t) = x(0) + \int_0^t [v(s) + \bar{x}(s) - x(s)]ds,\ t \in J.$$

On a donc

$$\begin{aligned} |h(u_1) - h(u_2)| &\leq \int_{u_1}^{u_2} [|v(s)| + |\bar{x}(s)| + |x(s)|]ds \\ &\leq \int_{u_1}^{u_2} |\phi_r|ds + (u_2 - u_1)\max(r, \sup_{t\in J}|\alpha(t)|, \sup_{t\in J}|\beta(t)| + r(u_2 - u_1). \end{aligned}$$

Comme conséquence des étapes 2 et 3 et le théoréme d'Arzéla-Ascoli (Théorème 1.2.2) combinés ensemble, on peut déduire que $N : \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) \longrightarrow 2^{\mathcal{C}(J,\mathbb{R})}$ est une application multivoque compacte,donc condensée (toute application compacte est condensée).

Etape 4 : N a un graphe fermé.

Soit $(x_n) \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}),\ x_n \longrightarrow x_0,\ h_n \in N(x_n)$ et $h_n \longrightarrow h_0$. On prouve que $h_0 \in N(x_0)$. $h_n \in N(x_n)$, donc il existe $v_n \in \tilde{S}_{F,\bar{x}_n}$ telle que

$$h_n(t) = x(0) + \int_0^t [v_n(s) + \bar{x}_n(s) - x_n(s)]ds,\ t \in J.$$

On doit montrer qu'il existe $v_0 \in \tilde{S}_{F,\bar{x}}$ telle que

$$h_0(t) = x(0) + \int_0^t [v_0(s) + \bar{x}_0(s) - x_0(s)]ds,\ t \in J.$$

On considère l'opérateur linéaire continu $\Gamma : L^1(J, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ défini par

$$(\Gamma v)(t) = \int_0^t v(s)ds.$$

On a

$$\|(h_n - x_0 - \int_0^t [\bar{x}_n(s) - x_n(s)]ds) - (h_0 - x_0 - \int_0^t [\bar{x}_0(s) - x_0(s)]ds)\|_\infty \longrightarrow 0.$$

D'après le Lemme 1.3.2,on a $\Gamma \circ \tilde{S}_F$ a un graphe fermé. D'après la définition de Γ, on a

$$h_n(t) - x(0) - \int_0^t [\bar{x}_n(s) - x_n(s)]ds \in \Gamma(\tilde{S}_{F,\bar{x}_n}).$$

Puisque $x_n \longrightarrow x_0$, on a D'après le Lemme 1.3.2 :

$$h_0(t) = x(0) + \int_0^t [v_0(s) + \bar{x}_0(s) - x_0(s)]ds,\ t \in J \text{ pour } v_0 \in \tilde{S}_{F,\bar{x}_0}.$$

Etape 5 : L'ensemble

$$M = \{v \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) : \lambda v \in N(v) \quad \text{pour un certain} \quad \lambda > 1\}$$

est borné.

Soit $x \in M$ alors $\lambda x \in N(x)$ pour un certain $\lambda > 1$. Donc il existe $v \in \tilde{S}_{F,\bar{x}_0}$ telle que

$$x(t) = \lambda^{-1}x(0) + \lambda^{-1}\int_0^t [v(s) + \bar{x}_s - x(s)]ds,\ t \in J.$$

Donc

$$|x(t)| \leq |x(0)| + \int_0^t |v(s) + \bar{x}_s - x(s)| ds, \ t \in J.$$

D'après la définition de τ, il existe une application $\phi \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\|F(t, \bar{x}(t))\| = \sup\{|v| : v \in F(t, \bar{x}(t))\} \leq \phi(t) \text{ pour chaque } x \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}),$$

$$|x(t)| \leq \max(\alpha(0), \beta(0)) + \|\phi\|_{L^1} + T \max(\sup_{t \in J} |\alpha(t)|, \sup_{t \in J} |\beta(t)|) + \int_0^t |x(s)| ds.$$

On pose

$$z_0 = \max(\alpha(0), \beta(0)) + \|\phi\|_{L^1} + T \max(\sup_{t \in J} |\alpha(t)|, \sup_{t \in J} |\beta(t)|.$$

En utilisant le lemme de Gronwall [50], on a pour tout $t \in J$

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq z_0 + z_0 \int_0^t e^{t-s} ds \\ &\leq z_0 + z_0(e^t - 1). \end{aligned}$$

$$\|x\|_\infty \leq z_0(e^T - 1).$$

Donc M est borné. D'après le Lemme 1.3.3, N possède un point fixe x qui est solution du problème (4.3)-(4.4).

Etape 6 : On montre que la solution $x(t)$ du problème (4.3)-(4.4) satisfait

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad \text{pour tout} \quad t \in J.$$

Raisonnons par l'absurde. En effet, il existe $t_1, \ t_2 \in J, \ t_1 < t_2$ tels que $\alpha(t_1) = x(t_1)$ et

$$\alpha(t) > x(t), \quad \forall t \in (t_1, t_2).$$

D'après la définition de τ on a

$$x'(t) + x(t) \in F(t, \alpha(t)) + \alpha(t), \quad p.p. \ \ t \in (t_1, t_2).$$

Donc il existe $v(t) \in F(t, \alpha(t))$, p.p. $t \in J$ avec $v(t) \geq v_1(t)$ p.p. $t \in J$ telle que :

$$x'(t) + x(t) = v(t) + \alpha(t) \ \ p.p. \ \ t \in (t_1, t_2).$$

On intégrant dans $(t_1, t]$, avec $t \in (t_1, t_2)$, on obtient

$$\begin{aligned} x(t) - x(t_1) &= \int_{t_1}^t [v(s) + (\alpha - x)(s)] ds, \quad t \in (t_1, t_2) \\ &> \int_{t_1}^t v(s) ds. \end{aligned}$$

Puisque α est une sous solution de (4.3)-(4.4)

$$\alpha(t) - \alpha(t_1) \leq \int_{t_1}^{t} v_1(s)ds, \quad t \in (t_1, t_2).$$

Et par le fait que $x(t_1) = \alpha(t_1),\ v(t) \geq v_1(t)$, alors

$$\alpha(t) < x(t),\ \forall t \in (t_1, t_2).$$

C'est une contradiction, donc

$$\alpha(t) \leq x(t), \quad \forall t \in J.$$

Pour prouver que $x(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in J$, c'est similaire.
On remarque que le problème (4.3)-(4.4) possède une solution dans $[\alpha, \beta]$ et que toute solution de (4.3)-(4.4) est une solution de (4.1)-(4.2). On remarque que

$$\alpha(0) \leq x(0) - L(\bar{x}(0), \bar{x}(t)) \leq \beta(0).$$

Notons qu'on peut montrer que

$$\alpha(T) \leq x(T) \leq \beta(T).$$

On suppose que $x(0) - L(\bar{x}(0), \bar{x}(t)) < \alpha(0)$, donc $x(0) = \alpha(0)$ et

$$x(0) - L(\alpha(0), \bar{x}(t)) < \alpha(0).$$

Puisque L est croissante par rapport à x, on a

$$\alpha(0) \leq \alpha(0) - L(\alpha(0), \alpha(T)) \leq \alpha(0) - L(\alpha(0), \bar{x}(t)) < \alpha(0)$$

c'est une contradiction avec le fait que α est une sous solution du problème (4.1)-(4.2).
Pour prouver que

$$x(0) - L(\tau(0), \tau(T)) \leq \beta(0,)$$

c'est similaire. Alors x est une solution de (4.1)-(4.2).

4.2.2 Inclusions différentielles du second ordre

On considère le problème

$$x''(t) \in F(t, x(t)) \text{ p.p. } t \in J = [0, T], \tag{4.5}$$

$$x(0) = x(T), \tag{4.6}$$

$$x'(0) = x'(T), \tag{4.7}$$

où $F : J \times \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$ est une application multivoque à valeurs compactes et convexes.

Définition 4.2.3 *Une fonction* $x \in W^{2,1}(J,\mathbb{R})$ *est dite solution de (4.5)-(4.6) s'il existe une fonction* $v \in L^1(J,\mathbb{R})$ *telle que* $v(t) \in F(t,x(t))$ *p.p.* $t \in J$, $x''(t) = v(t)$ *p.p.* $t \in J$, $x(0) = x(T)$ *et* $x'(0) = x'(T)$.

Définition 4.2.4 *Une fonction* $\alpha \in W^{2,1}(J,\mathbb{R})$ *est dite sous solution de (4.5)-(4.6) s'il existe* $v_1 \in L^1(J,\mathbb{R})$ *telle que* $v_1(t) \in F(t,\alpha(t))$ *p.p.* $t \in J$, $\alpha''(t) \geq v_1(t)$ *p.p.* $t \in J$. $\alpha(0) = \alpha(T)$ *et* $\alpha'(0) \geq \alpha'(T)$.
-Une fonction $\beta \in W^{2,1}(J,\mathbb{R})$ *est dite sur solution de(4.5)-(4.6) s'il existe* $v_2 \in L^1(J,\mathbb{R})$ *telle que* $v_2(t) \in F(t,\beta(t))$ *p.p.* $t \in J$. $\beta''(t) \leq v_2(t)$ *p.p.* $t \in J$. $\beta(0) = \beta(T)$ *et* $\beta'(0) \leq \beta'(T)$.

Théorème 4.2.2 *On suppose que* $F : J \times \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$ *est une application multivoque,* L^1*-Carathéodory et qu'on a l'hypothèse suivante*

Il existe $\alpha,\ \beta \in W^{2,1}(J,\mathbb{R})$ *sous et sur solutions de(4.5)-(4.6) telles que* $\alpha \leq \beta$.

Alors le problème (4.5)-(4.6) possède au moins une solution $x \in W^{2,1}$ *telle que*

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in J.$$

Preuve : On considère le problème modifié suivant :

$$x''(t) - x(t) \in F_1(t,x(t)) \text{ p.p. } t \in J = [0,T], \tag{4.8}$$

$$x(0) = x(T), \tag{4.9}$$

$$x'(0) = x'(T), \tag{4.10}$$

où

$$F_1(t,x) = F(t,\tau(x(t))) - \tau(x(t))$$

et

$$\tau : \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$$

la fonction de troncature définie dans le Chapitre 3.

Remarque 4.2.4 *Notons que* F_1 *est* L^1*-Carathéodory à valeurs compactes et convexes et il existe* $\phi \in L^1(J,\mathbb{R}_+)$ *telle que*

$$\|F_1(t,x(t))\| \leq \phi(t) + \max(\sup_{t\in J}|\alpha(t)|, \sup_{t\in J}|\beta(t)|) \quad p.p.\ t \in J,\ \forall x \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R}).$$

Il est clair qu'une solution de (4.8)-(4.10) est un point fixe de l'opérateur
$N : \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) \longrightarrow 2^{\mathcal{C}(J,\mathbb{R})}$ *défini par*

$$N(x) = \{h \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) : h(t) = \int_0^T G(t,s)[v(s) - (\tau x)(s)]ds : \quad v \in \tilde{S}_{F,x}\},$$

où $G(t,s)$ est la fonction de Green correspondante au problème

$$\begin{cases} x'' - x = g(t), & t \in J = [0,T], \\ x(0) = x(T), \ x'(0) = x'(T), \end{cases}$$

$$\tilde{S}_{F,x} = \{v \in S_{F,\tau x} : v(t) \leq v_1(t) \ p.p. \ t \in A_1 \quad et \quad v(t) \geq v_2(t) \ p.p \ t \in A_2\},$$
$$S_{F,\tau x} = \{v \in L^1(J,\mathrm{I\!R}) : v(t) \in F(t,(\tau x)(t)) \ p.p \ t \in J\},$$
$$A_1 = \{t \in J : y(t) < \alpha(t) \leq \beta(t)\},$$
$$A_2 = \{t \in J : \alpha(t) \leq \beta(t) \leq x(t)\},$$
$$A_3 = \{t \in J : \alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)\}.$$

Remarque 4.2.5 *i) Pour tout $x \in \mathcal{C}(J,\mathrm{I\!R})$, l'ensemble $S_{F,x} \neq \phi$ (Lasota and Opial) ii) Pour tout $x \in \mathcal{C}(J,\mathrm{I\!R})$, l'ensemble $\tilde{S}_{F,x} \neq \phi$.*

On montre que N possède un point fixe.

Etape 1 : Il est clair que N est à valeurs convexes et complètement continu.

Etape 2 : N possède un graphe fermé.

