N^0 **d'ordre : 02 /2004 – M / MT**

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOQURATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

HOUARI BOUMEDIENE

ALGER

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Magister**

EN : MATHEMATIQUES

Spécialité : ***Algèbre et théorie des nombres***

Par : M^{elle} ***BENYETTOU AMEL***

Sujet

FONCTION GAMMA *P* – ADIQUE

Soutenue publiquement le 06 – 01 – 2004 Devant le jury composé de

M^{er} BETINA K.	Professeur	USTHB	Président
M^{er} BENZAGHOU B.	Professeur	USTHB	Directeur de thèse
M^{er} ZITOUNI M.	Professeur	USTHB	Examinateur
M^{er} HACHAICHI M.S.	Maître de conférence	USTHB	Examinateur
M^{er} TADJINE A.	Chargé de cour	USTHB	Examinateur

Table des matières **pages**

Introduction :

Sur **Q** – le corps des nombres rationnels – il existe plusieurs valeurs absolues telle que la valeur absolue ordinaire $|\ |_\infty$ définit par : $|x|_\infty =$ sup (x, - x) et la valeur absolue p – adique définit pour tout x de **Q** par : $x = p^{\alpha} \frac{a}{b}$, $(a, p) = 1$, $(b, p) = 1$, $|x|_p = p^{-\alpha}$.

Considérons l'application n ® n ! , il est bien connu qu'il existe une fonction méromorphe notée Γ telle que $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ qui prolonge cette application à **C –** l'extension de complété de **Q –** pour la valeur absolue ordinaire , on peut également compléter **Q** pour la valeur absolue p – adique et on obtient le corps $\mathbf{Q}_p$, on se propose de faire l'analogue et prolonger la fonction précédente à $\mathbf{Q}_p$ mais ceci est impossible car elle n'est pas uniformément continue pour la topologie p – adique de **N** ; pour cela *Morita* et en 1975 a modifié cette fonction en posant : $\Gamma_p(n) = (-1)^n \prod_{\substack{j=1 \\ (j,p)=1}}^{n-1} j$ et il a montré que cette fonction s'étend en une fonction continue sur l'ensemble $Z_p = \{x \in Q_p ; |x|_p \leq 1\}$ et qui satisfait des relations fonctionelles analogues à celles satisfaites par gamma d'*Euler* .

Voici un court résumé de ce travail :

- Dans le premier chapitre on a rappelé quelques propriétés de la fonction gamma complexe et donné la formule de Stirling de $\log \Gamma$
- Dans le chapitre 2 on a introduit l'existence de la fonction gamma p – adique et donné ces principales propriétés et son développement de *Mahler.*
- Dans le chapitre 3 on a étudié la fonction Γ_p et $\log_p \Gamma$ analytiquement.
- Dans le quatrième chapitre on s'est intéressé à la fonction log gamma p – adique de Diamond et étudie la version de la régularisation de cette fonction par *Koblitz* en utilisant les mesures p – adiques.
- Dans le dernier chapitre et permis les applications de Γ_p on a présenté une nouvelle démonstration de la formule de Gross – Koblitz et comparé entre Γ_p et la factorielle de Roman.

Notation et définitions de base

N : l'ensemble des nombres naturels

Z : l'anneau des entiers rationnels

Q : le corps des nombres rationnels

R : le corps des nombres réels

C : le corps des nombres complexes

$\mathbf{Z}_p$: l'anneau des entiers p – adiques

$\mathbf{Q}_p$: le corps des nombre p – adiques

$\mathbf{C}_p$: le complété de la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$

Soit $x \in \mathbf{Q}_p$ et $\sum_{n\geq 0} a_n p^n$ son développement de Hensel , on définit la valuation p – adique (resp. valeur absolue p – adique) de x par

$$v_p(x) = \mathrm{Min}\{ n : \ a_n \neq 0 \}$$

(resp. $|x|_p = p^{-v_p(x)}$)

en particulier; pour $x \in \mathbf{Q}$ il existe $n, a, b \neq 0 \in \mathbf{Z}$ $(a, p) = 1$, $(b, p) = 1$ $(a, b) = 1$ tel que $x = p^n \dfrac{a}{b}$ et dans ce cas on a

$$v_p(x) = n \quad \text{et} \quad |x|_p = p^{-n}$$

Chapitre I

Note sur la fonction gamma complexe

I - 1 Définition :

la fonction gamma complexe est définie sur l'ensemble $\{ z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$ *par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Une intégration par parties donne la relation fonctionnelle vérifiée par Γ et on a :

$$\Gamma(z+1) = z.\Gamma(z) \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

Il en résulte :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m)}{(z)_m} \qquad \ldots\ldots\ldots \ (2)$$

Où $\quad (z)_m = z(z+1)(z+2)\ldots(z+m-1)$

$(z)_m$ sont appelés les nombres d'Appell et ils vérifient

$$(z)_{nk} = k^{nk} \left(\frac{z}{k}\right)_n \left(\frac{z+1}{k}\right)_n \cdots \left(\frac{z+k-1}{k}\right)_n$$

Plus généralement si on note par m_z le plus petit entier positif tel que $\mathrm{Re}(z + m_z) > 0$

et $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{C} - \{0, -1, -2, \ldots\}$ la relation (2) permet une extension de Γ à $\boldsymbol{U}$ et on a **:**

Pour tout $z \in \boldsymbol{U}$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{(z)_{m_z}} \int_0^{\infty} t^{z+m_z-1} e^{-t} dt$$

I - 2 Lemme :

La fonction $\Gamma(z)$ *est holomorphe sur* $\boldsymbol{U}$ *et pour tout* n *de* $\mathbf{N}$, Γ *a des pôles simples au point* $z = -n$ *avec résidu égal à* $\dfrac{(-1)^n}{n!} = \operatorname*{Res}_{z=-n} \Gamma(z)$

Preuve :

Pour $\mathrm{Re}\, z > 0$, on a

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

L'intégrale converge pour t ® ¥ à cause de e^{-t}, et pour t ® 0 on a

$| e^{-t} t^{z-1} |$ @ $t^{Re\, z-1}$ et donc l'intégrale $\int t^{Re z -1}\, dt$ converge pour $Re\, z > -1$

D'autre part :

Pour $\operatorname{Re} z > 0$, $\exists\ a, b \in \mathbf{R}$ tel que $0 < a \leq \operatorname{Re} z \leq b < \infty$

Donc ;

$$| e^{-t}\, t^{z-1} | \leq \begin{cases} t^{a-1} & \text{pour} \quad 0 \prec t \leq 1 \\ t^{b-1} e^{-t} & \text{pour} \quad 1 \prec t \leq \infty \end{cases}$$

et les intégrales $\int_0^1 t^{a-1}\, dt$ & $\int_1^\infty t^{b-1} e^{-t}\, dt$ sont finis

Par suite $\Gamma(z)$ est une fonction continue pour $\operatorname{Re} z > 0$, et de même on montre qu'elle est de plus indéfiniment dérivable pour $\operatorname{Re} z > 0$ et on a :

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} (\log\ t)^n\, dt$$

Ce qui montre que $\Gamma(z)$ est holomorphe pour $\operatorname{Re} z > 0$

Pour $\operatorname{Re} z < 0$, soit N un entier positif fixé tel que $\operatorname{Re} z > -N$ on a

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+N)}{(z)_N} = \frac{\Gamma(z+N)}{z(z+1)\cdots(z+N-1)}$$

Et d'après la première partie de la preuve on a montré que $\Gamma(z+N)$ est holomorphe de la variable $(z+N)$ pour $\operatorname{Re}(z+N) > 0$, (i.e. pour $\operatorname{Re} z > -N$) et comme $(z)_N$ est un polynôme qui admet les points $0, -1, -2, \ldots -N+1$. comme zéros simples alors que le quotient $\dfrac{\Gamma(z+N)}{(z)_N}$ est holomorphe dans le demi plan $\operatorname{Re} z > -N$ avec des pôles simples les points $0, -1, -2, \ldots -N+1$.

N étant un point arbitraire donc on peut le choisir assez grand pour que la fonction Γ soit holomorphe avec des pôles simples aux points $0, -1, -2, \ldots$.

Soit maintenant n Î N, on a $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+n+1)}{(z)_{n+1}}$ et le résidu de pôle simple $(-n)$ est donné par :

$$\lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z) = \lim_{z \to -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

I - 3 Proposition : (*formule des compléments)*

Pour tout z Î C $Re\, z > 0$, *on a*

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{p}{\sin\ p\, z}$$

Preuve :

on a $\qquad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$

en remplaçant t par t^2 on obtient l'intégrale de Gauss suivante :

$$\Gamma(z) = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, t^{2z-1} dt \qquad \text{Re } z > 0$$

Donc pour tout p, q de C tels que Re $p > 0$, Re $q > 0$ on a

$$\Gamma(p) = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\, u^{2p-1} du$$

$$\Gamma(q) = 2\int_0^{\infty} e^{-v^2}\, v^{2q-1}\, dv$$

ce qui donne

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)}\, u^{2p-1}\, v^{2q-1}\, du\, dv$$

passant aux cordonnées polaires en posant $u = r\cos q$ et $v = r\sin q$ on aura :

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{p/2} e^{-r^2}\, r^{2(p+q)-1} \cos^{2p-1} q\ \sin^{2q-1} q\ dq\ dr$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r^{2(p+q)-1}\, dr\ \ 2\int_0^{p/2} \cos^{2p-1} q \sin^{2q-1} q\ dq$$

$$= \Gamma(p+q)\ 2\int_0^{p/2} \cos^{2p-1} q \sin^{2q-1} q\ dq$$

donc on obtient

$$\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = 2\int_0^{p/2} \cos^{2p-1} q\ \sin^{2q-1} q\ dq$$

modifions cette dernière relation en posant $\cos^2 q = t,$ et comme $\cos^2 q + \sin^2 q = 1$

on trouve

$$\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\ dt$$

et pour $p = z$, $q = 1 - z$ on obtient

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\ dt$$

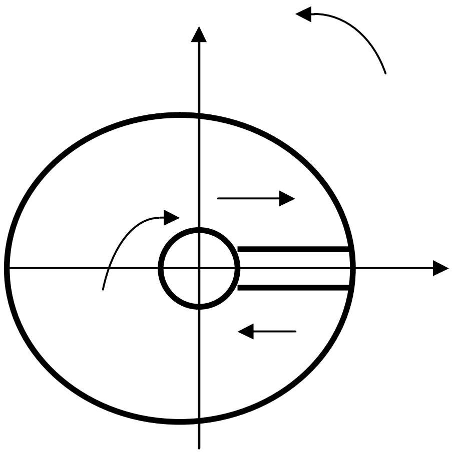
en posant $t = u/(1+u) \Rightarrow dt = 1/(1+u)^2\, du$ on aura

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \int_0^{\infty} \frac{u^{z-1}}{(1+u)}\,du$$

calculons cette intégrale par la méthode des résidus

rappelons que si C un contour associé à un domaine D et F un ensemble fini de points $\{z_1, z_2, z_3, \ldots z_n\}$ tel que la fonction f soit holomorphe dans une partie ouverte contenant D/F alors

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\,\mathrm{i}\,\pi \sum \mathrm{Res}(f,\ z_j)$$



considérons le contour C suivant

C_1 est le segment $[\,r' + ie,\ R' + ie\,]$

C_2 est le cercle de rayon R centré en 0 de $R' + i\,e$ ® $R' - i\,e$

C_3 est le segment $[R' - ie\,,\ r' - i\,e]$

C_4 est le cercle de rayon r centré en 0 de $r' - i\,e$ ® $r' + i\,e$

Avec $0 < e < r < 1 < R$, et $\mathrm{r}' = \sqrt{r^2 - e^2}$, $\mathrm{R}' = \sqrt{R^2 - e^2}$

Posons $f(u) = \dfrac{u^{z-1}}{1+u}$ qui admet un pôle simple le point $u = -1$ de résidu égale à :

$$\lim_{u \to -1} (u+1) f(u) = \lim_{u \to -1} u^{z-1} = (-1)^{z-1} = e^{ip(z-1)}$$

d'autre part :

$$\int_C f(u)\,du = \sum_{j=1}^{4} \int_{C_j} f(u)\,du$$

et donc

$$\int_{C_1} f(u)\,du = \int_r^{R'} f(x + ie)\,dx \xrightarrow{r \to 0,\, R \to \infty} \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x}\,dx$$

et $\displaystyle\int_{C_2} f(u)\,du = 0$ lorsque R ® ¥

et $$\int_{C_3} f(u)du = \int_{R'}^{r'} f(x-ie)dx = -\int_{r'}^{R'} f(x-ie)dx \xrightarrow{R\to\infty, r\to 0} -e^{2ipz}\int_0^{\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x}dx$$

et $$\int_{C_4} f(u)du = 0 \qquad \text{lorsque} \quad r \to 0$$

donc

$$\int_C \frac{u^{z-1}}{1+u}du = (1-e^{2ipz})\int_0^{\infty} \frac{u^{z-1}}{1+u}du = 2ip\, Res\left(\frac{u^{z-1}}{1+u}, -1\right) = 2ip\, e^{ip(z-1)}$$

ce qui donne

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{z-1}}{1+u}du = \frac{-2ip\, e^{ipz}}{1-e^{2ipz}} = p\, \frac{2i}{e^{ipz}-e^{-ipz}} = \frac{p}{\sin\ p z}$$

d'où la formule des compléments $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{p}{\sin\ p z}$

et pour $z = 1/2$ on a $\Gamma(1/2) = p^{1/2}$

I - 4 Remarque :

La fonction gamma complexe peut être définit par la formule d'Euler- Gauss suivante :

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\, n^z}{(z)_n}$$

I - 5 Proposition : (*formule de multiplication de Gauss - Legendre*)

Pour m Î $\mathbf{Z}$ *on a*

$$\Gamma(mz) = (2p)^{(1-m)/2}\, m^{mz-1/2} \prod_{r=0}^{m-1} \Gamma\left(z+\frac{r}{m}\right)$$

et pour $m = 2$, *on a la formule de duplication*

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\, p^{-1/2}\, \Gamma(z)\, \Gamma(z+1/2)$$

preuve:

on pose $$A(z) = \frac{m^{mz} \prod_{r=0}^{m-1} \Gamma\left(z+\frac{r}{m}\right)}{m\, \Gamma(mz)}$$

comme

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\, n^z}{(z)_n}$$

on peut écrire

$$A(z) = \frac{m^{mz} \prod_{r=1}^{m-1} \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)!\, n^{z+\frac{r}{m}}}{\left(z+\frac{r}{m}\right)_n}}{m \lim_{n\to\infty} \dfrac{(nm-1)!\,(nm)^{mz}}{(mz)_{nm}}}$$

$$= \frac{m^{mz} \lim_{n\to\infty} \dfrac{[(n-1)!]^m . n^z . n^{z+\frac{1}{m}} . \cdots n^{z+\frac{m-1}{m}}}{(z)_n \left(z+\frac{1}{m}\right)_n \cdots \left(z+\frac{m-1}{m}\right)_n}}{m \lim_{n\to\infty} \dfrac{(nm-1)!\,(nm)^{mz}}{m^{nm}\left(\frac{mz}{m}\right)_n . \left(\frac{mz+1}{m}\right)_n \cdots \left(\frac{mz+m-1}{m}\right)_n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{m^{nm-1}[(n-1)!]^m\, n^{\frac{m-1}{2}}}{(nm-1)!}$$

cette dernière relation montre que $A(z)$ ne dépend pas de z, donc une constante on va la calculer en posant $z = 1/m$

on a

$$A\left(\frac{1}{m}\right) = \prod_{r=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{1+r}{m}\right) = \prod_{r=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{m-r}{m}\right)$$

et donc

$$\left[A\left(\frac{1}{m}\right)\right]^2 = \prod_{r=1}^{m-1} \Gamma\left(\frac{r}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{r}{m}\right) = \frac{p^{m-1}}{\prod_{r=1}^{m-1} \sin\left(\frac{pr}{m}\right)}$$

d'autre part ; pour tout m de **N** on a :

$$x^{2m} - 2x^m \cos mq + 1 = \prod_{r=1}^{m} \left[x^2 - 2x\cos\left(q + 2(r-1)\frac{p}{m}\right) + 1\right] \quad \ldots (*)$$

et $\cos 2q = \cos^2 q - \sin^2 q = 1 - 2\sin^2 q$

pour $x = 1$ l'équation (*) s'écrit comme

(*) $\Rightarrow$ $$2 - 2\cos mq = \prod_{r=1}^{m} \left[2 - 2\cos\left(q + 2(r-1)\frac{p}{m}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \qquad 2-2\left(1-2\sin^{2}\frac{mq}{2}\right)=\prod_{r=1}^{m}\left[2-2\left(1-2\sin^{2}\left(\frac{q}{2}+\frac{p\,(r-1)}{m}\right)\right)\right]$$

$$\Rightarrow \qquad \left(2\sin\frac{m\,q}{2}\right)^{2}=\left[\prod_{r=1}^{m}2\sin\left(\frac{q}{2}+\frac{p\,(r-1)}{m}\right)\right]^{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{m}{2^{\,m-1}}\,\frac{\sin\left(\frac{m\,q}{2}\right)}{\frac{m\,q}{2}}\,\frac{\frac{q}{2}}{\sin\frac{q}{2}}=\prod_{r=1}^{m-1}\sin\left(\frac{q}{2}+\frac{p\,r}{m}\right)$$

et pour $\theta\to 0$ on aura

$$\prod_{r=1}^{m-1}\sin\frac{p\,r}{m}=\frac{m}{2^{\,m-1}}$$

donc

$$\left[A\left(\frac{1}{m}\right)\right]^{2}=\frac{p^{\,m-1}}{\prod_{r=1}^{m-1}\sin\frac{p\,r}{m}}=\frac{p^{\,m-1}}{\frac{m}{2^{\,m-1}}}=\frac{(2p)^{\,m-1}}{m}$$

ce qui implique

$$A\left(\frac{1}{m}\right)=(2p)^{\frac{m-1}{2}}\,m^{-\frac{1}{2}}$$

et donc

$$A(z)=(2p)^{\frac{m-1}{2}}\,m^{-\frac{1}{2}}=\frac{m^{mz}\prod_{r=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{r}{m}\right)}{m\,\Gamma(mz)}$$

d'ou la formule de multiplication

$$\Gamma(mz)=(2p)^{\frac{1-m}{2}}\,m^{mz-1}\prod_{r=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{r}{m}\right) \qquad \blacklozenge$$

I – 8 Théorème : (*série de Stirling de G*) (cf **[10]**)

Pour $z\to\infty$ et $|\arg z|<\pi-\delta$ $\quad\delta>0$ on a

$$\log\Gamma(z)\cong\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z-z+\frac{1}{2}\log(2p)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{2n(2n-1)}z^{-2n+1}+o\left(\frac{1}{z^{2n-1}}\right)$$

Où B_n est le n iéme nombre de Bernoulli

Chapitre : II

Définition et propriétés générales de la fonction gamma p – adique

On a vu dans le premier chapitre que la fonction gamma complexe peut être vue comme étant le prolongement de la fonction $n \rightarrow n\,!$ à $\mathbf{C}$. Pour la fonction gamma p – adique on peut penser à prolonger la même fonction à $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{p}}$ mais ceci est impossible car cette fonction n'est pas uniformément continue pour la topologie p – adique , pour cela Morita en 1975 a proposé la modification suivante :

II - 1 Définition :

pour un entier naturel n non nul et p un nombre premier on définit sur **N** *la fonction* Γ_{p} *par*

$$\Gamma_{p}(n) = (-1)^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ (j,p)=1}}^{n-1} j$$

et pour montrer que cette fonction peut se prolonger à $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{p}}$ on a besoin de la proposition suivante :

II - 2 Proposition : (*Théorème de Wilson* généralisé)

i) - *Pour* $p \neq 2,\ n \in \mathbf{Z},\ s \in \mathbf{N}$ *on a* : $\displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ (j,p)=1}}^{p^{s}-1} (n+j) \equiv -1 \pmod{p^{s}}$

ii) - *Pour* $p = 2,\ s \geq 3,$ *on a* : $\displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ (j,2)=1}}^{2^{s}-1} (n+j) \equiv 1 \pmod{2^{s}}$

Preuve :

on sait que les nombres $n,\ n+1, \ldots\ n+p^{s}-1$ forment un système complet de représentants des classes mod p^{s} , et ceux qui sont premiers à p (ie $n \leq j \leq n+p^{s}$ tq $(j,p) = 1$) forment un système complet de représentants des éléments inversibles de $\boldsymbol{Z}/p^{s}\boldsymbol{Z}$

on note

$\mathrm{G} = (\boldsymbol{Z}/p^{s}\boldsymbol{Z})^{*} = \{\, n \leq j \leq n+p^{s}$ tq $(j,p) = 1 \,\}$, G est le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\boldsymbol{Z}/p^{s}\boldsymbol{Z}$,

donc

$$\prod_{\substack{j=0\\(j,p)=1}}^{p^s-1}(n+j) = \prod_{g\in G} g \qquad (*)$$

or

$$g \in G \Rightarrow \exists\, h \in G \text{ tel que: } g.h = 1$$

et donc dans le produit (*) il ne reste que les éléments d'ordre 2 (les éléments qui ont leurs inverses lui-même) car les autres éléments sont éliminés dans le produit même par leurs inverses.(ie si g est un élément de G alors son inverse g^{-1} est aussi dans G et la multiplication de g avec g^{-1} donne 1) Donc :

$$\prod_{\substack{j=0\\(j,p)=1}}^{p^s-1}(n+j) = \prod_{g\in G} g = \prod_{g^2=1} g \qquad g \in G$$

Déterminons les éléments de G d'ordre 2,

1er cas : si $p \neq 2$

soit g un élément de G tel que $g^2 = 1 \Rightarrow g^2 - 1 = 0$

$$\Rightarrow (g-1)(g+1) = 0$$

supposons par l'absurde que $g \neq 1$ et $g \neq -1$, alors que $(g-1)$ et $(g+1)$ sont des diviseurs de zéro dans $\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$ et puisque p est le plus petit diviseur de zéro dans $\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$ on aura :

p divise $(g-1)$ et p divise $(g+1)$

$\Rightarrow g \equiv 1 \mod p$ et $g \equiv -1 \mod p$

par suite

$$1 \equiv -1 \mod p \Leftrightarrow 2 \equiv 0 \mod p$$

Contradiction avec le fait que $p \neq 2$

donc nécessairement $g = 1$ ou $g = -1$,

conclusion :

$$\prod_{g^2=1} g = 1 \times -1 = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \prod_{\substack{j=0\\(j,p)=1}}^{p^s-1}(n+j) \equiv -1 \mod p^s.$$

2éme cas $p = 2$ et $s \geq 3$,

montrons par récurrence que les représentants des éléments inversible de G d'ordre 2 sont : 1, $2^s - 1$, $2^{s-1} - 1$, $2^{s-1} + 1$.

en effet ;

Pour $s = 3$, les éléments inversibles de $Z / 2^3 Z = Z / 8Z$ sont :

$1, \quad 3 = 2^{3-1} - 1, \quad 5 = 2^{3-1} + 1, \quad 7 = 2^3 - 1,$

Supposons que l'hypothèse de récurrence est vraie jusqu'à l'ordre $s - 1$, et montrons qu'elle reste vraie à l'ordre s.

soit g un élément de G tel que $g^2 = 1 \Rightarrow g^2 \equiv 1 \mod 2^s \Rightarrow g^2 \equiv 1 \mod 2^{s-1}$,

donc par hypothèse $g \in \{1, \ 2^{s-2} - 1, \ 2^{s-2} + 1, \ 2^{s-1} - 1\} \mod 2^{s-1}$,

1)- si $g \equiv 1 \mod 2^{s-1} \Rightarrow \exists\, k \in Z, \quad g = k.2^{s-1} + 1$

$$\Rightarrow g^2 = k^2 2^{2(s-1)} + k 2^s + 1 = 2^s (k^2 2^{s-2} + k) + 1 ,$$

or $0 \leq g \leq 2^{s-1}$ ce qui nous donne

$$0 \leq k.2^{s-1} + 1 \leq 2^s - 1 \Rightarrow -1 < k < 2 \quad \text{et} \quad k \in Z$$

d'où $k = 0$ ou $k = 1$

$k = 0 \Rightarrow g = 1$

$k = 1 \Rightarrow g = 2^{s-1}$

2)- si $g \equiv -1 \mod 2^{s-1} \Rightarrow g = k.2^{s-1} - 1, \quad k \in Z$

$$\Rightarrow g^2 = k^2 2^{2(s-1)} - k 2^s + 1 = 2^s (k^2 2^{s-2} - k) + 1$$

or $0 \leq g \leq 2^{s-1}$ ce qui nous donne

$$0 \leq k 2^{s-1} - 1 \leq 2^{s-1} \Leftrightarrow 0 \leq 1 / 2^{s-1} \leq k \leq 2$$

d'où $k = 1$ ou $k = 2$

$k = 1 \Rightarrow g = 2^{s-1} - 1$

$k = 2 \Rightarrow g = 2^s - 1$.

