N° D'ordre : 16/2005-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

HOUARI BOUMEDIENE

FACULTE DES MATHEMATIQUES

MEMOIRE
Présenté pour l'obtension du diplôme de Magister
EN MATHEMATIQUES.

Spécialité : ALGEBRE et THEORIE DES NOMBRES

Par : AISSANI MOUSSA

THEME

CLASSIFICATION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES A POINTS SINGULIERS IRREGULIERS.

Soutenu le **13/ 07 / 2005** Devant le jury composé de :

M.A. KESSI	professeur U.S.T.H.B.	Président.
M.K BETINA	professeur U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
M.M ZITOUNI	professeur U.S.T.H.B.	Examinateur.
M.A AROUCH	Maitre de conférence U.S.T.H.B.	Examinateur.
M.D BEHLOUL	Chargé de cours U.S.T.H.B	Examinateur.

CHAPITRE .I. INTRODUCTION.

Soit $\vartheta = \mathbf{C}\{x\}$ l'espace des germes de fonctions holomorphes à l'origine (= les séries convergentes d'une variable) , c'est en particulier un anneau de valuation discrète relativement à la valuation v définie sur son corps des fractions

$K = \vartheta[x^{-1}] = \{ f = x^P.g \, ; \, p \in \mathbf{Z} \, ; \, g \in \vartheta \}$ (= corps des germes en 0 de fonctions méromorphes) par **:**

Pour tout $f \in K$; $f \neq 0$, $v(f) = \inf_{\mathbf{Z}} \{ p \, ; \, f = x^P.g \text{ et } g(0) \neq 0 \}$

$$\text{i.e.} \quad v : K^* \longrightarrow \mathbf{Z} \quad , \quad \text{avec} \quad v (K^*) = \mathbf{Z} \quad ,$$

et $v(x) = 1$ (= générateur du groupe **Z**) signifie que la variable x définie une uniformisante pour la valuation v .

Si $f \in \vartheta^*$, alors $f(x) = \sum_{P \geq 0} \{ f^{(P)}(0)/p\,! \}.x^P$ et on a bien $v(f) = \inf_{\mathbf{N}}\{p \, ; \, f^{(P)}(0) \neq 0\} \geq 0$.

Dénotons par $\vartheta^\wedge$ et $K^\wedge$ les formalisés respectifs de ϑ et de K (i.e. leurs complétés x-adiques pour la valuation v) .

Soit $\Omega^1{}_K = \Omega$ le K-espace vectoriel de rang 1 des 1-formes différentielles sur K et $d : K \longrightarrow \Omega$ l'application différentielle ; c'est une dérivation non triviale , i.e. une application additive non nulle vérifiant l'identité

$$d(\alpha.\beta) = \alpha.d\beta + \beta.d\alpha \qquad \text{pour tous } \alpha , \beta \in K \, ;$$

on a alors pour tout $\alpha \in K$, $d\alpha = (d\alpha / dx).dx = \beta.dx$, avec $\beta \in K$;

et dx est un générateur de Ω.

I.1.DEFINITIONS.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ sur K ; on définit une connexion sur E comme étant une application additive

$$\partial : E \longrightarrow \Omega \underset{K}{\otimes} E$$

satisfaisant à l'identité de Leibnitz :

$$\partial(\alpha.e) = d\alpha \otimes e + \alpha.\partial e \quad , \quad \text{pour tout } \alpha \in K \text{ et } e \in E .$$

Si $\Omega^{v} = \mathrm{Hom}(\Omega,K)$ dénote le K-dual de Ω, la base duale de dx est la forme linéaire $1/dx$ définie par le crochet de dualité

$$< \alpha.dx , 1/dx > = \alpha \quad , \quad \text{pour tout } \alpha \in K ,$$

et tout élément de Ω^{v} est de la forme α / dx avec $\alpha \in K$, puisque Ω^{v} est aussi un K-espace vectoriel de rang 1.

Maintenant, pour tout $\tau \in \Omega^{v}$, on pose

$d_{\tau}(\alpha) = < d\alpha , \tau >$ qui est un élément de K, pour tout $\alpha \in K$; et

$\partial_{\tau}(e) = < \partial e , \tau >$ qui est un élément de E, pour tout $e \in E$; on a alors

$$d_{\tau}(\alpha.\beta) = < \alpha.d\beta + \beta.d\alpha , \tau > = \alpha.d_{\tau}\beta + \beta.d_{\tau}\alpha \quad ; \quad \forall \alpha , \beta \in K ,$$

i.e. $d_{\tau} : K \longrightarrow K$ est une dérivation dans K ; et

$$\partial_{\tau}(\alpha.e) = < d\alpha \otimes e + \alpha.\partial e , \tau > = < d\alpha \otimes e , \tau > + < \alpha.\partial e , \tau >$$

$$= d_{\tau}(\alpha).e + \alpha.\partial_{\tau} e \quad ; \quad \forall \alpha \in K , \forall e \in E ,$$

i.e. ∂_τ **:** $E \longrightarrow E$ est une application **C**-linéaire ;

en particulier, pour $\tau = 1/dx$, on notera $\partial_\tau = \partial$ et on aura

$$(*) \qquad \partial(\alpha.e) = d\alpha/dx \,.\, e + \alpha.\partial e \;;\quad \forall\, \alpha \in K,\ \forall\, e \in E \qquad ,$$

et c'est ce que l'on entendra par une connexion donnée sur E .

Notons que pour $\tau = x^k/dx \in \Omega^v$; $k \in \mathbf{Z}$, on a

$$\partial_\tau(e) = \langle \partial e , x^k/dx \rangle = x^k.\langle \partial e , 1/dx \rangle = x^k.\partial e \quad , \ \forall\, e \in E$$

et donc, pour tout $\alpha \in K$ et $\tau \in \Omega^v$ **:** $\partial_{\alpha\tau}(e) = \alpha.\partial_\tau(e)$; $\forall\, e \in E$.

<u>DEFINITION.1.1.</u>

La connexion ∂ donnée sur E est dite « régulière » s'il existe une base $(\mathbf{e}) = (e_1, \dots, e_n) : K^n \cong\!\!\to E$; de E sur K ; dans laquelle la matrice M de la connexion définie par

$$\partial e_i = \sum_{1\le j\le n} a_{ji}.e_j \;;\quad 1\le i\le n \;,\quad \text{et}\quad (\partial e_1, \dots, \partial e_n) = (e_1, \dots, e_n).M \;;$$

$M = \left[a_{i,j}\right]_{i,j}$, a un pôle simple, i.e. $M \in x^{-1}.\mathbf{M}_n(\vartheta)$, où $\mathbf{M}_n(\vartheta)$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans l'anneau $\vartheta = \mathbf{C}\{x\}$.

Autrement, ∂ est dite « irrégulière ».

La classification dans le cas régulier est supposée connue ; voir à ce propos [Mn],[D1],[K],[M1] , … ; elle se réduit à la classification formelle et revient à l'étude de la monodromie attachée à la connexion .

On se propose d'exposer le cas irrégulier .

Le principe de cette classification remonte au mémoire fondamental de Birkhoff [B] qui traite le cas où , dans une base convenable , la partie la plus polaire de M a ses valeurs propres distinctes ; sur ce cas voir aussi [B-J-L].

Dans le cas général , une étude détaillée se trouve dans Jurkat [J].

On donnera ici une version de la classification due à Deligne [D2] , qui s'appuie sur des remarques antérieures de [S2] et [M2] .

Dans toutes ces méthodes , un ingrédient essentiel est un théorème de matrices holomorphes inversibles de Sibuya [S1] ; il s'agit du « Fundamental lemma » cité dans [B-J-L] ;pp.88-89., et que l'on retrouve dans [S2] ,Théorème1. ; dont une variante se trouve déjà essentiellement dans [B] ; il s'agit du « Preliminary theorem » , pp.533-34 ;

et pour nous est le THEOREME.3.5.

I.2. TRADUCTION EN TERME D'EQUATION DIFFERENTIELLE.

Avec les mèmes notations que ce qui précède ;

étant donnée une connexion ∂ sur E , le choix d'une base (**e**) de E sur K ,identifie , pour tout $\tau\in\Omega^{v}$, l'application (= connexion) ∂_τ à un opérateur différentiel sur K^n de la manière suivante **:**

Les coefficients de la matrice M de la connexion ∂_τ sont uniquement déterminés par les équations

$$\partial_\tau e_i = \sum_{1\le j\le n} a_{ji}.e_j \quad ; \quad a_{ji}\in K \ , \ 1\le i , j \le n \ ; \quad \text{i.e.} \quad \partial_\tau(\mathbf{e}) = (\mathbf{e}).M \quad ; \quad M = \left[a_{ij}\right]_{ij} .$$

Si f est un vecteur de E , on a $f = \sum_{1\le i\le n} f_i.e_i \ ; \ f_i \in K \ , \ 1\le i\le n$, et

$$\partial_\tau f = \sum_{1\le i\le n} \{ d_\tau f_i .e_i + f_i . \partial_\tau e_i \} = \sum_{1\le i\le n} \{ d_\tau f_i .e_i + f_i . \sum_{1\le j\le n} a_{ji} .e_j \}$$
$$= \sum_{1\le i\le n} \{ d_\tau f_i + \sum_{1\le j\le n} a_{ij} .f_j \}.e_i \quad ;$$

donc , avec ce choix d'une base , on déduit l'application

$$(\partial_\tau)_{(\mathbf{e})} : K^n \longrightarrow K^n \quad ,$$

définie pour tout $f = {}^{T}(f_1,\ldots,f_n) \in K^n$ par

$$(\partial_\tau)_{(\mathbf{e})} (f) = (d_\tau + M).f \quad ; \quad M = \left[a_{ij}\right]_{i,j} \in \mathbf{M}_n(K) .$$

Pour obtenir une Equation Différentielle , on a d'abord besoin d'un vecteur g de E qui soit cyclique pour ∂_τ ; i.e. tel que le système $\{ g , \partial_\tau g , \partial_\tau^{2} g ,\ldots, \partial_\tau^{n-1} g \}$ soit libre sur K , donc constitue une base (**g**) de E sur K ; vecteur dont l'existence est assurée par le Lemme suivant **:**

LEMME.1.1. ([D1] , II .1.3.)

Sous les hypothéses précédentes , et si K est de caractéristique 0 (ce qui est le cas) , il existe un vecteur cyclique g de E pour ∂_τ .

Ainsi donc , on aura pour tout $f \in E$,

$$f = \sum_{0 \le i \le n-1} f_i . \partial_\tau^i g \quad ; \quad f_i \in K \ , \ 0 \le i \le n-1 \ ,$$

et

$$\begin{cases} \partial_\tau (\partial_\tau^i g) = \partial_\tau^{i+1} g & ; \quad 0 \le i < n-1 \ , \\ \partial_\tau^n g = \sum_{0 \le i \le n-1} a_i . \partial_\tau^i g & ; \quad a_i \in K \ , \ 0 \le i \le n-1 \ , \end{cases}$$

d'où

$$\partial_\tau f = \sum_{0 \le i \le n-1} \{ d_\tau f_i . \partial_\tau^i g + f_i . \partial_\tau^{i+1} g \} = \sum_{0 \le i \le n-1} \{ d_\tau f_i + f_{i-1} + a_i . f_{n-1} \} . \partial_\tau^i g \quad ; \quad f_{-1} = 0 \ ,$$

ce qui fournit , en notation matricielle , l'opérateur différentiel

$$(\partial_\tau)_{(\mathbf{g})} \equiv \nabla \ : K^n \longrightarrow K^n \ ,$$

qui a la représentation en coordonnées

$$f \longmapsto (d_\tau + N).f \quad ; \quad \text{avec } f = {}^T(f_0 , f_1 , \ldots , f_{n-1}) \quad \text{et} \quad N = \begin{bmatrix} 0 \ 0 & \ldots & 0 & a_o \\ 1 \ 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 \ 1. & & & . \ . \\ \ldots & & & \ldots \\ 0 \ \ldots\ldots\ldots 0 & & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Notons qu'alors , si S désigne la matrice de passage de la base (**e**) à la base (**g**) , ce qui s'écrit (**g**) = (**e**) S , on aura

$$\nabla . f = (d_\tau + S^{-1} . M . S + S^{-1} . d_\tau S) . f \quad ; \quad \text{pour tout } f \in K^n \ ,$$

i.e. $N = S^{-1}.M.S + S^{-1}.d_\tau S$; en effet :

$(\mathbf{e}) = (\mathbf{g})\, S^{-1}$ et $\partial_\tau(\mathbf{e}) = (\mathbf{e}).M$ par hypothése , alors

$\partial_\tau((\mathbf{g})S^{-1}) = (\mathbf{g}).d_\tau S^{-1} + \partial_\tau(\mathbf{g}).S^{-1} = (\mathbf{g}).(-S^{-1}.d_\tau S.S^{-1} + (\mathbf{g})^{-1}.\partial_\tau(\mathbf{g}).S^{-1}) = (\mathbf{g}).S^{-1}.M$,

d'où $S^{-1}.M.S + S^{-1}.d_\tau S = (\mathbf{g})^{-1}.\partial_\tau(\mathbf{g})$, ce qui s'écrit

$$\partial_\tau(\mathbf{g}) = (\mathbf{g}).(S^{-1}.M.S + S^{-1}.d_\tau S) = (\mathbf{g}).N \quad .$$

Maintenant , en considérant l'espace dual $E^\vee = \mathrm{Hom}(E , K)$ de E que l'on munit de la connexion duale $\partial_\tau^\vee$ de ∂_τ définie par le crochet de dualité

$$< f , \partial_\tau^\vee \varphi > \; = \; d_\tau < f , \varphi > - < \partial_\tau f , \varphi > \quad , \quad \text{pour tous } f \in E \; , \; \varphi \in E^\vee ,$$

on a relativement à la base duale $(\mathbf{g})^\vee : K^n \xrightarrow{\cong} E^\vee$ de $(\mathbf{g})$; avec la notation $(\partial_\tau^\vee)_{(\mathbf{g})\vee} \equiv \nabla^\vee$; le produit scalaire dans K^n :

$$(\nabla^\vee \varphi).\, f = d_\tau(f.\varphi) - \varphi.\nabla f \quad ; \quad \text{pour tous } f , \varphi \in K^n ,$$

avec , d'une part

$$d_\tau(f.\varphi) = f.d_\tau \varphi + \varphi.d_\tau f$$

et

$$\varphi.\nabla f = \varphi.((d_\tau + N).f) = \varphi.d_\tau f + \varphi.(N.f)$$

ce qui donne $(\nabla^\vee \varphi).f = f.d_\tau \varphi - \varphi.(N.f)$,

et d'autre part $\varphi.(N.f) = \sum_{0 \le i \le n-1} \varphi_i .\{ f_{i-1} + a_i .f_{n-1} \}$; $f_{-1} = 0$

$$= \sum_{0 \le i \le n-1} \varphi_i .f_{i-1} + \Big\{ \sum_{0 \le i \le n-1} \varphi_i .a_i \Big\}.f_{n-1}$$

$$= ({}^T N.\varphi).f \quad ; \qquad \text{où } {}^T N = \text{Transposée de } N \; ;$$

d'où

$$\nabla^\vee : K^n \longrightarrow K^n$$
$$f \longmapsto d_\tau f - {}^T N.f \quad ; \quad \text{pour tout } f \in K^n .$$

Le noyau $Ker(\nabla^v)$ de cet opérateur différentiel est le sous-espace vectoriel de K^n des vecteurs f ; dits horizontaux ; qui vérifient l'équation

$$d_\tau f = {}^T N.f \quad ;$$

ce qui , avec $f = {}^T(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$, constitue un système de n équations différentielles du 1^{er} ordre

$$\begin{cases} d_\tau f_i = f_{i+1} \quad ; \quad 0 \le i < n-1 \quad , \\ d_\tau f_{n-1} = \sum_{0\le i\le n-1} a_i . f_i \quad ; \end{cases}$$

dont la dérnière fournit l'équation différentielle linéaire et homogène du n^{eme} ordre sur K

$$d_\tau^n f_o = \sum_{0\le i\le n-1} a_i . d_\tau^i f_o \quad ; \quad f_o \in K \ .$$

En correspondance avec la Définition 1.1 , avec $d_\tau = d/dx$; i.e. $\tau = 1/dx$, on a :

DEFINITION.1.2.

$x = 0$ est un point singulier « régulier » de l'équation différentielle

$$(d^n/dx^n)y = \sum_{0\le i\le n-1} a_i(x).(d^i/dx^i)y \quad ,$$

si les fonctions $x^{n-i}.a_i(x)$ appartiennent à ϑ , ou encore , après multiplication par x^n , l'équation devenant

$$(x.d/dx)^n y = \sum_{0\le i\le n-1} b_i(x).(x.d/dx)^i y \quad ,$$

avec $b_i(x) \in \vartheta$; $\forall$ i (i.e. en prenant $\tau = x/dx$) .

Autrement , $x = 0$ est un point singulier « irrégulier » , i.e. il suffit que l'un des $b_i(x)$ soit dans $K - \vartheta$.

I.3. VECTORIEL A CONNEXION.

Dans tout ce qui suit , on dénotera par (E ,∂) un espace-vectoriel E de dimension finie sur K muni d'une connexion ∂ .

Deux vectoriels à connexion (E_1, ∂_1) et (E_2, ∂_2) seront dits « isomorphes » s'il existe un isomorphisme des K-vectoriels E_1 et E_2 qui commute aux connexions ∂_1 et ∂_2 ;

i.e.

$\exists\ \varphi \in Hom_K(E_1 , E_2)\ /\ \partial_2 o\varphi = \varphi o \partial_1$; on a alors $\varphi^{-1} \in Hom_K(E_2 , E_1)$ et

$\partial_1 o\varphi^{-1} = \varphi^{-1} o\partial_2$, d'où $\partial_1 = \varphi^{-1} o\ \partial_2\ o\ \varphi$;

et on ecrira simplement $\partial_2\varphi = \varphi\partial_1$.

On dit dans ce cas que φ est une « section horizontale inversible » de $Hom_K(E_1 , E_2)$.

Les objets de type (E, ∂) forment une catégorie abélienne avec pour morphismes les sections horizontales (non nécéssairement inversibles) ; cette catégorie posséde un produit tensoriel défini par **:**

$$(E_1,\partial_1) \otimes (E_2,\partial_2) = (E_1 \underset{K}{\otimes} E_2 , \partial_3) ,$$

où $\partial_3(e_1\otimes e_2) = \partial_1 e_1\otimes e_2 + e_1\otimes\partial_2 e_2$; pour tout $e_1 \in E_1$ et $e_2 \in E_2$;

et chaque objet (E, ∂) défini un foncteur interne Hom **:**

$$(E_1, \partial_1) \longmapsto Hom_K((E, \partial) , (E_1, \partial_1)) = (Hom_K(E ,E_1) , \partial_2)$$

où

$$(\partial_2\varphi)(e) = \partial_1(\varphi(e)) - \varphi(\partial e) \quad ; \quad \text{pour tout } \varphi \in Hom_K(E,E_1) \text{ et } e \in E \quad ;$$

en particulier pour $(E_1,\partial_1) = (K, d)$ et de l'isomorphisme de définition $E^v = Hom(E, K)$ on retrouve la connexion duale $\partial^v = \partial_2$ (déjà définie) et usant de l'isomorphisme de K-espace-vectoriels

$$Hom_K(E ,E_1) \cong E^v \underset{K}{\otimes} E_1$$

défini par **:** $(e^v\otimes e_1)(e) = e^v(e).e_1$; pour tout $e \in E$, $e_1 \in E_1$ et $e^v \in E^v$,

on obtient un isomorphisme de K-vectoriels à connexion .

CHAPITRE II . CLASSIFICATION FORMELLE.

II.1. EXTENSION.

Le changement de variables $t = x^{1/p}$; $p \in \mathbf{N}^*$, défini sur K une extension totalement ramifiée $L|K$ de degré p dont t est une uniformisante .