Soient $x_n \longrightarrow x_*$, $\ h_n \in N(x_n)$ *et* $h_n \longrightarrow h_*$. On doit prouver que $h_* \in N(x_*)$. Soit $h_n \in N(x_n)$, donc il existe $v_n \in \tilde{S}_{F,x_n}$ telle que

$$h_n(t) = \int_0^T G(t,s)[v_n(s) - (\tau x_n)(s)]ds, t \in J.$$

On montre qu'il existe $v^* \in \tilde{S}_{F,x_R}$ telle que

$$h_*(t) = \int_0^T G(t,s)[v_*(s) - (\tau x_*)(s)]ds, \ t \in J.$$

Puisque $x_n \longrightarrow x_*$ et τ est une fonction continue, on a

$$\|(h_n + \int_0^T G(t,s)(\tau x_n)(s)ds) - (h_* + \int_0^T G(t,s)(\tau y_*)(s)ds)\|_\infty \longrightarrow 0, n \to +\infty.$$

Considérons l'opérateur : $\ \Gamma : L^1(J,\mathrm{I\!R}) \longrightarrow \mathcal{C}(J,\mathrm{I\!R})$ défini par

$$\Gamma(v)(t) = \int_0^T G(t,s)v(s)ds.$$

D'après le Lemme 1.3.2,$\Gamma \circ \tilde{S}_F$ a un graphe fermé, donc

$$(h_n(t) + \int_0^T G(t,s)(\tau x_n)(s)ds) \in F(\tilde{S}_{F,x_n}).$$

Puisque $x_n \longrightarrow x_*$ et D'après le Lemme 1.3.1

$$h_*(t) + \int_0^T G(t,s)(\tau x_*)(s)ds = \int_0^T v_*(s)ds, \text{ pour } v_* \in \tilde{S}_{F,x_n}.$$

Alors N est complètement continue, s.c.s et à valeurs convexes et fermées

Etape 3 : Montrons que l'ensemble

$$M = \{x \in \mathcal{C}(J, \mathrm{I\!R}) : \lambda x \in N(x), \text{ pour } \lambda > 1\}$$

est un ensemble borné .

Soit $\lambda x \in N(x),\ \lambda > 1$, il existe $v \in \tilde{S}_{F,x}$ telle que

$$x(t) = \lambda^{-1} \int_0^T G(t,s)[v(s) - (\tau x)(s)]ds, \ t \in J.$$

$$|x(t)| \leq |G(t,s)| \int_0^T [|v(s)| + |(\tau x)(s)|]ds, \ t \in J.$$

D'où

$$\|x\|_\infty \leq |G(t,s)|[\|\phi\|_{L^1} + T\max(\sup_{t\in J}|\alpha(t)|, \sup_{t\in J}|\beta(t)|).$$

Donc, M est borné. D'après le Lemme 1.3.3, N possède un point fixe x qui est solution du problème (4.8)-(4.10).

Etape 4 : On montre que la solution x du problème (4.8)-(4.10) satisfait

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in J.$$

Soit x une solution de (4.8)-(4.10), on montre que $\alpha(t) \leq x(t), \forall t \in J$. Raisonnant par l'absurde, on suppose que $x - \alpha$ atteint son minimum négatif dans J en t_0

$$(x - \alpha)(t_0) = min\{x(t) - \alpha(t) : t \in J\} < 0.$$

i) Si $t_0 \in (0,T)$, alors il existe $t_0^* \in (t_0, T)$ tel que

$$x(t) - \alpha(t) < 0, \ \forall t \in (t_0, t_0^*).$$

D'après la définition de τ, il existe $v \in L^1(J, \mathrm{I\!R})$ avec $v(t) \leq v_1(t),\ \ p.p.\ \ t \in (t_0, t_0^*)$ et

$$v(t) \in F(t, \alpha(t)), \quad p.p. \ \ t \in (t_0, t_0^*).$$

Puisque $x'(t_0) - \alpha'(t_0) = 0$, et comme α est une sous solution de$(4.5) - (4.7)$, on obtient

$$\begin{aligned} x'(t) - \alpha'(t) &= \int_{t_0}^t (x''(s) - \alpha''(s))ds, \ \forall t \in (t_0, t_0^*) \\ &\leq \int_{t_0}^t [v(s) + x(s) - \alpha(s) - v_1(s)]ds \\ &< 0. \end{aligned}$$

Donc $x(t_0) - \alpha(t_0)$ est pas un minimum à $x - \alpha$. C'est une contradiction.
ii)Si $min\{x(t) - \alpha(t) : t \in J\} = x(0) - \alpha(0) = x(T) - \alpha(T) < 0$.

$$x'(0) - \alpha'(0) \geq 0 \geq x'(T) - \alpha'(T).$$

Puisque α est une sous solution de (4.5)-(4.7) :

$$x'(0) - \alpha'(0) \leq x'(T) - \alpha'(T).$$

Puisque $x'(0) - \alpha'(0) = 0$ et pour $t > 0$ petit.

$$\begin{aligned} x'(t) - \alpha'(t) &= \int_0^t (x''(s) - \alpha''(s))ds \\ &\leq \int_0^t [v(s) + x(s) - \alpha(s) - v_1(s)]ds \\ &< 0 \quad . \end{aligned}$$

C'est une contradiction. Pour prouver que

$$x(t) \leq \beta(t), \ \forall t \in J,$$

c'est similaire. Donc la solution x de (4.8)-(4.10) n'est que la solution du problème (4.5)-(4.7).

4.3 Inclusions différentielles avec second membre non convexe

4.3.1 Inclusions différentielles du premier ordre avec conditions initiales

Dans cette partie on va traiter le problème d'existence de solutions pour des inclusions différentielles où le second membre multivoque et à valeurs non convexes. On considère le problème

$$x'(t) \in F(t, x(t)) \ , \ t \in J = [0, T], \tag{4.11}$$

$$x(0) = x_0. \tag{4.12}$$

On a le théorème suivant :

Théorème 4.3.1 *Si les conditions*

(H_1) $F : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbf{P}_{cp}(\mathbb{R})$ *a la propriété que pour chaque* $x \in \mathbb{R}$
$F(., x) : [0, T] \to \mathbf{P}_{cp}(\mathbb{R})$ *est mesurable ;*

(H_2) *il existe* $l \in L^1([0,T], \mathbb{R})$ *tel que*

$$H_d(F(t,x), F(t,\bar{x})) \leq l(t)|x - \bar{x}| \ \forall t \in [0,T] \quad et \quad x, \bar{x} \in \mathbb{R}$$

et

$$d(0, F(t,0) \leq l(t), \quad \forall t \in J,$$

sont satisfaites et si $\int_0^T l(t)dt < 1$, *alors le problème (4.11)-(4.12) possède au moins une solution* $x(t), \quad t \in [0,T]$.

On applique le Théorème du point fixe de Covitz-Nadler [27]1.3.5.

Preuve : On considère l'opérateur $N : \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) \to 2^{\mathcal{C}(J,\mathbb{R})}$ défini par

$$N(x) = \{h \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) : h(t) = x_0 + \int_0^t v(s)ds, \quad v \in S_{F,x}\}.$$

Il est clair que les points fixes de N sont les solutions du problème (4.11)-(4.12). D'après (H_1), F a une sélection mesurable [26]. On vérifie que N satisfait les conditions du Lemme 1.3.5.

Etape 1 : On montre que pour chaque $x \in \mathcal{C}(J, E)$, on a $N(x) \in \mathbf{P}_{cp}(\mathcal{C}(J, \mathbb{R}))$.

Soit $(x_n)_{n \geq 0} \in N(x)$, telle que $x_n \to \tilde{x}$ dans $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$. Alors $\tilde{x} \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ et il existe $g_n \in S_{F,x}$ telle que pour chaque $t \in J$,

$$x_n = x_0 + \int_0^t g_n(s)ds.$$

En utilisant le fait que F est à valeurs compactes et la deuxième partie de (H_2), nous pouvons montrer en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (on pourra passer aux sous suite si c'est nécessaire) que g_n converge dans L^1 vers un certain $g \in S_{F,x}$. Ce qui veut dire que $N(x)$ est fermé.

Etape 2 : On montre qu'il existe $0 \leq \gamma < 1$ tel que

$$H_d(N(x), N(\bar{x})) \leq \gamma \|x - \bar{x}\|, \quad pour \quad tous \quad x, \bar{x} \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}).$$

Soit $x, \bar{x}$ et $h_1 \in N(x)$, donc il existe $v_1(t) \in F(t, x(t))$ telle que

$$\forall t \in J, h_1(t) = x_0 + \int_0^t v_1(s)ds,$$

D'après (H_2), il suit que

$$H_d(F(t,x), F(t,\bar{x})) \leq l(t)\|x - \bar{x}\|.$$

Donc, il existe $\omega \in F(t, \bar{x}))$ telle que

$$|v_1(t) - \omega| \leq l(t)\|x(t) - \bar{x}(t)\|, t \in J.$$

On considère : $U : J \to P(\mathbb{R})$

$$U(t) = \{\omega \in \mathbb{R} : |v_1(t) - \omega| \leq l(t)\|x - \bar{x}\|\}.$$

D'après un résultat de Castaing et Valadier [26], l'opérateur multivoque $V(t) = U(t) \cap F(t, (\bar{x}(t)))$ est mesurable, il existe donc une sélection mesurable v_2 de V telle que $v_2(t) \in F(t, \bar{x}(t))$ et

$$|v_1(t) - v_2(t)| \leq l(t)\|x(t) - \bar{x}(t)\| \quad t \in J.$$

Pour chaque $t \in J$, on définit

$$h_2(t) = x_0 + \int_0^t v_2(s)ds.$$

Alors pour $t \in J$, on a

$$|h_1(t) - h_2(t)| \leq \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|ds,$$

$$|h_1(t) - h_2(t)| \leq \int_0^t l(s)\|x(s) - \bar{x}(s)\|_\infty ds.$$

Donc

$$\|h_1 - h_2\|_\infty \leq \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|ds,$$

$$|h_1(t) - h_2(t)| \leq \int_0^t l(s)ds\|x(s) - \bar{x}(s)\|_\infty.$$

Par une relation analogue, obtenue en interchangeant les rôles de x et $\bar{x}$, il suit que

$$H_d(N(x), N(\bar{x})) \leq \|l\|_{L^1}\|x(t) - \bar{x}(t)\|_\infty.$$

Donc N est une contraction et D'après le Lemme 1.3.5, N possède un point fixe x, qui est solution du problème (4.11)-(4.12).

On utilise maintenant le théorème du point fixe de Schaefer le Théorème 1.2.1 combiné avec le théorème de sélection de Bressan et Colombo pour les applications s.c.i à valeurs fermées décomposables le Lemme 1.3.6. On utilisera les conditions suivantes :

(A_1) $F : [0, T] \times \mathbb{R} \to P_{cp}(\mathbb{R})$ est une application multivoque à valeurs non vide, compactes telle que

$a)$ $(t, x) \to F(t, x)$ est $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$ mesurable ;

b) $x \mapsto F(t,x)$ est s.c.i p.p. $t \in [0,T]$.

(A_2) pour chaque $q > 0$, il existe une fonction $h_q \in L^1([0,T]), \mathbb{R}_+$ tel que

$$\|F(t,x)\| = \sup\{|v| : v \in F(t,x)\} \leq h_q(t), \quad p.p. \;\; t \in [0,T] \;\; avec \;\; |x| \leq q.$$

On a besoin du lemme suivant :

Lemme 4.3.1 *[38] Soit* $F : [0,T] \times \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ *une application multivoque à valeurs non vide et compactes. Si* (A_1) *et* (A_2) *sont satisfaites. Alors* F *est de type s.c.i.*

Le résultat suivant donne des conditions suffisantes pour l'existence des solutions au problème (4.11)-(4.12).

Théorème 4.3.2 *On suppose que les hypothéses* $(A_1), (A_2)$ *et*

(A_3) *Il existe* $M \in L^1(J, \mathbb{R})$ *et* $\psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *continue et croissante tel que*

$$\|F(t,x)\| \leq M(t)\psi(|x|), \;\; t \in J, \;\; x \in \mathbb{R}$$

et

$$\int_0^T M(t)dt < \int_{|x_0|}^{\infty} \frac{ds}{\psi(s)},$$

sont satisfaites. Alors le problème (4.11)-(4.12) possède au moins une solution dans $[0,T]$.