3)- si $g \equiv (2^{s-2} + 1) \mod 2^{s-1} \Rightarrow g = k 2^{s-1} + 2^{s-2} + 1$

mais ceci ne donne pas $g^2 \equiv 1 \mod 2^s$ donc ce cas est exclu .

4)- si $g \equiv (2^{s-2} - 1) \mod 2^s$ on aurait pas $g^2 \equiv 1 \mod 2^s$ et ce cas est aussi exclu.

Donc les éléments inversibles de G d'ordre 2 sont : $\{1,\ 2^{s}-1,\ 2^{s-1}-1,\ 2^{s-1}+1\}$ et l'hypothèse de récurrence est vraie à l'ordre s. et on a :

$$\prod_{\substack{g\in G\\ g^{2}=1}} g = 1\,(2^{s}-1)\,(2^{s-1}-1)\,(2^{s-1}+1)$$

$$= (2^{s}-1)\,(2^{s}2^{s-2}-1)$$

$$.\equiv 1 \mod 2^{s}$$

II - 3 Conséquence :

si on pose $(n!) = \left(\prod_{\substack{j=1\\ (j,p)=1}}^{n} j\right)$ *on déduit de ce qui procède :*

$((n+p^{s})!)_{p} \equiv -1\ (n!)_{p} \mod p^{s}$ si $p \neq 2$

$((n+2^{s})!)_{2} \equiv (n!)_{2} \mod 2^{s}$ si $p = 2$

et donc on peut montrer que la fonction $\Gamma_p(n)$ défini précédemment satisfait :

$$\Gamma_p(n + p^{s}) \equiv \Gamma_p(n) \mod p^{s}$$

et plus généralement

$$\Gamma_p(n + kp^{s}) \equiv \Gamma_p(n) \mod p^{s} \qquad \forall\ k \in \mathbf{Z}$$

Ce qui montre que la fonction Γ_p est uniformément continue sur **N** pour la topologie p – adique

De plus si $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy d'éléments dans **N** alors $\Gamma_p((a_n)_{n\in\mathbf{N}})$ est aussi de Cauchy

En effet ;

Soit $\varepsilon > 0$, $\$\ h > 0$, $''\ h, k \in \mathbf{N}\ |h-k|_{p} < \eta \Rightarrow |\Gamma_p(h) - \Gamma_p(k)|_{p} < e$

Car Γ_p est uniformément continue

$(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy alors $\exists\ N_0 \in \mathbf{N}$ et pour $e' = h$

$$\forall\ n, m \in \mathbf{N},\ n > m > N_0 \Rightarrow |a_n - a_m|_{p} < \eta \Rightarrow \left|\Gamma_p(a_n) - \Gamma_p(a_m)\right| < e$$

ce qui donne que $\Gamma_p(a_n)$ est de Cauchy.

Et on déduit finalement que Γ_p peut se prolonger par continuité à $\mathbf{Z}_p$ et on a le théorème suivant :

II- 4 Théorème (*Morita*) :

La fonction $n \to \Gamma_p(n)$ *est la restriction à* $\mathbf{N}$ *d'une fonction continue de* $\mathbf{Z}_p$ *à valeurs dans* $\mathbf{Z}_p$ *notée* $\Gamma_p(x)$ *appelée fonction gamma p – adique*

et si $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est une suite de Cauchy d'éléments dans* $\mathbf{N}$ *tend vers* x*, alors on écrit :*

$$\Gamma_p(x) = \lim_{n\to\infty} \Gamma_p(a_n - 1) = \lim_{n\to\infty} (-1)^{a_n} ((a_n - 1)!)_p$$

Cette fonction est bien définie, elle ne dépend pas de la suite choisie, car si (a_n) et (b_n) sont deux suites de Cauchy de limite commune x alors $\Gamma_p(a_n)$ et $\Gamma_p(b_n)$ ont aussi la limite commune $\Gamma_p(x)$ on va étudier maintenant ses principales propriétés

II- 5 Proposition :

Soit p *un nombre premier, alors* Γ_p *possède les propriétés suivantes :*

i)- *la relation fonctionnelle* $\Gamma_p(x+1) = h_p(x).\,\Gamma_p(x)$

où
$$h_p(x) = \begin{cases} -x & \text{si } |x|_p = 1 \\ -1 & \text{si } |x|_p < 1 \end{cases}$$

ii)-

(1)- si $p \neq 2$, *alors pour tout* x, y de $\mathbf{Z}_p$ *on a* : $|\Gamma_p(x) - \Gamma_p(y)|_p \le |x-y|_p$

(2)- si $p = 2$, *alors pour tout* x, y de $\mathbf{Z}_2$ *on a*

$$|\Gamma_2(x) - \Gamma_2(y)|_2 \le \begin{cases} |x-y|_2 & \text{si } |x-y|_2 \neq \dfrac{1}{4} \\ 2|x-y|_2 & \text{si } |x-y|_2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

iii)- $\Gamma_p(0) = 1$, $\Gamma_p(1) = -1$, $\Gamma_p(2) = 1$, *et pour tout* x *de* $\mathbf{Z}_p$, $|\Gamma_p(x)|_p = 1$.

Preuve :

v : soit $n \in \mathbf{N}$, $\Gamma_p(n+1) = (-1)^{n+1}.\prod_{\substack{j=1 \\ (j,p)=1}}^{n} j$

$$= (-1)^{n}.\prod_{\substack{j=1 \\ (j,p)=1}}^{n-1} j\;.\,h_p(n) \quad = \Gamma_p(n)\,h_p(n)$$

où $h_p(n) = \begin{cases} -n & \text{si} \quad (n, p) = 1 \\ -1 & \text{si} \quad \text{p divise n} \end{cases} = \begin{cases} -n & \text{si} \quad |n|_p = 1 \\ -1 & \text{si} \quad |n|_p < 1 \end{cases}$

donc il suffit de montre que la fonction h_p peut se prolonger à $\mathbf{Z}_p$,c'est-à-dire de montrer que h_p est uniformément continue pour la topologie p – adique

en effet ;

soit $e > 0$ alors il existe s de $\mathbf{N}$ tel que $\frac{1}{p^s} < e$,

soient n, m de $\mathbf{N}$ tel que : $|n - m|_p < \frac{1}{p^s} \Leftrightarrow m = n + k.\, p^s$, on aura alors

les deux cas suivants :

1^er cas, si $|n|_p = 1$, comme $|.|_p$ est ultrametrique alors

$|n + p^s|_p = \max(|n|_p, |p^s|_p) = \max(1, |p^s|_p) = 1$, et par récurrence on déduit que pour

tout entier k $|n + k.p^s|_p$ et donc :

$h_p(m) = h_p(n + k.p^s) = -(n + k.p^s) \equiv (-n) \bmod p^s \equiv h_p(n) \bmod p^s$

ce qui donne $|h_p(m) - h_p(n)|_p \leq \frac{1}{p^s} < e$

2^éme cas, si $|n|_p < 1$

alors $|n + p^s|_p \leq \max(|n|_p, |p^s|_p) < 1$ et de même par récurrence on déduit que pour tout entier k, $|n + k.p^s|_p < 1$, ce qui donne

$$h_p(m) = h_p(n + k.p^s) = -1 = h_p(n)$$

par suite :

$$| h_p(m) - h_p (n) |_p \; = \; 0 \; < \; \frac{1}{p^s}$$

donc dans les deux cas on a montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \eta > 0 , \eta \; = \frac{1}{p^s} \; < \varepsilon \qquad \forall \quad n, m \in \mathbf{N}$$

$$| m - n |_p < \; \eta \quad \Rightarrow \; | h_p (m) - h_p (n) |_p \; < e$$

ce qui montre que h est uniformément continue sur **N**

montrons de plus que si $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy tend vers x alors $h_p(a_n)$ est de Cauchy tend vers $h_p (x)$,

en effet :

soit $e > 0$, $\forall\; s, t \in \mathbf{N}$, $\exists\, h > 0$, $| s - t |_p < h \Rightarrow | h_p(s) - h_p(t)|_p < \varepsilon$ car h_p est U.C.

or $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy, donc $\forall\, n, m \in \mathbf{N}$

$$m > n > N_0 \;\Rightarrow\; | a_m - a_n |_p < h = e_1 \Rightarrow | h_p (a_m) - h_p(a_n) |_p < e$$

ce qui montre que $h_p (a_n)$ est de Cauchy

et de plus s i $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux suites de Cauchy de même limite x alors $(h_p(a_n)_{n\in\mathbf{N}})$, et $(h_p(b_n)_{n\in\mathbf{N}})$ ont la même limite $h_p(x)$.

de tous de ce qui procède on déduit que h_p peut se prolonger à $\mathbf{Z}_p$ et on a pour tout entier p – adique x

$$h_p(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad |x|_p = 1 \\ -1 & \text{si} \quad |x|_p < 1 \end{cases}$$

Montrons(ii) ,

1)- si $p \neq 2$, $| \Gamma_p(x) - \Gamma_p(y) |_p \;\leq\; | x - y |_p$,

soient m, n de **N**

- § si $| m - n |_p = 1$ on a

$$\left|\Gamma_p(m) - \Gamma_p(n)\right|_p \leq \max\left(\left|\Gamma_p(m), \left|\Gamma_p(n)\right|\right|\right) \leq 1 = |m - n|_p$$

§ si $|m-n|_p = \frac{1}{p^s} < 1 \Rightarrow \exists\ k \in \mathbf{N},\ m = n + k.p^s$ et $(k, p) = 1$ donc

$$\Gamma_p(m) = \Gamma_p(n + k p^s) = (-1)^{n+kp^s} \prod_{\substack{j=1\\(j,p)=1}}^{n+kp^s-1} j = (-1)^{n+kp^s} \prod_{\substack{j=1\\(j,p)=1}}^{n-1} j \prod_{\substack{j=n\\(jp)=1}}^{n+k.p^s-1} j$$

$$= (-1)^n . \prod_{\substack{j=1\\(j,p)=1}}^{n-1} j \ .(-1)^{k.p^s} \prod_{\substack{j=n\\(j,p)=1}}^{n-1+k.p^s} j$$

$$= \Gamma_p(n)\ (-1)^k \prod_{\substack{j=n\\(j,p)=1}}^{n-1+kp^s} j \qquad \text{car } p \text{ impair.}$$

D'ou

$$\Gamma_p(m) - \Gamma_p(n) = \Gamma_p(n)\left[(-1)^k \prod_{\substack{j=n\\(j,p)=1}}^{n+kp^s-1} j - 1\right]$$

par suite

$$|\Gamma_p(m) - \Gamma_p(n)|_p = \left|(-1)^k \prod_{\substack{j=n\\(j,p)=1}}^{n+kp^s} j - 1\right|_p$$

car $|\Gamma_p(n)|_p = 1$ par définition de Γ_p

écrivons :

$$\prod_{\substack{j=n\\(j,p)=1}}^{n+kp^s-1} j = \prod_{\substack{j=n1\\(j,p)=1}}^{n+p^s-1} j \times \prod_{\substack{j=p^s+n\\(j,p)=1}}^{n+2p^s-1} j \times \cdots \times \prod_{\substack{j=n+(k-1)p^s\\(j,p)=1}}^{n+kp^s-1} j$$

le théorème de Wilson généralisé implique que chaque facteur de produit précédent satisfait :

$$\prod_{\substack{j=n+(k-1)p^s\\(j,p)=1}}^{n+kp^s-1} j = \prod_{\substack{i=0\\(i,p)=1}}^{p^s-1} \left(n + (k-1)p^s + i\right) \equiv -1 \bmod p^s \quad \forall\ k \geq 1$$

donc

$$\prod_{\substack{j=n\\(j,p)=1}}^{n+kp^s-1} j \equiv \underbrace{(-1)(-1)\cdots(-1)}_{kfois} \bmod p^s \equiv (-1)^k \bmod p^s$$

et

$$\left[(-1)^k \prod_{\substack{j=n \\ (j,p)=1}}^{n+kp^s-1} j - 1\right] \equiv \left[(-1)^k (-1)^k - 1\right] \mathrm{mod}\ \ p^s \equiv 0 \ \mathrm{mod}\ \ p^s$$

ce qui implique

$$|\Gamma_p(m) - \Gamma_p(n)|_p = |\ (-1)^k \cdot \prod_{\substack{j=n \\ (j,p)=1}}^{n+kp^s-1} j \ - 1|_p \ \le \frac{1}{p^s} = |m-n|_p$$

par continuité cette propriété reste vraie pour les éléments de $\mathbf{Z}_p$

2)- $p = 2$ montrons que

$$|\Gamma_2(x) - \Gamma_2(y)|_2 \le |x-y|_2 \quad \text{si} \quad |x-y|_2 \ne 1/4$$

$$|\Gamma_2(x) - \Gamma_2(y)|_2 \le 2\,|x-y|_2 \quad \text{si} \quad |x-y|_2 = 1/4$$

montrons d'abord ces relations pour les entiers naturels,

en effet ;

soient $m, n \in \mathbf{N}$ on suppose $n < m$

1er cas : si $|m-n|_2 = 1$ on a

$|\Gamma_2(m) - \Gamma_2(n)|_2 \le \max\left(|\Gamma_2(m)|_2, |\Gamma_2(n)|_2\right) \le 1 = |m-n|_2$

2ème cas : si $|m-n|_2 = \dfrac{1}{2^s} < 1 \Rightarrow \exists\ k \in \mathbf{N},\ m = n + k.2^s$ et $(k, 2) = 1$

on a

$$\Gamma_2(m) = \Gamma_2(n + k2^s) = (-1)^{n+k2^s} \prod_{\substack{j=1 \\ (j,2)=1}}^{n+k2^s-1} j$$

$$= (-1)^n \prod_{\substack{j=1 \\ (j,2)=1}}^{n-1} j \cdot \prod_{\substack{j=n \\ (j,2)=1}}^{n+k2^s-1} j = \Gamma_2(n) \cdot \prod_{\substack{j=n \\ (j,2)=1}}^{n+k.2^s-1} j$$

Ce qui implique

$$|\Gamma_2(m) - \Gamma_2(n)|_2 = \underbrace{|\Gamma_2(n)|_2}_{=1} \left| \prod_{\substack{j=n \\ (j,2)=1}}^{n+k2^s-1} j - 1 \right|_2 = \left| \prod_{\substack{j=n \\ (j,2)=1}}^{n+k2^s-1} j - 1 \right|_2$$

Ecrivons

$$\prod_{\substack{j=n \\ (j,2)=1}}^{n+k2^s-1} j = \prod_{\substack{j=n \\ (j,2)=1}}^{n+2^s-1} j \times \prod_{\substack{j=n+2^s \\ (j,2)=1}}^{n+2.2^s-1} j \times \cdots \times \prod_{\substack{j=n+(k-1).2^s \\ (j,2)=1}}^{n+ki\ 2^s-1} j$$

Le théorème de Wilson généralisé implique que pour $s \geq 3$ chaque facteur de produit précédent satisfait :

$$\prod_{\substack{j=n+(k-1)2^s \\ (j,2)=1}}^{n+k2^s-1} j = \prod_{\substack{i=0 \\ (i,2)=1}}^{2^s-1} \big(n+(k-1)2^s+i\big) \equiv 1 \bmod 2^s \quad \forall\ k \geq 1$$

on obtient alors

$$\prod_{\substack{j=n \\ (j,2)=1}}^{n+k2^s-1} j - 1 \equiv 1 - 1 \bmod 2^s \equiv 0 \bmod 2^s$$

ce qui implique

$$|\Gamma_2(m)-\Gamma_2(n)|_2 = \Big| \prod_{\substack{j=n \\ (j,2)=1}}^{n+k.2^s-1} j - 1 \Big|_2 \leq \frac{1}{2^s} = |m-n|_2$$

- Pour $s = 0$, $|m-n|_2 = \dfrac{1}{2^0} = 1$ (le cas précédent)
- Pour $s = 1$, $|m-n|_2 = \dfrac{1}{2}$ et $|\Gamma_2(m) - \Gamma_2(n)|_2 \equiv 1 - 1 \bmod 2 \equiv 0 \bmod 2$

  donc $|\Gamma_2(m)-\Gamma_2(n)|_2 \leq \dfrac{1}{2} = |m-n|_2$

donc pour $s \neq 2$, $m, n \in \mathbf{N}$, $|m-n|_2 = \dfrac{1}{2^s}$ on a $|\Gamma_2(m)-\Gamma_2(n)|_2 \leq |m-n|_2$

- Pour s = 2, $|m-n|_2 = \dfrac{1}{4}$ on a :

$$\prod_{\substack{j=n \\ (j,2)=1}}^{n+2^2-1} j = \prod_{\substack{a=0 \\ (a,2)=1}}^{2^2-1} (n+a) = \prod_{\substack{a=0 \\ (a,2)=1}}^{3} (n+a) \equiv 1 \times 3 \bmod 2^s \equiv -1 \bmod 2^s$$

car n et $(n+2)$ sont de même parité ainsi que $(n+1)$ et $(n+3)$.
de même pour

$$\prod_{\substack{j=n+(k-1)2^s \\ (j,2)=1}}^{n+k.2^s-1} j \equiv 1 \times 3 \bmod 2^2 \equiv -1 \bmod 2^2$$

donc

$$\prod_{\substack{j=n \\ (j,2)=1}}^{n+k.2^s-1} j \equiv \underbrace{(-1)(-1)\cdots(-1)}_{k fois} \bmod 2^2 \equiv (-1)^k \bmod 2^2 \qquad \text{et} \quad (k, 2) = 1$$

$$\equiv -1 \bmod 2^2$$

par suite :

$$\prod_{\substack{j=n \\ (j,2)=1}}^{n+k2^s-1} j \ -1 \equiv \ -1 \ -1 \ \bmod 2^2 \quad \equiv \ 2 \ \bmod 2^2$$

ce qui implique

$$\left| \prod_{\substack{j=n \\ (j,2)=1}}^{n+k2^s-1} j \ - \ 1 \right|_2 \ = \left| 2 \right|_2 \ = \frac{1}{2}$$

et donc $\qquad \left|\Gamma_2(m) - \Gamma_2(n)\right|_2 = \dfrac{1}{2} = 2 \,.\, \dfrac{1}{2^2} = 2\left|m - n\right|_2$

par passage à la limite on trouve que la propriété reste vraie pour les entiers p – adiques.

iii)- Calculons quelques valeurs de Γ_p , on a

$\Gamma_2(2) = (-1)^2 .(1\,!)_2 = 1$

D'autre part ; la relation fonctionnelle implique

$\Gamma_2(2) = \Gamma_2(1).\, h_2(1) \quad \Rightarrow \quad \Gamma_2(1) = - \Gamma_2(1) = -1 .$

$\Gamma_p(1) = h_p(0)\,\Gamma_p(0) = -\Gamma_p(0) \quad \Rightarrow \quad \Gamma_p(0) = 1$