En effet , $P(X) = X^p - x$ est un polynôme d'Eisenstein de K[X] dont t est une racine, d'où

$$L = K[X] / (P(X) = K[t] = \mathbf{C}\{t\}[t^{-1}] \qquad \text{et} \qquad [\, L : K \,] = p \qquad ;$$

d'autre part , si pour $u \in L$ on dénote par $N_{L|K}(u)$ le déterminant de l' endomorphisme du K-espace vectoriel L défini par la multiplication par u , i.e.

si pour $(\beta) : K^p \cong\!\rightarrow L$ une base de $L|K$, $m_u : L \longrightarrow L$ est telle que

$$m_u(\beta) = (\beta).M \quad ; \quad M \in \mathbf{M}_p(K) \quad ,$$

alors $N_{L|K}(u) = \det(M) \in K$ avec $N_{L|K}(L^*) = K^*$ (où $X^* = X - \{0\}$, $X = L, K$) ;

la formule $v_L(u) = 1/p\,.v(N_{L|K}(u))$ définit l'unique valuation sur L qui prolonge celle donnée sur K puisque

$$v_L(L^*) = 1/p\,.v(K^*) = 1/p\,.\,\mathbf{Z} \quad \text{et} \quad v_L(x) = 1/p\,.v(x^p) = v(x) \,;$$

l'unicité provenant du fait de l'indice $[\, v_L(L^*) : v(K^*) \,] = p = [\, L : K \,]$,

et $v_L(t) = 1/p\,.v(x) = 1/p$ signifie que t est une uniformisante .

On normalise alors v_L sur L ; i.e. on définit une valuation équivalente ; en posant $v_L(t) = 1$, ce qui donnera $v_L(x) = p.v(x)$.

Maintenant, la dérivation continue d/dx sur K s'étend de manière unique à la dérivation τ sur L déterminée par la condition $\tau \mid K = d/dx$, et la relation

$\tau(\mu) = \varepsilon(t).d\mu/dt$; pour tout $\mu \in L$; où $\varepsilon(t)$ doit vérifié $1 = \tau(x) = \tau(t^p) = \varepsilon(t).p.t^{p-1}$,

et donc $\tau : L \longrightarrow L$ est telle que

$$\tau(\mu) = 1/p\,.t/x\,.d\mu/dt \quad ; \quad \text{pour tout } \mu \in L\,;$$

i.e. $\tau = 1/p\,.t^{1-p}.d/dt$;

et la connexion ∂ supposée donnée sur E s'étend de manière unique à $E \underset{K}{\otimes} L = F$ (extension des scalaires) par :

$$(\partial \otimes \tau)(\alpha \otimes e) = \tau\alpha \otimes e + \alpha \otimes \partial e \quad ; \quad \text{pour tout } \alpha \in L \text{ et } e \in E\,;$$

en identifiant E au K-sous-espace $\{ 1 \otimes e\,;\, e \in E \}$ de F , on a bien $(\partial \otimes \tau)\big|E = \partial$, et si on pose $\partial \otimes \tau = \partial_L$, on aura pour $\beta \in L$ et $f = \alpha \otimes e \in F$:

$$\begin{aligned} \partial_L(\beta.f) &= \tau(\beta.\alpha) \otimes e + (\beta.\alpha) \otimes \partial e \\ &= (\beta.\tau\alpha + \alpha.\tau\beta) \otimes e + \beta.(\alpha \otimes \partial e) \\ &= \tau\beta.(\alpha \otimes e) + \beta.(\tau\alpha \otimes e + \alpha \otimes \partial e) \quad ; \end{aligned}$$

i.e.

$$\partial_L(\beta.f) = \tau\beta.f + \beta.\partial_L f \quad ; \quad \text{pour tout } \beta \in L \text{ et } f \in F\,;$$

on normalise ∂_L sur L ; i.e. on définit une connexion équivalente au sens qu'elle possède exactement le même noyau $Ker(F, \partial_L)$; en posant $\partial_t = p.t^{p-1}.\partial_L$ de sorte que

$$(**) \qquad \partial_t(\beta.f) = d\beta/dt\,.f + \beta.\partial_t f \quad ; \quad \text{pour tout } \beta \in L \text{ et } f \in F\,;$$

et c'est ce qu'on entendra par la « connexion extension » de ∂ à F .

Si $(\mathbf{e}) : K^n \xrightarrow{\cong} E$ est une base de E sur K relativement à laquelle la matrice de la connexion ∂ est donnée par $M \in \mathbf{M}_n(K)$, i.e. $\partial(\mathbf{e}) = (\mathbf{e})M$, alors

$$(\mathbf{f}) = (\mathbf{e}) \otimes id_L \ : \ K^n \underset{K}{\otimes} L \ \cong\!\!\rightarrow \ E \underset{K}{\otimes} L = F$$

est une base de F sur L relativement à laquelle la matrice de la connexion ∂_t est donnée par :

$$M_t = p.t^{p-1}.M(t) \in \mathbf{M}_n(L) \qquad ; \qquad \text{car on a}$$

$$\partial_t(\mathbf{f}) = p.t^{p-1}.\partial_L((\mathbf{e}) \otimes id_L) = p.t^{p-1}.\partial(\mathbf{e}) \otimes id_L = p.t^{p-1}(\mathbf{f}).M(t) = (\mathbf{f}).M_t \quad .$$

II.2. VECTORIEL A CONNEXION UNIDIMENTIONNEL.

Soit $\Omega_L{}^1 = L \otimes dt$ le vectoriel de rang 1 sur L des 1-formes différentielles sur L .

Pour $\alpha \in \Omega_L{}^1$ on dénote par F^α un L-vectoriel de rang 1 , L.f , muni de la connexion $\partial^{\,\alpha}$ définie sur le générateur f par :

$$\partial^{\,\alpha} f \overset{\text{déf}}{=} \partial_t f = (\alpha /dt)f = f(\alpha /dt) \quad ,$$

i.e.

$$\partial^{\,\alpha} = \partial_t \big|_{L.f} \qquad \text{et} \qquad F^\alpha = (L.f \ , \ \partial^{\,\alpha}) \quad .$$

Ainsi , pour α et β dans $\Omega_L{}^1$ on aura :

$F^\alpha \cong\!\!\rightarrow F^\beta$ si et seulement si il existe $\varphi \in Isom_L(L.f , L.g)$ tel que $\partial^{\,\beta}(\varphi(f)) = \varphi(\partial^{\,\alpha} f)$,

On développe :

$$\varphi(f) \in L.g \ \Rightarrow \ \exists \ \lambda \in L^* \ \text{tel que} \ \varphi(f) = \lambda.g \quad , \ \text{et donc}$$

$$\partial^{\,\beta}(\varphi(f)) = \partial^{\,\beta}(\lambda.g) = d\lambda/dt .g + \lambda.(\beta/dt).g = \lambda.(\lambda^{-1}.d\lambda/dt + \beta/dt).g \quad ;$$

et

$$\varphi(\partial^{\,\alpha} f) = \varphi((\alpha /dt).f) = (\alpha /dt).\varphi(f) = \lambda.(\alpha /dt).g \quad , \quad \text{d'où}$$

$$F^\alpha \cong\!\!\rightarrow F^\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta + \lambda^{-1}.d\lambda \quad ; \quad \lambda \in L^*$$

$\Leftrightarrow \quad \alpha - \beta$ est une 1-forme différentielle à pôle simple , avec le coefficient de t^{-1} entier ;

en effet ,

$\lambda = \lambda(t) \in L^*$ implique que $\lambda = t^k.\omega$ avec $\omega \in \mathbf{C}\{t\}$ et $\omega(0) \neq 0$, $k \in \mathbf{Z}$;

et $d\lambda = (k.t^{k-1}.\omega + t^k.d\omega /dt).dt$ implique $\lambda^{-1}.d\lambda = k.t^{-1}dt + d\omega /\omega$ avec

$d\omega /\omega \in \mathbf{C}\{t\}\otimes dt$ puisque $v_L(d\omega/dt) \geq v_L(\omega)$, i.e. $v_L(\omega^{-1}.d\omega/dt) \geq 0$.

L'ensemble $dl_n L^* = \{ y^{-1}dy \; ; \; y \in L^* \}$ est un sous-groupe invariant du groupe additif $(\Omega_L{}^1 , +)$ puisque

$$a^{-1}da - b^{-1}db = (a / b)^{-1}d(a / b) \quad ; \quad \text{pour tous } a ,b \in L^* \; ;$$

on peut alors parler de congruence , dans $\Omega_L{}^1$, modulo $dl_n L^*$; et

un L-vectoriel à connexion de rang 1 est entièrement déterminé par un élément de $\Omega_L{}^1$ modulo $dl_n L^*$, i.e.

« <u>F^α est unique à isomorphisme de vectoriels à connexion près pour tout $\alpha \in \Omega_L{}^1$</u> »

Rappelons brièvement la classification formelle d'un vectoriel à connexion réguliere ([Mn] ,$ 6. Théorème 4. pp.121-123.).

Soit (E, ∂) un $K^\wedge$-vectoriel à connexion régulière de dimension finie n .

Alors il existe des éléments $\alpha_1,\ldots,\alpha_S$ dans $\Omega^\wedge$ modulo $dl_n (K^\wedge)^*$; $s \leq n$, et des entiers naturels non nuls $n_1,\ldots,n_S$ tels que

$$E = \bigoplus_{1\leq k \leq S} G^{\alpha k} \quad ;$$

$G^{\alpha k} = E^{\alpha k} \underset{K}{\otimes} E^{n_k}$ étant indécomposable , i.e. $E^{\alpha k}$ est l'unique $K^\wedge$-vectoriel unidimensionnel contenu dans $G^{\alpha k}$; avec $n_k = \dim_{K^\wedge} G^{\alpha k}$, et

$E^{n_k} = \sum_{1\le i\le n_k} \hat{K}.e^k_i$; où $(e^k_1, \dots, e^k_{n_k}) : \hat{K}^{n_k} \cong\!\!\rightarrow E^{n_k}$ est une base telle que

$$\partial e_i^k = e^k_{i+1} \;\; ; \;\; 1 \le i \le n_k - 1 \;\; , \quad \text{et} \quad \partial e^k_{n_k} = 0.$$

De plus , cette décomposition est unique au sens du Théorème de Krull-Schmidt.

Cela se traduit en terme d'opérateur différentiel sur $\hat{K}^n$ par ([W].Théorèmes 5.1 et 5.2. p.21 ; [M1].Proposition 6.1. p.160 et Corollaire 6.4. p.163) **:**

Dans une base convenable **(e) :** $\hat{K}^n \cong\!\!\rightarrow E$, on a

$$(x.\partial)_{(\mathbf{e})} = x.d/dx + M \quad , \text{ avec } \quad M = \bigoplus_{1\le k\le S} M^{\alpha_k^*} \in \mathbf{M}n(\hat{\vartheta}) \, , \;\; \alpha_k^* = x.\alpha_k$$

et $M^{\alpha_k^*} = \alpha_k^*.In_k + Nn_k$; Nn_k matrice nilpotente de $\mathbf{M}n_k(\mathbf{C})$.

En conclusion , les classes des éléments $\alpha_1, \dots ,\alpha_S$ et les dimensions $n_1, \dots ,n_S$ forment un système complet d'invariants du $\hat{K}$-vectoriel à connexion (E , ∂) .

<u>II.3. VECTORIEL A CONNEXION IRREGULIERE.</u>

Le Théorème suivant est classique (Fabry (1885) , Hukuhara (1942) et Turrittin (1955) : [T1] .Théorème.I.) .

On trouvera aussi une démonstration dans [W] et d'autres plus récentes dans [M1] , [L] et [R] .

THEOREME .2.1

Soit (E , ∂) un vectoriel muni d'une connexion sur $K^{\wedge}$.

Après éventuellement une ramification $t^{p} = x$, on a une décomposition

$$E \underset{K^\wedge}{\otimes} L^{\wedge} = \bigoplus_{\alpha} (F^{\alpha} \underset{L^\wedge}{\otimes} G^{\alpha}) ,$$

où les F^{α} ont la signification donnée précédemment avec L remplacé par $L^{\wedge}$, et où les G^{α} sont réguliers .

En décomposant les G^{α} suivant leurs facteurs indécomposables , on obtient alors les facteurs indécomposables de $E \underset{K^\wedge}{\otimes} L^{\wedge}$.

Démonstration : ([T1] + [K]).

Soit $n = \dim_{K^\wedge} E$; si $n = 1$ il n'ya rien à démontrer ; avec $n \geq 2$.

Soit e un vecteur cyclique de E pour la connexion ∂ ; i.e. $(\mathbf{e}) = (e , \partial e , \dots , \partial^{n-1} e)$ est une base (cyclique) de E sur $K^{\wedge}$; alors il existe des éléments $a_1, a_2 , \dots , a_n$ dans $K^{\wedge}$; tels que

$$\partial^{n} e = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i . \partial^{n-i} e \qquad ;$$

et relativement à la base $(\mathbf{e})$, la matrice de la connexion ∂ est

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_n(x) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1}(x) \\ 0 & 1. & & . & . \\ . & \dots & & 0 & . \\ 0 & . & \dots & 0 \;\; 1 & a_1(x) \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_n(K^{\wedge})$$

i.e. $\partial(\mathbf{e}) = (\mathbf{e}).M$.

Considérons le nombre rationnel de Katz

$$r = \sup_{1 \leq i \leq n} (- v(a_i) / i) - 1 = m / q \quad ; \; m \in \mathbf{Z} \;, q \geq 1 \quad \text{et} \quad (m,q) = 1 \; ;$$

on a alors $v(a_i) \geq - i (r + 1)$ pour tout $i = 1,2,\dots,n$.

Maintenant, si $m \le 0$, $r + 1 \le 1$ et $v(a_i) \ge -i$ pour tout i , on considère alors la base

$(\mathbf{f}) = (\mathbf{e}).S$, où $S = \mathrm{diag}(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})$, relativement à laquelle la matrice de la

connexion ∂ est

$$M^S = S^{-1}MS + S^{-1}.dS/dx = x^{-1}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & x^n.a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & x^{n-1}a_{n-1} \\ 0 & 1 & . & . & . \\ . & & & 0 & . \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & x.a_1 \end{bmatrix} + x^{-1}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ . & 0 & 2 \ldots & 0 \\ . & & & . \\ 0 & \ldots & 0 & n-1 \end{bmatrix}$$

avec $v(x^i.a_i) = i + v(a_i) \ge 0$; pour tout i ;

i.e. $M^S \in x^{-1}.\mathbf{M}_n(\vartheta^\wedge)$, et (E, ∂) est régulier (cf. Définition 1.1.) .

On ne s'occupera donc que de l'hypôthèse $m > 0$ (cas irrégulier) .

Soient $K_t^\wedge = K^\wedge[t]$ l'extension de $K^\wedge$ telle que $t^q = x$, ∂_t la connexion extension de ∂ à $E \underset{K^\wedge}{\otimes} K_t^\wedge$ de matrice $M_t = q.t^{q-1}.M \in \mathbf{M}_n(K_t^\wedge)$, $u = m + q \in \mathbf{N}$ $(u > 1)$ et

$S = \mathrm{diag}(1, t^u, t^{2u}, \ldots, t^{(n-1).u}) \in \mathbf{M}_n(K_t^\wedge)$.

Considérons la base $(\mathbf{f}) = (\mathbf{e}).S$ de $E \underset{K^\wedge}{\otimes} K_t^\wedge$ sur $K_t^\wedge$; i.e. $(\mathbf{f}) = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$

avec $f_i = t^{(i-1).u}.\partial^{i-1}e$, $1 \le i \le n$; et la matrice de la connexion ∂_t relativement à cette base donnée par

$$M_t^S = S^{-1}M_tS + S^{-1}dS/dt = q\, t^{-m-1}.\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & t^{un}a_n(t^q) \\ 1 & 0 & \ldots\ 0 & t^{u(n-1)}a_{n-1}(t^q) \\ 0 & 1 & 0 \ldots & . \\ \ldots & & 0 & . \\ 0 & \ldots & 0\ 1 & t^u a_1(t^q) \end{bmatrix} + t^{-1}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & u & & . \\ 0 & 2u & & . \\ \ldots & & & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & u(n-1) \end{bmatrix}$$

avec $v_t(t^{ui}.a_i(t^q)) = u.i + q.v(a_i) \ge u.i - q(u.i/q) = 0$ pour tout i ,et égalité pour au moins un indice i_o .

Posons $b_i(t) = t^{u.i}.a_i(t^q)$, $1 \le i \le n$, et considérons la connexion $(t^{m+1}/q).\partial_t = \nabla$

de matrice

$$(t^{m+1}/q).M_t^S = B \in \mathbf{M}_n(\hat{\vartheta}_t) \quad ; \quad \hat{\vartheta}_t = \mathbf{C}[[t]] \ .$$

Du fait que $v_t(b_{i_o}) = 0$, on a $b_{i_o}(0) \neq 0$ et $B(0)$ est non nilpotente ; i.e.

$$\det(T.I_n - B(0)) = T^n - \sum_{1 \le i \le n} b_i(0).T^{n-i} \neq T^n \ ,$$

cela signifie que $B(0)$ possède au moins une valeur propre non nulle .

Faisons une première réduction ; deux cas se présentent **:**

1<u>er Cas</u>.

Si $B(0)$ possède au moins deux valeurs propres distinctes , au moyen d'une transformation linéaire constante et inversible de matrice $P \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$, on peut obtenir la matrice de la connexion ∇ relativement à la base $(\mathbf{g}) = (t^{m+1}/q).(\mathbf{f}).P$ donnée par

$C = P^{-1}.B.P = C(0) + t.D$; avec $D \in \mathbf{M}_n(\hat{\vartheta}_t)$ et $C(0) = P^{-1}.B(0).P = C_1 \oplus C_2$;

où C_1 possède l'unique valeur propre , disons ρ_1 , de multiplicité l'ordre n_1 de C_1 $(n_1 \ge 1)$ et C_2 est la matrice d'ordre $n - n_1$ possédant les autres valeurs propres .

On aura besoin du Lemme de relèvement de Sibuya (1958) suivant **:**

<u>LEMME.2.1.</u> ([W].Théorème.11.1. ; [M1].Proposition.8.4. + Remarque.8.5.)

Soit un opérateur différentiel $D = t^{k+1}.d/dt + M$; $k \ge 1$ et $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C}[[t]])$.

Supposons qu'on ait une décomposition de $M(0)$ en deux blocs

$M(0) = M_1 \oplus M_2$; M_1 d'ordre $n_1 \ge 1$ et M_2 d'ordre $n - n_1 = n_2$

avec M_1 et M_2 sans valeurs propres communes .

Alors il existe une matrice inversible A dans $\mathbf{M}_n(\mathbf{C}[[t]])$, avec $A(0) = I_n$ telle que la transformation $Y \longmapsto AY$; $Y \in \mathbf{C}[[t]]^n$ transforme l'opérateur D en

$$\cancel{D} = t^{k+1}.d/dt + N \quad ; \text{ avec } N = A^{-1}.M.A + t^{k+1}.A^{-1}.dA/dt = N_1 \oplus N_2 \quad ;$$

$N_i \in \mathbf{M}_{n_i}(\mathbf{C}[[t]])$ et $N_i(0) = M_i$, pour $i = 1,2$.

Ainsi donc , d'après ce Lemme il existe une matrice inversible $A \in \mathbf{M}_n(\hat{\vartheta_t})$ telle que relativement à la base (**h**) = (**g**).A la matrice de la connexion ∇ soit

$C^A = A^{-1}.C.A + (1/q).A.t^{m+1}.dA/dt = N_1 \oplus N_2 \in \mathbf{M}_n(\hat{\vartheta_t})$, avec $N_1(0) = C_1$ possédant l'unique valeur propre $\rho_1 \in \mathbf{C}$ de multiplicité $n_1 \geq 1$.

Les vecteurs coordonnés $h_1, h_2, \ldots, h_{n(1)}$ (où $n(1) = n_1$) de la base (**h**) engendrent le sous-espace F_1 de $E \underset{K^\wedge}{\otimes} \hat{K_t}$ sur lequel la connexion

$$\partial_{t,1} \equiv \partial_t \vert F_1 \ : F_1 \longrightarrow F_1 \qquad ;$$

est de matrice $q.t^{-m-1}.N_1 \in \mathbf{M}n_1(\hat{K_t})$, et on a bien $\partial_{t,1}(F_1) \subset F_1$ puisque ∂_t est additive .