Preuve : D'après $(A_1), (A_2)$ et Lemme 4.3.1, on a, F est de type s.c.i, donc D'après le Lemme 1.3.6,il existe une fonction continue $f : \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) \to L^1([0,T],\mathbb{R})$ telle que $f(x) \in \mathcal{F}(x), \;\; \forall x \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$. On considère le problème

$$x'(t) = f(t, x(t)) \;\; t \in J = [0,T], \tag{4.13}$$

$$x(0) = x_0. \tag{4.14}$$

Il est clair que si x est une solution de (4.13)-(4.14), alors x est solution de (4.11)-(4.12). Nous transformons le problème (4.13)-(4.14) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $N : \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ défini par

$$N(x)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

On montre facilement que N est continu et complètement continue. Montrons maintenant que l'ensemble

$$\mathcal{E}(N) := \{x \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) : x = \lambda N(x), \;\; \text{pour un certains} \;\; 0 < \lambda < 1\}$$

est borné.

Soit $x \in \mathcal{E}(N)$, alors $x = \lambda N(x)$, pour un certain $0 < \lambda < 1$. Pour tout $t \in J$, on a

$$x(t) = \lambda x_0 + \lambda \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

D'après (A_3), on a

$$|x(t)| \leq |x_0| + \int_0^t M(s)\psi(|y(s)|ds.$$

Considèrons la fonction

$$\mu(t) = \sup\{|x(s)| : 0 \leq s \leq t\} \quad \text{pour} \quad t \in J.$$

Puisque ψ est croissante on a

$$\mu(t) \leq |x_0| + \int_0^t M(s)\psi(\mu(s))ds.$$

On pose

$$v(t) = |x_0| + \int_0^t M(s)\psi(\mu(s))ds.$$

Alors

$$v(0) = |x_0|, \quad v'(t) = M(t)\psi(\mu(t)) \quad t \in J.$$

Donc

$$M(t)\mu(t) \leq M(t)\psi(\mu(t)) \leq M(t)\psi(v(t)) \Longrightarrow v'(t) \leq M(t)\psi(v(t)).$$

D'après l'intégration on obtient

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{du}{\psi(u)} \leq \int_0^t M(s)ds \leq \int_0^T M(t)dt < \int_{|x_0|}^{\infty} \frac{du}{\psi(u)}.$$

D' où il existe $k > 0$ telle que $\|x\|_\infty \leq k$ et $\mathcal{E}(N)$ est borné. D'après le théorème de Schaefer le Théorème 1.2.1, N possède un point fixe x, qui est solution de (4.11)-(4.12).

4.3.2 Inclusions différentielles du premier ordre avec conditions périodiques

On considère le problème :

$$x'(t) - x(t) \in F(t, x(t)), t \in J = [0, T], \tag{4.15}$$

$$x(0) = x(T). \tag{4.16}$$

On donnera deux résultats pour le problème (4.15)-(4.16). Le premier est basé sur le théorème du point fixe de Covitz-Nadler pour les applications multivoques contractantes (le Lemme 1.3.5). Le second est basé sur le théorème du point fixe de Schaefer (Théorème 1.2.1) combiné avec le théorème de sélection de Bressan et Colombo (le Lemme 1.3.6).

Théorème 4.3.3 *On suppose que les conditions*

(H_1) *$F : [0,T]\times \mathbb{R} \to P_{cp}(\mathbb{R})$ à la propriété que pour chaque $x\in\mathbb{R}$; $F(.,x) : [0,T]\to P_{cp}(\mathbb{R})$ est mesurable.*

(H_2) *il existe $l \in L^1([0,T],\mathbb{R})$ tel que $H_d(F(t,x),F(t,\bar{x})) \leq l|x-\bar{x}|$ $\forall t\in[0,T]$ et $x,\ \ \tilde{x}\in\mathbb{R}$ et $d(0,F(t,0)\leq l(t)$, $\forall t\in J$.*

(H_3) *$M_0 = \sup|g(t,s)|,\ \ l^* = \displaystyle\int_0^T |l(s)|ds$ et $M_0 l^* < 1$, sont satisfaites.*

Alors le problème (4.15)-(4.16) possède au moins une solution.

Preuve : Soit l'opérateur $N : \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) \to 2^{C(J,\mathbb{R})}$ défini par

$$N(x) = \{h\in\mathcal{C}(J,\mathbb{R}):\ h(t) = \int_0^T G(t,s)v(s)ds,\ v\in S_{F,x}\},$$

où G est la fonction de Green définie par

$$G(t,s) = (e^{-T}-1)^{-1}\begin{cases} e^{t-T-s}, & 0\leq s\leq t\leq T,\\ e^{t-s}, & 0\leq t< s\leq T.\end{cases}$$

Il est clair que les points fixes de N sont solutions de (4.15)-(4.16). En plus, D'après (H_1), F a une sélection mesurable (voir Théorème III [26]). On vérifie que N satisfait les conditions du Lemme 1.3.5

Etape1 : On pourra montrer de manière similaire que la section précédente que pour tout $x\in\mathbb{R},\ \ N(x)$ est un ensemble fermé dans $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$.

Etape 2 : On montre qu'il existe $0\leq\gamma<1$ tel que

$$H_d(F(t,x),F(t,\bar{x}))\leq \gamma\|x-\bar{x}\|\ \ \textit{pour}\ \ \textit{chaque}\ \ x,\bar{x}\in\mathcal{C}(J,\mathbb{R}).$$

Soit $x,\bar{x}\in\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ et $h_1\in N(x)$. Alors il existe $v_1\in F(t,x(t))$ telle que

$$\forall t\in J,\ h_1(t) = \int_0^T G(t,s)v_1(s)ds.$$

D'après (H_2) il suit que $\forall t\in J$,

$$H_d(F(t,x(t)),F(t,\bar{x}(t)))\leq l(t)\|x(t)-\bar{x}(t)\|.$$

Donc, il existe $\omega \in F(t, \bar{x}(t))$ telle que

$$|v_1(t) - \omega| \leq l(t)\|x(t) - \bar{x}(t)\|, \quad \forall t \in J.$$

On considère : $U \to 2^{(\mathbb{R})}$ défini par

$$U(t) = \{\omega \in \mathbb{R} : \ |v_1(t) - \omega| \leq l(t)\|x(t) - \bar{x}(t)\|\}.$$

D'après un résultat de Castaing et Valadier (Proposition III.4 [26], l'opérateur multivoque $V(t) = U(t) \cap F(t, \bar{x}(t))$ est mesurable, il existe donc une sélection $v_2(t) \in V$ telle que $v_2(t) \in F(t, \bar{x}(t))$ et

$$|v_1(t) - v_2(t)| \leq l(t)\|x(t) - \bar{x}(t)\|, \quad t \in J.$$

Pour chaque $t \in J$, on définit :

$$h_2(t) = \int_0^T G(t,s)v_2(s)ds.$$

Alors, pour $t \in J$, on a

$$|h_1(t) - h_2(t)| \leq \int_0^T G(t,s)|v_1(s) - v_2(s)|ds$$

$$\leq \int_0^T |G(t,s)|l(s)|x(s) - \bar{x}(s)|$$

$$\|h_1 - h_2\|_\infty \leq M_0 l^* \|x - \bar{x}\|_\infty.$$

On pose $\gamma = M_0 l^* < 1$. Par une relation analogue, obtenue en interchangeant les rôles de x et $\bar{x}$, il suit que

$$H_d(N(x), N(\bar{x})) \leq M_0 l^* \|x - \bar{x}\|_\infty.$$

Donc N est une contraction et alors D'après le Lemme 1.3.5, N possède un point fixe x qui est solution de (4.15)-(4.16).

On va utiliser les conditions suivantes :

(A_1) $F : [0,T] \times \mathbb{R} \to 2^{(\mathbb{R})}$ une application multivoque à valeurs compact et non vide tel que

a) $(t,u) \mapsto F(t,u)$ est $\mathcal{L} \otimes B$ mesurable.
b) $u \mapsto F(t,u)$ est s.c.i p.p. $t \in J$.

(A_2) Pour chaque $q > 0$, il existe une fonction $h_q \in L^1([0,T], \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\|F(t,x)\| := \sup\{|v| :\in F(t,x)\} \leq h_q(t) \ \text{ p.p. } \ t \in [0,T] \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{R} \ \text{ avec } \ |x| \leq q.$$

Théorème 4.3.4 *On suppose que les hypothéses* $(A_1), (A_2)$ *et*

(A_4) *Il existe* $M \in L^1(J, \mathbb{R})$ *telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \|F(t,x)\| = \sup\{|v| : v \in F(t,x)\} \leq M(t), \quad p.p. \;\; t \in J,$$

sont satisfaites. Alors le problème (4.15)-(4.16) possède au moins une solution x *sur* $[0, T]$.

Preuve : D'après $(A_1), (A_2)$ et le Lemme 4.3.1, F est de type s.c.i, alors D'après le Lemme 1.3.6,il existe une fonction continue $f : \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) \to L^1([0,T], \mathbb{R})$ telle que $f(x) \in \mathcal{F}(x), \; \forall x \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$. On considère le problème

$$x'(t) = f(x(t)) \quad \text{p.p.} \quad t \in J = [0, T] \tag{4.17}$$

$$x(0) = x(T). \tag{4.18}$$

Il est clair que si x est solution de (4.17)-(4.18), alors x est solution de (4.15)-(4.16). On considère l'opérateur $N : \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ défini par

$$N(x(t)) = \int_0^T G(t,s) f(x(s)) ds.$$

On montre facilement que l'opérateur N est continu , complètement continu et que l'ensemble.

$$\mathcal{E}(N) = \{x \in C(J, \mathbb{R}) : x = \lambda N(x), \quad \text{pour un certain} \quad 0 < \lambda < 1\}$$

est borné. Par suite le problème (4.15)-(4.16) possède au moins une solution.

Chapitre 5

Inclusions différentielles impulsives

5.1 Inclusions différentielles impulsives du premier ordre avec second membre convexe

5.1.1 Inclusions différentielles impulsives avec conditions initiales

Dans cette partie, on s'intéresse à l'existence des solutions du problème

$$x' \in F(t,x),\ t \in J := [0,T],\ t \neq t_k,\ k = 1,\dots,m, \tag{5.1}$$

$$x(t_k^+) = I_k(x(t_k^-)),\ k = 1,\dots,m, \tag{5.2}$$

$$x(0) = a, \tag{5.3}$$

où $F : J \times \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ est une application multivoque à valeurs fermées et convexes,
$0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T,\quad I_k \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ k = 1,\dots,m.$
Ce problème à été traité par plusieurs auteurs dans le cas où F est une fonction univoque par la méthode des sous et sur solutions, voir [61, 76, 74, 25, 42, 52, 63, 64, 65, 66]. Le cas où F est une fonction multivoque , il à été traité par la méthode de transversalité topologique de Granas dans [34, 44, 46], et par l'alternative non-linéaire de Leary-Shauder dans [42]. Pour plus de détails sur les inclusions différentielles voir [29]. De notre part, nous allons utiliser la méthode des sous et sur solutions pour résoudre le problème (5.1)-(5.3). Pour cela, on fera appel au théorème de Martelli [68]. On donnera d'abord quelques définitions et notations :

$$\Omega = \{x : [0,T] \to \mathbb{R},\ x_k \in \mathcal{C}(J_k,\mathbb{R}),\ k = 0,\dots,m$$

$$\text{il existe } x(t_k^-) \text{ et } x(t_k^+) \text{ telle que } x(t_k^-) = x(t_k),\ k = 0,\dots,m\}.$$

Ω est un espace de Banach muni de la norme

$$\|x\|_{\Omega} = \max\{\|x_k\|_{\infty} \ \ , k = 0, \ldots, m\},$$

où x_k désigne la restriction de x sur $J_k = [t_k, t_{k+1}],\ k = 0, \ldots, m$.

$$\Omega^1 = \{x : [0, T] \to \mathbb{R},\ x_k \in AC(J_k, \mathbb{R}),\ k = 0, \ldots, m$$

$$\text{il existe } x(t_k^-) \text{ et } x(t_k^+),\ k = 0, \ldots, m \text{ telle que } x(t_k^-) = x(t_k)\}.$$