II- 6 Lemme : (*formule des compléments*)

pour tout entier naturel n , on a

$$\Gamma_p(-n) \quad = \quad (-1)^{n+1+\left[\frac{n}{p}\right]} . \ \frac{1}{\Gamma_p(n+1)}$$

où $\left[\dfrac{n}{p}\right]$ *désigne la partie entière de* $\dfrac{n}{p}$

et plus généralement ; pour tout x de $\mathbf{Z}_p$

- $p \neq 2$ on a $\Gamma_p(x)\Gamma_p(1-x) = (-1)^{R(x)}$ *avec* $R(x) \equiv x \bmod p$
- $p = 2$ on a $\Gamma_2(x)\Gamma_2(1-x) = (-1)^{s(x)+1}$

avec $s\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j 2^j\right) = a_1$ *si* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j 2^j$ *est le développement de Hensel de* x

Preuve :

La relation fonctionnelle de Γ_p implique

$$\Gamma_p(0) = \Gamma_p(0-1)h_p(0-1) = \Gamma_p(-1)h_p(-1) = \Gamma_2(-2)h_p(-2)h_p(-1)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$= \Gamma_p(-n)h_p(-n)h_p(-n+1)\cdots h_p(-1)$$

$$= \prod_{j=1}^{n} h_p(-j)\Gamma_p(-n)$$

or

$$h_p(-n) = \begin{cases} n & \text{si} \quad |n|_p = 1 \\ -1 & \text{si} \quad |n|_p < 1 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\Gamma_p(0) = \prod_{\substack{j=1 \\ (j,p)=1}}^{n} j \; . \Gamma_p(-n)\,(-1)^d$$

où d est le nombre de multiple de p entre 1 et n , donc $d = \left[\frac{n}{p}\right]$

et on obtient

$$1 = \Gamma_p(0) = \prod_{\substack{j=1 \\ (j,p)=1}}^{n} j \quad \Gamma_p(-n)\ (-1)^{\left[\frac{n}{p}\right]}$$

Autrement dit

$$\Gamma_p(-n) = (-1)^{n+1+\left[\frac{n}{p}\right]} . \frac{1}{\Gamma_p(n+1)}$$

et on déduit de cette relation que les entiers négatifs ne sont pas des pôles pour la fonction G_p.

posons maintenant $n+1 = m \Leftrightarrow -n = 1-m$ alors on a

$$\Gamma_p(m)\Gamma_p(1-m) = \Gamma_p(n+1)\Gamma_p(-n) = (-1)^{n+1+\left[\frac{n}{p}\right]}$$

écrivons n en base p

$$n = n_0 + n_1 p + \cdots = n_0 + p\left[\frac{n}{p}\right]$$

- si $p \neq 2$ on aurait :

$$n + 1 - \left[\frac{n}{p}\right] = n_0 + \underbrace{(p-1)}_{pair}\left[\frac{n}{p}\right] + 1$$

et donc

$$(-1)^{n+1-\left[\frac{n}{p}\right]} = (-1)^{n_0+1}$$

D'autre part ;

$m = n + 1 \equiv n_0 + 1 \bmod p$

et il suffit donc de prendre $R(m) = n_0 + 1 \equiv m \bmod p$ et il est clair que $1 \leq R(m) \leq p$

Donc si m, n sont deux entiers naturels vérifiant $n \equiv m \bmod p^s \Rightarrow n \;^o\; m \bmod p$

on aurait :

$$R(n) = R(m) \quad (\text{car } R(n) \equiv n \bmod p\ )$$

Ceci est équivaut à dire

$$R(m) \equiv R(n) \bmod p$$

C'est à dire que R est uniformément continue sur **N**

donc si $(a_n)_{n\in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy tend vers x alors R ($(a_n)_{n\in N}$) est aussi de Cauchy tend vers R (x) ce qui montre que la fonction R peut se prolonger à $\mathbf{Z}_p$ et on a :

$$R(x) \equiv x \bmod p$$

Et si on pose $x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ on aurait $R(x) = a_0$

- si $p = 2$ on aurait

$$\Gamma_2(n)\Gamma_2(1-n) = (-1)^{n-\left[\frac{n-1}{2}\right]}$$

développons n en puissances de 2 on trouve :

$$n = a_0 + a_1.2 + k.2^2, \qquad a_0, , a_1 \in \{0, 1\},$$

ce qui donne

$$\frac{n-1}{2} = \frac{a_0 - 1}{2} + a_1 + 2k$$

Raisonnement sur a_0 :

♦ 1er cas si $a_0 = 0$ alors $\left[\frac{a_0 - 1}{2}\right] = \left[-\frac{1}{2}\right] = -1$ et donc :

$$\left[\frac{n-1}{2}\right] = \left[\frac{a_0 - 1}{2}\right] + a_1 + 2k = a_{1-1+2k}$$

par suite ;

$$\Gamma_2(n)\Gamma_2(1-n) = (-1)^{a_0 + a_1.2 + k.2^2 - \left[\frac{a_0-1}{2}\right] - a_1 - 2.k} = (-1)^{a_1.2 + k.2^2 - a_1 + 1 - 2.k}$$

$$= (-1)^{a_1 + 1 + 2k} = (-1)^{a_1 + 1}$$

♦ 2éme cas si $a_0 = 1$ alors $\left[\frac{a_0 - 1}{2}\right] = \left[\frac{1-1}{2}\right] = 0$ donc

$\Gamma_2(n)\ \Gamma_2(1-n) \quad = \quad (-1)^{1+a_1.2+k.2^2-a_1-2.k} \quad = \quad (-1)^{a_1+1}$

il suffit donc de prendre $s(n) = a_1$

soient $m, n \in \mathbf{N}$ tel que : $m \equiv n \bmod 2^s \Rightarrow m = n + k.2^s \Rightarrow s(n) = s(m)$

c'est à dire que s est localement constante . donc uniformément convergente pour la topologie p – adique de **N**

de plus si $(a_n)_{n î N}$ est une suite de Cauchy tend vers x alors $s((a_n)_{n î N})$ est aussi de Cauchy tend vers $s(x)$, et on déduit que s peut se prolonger à $\mathbf{Z}_2$ et on a

$$s\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^n\right) = a_1 \qquad \blacklozenge$$

La fonction gamma p – adique satisfait une relation similaire à celle de la gamma complexe, c'est la formule de multiplication de Gauss – Legendre, et on a :

II – 7 Théorème : (*formule de multiplication*)

Soit m *un entier non nul premier à* p *, alors :*

$$\prod_{j=0}^{m-1} \Gamma_p\left(x + \frac{j}{m}\right) = e_m\, m^{1-R(mx)} \left(m^{p-1}\right)^{S(mx)} \Gamma_p(mx)$$

Où : $\quad e_m = \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma_p\left(\frac{j}{m}\right)$

$R(y) \in \{1, 2, \ldots p\}$ tel que $R(y) \equiv y \bmod p$

$$S(y) = \frac{R(y) - y}{p} \in \mathbf{Z}_p$$

Preuve :

Posons

$$f(x) = f_m(x) = \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma_p\left(x + \frac{j}{m}\right)$$

et $\qquad G(x) = G_m(x) = \dfrac{f_m(x)}{\Gamma_p(mx)}$

Calculons le facteur de Gauss $G(x)$, nous avons :

$$G\left(x + \frac{1}{m}\right) = \frac{\prod_{j=0}^{m-1} \Gamma_p\left(x + \frac{j+1}{m}\right)}{\Gamma_p(mx+1)} = \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma_p\left(x + \frac{j}{m}\right)}{\Gamma_p(mx+1)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma_p(mx)\, h_p(mx)} \frac{\Gamma_p(x+1)}{\Gamma_p(x)} \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma_p\left(x + \frac{j}{m}\right)$$

$$= \frac{h_p(x)}{h_p(mx)} G(x) = l(x) G(x)$$

où

$$l(x) = \frac{h_p(x)}{h_p(mx)} = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{si} \quad |x|_p = 1 \\ 1 & \text{si} \quad |x|_p < 1 \end{cases}$$

par suite :

$$x = 0 \Rightarrow G\left(\frac{1}{m}\right) = l(0) G(0)$$

$$x = \frac{1}{m} \Rightarrow G\left(\frac{2}{m}\right) = l(0)\, l\left(\frac{1}{m}\right) G(0)$$

$$\vdots$$

$$x = \frac{j-1}{m} \Rightarrow G\left(\frac{j}{m}\right) = \prod_{i=0}^{j-1} l\left(\frac{i}{m}\right) G(0)$$

Comme $(m, p) = 1$, (c'est à dire $|m x|_p = |x|_p$) on obtient :

$$\prod_{i=0}^{j-1} l\left(\frac{i}{m}\right) = \left(\frac{1}{m}\right)^{u(j)}$$

Où $u(j) = j - 1 - \left[\frac{j-1}{p}\right]$ est le nombre d'élément entre 0 et $j-1$ qui ne sont pas divisible par p.

Trouvons une forme convenable à cette exposant, écrivons d'abord :

$$j - 1 = (j-1)_0 + p\left[\frac{j-1}{p}\right] \Rightarrow j = (j-1)_0 + 1 + p\left[\frac{j-1}{p}\right]$$

posons $R(j) = (j-1)_0 + 1$ et donc $R(j) \equiv j \bmod p$ et on a

$$u(j) = (j-1) - \left[\frac{j-1}{p}\right] = R(j) - 1 + (p-1)\left[\frac{j-1}{p}\right]$$

on obtient alors :

$$\prod_{i=0}^{j-1} l\left(\frac{i}{m}\right) = \left(\frac{1}{m}\right)^{R(j) - 1 + (p-1)\left[\frac{j-1}{p}\right]}$$

$$= m^{1 - R(j) - 1} \left(m^{p-1}\right)^{-\left[\frac{j-1}{p}\right]}$$

$$= m^{1 - R(j)} \left(m^{p-1}\right)^{S(j)}$$

où $$S(j) = -\left[\frac{j-1}{p}\right] = \frac{R(j)-j}{p}$$

or $$G(0) = \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma_p\left(\frac{k}{m}\right)$$

on obtient alors

$$G\left(\frac{j}{m}\right) = m^{1-R(j)}\left(m^{p-1}\right)^{S(j)} \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma_p\left(\frac{k}{m}\right)$$

par suite

$$G(x) = m^{1-R(mx)}\left(m^{p-1}\right)^{S(mx)} \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma_p\left(\frac{k}{m}\right)$$

$$= \frac{\prod_{j=0}^{m-1} \Gamma_p\left(x+\frac{j}{m}\right)}{\Gamma_p(mx)}$$

Cette relation est vraie pour tout x de $\mathbf{Z}_p$ car les fonctions $R(j)$ et $S(j)$ sont uniformément continue pour la topologie p – adique de **N,** donc elles se prolongent à $\mathbf{Z}_p$.

On va donner maintenant le théorème de *Mahler* pour les fonctions continues de $\mathbf{Z}_p$ puis calculer les coefficients de *Mahler* de Γ_p et de $\frac{1}{\Gamma_p}$ d'abord on a :

II – 8 Définition :

pour $x \in \mathbf{Z}_p$, $n \in \mathbf{N}$ *on définit le symbole* $\binom{x}{n}$ *par :*

$$\binom{x}{0} = 1 \text{ et } \binom{x}{n} = \frac{x(x-1).(x-2)...(x-n+1)}{n!}$$

et il est clair que

$$\binom{x+1}{n} = \binom{x}{n} + \binom{x}{n-1} \qquad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Notons que si f est une application de $\mathbf{Z}_p$ dans un anneau A

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$$

donc $$\Delta^2 f(n) = f(n+2) - \binom{2}{1} f(n+1) + f(n)$$

et $$\Delta^k f(\mathrm{n}) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(n+j)$$

on a alors le théorème de *Mahler* :

II – 9 Théorème : (*Mahler*)

Soit $f \quad \mathbf{Z}_p \to \mathbf{C}_p$ *une fonction continue, posons* $a_k = \Delta^k f(0)$ *alors* $|\, a_k \,|_p$ *tend vers zéro et la série* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \binom{x}{k}$ *converge uniformément vers* f *de plus ;*

$$\| f \| = \sup_{x \in Z_p} |f(x)|_p = \sup_{k \geq 0} |a_k|_p$$

Preuve :

Soit $f \quad \mathbf{Z}_p \to \mathbf{C}_p$ une fonction continue ; si $f \neq 0$ on peut toujours supposer $\sup_{x \in Z_p} |f(x)|_p = 1$

(sinon on raisonne sur $g(x) = \dfrac{f(x)}{f(x_0)}$ tel que $\sup_{x \in Z_p} |f(x)|_p = f(x_0)$)

on a

$$\begin{aligned}
\Delta^{p^r} f(y) &= \sum_{j=0}^{p^r} (-1)^{p^r - j} \binom{p^r}{j} f(y+j) \\
&= f(y + p^r) - f(y) + pk \\
&\equiv f(y + p^r) - f(y) \bmod p
\end{aligned}$$

or

f est continue sur $\mathbf{Z}_p \iff$ uniformément continue

$\iff |f(y + p^r) - f(y)|_p \xrightarrow{r \to \infty} 0$

par suite $\left|\Delta^{p^r} f(y)\right|_p \leq p^{-1} \qquad \forall\ y \in \mathbf{Z}_p$

Remplaçons f par $\left(\dfrac{\Delta^{p^{r_1}} f}{p}\right)$ qui est aussi uniformément continue et refaisons le même travail sur cette nouvelle fonction nous obtenons :

$$\left|\Delta^{p^{r_2}} \left(\frac{\Delta^{p^{r_1}} f}{p}\right)(y)\right| \leq p^{-1} \iff \left|\Delta^{p^{r_1} + p^{r_2}} f(y)\right|_p \leq p^{-2}$$

et par récurrence sur p^{r_i} trouvons

$$\left|\Delta^{p^{r_1}+p^{r_2}+\cdots+p^{r_i}} f(y)\right|_p \leq p^{-i} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \Delta^n f(y) = 0 \qquad \forall\, y \in \mathbf{Z}_p$$

En particulier pour $y = 0$ on a $\left|\Delta^k f(0)\right|_p \longrightarrow 0$

Montrons maintenant que si $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \binom{x}{n}$ alors $a_k = \Delta^k f(0)$

En effet ;

Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \binom{x}{n} \quad \Rightarrow \quad f(x+1) = \sum_{n\geq 0} a_n \binom{x+1}{n}$

Or $\binom{x+1}{n} = \begin{cases} \binom{x}{n} + \binom{x}{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

Donc

$$f(x+1) = \underbrace{a_0 1 + \sum_{n\geq 1} a_n \binom{x}{n}}_{=f(x)} + \sum_{n\geq 1} a_n \binom{x}{n-1}$$

et

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n \binom{x}{n-1} = \sum_{n\geq 0} a_{n+1} \binom{x}{n}$$

par récurrence on aura

$$\Delta^k f(x) = \sum_{n\geq 1} a_{n+k} \binom{x}{n}$$

pour $x = 0$ on trouve $a_k = \Delta^k f(0) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(j)$

passons maintenant à calculer les coefficients de Mahler de Γ_p, pour cela nous avons besoin de ces deux lemmes

II – 10 Lemme :

soit f $\mathbf{Z}_p \to \mathbf{C}_p$, *une fonction continue et* $\sum_{n\geq 0} a_n \binom{x}{n}$ *son développement de Mahler alors on a :*

$$\sum_{n\geq 0} f(n) \frac{x^n}{n!} = (\exp. x) \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$$

preuve :

Comme $(\exp. x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow \exp(-x) = \sum (-1)^n \frac{x^n}{n!}$ on aura :

$$\exp(-x) \sum_{n\geq 0} f(n)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{n!}.\sum_{n\geq 0} f(n)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\left[\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j} f(j)}{(n-j)!.\,j!}\right].x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left[\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j} f(j).n!}{(n-j)!.\,j!.n!}\right].x^n = \sum_{n\geq 0}\left[\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j}.\binom{n}{j}\frac{f(j)}{n!}\right].x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}\underbrace{\left[\sum_{jj=0}^{n} (-1)^{n-j}\binom{n}{j} f(j)\right]}_{=a_n} = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$$

II – 11 Lemme :

Pour tout entier positif n *on a*

$$\Gamma_p(n+1) = (-1)^{n+1}.\frac{n!}{\left[\frac{n}{p}\right]!.\,p^{\left[\frac{n}{p}\right]}}$$

en particulier pour $n = mp + j \ , \quad 0 \leq j < p$

$$\Gamma_p(mp+j+1) = (-1)^{mp+j+1}.\frac{(mp+j)!}{m!.p^m}$$

preuve :

soit $n \in \mathbf{N}$, par définition de Γ_p on a

$$\Gamma_p(n+1) = (-1)^{n+1}\prod_{\substack{j=0\\(j,p)=1}}^{n} j = \frac{n!}{d_n}$$

où

d_n est le produit des nombres entre 1 et n qui sont divisibles par p

or le nombre des éléments divisibles par p entre 1 et n est $\left[\frac{n}{p}\right]$,

ce qui donne $d_n = \left[\frac{n}{p}\right]!.\,p^{\left[\frac{n}{p}\right]}$ et on a montré que :

$$\Gamma_p(n+1) = (-1)^{n+1}.\frac{n!}{\left[\frac{n}{p}\right]!.\,p^{\left[\frac{n}{p}\right]}}$$

en particulier pour $n = mp + j$ alors $\left[\frac{n}{p}\right] = \left[\frac{mp + j}{p}\right] = m \qquad (j < p)$

donc :

$$\Gamma_p(mp + j + 1) = (-1)^{mp+j+1} \cdot \frac{(mp + j)!}{m!.\ p^m}$$

Le théorème suivant donne les coefficients de Mahler de la fonction gamma p – adique,

II - 12 Théorème :

posons $\Gamma_p(x + 1) = \sum_{n \ge 0} a_n \binom{x}{n}$ *alors les coefficients « a_n » vérifient la relation :*

$$\exp\left(x + \frac{x^p}{p}\right) \cdot \frac{1 - x^p}{1 - x} = \sum_{n \ge 0} (-1)^{n+1} \frac{a_n}{n!} x^n$$

preuve :

on va appliquer le lemme précédent à la fonction : $x \to \Gamma_p(x + 1)$,

posons :

$g(x) = \sum_{n \ge 0} \Gamma_p(n + 1) \frac{x^n}{n!}$ et pour $n = mp + j$, tel que $0 \,£\, j < p$ on peut écrire

$$g(x) = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma_p(mp + j + 1)}{(mp + j)!} . x^{mp+j} = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{mp+j+1}(mp + j)!}{(mp + j)!.\ p^m m!} . x^{mp+j}$$

$$= \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{mp+j+1} \left(\frac{x^p}{p}\right)^m . \frac{x^j}{m!} = -\sum_{j=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-x)^p}{p}\right)^m . \frac{(-x)^j}{m!}$$

$$= -\exp\left(\frac{(-x)^p}{p}\right) . \sum_{j=0}^{p-1} (-x)^j$$

par suite :

$$g(-x) = -\exp\left(\frac{x^p}{p}\right) . \sum_{j=0}^{p-1} x^j = -\exp\left(\frac{x^p}{p}\right) . \frac{1 - x^p}{1 - x} \qquad (*)$$

le lemme II – 10 implique :

$$g(x) = \sum_{n \ge 0} \Gamma_p(n + 1) . \frac{x^n}{n!} = \exp x . \sum_{n \ge 0} a_n \frac{x^n}{n!}$$

donc

$$g(-x) = \exp(-x).\sum_{n\geq 0} a_n(-1)^n \frac{x^n}{n!} \qquad = -\exp\left(\frac{x^p}{p}\right).\frac{1-x^p}{1-x} \qquad (**)$$

de (*) et (**) on trouve :

$$\exp\left(x + \frac{x^p}{p}\right).\frac{1-x^p}{1-x} = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} a_n \frac{x^n}{n!}$$

On va montrer maintenant que même la fonction $\frac{1}{\Gamma_p}$ est continue et possède donc un développement de Mahler, d'abord on a besoin de

II – 13 Définition :

L'opérateur de Atkin noté U_p est défini sur les séries formelles de Laurent par

$$f = \sum a_n T^n \qquad \text{Alors} \qquad U_p(f) = \sum a_{pn} T^n$$

et il satisfait les propriétés suivantes :

i)- $T^j U_p(f) = U_p(T^{pj} f)$

ii)- $g(\mathrm{T})\, U_p(f) = U_p(g(\mathrm{T}^p) f)$

iii)- $U_p\left(\sum_{n=-a}^{\infty} a_n T^n\right) = U_p\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n\right)$ pour $0 \leq a \leq p-1$

II – 14 Théorème : (*coefficient de Mahler de* $\frac{1}{\Gamma_p}$)

Soient 0 £ a £ p – 1, et m Î **N**

Posons $G_a(m) = (-1)^m \dfrac{p^m\, m!}{(a+pm)!}$

Alors G_a *admet un prolongement continu à* $\boldsymbol{Z}_p$ *qui* est

$$G_a(x) = \frac{(-1)^{a+1}}{\Gamma_p(a+px+1)}$$

Et la série de Mahler de G_a est $\quad G_a(x) = \sum_{k\geq 0} \dfrac{A_{a+kp}}{p^{a+k}} k! \dbinom{x}{k}$

Où

π est une racine de $x^{p-1} + p \quad (p^{p-1} = -p)$

et

$$\sum_{n\geq 0} A_n x^n = e^{p(x-x^p)}$$

Preuve :

On a vu que $$\Gamma_p(a + pm + 1) = \frac{(-1)^{a+pm+1}(a + pm)!}{p^m m!}$$

Ce qui donne

$$G_a(m) = \frac{(-1)^{a+1}}{\Gamma_p(a + pm + 1)}$$

Donc $G_a(m)$ est la restriction à **N** de la fonction $G_a(x) = \dfrac{(-1)^{a+1}}{\Gamma_p(a + px + 1)}$

et si p ¹ 2 la formule $\Gamma_p(x)\,\Gamma_p(1-x) = (-1)^{R(x)}$ où $R(x) \equiv x \bmod p$ montre que $G_a(x) = \Gamma_p(-a-px)$.