Si $N_2(0)$ possède une unique valeur propre , la 1^ere réduction est terminée , alors avec $F_2 = \langle (h_{n_1+1}, \ldots, h_n) \rangle_{\hat{K(t)}}$ on aura

$$E \underset{K^\wedge}{\otimes} \hat{K_t} = F_1 \oplus F_2 .$$

Sinon on refait le 1^er cas avec B(0) remplacé par $N_2(0)$.

En poursuivant ce processus , on arrivera nécéssairement à une base (**Z**) relativement à laquelle la matrice de la connexion ∇ est de la forme $N = \bigoplus_{1 \leq i \leq S} N_i$;

avec $N_i(0)$ possédant l'unique valeur propre $\rho_i \in \mathbf{C}$;

et en considérant les sous-espaces

$$F_i = \langle (Zn_{i-1}+1 , \ldots, Zn_i) \rangle_{\hat{K_t}} \quad ; \; 1 \leq i \leq s \ , \quad n_o = 0 \text{ et } n_S = n$$

on a une première décomposition

$$E \underset{K^\wedge}{\otimes} \hat{K_t} = \bigoplus_{1 \leq i \leq S} F_i \quad . \qquad (***)$$

2^{eme} Cas.

Si $B(0)$ possède une unique valeur propre $\rho \in \mathbf{C}$, nécéssairement $\rho \neq 0$ et de plus tous les $b_i(0) \neq 0$ à cause de l'identité

$$\det(T.I_n - B(0)) = (T - \rho)^n = \sum_{0 \leq i \leq n} \binom{n}{i}.T^{n-i}.(-1)^i.\rho^i \quad ; \text{où } \binom{n}{i} = n!/(i!.(n-i)!) ;$$

i.e. $b_i(0) = (-1)^{i-1}.\binom{n}{i}.\rho^i \neq 0$; pour tout i ;

il s'ensuit que $v_t(b_i(t)) = i.u + q.v(a_i) = 0$, $\forall$ i ; mais comme $(m,q) = 1$ implique $(m,u) = 1$ et qu'en particulier pour $i = 1$ on a $v(a_1) = - u /q \in \mathbf{Z}$, nécéssairement $q = 1$, $t = x$, $v(a_i) = - i.u$; $\forall i$, avec $u = m +1$ et $b_i(x) = x^{i.u}.a_i(x)$, $\forall$ i .

Relativement à la base $(\mathbf{f}) = (e, x^u.\partial e, \ldots , x^{u.(n-1)}.\partial^{n-1} e) : K^{\wedge n} \xrightarrow{\cong} E$,

On a $\partial(\mathbf{f}) = (\mathbf{f}).M^S$ avec

$$M^S = x^{-u} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & b_n(x) \\ 1 & 0 & \ldots & . & . \\ 0 & \ldots & & . & . \\ . & \ldots & & 0 & . \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & b_1(x) \end{bmatrix} + x^{-1}. \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & u & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & .. & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & (n-1)u \end{bmatrix} \in \mathbf{M}n(K^{\wedge})$$

Considérons la transformation :

$$(\mathbf{g}) = (\mathbf{f}).T \quad ; \quad \text{avec} \quad T = \exp(- \rho.x^{-m} / m).I_n \quad ;$$

on a alors

$$\partial(\mathbf{g}) = (\mathbf{f}).dT/dx + \partial(\mathbf{f}).T = (\mathbf{g}).[\rho.x^{-u}.I_n + M^S]$$

et si on dénote par $(E , \bar{\partial})$ le vectoriel à connexion sur $K^{\wedge}$ de matrice M^S ;

i.e. $\bar{\partial}(\mathbf{g}) = (\mathbf{g}).M^S$; on aura l'identité

$$\partial = \bar{\partial} + \rho.x^{-u}.id \quad ; \quad id = \text{identité de } E \ ,$$

et on devra décomposer $(E, \bar{\partial})$.

Pour cela , on va d'abord définir une base « cyclique » de E pour $\bar{\partial}$.

On a $\partial = \not\partial + \rho x^{-u}.\mathrm{id}$ implique $\partial^{2} = \partial o \partial = \partial o \not\partial + \partial(\rho x^{-u}.\mathrm{id})$

$$= \not\partial^{2} + \rho x^{-u}.\not\partial + (-\rho.u.x^{-u-1}.\mathrm{id} + \rho x^{-u}.(\not\partial + \rho x^{-u}.\mathrm{id}))$$

$$= \not\partial^{2} + 2\rho x^{-u}.\not\partial + (\rho^{2} - u.\rho.x^{u-1}).x^{-2.u}.\mathrm{id} \quad ;$$

en posant $P_{i,2}(x) = \binom{2}{i}.\rho^{i}$; $0 \le i \le 1$, et $P_{2,2}(x) = \rho^{2} - \rho.u.x.^{u-1}$

on obtient

$$\partial^{2} = \sum_{0 \le i \le 2} P_{i,2}(x).x^{-u.i}.\not\partial^{2-i} \ .$$

Faisons l'hypothèse de récurrence sur l'entier $k \ge 2$

$$\partial^{k-1} = \sum_{0 \le i \le k-1} P_{i,k-1}(x).x^{-i.u}.\not\partial^{k-i-1}$$

où $P_{i,k-1}(x)$ est un polynôme en x , $1 \le i \le k-1$ et $P_{o,k-1} = P_{o,2} = 1$,

et calculons $\partial^{k} = \partial o \partial^{k-1}$. On a

$$\partial^{k} = \partial\Big(\sum_{0 \le i \le k-1} P_{i,k-1}(x).x^{-i.u}.\not\partial^{k-i-1}\Big) = \sum_{0 \le i \le k-1} \partial\big(P_{i,k-1}(x).x^{-i.u}.\not\partial^{k-i-1}\big) \quad , \quad \text{avec}$$

$$\partial\big(P_{i,k-1}(x).x^{-i.u}.\not\partial^{k-i-1}\big) = \not\partial\big(P_{i,k-1}(x).x^{-i.u}\not\partial^{k-i-1}\big) + \rho.x^{-u}\big(P_{i,k-1}(x).x^{-i.u}\not\partial^{k-i-1}\big)$$

$$= \underline{\{ d/dx(P_{i,k-1}(x).x^{-i.u}).x^{(i+1).u} + \rho.P_{i,k-1}(x)\}.x^{-(i+1).u}}.\not\partial^{k-i-1} + \underline{P_{i,k-1}(x).x^{-i.u}}.\not\partial^{k-i}$$

$$= \underline{A_{i}(x)}.\not\partial^{k-i-1} + \underline{B_{i}(x)}.\not\partial^{k-i} ;$$

alors

$$\partial^{k} = \sum_{0 \le i \le k-1} \{ A_{i}(x).\not\partial^{k-i-1} + B_{i}(x).\not\partial^{k-i} \}$$

$$= \sum_{0 \le i \le k-2} A_{i}(x).\not\partial^{k-i-1} + A_{k-1}(x).\mathrm{id} + B_{0}(x).\not\partial^{k} + \sum_{1 \le i \le k-1} B_{i}(x).\not\partial^{k-i}$$

$$= B_{0}(x).\not\partial^{k} + \sum_{0 \le i \le k-2} \{ A_{i}(x) + B_{i+1}(x) \}.\not\partial^{k-i-1} + A_{k-1}(x).\mathrm{id} \quad ;$$

avec $\quad B_0(x) = P_{0,k-1} = 1$;

et en posant

$$P_{0,k} = P_{0,k-1} \; ,$$

$$P_{i,k}(x) = \{ A_{i-1}(x) + B_i(x) \}.x^{i.u} \; ; \quad 1 \leq i \leq k\text{-}1 \; ,$$

et $\quad P_{k,k}(x) = A_{k-1}(x).x^{k.u} \; ,$

on obtient

$$\partial^k = \sum_{0 \leq i \leq k} P_{i,k}(x).x^{-i.u}.\partial^{k-i} \quad ; \quad \text{pour tout } k \geq 0 \; .$$

En particulier , par exemple , pour $k = 3$ on aura

$$P_{0,3} = P_{0,2} = 1$$

$$P_{1,3}(x) = \{ A_0(x) + B_1(x) \}.x^u = \{d/dx(P_{0,2}(x)).x^u + \rho.P_{0,2}(x)\} + P_{1,2}(x)$$

$$= \rho + 2\rho = 3\rho = \binom{3}{1}\rho \; ,$$

$$P_{2,3}(x) = \{A_1(x) + B_2(x) \}.x^{2u}$$

$$= \{d/dx(P_{1,2}(x).x^{-u}).x^{2u} + \rho.P_{1,2}(x) \} + P_{2,2}(x)$$

$$= (- 2u.\rho.x^{-u-1}).x^{2u} + 2.\rho^2 + \rho^2 - u.\rho.x^{u-1} = 3\rho^2 - 3u.\rho.x^{u-1} \; ,$$

et $\quad P_{3,3}(x) = A_2(x) . x^{3u}$

$$= d/dx (P_{2,2}(x).x^{-2u}).x^{3u} + \rho.P_{2,2}(x) = \rho^3 - 3u\rho^2.x^{u-1} + u(u+1)\rho.x^{2(u-1)}.$$

On voit que plus généralement , on a pour $0 \leq i \leq k$

$$P_{i,k}(x) = \binom{k}{i}\rho^i + \text{polynôme en } x^m \quad ; \quad m = u-1 > 0$$

et donc $P_{i,k}(0) = \binom{k}{i}\rho^i \neq 0$; par conséquent pour $k = n-1$, les éléments

$P_{i,n-1}(x).x^{-i.u}$ de $K^{\wedge}$, $0 \leq i \leq n-1$, ne sont pas nuls ; et la relation

$$\partial^{n-1} e = \sum_{0 \leq i \leq n-1} P_{i,n-1}(x).x^{-i.u}.\partial^{n-1-i} e \neq 0_E \qquad ;$$

montre que

$\{e, \not\partial e, \not\partial^2 e, \ldots, \not\partial^{n-1} e\}$ est une famille libre et maximale de E sur $K^{\wedge}$, d'où

une base cyclique pour $\not\partial$.

Maintenant , l'équation donnée $\quad \partial^n e = \sum\limits_{1 \le i \le n} a_i(x).\partial^{n-i} e \quad$, s'écrira

$$\partial^n e = \sum_{1 \le i \le n} a_i(x). \Big\{ \sum_{0 \le j \le n-i} P_{j,n-i}(x).x^{-j.u}.\not\partial^{n-i-j} \Big\}$$

$$= \sum_{1 \le i \le n} \Big\{ \sum_{1 \le j \le i} a_j(x).P_{i-j,n-j}(x).x^{(j-i).u} \Big\}.\not\partial^{n-i} e \;\overset{\text{aussi}}{=}\; \sum_{0 \le i \le n} P_{i,n}(x).x^{-i.u}.\not\partial^{n-i} e \quad ;$$

i.e.

$$\not\partial^n e = \sum_{1 \le i \le n} \Big\{ \sum_{1 \le j \le i} a_j(x).P_{i-j,n-j}(x).x^{(j-i).u} - P_{i,n}(x).x^{-i.u} \Big\}.\not\partial^{n-i} e$$

$$= \sum_{1 \le i \le n} \Big\{ \sum_{1 \le j \le i} (a_j(x).x^{j.u}).P_{i-j,n-j}(x) - P_{i,n}(x) \Big\}.x^{-i.u}.\not\partial^{n-i} e$$

$$= \sum_{1 \le i \le n} c_i(x).x^{-i.u}.\not\partial^{n-i} e = \sum_{1 \le i \le n} d_i(x).\not\partial^{n-i} e \quad ;$$

posons alors

$$r_1 = \sup_{1 \le i \le n} (-v(d_i) / i) - 1 = m_1/q_1 \quad ; \; m_1 \in \mathbf{Z} , \, q_1 \ge 1 \quad \text{et} \quad (m_1,q_1) = 1 \; ;$$

et comparons r et r_1 .

On a $c_i(x) \in \vartheta^{\wedge}$, $1 \le i \le n$, car $a_j(x).x^{j.u} = b_j(x) \in \vartheta^{\wedge}$ et

$P_{i,j}(x) \in \mathbf{C}[x^m] \subset \mathbf{C}[x]$, $0 \le j \le i \le n$; alors

$$c_i(0) = \sum_{1 \le j \le i} b_j(0).P_{i-j,n-j}(0) - P_{i,n}(0) = \sum_{1 \le j \le i} (-1)^{j-1}.\binom{n}{j}.\rho^j.\binom{n-j}{i-j}.\rho^{i-j} - \binom{n}{i}.\rho^i$$

$$= \rho^i. \Big\{ \sum_{1 \le j \le i} (-1)^{j-1}.\binom{n-j}{i-j}.\binom{n}{j} - \binom{n}{i} \Big\} \; ;$$

et les relations

$$\binom{n-j}{i-j}.\binom{n}{j} = \binom{n}{i}.\binom{i}{j} \quad \text{et} \quad \sum_{1 \le j \le i} (-1)^{j-1}.\binom{i}{j} = 1 \quad \text{montrent que}$$

$c_i(0) = 0$, pour tout i ; $1 \le i \le n$, i.e. $v(c_i(x)) > 0$; $\forall i$, par suite

$v(d_i(x)) = -i.u + v(c_i(x)) > -i.u$; $\forall i$, et donc $r_1 < r$ ou encore $m_1 < q_1.m$.

Si $r_1 \leq 0$, i.e. $m_1 \leq 0$, alors $v(d_i(x)) \geq - i$; $\forall i$, et comme précédemment , il existe une base de E sur $K^\wedge$ dans laquelle la matrice de la connexion $\not\partial$ a un pôle simple ;

i.e. il existe $(\mathbf{f}) = (\mathbf{e}).S : K^{\wedge n} \cong\!\!\to E$, où $(\mathbf{e}) = (e, \not\partial e, \not\partial^2 e, \dots, \not\partial^{n-1} e)$ et $S = \operatorname{diag}(1, x, x^2, \dots, x^{n-1})$ tel que

$$\partial(\mathbf{f}) = (\not\partial + \rho x^{-u}.\mathrm{id}).(\mathbf{f}) = (\mathbf{f}).\left\{\rho.x^{-u}.I_n + x^{-1}.\begin{bmatrix} 0\ 0 \dots\dots 0 & x^n.\,d_n(x) \\ 1\ 1\ 0 \dots\dots 0 & . \\ 0\ 1\ 2\ . \quad . & . \\ \dots\dots \quad n-2 & x^2.d_2(x) \\ 0 \dots\dots 0\ \ 1 & n-1+x.d_1(x) \end{bmatrix}\right\} .$$

Soient alors $G^\alpha = (E, \not\partial)$; où $\alpha = \rho.x^{-u}.dx \in \Omega^\wedge$, f l'un des vecteurs coordonnés de la base $(\mathbf{e})$, $E^\alpha = (K^\wedge.f, \partial^\alpha)$; où ∂^α est la connexion définie par $\partial^\alpha f = (\alpha/dx).f$,

$E^\alpha \underset{K^\wedge}{\otimes} G^\alpha = (K^\wedge.f \underset{K^\wedge}{\otimes} E, \partial^\alpha \otimes \not\partial)$; et considérons le $K^\wedge$-isomorphisme de vectoriels

$$H = f \otimes \mathrm{id}_E : E \cong\!\!\to K^\wedge.f \underset{K^\wedge}{\otimes} E ,$$

on a alors un isomorphisme de vectoriels à connexion $(E, \partial) \overset{H}{\cong\!\!\to} E^\alpha \underset{K^\wedge}{\otimes} G^\alpha$;

i.e . $(\partial^\alpha \otimes \not\partial) o H = H o \partial$;

en effet , si $v \in E$ alors $H(v) = f \otimes v$ et

$$(\partial^\alpha \otimes \not\partial)(H(v)) = \partial^\alpha f \otimes v + f \otimes \not\partial v = (\alpha/dx).f \otimes v + f \otimes \partial v - f \otimes (\alpha/dx).v = f \otimes \partial v = H(\partial v) .$$

Ce qu'on dénotera (par abus de notation) par $E = E^\alpha \underset{K^\wedge}{\otimes} G^\alpha$;

d'où le théorème pour le cas $r_1 \leq 0 < r$, avec $B(0)$ à valeur propre unique .

Si $r_1 > 0$, on considére le vectoriel à connexion $G^\alpha \underset{K^\wedge}{\otimes} K_t^\wedge = (E \underset{K^\wedge}{\otimes} K_t^\wedge, \not\partial_t)$ avec $t^{q_1} = x$, auquel on réapplique la 1^{ere} réduction , ce qui dans le 1^{er}cas fournit

$$G^\alpha \underset{K^\wedge}{\otimes} K_t^\wedge = \bigoplus_{1 \leq i \leq S} F_i \ ; \quad s \leq n , \qquad (**)$$

et $\quad E \underset{K^\wedge}{\otimes} K_t^\wedge = \bigoplus_{1\le i\le S} \left[(E^\alpha \underset{K^\wedge}{\otimes} K_t^\wedge) \underset{K^\wedge}{\otimes} F_i \right]$; les F_i , $1\le i \le s$, ayant la même signification

que ceux de la 1ère décomposition (***) qui précède ;

et dans le 2nd cas , en considérant les vectoriels à connexion

$H^\beta = (E , \cancel{\partial})$; où $\beta = \lambda.x^{-v}.dx$, $\lambda \neq 0$, $v = m_1+1$ et $\cancel{\partial} = \partial - (\beta/dx).id$; et

$E^\beta = (K^\wedge.g , \partial^{\,\beta})$, on obtient $\quad G^\alpha = E^\beta \underset{K^\wedge}{\otimes} H^\beta$; et avec

$E^\alpha \underset{K^\wedge}{\otimes} E^\beta = (K^\wedge.f \otimes g , \partial^{\,\alpha+\beta}) = E^{\alpha+\beta}$ on aboutit à $\quad E = E^{\alpha+\beta} \underset{K^\wedge}{\otimes} H^\beta$.

Si H^β est régulier , c'est fini ; sinon on a encore un 1er cas

$$H^\beta \underset{K^\wedge}{\otimes} K_t^\wedge = \bigoplus_{1\le i\le S} F_i \ ; \ t^{q_2} = x \ , \ q_2 \ge 1 \text{ et } s \le n \ . \qquad (***)$$

La seconde réduction consistera en la réapplication de tout ce qui précède aux facteurs

directes F_i de $\bigoplus_{1\le i\le S} F_i$ des divers cas (***) .

Prenons arbitrairement $i = 1$, et considérons la connexion $\partial_{t,1}$ obtenue sur F_1 de matrice

$q.t^{-m-1}.N_1 \in \mathbf{M}n_1(K_t^\wedge)$ relativement à la base $(\mathbf{z})_1 = (z_1, \ldots , z_{n1})$ de F_1 sur $K_t^\wedge = K^\wedge[t]$

avec $t^q = x$; où $q = q,q_1$ ou q_2 et $m = m,m_1$ ou m_2 , selon le cas (***) considéré .

Pour la connexion $\nabla_1 = (1/q).t^{m+1}.\partial_{t,1}$ de matrice $N_1 \in \mathbf{M}n_1(\vartheta_t^\wedge)$ avec

dét $(T.I_n - N_1(0)) = (T - \rho_1)^{n_1}$, par le lemme du vecteur cyclique de F_1 pour ∇_1 ,

il existe une matrice inversible $A \in \mathbf{M}n_1(\vartheta_t^\wedge)$ telle que

$$N_1^A = A^{-1}.N_1.A + (1/q).t^{m+1}.A^{-1}.dA/dt = \begin{bmatrix} 0 \ldots\ldots 0 & c_{n_1}(t) \\ 1\ 0 \qquad . & . \\ 0\ . \ . \qquad . & . \\ . \quad . \qquad 0 & . \\ 0 \ldots\ldots 0\ 1 & c_1(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{M}n_1(\vartheta_t^\wedge)$$

avec $N_1^A(0) = A^{-1}(0).N_1(0).A(0)$, car $(t^{m+1}.A^{-1}.dA/dt)(0) = 0 \,;\, \forall\, m \geq 1$;

et donc $\text{dét}(\,T.I_n - N_1^A(0)\,) = (\,T - \rho_1)^{n_1}$.