Ω^1 est un espace de Banach muni de la norme

$$\|x\|_{\Omega^1} = \max\{\|x_k\|_{AC}, \quad k = 0, ..., m\}.$$

Définition 5.1.1 *$x \in \Omega^1$ est dite solution du problème (5.1)-(5.3) s'il existe une fonction $v \in L^1(J, \mathbb{R})$ telle que $v(t) \in F(t, x(t))$ p.p. $t \in J$,*

$$x'(t) = v(t) \quad p.p. \quad t \in J - \{t_1, ..., t_m\},$$

$$x(t_k^+) = I_k(x(t_k^-)), \quad k = 0, ..., m,$$

$$x(0) = a.$$

Définition 5.1.2 *$\alpha \in \Omega^1$ est dite sous solution du problème (5.1)-(5.3) s'il existe une fonction $v_1 \in L^1(J, \mathbb{R})$ telle que $v_1(t) \in F(t, \alpha(t))$ p.p. $t \in J$,*

$$\alpha'(t) \leq v_1(t) \quad p.p. \quad t \in J - \{t_1, ..., t_m\},$$

$$\alpha(t_k^+) \leq I_k(\alpha(t_k^-)), \quad k = 0, ..., m,$$

$$\alpha(0) \leq a.$$

Définition 5.1.3 *$\beta \in \Omega^1$ est dite sur solution du problème (5.1)-(5.3) s'il existe une fonction $v_2 \in L^1(J, \mathbb{R})$ telle que $v_2(t) \in F(t, \beta(t))$ p.p. $t \in J$,*

$$\beta'(t) \geq v_2(t) \quad p.p. \quad t \in J - \{t_1, ..., t_m\},$$

$$\beta(t_k^+) \geq J_k(\beta(t_k^-)), \quad k = 0, ..., m,$$

$$\beta(0) \geq a.$$

On a les résultats suivants :

Théorème 5.1.1 *Soit $F : J \times \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ une application multivoque L^1-Carathéodory. On suppose que les conditions*

(H$_1$) *Il existe α et β dans Ω^1 sous et sur solutions respectivement du problème (5.1)-(5.3) telle que $\alpha \leq \beta$,*

(H$_2$) $\alpha(t_k^+) \leq \min\limits_{[\alpha(t_k^-),\beta(t_k^-)]} I_k(x) \leq \max\limits_{[\alpha(t_k^-),\beta(t_k^-)]} I_k(x) \leq \beta(t_k^+), \quad k = 1, ..., m,$
sont satisfaites

Alors le problème (5.1)-(5.3) possède au moins une solution $x \in \Omega^1$ vérifiant

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t) \quad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad t \in J.$$

Preuve : On procède sur chaque intervalle $J_k = [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, ..., m$. On considère le problème (5.1)-(5.3) sur $J_0 = [0, t_1]$, c'est à dire le problème

$$x' \in F(t, x) \quad , t \in J_0, \tag{5.4}$$

$$x(0) = a. \tag{5.5}$$

On transforme le problème (5.4)-(5.5) en un problème de point fixe. Soit le problème modifié suivant :

$$x'(t) \in F_1(t, x(t)) \quad , t \in J_0, \tag{5.6}$$

$$x(0) = a, \tag{5.7}$$

où $F_1(t, x(t)) = F(t, (\tau x)(t))$. Soit $N : \mathcal{C}(J_0, \mathbb{R}) \longrightarrow 2^{\mathcal{C}(J_0,\mathbb{R})}$ l'opérateur multivoque défini par

$$Nx = \{h \in \mathcal{C}(J_0, \mathbb{R}) : h(t) = a + \int_0^t v(s)ds : v \in \tilde{S}_{F,\tau x}\}$$

où

$$\tilde{S}_{F,x} = \{v \in S_{F,\tau x} : v(t) \geq v_1(t) \text{ p.p. } A_1 \text{ et } v(t) \leq v_2(t) \text{ p.p. } A_2\},$$
$$S_{F,\tau x} = \{v \in L^1(J_0, \mathbb{R}) : v(t) \in F(t, (\tau x)(t)) \text{ p.p. } t \in J_0\},$$
$$A_1 = \{t \in J_0 : x(t) < \alpha(t) \leq \beta(t)\}, A_2 = \{t \in J_0 : \alpha(t) \leq \beta(t) < x(t)\}.$$

Remarque 5.1.1 *Pour tout $x \in \mathcal{C}(J_0, \mathbb{R})$, l'ensemble $S_{F,x}$ est non vide (voir [58]).*

Remarque 5.1.2 *Tous les points fixes de N sont les solutions du problème (5.6)-(5.7).*

Nous allons montrer que N est complètement continu, semi- continu supérieurement et à valeurs convexes et fermées.

Etape 1 : N est à valeurs convexes.

Soit $x \in \mathcal{C}(J_0, \mathrm{I\!R})$, $h, \quad et \quad \bar{h} \in N(x)$. Il existe alors $v \in \tilde{S}_{F,x}$ et $\bar{v} \in \tilde{S}_{F,x}$ telle que

$$h(t) = a + \int_0^t v(s)ds$$

et

$$\bar{h}(t) = a + \int_0^t \bar{v}(s)ds.$$

Soit $0 \leq l \leq 1$, alors pour tout $t \in J_0$, on a

$$[lh + (1-l)\bar{h}] = a + \int_0^t [lv(s) + (1-l)\bar{v}(s)]ds.$$

Comme l'ensemble $\tilde{S}_{F,x}$ est convexe (car F est à valeurs convexes), on a

$$lh + (1-l)\bar{h} \in N(x).$$

D'où, N est à valeurs convexes.

Etape 2 : N est borné.

Soit $B_r = \{x \in \mathcal{C}(J_0, \mathrm{I\!R}) : \|x\|_\infty \leq r\}$ un ensemble borné dans $\mathcal{C}(J_0, \mathrm{I\!R})$ et soit $x \in B_r$. Alors pour tout $h \in N(x)$, il existe $v \in \tilde{S}_{F,x}$ telle que

$$h(t) = a + \int_0^t v(s)ds \ , \ t \in J_0.$$

D'où

$$\begin{aligned} |h(t)| &\leq |a| + \int_0^t |v(s)|ds \\ &\leq |a| + \int_0^t \|\phi_r(s)\|ds. \end{aligned}$$

Ce qui montre que N est borné.

Etape 3 : N transforme tout borné en un ensemble équicontinu.

Soit $B_r = \{x \in \mathcal{C}(J_0, \mathrm{I\!R}) : \|x\|_\infty \leq r\}$ et $h \in N(x)$, alors il existe $v \in \tilde{S}_{F,x}$ telle que

$$h(t) = a + \int_0^t v(s)ds \ , \ t \in J_0.$$

Soit $u_1, u_2 \in [0, t_1]$, $u_1 < u_2$, alors pour tout $h \in N(B_r)$ on a

$$\begin{aligned} |h(u_1) - h(u_2)| &\leq \int_{u_1}^{u_2} |v(s)| ds \\ &\leq \int_{u_1}^{u_2} \phi_r(s) ds \to 0 \text{ lorsque } u_1 \to u_2. \end{aligned}$$

Donc D'après le théorème d'Arzela-Ascoli (Théorème 1.2.2) l'opérateur N est complètement continu. D'où N est condensé.

Etape 4 : N est semi-continu-supérieurement.

Comme N est complètement continu, il suffit de montrer D'après le Lemme 1.3.1,que N est à graphe fermé. Soit la suite $(x_n) \in \mathcal{C}(J_0, \mathrm{I\!R})$, $x_n \to x_*$ et soit $(h_n) \in N(x_n)$ une suite telle que $h_n \to h_*$, on va montrer que $h_* \in N(x_*)$. $h_n \in N(x_n)$ signifie qu'il existe $v_n \in \tilde{S}_{F,x_n}$ telle que

$$h_n(t) = a + \int_0^t v_n(s) ds.$$

Il faut montrer qu'il existe $v_* \in \tilde{S}_{F,x_*}$ telle que

$$h_*(t) = a + \int_0^t v_*(s) ds.$$

Clairement on a

$$\|(h_n - a) - (h_* - a)\|_\infty \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

Soit l'opérateur linéaire continu : $\Gamma : L^1(J_0, \mathrm{I\!R}) \longrightarrow \mathcal{C}(J_0, \mathrm{I\!R})$ défini par

$$(\Gamma v)(t) = \int_0^t v(s) ds.$$

D'après le Lemme 1.3.2,l'opérateur $\Gamma \circ \tilde{S}_F$ est de graphe fermé. Comme $(h_n(t) - a) \in \Gamma(\tilde{S}_{F,x_n})$, $x_n \to x_*$ et $h_n - a \to h_* - a$, alors il existe $v_{* \in \tilde{S}_{F,x_*}}$ telle que

$$h_*(t) = a + \int_0^t v_*(s) ds.$$

D'où, $h_* \in N(x_*)$ et par suite N est de graphe fermé .

Etape 5 : Montrons que l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{C}(J_0, \mathrm{I\!R}) : \lambda x \in N(x) \text{ pour un certain } \lambda > 1\}$$

est borné.

Soit $\lambda x \in N(x)$ pour un certain $\lambda > 1$, alors il existe $v \in \tilde{S}_{F,x}$ telle que

$$x(t) = \lambda^{-1}(a + \int_0^t v(s)ds) \text{ pour tout } \; t \in J_0.$$

On a alors

$$x(t) \leq |a| + \int_0^t |v(s)|ds\text{pour tout } t \; \in J_0.$$

D'après la définition de τ on a

$$\|x\|_\infty \leq |a| + \|\phi\|_{L^1} < \infty.$$

Le théorème de Martelli le Lemme 1.3.3 nous permet de conclure l'existence d'un point fixe x pour N qui est solution du problème (5.1)-(5.3).

Etape 6 : Montrons que

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t) \;\; pour \;\; tout \;\; t \in J_0.$$

Soit x une solution du problème (5.4)-(5.5) et montrons que $\alpha(t) \leq x(t)$ pour tout $t \in J_0$.

⊙ Supposons qu'il existe $e_1, e_2 \in J_0$ *tels que* $e_1 < e_2$, $x(e_1) = \alpha(e_1)$ et $x(t) < \alpha(e_1)$ pour tout $t \in (e_1, e_2)$.
D'après la définition de τ on a

$$x'(t) \in F(t, \alpha(t)) \;\; p.p. \;\; t \in (e_1, e_2).$$

Comme x est une solution du problème (5.4)-(5.5), il existe $v \in F(., \alpha(.))$ p.p. dans J_0 telle que $v(t) > v_1(t)$ p.p. dans (e_1, e_2) et $x'(t) = v(t)$ p.p. dans (e_1, e_2). En intégrant $x'(t) = v(t)$ sur (e_1, t) avec $t \in (e_1, e_2)$, on obtient

$$x(t) - x(e_1) = \int_{e_1}^t v(s)ds.$$

Comme α est sous solution de (5.1)-(5.3), on a

$$\alpha(t) - \alpha(e_1) \leq \int_{e_1}^t v(s)ds \;\; t \in (e_1, e_2).$$

Or $x(e_1) = \alpha(e_1)$ et $v(t) > v_1(t)$, on a alors

$$\alpha(t) > x(t) \;\; pour \;\; tout \;\; t \in (e_1, e_2).$$

Ce qui est une contradiction. D'où $\alpha(t) \leq x(t)$ pour tout $t \in J_0$.
⊙ De même on peut montrer que $x(t) \leq \beta(t)$ pour tout $t \in J_0$.

Puisque F et F_1 coïncident sur $[\alpha, \beta]$, alors x est une solution du problème original (5.1)-(5.2) sur J_0. On note cette solution par x_0.

On considère le problème (5.1)-(5.3) sur $J_1 = [t_1, t_2]$, c'est à dire le problème

$$x' \in F(t, x), \ t \in J_1, \tag{5.8}$$

$$x(t_1^+) = I_1(x_0(t_1^-)). \tag{5.9}$$

Soit le problème modifié suivant :

$$x' \in F_1(t, x), \ t \in J_1, \tag{5.10}$$

$$x(t_1^+) = I_1(x_0(t_1^-)), \tag{5.11}$$

où $F_1(t, x(t)) = F(t, (\tau x)(t))$. Soit $N : \mathcal{C}(J_1, \mathrm{I\!R}) \longrightarrow 2^{\mathcal{C}(J_1, \mathrm{I\!R})}$ l'opérateur multivoque défini par

$$(Nx) = \{h \in \mathcal{C}(J_1, \mathrm{I\!R}) : h(t) = I_1(x_0(t_1^-)) + \int_0^t v(s)ds : v \in \tilde{S}_{F.x}\}.$$

En utilisant le même raisonnement que précédamment, on peut montrer que N possède un point fixe. On va montrer que si x est une solution du problème (5.10)-(5.11) alors x vérifie

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad t \in J_1.$$

$\odot$ Supposons qu'il existe $e_3, e_4 \in J_1$, $e_3 < e_4$, tel que :$x(e_3) = \alpha(e_3)$,et pour tout $t \in (e_3, e_4)$, $x(t) < \alpha(t)$. D'où :

$$x(t) - x(e_3) = \int_{e_3}^t v(s)ds,$$

avec $v(.) \in F(t, \alpha(.))$ p .p $t \in (e_3, e_4)$ et $v(t) > v_1(t)$ p.p. $t \in (e_3, e_4)$. Comme α est une sous solution du problème (5.1)-(5.3) alors

$$\alpha(t) - \alpha(e_3) \leq \int_{e_3}^t v_1(s)ds \ , \ t \in (e_3, e_4).$$

Puisque $x(e_3) = \alpha(e_3)$, $v(t) > v_1(t)$ nous aurons

$$\alpha(t) > x(t) \text{ pour tout } t \in (e_3, e_4).$$

ce qui est une contradiction avec l'hypothèse, et par conséquent $\alpha(t) \leq x(t)$ pour tout $t \in J_1$. L'inegalité $x(t) \leq \beta(t)$ pour tout $t \in J_1$ se montre de la même manière.
Par conséquent x est une solution du problème (5.1)-(5.3) sur J_1. On note cette solution par x_1.