Soit $p \in \mathbf{C}_p$ une racine non nulle de $x + \dfrac{x^p}{p}$ (ie $p^{p-1} = -p$)

Notons $q_p(t) = e^{t+\frac{t^p}{p}}$ (appelée exponentielle d'*Artin – Hasse*)

et $\Theta_p(t) = e^{p(t-t^p)}$ (appelée exponentielle de *Dwork*)

Remarquons que

$$q_p(pt) = e^{pt+\frac{(pt)^p}{p}} = e^{p(t-t^p)} = \Theta_p(t)$$

Notons A_n les coefficient de Taylor de $q_P(t)$

La propriété (ii) de l'opérateur d'Atkin pour $f = e^{pT} f$ et $g = e^{-pT}$ implique :

$$e^{-pT} U_p(e^{pT} f) = U_p(e^{-pT^p} e^{pT} f) = U_p(\Theta_p(T) f)$$

Pour $f = G_a$ et en remplaçant l'indéterminé T par pT, le lemme II - 10 implique :

$$e^{-pT}\sum_{m\geq 0} G_a(m)\frac{p^m T^m}{m!} = \sum_{k\geq 0} c_k \frac{p^k T^k}{k!} \qquad \text{..... (*)}$$

Avec $$G_a(x) = \sum_{k\geq 0} c_k \binom{x}{k}$$

D'autre part ; en utilisant la propriété (iii) de U_p calculons le coté gauche de (*)

$$e^{-pT}\sum_{m\geq 0} G_a(m)\frac{p^m T^m}{m!} = e^{-pT}\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m p^m m!}{(a + pm)!}\cdot\frac{p^m T^m}{m!}$$

$$= e^{-pT}\sum_{m\geq 0}\frac{(-p)^m p^m T^m}{(a + pm)!} \qquad (\text{et } p^{p-1} = -p)$$

$$= e^{-pT} \sum_{m \geq 0} \frac{p^{(p-1)m} p^m T^m}{(a+pm)!}$$

$$= e^{-pT} \sum_{m \geq 0} \frac{p^{pm}}{(a+pm)!} T^m$$

$$= e^{-pT} U_p \left(\sum_{m \geq 0} \frac{p^{a+m}}{(a+m)!} \cdot \frac{T^m}{p^a} \right)$$

$$= e^{-pT} U_p \left(\sum_{n \geq 0} \frac{p^n}{n!} \frac{T^{n-a}}{p^a} \right)$$

$$= e^{-pT} U_p \left(\sum_{n \geq 0} \frac{p^n T^n}{n!} \frac{T^{-a}}{p^a} \right)$$

$$= e^{-pT} U_p \left(e^{pT} \frac{T^{-a}}{p^a} \right)$$

$$= U_p \left(\Theta_p(T) \frac{T^{-a}}{p^a} \right)$$

$$= U_p \left(\sum_{n \geq 0} \frac{A_n T^{n-a}}{p^a} \right)$$

$$= U_p \left(\sum_{n \geq -a} \frac{A_{n+a}}{p^a} T^n \right)$$

$$= U_p \left(\sum_{n \geq 0} \frac{A_{n+a}}{p^a} T^n \right)$$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{A_{a+kp}}{p^a} T^k$$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{A_{a+kp}}{p^{a+k}} k! \frac{p^k T^k}{k!} \qquad \ldots (**)$$

De (*) et de (**) on déduit que

$$\sum_{k \geq 0} c_k \frac{p^k T^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{A_{a+kp}}{p^{a+k}} k! \frac{p^k T^k}{k!}$$

i.e. $\quad c_k = \dfrac{A_{a+kp}}{p^{a+k}} k!$ ♦

On va utiliser ces résultats dans la suite pour la démonstration de la formule de Gross – Koblitz.

L'étude analytique de la fonction gamma p – adique

On va présenter dans ce chapitre quelque propriétés analytiques de Γ_p et de $\log_p \Gamma_p$, pour cela on a :

III – 1 Définition :

La somme indéfinie d'une fonction continue f de $\mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{K}$ ($\mathbf{K} \supseteq \mathbf{Q}_p$) notée Sf est le prolongement de $n \rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} f(j)$

et on a :

$$Sf(x) = \lim_{\substack{n \to x \\ n \in N}} \sum_{j=0}^{n-1} f(j)$$

III – 2 Proposition : (*propriété de Sf*)

Pour f Î C^1 ($\mathbf{Z}_p \rightarrow$ K) on a :

i)- $Sf(x+1) - Sf(x) = f(x)$ et $Sf(0) = 0$

ii)- si $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \binom{x}{n}$ alors $Sf(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \binom{x}{n+1}$

Preuve :

i)- pour $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$Sf(n+1) - Sf(n) = \sum_{j=0}^{n} f(j) - \sum_{j=0}^{n-1} f(j) = f(n)$$

Donc par passage à la limite on trouve le résultat.

ii)- soit $\sum_{n \geq 0} a_n \binom{x}{n}$ l a série de Mahler de f,

Alors si on pose :

$$Sf(x) = \sum_{n \geq 0} b_n \binom{x}{n}$$

On aura

$$b_0 = 0 \quad \text{car} \quad Sf(0) = 0$$

Et comme $\binom{x+1}{n} = \binom{x}{n} + \binom{x}{n-1}$, et en utilisant (i) on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \binom{x+1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \binom{x}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\binom{x}{n} + \binom{x}{n-1} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \binom{x}{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \binom{x}{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} \binom{x}{n}$$

Par identification on trouve que $b_{n+1} = a_n$, donc $Sf(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \binom{x}{n}$

III – 3 Définition :

un groupe abélien $(G, \bullet)$ *est divisible si pour tout* $g \in G$, $n \in \mathbf{N}$, *il existe* $x \in G$ tel que : $g = x^n$

III – 4 Lemmes : (cf. [14])

1)- le groupe $\mathbf{C}_p^+ = \{x \in \mathbf{C}_p,\ |1 - x|_p < 1\}$ *est* divisible

2)- *si* G, Y *sont deux groupes abéliens tel que* Y *divisible , et* X *un sous groupe de* G *, alors tout homomorphisme* $h : X \to Y$ *peut s'étendre en un homomorphisme* $\hat{h}\ G \to Y$ *tel que sa restriction à* X *est égal à* h

III – 5 Corollaire :

La fonction $\log : \mathbf{C}_p^+ \to \mathbf{C}_p$ *se prolonge en un homomorphisme continue de* $\mathbf{C}_p^{\times} \to \mathbf{C}_p$ *on le note « LOG »*

III – 6 Théorème :

soient $f, g : \mathbf{C}_p^{\times} \to \mathbf{C}_p$ *deux extensions de* $\log : \mathbf{C}_p^+ \to \mathbf{C}_p$*, alors il existe un élément* c *de* $\mathbf{C}_p$ *t.q* $f(x) = g(x) + c\, v_p(x)$ *pour tout* x *de* $\mathbf{C}_p$

Preuve :

Soit $x \in \mathbf{C}_p$ tq $|x|_p = 1$ alors $x \in \mathbf{C}_p^+ = \{ x \in \mathbf{C}_p, |1 - x|_p < 1 \}$

Car $|1 - x|_p < \max(|1|_p, |x|_p) = 1$ ce qui donne :

$f(x^n) = \log x^n = n . \log x = n . f(x)$

$\Rightarrow \quad f(x) = (f(x^n))/n = (\log x^n)/n = (g(x^n))/n = g(x)$

car la restriction de f et g à C_p^+ égal à $\log$, et on a montré que :

$x \in \mathbf{C}_p$ tel que $|x|_p = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x)$

Soit maintenant $x \in \mathbf{C}_p^{\times}$, alors on a :

$x \in \mathrm{C}_p^{\times} \Rightarrow |x|_p = p^{-r}$, $r \in \mathbf{Q}$, et donc $v_p(x) = r = t/n$, avec $t, n \in \mathbf{Z}$

Ce qui implique que $x^n = p^t y$ où $|y|_p = 1$,

et d'après la première partie du preuve on déduit que $f(y) = g(y)$

Par suite :

$$f(x^n) = f(p^t y) = t.f(p) + f(y)$$
$$g(x^n) = g(p^t y) = t.g(p) + g(y) = t.g(p) + f(y)$$

D'ou :

$$f(x) - g(x) = [f(x) - g(x)]/n = (t/n)(\mathrm{f}(p) - g(p))$$
$$= c.v_p(x) \quad , \qquad \text{avec } c = f(p) - g(p)$$

III – 7 Corollaire :

Il existe une seule fonction f vérifiant :

i)- f est une extension de $\log : \mathbf{C}_p^{+} \to \mathbf{C}_p$

ii)- $f(x.y) = f(x) + f(y) \quad \forall \; x, y \in \mathbf{C}_p$

iii)- $f(p) = 0$

Preuve:

Soit LOG $\mathbf{C}_p^{\times} \to \mathbf{C}_p$ une extension de $\log : \mathbf{C}_p^{+} \to \mathbf{C}_p$,

Posons : $f(x) = \text{LOG } x - v_p(x).\text{LOG } p$,

il est clair que f satisfait (i) (ii) et (iii), reste à montrer que f est unique ,

En effet ;

Supposons qu'il existe une autre fonction g vérifie ces hypothèses, alors d'après le théorème précédent (III-6) on a :

$$f(x) = g(x) + c\, v_p(x) \quad \text{avec} \quad c = f(p) - g(p),$$

or $f(p) = g(p) = 0$, et donc on obtient $f(x) = g(x)$

III – 8 Définition :

la fonction du corollaire précédent est par définition le logarithme d'Iwasawa sur $C_p^{\prime}$ et il est noté par $\log_p$

et il vérifie les propriétés suivantes :

- Il est localement analytique au voisinage de tout point $a \neq 0$ et on a

$$\log_p x = \log_p a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{x-a}{a} \right)^k \qquad \text{pour} \qquad |x-a|_p < |a|_p$$

- Pour tout x de Z_p^* on a

$$\log_p x = \frac{1}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-x^{p-1})^k}{k}$$

III – 9 Définition :

*Soit f une fonction continue de $\mathbf{Z}_p$® **K**, on définit l'intégrale de Volkenborne de la fonction f par :*

$$\int_{Z_p} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n}\sum_{j=0}^{p^n-1} f(j) = (Sf)'(0)$$

Et on note que si $f \in C^1(\mathbf{U} \to \mathbf{K})$, alors :

$$\int_U f(x)\,dx = \int_{Z_p} g(x)\,dx$$

Où $$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbf{U}_p \\ 0 & \text{si } x \in \mathbf{Z}_p / \mathbf{U} \end{cases}$$

III – 10 Proposition :

Soit $f \in C^1(\mathbf{Z}_p \to \mathbf{K})$, *alors on a :*

i)- $\int_{Z_p} f(x+t)\,dx - \int_{Z_p} f(x)\,dx = (Sf)'(t)$

ii)- $\int_{Z_p} f(-x)\,dx = \int_{Z_p} f(x+1)\,dx$

Preuve : On note par :

$(\nabla f)(x) = f(x+1) - f(x)$

D : l'opérateur différentiel $(Df)(x) = f'(x)$

P_0 : une projection définit par $(P_0 f)(x) = f(0)$

S : la somme indéfinie Sf (défi III – 1)

Alors on a :(prop III – 2)

- $(\nabla Sf)(x) = Sf(x+1) - Sf(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \nabla S = Id$
- $(S\nabla f)(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta f(j) = \sum_{j=0}^{n-1} [f(j+1) - f(j)]$

$$= f(n) - f(0) \quad \Rightarrow \quad S\nabla = Id - P_0$$

par suite :

$$SD = SD.\,Id \quad \text{et} \quad Id = \nabla S$$

$$= SD.\nabla S = S\nabla DS = DS - P_0DS$$

et avec ces formule on peut écrire :

$$\int_{Z_p} f(x+t)\,dx - \int_{Z_p} f(x)\,dx = (Sf)'(t) - (Sf)'(0) = DSf(t) - DSf(0)$$

$$= SDf(t) + P_0DSf = SDf(t)$$

$$= Sf'(t).$$

Montrons (ii), on a :

$$\int_{Z_p} f(-x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n}\cdot\sum_{j=0}^{p^n-1} f(-j) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n}\sum_{j=1-p^n}^{0} f(j)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n}\left[f(0) + \sum_{j=1-p^n}^{-1} f(j)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n}\left[Sf(1) - Sf(1-p^n)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{Sf(1) - Sf(1-p^n)}{1-(1-p^n)} = (Sf)'(1)$$

Donc on a trouvé :

$$\int_{Z_p} f(-x)dx = (Sf)'(1) \qquad \ldots \quad (*)$$

D'autre part :

$$\int_{Z_p} f(x+1)dx = \int_{Z_p} (L_1 f)(x)dx$$

$$= (SL_1 f)'(0) \quad \text{avec} \quad L_1 f(x) = f(x+1)$$

$$= DSL_1 f(0) = L_1 DS f(0)$$

$$= DS f(0+1) = (Sf)'(1) \qquad \ldots (**)$$

de ($*$) et ($**$) on déduit que :

$$\int_{Z_p} f(-x)dx = \int_{Z_p} f(x+1)dx$$

Remarque :

Cette dernière relation pour une fonction impaire s'écrit :

$$\int_{Z_p} f(-x)dx = \int_{Z_p} - f(x)dx = \int_{Z_p} f(x+1)dx$$

$$= \int_{Z_p} f(x)dx + f'(0)$$

Ce qui implique :

$$\int_{Z_p} f(x)dx = -\frac{1}{2} f'(0)$$

III – 11 Proposition :

Pour $f \in C^1(\mathbf{Z}_p \to \mathbf{K})$, $n \in \mathbf{N}$, $0 \le j \le p^n - 1$, *on a :*

$$\int_{Z_p} f(j+p^n x)dx = p^n \int_{j+p^n Z_p} f(x)dx = p^n \int_{p^n Z_p} f(x+j)dx$$

Preuve :

On a

$$\int_{j+p^nZ_p} f(x)dx = \int_{p^nZ} f(x+j)\,dx$$

$$= \lim_{s\to\infty} p^{-s}[f(j) + f(j+p^n) + \ldots + f(j+(p^{s-n}-1).p^n)] \quad \ldots \quad (*)$$

En posant $h(x) = f(x + p^n.x)$, on peut écrire cette limite comme :

$$(*) = \lim_{s\to\infty} p^{-s}[h(0) + h(1) + \ldots + h(p^{s-n}-1)]$$

$$= p^{-n} \lim_{s\to\infty} p^{-(s-n)}. \sum_{i=0}^{p^{s-n}-1} h(i)$$

$$= p^{-n}\int_{Z_p} h(x)dx = p^{-n}\int_{Z_p} f(j+p^n x)dx$$

On va utiliser ces résultats pour étudier l'analyticité de Γ_p et de $\log_p \Gamma_p$, rappelons d'abord (prop II – 5) que la fonction gamma p – adique vérifie la relation fonctionnelle :

$$\Gamma_p(x+1) = \Gamma_p(x).h_p(x)$$

Où

$$h_p(x) = -x \quad \text{si} \quad |x|_p = 1 \quad \& \quad h_p(x) = -1 \quad \text{si} \quad |x|_p < 1$$

Appliquons le logarithme d'Iwasawa aux deux membres de l'égalité on obtient :

$$\log_p \Gamma_p(x+1) = \log_p \Gamma_p(x) + \log_p h_p(x)$$

Par suite :

$$(\nabla \log_p \Gamma_p)(x) = \log_p \Gamma_p(x+1) - \log_p \Gamma_p(x) = \log_p h_p(x)$$

et $\log_p \Gamma_p(0) = \log_p 1 = 0$

et comme l'opérateur de la somme indéfinie S vérifie $Sf(x+1) - Sf(x) = f(x)$ et $Sf(0) = 0$, on déduit que $\log_p \Gamma_p$ est la somme indéfinie de la fonction $\log_p h_p(x)$ définit par :

$$\log_p h_p(x) = \begin{cases} \log_p x & \text{si} \quad |x|_p = 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x|_p < 1 \end{cases}$$

Remarquons que cette dernière est la dérivée d'une fonction f définit par :

$$f(x) = \begin{cases} x\log x - x & \text{si} \quad |x|_p = 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x|_p < 1 \end{cases}$$

Rappelons (prop III – 10 – i) que :

$$\int_{Z_p} f(x+t)dx - \int_{Z_p} f(x)dx = (Sf)'(t)$$

Par suite :

$$\int_{Z_p} [(x+t)\log_p(x+t) - (x+t)]dx - \int_{Z_p} [x\log_p x - x]dx = \log_p \Gamma_p(t)$$

Comme $f(x) = x \log_p x - x$ est impaire alors d'après la remarque précédente on a

$$\int_{Z_p} f(x)\,dx = -½\, f^{/}(0) = 0 \quad \text{car} \quad f^{/}(x) = 0 \quad \text{pour} \quad |x|_p < 1$$

On obtient :

$$\log_p \Gamma_p(t) = \int_{Z_p} [(x+t)\log_p(x+t) - (x+t)]\,dx$$

Pour $|x|_p < 1$, $|s|_p = 1$ on a $|x/s|_p < 1$ et donc :

$$\log_p(x+t) = \log_p\left(t\left(1+\frac{x}{t}\right)\right) = \log_p(t) + \log_p\left(1+\frac{x}{t}\right)$$

$$= \log_p t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{t}\right)^n$$

III – 12 Théorème :

$\log_p \Gamma_p$ *est analytique sur* $p\mathbf{Z}_p$ *et on a :*

$$\log_p \Gamma_p(x) = l_0 x - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{l_m}{2m(2m+1)}.x^{2m+1}$$

Où $l_0 = \int_{Z_p} \log_p t\,dt$ & $l_m = \int_{Z_p} t^{-2m}\,dt$

Preuve :

On a

$$\log_p \Gamma_p(x) = \int_{Z_p} \left[(x+t)\log_p(x+t) - (x+t)\right]dt$$

$$= \int_{Z_p}\left[(x+t)\left(\log_p t + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{x}{t}\right)^n\right) - (x+t)\right]dt$$

$$= \underbrace{\int_{Z_p^*} x\log_p t\,dt}_{=l_0} + \underbrace{\int_{Z_p^*}(t\log_p t - t)\,dt}_{=0} + \int\left[-x + (x+t).\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n-1}.x^n}{n.t^n}\right]dt$$

Calculons le terme restant, on a :

$$(x+t).\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n.t^n} = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}.x^{n+1}}{n.t^n} + \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}.x^n}{n.t^{n-1}}$$

$$= \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}.x^{n+1}}{n.t^n} + x + \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^{n-1}.x^n}{n.t^{n-1}}$$

$$= \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}.x^{n+1}}{n.t^n} + x - \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}.x^{n+1}}{(n+1).t^{n1}}$$

$$= \quad x + \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{t^n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \quad x + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} \frac{x^{n+1}}{t^n}$$

Remplaçons dans la formule de $\log_p \Gamma_p$ on trouve :

$$\log_p \Gamma_p(x) \quad = \quad x \int_{Z_p^*} \log \; t dt \; + \int_{Z_p^*} \left(-x + x + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} \frac{x^{n+1}}{t^n} \right) dt$$

$$= \quad x \int_{Z_p^*} \log_p t dt \; + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^{n+1} \int_{Z_p^*} \frac{1}{t^n} dt$$

Or pour n impair la fonction

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^n} & \text{si} \quad |t|_p = 1 \\ 0 & \text{si} \quad |t|_p < 1 \end{cases}$$

est impaire et donc

$$\int_{Z_p} u(t) dt = \int_{Z_p^*} \frac{1}{t^n} dt = -\frac{1}{2} u'(0) = 0$$

Par suite pour $n = 2.m$ on aura :

$$\log_p \Gamma_p(x) = x \int_{Z_p^*} \log_p t dt \; + \sum_{m\geq 1} \frac{(-1)^{2m-1} x^{2m+1}}{2m(2m+1)} \int_{Z_p^*} \frac{1}{t^{2m}} dt$$

$$= \underbrace{x \int_{Z_p^*} \log_p t dt}_{= l_0} - \sum_{m\geq 1} \frac{x^{2m+1}}{2m(2m+1)} \underbrace{\int_{Z_p^*} \frac{1}{t^{2m}} dt}_{= l_m}$$

$$= \quad l_0 x - \sum_{m\geq 1} \frac{l_m x^{2m+1}}{2m(2m+1)}$$

Ce qui achève la preuve du théorème. ♦

Remarque :

On a $|l_n|_p \leq p$ et $|l_0|_p \leq 1$

En effet ;

$$|\lambda_0|_p \quad = \quad \left| \int_{Z_p^*} \log_p t dt \right|_p \quad = \quad |(\log_p \Gamma_p)'(0)|_p$$

$$= \quad \left| \frac{\Gamma_p'(0)}{\Gamma_p(0)} \right|_p = \left| \Gamma_p'(0) \right|_p \leq 1 \qquad \text{car} \quad \Gamma_p \in \mathbf{Z}_p$$

et si on définit la norme de f par

$$\| f \| \;=\; \sup \{ f(x) \,,\, x \in \mathbf{Z}_p \}$$

Alors

$$| l_n |_p \;=\; \left| \int_{Z_p^*} t^{-2n} \, dt \right|_p \;\leq\; p . \| t^{-2n} \| \;=\; p$$

III – 13 Lemme :

la fonction $t(x) \;=\; l_0 x \;-\; \sum_{n \geq 0} \frac{l_n}{2n(2n+1)} x^{2n+1}$ *est une fonction analytique sur le disque unité de* $\mathbf{C}_p$ *et de plus :*

i)- $p \neq 2$ *alors* t *applique l'ensemble* $\{ x \in \mathbf{C}_p, \; |x|_p \leq p^{-1} \}$ *sur lui même .*

ii)- $p = 2$ *alors* t *applique l'ensemble* $\{ x \in \mathbf{C}_2, \; |x|_2 \leq 2^{-2} \}$ *sur lui même*

Preuve :

Il est clair que $t(x)$ converge pour tout x de $\mathbf{C}_p$, $|x|_p < 1$, et on peut facilement montrer que :

$\forall \, n \in \mathbf{N}$, $\quad | 2n(2n+1) |_p \;=\; | 2n |_p$ ou $| 2n+1 |_p$,

et $\quad | n |_p \;\geq\; \mathrm{m}^{-1}$

- $p \neq 2$, soit $x \in \mathbf{C}_p$ tel que $|x|_p \;\leq\; p^{-1}$

Alors $| l_0 . x |_p \;\leq\; p^{-1}$ et donc :

$$| t(x) |_p \;=\; \left| l_0 x - \sum_{n \geq 1} \frac{l_n}{2n(2n+1)} x^{2n+1} \right|_p$$

$$\leq \max_{n \in N} \left(| l_0 x |_p , \left| \frac{l_n}{2n(2n+1)} x^{2n+1} \right|_p \right)$$

$$\leq \max_{n \in N} \left(\frac{1}{p} , \; p(2n+1) \, p^{-(2n+1)} \right) \leq \frac{1}{p}$$

car $| l_n |_p \;\leq\; p$ et $| 2n(2n+1) |_p \;\geq\; \frac{1}{2n+1}$

- pour $p = 2$, soit $x \in \mathbf{C}_2$ tel que $|x|_p \;\leq\; 2^{-2}$

Alors on a :

$$|t(x)|_2 \;=\; \left| l_0 x - \sum_{n \geq 1} \frac{l_n}{2n(2n+1)} x^{2n+1} \right|_2$$

$$\leq \max_{n\in N}\left(\left| l_{0x} \right|_2 , \left| \frac{l_n}{2n(2n+1)} x^{2n+1} \right|_2 \right)$$

$$\leq \max_{n\in N}\left(\frac{1}{2^2}, 2(2n).2^{-2(2n+1)} \right) = 2^{-2}$$

III – 14 Lemme :

*)- *pour* $p \neq 2$, *la fonction* Γ_p *est analytique sur* $\{ x \in \mathbf{Q}_p , |x|_p < 1 \}$

*)- *pour* $p = 2$, *la fonction* f *définit par :*

$$f(x) = \begin{cases} \Gamma_2(x) & |x|_2 < \frac{1}{2^2} \\ -\Gamma_2(x) & |x|_2 = \frac{1}{2^2} \end{cases}$$

Est analytique sur $\{ x \in \mathbf{Q}_2, \ |x|_2 \leq 2^{-2} \}$

Preuve :

Rappelons d'abord que si f, g sont deux fonctions tels que :
$f : \mathbf{D}_1 \to \mathbf{D}_2$ est analytique sur $\mathbf{D}_1$ & $g : \mathbf{D}_2 \to \mathbf{K}$ est analytique sur $\mathbf{D}_2$ alors que le composé $g \, o \, f$ est analytique sur $\mathbf{D}_1$.