Maintenant , si $\rho_1 \neq 0$ on applique le 2nd cas de la 1ere réduction à $N_1^A(0)$ à la place de B(0) , d'où pour

$G_1^{\alpha_1} = (\,F_1\,, \vartheta_{t,1})$; avec $\alpha_1 = q.\rho_1.t^{-m-1}.dt$, $\vartheta_{t,1} = \partial_{t,1} - (\alpha_1/dt).id_{F_1}$ et

$F_1^{\alpha_1} = (\,K_t^{\wedge}.f_1\,, \partial_{t,1}^{\ \alpha_1})$, on obtient $(\,F_1\,, \partial_{\,t,1}) \cong F_1^{\alpha_1} \underset{K^\wedge[t]}{\otimes} G_1^{\alpha_1}$;

et on poursuit le processus de décomposition avec $G_1^{\alpha_1}$,… etc .

Sinon , $\rho_1 = 0$ et la matrice $N_1^A(0)$ est nilpotente , i.e. $c_j(0) = 0$ pour tout $j \in \{1,2,\dots,n_1\}$

Ou encore $v_{K^\wedge(t)}(\,c_j(t)) > 0\,, \forall j$; on considère alors les nombres

$$r_3 = \sup_{1 \leq j \leq n_1} (\,- v_{K^\wedge(t)}(\,c_j(t))\,/\,j\,) - 1 = m_3/q_3 < 0 \quad (\text{ en fait } r_3+1 < 0\ ) \quad \text{et} \quad u_3 = m_3 + q_3 < 0\,.$$

L'extension des scalaires

$$F_1 \underset{K^\wedge[t]}{\otimes} K_\tau^{\wedge} \quad ; \quad K_\tau^{\wedge} = K_t^{\wedge}[\tau\,]\ , \quad \text{avec } \tau^{q_3} = t\ ,\ q_3 \geq 1 \quad ;$$

et la connexion extension

$$\partial_{t,1} \otimes (1/q_3).\tau^{1-q_3}.d/d\tau \qquad \text{normalisée en } \partial_{\tau,1} \text{ de matrice}$$

$Q_1 = q.q_3.\tau^{-q_3.m-1}.N_1^A(\tau) \in \mathbf{M}_{n_1}(\,K_\tau^{\wedge})$, et la transformation

$S = \text{diag}\,(\,1, \tau^{m_3}, \dots, \tau^{m_3.(n_1-1)})$ fournissent la matrice

$$Q_1^S = q.q_3.\tau^{-q_3.m-u_3-1}.\begin{bmatrix} 0 & \dots\dots & 0 & d_{n1}(\tau) \\ 1 & 0 & . & . \\ 0 & . & & . \\ . & & 0 & . \\ 0 & \dots\dots 0 & 1 & d_1 \end{bmatrix} + \tau^{-1}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots\dots & .0 \\ 0 & u_3 & & . \\ . & . & & . \\ . & & & 0 \\ 0 & \dots 0 & & (n_1-1).u_3 \end{bmatrix}$$

avec

$$v_{K^\wedge(\tau)}(d_j(\tau)) \overset{\text{déf}}{=} v_\tau(\tau^{j.u_3}.c_j(\tau^{-q_3}))\ =\ j.u_3\ +q_3.v_{K^\wedge(t)}(c_j(t))\ \geq\ j.u_3 - q_3.(j.u_3/q_3) = 0\ ;$$

pour tout j , et il existe un j_o tel que $d_{j_o}(0) \neq 0$.

Si $u_3 \leq -q_3.m$, alors $Q_1^S \in \tau^{-1}.\mathbf{M}n_1(\vartheta_\tau^\wedge)$ et $(F_1 \underset{K^\wedge[t]}{\otimes} K_\tau^\wedge, \partial_{\tau,1})$ est régulier , et par suite $(F_1, \partial_{t,1})$ est aussi régulier (voir par exemple [K] .Proposition 11.11 .) comme on peut le voir par calcul direct **:**

$r_3 + 1 = u_3/q_3$ et $v_{K^\wedge(t)}(c_j(t)) \geq -j.u_3/q_3 \geq j.m$; $\forall j$, en prenant

$S = \text{diag}(1, t^{-m}, \ldots, t^{-(n_1-1).m})$, on obtient

$$(N_1^A)^S = S^{-1}.N_1.A^S + (1/q).t^{m+1}S^{-1}.dS/dt = t^m.\begin{bmatrix} 0 \ldots\ldots 0 & t^{-n_1.m}.cn_1(t) \\ 1 . \quad . \quad . & \\ 0 .. \quad . \quad . & \\ . \quad . \quad 0 . \quad . & \\ 0 \ldots 01 & t^{-m}.c_1(t) \end{bmatrix} + t^m.\begin{bmatrix} 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 \ -m . & . \\ \ldots\ldots & . \\ . & . \\ 0 \ldots & -(n_1-1)m \end{bmatrix}$$

qui est visiblement une matrice dans $t^m.\mathbf{M}n_1(\vartheta_t^\wedge)$; d'où

$q.t^{-m-1}.(N_1^A)^S$ (= matrice de $\partial_{t,1}$ relative à la base $(\mathbf{z})_1.A.S$) $\in t^{-1}.\mathbf{M}n_1(\vartheta_t^\wedge)$.

Sinon , $u_3 > -q_3.m$ et on considère alors la connexion $(1/q.q_3).\tau^{q_3.m+u_3+1}.\partial_{\tau,1}$

de matrice $(1/q.q_3).\tau^{q_3.m+u_3+1}.Q_1^S = B_1 \in \mathbf{M}n_1(\vartheta_\tau^\wedge)$; avec $B_1(0)$ non nilpotente , pour laquelle on applique la 1ere réduction .

Ce qui dans le 1er cas fournit une décomposition $F_1 \underset{K^\wedge[t]}{\otimes} K_\tau^\wedge = \underset{1\leq j\leq S_1}{\bigoplus} F_{1,j}$; $S_1 \leq n_1$

avec les vectoriels à connexion $(F_{1,j}, \partial_{\tau,1,j})$ sur $K_\tau^\wedge$ de matrices

$q.q_3.\tau^{-q_3.m-u_3-1}.H_j$; $H_j \in \mathbf{M}n_{1,j}(\vartheta_\tau^\wedge)$, $n_{1,j} \leq n_1$; $\forall j$ et $0 < q_3.m + u_3 < q_3.m$;

et dans le 2^{nd} cas ; i.e. une unique valeur propre $\lambda \neq 0$ de $B_1(0)$; on aura $q_3 = 1$,

$G_1^{\gamma} = (F_1 , \hat{\partial}_{t,1})$; où $\gamma = q.\lambda.t^{-(m+m_3)-2}.dt$ et $\hat{\partial}_{t,1} = \partial_{t,1} - (\gamma/dt).id_{F_1}$,

d'où

$$(F_1 , \partial_{t,1}) \cong F_1^{\gamma} \underset{K\hat{}[t]}{\otimes} G_1^{\gamma} \quad \text{…. etc .}$$

On poursuivra ce processus de décomposition (il n'y a qu'un nombre fini d'étapes ne dépendant que n et m donnés , puisques le 1^{er} cas fournit des $q_i \in \{1,2,\dots,n\}$ qui décroissent j'usqu'à 1 , et le 2^{nd} donne toujours $r_{i+1} < r_i$ et par suite il existe un $i_o \geq 2$ tel que $r_{i_o} \leq 0 \leq r_{i_o-1}$.) jusqu'à aboutir à des facteurs du type **:**

$F^{\alpha i} \underset{L_i\hat{}}{\otimes} G^{\alpha i}$ avec $\alpha_i = \sum_{-h_i \leq k \leq -1} a_k(\alpha_i).x^{k/P_i}.dx$; $L_i^{\wedge} = K^{\wedge}(x^{1/P_i})$; $G^{\alpha i}$ régulier ;

$P_i = q.u_i$; $h_i = u_i.(m + 1)$, u_i = le degré de l'extension du corps $K_t^{\wedge}$; où $t^q = x$, et on a $(h_i - u_i)/ P_i = m/q = r$ = l'invariant de Katz ; pour tout $i \in \{1,\dots,a\}$ avec $s \leq a \leq n$.

On prend alors $u = \text{ppcm} \{u_i ; 1 \leq i \leq a \}$, $P = q.u \leq n!$ et $L^{\wedge} = K^{\wedge}(x^{1/P})$ et on aura pour tout i

$$\alpha_i = \sum_{-h \leq k \leq -1} a_k(\alpha_i).x^{k/P}.dx \quad ; \text{ où } \quad h = u.(m+1) .$$

D'où le théorème .

En conclusion , les invariants formels sont le nombre rationnel de Katz r , et les classes modulo dln $L^{\wedge *}$ des divers α_i .

Une solution générale formelle sera alors de la forme $\sum_{\alpha} a_{\alpha} .f_{\alpha}$; avec a_{α} section horizontale de $F^{\alpha} = (L^{\wedge}.f , \partial^{\alpha})$; i.e. a_{α} est solution de $\partial^{\alpha}(a_{\alpha}.f) = da_{\alpha}/dx .f + a_{\alpha}.\partial^{\alpha} f = 0$ donc de la forme $a_{\alpha} = \exp(-\int \alpha)$; et f_{α} section horizontale de G^{α} .

CHAPITRE III. DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES .

Si (E ,∂) est un vectoriel à connexion sur K , on dénotera par $(E^{\wedge},\partial)$ le $K^{\wedge}$-vectoriel

$E^{\wedge} = E \underset{K}{\otimes} K^{\wedge}$ muni de la connexion ∂ de E étendue à $E^{\wedge}$.

Soient (E, ∂) et (E',∂) deux vectoriels à connexion sur K , et soit

$\alpha^{\wedge} : (E'^{\wedge},\partial) \cong\!\!\rightarrow (E^{\wedge},\partial)$ un isomorphisme des formalisés .

Si E , et donc E' , est régulier on sait que $\alpha^{\wedge}$ provient d'un isomorphisme

$\alpha : (E',\partial) \cong\!\!\rightarrow (E ,\partial)$

(voir par exemple [M1].Proposition 6.3. appliquée à $(\mathrm{Hom}_K(E',E) , \partial)$;

où $\partial(h) = \partial.h - h.\partial$ ($= 0$ pour $h = \alpha$) , ou bien [W].Théorème 5.3) ; c'est-à-dire que toute section horizontale de $\mathrm{Hom}_{K^{\wedge}}(E'^{\wedge}, E^{\wedge})$ pour ∂ est aussi une section horizontale de $\mathrm{Hom}_K (E',E)$; ou bien , en considérant l'opérateur différentiel associé à (E,∂) dans une base de E sur K , que toute solution formelle est convergente , entendre par solution « système fondamental de solutions ».

Ceci n'est plus vrai en général si (E,∂) n'est pas régulier ; plus précisement , on peut voir qu'il existe des $\alpha^{\wedge}$ qui ne redescendent pas si et seulement si $(\mathrm{End}_K E ,\partial)$ est irrégulier .

Pour obtenir une classification analytique , il faut faire intervenir d'autres invariants , dits « invariants analytiques » ; une première version de ces invariants ([S]; [M2]) fait intervenir les développements asymptotiques sectoriels , qu'on définit de la manière suivante **:**

On se place au voisinage de $0 \in \mathbf{C}$; on fait un éclatement réel de 0 ; i.e. on passe en coordonnées polaires $(\rho, \theta) \in \mathbf{R}_{+} \times T$; où T dénote le tore $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ muni de la topologie-quotient évidente ; on dénote par S l'image réciproque $\{0\} \times T$ de 0 (= cercle des directions), et on fabrique un faisceau $\mathfrak{a}$ sur S de la manière suivante **:**

Soit U un ouvert de S (= espace topologique dont les ouverts sont de la forme $\{0\} \times V$, avec V image d'un ouvert de **R** dans T par la surjection canonique) , et U* le secteur angulaire de **C** associé , i.e. $U^* = \{(\rho, \theta) ; \rho > 0 \text{ et } \theta \in U\}$; soit $\mathfrak{a}(U)$ l'ensemble des germes en 0 de fonctions holomorphes f dans U* , admettant en 0 un développement asymptotique de Laurent ; de façon plus précise , on demande qu'il existe une série formelle

$\sum_{n \geq n_0} a_n.x^n \in K^{\wedge}$ telle qu'on ait , pour tout $p \in \mathbf{Z}$, et x voisin de 0

$$\left| f(x) - \sum_{n \leq p} a_n.x^n \right| \leq C_p.\left| x^{p+1} \right| \quad ; \quad C_p > 0 \quad .$$

Le système $\{ \mathfrak{a}(U) ; U \subset S \}$ défini un préfaisceau d'ensembles sur S ,i.e. un foncteur contravariant de la catégorie des ouverts de S dans la catégorie des ensembles , qui attache à tout ouvert U de S un ensemble $\mathfrak{a}(U)$ et , pour tout couple d'ouverts $U \subset V$ défini une application $R_U{}^V : \mathfrak{a}(V) \longrightarrow \mathfrak{a}(U)$ dite de restriction , vérifiant :

$R_U{}^U$ = identité sur $\mathfrak{a}(U)$; pour tout U , et $R_U{}^W = R_U{}^V \, o \, R_V{}^W$; pour $U \subset V \subset W$.

Un théorème classique de Ritt (1916) assure que ,si $U \neq S$, l'application « série de Laurent »

$$\mathfrak{a}(U) \longrightarrow K^{\wedge}$$

est surjective (pour une démonstration voir [W].Théorème 9.3.) mais non injective .

Notons que si U = S alors $\mathfrak{a}(U) = K$; dans la suite , on notera cette application

$$T : f \longrightarrow f^{\wedge} \; .$$

DEFINITION.3.1.

On désigne par $\mathfrak{a}$ le faisceau associé au préfaisceau $U \longrightarrow \mathfrak{a}(U)$.

Montrons comment on le construit .

Pour tout $\theta \in S$, on dénote par $\mathfrak{a}_\theta = \varinjlim_{U \ni \theta} \mathfrak{a}(U)$ la limite inductive suivant l'ordonné filtrant décroissant des voisinages ouverts U de θ et on munit l'ensemble $\mathfrak{a} = \bigcup_{\theta \in S} \mathfrak{a}_\theta$ de la topologie engendrée par les parties de $\mathfrak{a}$ de la forme

$$[s ;U] = \{ s(\theta) \in \mathfrak{a}_\theta \;;\; s \in \mathfrak{a}(U) \;\text{ et }\; \theta \in U \} \quad ;$$

on définit alors naturellement un homéomorphisme local $\pi : \mathfrak{a} \longrightarrow S$,

i.e. pour tout $f \in \mathfrak{a}$, il existe un voisinage $[s ;U]$ de f et le voisinage U de $\pi(f)$ tels que la restriction de π à $[s ;U]$ soit un homéomorphisme de $[s ;U]$ sur U .

$\mathfrak{a}$ est alors le faisceau associé au préfaisceau $U \longrightarrow \mathfrak{a}(U)$ défini par la donnée **:**

Pour tout ouvert U de S est associé l'ensemble

$$\mathfrak{a}(U) \overset{\text{noté}}{=} \Gamma(U, \mathfrak{a}) \overset{\text{déf}}{=} \{ s : U \longrightarrow \mathfrak{a} \;;\; s \text{ continue et } \pi \circ s = id_U \}$$

des sections continues de $\mathfrak{a}$ au-dessus de U ; et pour tout $\theta \in S$, $\mathfrak{a}_\theta = \varinjlim_{U \ni \theta} \mathfrak{a}(U)$ est l'ensemble (ou espace) des germes de sections de $\mathfrak{a}$ en θ , i.e. des $f \in \mathfrak{a}_\theta$ tels qu' il existe une section s au-dessus d'un voisinage de θ vérifiant $s(\theta) = f$, et deux sections jouissant de cette propriété coïncident dans un voisinage de θ .

De là , on déduit que l'axiome de recollement suivant est vérifié :

Pour tout recouvrement $\{ U_i \}$ d'un ouvert U de S par des ouverts non vides , et toute famille $\{ f_i \}$ d'éléments $f_i \in \mathfrak{a}(U_i)$ telle que

$R_{U_{i,j}}^{U_i} f_i = R_{U_{i,j}}^{U_j} f_j$; pour tout couple (i, j) tel que $U_{i,j} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, il existe un $f \in \mathfrak{a}(U)$ et un seul tel que $R_{U_i}^{U} f = f_i$; pour tout i .

Notons que les applications $f \to -f$, $(f, g) \to f+g$ et $(f, g) \to f.g$ étant continues pour tous $f, g \in \mathfrak{a}$ tels que $\pi(f) = \pi(g)$, $\mathfrak{a}$ est un faisceau d'anneaux , i.e. $\mathfrak{a}_\theta$ est un anneau pour tout $\theta \in S$; et $K = \mathfrak{a}(S)$ est un sous-faisceau (constant) du faisceau $\mathfrak{a}$, l'élément unité étant $1 \in K$; pour tout $\theta \in S$, par suite $\mathfrak{a}$ est naturellement muni d'une structure de K-Module , i.e . est un faisceau de K-modules ; on peut alors considérer , E étant un K-espace vectoriel donné, le produit tensoriel des K-modules $\mathfrak{a}_\theta$ et E pour tout $\theta \in S$, $\mathfrak{a}_\theta \underset{K}{\otimes} E$; et cela défini le préfaisceau $U \to \mathfrak{a}(U) \underset{K}{\otimes} E$ sur S auquel est associé le faisceau $\mathfrak{a} \underset{K}{\otimes} E$ qu'on munit de la connexion ∂ donné sur E ;

d'autre part , ce dernier contenant $\mathfrak{a} \underset{K}{\otimes} 1_E \equiv \mathfrak{a}$ peut être regarder comme un $\mathfrak{a}$-Module , par suite , pour tout autre K-espace vectoriel E' est défini le préfaisceau de groupes abéliens $U \to Hom_{\mathfrak{a}(U)}(\mathfrak{a}(U) \underset{K}{\otimes} E' , \mathfrak{a}(U) \underset{K}{\otimes} E)$ auquel est associé le faisceau de $\mathfrak{a}$-modules $\underline{Hom}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a} \underset{K}{\otimes} E' , \mathfrak{a} \underset{K}{\otimes} E)$.

De plus , l'application $T \otimes id_E : \mathfrak{a} \underset{K}{\otimes} E \to \hat{K} \underset{K}{\otimes} E = \hat{E}$ est encore surjective puisque le foncteur $A \to A \underset{K}{\otimes} E$ est exacte à droite ; pour tout K-module A .

Cela posé , le premier résultat sur lequel on va s'appuyer est le théorème fondamental suivant **:**

<u>THEOREME.3.2.</u> (Hukuhara-Turrittin).

Soit (E , ∂) un vectoriel à connexion sur K .

Alors , pour tout $\theta \in S$ l'application (notée encore)

$$T : Ker(\partial , \mathfrak{a}_\theta \underset{K}{\otimes} E) \longrightarrow Ker(\partial , \hat{E}) \quad \text{est surjective .}$$

Une démonstration de ce théorème se trouve dans [W].Théorème12.1.

A noter que les énoncés usuels sont en apparence plus forts , puisqu'on démontre le résultats précédent dans tout secteur d'ouverture $< \pi/r$, r étant l'invariant de Katz de (E , ∂).
En fait , il est connu que des arguments cohomologiques joints à la théorie formelle exposée au $.II. suffisent à récupérer ce résultat à partir de (3.2). On verra des arguments de ce type au $.V.