Par induction on construit la solution x_k du problème (5.1)-(5.3) sur $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 3, ..., m+1$. La solution x du problème (5.1)-(5.3) est définie donc par l'éxpression :

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t), & t \in [0, t_1] \\ x_1(t), & t \in (t_1, t_2] \\ \vdots & \\ x_m(t), & t \in (t_{m-1}, t_m] \\ x_{m+1}(t), & t \in (t_m, T]. \end{cases}$$

5.1.2 Inclusions différentielles impulsives du premier ordre avec conditions périodiques

Dans cette partie on s'intéresse à l'existence des solutions du problème :

$$x' \in F(t, x), \quad t \in J, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, ..., m, \tag{5.12}$$

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) = \Delta x|_{t=t_k} = I_k(x(t_k^-)), \quad k = 1, ..., m, \tag{5.13}$$

$$x(0) = x(T), \tag{5.14}$$

où $F : J \times \mathrm{IR} \to 2^{\mathrm{IR}}$ est une application multivoque à valeurs compactes et convexes, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = T$, $I_k \in \mathcal{C}(\mathrm{IR}, \mathrm{IR})$, $k = 1, ..., m$.

Nous allons utiliser la méthode des sous et sur solution pour résoudre le problème ci dessus. Dans le cas où F est une application univoque, cette méthode a été utilisée par plusieurs auteurs [25, 40, 52, 63, 64, 66, 74, 76]. Signalons aussi le travail de Benchohra et Ntouyas qui utilise cette méthode de sous et sur solutions pour résoudre des inclusions différentielles multivoques avec conditions périodiques [15].

Définition 5.1.4 *Une fonction $x \in \Omega^1$ est dite solution du problème (5.12)-(5.14) s'il existe une fonction $v \in L^1(J, \mathrm{IR})$ telle que $v(t) \in F(t, x(t))$ p.p. $t \in J$, $x'(t) = v(t)$ p.p. $t \in J - \{t_1, ..., t_m\}$, $\Delta x|t = t_k = I_k(x(t_k^-))$, $k = 1, ..., m$ et $x(0) = x(T)$.*

Définition 5.1.5 *Une fonction $\alpha \in \Omega^1$ est dite sous solution du problème (5.12)-(5.14) s'il existe une fonction $v_1 \in L^1(J, \mathrm{IR})$ telle que $v_1(t) \in F(t, \alpha(t))$, p.p. $t \in J$, $\alpha'(t) \leq v_1(t)$ p.p. $t \in J - \{t_1, ..., t_m\}$, $\Delta\alpha|_{t=t_k} \leq I_k(\alpha(t_k^-))$, $k = 1, ..., m$ et $\alpha(0) \leq \alpha(T)$.*
Une fonction $\beta \in \Omega^1$ est dite sur solution du problème (5.12)-(5.14) s'il existe une fonction $v_2 \in L^1(J, \mathrm{IR})$ telle que $v_2(t) \in F(t, \beta(t))$, p.p. $t \in J$, $\beta'(t) \geq v_2(t)$ p.p. $t \in J - \{t_1, ..., t_m\}, \Delta\beta|_{t=t_k} \geq I_k(\beta(t_k^-))$, $k = 1, ..., m$ et $\beta(0) \geq \beta(T)$.

Lemme 5.1.1 *Lemme 2.1 [70]. Soient* $g \in L^1(J, \mathbb{R})$ *et* $x \in \Omega^1$. x *est une solution du problème périodique :*

$$x'(t) + x(t) = g(t), \; t \in J, \; t \neq t_k, \; k = 1, ..., m, \tag{5.15}$$

$$\Delta x|_{t=t_k} = I_k(x(t_k^-)), \; k = 1, ..., m, \tag{5.16}$$

$$x(0) = x(T), \tag{5.17}$$

si et seulement si $x \in \Omega$ *est une solution de l'équation intégrale impulsive :*

$$x(t) = \int_0^T H(t,s)g(s)ds + \sum_{k=0}^{m} H(t,t_k)I_k(x(t_k)),$$

où

$$H(t,s) = (e^T - 1)^{-1} \begin{cases} e^{T+s-t}, & si\ 0 \leq s < t < T \\ e^{s-t}, & si\ 0 \leq t \leq s < T. \end{cases}$$

Théorème 5.1.2 *Soit* $F : J \times \mathbb{R} \to \mathbf{P}_{cp,c}(\mathbb{R})$ *une application multivoque* L^1*-Carathéodory. Supposons que les conditions*

(H3) *Il existe deux fonctions* α *et* β *dans* Ω^1 *sous et sur solutions du problème (5.12)-(5.14) telle que* $\alpha \leq \beta$.

(H4) $\Delta\alpha|_{t=t_k} \leq \min_{[\alpha(t_k^-),\beta(t_k^-)]} I_k(x) \leq \max_{[\alpha(t_k^-),\beta(t_k^-)]} I_k(x) \leq \Delta\beta|_{t=t_k}$, $k = 1, ..., m$, *sont satisfaites.*

Alors le problème (5.12)-(5.14) possède au moins une solution $x \in \Omega^1$ *vérifiant*

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t) \text{ pour tout } t \in J.$$

Preuve : On considère le problème modifié suivant :

$$x'(t) + x(t) \in F_1(t,x), \; t \in J, t \neq t_k, \; k = 1, ..., m, \tag{5.18}$$

$$\Delta x|_{t=t_k} = I_k(\tau x(t_k^-)), \; k = 1, ..., m, \tag{5.19}$$

$$x(0) = x(T), \tag{5.20}$$

où $F_1(t,x) = F(t,(\tau x)(t)) + (\tau x)(t)$ et $\tau : \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ est l'opérateur de troncature défini précedemment.

Remarque 5.1.3 ***i)*** $\Delta\alpha|_{t=t_k} \leq I_k((\tau x)(t_k^-)) \leq \Delta\beta|_{t=t_k}$ *pour tout* $x \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$, $k = 1, ..., m$.

ii) F_1 *est une application multivoque* L^1*-Carathéodory à valeurs compactes, convexes et fermées et il existe une fonction* $\phi \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ *telle que*

$$\|F_1(t,x(t))\| \leq \|\phi(t)\| + \max(\sup_{t\in J}|\alpha(t)|, \sup_{t\in J}|\beta(t)|) \text{ p.p. } t \in J \text{ et } x \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R}).$$

D'après le Lemme 1.3.5,les solutions du problème (5.12)-(5.14) sont les points fixes de l'opérateur : $N : \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) \to 2^{\mathcal{C}(J,\mathbb{R})}$ défini par :

$$N(x) = \Big\{ h \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) : h(t) \; = \int_0^T H(t,s)[v(s) + (\tau x)(s)]ds + \sum_{k=1}^{m} H(t, t_k) I_k((\tau x)(t_k)), v \in \tilde{S}_{F,x} \Big\}.$$

On va montrer que N possède un point fixe. Pour cela il faut montrer que N est complètement continu, s.c.s, à valeurs convexes et fermées.

Etape 1 : Il est clair que N est à valeurs convexes.

Etape 2 : N est complètement continu.

Soit $B_r = \{x \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) : \|x\|_\infty \leq r\}$ un ensemble borné dans $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ et soit $x \in B_r$. Alors pour tout $h \in N(x)$, il existe $v \in \tilde{S}_{F,x}$ telle que

$$h(t) = \int_0^T H(t,s)[v(s) + (\tau x)(s)]ds + \sum_{k=1}^{m} H(t,t_k) I_k((\tau x)(t_k)) \ , \ t \in J.$$

D'où

$$|h(t)| \leq \int_0^T \|H(t,s)\| |v(s) + (\tau x)(s)| ds + \sum_{k=1}^{m} \|H(t,t_k)\| |I_k((\tau x)(t_k))|,$$

$$|h(t)| \leq \max_{(t,s) \in J \times J} |H(t,s)| [\|\phi_r\|_{L^1} + T \max(r, \sup_{t \in J} |\alpha(t)|, \sup_{t \in J} |\beta(t)|)], + \sum_{k=1}^{m} \sup_{t \in J} |H(t,t_k)| \max(|\Delta\alpha|_{t=t_k}, \Delta\beta|_{t=t_k}) < +\infty.$$

De plus on a

$$\begin{aligned} |h'(t)| &\leq \int_0^T \|H'_t(t,s)\| |v(s) + (\tau x)(s)| ds + \sum_{k=1}^{m} \|H'_t(t,t_k)\| |I_k((\tau x)(t_k))| \\ &\leq \max_{(t,s) \in J \times J} |H'(t,s)| [\|\phi_r\|_{L^1} + T \max(r, \sup_{t \in J} |\alpha(t)|, \sup_{t \in J} |\beta(t)|)] \\ &+ \sum_{k=1}^{m} \sup_{t \in J} |H'_t(t,t_k)| \max(|\Delta\alpha|_{t=t_k}, |\Delta\beta|_{t=t_k}) := K_1, \end{aligned}$$

où $H'_t(t,s)$ désigne la dérivée partielle de $H(t,s)$ par rapport à t, et comme $H(t,s)$ et $H'_t(t,s)$ sont des fonctions continues sur $J \times J$, alors N transforme tout borné en un ensemble uniformément borné et équicontinu.

Etape 3 : N est à graphe fermé.

Soient les suites $(x_n) \in \mathcal{C}(J, \mathrm{I\!R})$, $(h_n) \in N(x_n)$ telle que $x_n \to x_*$ et $h_n \to h_*$. On va montrer que $h_* \in N(x_*)$. $(h_n) \in N(x_n)$ implique qu'il existe $v_n \in \tilde{S}_{(F,x_n)}$ telle que

$$h_n(t) = \int_0^T H(t,s)[v_n(s) + (\tau x_n)(s)]ds + \sum_{k=1}^m H(t,t_k)I_k((\tau x_n)(t_k)),\ t \in J.$$

On va montrer qu'il existe $v_* \in \tilde{S}_{(F,x_*)}$ telle que

$$h_*(t) = \int_0^T H(t,s)[v_*(s) + (\tau x_*)(s)]ds + \sum_{k=1}^m H(t,t_k)I_k((\tau x_*)(t_k))\ ,\ t \in J.$$

Puisque $x_n \to x_*$, $h_n \to h_*$ et les fonctions τ, I_k, $k = 1, ..., m$ sont des fonctions continues, alors

$$\|(h_n(t) - \int_0^T H(t,s)(\tau x_n)(s)ds - \sum_{k=1}^m H(t,t_k)I_k((\tau x_n)(t_k))$$

$$-(h_*(t) - \int_0^T H(t,s)(\tau x_*)(s)ds - \sum_{k=1}^m H(t,t_k)I_k((\tau x_*)(t_k))\|_\infty \to 0$$

lorsque $n \to \infty$.

Introduisons l'opérateur linéaire continu

$$\Gamma : L^1(J, \mathrm{I\!R}) \to \mathcal{C}(J, \mathrm{I\!R}) \qquad v \mapsto \Gamma(v)(t) = \int_0^T H(t,s)v(s)ds.$$

Alors, D'après le Lemme 1.3.2,l'opérateur multivoque $\Gamma \circ \tilde{S}_F$ est à graphe fermé, par suite, il existe $v_* \in \tilde{S}_{(F,x_*)}$ telle que

$$\|(h_*(t) - \int_0^T H(t,s)(\tau x_*)(s)ds - \sum_{k=1}^m H(t,t_k)I_k((\tau x_*)(t_k)) = \int_0^T H(t,s)(v_*)(s)ds.$$

D'où N est $s.c.s.$

Etape 4 : Il reste à montrer que l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{C}(J, \mathrm{I\!R}) : \lambda x \in N(x), \text{ pour un certain } \lambda > 1\}$$

est borné.