*)- Pour $p \neq 2$,

la fonction t du lemme précédent (III-13) applique l'ensemble $\{ x \in \mathbf{C}_p, |x|_p \leq p^{-1} \}$ sur lui même, et donc :

$$t : \{ x \in \mathbf{C}_p, |x| \leq p^{-1} \} \to \{ x \in \mathbf{C}_p, |x| \leq p^{-1} \}$$

et $\quad \exp : \{ x \in \mathbf{C}_p, |x| \leq p^{-1} \} \to \mathbf{C}_p$

sont analytiques d'où de même pour la fonction la fonction $\exp \circ t$.

Comme

$$t(x) = \log_p \Gamma_p(x) \quad \text{pour} \quad x \in p\mathbf{Z}_p ,$$

Alors

$\exp.\log_p \Gamma_p$ est analytique sur $p\mathbf{Z}_p$ et il suffit de montrer que $\exp.\log_p \Gamma_p = \Gamma_p$

En effet ;

on a $|\Gamma_p(x) - \Gamma_p(0)|_p \leq |x - 0|_p = |x|_p < 1$

Ce qui implique :

$$|\Gamma_p(x) - 1|_p < 1 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_p(x) \in 1 + E$$

Où

E désigne le rayon de convergence de exp

Par suite :

$\Gamma_p(x) = \exp \mathrm{Log}_p \Gamma_p$ car $\exp.\log_p \Gamma_p \in 1 + E$

d'ou l'analyticité de Γ_p sur $p\mathbf{Z}_p$

*)- pour $p = 2$ on a

$$\log_2 f(x) = \log_2 \Gamma_2(x) \quad \text{pour tout} \quad |x|_2 \leq 2^{-2}$$

et d'après le lemme précédent on déduit que la fonction $\exp \circ t$ est analytique sur l'ensemble $\{ x \in \mathbf{Q}_2 , |x|_2 \leq 2^{-2} \}$, de plus la proposition II - donne :

$$x \in \mathbf{Q}_2, |x|_2 < \frac{1}{2^2} \Rightarrow |\Gamma_2(x) - \Gamma_2(0)|_2 < |x - 0|_2 < \frac{1}{2^2}$$

$$\Rightarrow |\Gamma_2(x) - 1|_2 < \frac{1}{2^2}$$

$$\Rightarrow \Gamma_2 \in 1 + E$$

Pour $x \in \mathbf{Q}_2,\ |x|_2 = \frac{1}{2^2}$ on a $|-\Gamma_2(x) - 1|_2 \leq \frac{1}{2^2}$

Et donc pour tout $x \in \mathbf{Q}_2,\ |x|_2 \leq \frac{1}{2^2}$, $f(x) \in 1 + E$

Par suite la fonction f égal à $\exp.\log_2 f$ est analytique sur $\{ x \in \mathbf{Q}_2,\ |x|_2 £ \frac{1}{2^2} \}$

III – 15 Définition :

soit $h Î \mathbf{N}$, on dit que une fonction f de $\mathbf{Z}_p$ ® $\mathbf{C}_p$ est localement analytique d'ordre h si la restriction de f a tout disque de rayon p^{-h} est analytique

III – 16 Théorème :

*) $p \neq 2$, *alors la fonction Γ_p est localement analytique d'ordre 1 sur $\mathbf{Z}_p$, et elle n'est pas analytique sur $\mathbf{Z}_p$*

*) $p = 2$, *alors la fonction Γ_2 est localement analytique d'ordre 3 sur $\mathbf{Z}_p$, et elle n'est pas localement analytique d'ordre 2 sur $\mathbf{Z}_2$*

Preuve :

*) $p \neq 2$, le lemme III-14 et la relation fonctionnelle $\Gamma_p(x + 1) = \Gamma_p(x)\, h_p(x)$ montre que la fonction $\Gamma_p(x + 1)$ est analytique sur $p\mathbf{Z}_p$, et par récurrence on peut montrer que :

$\forall\ j \in \{ 1, 2, 3,\dots p - 1 \}$

$$\Gamma_p(x + j) = h_p(x)\, h_p(1 + x) \dots h_p(j - 1 + x)\Gamma_p(x)$$

ce qui montre que $\Gamma_p(x + j)$ est analytique sur $p\mathbf{Z}_p$

et on déduit que Γ_p est aussi analytique sur chaque sous ensemble de l'anneau $\mathbf{Z}_p$ de la forme : $1 + p\mathbf{Z}_p$, $2 + p\mathbf{Z}_p$, … $(p-1) + p\mathbf{Z}_p$

or ces sous ensemble sont tous de rayon p^{-1}, et donc la fonction est localement analytique d'ordre 1 sur $\mathbf{Z}_p$.

Pour montrer qu'elle n'est pas analytique sur $\mathbf{Z}_p$, supposons par l'absurde qu'elle soit analytique et puisque

$$\Gamma_p(x).\Gamma_p(1-x) = (-1)^{R(x)} \quad \text{avec} \quad R(x) \equiv x \bmod p, \qquad p \neq 2$$

on aura l'analyticité de la fonction $(-1)^{R(x)}$ sur $\mathbf{Z}_p$ ce qui est impossible car cette dernière est localement constante et elle ne peut être analytique sur $\mathbf{Z}_p$

*) p = 2, de même le lemme (II-14) montre que Γ_2 est analytique sur l'ensemble $\{ x \in \mathbf{Q}_2, \ |x|_2 < \frac{1}{2^2} \}$ donc sur $2^3\mathbf{Z}_2$,

et comme pour tout $1 \leq j \leq 2^3 - 1 = 7$:

$$\Gamma_2(x+j) = h_2(x)\, h_2(1+x) \ldots h_2(j-1+x).\, \Gamma_2(x)$$

Donc

$$\Gamma_2(x+j) \text{ est analytique sur } 2^3\mathbf{Z}_2 ,$$

Par suite

Γ_2 est analytique sur chaque sous ensemble de Z_2 de la forme $1 + 2^3\mathbf{Z}_2$, $2 + 2^3\mathbf{Z}_2$, …, $7 + 2^3\mathbf{Z}_2$ qui sont des disque de rayon 2^{-3}

et donc Γ_2 est localement analytique d'ordre 3.

La fonction log – gamma p – adique de Diamond

On va étudier dans cette section la fonction de Diamond, ses principales propriétés puis on donne la version de la régularisation étudier par *Koblitz,* elle n'est pas égal à $\log_p\Gamma_p$ mais elle prend le nom " log gamma p – adique".

IV – 1 Définitions et propriétés :

IV – 1 – 1 Définition :

Pour $x \in \mathbf{C}_p - \mathbf{Z}_p$, *on définit la fonction log gamma p – adique de Diamond notée* G_p *par :*

$$G_p(x) = \lim_{k\to\infty} p^{-k} \sum_{n=0}^{p^k-1} \left((x+n)\log_p(x+n) - (x+n)\right) \qquad \text{pour} \qquad x \in \mathbf{C}_p - \mathbf{Z}_p$$

On définit aussi sur $\mathbf{C}_p - \mathbf{Z}_p^*$ *la fonction la fonction* G_p^* *par :*

$$G_p^* = \lim_{k\to\infty} p^{-k} \sum_{\substack{n=0 \\ p \times n}}^{p^k-1} (x+n)\log\ (x+n) - (x+n)$$

On peut aussi définir la fonction de Diamond comme :

$$G_p(x) = \int_{Z_p} \left[(x+u)\log_p(x+u) - (x+u)\right] du$$

V – 1 – 2 Proposition :

Pour tout $x \in \mathbf{C}_p - \mathbf{Z}_p$ *on a :*

i)- $G_p(x+1) - G_p(x) = \log_p(x)$

ii)- $G_p(x) + G_p(1-x) = 0$

Preuve :

Pour $x \in \mathbf{C}_p - \mathbf{Z}_p$, $u \in \mathbf{Z}_p$ on pose

$$f(x,u) = (x+u)\log_p(x+u) - (x+u)$$

.il est clair que : $f(x+1,u) = f(x,u+1)$

Donc par définition de l'intégrale de *Volkenborne* on a

$$\int_{Z_p} f(x+1,u) - f(x,u)\,du = \int_{Z_p} f(x,u+1) - f(x,u)\,du$$

$$= \int_{Z_p} (\Delta g)(u)\,du = (S\Delta f)'(0)$$

Où $g(u) = f(x, u)$

Or on a montré (prop III-10) que $S\Delta = \mathrm{Id} - P_0$

Donc

$$G_p(x+1) - G_p(x) = \int_{Z_p} (\Delta g)(u)\,du = (g - g(0))^{/}(0)$$

$$= g^{/}(0) = \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}(0) = \log_p(x)$$

Ce qui montre (*i*).

Pour (*ii*),

Comme $\log_p(-1) = \log_p(1) = 0$ alors $f(-x, u) = -f(x, -u)$

D'après (prop III-10) on a :

$$\int_{Z_p} f(-x)\,dx = -\int_{Z_p} f(x+1)\,dx$$

Par suite :

$$G_p(-x) = \int_{Z_p} f(-x, u)\,du = -\int_{Z_p} f(x, -u)\,du$$

$$= -\int_{Z_p} f(x, u+1)\,du = -\int_{Z_p} f(x+1, u)\,du$$

$$= -\ G_p(x+1)$$

Donc $G_p(x) + G_p(1-x) = 0$. ce qui montre (ii).

V – 1 – 3 Théorème (*série de Stirling p – adique de* G_p)

pour tout x, $|x|_p > 1$ on a

$$G_p(x) = (x - \frac{1}{2}) \log_p x - x + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{j+1}}{j(j+1)} x^{-j}$$

Où

B_n *est le* $n^{ième}$ *nombre de Bernoulli définit par*

$$B_n = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{p^k} \sum_{n=0}^{p^k - 1} x^n = \int_{Z_p} x^n\,dx$$

Preuve :

. Soit $x \in \mathbf{C}_p - \mathbf{Z}_p$, tel que : $|x|_p > 1$ alors on a :

$$G_p(x) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{p^k} \sum_{n=0}^{p^k - 1} (x+n)\log_p(x+n) - (x+n)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k}\left[\sum_{n=0}^{p^k-1}(x+n)\log_p(x+n) - \sum_{n=0}^{p^k-1}(x+n)\right]$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k}\left[\sum_{n=0}^{p^k-1}(x+n)\left(\log_p(x)+\log_p(1+\frac{x}{n})\right)-(p^k x - \frac{p^k(p^k-1)}{2})\right]$$

Donc :

$$G_p(x) = \frac{1}{2} - x + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{p^k}\sum_{n=0}^{p^k-1}(x+n)\left(\log_p x + \log_p(1+\frac{n}{x})\right)$$

$$= \frac{1}{2} - x + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{p^k}\sum_{n=0}^{p^k-1}(x+n)\log_p x + (x+n)\log_p(1+\frac{n}{x})$$

$$= \frac{1}{2} - x + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{p^k}\left[\sum_{n=0}^{p^k-1}x\log_p x + n\log_p x + \sum_{n=0}^{p^k-1}(x+n)\log_p(1+\frac{n}{x})\right]$$

or la suite $u_n = x \, log_p \, x + n \, log_p \, x$ est une suite arithmétique de raison $log_p \, x$ et de premier terme $u_0 = x \, log_p \, x$, donc la somme de ces n premiers termes égal à :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{n}{2}\,(2u_0 + (n-1)\,r\,).$$ et donc :

$$G_p(x) = \frac{1}{2} - x + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{p^k}\left[\frac{p^k}{2}(2x\log_p x + (p^k-1)\log_p x) + \sum_{n=0}^{p^k-1}(x+n)\log_p(1+\frac{n}{x})\right]$$

$$= \frac{1}{2} - x + (x - \frac{1}{2})\log_p x + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{p^k}\left[\sum_{n=0}^{p^p-1}(x+n)\log_p(1+\frac{n}{x})\right]$$

Comme $|x|_p > 1$ alors $|\frac{n}{x}|_p < 1$ et $\log_p(1+\frac{n}{x}) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\left(\frac{n}{x}\right)^m$

$$G_p(x) = \frac{1}{2} - x + (x - \frac{1}{2})\log_p x + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{p^k}\left[\sum_{n=0}^{p^k-1}(x+n)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\frac{n^m}{x^m}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - x + (x - \frac{1}{2})\log_p x + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{p^k}\left[\sum_{n=0}^{p^k-1}\left(x\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\frac{n^m}{x^m}\right)+\left(n\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\frac{n^m}{x^m}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} - x + (x - \frac{1}{2})\log_p x + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k}\sum_{n=0}^{p^k-1}\left[\left(-x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}n^{m+1}}{(m+1)x^{m+1}}\right)+\left(n\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}n^{m}}{m.x^{m}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} - x + (x - \frac{1}{2})\log_p x + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k}\sum_{n=0}^{p^k-1}\left[n-\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}n^{m+1}}{(m+1)x^{m}}\right)+\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}n^{m+1}}{m.x^{m}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} - x + (x - \frac{1}{2})\log_p x + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k}\left[\sum_{n=0}^{p^k-1} n + \sum_{n=0}^{p^k-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}n^{m+1}}{x^m}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} - x + (x - \frac{1}{2})\log_p x + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k}\frac{(p^k-1)p^k}{2} + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{p^k}\sum_{n=0}^{p^k-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}n^{m+1}}{m(m+1)x^m}$$

$$G_p(x) = \frac{1}{2} - x + (x - \frac{1}{2})\log_p x - \frac{1}{2} + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{p^k}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m(m+1)x^m}\sum_{n=0}^{p^k-1} n^{m+1}\right]$$

$$= (x - \frac{1}{2})\log_p x - x + \left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m(m+1)x^m} . \lim_{k\to\infty}\frac{1}{p^k}\sum_{n=0}^{p^k-1} n^{m+1}\right]$$

$$= (x - \frac{1}{2})\log_p x - x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m(m+1)x^m}B_{m+1}$$

Où B_{m+1} est le $(m+1)$ ième nombre de *Bernoulli.* et comme $B_{m+1} = 0$ si m pair et pour m impair $B_{m+1} \neq 0$ et $(-1)^{m+1} = 1$ on aura :

$$G_p(x) = (x - \frac{1}{2})\log_p x - x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{m+1}}{m(m+1)x^m}$$

C'est la série de Stirling p – adique de G_p. ce qui achève la preuve de théorème**.**

V – 1 – 4 Théorème (*la formule de multiplication de Gauss de G_p*)

Pour tout $m \in Z^+$ *on a*

$$G_p(x) = (x - \frac{1}{2})\log_p m + \sum_{a=0}^{m-1} G_p(\frac{x+a}{m})$$

Preuve:

Soit m un entier positif, alors G_p peut s'écrire comme

$$G_p(x) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{mp^k}\sum_{n=0}^{mp^k-1}(x+n)\log_p(x+n)-(x+n)$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{mp^k} \sum_{n=0}^{p^k-1} \sum_{a=0}^{m-1} (x + a + mn) \log_p (x + a + mn) - (x + a + mn)$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{mp^k} \sum_{n=0}^{p^k-1} \sum_{a=0}^{m-1} m\left(\frac{x+a}{m} + n \right) \log_p \left(m\left(\frac{x+a}{m} + n \right) \right) - m\left(\frac{x+a}{m} \right)$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{mp^k} \sum_{n=0}^{p^k-1} \sum_{a=0}^{m-1} (x + a + mn) \log_p m + m\left[\left(\frac{x+a}{m} + n \right) \log_p \left(\frac{x+a}{m} + n \right) - \left(\frac{x+a}{m} - n \right) \right]$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{mp^k} \sum_{n=0}^{p^k-1} \sum_{a=0}^{m-1} (x + a + mn) \log_p m \quad + \quad \lim_{k \to \infty}$$

$$\frac{1}{mp^k} \sum m \sum_{m} \left(\frac{x+a}{mx + a} + n \right) \log_p \left(\frac{x+a}{m} + n \right) - \left(\frac{x+a}{m} + n \right)$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{mp^k} \sum_{n=0}^{p^k-1} \sum_{a=0}^{m-1} ((x + a + mn) \log_p m + a \log_p m) \quad +$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{mp^k} \sum_{n=0}^{p^k-1} m \sum_{a=0}^{m-1} \left(\frac{x+a}{m} + n \right) \log_p \left(\frac{x+a}{m} + n \right) - \left(\frac{x+a}{m} + n \right)$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{mp^k} \sum_{n=0}^{p^k-1} \sum_{a=0}^{m-1} \big((x + nm) \log_p m + a \log_p m \big) + \lim_{k \to \infty}$$

$$\frac{1}{mp^k} \sum_{0 \le n \le p^k-1} m \sum_{a=0}^{m-1} \left(\frac{x+a}{m} + n \right) \log_p \left(\frac{x+a}{m} + n \right) - \left(\frac{x+a}{m} + n \right)$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{mp^k} \sum_{n=0}^{p^k-1} \left(\frac{m}{2} (2(x + nm) \log_p m + (m - 1) \log_p m) \right) \quad + \sum_{a=0}^{m-1} \lim_{k \to \infty}$$

$$\frac{1}{p^k} \sum_{n=0}^{p^k-1} \left(\frac{x+a}{m} + n \right) \log_p \left(\frac{x+a}{m} + n \right) - \left(\frac{x+a}{m} + n \right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k}\sum_{m=0}^{p^k-1}\log_p m\left(x+\frac{m-1}{2}\right)+n.m\log_p m+\sum_{a=0}^{m-1}G_p\left(\frac{x+a}{m}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k}\left[\frac{p^k}{2}\left(2\log_p m(x+\frac{m-1}{2})\right)+(p^k-1).m\log_p m\right]+\sum_{a=0}^{m-1}G_p\left(\frac{x+a}{m}\right)$$

$$= \left(x-\frac{m-1}{2}\right)\log_p m-\frac{1}{2}m\log_p m+\sum_{a=0}^{m-1}G_p\left(\frac{x+a}{m}\right)$$

$$= \left(x-\frac{1}{2}\right)\log_p m+\sum_{a=0}^{m-1}G_p\left(\frac{x+a}{m}\right) \qquad \blacklozenge$$

V – 1 – 5 Corollaire:

Pour tout entier positif r on a :

$$G_p(x)=\sum_{a=0}^{p^r-1}G_p\left(\frac{x+a}{p^r}\right)$$

Preuve:

Le théorème précédent pour $m = p^r$ implique

$$G_p(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\log_p p^r+\sum_{a=0}^{p^r-1}G_p\left(\frac{x+a}{p^r}\right)$$

$$= r\left(x-\frac{1}{2}\right)\underbrace{\log_p p}_{=0}+\sum_{a=0}^{p^r-1}G_p\left(\frac{x+a}{p^r}\right)$$

$$= \sum_{a=0}^{p^r-1}G_p\left(\frac{x+a}{p^r}\right)$$

V – 1 – 6 Théorème:

La fonction G_p^* définie précédemment satisfait

i)- $G_p^*(x)=G_p(x)-G_p(\frac{x}{p})$

ii)- $G_p^*(x)=\sum_{\substack{a=1\\ p\times a}}^{p^r}G_p\left(\frac{x+a}{p^r}\right)$