D'ailleurs , pour le cas où la partie la plus polaire de la matrice de la connexion ∂ a toutes ses valeurs propres distinctes et pour des secteurs d'ouverture $\geq \pi/r$ on a le résultat plus précis dù à Sibuya (cité dans [B-J-L].ThéorèmeA.) :

Pour toute section horizontale $X^{\wedge}(x)$ de $Hom_{K^\wedge}(E^{\wedge},E^{\wedge}) = End_{K^\wedge}(E^{\wedge})$ il existe un δ suffisament petit ($0 < \delta < \pi/r$) , $2.r$ secteurs ouverts U_j^* donnés pour tout x satisfaisant

$$\pi.(j -1) / r - \delta < \arg x < \pi.j / r \quad ; \quad |x| > 0 \quad , \ 1 \leq j \leq 2.r \ ,$$

et $2.r$ sections horizontales $X_j(x)$ du faisceau $\underline{End}_{a}(a \otimes E)$ sur U_j^* , $1 \leq j \leq 2.r$,telles que

$$T (X_j(x)) = X^{\wedge}(x) \qquad \text{quand } x \to 0 \ , \ x \in U_j^*$$

et qui sont uniquement déterminées par les U_j^* ; $1 \leq j \leq 2.r$.

Fixons-nous maintenant un (E ,∂).

On va utiliser le résultat précédent pour étudier les vectoriels à connexion (E',∂) munis d'un isomorphisme des formalisés

$$\alpha^{\wedge} : (E'^{\wedge},\partial) \overset{\cong}{\to} (E^{\wedge},\partial)$$

(on reprend ici le raisonnement de [M2]) ; pour cela , on applique le théorème précédent (3.2) à $\alpha^{\wedge}$ considéré comme section horizontale de $Hom_{K^\wedge}(E'^{\wedge},E^{\wedge}) = Hom_K(E',E)^{\wedge}$; il existe donc un recouvrement fini $U = \{U_i\}$ de S par des ouverts connexes et $\neq S$ tel que , dans U_i , $\alpha^{\wedge}$ se représente par α_i , section horizontale sur U_i du faisceau

$\underline{Hom}_{a}(a \underset{K}{\otimes} E' , a \underset{K}{\otimes} E)$;

du fait que $\alpha_i^{\wedge} = \alpha^{\wedge}$ est inversible , on en déduit facilement qu'il en est de même de α_i (voir par exemple [W].Théorème8.5) .

Alors , $\forall$ (i,j) , $\alpha_i\alpha_j^{-1} = \beta_{ij}$ est une section horizontale inversible sur $U_i \cap U_j$ du faisceau $\underline{\mathrm{End}}_{a}(a \underset{K}{\otimes} E) = a \underset{K}{\otimes} \mathrm{End}_K(E)$ puisque d'une part la composée de deux sections inversibles est encore inversible et que d'autre part on a l'horizontalité par (3.2)

$$\partial\alpha_i = \alpha_i\partial \quad \text{et} \quad \partial\alpha_j^{-1} = \alpha_j^{-1}\partial \quad ; \ \forall \ i , j$$

et $\partial\beta_{ij} = \partial\alpha_i\alpha_j^{-1} = \alpha_i\partial\alpha_j^{-1} = \alpha_i\alpha_j^{-1}\partial = \beta_{ij}\partial$; de plus , comme $\alpha_i^{\wedge} = \alpha_j^{\wedge}$ et $\alpha_i^{\wedge}\alpha_j^{\wedge -1} = \alpha_i^{\wedge}\alpha_j^{-1\wedge} = (\alpha_i\alpha_j^{-1})^{\wedge}$ (voir par exemple [W].Théorème8.3. ….) on a alors

$$\beta_{ij}^{\wedge} = \mathrm{id} \quad (= \text{élément neutre du groupe multiplicatif des inversibles de } \mathrm{End}_K(E)^{\wedge}) .$$

Désignons alors par $\Lambda(E)$ le faisceau des sections inversibles de $a \underset{K}{\otimes} \mathrm{End}_K(E)$; en prenant une base **(e) :** $K^n \cong\!\rightarrow E$, $\Lambda(E)$ s'identifie au faisceau $\underline{\mathrm{Gl}}(n , a)$ des matrices carrées inversibles d'ordre n à coefficients dans le faisceau a .

Soient $\Lambda_o(E)$ le sous-faisceau des éléments de $\Lambda(E)$ asymptotes à l'identité ; i.e. $\beta \in \Lambda(E)$ et $\beta^{\wedge} = \mathrm{id}$; et $\Lambda_o(E, \partial)$ le sous-faisceau des sections horizontales pour ∂ de $\Lambda_o(E)$; i.e. $\beta \in \Lambda_o(E)$ et $\partial\beta = \beta\partial$.

Si on désigne par **:**

$C^0(U ;\Lambda_o(E,\partial)) = \prod_i \Gamma(U_i, \Lambda_o(E,\partial)) = \{\{s_i\} ; s_i \in \Gamma(U_i ,\Lambda_o(E,\partial))\}$ le groupe multiplicatif des 0-cochaînes de U à valeurs dans $\Lambda_o(E, \partial)$;

$C^1(U ;\Lambda_o(E,\partial)) = \prod_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j , \Lambda_o(E,\partial)) = \{\{s_{ij}\} ; s_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j ,\Lambda_o(E,\partial)) , U_i \cap U_j = U_{ij} \neq \varnothing\}$ le groupe des 1-cochaînes de U à valeurs dans $\Lambda_o(E,\partial)$; et

$C^2(U ; \Lambda_o(E,\partial)) = \prod_{i,j,k} \Gamma(U_i \cap U_j \cap U_k , \Lambda_o(E,\partial)) = \{\{s_{ijk}\}$;sections sur $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k \}$

et que l'on définit les applications « cobords »

$$\delta' : \ C^0 = C^0(U\,;\Lambda_o(E,\partial)) \longrightarrow C^1 = C^1(U\,;\Lambda_o(E,\partial))$$
$$\{s_i\} \longrightarrow \{s_i s_j^{-1}\}$$

et

$$\delta'' : \ C^1 = C^1(U\,;\Lambda_o(E,\partial)) \longrightarrow C^2 = C^2(U\,;\Lambda_o(E,\partial))$$
$$\{s_{ij}\} \longrightarrow \{s_{jk} s_{ik}^{-1} s_{ij}\}$$

on a un complexe

$$C^0 \xrightarrow{\delta'} C^1 \xrightarrow{\delta''} C^2 \quad ;$$ i.e. on a la relation

{les cobords}$= B^1 = B^1(U\,;\Lambda_o(E,\partial)) = \delta'(C^0) \subset \delta''^{-1}(\{id\}) = Z^1(U\,;\Lambda_o(E,\partial)) = Z^1 =$ {les cocycles} ; ou encore $\delta''\delta'$ = l'application constante id .

On considère l'action du groupe C^0 sur l'ensemple Z^1 définie par l'application :

$$\sigma : \ C^0 \times Z^1 \longrightarrow Z^1$$
$$(\{\lambda_i\},\{s_{ij}\}) \longrightarrow \{\lambda_i s_{ij} \lambda_j^{-1}\} \quad ;$$

on a alors

$$\sigma(C^0 \times B^1) = \sigma(C^0 \times \{id\}) = \sigma(C^0 \times \{s_{ij}\}) = B^1 \quad ; \text{ pour tout } \{s_{ij}\} \text{ dans } B^1 .$$

En passant à l'espace-quotient relativement à la relation d'equivalence R induite par l'action σ sur Z^1 et en considérant la classe de transitivité B^1 comme étant triviale , on définit l'espace des classes de cohomologies du recouvrement U à valeurs dans le faisceau $\Lambda_o(E,\partial)$ qu'on dénote par $H^1(U, \Lambda_o(E,\partial)) \overset{\text{déf}}{=} Z^1/R$; i.e.

$$\beta \in H^1(U, \Lambda_o(E,\partial)) \iff \exists\ \{\beta_{ij}\} \in Z^1 \ ; \ \beta = \sigma(C^0 \times \{\beta_{ij}\}) \quad ;$$

et si $\{\beta_{ij}\} \in B^1$ alors $\beta = B^1 \overset{\text{déf}}{=} 0_{H^1}$.

On définit ensuite $H^1(S, \Lambda_o(E,\partial)) = \varinjlim_{V<U} H^1(V, \Lambda_o(E,\partial))$ en passant à la limite inductive suivant l'ordonné filtrant des recouvrements V plus fin que U , ce qui a un sens pour notre cas puisque S étant paracompact , tout recouvrement posséde un recouvrement localement fini plus fin .

Ce qui précéde donne un cocycle $\{\beta_{ij}\}$ de $\Lambda_o(E,\partial)$ pour le recouvrement $U = \{U_i\}$,

d'où par passage au quotient une classe de cohomologie dans $H^1(U,\Lambda_o(E,\partial))$.

Si $(V = \{V_j\} ; \{\lambda_j\})$ est un autre couple de recouvrement de S et de relèvements de $\alpha^\wedge$,

on aura un cocycle de $\Lambda_o(E,\partial)$ pour V ; alors en considérant le recouvrement

$W = U\cap V = \{U_i\cap V_j\}_{(i,j)\in I\times J} = \{ W_k \}_{k\in K}$ qui est à la fois plus fin que U et V ,

et les restrictions

$$R_W{}^U\{\alpha_i\} = \{\alpha'_k\} \quad \text{et} \quad R_W{}^V\{\lambda_j\} = \{\lambda'_k\} ,$$

on aura $\{\alpha'_k\lambda'^{-1}_k\} \in C^0(W ; \Lambda_o(E,\partial))$ et $\{\alpha'_k\alpha'^{-1}_h\} = \sigma (\{\alpha'_k\lambda'^{-1}_k\},\{\lambda'_k\lambda'^{-1}_h\})$,

i.e. une même classe de cohomologie dans $H^1(W, \Lambda_o(E,\partial))$ et par suite une unique classe

de cohomologie $\gamma(\alpha^\wedge)$ dans $H^1(S, \Lambda_o(E,\partial))$ qui ne dépend ainsi que de $\alpha^\wedge$ et non

du couple choisi $(U ; \{\alpha_i\})$.

Posons la définition **:**

<u>Les triplets $(E',\partial,\alpha^\wedge)$ et $(E'',\partial,\alpha'^\wedge)$ sont équivalents si l'isomorphisme</u>

<u>$\alpha'^{\wedge-1}\alpha^\wedge$ **:** $(E'^\wedge,\partial) \cong\!\!\to (E''^\wedge,\partial)$ provient d'un isomorphisme δ **:** $(E',\partial) \cong\!\!\to (E'',\partial)$,</u>

nécéssairement unique à cause de la commutativité du diagrame

$$\begin{array}{ccc} (E',\partial) & \rightarrow & (E'',\partial) \\ \{\alpha_i\}\downarrow & & \downarrow\{\alpha'_i\} \\ (E ,\partial) & = & (E ,\partial) \end{array} .$$

On a alors le résultat suivant **:**

<u>LEMME.3.3.</u>

$(E',\partial, \alpha^\wedge)$ et $(E'',\partial, \alpha'^\wedge)$ sont équivalents si et seulement si $\gamma(\alpha^\wedge) = \gamma(\alpha'^\wedge)$.

Preuve :

Supposons qu'on ait $\gamma(\alpha^{\wedge}) = \gamma(\alpha'^{\wedge})$; quitte à raffiner les recouvrements , on peut supposer que les relèvements $\{\alpha_i\}$ et $\{\alpha'_i\}$ sont définis sur le même recouvrement $\{U_i\}$ et qu'il existe des $\beta_i \in \Gamma(U_i, \Lambda_o(E,\partial))$ tels qu'on ait sur $U_i \cap U_j$,

$$\alpha'_i \alpha'^{-1}_j = \beta_i \alpha_i \alpha_j^{-1} \beta_j^{-1} \quad ;$$

on a alors $\alpha'^{-1}_j \beta_j \alpha_j = \alpha'^{-1}_i \beta_i \alpha_i$; $\forall i,j$,

ces fonctions se recollent donc en une section globale sur S de $\mathrm{a}\underset{K}{\otimes}\mathrm{Hom}_K(E',E'')$,

section qui sera nécéssairement méromorphe ($\mathrm{a}(S) = K$) , on aura donc

$\delta = \{ \alpha'^{-1}_i \beta_i \alpha_i \} \in \mathrm{Hom}_K(E',E'')$;

d'autre part δ sera visiblement inversible et horizontale pour ∂ , et vérifiera en passant aux développements asymptotiques

$$\delta^{\wedge} = \alpha'^{\wedge -1} \alpha^{\wedge} \quad ;$$

donc $(E',\partial,\alpha^{\wedge})$ et $(E'',\partial,\alpha'^{\wedge})$ sont équivalents .

Réciproquement , si on a équivalence , il existe un isomorphisme $\delta : (E',\partial) \xrightarrow{\cong} (E'',\partial)$;

soit $\{\alpha'_i\}$ un relèvement de $\alpha'^{\wedge}$ donné sur un recouvrement $U = \{U_i\}$ de S , et posons

$\alpha_i = \alpha'_i \delta$ sur U_i ; $\forall i$, on a alors $\{\alpha_i\}$ qui est un relèvement de $\alpha^{\wedge}$ sur le même recouvrement U ($\alpha'^{\wedge}_i \delta^{\wedge} = (\alpha'_i \delta)^{\wedge} = \alpha^{\wedge}$) , et

$$\alpha_i \alpha_j^{-1} = \alpha'_i \delta \delta^{-1} \alpha'^{-1}_j = \alpha'_i \alpha'^{-1}_j \quad \text{sur } U_i \cap U_j \neq \emptyset \ ,$$

d'où trivialement une même classe de cohomologie dans $H^1(S,\Lambda_o(E,\partial))$; i.e. $\gamma(\alpha^{\wedge}) = \gamma(\alpha'^{\wedge})$.

Désignons enfin par $CL(E,\partial)$ l'ensemble des $(E',\partial,\alpha^{\wedge})$ à équivalence prés ; ce qui précède donne une application injective

$$\gamma : CL(E,\partial) \longrightarrow H^1(S, \Lambda_o(E,\partial)) \quad ;$$

i.e. la condition nécéssaire du Lemme3.3. montre que γ est bien définie , et la condition suffisante qu'elle est injective .

THEOREME.3.4.

L'application $\gamma : CL(E, \partial) \longrightarrow H^1(S, \Lambda_o(E, \partial))$ est bijective .

Reste à démontrer la surjectivité .

Elle résulte du théorème suivant **:**

THEOREME.3.5.

L'application $H^1(S, \Lambda_o(E)) \longrightarrow H^1(S, \Lambda(E))$ a pour image zéro .

C'est-à-dire , tout cocycle de $\Lambda_o(E)$ est un cobord de $\Lambda(E)$.

Ce dernier résultat est dù à Sibuya [S1] . Avant d'en donner une démonstration , montrons comment il entraîne (3.4) .

Soit $\beta \in H^1(S,\Lambda_o(E,\partial))$; pour un recouvrement convenable $\{U_i\}$ de S , β est représenté par des $\beta_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \Lambda_o(E,\partial))$; d'après (3.5) on peut écrire

$$\beta_{ij} = \alpha_i \alpha_j^{-1} \quad , \quad \text{avec} \quad \alpha_i \in \Gamma(U_i, \Lambda(E)) \; .$$

Du fait de l'horizntalité de β_{ij} pour ∂, on a $\partial\beta_{ij} = \beta_{ij}\partial$, se qui s'écrit

$$\partial\alpha_i \alpha_j^{-1} = \alpha_i \alpha_j^{-1}\partial \qquad \text{ou encore} \qquad \alpha_i^{-1}\partial \alpha_i = \alpha_j^{-1}\partial \alpha_j \qquad (**)$$

les $\partial^{\alpha i} \overset{\text{déf}}{=} \alpha_i^{-1}\partial \alpha_i$ sont des sections de $a \underset{K}{\otimes} End_C(E)$ sur U_i ; i.e. des connexions sur les restrictions du faisceau $a \underset{K}{\otimes} E$ aux U_i , et les relations (**) implique que ces connexions se recollent pour donner une connexion ∂' sur E , on peut aussi s'en convaincre en prenant une base et en recollant les matrices des connexions ainsi définies .

D'autre part , on a $\alpha_i^{\wedge} = \alpha_j^{\wedge}$ car $\beta_{ij}^{\wedge} =$ id ; $\forall$i,j , donc les $\alpha_i^{\wedge}$ définissent un isomorphisme $\alpha^{\wedge} : E^{\wedge} \longrightarrow E^{\wedge}$; du fait que $\alpha^{\wedge -1}\partial \alpha^{\wedge} = \partial'$ on a $\partial\alpha^{\wedge} = \alpha^{\wedge}\partial'$ et donc $\alpha^{\wedge}$ est un isomorphisme $(E^{\wedge},\partial') \cong\!\!\rightarrow (E^{\wedge},\partial)$ et il est alors clair par construction qu'on a $\gamma(\alpha^{\wedge}) = \beta$; d'où le Théorème 3.4.

Démonstration du Théorème 3.5.

Soit $\mathfrak{a}'$ le sous-espace de $\mathfrak{a}$ formé des f dont le développement asymptotique est sans pôle ; i.e. $\mathfrak{a}' = T^{-1}(\hat{\vartheta})$; soit $\underline{GL}^{O}(n, \mathfrak{a}')$ le sous-faisceau de groupes de $\underline{GL}(n, \mathfrak{a}')$ formé des matrices asymptotes à l'identité.

En prenant une base (e) de E sur K , on a $\Lambda_o(E) \overset{(e)}{\cong} \underline{GL}^{O}(n, \mathfrak{a}) = \underline{GL}^{O}(n, \mathfrak{a}')$,
il suffit évidemment de démontrer l'assertion suivante :

PROPOSITION.3.6.
L'application $H^1(S, \underline{GL}^{O}(n, \mathfrak{a}')) \longrightarrow H^1(S, \underline{GL}(n, \mathfrak{a}'))$ a pour image zéro.

On va d'abord trivialiser la situation « en C^∞ » ; i.e.
on plonge $\mathfrak{a}'$ dans l' espace des germes en 0 de fonctions C^∞ au voisinage de 0 de **C** dont le développement asymptotique est sans pôle .

Soit $\mathfrak{I}$ le faisceau sur S défini ainsi **:**
Les éléments de $\mathfrak{I}_\theta$ sont représentés par des matrices d'ordre n dans un petit secteur fermé $V_\theta = \{\, |\arg x - \theta| \le \varepsilon ,\ |x| \le \varepsilon \,\} \cup \{0\}$ de **C** ($\varepsilon > 0$) de la forme id + M ,
M étant de classe C^∞ (par rapport à *Re*(x) et *Im*(x)) et plate en 0 , i.e. toutes ses dérivées par rapport à *Re*(x) et *Im*(x) sont nulles en 0 .

LEMME.3.7.
$$H^1(S, \mathfrak{I}) = 0.$$

Preuve.