Soit $\lambda x \in N(x)$ pour un certain $\lambda > 1$, alors il existe $v \in \tilde{S}_{(F,x)}$ telle que

$$x(t) = \lambda^{-1}\int_0^T H(t,s)[v(s) + (\tau x)(s)]ds + \lambda^{-1}\sum_{k=1}^m H(t,t_k)I_k((\tau x)(t_k)),\ t \in J.$$

D'où

$$|x(t)| \leq \int_0^T \|H(t,s)\||v(s)+(\tau x)(s)|ds + \sum_{k=1}^{m} \sup_{t\in J} |H(t,t_k)| \max(|\Delta\alpha|_{t=t_k}, |\Delta\beta|_{t=t_k}).$$

Donc

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &\leq \tfrac{1}{1-e^{-T}}[\|\phi\|_{L^1} + T\max(\sup_{t\in J}|\alpha(t), \sup_{t\in J}|\beta(t)|)] \\ &+ \sum_{k=1}^{m} \sup_{t\in J} H(t,t_k)\max(|\Delta\alpha|_{t=t_k}, |\Delta\beta|_{t=t_k}). \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\mathcal{M}$ est borné. D'après les étapes 1, 2, 3 et 4, le théorème du point fixe de Martelli le Lemme 1.3.6 affirme l'existence d'un point fixe $x \in \mathcal{C}(J, \mathrm{IR})$.

Etape 5 : Montrons à présent que

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t) \quad \text{pour tout} \quad t \in J.$$

En effet
⊙ Supposons qu'il existe $t \in J$ tel que $x(t) \geq \beta(t)$. Comme $x-\beta$ atteint un maximum positif sur J, alors il existe $\bar{t}_k \in [t_k^+, t_{k+1}^-]$ avec $k = 0, ..., m$ tel que

$$(x-\beta)(\bar{t}_k) = \max\{x(t) - \beta(t) : t \in [t_k^+, t_{k+1}^-], k = 0, ..., m\} > 0.$$

⊙ Si $\bar{t}_k \in [t_k^+, t_{k+1}^-]$, il existe $t_k^* \in [t_k^+, \bar{t}_k]$ tel que

$$0 < x(t) - \beta(t) \leq x(\bar{t}_k) - \beta(\bar{t}_k) \quad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad t \in [t_k^*, \bar{t}_k].$$

D'après la définition de τ, il existe $v, v_1 \in L^1(J, \mathrm{IR})$ telles que $v(t) \leq v_2(t)$ p.p. $t \in [t_k^*, \bar{t}_k]$ et $v(t) \in F(t, \beta(t))$ p.p.$t \in [t_k^*, \bar{t}_k]$. D'où

$$x(\bar{t}_k) - x(t_k^*) = \int_{t_k^*}^{\bar{t}_k} (v(s) - x(s) + \beta(s))ds$$

$$x(\bar{t}_k) - x(t_k^*) \leq \int_{t_k}^{*} (v_2(s) - (x(s) - \beta(s)))ds.$$

Comme β est une sur solution de (5.12)-(5.14), alors

$$x(\bar{t}_k) - x(t_k^*) \leq \beta(\bar{t}_k) - \beta(t_k^*) - \int_{t_k^*}^{\bar{t}_k} (v(s) - x(s) + \beta(s))ds$$

$$x(\bar{t}_k) - x(t_k^*) < \beta(\bar{t}_k) - \beta(t_k^*).$$

Ce qui mène à une contradiction.

⊙ Si $\bar{t}_k = t_k^+$, $k = 1, ..., m$, alors

$$\Delta\beta|_{t=t_k} < \Delta x|_{t=t_k} = I_k(x(t_k^-)) \leq \Delta\beta|_{t=t_k}.$$

Ce qui est absurde. Donc $x(t) \leq \beta(t)$ pour tout $t \in [t_k^+, T]$.
$\odot$ Si $\bar{t}_k = 0$, alors $\beta(T) \leq \beta(0) < x(0) = x(T)$, qui est aussi une contradiction. D'où $x(t) \leq \beta(t)$ pour tout $t \in J$.

De même on peut montrer que $x(t) \geq \alpha(t)$ pour tout $t \in J$. Comme F et F_1 coïncident sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$, on aura finalement que x est une solution de (5.12)-(5.14).

5.2 Inclusions différentielles impulsives du premier ordre avec second membre non convexe

5.2.1 Inclusions différentielles impulsives du premier ordre avec conditions initiales

Dans cette partie, on s'intéresse à l'existence des solutions du problème

$$x' \in F(t, x), \quad t \in J, \ t \neq t_k, \ k = 1, ..., m, \tag{5.21}$$

$$\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k^-)), \quad k = 1, ..., m, \tag{5.22}$$

$$x(0) = x_0, \tag{5.23}$$

où $F : J \times \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ est une application multivoque à valeurs non convexes,
$0 < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = T \quad , I_k \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad , k = 1, ..., m.$

L'approche qu'on va utiliser est basée sur

1° Le théorème du point fixe de Covitz-Nadler pour les applications multivoques contractantes.

2° Le théorème du point fixe de Schaefer combiné avec un théorème de séléction dû à Bressan et Colombo.

On a le résultat suivant :

Théorème 5.2.1 *On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(H_1) $F : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{P}_{cp}(\mathbb{R})$ à la propriété que pour chaque $x \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ $F(., x) : [0, T] \longrightarrow \mathbf{P}_{cp}(\mathbb{R})$ est mesurable.

(H_2) il existe $l \in L^1([0, T], \mathbb{R})$telle que $H_d(F(t, x), F(t, \bar{x}) \leq l(t)|x - \bar{x}|$, pour tout $t \in [0, T]$ et $x, \bar{x} \in \mathbb{R}$ et $d(0, F(t, 0)) \leq l(t)$, pour tout $t \in J$.

(H_3) Pour chaque $k = 1, ..., m$ il existe une constante $d_k \geq 0$ telle que $|I_k(x) - I_k(\bar{x})| \leq d_k|x - \bar{x}|$, pour chaque x , $\bar{x} \in \mathbb{R}$.

Alors si $||l||_{L^1}+\sum_{k=1}^{m} d_k < 1$ *, le problème* (5.21)−(5.23) *possède au moins une solution* x *sur* J.

Preuve :

⊗ On applique le théorème du point fixe de Covitz-Nadler le Lemme 1.3.5.On défini l' opérateur $N : \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) \longrightarrow 2^{\mathcal{C}(J,\mathbb{R})}$ par

$$N(x) = \{h \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) : h(t) = x_0 + \int_0^t v(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(x(t_k)), \quad v \in S_{F,x}\}.$$

Il est clair que les points fixes de N sont les solutions de (5.21)-(5.23). D'après (H_1) F a une sélection mesurable. On vérifie que N satisfait les conditions du Lemme 1.3.5.

Etape 1 : On montre que pour tout $x \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$, on a $N(x) \in \mathbf{P}_{cl}(\mathcal{C}(J, \mathbb{R}))$. En effet, soit la suite $(x_n)_{n\geq 0} \in N(x)$ telle que $x_n \to \tilde{x}$ dans $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$. Alors, $\tilde{x} \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ et il existe $g_n \in S_{F,x}$ telle que pour chaque $t \in J$,

$$x_n = x_0 + \int_0^t g_n(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(x(t_k^-)).$$

En utilisant le fait que F est à valeurs compactes, on passera si c'est nécessaire à une sous suite $x_{n_r} \to \tilde{x}$ pour obtenir la convergence de $g_n \to g$ dans $L^1(J, \mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in J$,

$$x_n \to \tilde{x} = x_0 + \int_0^t g(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(x(t_k^-)).$$

Donc $\tilde{x} \in N(x)$, en particulier $N(x) \in \mathbf{P}_{cl}(\mathcal{C}(J, \mathbb{R}))$. $N(x)$ est fermé.

Etape 2 : On montre qu'il existe $0 \leq \gamma < 1$ tel que

$$H_d(N(x), N(\bar{x})) \leq \gamma\|x - \bar{x}\| \text{ pour tout } x, \bar{x} \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}).$$

Soient $x, \bar{x} \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ et $h_1 \in N(x)$, alors il existe une sélection v_1, $v_1(t) \in F(t, x(t))$ telle que pour chaque $t \in J$,

$$h_1(t) = x_0 + \int_0^t v_1(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(x(t_k^-)).$$

D'après (H_2), $\forall t \in J$

$$H_d(F(t, x(t)), F(t, \bar{x}(t)) \leq l(t)\|x(t) - \bar{x}(t)\|.$$

Donc il existe $\omega \in F(t, \bar{x}(t))$ tel que

$$|v_1(t) - \omega| \leq l(t)\|x(t) - \bar{x}(t)\|, \quad t \in J.$$

On considère l'opérateur $U : J \to 2^{\mathbb{R}}$ défini par

$$U(t) = \{\omega \in \mathbb{R} : |v_1(t) - \omega| \leq l(t)\|x(t) - \bar{x}(t)\|\}.$$

D'après un résultat de Castaing et Valadier (voir Proposition III.4 [26]), l'opérateur multivoque $V(t) = U(t) \bigcap F(t, \bar{x}(t))$ est mesurable et par suite il existe une sélection mesurable v_2 de V, $v_2(t) \in F(t, \bar{x}(t))$ et

$$|v_1(t) - v_2(t)| \leq l(t)\|x(t) - \bar{x}(t)\|, \; t \in J.$$

Pour chaque $t \in J$, on définit

$$h_2(t) = x_0 + \int_0^t v_2(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(\bar{x}(t_k^-)).$$

Alors, pour tout $t \in J$, on a

$$|h_1(t) - h_2(t)| \leq \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|ds + \sum_{0<t_k<t} |I_k(x(t_k^-)) - I_k(\bar{x}(t_k^-))|.$$

D'où

$$\begin{aligned} |h_1(t) - h_2(t)| &\leq \int_0^t l(s)\|x(s) - \bar{x}(s)\|ds + \sum_{k=1}^m d_k\|x - \bar{x}\|_\Omega \\ &\leq [\|l(s)\|_{L^1} + \sum_{k=1}^m d_k]\|x - \bar{x}\|_\Omega. \end{aligned}$$

Par une relation analogue, obtenue en interchangeant les rôles de x et $\bar{x}$ il suit que

$$H_d(N(x), N(\bar{x})) \leq [\|l\|_{L^1} + \sum_{k=1}^m d_k]\|x - \bar{x}\|_\Omega.$$

Par conséquent N est une contraction et D'après le Lemme 1.3.5, N possède un point fixe x qui est solution du problème (5.21)-(5.23).

$\otimes$ On appliquera maintenant le théorème du point fixe de Schaefer combiné avec un théorème de sélection de Bressan et Colombo.
Introduisons les hypothèses suivantes :

A$_1$**)** $F : [0, T] \times \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ est une application multivoque à valeurs non vides et compactes telle que

a) $(t, x) \mapsto F(t, x)$ est $\mathcal{L} \bigotimes \mathbf{B}$ mesurable ;

b) $x \mapsto F(t,x)$ est *s.c.i* p.p. $t \in [0,T]$.

A$_2$**)** Pour chaque $q > 0$ il existe une fonction $h_q \in L^1([0,T], \mathbb{R}^+)$ telle que

$$\|F(t,x)\| := \sup\{|v| : v \in F(t,x)\} \leq h_q(t) \quad \text{p.p.} \quad t \in [0,T] \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad |x| \leq q.$$

Théorème 5.2.2 *On suppose que* $\boldsymbol{A}_1$*),*$\boldsymbol{A}_2$*) et*

$\boldsymbol{A}_3$*) Pour chaque* $k = 1, \ldots, m$*, il existe une constante* $d_k \geq 0$*, telle que* $|I_k(x)| \leq d_k$*, pour chaque* $x \in \mathbb{R}$ *;*

$\boldsymbol{A}_4$*) Il existe* $M \in L^1(J, \mathbb{R})$ *et* $\psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *continue et croissante tel que*

$$\|F(t,x)\| \leq M(t)\psi(|x|), \; t \in J, \; x \in \mathbb{R}$$

et

$$\int_0^T M(t)dt < \int_c^\infty \frac{ds}{\psi(s)},$$

où $c = |x_0| + \sum_{k=1}^{m} d_k,$
sont satisfaites. Alors le problème (5.21)-(5.23) possède au moins une solution sur J.

Preuve : (1) D'après **A**$_1$), **A**$_2$) et le Lemme 4.3.1, F est de type *s.c.i.* Le Lemme 1.3.6 affirme qu'il existe une fonction continue $f : \mathcal{C}((J,\mathbb{R})) \to L^1([0,T],\mathbb{R})$ telle que $f(x) \in \mathcal{F}(x)$ pour tout $x \in \mathcal{C}((J,\mathbb{R}))$.