Preuve:

$$G_p(x)-G_p\left(\frac{x}{p}\right)= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k}\sum_{n=0}^{p^k-1}(x+n)\log_p(x+n)-(x+n) \text{ - } \lim_{k\to\infty}$$

$$\frac{1}{p^{k-1}}\sum_{n=0}^{p^{k-1}-1}\left(\frac{x}{p}+n\right)\log_p\left(\frac{x}{p}+n\right)-\left(\frac{x}{p}+n\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k} \sum_{n=0}^{p^k-1} (x+n)\log_p(x+n) - (x+n) -$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^{k-1}} \sum_{n=0}^{p^{k-1}-1} \frac{1}{p}(x+pn)\log_p\left(\frac{1}{p}(x+pn)\right) - \frac{1}{p}(x+pn)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k}\left[\sum_{n=0}^{p^k-1}(x+n)\log_p(x+n)-(x+n)-\sum_{n=0}^{p^{k-1}-1}(x+pn)\log_p(x+pn)-(x+pn)\right]$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k} \sum_{\substack{n=0\\ p\times n}}^{p^k-1} (x+n)\log_p(x+n) - (x+n)$$

$= G_p^*$, ce qui montre (i)

pour (ii), on a

$$G_p^*(x) = G_p(x) - G_p\left(\frac{x}{p}\right) = \sum_{a=0}^{p^r-1} G_p\left(\frac{x+a}{p^r}\right) - \sum_{a=0}^{p^{r-1}-1} G_p\left(\frac{\frac{x}{p}+a}{p^{r-1}}\right)$$

$$= \sum_{a=0}^{p^r-1} G_p\left(\frac{x+pa}{p^r}\right) - \sum_{a=0}^{p^{r-1}-1} G_p\left(\frac{x+pa}{p^r}\right)$$

$$= G_p\left(\frac{x}{p^r}\right) - G_p\left(\frac{x}{p^r}+1\right) + \sum_{a=1}^{p^r} G_p\left(\frac{x+a}{p^r}\right) - G_p\left(\frac{x}{p^r}\right) + G_p\left(\frac{x}{p^r}+1\right) - \sum_{a=1}^{p^{r-1}} G_p\left(\frac{x+pa}{p^r}\right)$$

$$= \sum_{a=1}^{p^r} G_p\left(\frac{x+a}{p^r}\right) - \sum_{a=1}^{p^{r-1}} G_p\left(\frac{x+pa}{p^r}\right)$$

$$= \sum_{\substack{a=1\\ p\times a}}^{p^r} G_p\left(\frac{x+a}{p^r}\right) \qquad \blacklozenge$$

V – 1 – 7 Proposition (*lien entre* G_p *et* $\log_p G_p$)

Pour tout x Î Z_p *on a*

$$\log_p \Gamma_p(x) = \sum_{\substack{j=0 \\ |x+j|_p = 1}}^{p-1} G_p\left(\frac{x+j}{p}\right)$$

Preuve:

le lemme (III-) implique

$$\log_p \Gamma_p = \int_{Z_p} G(x+u)du = \int_{Z_p^*} (x+u)\log_p(x+u) - (x+u)du$$

où

$$G(x) = \begin{cases} x\log_p x - x & \text{si} \quad |x|_p = 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x|_p < 1 \end{cases}$$

Posons

$$f(x, u) = (x+u)\log_p(x+u) - (x+u),$$

Alors la proposition (III-11) et le fait que $\mathbf{Z}_p$ peut s'écrire comme

$$\mathbf{Z}_p = \bigcup_{a=0}^{p-1} (a + pZ_p)$$

impliquent

$$\log_p \Gamma_p(x) = \int_{Z_p} G(x+u)du = \sum_{a=0}^{p-1} \int_{a+pZ_p} G(x+u)du$$

$$= \sum_{a=0}^{p-1} \frac{1}{p} \int_{Z_p} G(x+a+pu)du$$

$$= \sum_{\substack{a=0 \\ |a+x|_p = 1}}^{p-1} \frac{1}{p} \int_{Z_p} f(x+a, pu)du$$

$$= \sum_{\substack{a=0 \\ |a+x|_p = 1}}^{p-1} \int_{Z_p} f\left(\frac{x+a}{p}, u\right)du$$

$$= \sum_{\substack{a=0 \\ |a+x|_p}}^{o-1} G_p\left(\frac{x+a}{p}\right)$$

de cette dernière proposition et de théorème précédent il en résulte que pour x proche de zéro la fonction $\log_p \Gamma_p$ coïncide avec la fonction de Diamond G_p^*

IV – 1 – 8 Définition:

Soit $\boldsymbol{D}$ Ì $\boldsymbol{C}_p$, *on dit que* $f(x)$ *est un élément analytique* p *– adique sur* $\boldsymbol{D}$ *(ou analytique au sens du Krasner) si et seulement si* f *est la limite uniforme sur* $\boldsymbol{D}$ *d'une suite de fractions rationnelles* $f_n(x)$ *de* $\boldsymbol{C}_p$ *sans pôles dans* $\boldsymbol{D}$

IV – 1 – 9 Définition :

Soit $\boldsymbol{D}$ Ì $\boldsymbol{C}_p$, *on dit que* $\boldsymbol{D}$ *est un quasi – connexe si pour tout* x, y *de* $\boldsymbol{D}$ *il existe*
$0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_n < |x - y|_p$ tels que si $x \notin \mathbf{D}$ et $|z - x|_p < |x - y|_p$

Alors $\exists\ 1 \leq i \leq n\ ;\ |z - x|_p = r_i$

IV – 1 – 10 Théorème (*Diamond*)

La dérivée seconde de la fonction log gamma p – adique de Diamond $G_p^{//}$ *est analytique au sens de Krasner sur* $\boldsymbol{C}_p - \boldsymbol{Z}_p$

Preuve:

On pose $A_m = \{x \in C_p, |x - a|_p > n, \forall a \in Z_p^*\}$

Alors A_m par construction est un quasi connexe de plus

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{p^{-m}} = C_p - Z_p$$

Donc pour montrer que $G_p^{//}$ est un élément analytique sur $\mathbf{C}_p - \mathbf{Z}_p$ il suffit de montrer qu'elle est analytique sur chaque $A_{p^{-M}}$

En effet ;

La formule de la multiplication de Gauss pour G_p implique que pour tout m de $\mathbf{N}$, x de $\mathbf{C}_p - \mathbf{Z}_p$

$$G_p^{//}(x) = \frac{1}{p^{2m+2}} \sum_{a=0}^{p^{m+1}-1} G_p^{//}\left(\frac{x+a}{p^{m+1}}\right)$$

et pour $x \in A_{p^{-m}}$ on a $|x - a|_p > p^{-m}$

& $$\left|\frac{x+a}{p^{m+1}}\right|_p > \frac{p^{-m}}{p^{-(m+1)}} = p > 1 \qquad \forall a \in \mathbf{Z}$$

on peut alors appliquer la formule de Stirling p – adique et on obtient :

$$G_p^{//}\left(\frac{x+a}{p^{m+1}}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{B_r}{\left[(x+a)/p^{m+1}\right]^{r+2}}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{B_r\, p^{(m+1)(r+2)}}{(x+a)^{r+2}}$$

qui est uniformément convergente pour la topologie p – adique sur A_{P-M}

Donc $G_p^{//}$ est un élément analytique de chaque A_{P-M}

D'où elle est analytique au sens de Krasner sur $\mathbf{C}_p - \mathbf{Z}_p$ ♦

IV – 2 Régularisation de la fonction log gamma p – adique :

Koblitz a représenté et étudié la fonction de Diamond G_p en utilisant la mesure de *Bernoulli – Mazur*

Notons que tout sous ensemble ouvert de $\mathbf{Q}_p$ peut s'écrire comme réunion des intervalles de type $a + p^n \mathbf{Z}_p = \{ x \in \mathbf{Q}_p, |x - a|_p \leq \frac{1}{p^n} \}$

IV – 2 – 1 Définition :

soient ***X, Y*** *deux espaces topologiques, une fonction* $f\ \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *est localement constante si pour tout point x de* ***X*** *il existe un voisinage* ***U*** *de x ; f(****U****) est un élément de* ***Y****.*

IV – 2 – 2 Définition :

une distribution p – adique sur ***X*** *est une application linéaire de l'espace vectoriel des fonctions localement constantes de* ***X*** *vers* $\mathbf{Q}_p$ *, et si* $f\ \mathbf{X} \to \mathbf{Q}_p$ *est une fonction loc. cte on écrira u(f) sous la forme plus parlante* $\int f u$

et pour $\mathbf{U} \subset \mathbf{X}$ *on écrit* $u(\mathbf{U}) = \int \mathbf{1}_U(x)\ u(x)$

Exemples:

i)- La distribution de *Mazur* : $u_{Mazur}(a + p^n Z_p) = \frac{a}{p^n} - \frac{1}{2}$

ii)-La k ième distribution de *Bernoulli*: $u_{B,k}(a + p^n Z_p) = p^{n(k-1)} B_k\left(\frac{a}{p^n}\right)$

Où

$B_k(x)$ est le k ième polynôme de *Bernoulli* définit par la relation :

$$\frac{t.e^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{t^k}{k!}, \qquad B_0(x) = 1, \qquad B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

Donc pour $k = 1$, on a

$$u_{B,1}(a + p^n Z_p) = B_1\left(\frac{a}{p^n}\right) = \frac{a}{p^n} - \frac{1}{2} = u_{Mazur}(a + p^n Z_p)$$

IV – 2 – 3 Définition :

Une distribution p – adique u sur ***X*** *est une mesure si*

$$\forall\, \boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}, \quad \exists\, B \in \mathbf{R} \quad \text{tel que} \quad |\, u(\boldsymbol{U})\,|_p \leq B$$

Dans le reste de travail on va s'intéressé à la distribution de *Bernoulli – Mazur* $u_{B,1}$, *Koblitz* a montré qu'elle n'est pas une mesure car elle n'est pas bornée et a proposé la régularisation suivante pour la rendre une mesure;

on note pour $a \in \mathbf{Z}_p$, $\boldsymbol{U} \subseteq \mathbf{Q}_p$

$(a\, m)(\boldsymbol{U}) = a \,.\, m(\boldsymbol{U})$

$a\mathrm{U} = \{\, x \in \mathbf{Q}_p, \dfrac{x}{a} \in \boldsymbol{U} \,\}$

$\{a\}_n$ l'entier rationnel entre 0 et $p^n - 1$ tel que $\{a\}_n \equiv a \bmod p^n$

Pour $a \in 1 + p\mathbf{Z}_p$, $a \neq 1$, $\boldsymbol{U} \subseteq \mathbf{Q}_p$ on définit

$$m_{B1a}(U) = m_{B1}(U) - \frac{1}{a} m_{B1}(a\, U)$$

Pour la simplicité on note m_a, et pour $a\ Î\ \mathbf{Q}_p$ $n\ Î\ \mathbf{Z}_p$ on a

$$\begin{aligned}
m_a(a + p^n Z_P) &= m_{B1}(a + p^n Z_p) - \frac{1}{a} m_{B1}(a\,(a + p^n Z_p)) \\
&= \frac{a}{p^n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{a} m_a(\{a\}_n + p^n Z_p) \\
&= \frac{a}{p^n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{a}\left(\frac{\{a\}_n}{p^n} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{a}{p^n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{a}\left(\frac{a\,a}{p^n} - \left[\frac{a\,a}{p^n}\right]\right) \\
&= \frac{1}{a}\left[\frac{a\,a}{p^n}\right] + \frac{1/a - 1}{2}
\end{aligned}$$

Et il suffit donc de montrer que $\dfrac{\{a\,a\}_n}{p^n} = \dfrac{a\,a}{p^n} - \left[\dfrac{a\,a}{p^n}\right]$

En effet ;

$$\{a\,a\}_n = a\,a + k\,p \quad \text{implique} \quad \frac{\{a\,a\}_n}{p^n} = \frac{a\,a}{p^n} + k$$

et comme

$$0 \leq \{a\,a\}_n \leq p^n - 1$$

on aura

$$-\frac{p^n-1}{p^n}+\frac{a\,a}{p^n}\leq -k\leq \frac{a\,a}{p^n}-\frac{0}{p^n}$$

Implique $$-1+\frac{a\,a}{p^n}<-k\leq\frac{a\,a}{p^n}$$

ce qui donne $$-k=\left[\frac{a\,a}{p^n}\right]$$

IV – 2 – 4 Proposition :

m_a est une mesure sur $\mathbf{Z}_p$, de plus pour tout compact U de $\mathbf{Z}_p$ $|\, m_a(\mathbf{U})\,|$ £ 1

Preuve:

On a

$$1\neq a\in 1+pZ_p\subseteq Z_p^*\Rightarrow \frac{1}{a}\in Z_p\Rightarrow \frac{1/a-1}{2}\in Z_p$$

et $$\left[\frac{a\,a}{p^n}\right]\in Z\subseteq Z_p$$

il en résulte que $m_a(a+p^n\mathbf{Z}_p)\in\mathbf{Z}_p$

D'où

$$|\, m_a(a+p^n\mathbf{Z}_p)\,|\leq 1$$

et comme tout ouvert compact $\boldsymbol{U}$ de Z_p s'écrit comme réunion des intervalles de $\boldsymbol{I}_n$ de la forme $a+p^n\mathbf{Z}_p$ alors

$$|\, m_a(\mathrm{U})\,|_p\leq \max|\, m_a(\mathrm{I}_n)\,|_n\leq 1$$

Donc m_a est une mesure appelée la mesure de *Bernoulli – Mazur*

Remarque:

comme $\mathbf{Z}_p=\bigcup_{a=0}^{p^n-1}(a+p^n\mathbf{Z}_p)$ on peut définir une mesure en ne connaissant que les intégrales $\int_{Z_{op}}1_{a+p^nZ_p}u(x)$ $a\in\mathbf{Z}_p$, $n\in\mathbf{N}$ qui serons notées $m(a+p^n\mathbf{Z}_p)$

et comme de plus $(a+p^nZ_p)$ est la réunion disjointe des $a+j\,p^n+p^{n+1}\mathbf{Z}_p$ pour $0\leq J\leq p-1$ on a

$$m(a+p^n\mathbf{Z}_p)=\sum_{j=0}^{p-1}u(a+jp^n+p^{n+1})$$ et comme $\left\|1_{a+p^nZ_p}\right\|_\infty=1$ alors que les $m(a+p^nZ_p)$ sont bornées et si f est une fonction continue sur $\mathbf{Z}_p$ alors

$$\int_{Z_p}f(x)m(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{a=0}^{p^n-1}f(a)m(a+p^nZ_p)$$

Et pour tout sous ensemble $\boldsymbol{X}$ de $\mathbf{Z}_p$ on définit

$$\int_X fm = \int_{Z_p} f\, 1_X\, m$$

Où 1_X = caractéristique de $\boldsymbol{X}$

IV – 2 – 5 Proposition :

Pour $m = m_a$ *(mesure de Bernoulli -Mazur) on a :*

i)- $\int_{Z_p^*} 1 m_a(t) = m_a(Z_p^*) = 0$

ii)- $\int_{Z_p^*} \frac{1}{t^k} m_a(t) = (a^{-(k+1)} - 1)(1 - p^k)\left(\frac{-B_{k+1}}{k}\right)$ où le B_k est le k ième nombre de Bernoulli

On a vu que pour $|x|_p > 1$ la fonction G_p vérifie la formule de Stirling suivante

$$G_p(x) = (x - \frac{1}{2}) \log_p x - x + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{j+1}}{j(j+1)} x^{-j}$$

On pose $l(x) = (x - \frac{1}{2}) \log_p x - x$ et pour $a \neq 0$ on définit les opérateurs

$$(\mathrm{T}_p f)(x) = f(\frac{x}{p}) \quad \& \quad (\mathrm{T}_\alpha f)(x) = a^{-1} f(ax) \quad \& \quad \mathrm{D} = d/dx$$

Alors on a :

i)- $(1 - \mathrm{T}_p)\, \mathrm{G}_p(x) = \mathrm{G}_p^*$

ii)- $(1 - \mathrm{T}_a)(1 - \mathrm{T}_p)\, l(x) = -\left(1 - \frac{1}{p}\right) x \log_p a$

iii)- $\mathrm{DT}_a = a\, \mathrm{T}_a \mathrm{D}$ & $\mathrm{DT}_p = \mathrm{p}^{-1} \mathrm{T}_p \mathrm{D}$

En effet ;

i)- $(1 - \mathrm{T}_p)\, G_p(x) = G_p(x) - \mathrm{T}_p G_p(x) = G_p(x) - G_p(\frac{x}{p}) = G_p^*$

ii)- $(1 - \mathrm{T}_a)(1 - \mathrm{T}_p) l(x) = l(x) - \mathrm{T}_p\, l(x) - \mathrm{T}_a\, l(x) - \mathrm{T}_a \mathrm{T}_p\, l(x)$

$$= l(x) - l(\frac{x}{p}) - a^{-1} l(ax) + a^{-1} l(\frac{ax}{p})$$

$$= -\left(1 - \frac{1}{p}\right) x \log_p a$$

iii)- $DT_p f(x) = D\left(f\left(\frac{x}{p}\right)\right) = \frac{1}{p}(Df)\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p} T_p Df(x)$

et

$$D(T_a f(x)) = D(a^{-1} f(ax)) = a^{-1} D(f(ax))$$

$$= a^{-1}\, a\, (Df)(ax) \quad = \quad a\, T_a\, Df(x)$$

On note

$$A_r \;=\; \{ x \in \mathbf{C}_p,\ |x-a|_p \;>\; r \quad \text{pour tout} \quad a \in \mathbf{Z}_p^{*} \}$$

Alors pour $r = 1$ on a

$$A_1 \;=\; \{ x \in \mathbf{C}_p\ |x-a|_p \;>1 \quad \forall\ a \in \mathbf{Z}_p^{*} \} \;=\; \{ x \in \mathbf{C}_p,\ |x|_p > 1 \}$$

Pour $a \in 1 + p\mathbf{Z}_p$, $a \neq 1$ on définit sur A_1 la fonction $G_{p,a}$ par

$$G_{p,a}(x) \;=\; (1 - T_a)(1 - T_p)(G_p - l)(x)$$

$$= (1 - T_a)\, G_p^{*}(x) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) x \log_p a$$

Alors on a le théorème suivant:

IV – 2 – 6 Théorème :

Pour tout x de A_1 on a

i)- $G_{p,a}(x) = \int_{Z_p^*} \log_p (x-t)\, m_a(t)$

ii)- $D^r G_{p,a}(x) = (-1)^r (r-1)! \int_{Z_p^*} \dfrac{m_a(t)}{(x-t)^r}$ pour $r \geq 1$

$$= (1 - a^{r} T_a)(1 - p^{-r} T_p) G_p^{(r)}(x) \qquad \text{pour} \quad r \geq 2$$

Preuve:

par définition de $G_{p,a} = (1 - T_a)(1 - T_p)(G_p - l)(x)$ & la formule de Stirling p – adique de G_p on a

$$G_p(x) = \underbrace{\left(x - \frac{1}{2}\right)\log_p(x) - x}_{=l(x)} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{B_{r+1}}{r(r+1)x^r}$$

on obtient

$$G_{p,a}(x) = (1 - T_a)(1 - T_p)\left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{B_{r+1}}{r(r+1)x^r} \right)$$

$$= \left[\sum_{r=1}^{\infty} \frac{B_{r+1}}{r(r+1)x^r}\right] - \left[\sum_{r=1}^{\infty} \frac{B_{r+1}}{r(r+1)\dfrac{x^r}{p^r}}\right] - \frac{1}{a}\left[\sum_{r=1}^{\infty} \frac{B_{r+1}}{r(r+1)(ax)^r}\right] + \frac{1}{a}\left[\sum_{r=1}^{\infty} \frac{B_{r+1}}{r(r+1)\left(\dfrac{ax}{p}\right)^r}\right]$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{B_{r+1}}{r(r+1)x^r}\left(1 - p^r - a^{-(r+1)} + p^r a^{-(r+1)}\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{-B_{r+1}}{(r+1)}\left(a^{-(r+1)}-1\right)\left(1-p^{r}\right)\frac{1}{rx^{r}} \quad = \quad \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{rx^{r}} \int_{Z_p^*} t^{r} m_a(t)$$

$$= \int_{Z_p^{*/}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(t/x)^{r}}{r} m_a(t) \quad = \quad \int_{Z_p^*} \log_p \left(1-\frac{t}{x}\right) m_a(t)$$

$$= \int_{Z_p^*} \log_p \left(\frac{1}{x}(x-t)\right) m_a(t) \quad = \quad \int_{Z_p^*} \log_p x m_a(t) - \int_{Z_p^*} \log_p (x-t) m_a(t)$$

$$= \log_p x \int_{Z_p^*} m_a(t) - \int_{Z_p^*} \log_p (x-t) m_a(t)$$

$$= \log_p x \underbrace{m_a(Z_p^*)}_{=0} - \int_{Z_p^*} \log_p (x-t) m_a(t)$$

$$= -\int_{Z_p^*} \log_p (x-t) m_a(t)$$

ce qui montre (i)

Pour (ii), on calcule par récurrence les dérivées de $G_{p,a}$

$r = 1$, on a

$$D G_{p,a}(x) = \int_{Z_p^*} \frac{1}{(x-t)} m_a(t) \qquad \text{vraie.}$$

On suppose que

$$D^{r} G_{p,a}(x) = (-1)^{r} (r-1)! \int_{Z_p^*} \frac{m_a(t)}{(x-t)^{r}}$$

Alors

$$D^{r+1} G_{p,a}(x) = D(D^{r} G_{p,a}(x))$$

$$= (-1)^{r} (r-1)! \int_{Z_p^*} \frac{-r(x-t)^{r-1}}{(x-t)^{2t}} m_a(t)$$

$$= (-1)^{r+1} r! \int_{Z_p^*} \frac{m_a(t)}{(x-t)^{r+1}} \qquad \text{donc vraie pour } r+1$$