Cela découle du fait que l'application restriction $R_U : \Gamma(S, \mathfrak{I}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathfrak{I})$ est surjective pour tout $U \subset S$; en effet , soit $\sigma \in \Gamma(U, \mathfrak{I})$ et pour tout x voisin de $0 \in \mathbf{C}$

posons

$$\sigma'(\theta)(x) = \begin{cases} \sigma(\theta)(x) & \text{si } \theta \in U\ (\Rightarrow \arg x \in U), \\ id(x) = id(0) & \text{si } \arg x \notin U, \forall \theta \in S, \end{cases} \quad ; \quad \text{alors } \sigma' \in \Gamma(S, \mathfrak{I}) \quad \text{et} \quad R_U(\sigma') = \sigma .$$

Soit $\beta \in H^1(S,\mathfrak{I})$ et $\{\beta_{ij}\}$ un cocycle le représentant sur le recouvrement suivant **:**

$U = \{U_i\}_{i\in I}$ est tel que pour tout triplet ordonné (i,j,k) de $I = \{1,2, \ldots ,p,q\}$ on a

$$U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k = U_i \cap U_k = U_{ik} \neq \varnothing \quad \text{et} \quad U_{ijkl} = \varnothing \ ; \quad \forall\ i,j,k,l \in I .$$

On a par hypothèse , pour le 1er triplet $(1,2,3)$, $\beta_{13} = \beta_{12}\,\beta_{23}$ sur U_{13} ; soient les

relévements $\alpha_1 \in \Gamma(U_1,\mathfrak{I})$ et $\alpha_3 \in \Gamma(U_3,\mathfrak{I})$ tels que $R_{U_{13}}^{U_1}\,\alpha_1 = \beta_{12}\,\beta_{13}$ et $R_{U_{13}}^{U_3}\,\alpha_3 = \beta_{23}^{-1}\beta_{13}$,

on a alors

$$\underline{\beta_{13} = \alpha_1\alpha_3^{-1}} \quad \text{et} \quad \beta_{12}^{-1}\,\alpha_1 = \beta_{23}\,\alpha_3 \quad \text{sur} \quad U_{13} = U_{12} \cap U_{23} \ ;$$

soit $\alpha_2 \in \Gamma(U_2,\mathfrak{I})$ le recollement sur $U_{12} \cup U_{23} = U_2$,

i.e. $R_{U_{12}}^{U_2}\,\alpha_2 = \beta_{12}^{-1}\,\alpha_1$ et $R_{U_{23}}^{U_2}\,\alpha_2 = \beta_{23}\,\alpha_3$, on a alors

$$\underline{\beta_{12} = \alpha_1\alpha_2^{-1}} \quad \text{et} \quad \underline{\beta_{23} = \alpha_2\,\alpha_3^{-1}} \ .$$

Ensuite , $\beta_{24} = \beta_{23}\,\beta_{34} = \alpha_2\alpha_3^{-1}\beta_{34}$ sur U_{24} implique $\beta_{34}^{-1}\alpha_3 = \beta_{24}^{-1}\alpha_2$ sur U_{24} ;

soit $\alpha_4 \in \Gamma(U_4,\mathfrak{I})$ tel que $R_{U_{34}}^{U_4}\,\alpha_4 = \beta_{34}^{-1}\alpha_3$, alors $U_{24} \subset U_{34}$ implique

$$R_{U_{24}}^{U_4}\,\alpha_4 = R_{U_{24}}^{U_{34}} \circ R_{U_{34}}^{U_4}\,\alpha_4 = R_{U_{24}}^{U_{34}}\,\beta_{34}^{-1}\,\alpha_3 = \beta_{24}^{-1}\alpha_2 \quad ; \quad \text{d'où}$$

$\underline{\beta_{24} = \alpha_2\alpha_4^{-1}}$ et $\underline{\beta_{34} = \alpha_3\alpha_4^{-1}}$.

On poursuit cette construction ,i.e. on passe à $\beta_{35} = \beta_{34}\,\beta_{45} = \alpha_3\,\alpha_4^{-1}\beta_{45}$ … pour aboutir à

$\beta_{pq} = \alpha_p\,\alpha_q^{-1}$ avec $\alpha_p \in \Gamma(U_p, \mathfrak{I})$ et $\alpha_q \in \Gamma(U_q, \mathfrak{I})$.

Reste alors à trivialiser les éléments β_{p1} , β_{q1} et β_{q2} ; pour cela on considère les équations aux inconnues $\omega_1 \in \Gamma(U_1, \mathfrak{I})$ et $\omega_2 \in \Gamma(U_2, \mathfrak{I})$

$$R_{U_{q1}}^{U_1}\,\omega_1 = \beta_{q1}^{-1}\,\alpha_q \quad \text{et} \quad R_{U_{12}}^{U_2}\,\omega_2 = \beta_{12}^{-1}\,\omega_1 \quad ;$$

on aura $\beta_{12} = \omega_1\omega_2^{-1} = \alpha_1\alpha_2^{-1}$, i.e. $\alpha_1^{-1}\omega_1 = \alpha_2^{-1}\omega_2$ sur U_{12} , et $(\omega_1,\omega_2) = (\alpha_1,\alpha_2)$ est un couple de solutions telles que $\underline{\beta_{q1} = \alpha_q\alpha_1^{-1}}$, $\underline{\beta_{q2}} = \beta_{q1}\beta_{12} = \underline{\alpha_q\alpha_2^{-1}}$ et $\underline{\beta_{p1}} = \beta_{pq}\,\beta_{q1} = \underline{\alpha_p\,\alpha_1^{-1}}$.

d'où le Lemme .

Notons qu'alors , si $J = \{1,3,\ldots,2k+1,\ldots, q$ impair ou $q-1$ si q pair $\} \subset I$, on a encore une trivialisation du cocycle $\{\beta_{j,j+2}\}_{j\in J}$ qui représente $\boldsymbol{\beta}$ sur le recouvrement (moins fin)

$U' = \{U_j\}_{j\in J}$ avec $U_{j,j+2} \neq \varnothing$, $U_{jk} = \varnothing$ si $k \notin \{j-2, j+2\}$; $j, j-2, j+2 \in J$ et $(q+2$ ou $(q-1)+2) \equiv 1$.

On se servira de ce type de couple (U' ; $\{\beta_{jk}\}$) pour la trivialisation « analytique ».

Maintenant , si $f \in \underline{GL}^{O}(n, \mathrm{a}'_\theta)$; $\theta \in S$, par définition ,un domaine de définition de f est $W_\theta = \{\, |\arg x - \theta| < \eta \;;\; 0 < |x| < \eta \,\}$ (= germe de secteur) , et $f^{\wedge} = id$ en $0 \in \mathbf{C}$ implique que pour tout sous-secteur ouvert $U_\theta \subset W_\theta$,

$f \in C^{\infty}[\,\cancel{U}_\theta$ = adhérence de U_θ dans $\mathbf{C}$; $GL(n, \mathbf{C})\,]$ et

$$f' =^{\text{déf}} \begin{cases} f \text{ sur } \cancel{U}_\theta \\ f'(0) = id \end{cases} \in \mathfrak{I}_\theta \qquad ;$$

i.e. $f' \in C^{\infty}[\,V_\theta = \cancel{U}_\theta \cup \{0\}$; $GL(n, \mathbf{C})\,]$ et $f'^{\wedge} = id$.

Alors si $f' = h.g$; $h, g \in \mathfrak{I}_\theta$ on aura $f \mid U_\theta = f' \mid U_\theta = h.g \mid U_\theta$ et la trivialisation C^∞ des éléments de $\mathfrak{I}$ se prolonge à ceux de $\underline{GL^O}(n, a')$.

Soit donc $\beta \in H^1(S, \underline{GL^O}(n, a'))$ et $\{\beta_{ij}\}$ un cocycle le représentant dans le recouvrement $U = \{U_{ij}\}$ tel que U_i ne rencontre que U_{i-1} et U_{i+1} , $\forall$ i ; le Lemme précédent montre qu'il existe des $\alpha_i \in \Gamma(U_i, \mathfrak{I})$ tels qu'on ait $\beta_{ij} = \alpha_i \alpha_j^{-1}$ sur $U_{ij} \neq \varnothing$.

Soit $\{\beta'_{ij}\}$ le prolongement C^∞ de $\{\beta_{ij}\}$ à $\{\Gamma(U_{ij}, \mathfrak{I})\}$ et pour tout j

$$\delta_j = \begin{cases} \beta'_{ij}\,\alpha_j & \text{sur } U_{ij} \\ \alpha_j & \text{sur } U_j - U_{ij} \end{cases} \in \Gamma(U_j, \mathfrak{I})$$

obtenu en relevant à $\Gamma(U_j, \mathfrak{I})$ le prolongement β'_{ij} de β_{ij} qu'on multiplie à gauche par

$\alpha_j \in \Gamma(U_j, \mathfrak{I})$; on a alors $U_j - U_{ij} \supset U_{jk} \neq \varnothing$ et $\beta'_{jk}\,\alpha_k = \alpha_j$ sur U_{jk} implique

$$R_{U_{jk}}^{U_k}\,\delta_k = R_{U_{jk}}^{U_j - U_{ij}}\,\alpha_j = R_{U_{jk}}^{U_j}\,\delta_j \quad \text{sur } U_{jk} \text{ ,} \qquad \text{et donc}$$

$$\delta_j^{-1}.\partial/\partial\bar{x}.\delta_j = \begin{cases} \alpha_j^{-1}\beta'^{-1}_{ij}\beta'_{ij}.\partial/\partial\bar{x}.\alpha_j = \alpha_j^{-1}.\partial/\partial\bar{x}.\alpha_j & \text{sur } U_{ij} \\ \alpha_j^{-1}.\partial/\partial\bar{x}.\alpha_j & \text{sur } U_j - U_{ij} \end{cases} = \alpha_j^{-1}.\partial/\partial\bar{x}.\alpha_j \quad \text{sur } U_j \text{ pour tout j .}$$

Posons alors $\beta_i = \alpha_i \delta_i^{-1}$; $\forall$ i , ce sont des fonctions holomorphes (i.e. $\beta_i(\theta)$; $\forall\theta \in U_i$) dans l'intérieur de leurs domaines de définition puisque

$$\partial/\partial\bar{x}.\beta_i = (\partial/\partial\bar{x}.\alpha_i)\delta_i^{-1} - \alpha_i\delta_i^{-1}(\partial/\partial\bar{x}.\delta_i)\delta_i^{-1} = \alpha_i\left\{\alpha_i^{-1}(\partial/\partial\bar{x}.\alpha_i) - \delta_i^{-1}(\partial/\partial\bar{x}.\delta_i)\right\}\delta_i^{-1} = 0 \ ; \forall i ,$$

et

$$\beta_i\beta_j^{-1} = \alpha_i\delta_i^{-1}\delta_j\alpha_j^{-1} = \alpha_i\alpha_j^{-1} = \beta_{ij} \text{ sur } U_{ij} \neq \varnothing ; \forall i,j \quad \text{puisque } \delta_i = \delta_j \text{ sur } U_{ij} \neq \varnothing ; \forall i,j .$$

D'où la Proposition.

CHAPITRE IV. STRUCTURES DE STOKES.

On va traduire les résultats du paragraphe précédent en termes de développement asymptotiques des solutions sectorielles des équations considérées ; on suit ici Deligne [D2].

Soit (E, ∂) un vectoriel à connexion sur K . Soit V le faisceau localement constant sur S des sections horizontales sectorielles de E (= système local des sections horizontales de E) défini ainsi :

Pour $\theta \in S$, V_θ est l'espace des sections horizontales de (E, ∂) sur un petit secteur $\{ 0 < |x| < \varepsilon \} \cap \{ |\arg x - \theta| < \varepsilon \}$.

Appliquons le Théorème2.1. : après éventuellement une ramification $t^p = x$,

on peut trouver un isomorphisme formel

$$\hat{\lambda} : \hat{E} \underset{K}{\otimes} L \xrightarrow{\cong} \hat{E_1} \quad ; \qquad \text{avec } E_1 \text{ de la forme } \bigoplus_{\alpha \in A} (F^\alpha \underset{L}{\otimes} G^\alpha) ;$$

en appliquant le Théorème3.2. à $\mathrm{Hom}_L(E \underset{K}{\otimes} L , E_1)$, on obtient un isomorphisme sectoriel au voisinage de θ , $U_\theta : E \underset{K}{\otimes} L \xrightarrow{\cong} E_1$, donné par un élément inversible de $\mathfrak{a}_\theta \underset{L}{\otimes} \mathrm{Hom}(E \underset{K}{\otimes} L , E_1)$, qui transformera donc V_θ en $V_{1,\theta}$ (V_1 étant le système local des sections horizontales de E_1) ;

d'autre part , V_1 s'explicite immédiatement : les sections horizontales de E_1 sont de la forme $\sum_{\alpha \in A} e^{-\int \alpha} . f_\alpha$, où f_α est solution d'une équation à singularités régulières ;

par U_θ, on en déduit l'allure asymptotique des sections horizontales de (E, ∂) dans un secteur voisin de θ ; en particulier , on peut mettre un ordre partiel sur V_θ en fonction de celles des exponentielles qui interviennent dans ledit comportement asymptotique .

Cela conduit à la construction suivante **:**

Soit $\mathfrak{I}$ le système local suivant sur S : sur un secteur on prend les formes

$\sum_{k=-n}^{\infty} a_k.x^{k/p}.dx$ (p , n'importe quel entier > 0) , modulo pôles d'ordre ≤ 1 .

Sur $\mathfrak{I}$, on définit l'ordre partiel suivant :

Pour $\theta \in S$, on a $\alpha \underset{\theta}{\leq} \beta$ si $e^{-\int(\alpha-\beta)}$ est à croissance lente ; i.e. $o(|x|^{-N})$ pour un N > 0 ; dans un petit secteur autour de θ ; ce qui s'écrit encore

$$\underset{|x|\to 0}{Lim}\, |x|^N.|e^{-\int(\alpha-\beta)}| = \underset{|x|\to 0}{Lim}\, |x|^N.e^{Re(-\int(\alpha-\beta))} = 0 \quad \text{dans} \quad \{ x \ ; |\arg x - \theta| < \varepsilon \}.$$

A noter que , pour α et β donnés ; $\alpha \neq \beta$, il existe un nombre fini de points θ de S (ou plus exactement ,d'un revêtement d'ordre p de S) tels que α et β soient incomparables au voisinage de θ ; dans ce cas , pour $\varepsilon > 0$ assez petit et $\theta' = \theta \pm \varepsilon$, d'un côté on aura $\alpha \underset{\theta'}{<} \beta$; de l'autre côté on aura $\beta \underset{\theta'}{<} \alpha$ (on écrit < pour $\leq$ et $\neq$).

En effet ; soient

$$\alpha = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k(\alpha).x^{k/p}.dx \quad , \quad \beta = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k(\beta).x^{k/p}.dx \quad ; \text{avec} \quad \alpha \neq \beta \ \text{dans}\ \mathfrak{I} ,$$

alors

$$\alpha - \beta = \sum_{k=-r}^{\infty} (a_k(\alpha) - a_k(\beta)).p.t^{k+p-1}.dt \ ; \ \text{avec} \quad t^p = x \quad \text{et} \quad r = -v_t(\alpha-\beta) > 1.$$

Notons $b_k(\alpha,\beta) = (a_k(\alpha) - a_k(\beta))$ et $\gamma(t) = -\int(\alpha-\beta)$; on aura

$$\gamma(t) = \sum_{k=-r}^{-p-1} (p/p+k).b_k(\alpha,\beta).t^{p+k} + p.b_{-p}(\alpha,\beta).\,log\, t + \sum_{k=-p+1}^{\infty} (p/p+k).b_k(\alpha,\beta).t^{k+p}$$

$$= \chi(t) + p.b_{-p}(\alpha,\beta).\,log\, t + o(1) \qquad \text{au voisinage de} \quad t = 0 ;$$

où $\chi(t) = (p/ p - r).\, b_{-r}(\alpha,\beta).t^{p - r}.(1 + o(1))$ au voisinage de $t = 0$,

avec $p < r$ (car sinon, $p \geq r \Rightarrow \alpha = \beta$ dans $\Im$) ; on a alors en posant

$b_{-r}(\alpha,\beta) = a.e^{i.b}$, $b_{-p}(\alpha,\beta) = c.e^{i.d}$ avec $a , c > 0$ et $b,d \in \mathbf{R}$ et $t = \rho.e^{i.\eta}$ la variable

$$Re(\gamma (\rho.e^{i.\eta})) = (p / p - r).a.\rho^{p-r}. \cos(b + (p - r).\eta) + o(\rho^{p-r}) ,$$

et pour $\eta \in \{\sigma = (1/p - r)(\pi/2 - b) ; \tau = (1/p - r)(3\pi/2 - b) ; \text{modulo } 2\pi\mathbf{Z} \}$ on aura

$\cos(b + (p - r).\eta) = 0$ et alors pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $\theta \in \{\sigma , \tau \}$ tel que

$$\lim_{\rho \to 0} Re(\gamma (\rho.e^{i.(\theta - \varepsilon)})) = \lim_{\rho \to 0} Re(- \gamma (\rho.e^{i.(\theta + \varepsilon)})) = -\infty ,$$

et $\quad Re(\gamma (\rho.e^{i.\theta})) \leq -p.c.\log \rho$

ce qui implique qu'il existe un $N =[c] +1$ tel que

$$Re(\gamma (\rho.e^{i.\theta})) \leq -N.\log|x| \quad ; \quad \text{pour tout } \rho \text{ voisin de } 0 ;$$

et donc dans le secteur $\{ \theta \leq \eta < \theta + \varepsilon \ , 0 < \rho < \varepsilon \}$ on aura

$\lim_{\rho \to 0} e^{N.\log \rho}.e^{Re(-\gamma(t))} = 0$; i.e. $\beta \underset{\theta'}{<} \alpha$ avec $\theta' = \theta + \varepsilon / 2$;

et dans le secteur $\{ \theta - \varepsilon < \eta \leq \theta \ , 0 < \rho < \varepsilon \}$ on aura

$\lim_{\rho \to 0} e^{N.\log \rho}.e^{Re(\gamma(t))} = 0$; i.e. $\alpha \underset{\theta'}{<} \beta$ avec $\theta' = \theta - \varepsilon / 2$;

c'est-à-dire que, globalement, dans le secteur $\{ |\arg t - \theta |< \varepsilon \ , 0 < |t| < \varepsilon \}$ on a simultannement $\alpha \underset{\theta'}{<} \beta$ et $\beta \underset{\theta'}{<} \alpha$ pour θ' voisin de θ ; de plus l'ensemble $\{ \theta + (k / r - p).\pi \ ; \ 0 \leq k \leq 2(r - p) - 1 \}$ détérmine les seules directions au voisinage desquelles α et β sont incomparables sur le revêtement d'ordre p de S.

Les demi-droites correspondantes s'appellent traditionnellement les « lignes de Stokes » relatives à la paire (α , β) .

DEFINITION.4.1.

Soit V un système local (= un faisceau localement isomorphe à $\mathbf{C}^n$) sur S .

Une structure de Stokes , ou $\mathfrak{I}$-filtration de V est une famille de sous-faisceaux V^{α} , indexée par $\mathfrak{I}$, admettant la propriété suivante :

Pour tout $\theta \in S$, il existe une décomposition $V_\theta = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{I}} V_{\alpha,\theta}$

telle qu'on ait , pour tout θ' voisin de θ :

$$V_{\theta'}^{\alpha} = \bigoplus_{\beta \underset{\theta'}{\leq} \alpha} V_{\beta,\theta}$$

(N.B. les V^{α} ne sont pas des sous-faisceaux au sens usuel , ils sont indéxés par un système local et non un ensemble).

Ainsi , pour tout $\theta \in S$, on aura un morphisme surjectif

$$V_\theta = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{I}} V_{\alpha,\theta} \longrightarrow T(V_\theta) = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{I}} E^{\partial}_{\alpha} \quad ; \quad \text{où} \quad E^{\partial}_{\alpha} = T(V_{\alpha,\theta}) ,$$

T est l'application « Série de Taylor » ; et pour tout θ' voisin de θ et tout $\gamma \in \mathfrak{I}$ on aura

$$V_{\theta'}^{\gamma} = \bigoplus_{\beta \underset{\theta'}{\leq} \gamma} V_{\beta,\theta} = \sum_{\beta \underset{\theta'}{\leq} \gamma} V_{\theta'}^{\beta} \ \text{ et } \ T(V_{\theta'}^{\gamma}) = T(\bigoplus_{\lambda \approx \gamma} V_{\lambda,\theta}) \ ; \text{i.e. } T \,|V_{\theta'}^{\gamma}(\sum_{\beta \underset{\theta'}{<} \gamma} V_{\theta'}^{\beta}) = 0 ;$$

en effet, soit $s \in V_{\theta'}^{\gamma}$, alors $s = \sum_{\beta \underset{\theta'}{\leq} \gamma} e^{-\int \beta}.f_\beta$ et pour tout $\beta \underset{\theta'}{<} \gamma$

$$T(e^{-\int(\beta-\gamma)}) = \sum_{k \geq 0} (1/k!).(\mathop{Lim}_{x \to 0} d^k/dx^k(e^{-\int(\beta-\gamma)})) . x^k ,$$

(voir par exemple [W].Théorème.9.1) car les limites existent et valent

$\mathop{Lim}_{x \to 0} d^k/dx^k (e^{-\int(\beta-\gamma)}) = \mathop{Lim}_{x \to 0} P_k(x^{-1/p}).e^{-\int(\beta-\gamma)} = 0 \ ; \forall\, k \geq 0$, du fait de la croissance exponentielle qui l'emporte sur celle des polynômes $P_k(x^{-1/p})$;

donc $T(s) = T\left(\sum_{\lambda \approx \gamma} e^{-\int \lambda}.f_\lambda\right) \in \bigoplus_{\lambda \approx \gamma} E^{\partial}_\lambda$; par conséquent , $T \,|V_{\theta'}^{\gamma}$ induit un isomorphisme

(relatif à la $\mathfrak{I}$-filtration) $$V_{\theta'}^{\gamma} \Big/ \sum_{\beta \underset{\theta'}{<} \gamma} V_{\theta'}^{\beta} \xrightarrow{\cong} E^{\partial}_{\gamma} \; ;$$

d'où une $\mathfrak{I}$-graduation associée à la $\mathfrak{I}$-filtration de V ; grV définie par **:**

$$\text{pour tout } \alpha \in \mathfrak{I}, \quad (\mathrm{grV})_{\theta'}^{\alpha} = \bigoplus_{\gamma \underset{\theta'}{\leq} \alpha} V_{\theta'}^{\gamma} \Big/ \sum_{\beta \underset{\theta'}{<} \gamma} V_{\theta'}^{\beta} \quad ;$$

de plus , la propriété 4.1. assure que les $(\mathrm{grV})^{\alpha}$ forment une famille indéxée par $\mathfrak{I}$ de systèmes locaux .