On considère le problème suivant :

$$x'(t) = f(x(t)), \quad t \in J, \; t \neq t_k, \; k = 1, \ldots, m, \tag{5.24}$$

$$\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k^-)), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{5.25}$$

$$x(0) = x_0. \tag{5.26}$$

Il est clair que si x est solution de (5.24)-(5.26), alors x est solution de (5.21)-(5.23).

(2) Considérons l'opérateur $N : \mathcal{C}((J,\mathbb{R})) \to \mathcal{C}((J,\mathbb{R}))$ défini par

$$N(x(t)) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(x(t_k^-)).$$

On peut montrer facilement que N est continu, complètement continu et que l'ensemble

$$\mathcal{E}(N) = \{x \in \Omega x = \lambda N(x) \text{ pour un certain } \; 0 < \lambda < 1\}$$

est borné.

Le théorème de Schaefer (Théorème 1.2.1) affirme que N possède un point fixe x qui est solution de (5.21)-(5.23).

5.2.2 Inclusions différentielles impulsives du premier ordre avec conditions périodiques

Dans cette partie, on s'intéresse à l'existence des solutions du problème

$$x'(t) - \lambda x(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in J, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{5.27}$$

$$\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k^-)), \quad k = 1, \dots, m, \tag{5.28}$$

$$x(0) = x(T). \tag{5.29}$$

L'approche qu'on va utilisés est basée sur

1°/ Le théorème du point fixe de Covitz-Nadler.

2°/ Le théorème du point fixe de Schaefer combiné avec un théorème de séléction de Bressan et Colombo.

Lemme 5.2.1 *Une fonction $x \in \Omega$ est une solution du problème (5.27)-(5.29) si et seulement si $x \in \Omega$ et il existe $v \in S_{F,x}$ telle que*

$$x(t) = \int_0^T G(t,s)v(s)ds + \sum_{k=1}^{n} G(t,t_k)I_k(x(t_k)), t \in J,$$

où G c'est la fonction de Green associée au problème périodique :

$$\begin{cases} x'(t) - \lambda x(t) = 0 \quad , t \in J, \\ x(0) = x(T). \end{cases}$$

$1^{\text{ère}}$ méthode

Théorème 5.2.3 *On suppose que les conditions suivantes*

$\mathcal{H}_1$/ $F : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{P}_{cl}(\mathbb{R})$ à la propriété que pour chaque $x \in \mathbb{R}$:
$F(.,x) : J \longrightarrow \mathbf{P}_{cl}(\mathbb{R})$ est mesurable ;

$\mathcal{H}_2$/ Il existe une fonction $l \in L^1([0,T], \mathbb{R})$ telle que $H_d(F(t,x), F(t,\bar{x})) \leq l(t)|x - \bar{x}|$, pour tout $t \in J$ et $x, \bar{x} \in \mathbb{R}$ et $d(0, F(t,0)) \leq l(t)$, pour tout $t \in J$;

$\mathcal{H}_3$/ Pour chaque $k = 1, \dots, m$, il existe une constante $d_k \geq 0$, telle que

$$|I_k(x) - I_k(\bar{x})| \leq d_k|x - \bar{x}|, \text{ pour chaque} x, \ \bar{x} \in \mathbb{R},$$

sont satisfaite. Soit $l^* = \int_0^T l(t)dt$ et $M_0 = \sup_{(t,s)\in J\times J} |G(t,s)|$. Si $M_0[l^* + \sum_{k=1}^{m} d_k] < 1$, alors le problème(5.27)-(5.29) possède au moins une solution sur $[0,T]$.

Preuve : On défini l'opérateur multivoque $N : \Omega \rightarrow 2^{\Omega}$ par

$$N(x) = \{h \in \Omega : h(t) = \int_0^T G(t,s)v(s)ds + \sum_{k=1}^{m} G(t,t_k)I_k(x(t_k)),\ v \in S_{F,x}\}.$$

Il est clair que les points fixes de N sont les solutions du problème (5.27)-(5.29).

D'après $\mathcal{H}_1/$ F possède une sélection mesurable. On doit vérifier que N satisfait les conditions du Lemme 1.3.5.

On peut comme précédemment montrer que $N \in \mathbf{P}_{cl}(\Omega)$.

Il reste à montrer que N est une contraction, c'est à dire qu'il existe une constante $0 \leq \gamma < 1$ telle que

$$H_d(N(x(t)), N(\bar{x}(t))) \leq \gamma \|x(t) - \bar{x}(t)\| \text{ pour chaque } x, \bar{x} \in \Omega.$$

Soit $x, \bar{x} \in \Omega$ et $h_1 \in N(x)$. Alors il existe $v_1(t) \in F(t, x(t))$ telle que, $\forall t \in J$,

$$h_1(t) = \int_0^T G(t,s)v_1 ds)ds + \sum_{k=1}^{m} G(t,t_k)I_k(x(t_k^-)).$$

D'après $\mathcal{H}_2/$, on a pour tout $t \in J$,

$$H_d(F(t, x(t)), F(t, \bar{x}(t))) \leq l(t)\|x(t) - \bar{x}(t)\|.$$

Donc il existe $\omega \in F(t, \bar{x}(t))$ telle que

$$|v_1(t) - \omega| \leq l(t).\|x(t) - \bar{x}(t)\|,\ t \in J.$$

On considère $U : J \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ défini par

$$U(t) = \{\omega \in \mathbb{R} : |v_1(t) - \omega| \leq l(t).\|x(t) - \bar{x}(t)\|\}.$$

D'après un résultat de Castaing et Valadier (Proposition III.4 [26]), l'opérateur multivoque $V(t) = U(t) \bigcap F(t, \bar{x}(t))$ est mesurable, et donc il existe une sélection mesurable $v_2(t)$ de V, $v_2(t) \in F(t, \bar{x}(t))$ et

$$|v_1(t) - v_2(t)| \leq l(t)\|x - \bar{x}\|, \quad t \in J.$$

Pour tout $t \in J$, on définit

$$h_2(t) = \int_0^T G(t,s)v_2 ds)ds + \sum_{k=1}^{m} G(t,t_k)I_k(x(t_k^-)).$$

Alors, pour $t \in J$, on a

$$|h_1(t) - h_2(t)| \leq \int_0^T |G(t,s)|.|v_1(s) - v_2(s)|ds + \sum_{k=1}^m |G(t,t_k)|.|I_k(x(t_k^-)) - I_k(\bar{x}(t_k^-))|.$$

$$\leq M_0 \int_0^T l(s)\|x_s - \bar{x}_s\|ds + M_0 \sum_{k=1}^m d_k|x(t) - \bar{x}(t)|.$$

Donc

$$\|h_1 - h_2\|_\Omega \leq M_0[l^* + \sum_{k=1}^m d_k]\|x - \bar{x}\|_\Omega.$$

Par une relation analogue, obtenue en interchangeant les rôles de x et $\bar{x}$, il suit que

$$H_d(N(x), N(\bar{x})) \leq M_0[l^* + \sum_{k=1}^m d_k].\|x - \bar{x}\|_\Omega.$$

Par conséquent N est une contraction et D'après le Lemme 1.3.5, N possède un point fixe x qui est solution de (5.27)-(5.29).

2$^{\text{éme}}$ méthode

On utilise les conditions suivantes :

$\mathcal{A}_1$/ $F : [0,T] \times \mathrm{I\!R} \to 2^{\mathrm{I\!R}}$ est une application multivoque, non vide et à valeurs compactes telle que :

a) $(t,x) \mapsto F(t,x)$ est $\mathcal{L} \bigotimes \mathcal{B}$ mesurable ;

b) $x \mapsto F(t,x)$ est *s.c.i* p.p. $t \in J$.

$\mathcal{A}_2$/ Pour chaque $q > 0$, il existe une fonction $h_q \in L^1([0,T], \mathrm{I\!R}^+)$ telle que

$$\|F(t,x)\| := \sup\{|v(t) : v \in F(t,x)|\} \leq h_q(t) \text{ p.p. } t \in J \text{ et } x \in \mathrm{I\!R} \text{ avec } |x| \leq q.$$

Lemme 5.2.2 *Soit $F : J \times \mathrm{I\!R} \to 2^{\mathrm{I\!R}}$ une application multivoque à valeurs non vide et compacte. On suppose que les hypothèses $\mathcal{A}_1$/ et $\mathcal{A}_2$/sont satisfaites. Alors F est de type s.c.i.*

Théorème 5.2.4 *On suppose que $\mathcal{A}_1$/,$\mathcal{A}_2$/ et les conditions suivantes :*

$\mathcal{A}_3$/ Pour chaque $k = 1, ..., m$, il existe une constante $d_k \geq 0$, telle que

$$|I_k(x)| \leq d_k \text{ pour chaque } x \in \mathrm{I\!R}.$$

$\mathcal{A}_4$/ Il existe une fonction $M \in L^1(J, \mathrm{I\!R})$ telle que pour tout $x \in \Omega$ et p.p. $t \in J$,

$$\|F(t,x(t))\| = \sup\{|v| : v \in F(t,x(t))\} \leq M(t),$$

sont satisfaites. Alors le problème (5.27)-(5.29) possède au moins une solution sur J.

Preuve : D'après $\mathcal{A}_1/$, $\mathcal{A}_2/$ et le Lemme 5.2.2,F est de types *s.c.i.* Alors D'après le Lemme 1.3.6,il existe une fonction $f : \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) \rightarrow L^1(J, \mathbb{R})$ telle que $f(x) \in \mathcal{F}(x)$, $\forall x \in \Omega$. On considère le problème :

$$x'(t) = f(x(t)), \quad t \in J, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, ..., m, \tag{5.30}$$

$$\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k^-)), \quad k = 1, ..., m, \tag{5.31}$$

$$x(0) = x(T). \tag{5.32}$$

Il est claire que si $x \in \Omega$ est solution de (5.30)-(5.32), alors x est solution de (5.27)-(5.29). On considère l'opérateur $N : \Omega \rightarrow \Omega$ défini par

$$N(x(t)) = \int_0^T G(t,s) f(x(s)) ds + \sum_{k=1}^{m} G(t, t_k) I_k(x(t_k))).$$

On peut montrer comme précédemment que N satisfait les conditions du théorème de Schaefer le Théorème 1.2.1.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans ce mémoire, nous avons appliqué quelques méthodes topologiques (Transversalité topologique de Granas, la méthode des sous et sur solutions, l'argument du point fixe combiné avec les estimations à priori, tel que le théorème du point fixe de Covitz-Nadler pour les applications multivoques contractantes, le théorème du point fixe de Schaefer combiné avec un théorème de séléction dû à Bressan et Colombo) pour l'étude de certaines classes d'équations et inclusions différentielles ordinaires et d'autres soumises à des impulsions en des temps fixes avec des conditions initiales, périodiques ou non linéaires. Pour le cas d'un second membre multivoque, nous avons étudié le cas convexe et le cas non convexe. L'étude du cas non convexe vient d'être initiée récemment par Benchohra, Henderson et Ntouyas dans [18]. Ces dernières années, quelques travaux généralisant les équations et les inclusions différentielles impulsives en des temps variables ont été obtenus ([19, 20]). Dans un future proche, on compte entamer l'étude de certaines classes d'équations et inclusions différentielles fonctionnelles impulsives en des temps variables de la forme

$$y'(t) \in F(t, y_t), \quad p.p\; t \in J, \quad t \neq \tau_k(y(t)),\; k = 1, \ldots, m, \tag{5.33}$$

$$y(t^+) = I_k(y(t^-)), \quad t = \tau_k(y(t)),\; k = 1, \ldots, m, \tag{5.34}$$

$$y(t) = \phi(t), \quad t \in [-r, 0], \tag{5.35}$$

où $F : J \times \mathcal{D} \to 2^{\mathbb{R}^n}$ est une application multivoque à valeurs non vides compactes, $\mathcal{D} = \{\psi : [-r, 0] \to \mathbb{R}^n; \psi$ est continue presque partout sauf en un nombre fini de points $\bar{t}$ en lesquels $\psi(\bar{t})$ et $\psi(\bar{t}^+)$ existent et $\psi(\bar{t}^-) = \psi(\bar{t})\}$, $\phi \in \mathcal{D},\; 0 < r < \infty$, $\tau_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\; I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\; k = 1, 2, \ldots, m$ sont des fonctions données. Pour toute fonction y définie sur $[-r, T]$ et pour tout $t \in J$ on note par y_t l'élement de $\mathcal{D}$ définit par

$$y_t(\theta) = y(t + \theta), \quad \theta \in [-r, 0].$$

$y_t(\cdot)$ représente l'histoire de l'état du système du temps $t - r$, jusqu'au temps présent t.