Pour la deuxième relation de (ii);

$$D^r G_{p,a}(x) = (1 - a^r T_a)(1 - p^{-r} T_p) G_p^{(r)}(x) \qquad r \geq 2$$

On a

$$G_{p,a}(x) = (1 - T_a) G_p^*(x) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) x \log_p a$$

et

$$D T_a = a T_a D \quad , \quad D T_p = p^{-1} T_p D$$

Par suite

$$DG_{p,a}(x) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \log_p a + (D - DT_a)(D - DT_p) G_p(x)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p}\right) \log_p a + (1 - a T_a)(1 - p^{-1} T_p) G_p'(x)$$

et $\quad D^2 G_{p,a}(x) = D((1 - a T_a)(1 - p^{-1} T_p) G_p'(x))$

et le résultat se déduit immédiatement par récurrence

IV – 2 – 7 Corollaire:

pour tout x de A_1

$$G_p^{*/}(x) - G_p^{*/}(a x) = -\left(1 - \frac{1}{p}\right) \log_p a - \int_{Z_p^*} \frac{m_a(t)}{(x - t)}$$

Preuve :

D'après ce qui procède on a vu que

$$(1 - T_a) G_p^*(x) = G_{p,a}(x) - \left(1 - \frac{1}{p}\right) x \log_p a$$

donc

$$D((1 - T_a)) G_p^*(x) = G_p^{*/}(x) - G_p^{*/}(a x) = DG_{p,a}(x) - D\left((1 - \frac{1}{p}) x \log_p a\right)$$

$$= -\int_{Z_p^*} \frac{m_a(t)}{x - t} - \left(1 - \frac{1}{p}\right) \log_p a$$

on a montré que $G_p^{//}$ est un élément analytique au sens de *Krasner* et que *Diamond* a montré que ni G_p ni $G_p^{/}$ sont analytiques, or pour notre régularisation , $G_{p,a}^{/}$ même est analytique

IV – 2 – 8 Théorème :

$DG_{p,a}$ est analytique au sens de Krasner sur $C_p - Z_p^*$

Preuve:

Notons toujours $A_r = \{x \in C_p, |x-a|_p > r, \forall a \in Z_p\}$

Alors $\bigcup_{m=0}^{\infty} A_{p^{-m}} = C_p - Z_p^*$

il suffit alors de montrer que pour m fixé $f(x) = -DG_{p,a}(x)$ est une limite uniforme des fractions rationnelles sans pôles sur A_r

En effet;

D'après le théorème précédent on a

$$f(x) = -DG_{p,a}(x) = \int_{Z_p^*} \frac{u_a(t)}{x-t} = \sum_{a=1}^{p^{m+1}+1} \int_{a+p^{m+1}Z_p} \frac{u_a(t)}{x-t}$$

posons $t = a + p^{m+1}s$, $s \in \mathbf{Z}_p$ alors

$$\frac{1}{x-t} = \frac{1}{x-a-p^{m+1}s} = \frac{1}{(x-a)\left(1-\frac{p^{m+1}s}{x-a}\right)}$$

$$= \frac{1}{x-a}\sum_{j\geq 0}\left(\frac{p^m}{x-a}\right)^j p^j s^j$$

donc

$$\int_{a+p^{m+1}Z_p} \frac{u_a(t)}{x-t} = \frac{1}{x-a}\sum_{j\geq 0}\left(\frac{p^m}{x-a}\right)^j p^j \int_{Z_p} s^j u_a(a+p^{m+1}s)$$

Comme $\left|\frac{p^m}{x-a}\right|_p < 1$ sur $A_{p^{-m}}$ et $\left|\int_{Z_p}\right|_p < 1$

Alors que $\int_{a+p^{m+1}Z_p} \frac{u_a(t)}{x-t}$ est une limite uniforme des fractions rationnelles sans pôles sur $A_{p^{-m}}$

IV – 2 – 9 Corollaire :

Pour tout x Î $C_p - Z_p$ et r ³ 2 on a

$$\left(1 - a^r T_a\right)G_p^{*(r)}(x) = (-1)(r-1)! \int_{Z_p} \frac{u_a(t)}{(x-t)^r}$$

Preuve :

par définition de $G_{p,a}$ pour tout x de A_1 on a

$$G_{p,a}(x) = (1 - T_a)G_p^*(x) + \left(1 - \frac{1}{p}\right)x \log_p a$$

en dérivant on obtient

$$DG_{p,a}(x) = (1 - aT_a)G_p^{*/}(x) + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\log_p a$$

$$D^2 G_{p,a}(x) = (1 - a^2 T_a)G_p^{*//}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$D^r G_{p,a}(x) = (1 - a^r T_a)G_p^{*(r)}$$

et un théorème précédent montre que pour tout x de A_1

$$D^r G_{p,a}(x) = (-1)^r (r-1)! \int_{Z_p^*} \frac{u_a(t)}{(x-t)^r}$$

Ce qui donne

$$(1 - a^r T_a)G_p^{a(r)}(x) = (-1)^r (r-1)! \int_{Z_p^*} \frac{u_a(t)}{(x-t)^r} \qquad \forall x \in A_1$$

et l'égalité sur tout $\mathbf{C}_p - \mathbf{Z}_p^*$ se déduit du fait que *Diamond* a montré l'analyticité au sens de *Krasner* de $G_p^{//}$ donc de $G_p^{*//}$ et toutes ses dérivées supérieures sur $\mathbf{C}_p - \mathbf{Z}_p^*$

Donc

$$(1 - a^r T_a)G_p^{*(r)}(x) \qquad \text{et} \qquad (-1)^r (r-1)! \int_{Z_p^*} \frac{u_a(t)}{(x-t)^r}$$

Sont analytiques au sens de *Krasner* et coïncident sur A_1 , nécessairement elles sont égaux sur tout $\mathbf{C}_p - \mathbf{Z}_p^*$ ♦

Koblitz voulu savoir si le dernier corollaire reste vrai pour $r = 0, 1$

C'est a dire est ce qu'on a :

$$G_p^*(x) - a^{-1}G_p^*(ax) = -\left(1 - \frac{1}{p}\right)x \log_p a - \int_{Z_p^*} \log_p (x-t) u_a(t)$$

et

$$G_p^{*/}(x) - G_p^*(ax) = -\int_{Z_p^*} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{x-r}\right) u_a(t)$$

Pour tout $x \in \mathbf{C}_p - \mathbf{Z}_p^*$

Est ce que $G_p^{*/}(x) - G_p^{*/}(ax)$ est analytique au sens de *Krasner* sur $\mathbf{C}_p - \mathbf{Z}_p^*$?

Et il a obtenu un résultat partiel donné par le théorème suivant :

IV – 2 – 10 Théorème :

$G_p^{*/}(x) - G_p^{*/}(ax)$ est analytique au sens de *Krasner* sur $A_{|a-1|_p}$

et pour $x \in A_{|a-1|_p}$ on a

$$G_p^{*/}(x) - G_p^{*/}(ax) = -\left(1 - \frac{1}{p}\right)\log_p - \int_{Z_p^*} \frac{u_a(t)}{x - t}$$

Preuve :

Puisque $A_{|a-1|_p} = \bigcup_{r \geq |a-1|_p} A_r$

Alors il suffit d'écrire $f(x) = G_p^{*/}(x) - G_p^{*/}(ax)$ comme limite uniforme de fractions rationnelles sur A_r pour tout $r > |a-1|_p$

par définition de G_p^* on a

$$G_P^{*/}(x) - G_p^{*/}(ax) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{p^k} \sum_{\substack{n=1 \\ p \times n}}^{p^k - 1} \log_p(x+n) - \log_p(ax+n)$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{p^k} \sum_{\substack{n=1 \\ p \times n}}^{p^k - 1} - \log_p a - \log_p \left(\frac{x + n/a}{x+n}\right)$$

$$= -\left(1 - \frac{1}{p}\right)\log_p a - \lim_{k \to \infty} \sum_{\substack{n=1 \\ p \times}}^{p^k - 1} \log_p \left(\frac{x + n/a}{x+n}\right)$$

On pose $a^{/} = 1 - \dfrac{1}{a}$

Et $f_n(x) = \log_p \left(1 - \dfrac{a^{/} n}{x+n}\right)$

on aura

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\log_p a - \lim_{k \to \infty} \frac{1}{p^k} \sum_{n=0}^{p^k - 1} f_n(x)$$

et comme

$$\left|\frac{a^{/} n}{x+n}\right|_p < \frac{|a-1|_p}{r} < 1$$

il en résulte que chaque $f_n(x) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\left(\frac{a' n}{x+n}\right)^j$

est une limite uniforme des fractions rationnelles

Donc

$G_p^{*/}(x) - G_p^{*/}(ax)$ est analytique au sens de *Krasner* sur $A_{|a-1|_p}$ non seulement sur A_1 comme on a vu précédemment.

IV – 2 – 11 Corollaire :

Pour $|x|_p < 1$ on a

$$G_p^{*/}(x) - G_p^{*/}(ax) = \int_{Z_p^*} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{t^{j+1}} u_a(t)$$

Preuve :

On a

$$G_p^{*/}(x) - G_p^{*}(ax) = -\left(1 - \frac{1}{p}\right)\log_p a - \int_{Z_p^*} \frac{u_a(t)}{x-t}$$

$$= -\left(1 - \frac{1}{p}\right)\log_p a + \int_{Z_p^*} \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{x}{t}\right)^j u_a(t)$$

$$= -\left(1 - \frac{1}{p}\right)\log_p a + \int_{z_p^*} \sum_{j+1}^{\infty} \frac{x^j}{t^{j+1}} u_a(t) \quad \blacklozenge$$

Remarque :

Tous ces résultats ont été démontrés par *Diamond* lui même - le constructeur de la fonction log gamma - avant *Koblitz* par des méthodes différentes.

Chapitre V

Applications de la fonction gamma p – adique

On va étudier dans cette section quelques résultats concernant la fonction Γ_p, c'est la formule de Gross – Koblitz et le prolongement de la factorielle de Roman g_p

V – I la formule de Gross – Koblitz

V – I – 1 Définition :

Soient p un nombre premier, K un corps contient $\overline{Q}_p$ *et* $IF_p = \frac{Z}{pZ}$

$y \quad (IF_p, +)$ ® K^* *caractère additif*

$c \quad (IF_p^*, ´\,)$ ® K *caractère multiplicatif*

Alors la somme de Gauss associé à ses deux caractères est définit par

$$G(y, c) = -\sum_{x \in IF_p^*} y(x)\, c(x)$$

et comme IF_p^* est un groupe cyclique à p élément alors pour a de $\boldsymbol{Z_p}$ la limite de

a^{p^n} existe lorsque n tend vers ¥ car $IF_p^* = \left(Z / pZ\right)^* \cong \left(Z_P / pZ_P\right)^*$

et on a

$$\lim_{n \text{ ® } ¥} a^{p^{n+1}} = \lim_{n \text{ ® } ¥} \left(a^{p^n}\right)^p = \lim_{n \text{ ® } ¥} a^{p^n}$$

Et si note $\quad w(a) = \lim\limits_{n \text{ ® } ¥} a^{p^n}$

On aurait $\quad w^p(a) = w(a)$

Ce qui montre que $w(a)$ est une racine $(p-1)$ ième de l'unité .

Puisque

$$w(ab) = w(a)\, w(b)$$

Alors on peut considérer w comme étant un caractère multiplicatif sur IF_p

(w s'appelle le caractère de Teichmuler)

D'autre part;

si x est une racine p ième de 1 alors $x \to x^x$ est un caractère additif sur $\boldsymbol{IF_P}$ et de même pour $x \to x^{ax}$ pour tout $(a, p) = 1$

on pose $\psi(x) = x^{x}$, $\psi(a\,x) = x^{a\,x}$, $c(x) = w^{a}(x)$ alors la somme de Gauss associé à ces caractères est :

$$G(\psi, c) = -\sum_{x\in IF_p^*} \psi(x)\, c(x)$$

et
$$G(\psi_a, c) = -\sum_{x\in IF_p^*} \psi_a(x) c(x) = -\sum_{x\in IF_p^*} \psi(ax) c(x)$$

$$= -\sum_{x\in IF_p^*} c(ax)\psi(ax) c^{-1}(a) = c^{-1}(a) G(\psi, c)$$

V – I – 2 Lemme :

Soit n un entier naturel et p un nombre premier , écrivons n en base p
$n = n_0 + n_1 p + n_2 p^2 + \ldots + n_k p^k$ *et posons* $S_p(n) = n_0 + n_1 + n_2 + \ldots + n_k$
Alors

$$|\, n!\,|_p = p^{-\frac{n - S_p(n)}{p-1}}$$

Preuve :

le nombre de multiples de p entre 1 et n est $\left[\dfrac{n}{p}\right] = \dfrac{n - n_0}{p}$

le nombre de multiples de p^2 entre 1 et n est $\left[\dfrac{n}{p^2}\right] = \dfrac{n - n_0 - n_1 p}{p^2}$

⋮ ⋮ ⋮

le nombre de multiples de p^k entre 1 et n est $\left[\dfrac{n}{p^k}\right] = n_k$

Calculons alors la valuation p – adique de n !

$$v_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^k}\right]$$

$$= \frac{n - n_0}{p} + \frac{n - n_0 - n_1 p}{p^2} + \cdots + \frac{n - n_0 - n_1 p - \cdots - n_{k-1} p^{k-1}}{p^k}$$

$$= \frac{n}{p}\left[1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^{k-1}}\right] - \frac{n_0}{p}\left[1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^{k-1}}\right] - \frac{n_1}{p}\left[1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^{k-2}}\right] - \cdots - \frac{n_{k-1}}{p}$$

$$= \frac{n}{p}\,\frac{1 - \frac{1}{p^k}}{1 - \frac{1}{p}} - \frac{n_0}{p}\,\frac{1 - \frac{1}{p^k}}{1 - \frac{1}{p}} - \frac{n_1}{p}\,\frac{1 - \frac{1}{p^{k-1}}}{1 - \frac{1}{p}} - \cdots - \frac{n_{k-1}}{p}$$

$$= \frac{n}{p-1} - \frac{n}{p^k(p-1)} - \frac{n_0}{p-1} + \frac{n_0}{p^k(p-1)} - \frac{n_1}{p-1} + \frac{n_1}{p^{k-1}(p-1)} - \cdots - \frac{n_{k-1}}{p-1} + \frac{n_{k-1}}{p(p-1)}$$

$$= \frac{n - n_0 - n_1 - \cdots - n_{k-1} - n_k}{p-1} + \frac{n_k}{p-1} - \frac{n}{p^k(p-1)} + \frac{n_0}{p^k(p-1)} + \frac{n_1}{p^{k-1}(p-1)} + \cdots + \frac{n_{k-1}}{p(p-1)}$$

$$= \frac{n - S_p(n)}{p-1} \underbrace{- \frac{n}{p^k(p-1)} + \frac{1}{p^k(p-1)} \left[\underbrace{n_0 + n_1 p + n_2 p^2 + \cdots + n_k p^k}_{=n} \right]}_{=0}$$

$$= \frac{n - S_p(n)}{p-1}$$

Donc

$$|n!|_p = p^{-v_p(n!)} = p^{-\frac{n - S_p(n)}{p-1}}$$

V – I – 3 Définition :

Soit p *est une racine de* $x^{p-1} + p = 0$ *dans* $\mathbf{C}_p$, *l'exponentielle de Dwork est par définition la série formelle*

$$\Theta_p(x) = e^{p(x - x^p)} \in Q_p(p)[[x]]$$

et on a $Q_p(1)$ *est une racine primitive* p *ième de* 1 *notée* x_p *vérifie*

$$x_p \equiv 1 + p \mod p^2$$

V-I-4 Théorème (*Dwork*)

Soient p *une racine de* $x^{p-1} + p$ (*ie* $p^{p-1} = -p$) *et* $\sum_{n \geq 0} A_n T^n$ *la série de Taylor de l'exponentielle de Dwork* $Q_p(T)$ *alors on a*

$$v_p(A_n) \geq n \frac{p-1}{p^2} \qquad ie \qquad |A_n|_p \leq p^{-n\frac{p-1}{p^2}}$$

et le rayon de convergence de cette série est $p^{\frac{p-1}{p^2}} > 1$

Preuve :

Définissons d'abord la série d'Artin – Hasse par

$$AH(x) = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{p^n}}{p^n}\right) = e^{x+\frac{x^p}{p}+\frac{x^{p^2}}{p^2}+\cdots}$$

Soit $q_p(x) = e^{x+\frac{x^p}{p}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

et pour montrer le théorème il suffit de monter que

$$v_p(a_n) \geq -\frac{n}{p^2}\left(2+\frac{1}{p-1}\right)$$

En effet ;

On peut écrire :

$$e^{x+\frac{x^p}{p}} = AH(x)\prod_{n\geq 2} \exp\left(-\frac{x^{p^n}}{p^n}\right)$$

On pose

$$\exp\left(-\frac{x^{p^n}}{p^n}\right) = \sum_{k\geq 0} b_{k,n} x^k = \sum_{m\geq 0} (-1)^m \frac{x^{p^n m}}{p^{nm} m!}$$

Comme

$$v_p(m!) = \frac{m - S_p(m)}{p-1}$$

Où $S_p(m)$ est la somme des chiffres de m écrit en base p

Alors on a pour $k = mp^n$

$$v_p(b_{k,n}) = v_p(b_{mp^n,n}) = v_p\left(\frac{(-1)^m}{p^{nm} m!}\right) = -nm - \frac{m - S_p(m)}{p-1} \geq -\frac{mp^n}{p^n}\left(n+\frac{1}{p-1}\right) \geq -\frac{k}{p^n}\left(n+\frac{1}{p-1}\right)$$

or

$$\min_{n\geq 2} \frac{-k}{p^n}\left(n+\frac{1}{p-1}\right) = \frac{-1}{p^2}\left(2+\frac{1}{p-1}\right)$$

il en résulte

$$v_p(b_{k,n}) \geq -\frac{k}{p^2}\left(2+\frac{1}{p-1}\right)$$

Donc les coefficients a_n de $e^{x+\frac{x^p}{p}}$ satisfont la même relation

$$v_p(a_n) \geq -\frac{k}{p^2}\left(2+\frac{1}{p-1}\right)$$

Pour la série de Dwork ; on a

$$\sum_{n\geq 0}(a_n p^n)x^n = q_p(px) = \exp\left(px + \frac{(px)^p}{p}\right) = \Theta_p(x) = \sum_{n\geq 0} A_n x^n$$

Donc

$$\begin{aligned} v_p(A_n) &= v_p(a_n p^n) = v_p(a_n) + n\, v_p(p) \\ &\geq -\frac{n}{p^2}\left(2 + \frac{1}{p-1}\right) + n\left(\frac{1}{p-1}\right) = n\,\frac{(p-1)}{p^2} \end{aligned}$$

car $\quad v_p(p) = \dfrac{1}{p-1}$

Soit p une racine de $x^{p-1} + p$ (ie $p^{p-1} = -p$) et $x_p = \Theta_p(1)$

Donc $y(x) = x_p^{\,x}$ et la somme de Gauss associé à ce caractère est

$$G(y_p, c) = -\sum_{x\in IF_p^*} x_p^{x} w^a(x) = t(w^a) \xrightarrow{notation} = t(w^a)$$

on va exprimer dans la suite cette somme à l'aide de la fonction gamma p – adique, d'abord on a :

V – I – 5 Lemme :

La somme de Gauss précédente $t(w^{-a})$ est égale à

$$t(w^{-a}) = -\sum_{e^p = e\neq 0} e^{-a}\Theta_p(e)$$

Preuve :

on a vu que pour $x \in IF_p^*$ $w(x)$ le caractère de Teichmuler est une racine $(p-1)$ ième de l'unité et lorsque x varie dans $(Z_p/pZ_p)^* \approx (Z/pZ)^*$, $w(x)$ décrit toutes les racines (p – 1) ième de 1

on a

$$|x - w(x)|_p < p^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad x_p^{\,x} = x_p^{\,w(x)}$$

donc

$$\Theta_p(x) = x_p^{\,x} = x_p^{\,w(x)} = \Theta_p(w(x)) \qquad \text{avec} \qquad x_p = \Theta_p(1)$$

Par suite

$$\begin{aligned} t(w^{-a}) &= -\sum_{x\in IF_p^*} x_p^{\,x} w^{-a(x)} = -\sum_{x\in IF_p^*}\Theta_p(x) w^{-a}(x) \\ &= -\sum_{x\in IF_p^*}\Theta_p(w(x))\, w^{-a}(x) = -\sum_{e^p = e\neq 0}\Theta_p(e) e^{-a} \end{aligned}$$

V – I – 6 Lemme :

Soit $\Theta_p(T) = e^{p(T-T^p)}$ l'exponentielle de Dwork et $\sum_{n\geq 0} A_n T^n$ sa série de Taylor alors on a

$$t(w^{-a}) = -\sum_{e^p = e \neq 0} \Theta_p(e) e^{-a} = (1-p)\sum_{k\geq 0} A_{a+k(p-1)}$$

Preuve :

D'après le lemme précédent on a

$$t(w^{-a}) = -\sum_{e^p=e\neq 0} e^{-a}\Theta_p(e) = -\sum_{e^p=e\neq 0} e^{-a}\sum_{n\geq 0} A_n e^n$$
$$= -\sum_{n\geq 0} A_n \sum_{e^p=e\neq 0} e^{n-a}$$

or

$$\sum_{e^p=e} e^{n-a} = \begin{cases} p-1 & \text{si } (p-1) \text{ divise } (n-a) \\ 0 & \text{si } (p-1) \text{ ne divise pas } (n-a) \end{cases}$$

ce qui donne

$$t(w^{-a}) = (1-p)\sum_{k\geq 0} A_{a+(p-1)k}$$

V – I – 7 Lemme :

Soit $\Theta_p(T) = e^{p(T-T^p)} = \sum_{n\geq 0} A_n T^n$ *alors les coefficients* A_n *vérifient*

$$n A_n = p A_{n-1} \qquad \text{pour} \quad 1 \leq n < p$$

$$\& \qquad nA_n = p(A_{n-1} - p A_{n-p}) \qquad \text{pour tout} \quad n \geq p$$

Preuve :