Ceci posé , soit (E,∂) un vectoriel à connexion sur K , et V le système local de ses solutions ; la construction du début de ce paragraphe fournit une structure de Stokes sur V , qu'on peut d'ailleurs se contenter d'indexer par les α qui interviennent dans la décomposition de E_1 , les autres ne jouant aucun rôle .

Ce qui précéde donne un foncteur Φ **:**

$$(\text{vectoriels à connexion sur } K) \longrightarrow (\text{systèmes locaux } \mathfrak{I}\text{-filtrés}) ,$$

la flèche sur les « Hom » étant les morphismes horizontaux mèromorphes.

Le résultat est alors le suivant .

<u>THEOREME.4.2.</u>

Φ est une équivalence de catégories .

A). Montrons d'abords que Φ est pleinement fidèle .

Pour cela , considérons deux vectoriels à connexion (E,∂) et (E_1,∂) , et soit $F = \mathrm{Hom}_K(E, E_1)$, muni de ∂ ; posons $V = \Phi(E,\partial)$, $V_1 = \Phi(E_1,\partial)$ et $W = \Phi(F,\partial)$;

on vérifie immédiatement que , si l'on désigne par $\cancel{V}$ le système local V où l'on a oublié la filtration , on aura pour tout $\varphi \in F$, $\Phi(\varphi) = \varphi|\cancel{V}$ et pour tout $(e) : \mathbf{C}^n \cong\!\!\rightarrow \cancel{V}$

la commutation $\partial\varphi\,(e) = \varphi\partial\,(e) = 0$ implique $\varphi(e) = (f) : \mathbf{C}^n \cong\!\!\rightarrow \cancel{V}_1$,

donc $\varphi = (f)(e)^{-1} : \cancel{V} \cong\!\!\rightarrow \cancel{V}_1$; i.e. $\cancel{W} = \underline{\mathrm{Hom}}(\cancel{V},\cancel{V}_1)$.

D'autre part , si on définit

$$W_{\beta-\alpha,\theta} = \mathrm{Hom}(\, V_{\alpha,\theta}\ ; V_{1,\beta,\theta}\,) \quad \text{et} \quad W_{\theta'}{}^{\beta-\alpha} = \bigoplus_{\gamma \leq \alpha} W_{\beta-\gamma,\theta}$$

$\cancel{W}$ est muni de la filtration définie par

$$W_{\theta'}{}^{\beta-\alpha}\,(\,V_{\theta'}{}^{\alpha}\,) = V_{1,\theta'}{}^{\beta} \quad .$$

En particulier , pour les $\beta = \alpha$ dans A ; i.e. $\beta \equiv \alpha$ [dln K*] , on aura

$$W^0 = \bigoplus_{\alpha \approx \beta} \mathrm{Hom}(V_\alpha\,; V_{1,\beta}) = \mathrm{Hom}(V\,;V_1) \quad \text{et} \quad \text{pour tout } \theta \in S\,, \quad W_\theta{}^{\leq 0} = W^0 \oplus W_\theta{}^{<0}$$

où $$W_\theta{}^{<0} = \bigoplus_{\beta<\alpha} W_{\beta-\alpha,\theta}$$

Maintenant, pour $\varphi^* = id_K \otimes \varphi$ définie sur $K \underset{\mathbf{C}}{\otimes} V \subset E$, on a pour tous $a \in K$ et $s \in V$

$$\partial\,\varphi^*(\,a \otimes s\,) = \partial\,(\,a \otimes \varphi(\,s\,)\,) = da/dx \otimes \varphi(\,s\,) + a \otimes \partial\,(\,\varphi(\,s\,)\,) = da/dx\,.\varphi(\,s\,) \;;$$

et

$$\varphi^*\,\partial\,(\,a \otimes s\,) = \varphi^*(\,da/dx \otimes s + a \otimes \partial\, s\,) = \varphi^*(\,da/dx \otimes s\,) = da/dx \otimes \varphi(\,s\,) =$$

$$= da/dx\,.\varphi(\,s\,)\,;$$

i.e. $\partial|K\underset{\mathbf{C}}{\otimes}V = d/dx \otimes id_V$ et $\varphi^* \in \mathrm{Hom}_K(\,K\underset{\mathbf{C}}{\otimes}V,\, K\underset{\mathbf{C}}{\otimes}V_1) \subset F = \mathrm{Hom}_K(\,E, E_1)$;

réciproquement, $d/dx \otimes id_V$ étant bilinéaire , le prolongement ; via le supplementaire de V dans E ; de $(\,K\otimes V,\, d/dx \otimes id_V\,)$ à $(\,E, \partial\,)$ est unique , d'où l'identification (= bijection)

$$\begin{array}{ccc} (\,F, \partial\,) & \longleftrightarrow & W^0 \\ \varphi & \longrightarrow & \varphi|V \\ id_K \otimes \psi & \longleftarrow & \psi \end{array} \quad ;$$

et la pleine fidélité.

B) Pour démontrer que Φ est essentiellement surjectif, on a besoin d'introduire un autre foncteur $\Phi^{\wedge}$ qu'on va définir maintenant .

LEMME.4.3.

Soit $(E^{\wedge},\partial)$ un vectoriel à connexion sur $K^{\wedge}$; il existe (E_1,∂) sur K dont le formalisé soit isomorphe à $(E^{\wedge},\partial)$.

Preuve .

Prenons une base de $E^{\wedge}$, soit $(e_1, \dots ,e_n) = (\mathbf{e}) :\ K^{\wedge n} \cong\!\!\rightarrow E^{\wedge}$, et soit M la matrice de ∂ dans cette base , i.e. $\partial(\mathbf{e}) = (\mathbf{e})M$; le changement de base $(\mathbf{e}) = (f_1, \dots ,f_n).S$ transforme M en N, vérifiant $N = S.M.S^{-1} + dS/dx.S^{-1}$, ou encore $dS/dx = S.M - N.S$; dans cette situation , on dira que N est équivalente à M ; si de plus , S est de la forme id + (termes d'ordre > 0) , on dira que N est strictement équivalente à M , dans ce dérnier cas on aura $S = I + Q$ avec $Q \in x.\mathbf{M}_n(\vartheta^{\wedge})$ et $S^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i.Q^i \in \mathbf{M}_n(\vartheta^{\wedge})$, alors

$$N = M.S^{-1} + Q.M.S^{-1} - dS/dx.S^{-1} = M + M.(S^{-1} - I) + Q.M.S^{-1} - dS/dx.S^{-1}$$
$$\stackrel{\text{déf}}{=} M + \Pi ,$$

l'idée serait alors d'avoir $\Pi \in \mathbf{M}_n(\vartheta^{\wedge})$ de sorte que N soit congru à M dans $\mathbf{M}_n(K^{\wedge}/\vartheta^{\wedge})$, et l'isomorphisme $K^{\wedge}/\vartheta^{\wedge} \cong K/\vartheta$ fournira une congruence dans $\mathbf{M}_n(K/\vartheta)$.

Si $M \in x^{-1}.\mathbf{M}_n(\vartheta^{\wedge})$, c'est fini ; sinon , en supposant que $M = \alpha.I + M^*$, avec $\alpha \in K^{\wedge}$, $v(\alpha) < -1$ et $M^* \in x^{-1}.\mathbf{M}_n(\vartheta^{\wedge})$, on aura

$$N = M + \alpha.(S^{-1} - I) + \alpha.Q.S^{-1} + M^*.(S^{-1} - I) + Q.M^*.S^{-1} - dQ/dx.S^{-1} ,$$

et le terme $\alpha.(S^{-1} - I) + \alpha.Q.S^{-1} = \alpha.\sum_{i\geq 1}(-1)^i.Q^i + \alpha.\sum_{i\geq 0}(-1)^i.Q^{i+1}$ n'est nul que si Q est nilpotente ; i.e. il existe $m > 1$ tel que $Q^m = 0_{n\times n}$;

or la réduction formelle (2.1) permet un tel état de faits après eventuellement une ramification $t^p = x$ et pour redescendre à la situation initiale , il suffira de garder dans la matrice Q (donc S) obtenue les puissances entiéres de x .

Plus précisemment , pour chacun des facteurs $F^\alpha \underset{L^\wedge}{\otimes} G^\alpha$; $L^\wedge = K^\wedge[t]$, $t^p = x$; du Théorème 2.1., il s'agit de poursuivre la décomposition du facteur régulier G^α jusqu'à (au plus) l'ordre $n_\alpha = \dim_{L^\wedge}(F^\alpha \underset{L^\wedge}{\otimes} G^\alpha)$ de sorte qu'on ait un nouveau facteur $F^\beta \underset{L^\wedge}{\otimes} G^\beta$ avec $\beta = \alpha + \sum_{-1\leq i \leq m} a_i.t^i dt$, $n_\beta - 1 \leq m \leq n_\alpha$; et relativement à une base cyclique

$(\mathbf{f}) = (f, \partial_\beta f , \ldots , \partial_\beta^{m'-1} f)$, où $m' = n_\beta$, G^β reprèsenté par la matrice $t^m.N^*$ avec $N^*(0) = \rho.I_{m'}$; $\rho \neq 0$ et $N^* \in \mathbf{M}_{m'}(\vartheta^\wedge[t])$ (si $\rho = 0$, faudra passé de m à m+1), i.e. relativement à la base $(\mathbf{f^*}) \stackrel{déf}{=} f \otimes(\mathbf{f}) = (f \otimes f , f \otimes \partial_\beta f , \ldots , f \otimes \partial_\beta^{m'-1} f)$, la matrice de la connexion $\partial = \partial^\beta \otimes \partial_\beta$ sera $M = \beta.I_{m'} + t^m.N^*$.

On utilise alors la transformation $T = \exp(\rho.t^{m+1}/ m +1).I_{m'}$ qui va fournir une connexion $\cancel{\partial}_\beta = \partial_\beta - \rho.t^m.id$ (i.e. une décomposition de ∂_β indépendamment de la base), et une itération $\partial_\beta^k = \partial_\beta \circ \partial_\beta^{k-1}$ fournit des coefficients $P_{i,j}(t) \in t.\mathbf{C}[t]$ définis par

$$\partial_\beta^k = \sum_{0\leq i \leq k} P_{i,k}(t).\cancel{\partial}_\beta^{k-i} \quad ; \quad P_{o,k} = 1 , \ \forall k ; \quad P_{i,k}(0) = 0 \quad \text{pour } 1\leq i \leq k \leq m'-1 ;$$

qui ne sont autres que les coefficients de la matrice de passage de la base ($\mathbf{f}$) à la nouvelle base $(\cancel{\mathbf{f}}) = (f , \cancel{\partial}_\beta f , \ldots , \cancel{\partial}_\beta^{m'-1} f)$ définie par $(\mathbf{f}) = (\cancel{\mathbf{f}}).S$, avec

$$S = I_{m'} + Q = \begin{bmatrix} 1 & P_{1,1}(t) & \ldots\ldots\ldots & P_{m'-1,m'-1}(t) \\ 0 & 1 & . & . \\ 0 & 0 & . \quad . & . \\ & . \quad . & 0 \quad 1 & P_{1,m'-1}(t) \\ 0 & \ldots\ldots . & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{m'}(\vartheta^\wedge[t])$$

Q est visiblement nilpotente d'ordre au plus $m' = n_\beta = \dim_{L^\wedge}(F^\beta \underset{L^\wedge}{\otimes} G^\beta)$, et la matrice de la connexion $\partial = \partial^\beta \otimes \partial_\beta$ relativement à la base $(\cancel{\mathbf{f^*}}) = f \otimes (\cancel{\mathbf{f}})$ sera par construction $N = M + \Pi$; avec $\Pi = t^m.N^*.(S^{-1} - I) + Q.t^m.N^*.S^{-1} - dQ/dx.S^{-1} \in \mathbf{M}_{m'}(\vartheta^\wedge[t])$, d'où le Lemme.

Soit alors $(E^{\wedge},\partial)$ un $K^{\wedge}$-vectoriel à connexion , et soit (E_1,∂) sur K , muni d'un isomorphisme $\lambda_1 : (E^{\wedge}, \partial) \cong\!\!\rightarrow (E_1^{\wedge}, \partial)$.

On pose $\Phi^{\wedge}(E^{\wedge},\partial) = \mathrm{gr}\, \Phi(E_1,\partial)$;

si l'on a un autre système $(E_2 ,\partial ,\lambda_2)$; avec $\lambda_2 : (E^{\wedge}, \partial) \cong\!\!\rightarrow (E_2^{\wedge} , \partial)$, on a un isomorphisme bien détérminé $\mathrm{gr}\, \Phi(E_1,\partial) \cong\!\!\rightarrow \mathrm{gr}\, \Phi(E_2,\partial)$ défini ainsi :

dans un secteur assez petit U , $\lambda_2 \lambda_1^{-1}$ se représente par une section horizontale μ de $\mathrm{a}(U) \underset{K}{\otimes} \mathrm{Hom}_K(E_1 ,E_2)$, d'où une flèche $V_1 \longrightarrow V_2$ sur U $(V_i = \Phi(E_i ,\partial))$;

si l'on change μ en μ' , alors $\mu' - \mu$ est asymptote à 0 ,

i.e. appartient à $\underline{\mathrm{Hom}}(V_1,V_2)^{<0}$, donc induit 0 sur les gradués associés .

Par suite $\Phi^{\wedge}(E^{\wedge},\partial)$ « ne dépend pas » de (E_1 ,∂) ; i.e. possède une unique structure $\mathfrak{I}$-graduée .

On définit la flèche sur les « Hom » par le même procédé . Finalement , on obtient un diagramme commutatif de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} (\text{ Vectoriels à connexion sur } K) & \xrightarrow{\ \Phi\ } & (\text{ Systèmes locaux } \mathfrak{I}\text{-filtrés}) \\ \Big\downarrow \text{formalisé} & & \Big\downarrow \text{gr} \\ (\text{ Vectoriels à connexion sur } K^{\wedge}) & \xrightarrow{\ \Phi^{\wedge}\ } & (\text{ Systèmes locaux } \mathfrak{I}\text{-gradués}) . \end{array}$$

C) On va d'abord démontrer le Théorème suivant .

<u>THEOREME.4.4.</u>

$\Phi^{\wedge}$ est une équivalence de catégories .

Le fait que $\Phi^{\wedge}$ est pleinement fidéle se voit facilement par le même type d'arguments que pour Φ .

Reste à démontrer que $\Phi^{\wedge}$ est essentiellement surjectif .

Soit alors V un système local $\Im$-gradué ; si les $\alpha \in \Im$ pour lesquels $V^{\alpha} \neq 0$ sont non ramifiés, le résultat est immédiat ; il suffit de prendre $E = \bigoplus_{\alpha} (F^{\alpha} \otimes_{K} G^{\alpha})$,

les F^{α} ayant la même signification qu'au Théorème 2.1. et les G^{α} étant à singularité régulière de monodromie égale à celle de V^{α} , car on rappel que la monodromie est un classifiant des vectoriels à connexion « régulière » , plus précisémment on a une équivalence de catégories

$$((E,\partial) \text{ régulier sur } K) \longrightarrow (\text{ Monodromie associée à } (E,\partial))$$

les flèches sur les « Hom » étant pour l'une les morphismes horizontaux , et pour l'autre l'égalité des classes de similitude dans $Gl(n,\mathbf{C})$ des $V^{-1}.V^{\sigma}$, où V désigne le système local associé à (E,∂) et σ l'application $x \to x.e^{2\pi i}$ (= un tour complet autour de 0).

Dans le cas général , soit p tel que , après le changement de variable $t^{p} = x$, les α pour lesquels $V^{\alpha} \neq 0$ soient non ramifiés ; soit T le revêtement de degré p de S et π la projection $T \to S$ définie par $\eta \to p.\eta = \theta$; alors par le résultat précédent l'image réciproque $\pi^*(V)$; définie par : $\forall \theta \in S , \pi^*(V_{\theta}) = V_{\theta/p}$; est représentée par un vectoriel à connexion ($F^{\wedge}, \partial_t$) sur $K^{\wedge}[t] = L^{\wedge}$, et π induisant la projection $L^{\wedge} \to K^{\wedge}$ définie par $t \to t^{p} = x$,

permet de considérer l'action du groupe de Galois $G = Gal(T / S) =^{déf} Gal(L^{\wedge}/ K^{\wedge})$ sur $L^{\wedge} \otimes_{\mathbf{C}} \pi^*(V)$ définie par le fait que pour tous $a \in L^{\wedge}$, $v \in \pi^*(V)$ et $\sigma \in G$ on ait

$$\sigma ((d /dx \otimes id)(a \otimes v)) = (d /dx \otimes id)(\sigma (a \otimes v)) = \sigma (da /dx \otimes v) ,$$

et la relation

$$\sigma (da /dx \otimes v) = da /dx \otimes v$$

détermine,par définition , le sous-espace de $F^{\wedge}$ sur $K^{\wedge}$ invariant par G , noté $[L^{\wedge} \otimes_{\mathbf{C}} \pi^*(V)]^{G}$.

Mais comme $\Phi^{\wedge}$ est pleinement fidéle , on a par prolongement une action de $\mathrm{Gal}(L^{\wedge}/K^{\wedge})$ sur $(F^{\wedge},\partial_t)$; on voit alors qu'il suffit d'en prendre les invariants pour représenter V ; i.e. on aura l'existence d'un $(F^{\wedge},\partial_t)^G =^{\text{déf}} (E^{\wedge},\partial)$ sur $K^{\wedge}$.

D'où le Théorème 4.4.

D) Montrons finalement que Φ est essentiellement surjectif ;

pour cela , il suffit de remarquer ceci ;

soit V un système local $\mathfrak{I}$-filtré ; par (4.3) et (4.4) on peut déjà supposer qu'il existe un (E_1,∂) sur K ; avec $V_1 = \Phi(E_1,\partial)$, tel que $\mathrm{gr}\, V_1$ soit isomorphe à $\mathrm{gr}\, V$.

Par suite,il suffit de voir que Φ est une bijection entre $CL(E_1,\partial)$ (notation du Théorème3.4.) et les systèmes locaux $\mathfrak{I}$-filtrés V ' munis d'un isomorphisme $\mathrm{gr}\, V' \cong\!\to \mathrm{gr}\, V_1$.

Or , lesdits systèmes se classent par $H^1(S, \underline{\mathrm{Aut}}_o(V_1))$,en désignant par $\underline{\mathrm{Aut}}_o(V_1)$ le faisceau des automorphismes de V_1 qui induisent l'identité sur le gradué associé.

D'autre part , $\underline{\mathrm{Aut}}_o(V_1)$ est le faisceau des sections de $W = \Phi(\mathrm{End}_K(E_1),\partial)$ qui sont de la forme $\mathrm{id} + \lambda$; avec $\lambda \in W^{<0}$; ce faisceau est donc égal à $\Lambda_o(E_1,\partial)$ et on conclut par le Théorème 3.4 .

D'où le Théorème 4.2.

CHAPITRE V. UN EXEMPLE.