Bibliographie

[1] Z. Agur, L. Cojocaru, G. Mazaur, R.M. Anderson and Y.L. Danon, Pulse mass measles vaccination across age cohorts, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* **90** (1993), 11698-11702.

[2] J. Banas and K. Goebel, Measures of Noncompactness in Banach Spaces, Marcel Dekker, New York, 1980.

[3] I. Bajo and E. Liz, Periodic boundary value problems for first order impulsive differential equations with impulses at variable times, *J. Math. Anal. Appl.* **204** (1996), 65-73.

[4] D.D. Bainov and P.S. Simonov, Systems with Impulse Effect, Ellis Horwood Ltd, Chichister, 1989.

[5] D.D. Bainov, and P.S. Simonov, Impulsive Differential Equations, Periodic Solutions and Applications, Longman Sci.& Tech, Harlow, 1993.

[6] D.D. Bainov, S.G. Hristova, S. Hu and V. Lakshimikantham, Periodic boundary value problems for systems of first order impulsive differential equations, *Differential Integral Equations* **2**, (1989), 37-43.

[7] M. Benchohra, Initial value problems for first order impulsive differential inclusions in Banach spaces, *Nonlinear Oscil.* **4** (2001), 146-154.

[8] M. Benchohra, Existence results for order impulsive differential equations with periodic boundary conditions, *Intern. J. Nonlinear Differential Equations, T.M.A.* **7** (1 & 2) (2002), 120-131.

[9] M. Benchohra, Upper and lower solutions method for second order differential inclusions, *Dynam. Systems Appl.* **11** (1) (2002), 13-20.

[10] M. Benchohra and A. Boucherif. An existence result for first order initial value problems for impulsive differential inclusions in Banach spaces, *Arch. Math.* (Brno) **36** (2000), 159-169.

[11] M. Benchohra and A. Boucherif. On first order multivalued initial and periodic value problems, *Dynam. Systems Appl.* **9** (4) (2000), 559-568.

[12] M. Benchohra and S.K. Ntouyas, The lower and upper solutions method for first order differential inclusions with nonlinear boundary conditions, *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.* **3** (1) (2002), 8 p.p.

[13] M. Benchohra and S.K. Ntouyas, On first order differential inclusions with periodic boundary conditions, *Math. Ineq. Appl.* à paraitre.

[14] M. Benchohra, and S. K. Ntouyas, Existence results for functional differential inclusions, *Electron. J. Differential Equations* **2001**, No. 41, 8 p.p.

[15] M. Benchohra, and S. K. Ntouyas, On second order differential inclusions with periodic boundary conditions, *Acta Math. Univ. Comen.* **LXIX** (2) (2000), 173-181.

[16] M. Benchohra, and S.K. Ntouyas, Existence theorems for a class of first order impulsive differential inclusions, *Acta Math. Univ. Comen.* **LXX** (2) (2001), 197-205.

[17] M. Benchohra, J. Henderson and S. K. Ntouyas, On first order impulsive differential inclusions with periodic boundary conditions, *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems,* **9** (3) (2002), 417-428.

[18] M. Benchohra, J. Henderson and S. K. Ntouyas, Existence results for impulsive functional differential inclusions in Banach spaces, *Math. Sci. Res. J.* **6** (1) (2002), 47-59.

[19] M. Benchohra and A. Ouahab, Impulsive neutral functional differential inclusions with variable times, *Electron. J. Differential Equations* **2003**, No. 67, 12 p.p.

[20] M. Benchohra and A. Ouahab, Impulsive neutral functional differential equations with variable times, *Nonlinear Anal.* **55** (2003), 679-693.

[21] S. Bernfeld and V. Lakshmikantham, An Introduction to Nonlinear Boundary Value Problems, Academic Press, New York, 1974.

[22] A. Bressan and G. Colombo, Extensions and selections of maps with decomposable values, *Studia Math.* **90**, (1988), 69-86.

[23] A. Cabada, The monotone method for first order problems with linear and nonlinear boundary conditions, *Appl. Math. Comp.* **63** (1994), 163-186.

[24] S. Carl, S. Heikkila and M. Kumpulainen, On solvability of first order discontinuous scalar differential equations, *Nonlinear Times Digest* **2**(1) (1995), 11-27.

[25] A. Cabada and E. Liz, Discontinuous impulsive differential equations with nonlinear boundary conditions, *Nonlinear Anal.* **28** (1997), 1491-1499.

[26] C. Castaing and M. Valadier, Convex Analysis and Measurable Multifunctions, Lecture Notes in Mathematics, vol. 580, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[27] H. Covitz and S.B. Jr. Nadler, Multivalued contraction mappings in generalized metric spaces, *Israel J. Math.* **8** (1970), 5-11.

[28] K. Demling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1985.

[29] K. Deimling, Multivalued Differential Equations, De Gruyter, Berlin, 1992.

[30] C. De Coster, The method of lower and upper solutions in boundary value problems, PhD thesis, Université Catholique de Louvain, 1994.

[31] C. De Coster et P. Habets, An Overview of the Method of lower and upper solutions for ODE's, Nonlininear Analysis and its Applications to Differential Equations (M.R.Grossinho, M. Ramos, C. Rebelo, L. Sanchrz, Editors), Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol **43**, (2000)3-22.

[32] J. Dugundji and A. Granas, Fixed-Point Theory, Monografie Mat. PWN, Warsaw, 1982.

[33] P.W. Eloe and J. Henderson, Positive solutions of boundary value problems for ordinary differential equations with impuls, *Dynam. Continu. Discerte Impulsive Systems* **4** (2) (1998), 285-294.

[34] L. Erbe and W. Krawcewicz, Existence of solutions to boundary value problems for impulsive second order differential inclusions, *Rocky Mountain J. Math.* **22** (1992), 519-539.

[35] L.H. Erbe and X. Liu, Quasi-Solutions of Nonlinear Impulsive Equations in Abstract Spaces, Pergamon, Oxford, 1981.

[36] L. Erbe and X. Liu, Existence results for a system of second order impulsive differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **149** (1990), 56-69.

[37] M. Frigon, Application de la théorie de la transversalité topologique à des problèmes non linéaires pour des éqution différentielles ordinaires, *Dissertationes Mathemacae, Warszawa* **296** (1990).

[38] M. Frigon and A. Granas, Théorèmes d'existence pour des inclusions différentielles sans convexité, *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser.I.,* **310**, (1990), 819-822.

[39] M. Frigon, and D. O'Regan, Some remarks on the interval of existence of solutions to first order initial value problems *Utilitas Mathematica* **37** (1990), 199-206.

[40] M. Frigon, and D. O'Regan, Boundary value problems for second order impulsive differential equations using set-valued maps, Rapport DES-357, University of Montreal, 1993.

[41] M. Frigon and D. O'Regan, Existence results for some initial and boundary value problems without growth restriction, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1) (1995), 207-216.

[42] M. Frigon and D. O'Regan, Existence results for first order impulsive differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **193** (1995), 96-113.

[43] A. Granas, Sur la méthode de continuité de Poincaré *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris* **282** (1976), 983-985.

[44] A. Granas, R.B. Guenther and J.W. Lee, Somme general existence principles in the Carathéodory theory of ordinary differential equations systems, *J. Pure Applied Math.,* **76** (1991), 153-196.

[45] A. Granas, R. B. Guenther, J. W. Lee, On a theorem of S. Bernstein, *Pacific J. Math.* **74** (1978), 67-82.

[46] A. Granas, R.B. Guenther and J.W. Lee, Nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations, *Dissertationes Math.* **244** (1985), 1-128.

[47] L.Gorniewicz, Topological Fixed-Point Theory of Multivalued Mappings, Mathematics and its Applications, **495**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[48] A. Goldbeter, Y.X. Li, and G. Dupont, Pulsatile signalling in intercellular communication : Experimental and theoretical aspects. Mathematics to Biology and Medcine, *Werz. Pub. Winniprg,* Canada (1993), 429-439.

[49] D. Guo, Initial value problems for nonlinear second order impulsive differential equations in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **200** (1996), 1-13.

[50] J.K. Hale, Ordinary Differential Equation, Interscience, New York, 1969.

[51] N. Halidias and N.S. Papageorgiou, Second order multivalued boundary value problems, *Archi. Math (Brno)* **34** (1998), 267-284.

[52] S. Heikkila and V. Lakshmikantham, Monotone Iterative Techniques for discontinuous Nonlinear Differential Equations, Marcel Dekker, New York, 1994.

[53] S. Heikkila and A. Cabada, On first order discontinuous differential equations with nonlinear boundary conditions, *Nonlinear Word* **3** (1996), 487-503.

[54] S.G. Hristova and D.D. Bainov, Application of the monotone iterative techniques of Lakshmikantham to the solution of the initial value problem for functional differential equations, *J. Math. Phys. Sci.* **24** (1990), 405-413.

[55] Sh. Hu and N. Papageorgiou, Handbook of Multivalued Analysis, Volume I : Theory Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 1997.

[56] M. Kisielewicz, Differential Inclusions and Optimal Control, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1991.

[57] Kruger E. Thiener, Formal theory of drug dosage regiments I, *J. Theoret. Biol.* **13** (1966), 212-235.

[58] A. Lasota and Z. Opial, An application of the Kakutani-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations, *Bull. Acad. Pol. Sci. Math. Astronom. Phys.* **13** (1965), 781-786.

[59] G.S. Ladde, V. Lakshmikantham and A.S. Vatsala, Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Differential Equations, Pitman, Boston M. A., 1985.

[60] V. Lakshmikantham and S. Leela, Remarks on first ans second order periodic boundary value problems, *Nonlinear Anal.* **8** (3) (1984), 281-287.

[61] V. Lakshmikantham, D.D. Bainov and P.S. Simeonov, Theory of Impulsive Differential Equations, World Scientific, Singapore, 1989.

[62] J.W. Lee and D. O'Regan, Topological transversality. Application to initial value-problems, *Annales Polon. Math.* **48** (1988), 247-252.

[63] X. Liu, Nonlinear boundary value problems for first order impulsive differential equations, *Appl. Anal.,* **36** (1990), 119-130.

[64] E. Liz, Boundary Value Problems for New Types of Differential Equations, Ph.D. Thesis, Univ. Santiago de Compostela, 1994 (in Spanish).

[65] E. Liz, Abstract monotone iterative techniques and applications to impulsive differential equations, *Dynam. Contin. Discrete Impulsive systems* **3** (1997), 443-452.

[66] E. Liz and J.J. Nieto, Positive solutions of linear impulsive differential equations, *Commun. Appl. Anal.* **2** (4) (1998), 565-571.

[67] Y. Li and Q. Zhou, Periodic solutions to ordinary differential equations with impulses, *Sci. China* **36** (7) (1993), 778-790.

[68] M. Martelli, A Rothe's type theorem for non compact acyclic-valued maps, *Boll. Un. Mat. Ital.,* **11** (1975), 70-76.

[69] V. Milman and A.D. Myshkis, On the stability of motion in the presence of impulses. *Sib. Math. J.* **1**, (1960), 233-433.

[70] J.J. Nieto, Basic theory for nonresonance impulsive periodic problems of first order, *J. Math. Anal. Appl.* **205** (1997), 423-433.

[71] J.J. Nieto, Nonlinear second order periodic boundary value problems, *J. Math. Anal. Appl.* **130** (1988), 22-29.

[72] J.J. Nieto, Nonlinear second order periodic boundary value problems with Carathéodory functions, *Appl. Anal.* **34** (1989), 111-128.

[73] M.N. Nkashama, A generalized upper and lower solutions method and multiplicity results for nonlinear first order ordinary differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **140** (1989), 381-395.

[74] C. Pierson-Gorez, Problèmes aux Limites Pour des Equations Différentielles avec Impulsions, Ph.D. Thesis, Univ. Louvain-la-Neuve, 1993 (in French).

[75] T. Pruszko, Some applications of the topological degree theory to multivalued boundary value problem, *Dissertationes Math.* **229** (1984).

[76] A.M. Samoilenko and N.A. Perestyuk, Impulsive Differential Equations, World Scientific, Singapore, 1995.

[77] H. Schaefer, Uber die Method der a priori Schranken, *Math. Ann.* **129** (1955), 415-416.

[78] G.N. Silva and R.B. Vinter, Measure driven differential inclusions, *J. Math. Anal. Appl.* **202** (1996), 727-746.

[79] D.R. Smart, Fixed-Point Theorems, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.

[80] D. Yujun and Z. Erxin, An application of coincidence degree continuation theorem in existence of solutions of impulsive differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **197** (1996), 875-889.

[81] E. Zeidler, Functional Analysis and Applications I : Fixed-Point Theorems, Springer-Verlag, New York, 1986.