On différencie l'identité

$$\Theta_p(T) = e^{p(T-T^p)} = \sum_{n\geq 0} A_n T^n$$

On obtient

$$\Theta_p(T)' = \sum_{n\geq 0} nA_n T^{n-1} = e^{p(T-T^p)} p(1-pT^{p-1})$$
$$= \sum_{n\geq 0} A_n T^n (p - pT^{p-1}) = \sum_{n\geq 0} pA_n T - \sum_{n\geq 0} ppA_n T^{p+n-1}$$
$$= \sum_{n\geq 0} pA_n T^{n-1+1} - \sum_{n\geq p} ppA_{n-p} T^{n-1} = \sum_{n\geq 0 \, ou \, 1} pA_{n-1} T^{n-1} - \sum_{n\geq p} ppA_{n-p} T^{n-1}$$

ce qui donne

$$nA_n = p(A_{n-1} - p A_{n-p}) \qquad n \; {}^{3} \; p$$

et pour $n < p$ $A_{n-p} = 0$ $\Rightarrow$ $n A_n = p A_{n-1}$

Définissons pour $a \in N$ la fonction $\tilde{G}_a$ par

$$\tilde{G}_a(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{A_{a+KP}}{p^k} x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$$

Rappelons que nous avons montré que

$$G_a(x) = \frac{(-1)^{a+1}}{\Gamma_p(1+a+px)} = \sum_{k\geq 0} \frac{A_{a+kp}}{p^{a+kp}} k! \binom{x}{k}$$

Remarquons que si $0 \leq a \leq p-1$ la fonction $G_a = p^a \tilde{G}_a$

V – I – 8 Théorème

Pour $a \geq 0$, *notons* $a_* = \dfrac{a}{1-p}$ *alors on a*

$$(1-p)\sum_{k=0}^{N-1} A_{a+(p-1)k} = \tilde{G}_a(a_*) - \tilde{G}_{a+N(p-1)}(a_* - N)$$

Preuve :

Démontrons cette relation par récurrence sur N

♦ pour $N = 1$, on doit montrer que $\tilde{G}_a(a_*) - \tilde{G}_{a+(p-1)}(a_* - 1) = (1-p)A_a$

Calculons d'abord le terme $\tilde{G}_a(x) - \tilde{G}_{a+(p-1)}(x-1)$

Pour cela écrivons $\tilde{G}_{a+(p-1)}$ comme:

$$\tilde{G}_{a+(p-1)}(x-1) = \sum_{k\geq 0} A_{a+(p-1)+kp} \frac{(x-1)_k}{p^k} = \sum_{k\geq 0} A_{a+(k+1)p-1} \frac{(x-1)_k}{p^k}$$

Utilisons le lemme précédent

$$A_{n-1} = \frac{n}{p} A_n + pA_{n-p} \qquad \text{pour} \quad n \geq p$$

et il vient

$$\tilde{G}_{a+(p-1)}(x-1) = \sum_{k\geq 0} \left[\frac{a+(k+1)p}{p} A_{a+(k+1)p} + pA_{a+kp} \right] \frac{(x-1)_k}{p^k}$$

$$= \sum_{k\geq 1} \frac{a+kp}{p} A_{a+kp} \frac{(x-1)_{k-1}}{p^{k-1}} + \sum_{k\geq 0} pA_{a+kp} \frac{(x-1)_k}{p^k}$$

Donc

$$\tilde{G}_a(x) - \tilde{G}_{a+(p-1)}(x-1) = A_\alpha + \sum_{k\geq 1} \frac{A_{a+kp}}{p^k}(x)_k - \sum_{k\geq 1} \frac{a+kp}{p} A_{a+kp} \frac{(x-1)_{k-1}}{p^{k-1}} - \sum_{k\geq 0} pA_{a+kp} \frac{(x-1)_k}{p^k}$$

$$= \quad A_\alpha + \sum_{k\geq 1} \frac{A_{a+kp}}{p^k}\left((x)_k - (a+kp)(x-1)_{k-1}\right) - \sum_{k\geq 0} pA_{a+kp}\frac{(x-1)_{k-1}(x-k)}{p^k}$$

$$= \quad A_a + \sum_{k\geq 1} \frac{A_{a+kp}}{p^k}(x-1)_{k-1}(x-a-kp) - \sum_{k\geq 0} pA_{a+kp}\frac{(x-1)_{k-1}(x-k)}{p^k}$$

Pour $x = a_* = \dfrac{a}{1-p}$ on a

$$x - a - kp = a_* - a - kp = p\left(\frac{a_*}{p} - \frac{a}{p} - k\right) = p\left(\frac{a}{p(p-1)} - \frac{a}{p} - k\right)$$

$$= p\left(\frac{a}{1-p} - k\right) = p(a_* - k)$$

Et donc

$$\tilde{G}_a(a_*) - \tilde{G}_{a+(p-1)}(a_* - 1) \quad =$$

$$= A_a + \sum_{k\geq 1} A_{a+kp}\frac{(a_*-1)_{k-1}}{p^k}(a_* - a - kp) - \sum_{k\geq 0} pA_{a+kp}\frac{(a_*-1)_{k-1}}{p^k}(a_* - k)$$

$$= A_a + \sum_{k\geq 1} pA_{a+kp}\frac{(a_*-1)_{k-1}}{p^k}(a_* - k) - \sum_{k\geq 0} pA_{a+kp}\frac{(a_*-1)_{k-1}}{p^k}(a_* - k)$$

$$= A_a - pA_a = (1-p)A_a$$

- on suppose que la propriété est vraie jusqu'à $N-1$

i.e. $\tilde{G}_a(a_*) - \tilde{G}_{a+(N-1)(p-1)}(a_* - (N-1)) = (1-p)\left(A_a + A_{a+(p-1)} + \cdots + A_{a+(N-2)(p-1)}\right)$

Posons $b = a + (N-1)(p-1)$ alors d'après ce qui procède nous avons

$$\tilde{G}_{a+(N-1)(p-1)}(x) - \tilde{G}_{a+N(p-1)}(x-1) = \tilde{G}_b(x) - \tilde{G}_{b+(p-1)}(x-1)$$

$$= A_b + \sum_{k\geq 0} A_{b+kp}\frac{(x-1)_{k-1}}{p^k}(x-b-kp) - \sum_{k\geq 0} pA_{b+kp}\frac{(x-1)_{k-1}}{p^k}(x-k)$$

Remplaçons b par sa valeur nous avons :

$$\tilde{G}_{a+(N-1)(p-1)}(x) - \tilde{G}_{a+N(p-1)}(x-1) = A_{a+(N-1)(p-1)} + \sum_{k\geq 1} A_{a+(N-1)(p-1)+kp}\frac{(x-1)_k}{p^k}\left(x-(a-N+1)-p(N-1-k)\right)$$

$$- \sum_{k\geq 0} pA_{a+(N-1)(p-1)+kp}\frac{(x-1)_{k-1}}{p^k}(x-k)$$

Pour $x = a_* - N + 1$ on aura

$$(x - (a - N + 1) - p(N-1-k)) = a_* - N + 1 - a + N - 1 - p(N-1-k)$$

$$= p(a_* - (N-1-k))$$

En remplaçant dans la relation précédente on obtient

$$\tilde{G}_{a+(N-1)(p-1)}(a_* - N + 1) - \tilde{G}_{a+N(p-1)}(a_* - N) = A_{a+(N-1)(p-1)} +$$

$$+ \sum_{k\geq 1} pA_{a+(N-1)(p-1)+kp} \frac{(a_* - N)_{k-1}}{p^k}\big(a_* - (N-1-k)\big)$$

$$- \sum_{k\geq 0} pA_{a+(N-1)(p-1)+kp} \frac{(a_* - N)_{k-1}}{p^k}(a_* - (N-1-k))$$

$$= (1 - p) A_{a+(N-1)(p-1)}$$

D'autre part ,

$$\tilde{G}_a(a_*) - \tilde{G}_{a+N(p-1)}(a_* - N) = \tilde{G}_a(a_*) - \tilde{G}_{a+(N-1)(p-1)} + (1-p)A_{a+(N-1)(p-1)}$$

Utilisons l'hypothèse de récurrence sur $\tilde{G}_a(a_*) - \tilde{G}_{a+(N-1)(p-1)}(a_* + (N-1))$

on obtient

$$\tilde{G}_a(a_*) - \tilde{G}_{a+N(p-1)}(a_* - N) = (1-p)\big(A_a + A_{a+p-1} + \cdots + A_{a+(N-2)(p-1)}\big) + (1-p)A_{a+(N-1)(p-1)}$$

$$= (1-p)\big(A_a + A_{a+p-1} + \cdots + A_{a+(N-1)(p-1)}\big) \quad \blacklozenge$$

V – I – 9 Corollaire :

Pour $0 \leq a < p$, $\quad a_* = \dfrac{a}{1-p}$ *on a*

$$(1-p)\sum_{k\geq 0} A_{a+k(p-1)} = \tilde{G}_a(a_*) - \lim_{N\to\infty} \tilde{G}_{a+N(p-1)}(a_* - N)$$

Preuve :

Rappelons que nous avons noté par A_n les coefficients de la série de l'exponentielle de Dwork définie par $\Theta_p(T) = e^{p(T-T^p)} = \sum_{n\geq 0} A_n T^n$ et que cette fonction converge pour la topologie p - adique dans une boule de rayon superieur à 1 , ce qui implique que $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$

Donc l'écriture $\sum_{n\geq 0} A_n$ à un sens , et le théorème précédent pour $a = a$ montre que

$$\tilde{G}_a(a_*) - \tilde{G}_{a+N(p-1)}(a_* - N) = (1-p)\sum_{k=0}^{N-1} A_{a+k(p-1)}$$

Passant à la limite pour n assez grand, on obtient

$$(1-p)\sum_{k=0}^{\infty} A_{a+k(p-1)} = \tilde{G}_a(a_*) - \lim_{N\to\infty} \tilde{G}_{a+N(p-1)}(a_* - N) \quad \blacklozenge$$

V – I – 10 Lemme :

Pour $p \neq 2$ *on a* $\quad \lim_{a\to\infty} \left\|\tilde{G}_a\right\| = 0$

Plus précisément si on note $r_p = p^{-1/(p-1)} = |p|_p$

Alors $\left\|\tilde{G}_a\right\| \le r_p^{\frac{a}{p}} = p^{-\frac{a}{p(p-1)}}$

Où $\left\|\tilde{G}_a\right\| = \sup_{x\in Z_p} \left|\tilde{G}_a(x)\right|_p$

Preuve :

Comme

$$\tilde{G}_a(x) = \sum_{k\ge 0} \frac{A_{a+kp}}{p^k} k! \binom{x}{k}$$

Alors que le théorème de Mahler implique

$$\left\|\tilde{G}_a\right\| = \sup_{k\ge 0} \left|\frac{A_{a+kp}}{p^k / k!}\right|_p$$

Or $|k!|_p = p^{-\frac{k-S_p(k)}{p-1}}$

Où $S_p(k)$ somme des chiffres de k écrit en base p

Donc

$$\left|\frac{p^k}{k!}\right|_p = \frac{r_p^k}{p^{-v_p(k!)}} = \frac{r_p^k}{r_p^{k-S_p(k)}} = r_p^{S_p(k)} \le r_p^k$$

Car $k \ge S_p(k)$ et $r_p < 1$ ce qui implique $r_p^{S_p(k)} \ge r_p^k$

D'autre part ;

Les coefficients de Taylor A_n de la série de Dwork $\Theta_p(x) = e^{p(x-x^p)} = \sum_{n\ge 0} A_n x^n$

vérifient $\left|A_n\right|_p \le p^{-\frac{n(p-1)}{p^2}} = r_p^{n\frac{(p-1)^2}{p^2}}$

On obtient

$$\left|\frac{A_{a+kp}}{p^k / k!}\right|_p \le \frac{r_p^{(a+kp)\frac{(p-1)^2}{p^2}}}{r_p^{S_p(k)}} = r_p^{(a+kp)\frac{(p-1)^2}{p^2} - S_p(k)} \le r_p^{(a+kp)\frac{(p-1)^2}{p^2} - k}$$

Comme $p \ne 2$, alors que $\frac{p-1}{2} > \frac{1}{2}$

Donc

$$(a+kp)\frac{(p-1)^2}{p^2} - k = a\frac{(p-1)^2}{p^2} + k\left(\frac{(p-1)^2}{p} - 1\right)$$

$$\geq a\,\frac{(p-1)}{2p}+k\,\frac{(p-3)}{2}\geq a\,\frac{1}{p}$$

Ce qui donne

$$\left\|\tilde{G}_a\right\| = \sup\left|\frac{A_{a+kp}}{p^k/k!}\right|_p \leq r_p^{\frac{a}{p}} \qquad \blacklozenge$$

V – I – 11 Théorème : (*Gross-Koblitz*)

Pour 0 £ a £ p - 1 on a

$$-\sum_{e^p=e\neq 0} e^{-a}\Theta_p(e) = p^{S_p(a)}\Gamma_p\left(\frac{a}{p-1}\right)$$

Preuve :

Le lemme V-I-5 implique

$$-\sum_{e^p=e\neq 0}\Theta_p(e)e^{-a} = (1-p)\sum_{k\geq 0}A_{a+k(p-1)}$$

Avec $\sum_{n\geq 0}A_n x^n = e^{p(x-x^p)}$

Rappelons que

$$G_a(x) = \sum_{k\geq 0}\frac{A_{a+kp}}{p^{a+k}}k!\binom{x}{k} = \frac{(-1)^{a+1}}{\Gamma_p(a+px+1)} = \Gamma_p(-a-px)$$

Et pour $x = a_* = \dfrac{a}{1-p}$ on a

$$G_a(a_*) = \Gamma_p(-a-pa_*) = \Gamma_p\left(\frac{a}{p-1}\right) = \frac{\tilde{G}_a(a_*)}{p^a}$$

D’autre part ;

$$(1-p)\sum_{k\geq 0}A_{a+k(p-1)} = \tilde{G}_a(a_*) - \underbrace{\lim \tilde{G}_{a+N(p-1)}(a_*-N)}_{=0\,car\,\|\tilde{G}_a\|\xrightarrow{a\to\infty}0} = \tilde{G}_a(a_*)$$

$$= p^a G_a(a_*) = p^a\Gamma_p\left(\frac{a}{p-1}\right)$$

$$= p^{S_p(a)}\Gamma_p\left(\frac{a}{p-1}\right)$$

$S_p(a) = a$ car $a \leq p-1$ $\blacklozenge$

Comme les valeurs de Γ_p sont des unités de $\mathbf{Z}_p$ ie $|\Gamma_p(x)|_p = 1$ on a

V – I – 12 Corollaire : (*Stickelberger*)

Pour 0 £ a £ p - 1 , la valeur absolue p – adique de la somme de Gauss

$$\sum_{e^p = e} e^{-a}\Theta_p(e) \qquad \text{est} \qquad \left|p^{S_p(a)}\right|_p = r_p^{S_p(a)} = |p|_p^{\frac{S_p(a)}{p-1}}$$

V - II Le prolongement de la factorielle de Roman :

On commence par donner la définition de généralisation de la factorielle $n!$ qui donne un sens à la factorielle des entiers négatifs aussi

V – II – 1 Définition :

Pour tout entier n on définit la factorielle de Roman notée g par

$$g(n) = \begin{cases} n! & si \quad n \geq 0 \\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{(-n-1)!} & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$$

on peut également définir la factorielle de Roman par la relation fonctionnelle suivante :

$$g(0) = 0$$

$$\text{et} \qquad g(n) = r(n)\, g(n-1)$$

Où « Roman n » $r(n)$ est défini par

$$r(n) = \begin{cases} n & \text{pour} \quad n \neq 0 \\ 1 & \text{pour} \quad n = 0 \end{cases}$$

comme pour les fonctions gamma complexe et p – adique qui prolongent la factorielle de n, $g(n)$ satisfait la formule des compléments suivante :

V – II – 2 Proposition (*Knuth*)

Pour tout entier n, on a

$$g(n)\, g(-n-1) = \begin{cases} (-1)^n & \text{si} \quad n < 0 \\ (-1)^{n+1} & \text{si} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Preuve :

♦ si $n \geq 0$ alors $(-1-n) < 0$ donc

$$g(n) = n! \qquad \text{et} \qquad g(-n-1) = \frac{(-1)^n}{(-(-n-1)-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Par suite :

$$g(n)\,g(-n-1) = n!\frac{(-1)^n}{n!} = (-1)^n$$

♦ si $n < 0$ alors $(-n-1) \geq 0$ donc

$$g(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{(-n-1)!} \qquad \text{et} \qquad g(-n-1) = (-n-1)!$$

Par suite

$$g(n)\,g(-n-1) = \frac{(-1)^{n+1}}{(-n-1)!}(-n-1)! = (-1)^{n+1} \qquad ♦$$

Par ailleurs la fonction gamma p – adique est bien définie sur $\mathbf{Z}_p \supset \mathbf{Z}$ et on a d'après le lemme II -

$$\Gamma_p(n+1)\Gamma_p(-n) = (-1)^{n+1+\left[\frac{n}{p}\right]} \qquad (*)$$

Pour $m = -n \in -\mathbf{N}^*$ on a $1+n = 1-m$

$$(*) \Rightarrow \Gamma_p(m)\Gamma_p(1-m) = (-1)^{1-m+\left[-\frac{m}{p}\right]}$$

$$\Rightarrow \Gamma_p(m) = \frac{(-1)^{1-m+\left[-\frac{m}{p}\right]}}{\Gamma_{p(1-m)}} = \frac{(-1)^{1-m+\left[-\frac{m}{p}\right]}}{(-1)^{1-m}\left((1-m-1)!\right)_p} = \frac{(-1)^{\left[-\frac{m}{p}\right]}}{\left((-m)!\right)_p}$$

donc pour tout entier n on peut écrire

$$\Gamma_p(n+1) = \begin{cases} (-1)^{n+1}(n!)_p & si \quad n \geq 0 \\ \dfrac{(-1)^{\left[-\frac{n+1}{p}\right]}}{\left((-n-1)!\right)_p} & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$$

Sachant que Γ_p est continue sur $\mathbf{Z}_p$ on a la proposition suivante :

V-II - 3 Conséquence :

Posons

$$g_p(n) = \begin{cases} (n!)_p & si \quad n \geq 0 \\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{\left((-n-1)!\right)_p} & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$$

Alors $n \mapsto g_p(n)$ est la restriction d'une fonction continue de $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans $\mathbf{Q}_p$

En effet :

D'après ce qui procède on a

$$g_p(n) = \begin{cases} (-1)^{n+1}\Gamma_p(n+1) & si \quad n \geq 0 \\ (-1)^{n+1+\left[-\frac{n+1}{p}\right]}\Gamma_p(n+1) & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$$

Comme pour toutes les fonctions qui prolongent la factorielle d'un entier, g_p satisfait une relation fonctionnelle ,

V – II – 4 Proposition :

g_p vérifie la relation fonctionnelle suivante :

$$g_p(n+1) = r_p(n+1)\, g_p(n)$$

où $$r_p(n) = \begin{cases} n & \text{si} \quad |n|_p = 1 \\ 1 & \text{si} \quad |n|_p < 1 \end{cases}$$

Preuve :

♦ 1 er cas si $n+1 > 0$

$$g_p(n+1) = ((n+1)!)_p = \prod_{\substack{j=1 \\ (j,p)=1}}^{n+1} j = \prod_{\substack{j=1 \\ (j;)=1}}^{n} j\, r_p(n+1)$$

$$= g_p(n)\; r_p(n+1)$$

♦ 2ème cas si $n+1 < 0$

$$g_p(n+1) = \frac{(-1)^{n+1+1}}{\big((-(n+1)-1)!\big)_p} = \frac{(-1)^n}{((-n-2)!)_p} = \frac{(-1)^n}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ (j,p)=1}}^{-n-2} j} = \frac{(-1)^n}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ (j,p)=1}}^{-n-1} j} r_p(-(n+1))$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ (j,p)=1}}^{-n-1} j} r_p(n+1) = g_p(n)\, r_p(n+1)$$ ♦

V – II – 5 Proposition :

g_p satisfait la relation suivante

$$g_p(n)\, g_p(-n-1) = \begin{cases} (-1)^n & si \quad n > 0 \\ (-1)^{n+1} & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$$

Bibliographie :

[1] A. M. ROBERT , A course in p – adic Analysis ,Springer- Verlag, Grad. Text in Math, 198 (2000)

[2] A. M. ROBERT, The Gross – Koblitz formula revisited . Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. Vol.105 (2001)

[3] B. DWORK, A note on the p – adic gamma function (1981)

[4] B. C. CARLSON, Special functions of applied Mathematics (1977)

[5] D. BARSKY, On Morita’s p – adic gamma function, Math. Proc. Comm. Phil. Soc. (1981) p. 23 – 27

[6] J. DIAMOND , The p – adic log gamma function and p – adic Euler constants .Trans. Amer. Math. Soc. 233 (1977) p. 321 – 337

[7] L. SCHWARTZ, Fonctions spéciales . (1960)

[8] LOEB and **ROBA**, Formal power series of logarithmic type

[9] M. BOYARSKY, p – adic gamma function and Dwork cohomplogy . Trans. Amer. Math. Soc.257 (1980) p. 359 – 369 .

[10] M. ABRAMOWITZ and **I.A STEGUN** ,Hand book of Mathematical function .Dover publication . Inc. New York (1965).

[11] N. KOBLITZ, p – adic numbers, p – adic Analysis and zeta functions, Spring-Verlag . New York (1977).

[12] N. KOBLITZ, Interpretation of the p – adic log gamma function and Euler constants using the Bernoulli meazures . Trans. Amer. Math. Soc. (1978)

[13] P. COLMEZ, fonctions d’une variable p – adique : note de cours (1996)

[14] S. LANG, Cyclotomic fields II, GTM 69, Spring – Verlag (1980)

[15] W. H. SCHIKHOV, Ultrametric Calculus : An introduction to p – adic Analysis, Cambridge University Press (1984) .

[16] Y. MORITA, A p – adic analogue of the gamma function, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo. Section 1, 22, (1975) p 255 – 266 .