Pour rendre les constructions précédentes plus concrètes , on va regarder explicitement la classification des vectoriels à connexion sur K qui sont formellement isomorphes à

$E = \bigoplus_{\alpha} (F^{\alpha} \otimes_{K} G^{\alpha})$; $\alpha \in A \subset I$, $\alpha = \sum_{-r \leq k \leq 0} a_k(\alpha).x^{k-1}.dx$ ($r \geq 1$ donné) , et

G^{α} à singularité régulière ;

on supposera que les $a_{-r}(\alpha)$ sont distincts pour les divers α .

On s'inspirera ici de la méthode de [B-J-L] ; une méthode différente se trouve dans Birkhoff [B] ; cette dernière a été étendue au cas général par Jurkat [J] .

Soit $V = \Phi(E)$; on a ici une décomposition $V = \bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}$, $V_{\alpha} = \Phi(F^{\alpha} \otimes G^{\alpha})$, c'est-à-dire un relèvement canonique gr $V \longrightarrow V$.

Soit W un système local A-filtré , muni d'un isomorphisme $\hat{\lambda}$ **:** gr W $\cong\!\!\rightarrow$ gr V .

Les lignes de Stokes sont ici les demi-droites sur lesquelles on a $Re[(a_{-r}(\alpha) - a_{-r}(\beta)).x^{-r}] = 0$; pour chaque paire (α,β) , $\alpha \neq \beta$, on a donc $2.r$ telles demi-droites , faisant chacune avec la précédente un angle π / r ; on les notera $D^{k}_{\alpha\beta}$; $k = 1,\dots,2.r$.

On n'exclut pas le cas où deux telles lignes , correspondant à des paires distinctes , sont confondues .

On appellera « bon » un intervalle ouvert $U \subset S$ (ou le secteur correspondant) qui possède la propriété suivante :

pour toute paire (α,β) , U rencontre une et une seule des demi-droites $D^1_{\alpha\beta}$, …., $D^{2.r}_{\alpha\beta}$.

Il existe évidemment de bon intervalles (prendre n'importe quel intervalle de longeur π/r dont les extrémités n'appartiennent à aucune ligne de Stokes) .

<u>LEMME.5.1.</u>

Sur tout bon intervalle U , l'isomorphisme $\lambda^\wedge$ **:** gr W $\cong\!\!\to$ gr V se relève d'une manière et d'une seule en un isomorphisme λ (U) **:** W|U $\cong\!\!\to$ V|U.

P<u>reuve.</u>

L'unicité de $\lambda(U)$ est immédiate : en effet , puisque une des droites $D^k_{\alpha\beta}$ rencontre U , quelle que soit la paire (α,β) , $\alpha \neq \beta$, α et β sont globalement incomparables sur U ; i.e. il existe $\theta \in S$ tel que pour tout ε assez petit on ait $\alpha \underset{\theta+\varepsilon}{<} \beta$ et $\beta \underset{\theta-\varepsilon}{<} \alpha$.

Supposons que $\lambda_1(U)$ soit un autre relèvement de $\lambda^\wedge$, alors $\xi(U) =^{\text{déf}} \lambda(U).\lambda_1(U)^{-1} \in \text{Aut}(V|U)$ et $\xi(U)^\wedge = \lambda^\wedge.\lambda_1^{\wedge-1} = \text{id}_{\,\text{grV}|U}$ d'où $\xi(U) = \text{id} + \zeta(U)$ avec $\zeta(U) \in \text{Aut}(V|U)^{<0}$; mais alors $\zeta^{\beta-\alpha}(\,]\,\theta-\varepsilon,\theta\,[\,) = \zeta^{\alpha-\beta}(\,]\,\theta\,,\theta+\varepsilon\,[\,) = \zeta(\,]\,\theta-\varepsilon,\,\theta+\varepsilon\,[\,)$ implique nécéssairement $\zeta(U) = 0$ puisque $\alpha \neq \beta$ et $e^{-\xi} \neq e^{\xi}$, $\forall\ \xi \neq 0$; il en résulte que le seul automorphisme de V|U qui induise l'identité sur gr V est l'identité .

Pour démontrer l'existence , prenons un intervalle ouvert $U_1 \subset U$ et un relèvement $\lambda(U_1)$ **:** $W|U_1 \cong\!\!\to V|U_1$ de $\lambda^\wedge$ (cela existe par le Théorème 3.2., car U_1 est d'ouverture $< \pi/r$), et soit θ une extrémité de U_1 ; si $\theta \notin U$, c'est términé ; sinon il y'a deux cas à considérer .

1^er^ <u>Cas.</u>

θ n'appartient pas à une ligne de Stokes .

On va voir qu'alors λ se prolonge au-delà de θ , ce qui permet par connéxité d'atteindre la prochaine ligne de Stokes .

Soit en effet , $U_2 \subset U$ un petit intervalle autour de θ , ne rencontrant aucune ligne de Stokes , et prenons un relèvement $\lambda(U_2) : W|U_2 \cong\!\!\to V|U_2$ de $\lambda^\wedge$.

Numérotons $\alpha_1 < \alpha_2 < .... < \alpha_p$ l'ordre des α dans U_2 , avec $p = \text{card } A$.

Soit e_α une base de V_α sur $U_1 \cup U_2$; i.e. $e_\alpha : \mathbf{C}^{n_\alpha} \cong\!\!\to V_\alpha|U_1 \cup U_2$; $n_\alpha \leq n$;

posons $f_\alpha = \lambda(U_1)^{-1}.e_\alpha$, $g_\alpha = \lambda(U_2)^{-1}.e_\alpha$; i.e. $(\mathbf{f}) = (f_{\alpha 1}, \ldots, f_{\alpha p}) : \mathbf{C}^n \cong\!\!\to W|U_1$

et $(\mathbf{g}) = (g_{\alpha 1}, \ldots, g_{\alpha p}) : \mathbf{C}^n \cong\!\!\to W|U_2$ sont deux bases de solutions ;

sur $U_1 \cap U_2$, $(\mathbf{f})$ et $(\mathbf{g})$ sont deux bases du même espace $W|U_1 \cap U_2$, il existe donc une matrice $M \in Gl(n,\mathbf{C})$ telle que $(\mathbf{f}) = (\mathbf{g}).M$, ce qui s'écrit aussi :

Pour tout $i \in \mathbf{N}_p = \{1,2,\ldots,p\}$, on a dans $W|U_1 \cap U_2$

$$f_{\alpha i} = \sum_{1 \leq j \leq p} g_{\alpha j}.m_{ji} \overset{\text{déf}}{=} \lambda(U_1)^{-1}.\lambda(U_2).g_{\alpha i} \quad ;$$

m_{ji} des matrices constantes , et en passant aux développements asymptotiques $(e_i^\wedge = id_{K^\wedge} \otimes_{\mathbf{C}} e_i \; ; \forall i)$ on obtient

$$f_{\alpha i}^\wedge = \sum_{1 \leq j \leq p} g_{\alpha j}^\wedge.m_{ji} \qquad \text{dans} \quad gr\, W_{\alpha i} \; ,$$

ce qui , d'une part fournit $m_{ii} = I_{n(\alpha i)}$ et d'autre part $\sum_{j \in \mathbf{N}_p - \{i\}} g_{\alpha j}.m_{ji}$ est asymptote à zéro dans $W^{\alpha i}$ sur $U_1 \cap U_2$, (un relèvement de $gr\, W_\alpha$ étant $W^\alpha = W_\alpha \oplus (\bigoplus_{\beta < \alpha} W_\beta)$

d'où $m_{ji} = 0$ pour $j > i$ et $f_{\alpha i} = g_{\alpha i} + \sum_{j < i} g_{\alpha j}.m_{ji}$ est un élément de $W^{\alpha i}|U_1 \cap U_2$ qui se prolonge sur U_2 du fait que l'ordre des α est préservé dans U_2 ;

ainsi $f_{\alpha i} \in W^{\alpha i}|U_2$ et $(\mathbf{f})$ est une base de W sur $U_1 \cup U_2$ avec

$$(\mathbf{f}) = (\mathbf{g}) \begin{bmatrix} I_{n(\alpha 1)} & m_{12} & \cdots & \cdots & m_{1p} \\ 0 & I_{n(\alpha 2)} & . & . & . \\ . & 0 & & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & I_{n(\alpha p-1)} & m_{p-1,p} \\ 0 & 0 & .. & 0 & I_{n(\alpha p)} \end{bmatrix} \quad ;$$

et le relèvement est donné par $(\mathbf{e}).(\mathbf{f})^{-1} \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda(U_1 \cup U_2)$ où $(\mathbf{e}) = (e_{\alpha 1}, \ldots, e_{\alpha p})$,

d'où le résultat cherché .

2^{eme}<u>Cas.</u>

θ appartient à une ligne de Stokes ; soit encore U_2 un petit intervalle outour de θ , ne rencontrant pas d'autre ligne de Stokes ; on va voir qu'on peut trouver un autre relèvement $\lambda'(U_1)$ de $\lambda^{\wedge}$ qui se prolonge à $U_1 \cup U_2$.

En combinant avec le 1^{er} Cas , on obtiendra finalement le résultat .

Notons encore $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p$ l'ordre des α sur U_1 au voisinage de θ .

En un point $\theta' \in S$, l'ordre des α est donné par $Re(a_{-r}(\alpha).x^{-r})$; $\arg x = \theta'$,

les α distincts pour lesquels cette expression est égale étant incomparables en θ' ; il en résulte de là qu'il existe dans $\mathbf{N}_p$ des intervalles disjoints $I_1, \ldots, I_S$ tels que pour θ' voisin de θ , $\theta' \notin U_1$, l'ordre des α soit le suivant **:**

1) dans chaque intervalle I_j , l'ordre initial (= dans U_1 , prés de θ) est inversé ;
2) toutes les autres relations d'ordre sont consérvées .

Choisissant alors un relèvement $\lambda(U_2)$ **:** $W|U_2 \cong\!\!\to V|U_2$ de $\lambda^{\wedge}$, et soient f_α , g_α définis comme dans le premier cas .

Sur $U_1 \cap U_2$, on a encore

$$(5.2) \qquad f_{\alpha i} = g_{\alpha i} + \sum_{j < i} g_{\alpha j}.m_{ji} \quad ;$$

on modifie le relèvement $\lambda(U_1)$ en $\lambda'(U_1)$ de la manière suivante **:**

Si $i \notin I_1 \cup \ldots \cup I_S$, on prend $\lambda'(U_1)^{-1}.e_{\alpha i} \overset{\text{déf}}{=} f'_{\alpha i} = f_{\alpha i}$.

Si i appartient à I_k , on prend

$$(5.3) \qquad f'_{\alpha i} = f_{\alpha i} + \sum_{j<i\,;j\in I_k} f_{\alpha j}.\eta_{ji} \ .$$

Ceci donne bien un relèvement de $\lambda^{\wedge}$ sur U_1 quels que soient les η_{ji} choisis , car U_1 ne rencontre par hypothèse aucune ligne de Stokes relative aux paires (i,j) appartenant au même intervalle I_k . En effet ,

$$f'_{\alpha i} = \lambda(U_1)^{-1}.\{\ e_{\alpha i} + \sum_{j<i\,;j\in I_k} e_{\alpha j}.\eta_{ji}\ \} \overset{\text{déf}}{=} \lambda'(U_1)^{-1}.e_{\alpha i}$$

$$= \lambda(U_1)^{-1}.\{\ id + \sum_{j<i\,;j\in I_k} e_{\alpha j}.\eta_{ji}.e_{\alpha i}^{-1}\ \}.e_{\alpha i} \ ,$$

et comme $\delta_j \overset{\text{déf}}{=} e_{\alpha j}.\eta_{ji}.e_{\alpha i}^{-1} \textbf{:}\ V_{\alpha i} \overset{\cong}{\longrightarrow} \mathbf{C}^{n_{\alpha i}} \longrightarrow \mathbf{C}^{n_{\alpha j}} \overset{\cong}{\longrightarrow} V_{\alpha j}$ est de la forme générale $\delta_j = e^{-\int \alpha_j - \alpha_i}.\, g_{\alpha j}.g_{\alpha i}^{-1}$, on a alors $\delta_j^{\wedge} = 0$, $\forall\ j < i$; d'où $\lambda'^{\wedge} = \lambda^{\wedge}$.

Maintenant , en combinant (5.2) et (5.3) , on obtient pour $i \in I_k$

$$f'_{\alpha i} = g_{\alpha i} + \sum_{j<i} g_{\alpha j}.m_{ji} + \sum_{j<i\,;j\in I_k} \{\ g_{\alpha j} + \sum_{k<j} g_{\alpha k}.m_{kj}\ \}.\eta_{ji}$$

$$= g_{\alpha i} + \sum_{j<i\,;j\in I_k} g_{\alpha j}.\{\ m_{ji} + \eta_{ji} + \sum_{j<k<i} m_{jk}.\eta_{ki}\ \} + \sum_{j<i\,;j\notin I_k} g_{\alpha j}.\{\ m_{ji} + \sum_{j<k<i} m_{jk}.\eta_{ki}\ \} \ ;$$

$$= \lambda'(U_1)^{-1}.\lambda(U_2).g_{\alpha i} \ ;$$

et $f'^{\wedge}_{\alpha i} = g^{\wedge}_{\alpha i}$ implique , sur U_2 , il existe un unique choix des η_{ji} donné par les équations :

$$m_{ji} + \eta_{ji} + \sum m_{jk}.\eta_{ki} = 0 \quad ;\ j < i \ ,\ j \in I_k$$

i.e. $\qquad \eta_{i-1,i} = -\, m_{i-1,i}$,

$\qquad \eta_{i-2,i} = -\, m_{i-2,i} - m_{i-2,i-1}.\eta_{i-1,i}$;

et on a encore , sur U_2 , $f'_{\alpha i} \in W^{\alpha i}$; $i \in \mathbf{N}_p$.

Le relèvement est alors donné par $\lambda'(U_1 \cup U_2) = (\mathbf{e})\,(\mathbf{f'})^{-1}$ où $(\mathbf{f'})$; définie suivant l'ordre des α dans U_2 ; fournit la matrice triangulaire définie par

$$(\mathbf{f'}) = (\mathbf{g}) . \begin{bmatrix} \cdot & & & \\ & m_{ji} + \sum\limits_{j<k<i} m_{jk}.\eta_{ki} & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & I_i & \\ & & & \cdot \end{bmatrix}$$

Ceci démontre le Lemme .

On dira qu'un recouvrement de S par des intervalles ouverts $\{U_1 ,\ldots, U_{2.r}\}$ est « bon » s'il possède les propriétés suivantes :

(i) les U_i sont bons ;
(ii) U_i rencontre seulement U_{i-1} et U_{i+1} (on pose $U_{2r+1} = U_1$)

(iii) $U_{i,i+1} = U_i \cap U_{i+1}$ ne contient aucune ligne de Stokes .

On peut toujours trouver de bons recouvrements ; il suffit de prendre le recouvrement de S par les fermés $[\theta_o + k.\pi/r , \theta_o + (k+1).\pi/r]$, θ_o étant choisi distinct des directions de Stokes modulo π/r , et d'élargir un peu les intervalles précédents .

Pour chaque U_i , il existe un relèvement unique $\lambda(U_i) : W|U_i \xrightarrow{\cong} V|U_i$ de $\lambda^{\wedge}$.

La structure de Stokes de V est donnée par le choix des $\lambda(U_i).\lambda(U_{i+1})^{-1}$,i.e. dépend du recouvrement choisi ; ceux-ci sont des automorphismes de $V|U_{i,i+1}$ induisant l'identité sur le gradué associé gr V ; en effet

pour tout $s \in V|U_{i,i+1}$, $\lambda(U_{i+1})^{-1}.s = t \in W|U_{i,i+1}$

et W étant A-filtré , il existe $\alpha \in A$ tel que $t \in W^{\alpha}$ sur $U_{i,i+1}$; mais alors

$\lambda(U_i).t = \lambda(U_i).\lambda(U_{i+1})^{-1}.s \in V|U_{i,i+1}$ et $\lambda^{\wedge}.t^{\wedge} = s^{\wedge}$ impliquent $s \in \lambda(U_i).W^{\alpha} =^{\text{déf}} V^{\alpha}$ sur $U_{i,i+1}$.

Sous cette seule réstriction , leur choix est arbitraire .

Pour $r \geq 2$, $U_i \cap U_{i+1}$ est un secteur ; par rapport à la décomposition $V = \bigoplus_{\alpha} V_\alpha$,
$\lambda(U_i).\lambda(U_{i+1})^{-1}$ s'exprime par une matrice triangulaire stricte par rapport à l'ordre des α dans $U_{i,i+1}$;

si $r = 1$, $U_{1,2}$ est la réunion de deux secteurs opposés , i.e. $U_{1,2} = V \cup \{V + \pi\}$,
qu'on regardera donc comme deux secteurs distincts puisque l'ordre des α dans V est complètement inversé dans $\{V \pm \pi\}$.

Finalement , en prenant des bases des V_α sur $U_{i,i+1}$, les automorphismes $\lambda(U_i).\lambda(U_{i+1})^{-1}$ sont entièrement détérminés par les coefficients C_{hk} ($\stackrel{\text{déf}}{=}$ les facteurs de Stokes) des matrices m_{ji} ($1 \leq h \leq j^*$, $1 \leq k \leq i^*$) exprimant les relèvements de $\hat{\lambda}$ par rapport aux bases des V_α , où $i^* = \dim V_{\alpha i}$.

On a $\operatorname{card}\{C_{hk} ; 1 \leq h \leq j^* , 1 \leq k \leq i^* \} = \dim_{\mathbf{C}} V_{\alpha j}.\dim_{\mathbf{C}} V_{\alpha i}$, et sur chacun des $2.r$ secteurs distincts , le nombre d'invariants est alors

$$\sum_{1 \leq j < i \leq p} \dim V_{\alpha j}.\dim V_{\alpha i} = 1/2.\sum_{\alpha \neq \beta} \dim V_\alpha.\dim V_\beta$$

d'où un nouvel invariant analytique $N = r.\sum_{\alpha \neq \beta} \dim V_\alpha.\dim V_\beta$ et un isomorphisme d'espaces affines $CL(E , \partial) \xrightarrow{\cong} \mathbf{C}^N$.

N est appelé l'irrégularité de Malgrange ([M1]) de ($\mathrm{End}_K (E , \partial)$).

BIBLIOGRAPHIE.

[B].G.D.BIRKHOFF ,The generalized Riemann problem for linear differential equations ... Proc.Amer.Acad.Arts.Sc.49(1913),pp.531-568.

[B-J-L].W.BALSER,W.B.JURKAT,D.A.LUTZ,Birkhoff invariants and stokes multipliers for meromorphic linear differential equations, J.Math.Anal.Appl.71.(1979), pp.48-94.

[D1].P.DELIGNE. Equations differentielles à points singuliers réguliers.Lecture notes in Mathematics, n°163.1970.

[D2].P.DELIGNE. Lettres à B.Malgrange (8.1977 et 4.1978)

[J].W.JURKAT. Meromorphe differenzialgleichungen, spring. lect.notes,n°637(1978)

[J-L-P].W.JURKAT, D.A.LUTZ ,A..PEYERHIMHOFF,Birkhoff invariants and effective calculations for meromorphic linear differential equations .1.J.Math.Anal. Appl.53(1976).pp.438-470.

[L].A.H.LEVELT, Jordan decomposition of a class of singular differential operators , Arkiv for Mat.13.1(1975),pp.1-27.

[M1].B.MALGRANGE ,Sur les points singuliers des equations differentielles , L'Ens .Math.20.(1974),pp.147-176.

[M2].B.MALGRANGE ,Remarques sur les equations différentielles à points singuliers irréguliers ,Seminaire Goulaouic-Schwartz 1976-1977.

[Mn].J.MANIN , Moduli fuchsiani.Annali Scuola Norm.Sup.Pisa ser.III 19(1965) pp.113.126.

[S].Y.SIBUYA,Stokes phenomena,Bull.Amer.Math.Soc.83-5(1977),pp.1075-1077

[W].W.WASOW, Asymptotic expansions for ordinary differential equations, interscience Publ.(1965).