

N° d'ordre : 14/2015-M/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE DE HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE
PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MAGISTER EN
MATHÉMATIQUES
SPÉCIALITÉ : Statistique Mathématique
et probabilité

Par : Djazouli Adel

Thème

Analyse Spectrale des Modèles ARFIMA

Soutenu publiquement le 06/06/2015, à la salle de conférence (B) bâtiment (C)
devant le jury composé de :

| | | |
|-----------------------------|------------------------------|-----------------------|
| M ^{me} .DJ.Merad | Maitre de conférence à USTHB | Présidente. |
| M ^{me} K. Djabelah | Maitre de conférence à USTHB | Directeur de Mémoire. |
| M ^{me} . H.Saggou | Maitre de conférence à USTHB | Examinatrice. |

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et Technologie de Houari Boumediene
Faculté des Mathématiques



Résumé du Mémoire de Magistère en Mathématiques

Option Statistique Mathématique et Probabilité

Présenté par¹

DJAZOULI Adel

Thème

Analyse spectrale des modèles ARFIMA

Résumé

L'analyse spectrale est une méthode qui permet d'analyser la variance et dont le but est de trouver le meilleur moyen d'exprimer une chronique $X(t)$ comme superpositions de fonctions cycliques élémentaires. En d'autres termes, décomposer plusieurs séries observées en chroniques non-covariées afin d'étudier la contribution de chacune des composantes ainsi construites à la variance de la série chronologique.

Notre travail va s'intéresser à l'étude de l'aspect spectrale des processus ARFIMA, ainsi, une étude de l'analyse spectrale et du périodogramme des modèles ARFIMA sera élaboré. Le problème posé est d'étudier la possibilité de détection de ces modèles en fonction des valeurs du paramètre de mémoire.

Afin de tester l'hypothèse que le processus observé soit un bruit blanc fractionnaire, contre l'alternative que le processus soit un ARFIMA, un test a été élaboré en simulant plusieurs de ces processus. La statistique de ce test étant une Khi-deux, démontrée par A.MOKADAM pour des processus ARMA, dans notre travail, nous avons développé ce test afin qu'il soit appliqué au cas des processus ARFIMA.

¹ sous la direction de Mme DJABALLAH Khedidja, maître de conférences A à l'USTHB.

Liste des tableaux

Table des figures

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Généralités sur les processus stochastiques | 4 |
| 1.1 | Introduction | 4 |
| 1.2 | Définitions et notations | 5 |
| 1.3 | Présentation des processus linéaires stationnaires (AR, MA, ARMA) | 8 |
| 1.3.1 | Processus autorégressifs AR(p) | 8 |
| 1.3.2 | Processus moyenne mobile MA(q) | 8 |
| 1.3.3 | Processus autoregressif moyenne mobile ARMA(p,q) | 9 |
| 1.4 | Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation | 9 |
| 1.4.1 | Fonction d'autocovariance d'un processus AR(p) | 10 |
| 1.4.2 | Fonction d'autocovariance d'un processus MA(p) | 10 |
| 1.4.3 | Fonction d'autocovariance d'un bruit blanc | 11 |
| 1.5 | Présentation spectrale du processus ARMA | 11 |
| 1.5.1 | Densité spectrale pour un bruit blanc | 12 |
| 1.5.2 | Densité spectrale pour les modèles linéaires | 12 |
| 1.5.3 | Densité spectrale des processus ARMA, AR, MA | 12 |
| 1.6 | Présentation des processus linéaires non stationnaires (ARIMA) | 14 |
| 1.6.1 | Présentation du processus ARIMA | 15 |
| 1.6.2 | Relation entre le processus et ses différences | 15 |
| 1.6.3 | Formes explicites du processus ARIMA | 16 |
| 1.7 | Conclusion | 21 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2 | Processus à mémoire longue | 22 |
| 2.1 | Introduction | 22 |
| 2.2 | Processus à mémoire longue | 23 |
| 2.2.1 | Décomposition de Wold | 23 |
| 2.3 | La mémoire longue | 24 |
| 2.3.1 | Définition des $M(d)$ Processus | 26 |
| 2.4 | Les processus <i>ARFIMA</i> | 29 |
| 2.4.1 | Le processus $ARFIMA(0, d, 0)$ | 30 |
| 2.4.2 | Le processus $ARFIMA(p, d, q)$ | 37 |
| 2.5 | Quelques processus à mémoire longue | 42 |
| 2.5.1 | Le Mouvement Brownien fractionnaire (FBM) | 42 |
| 2.5.2 | Le Bruit Gaussien Fractionnaire (FGN) | 43 |
| 2.6 | Conclusion | 46 |
| 3 | Analyse spectrale | 47 |
| 3.1 | Introduction | 47 |
| 3.2 | Suites et séries de Fourier | 48 |
| 3.3 | Densité spectrale | 50 |
| 3.3.1 | Propriétés de la densité spectrale | 51 |
| 3.3.2 | Densité spectrale de quelques processus | 51 |
| 3.3.3 | Calcul de l'auto-covariance à partir de la densité spectrale | 54 |
| 3.3.4 | Interprétation de la densité spectrale | 56 |
| 3.4 | Périodogramme | 57 |
| 3.4.1 | Construction et interprétation du périodogramme | 57 |
| 3.4.2 | Estimation de la densité spectrale | 58 |
| 3.5 | Utilité de la densité spectrale | 61 |
| 3.6 | Les filtres | 61 |
| 3.6.1 | Effet d'un filtre linéaire | 62 |
| 3.7 | Conclusion | 63 |
| 3.8 | Test d'une mesure d'information | 64 |
| 3.8.1 | La mesure d'information | 65 |
| 3.8.2 | Hypothèses | 66 |
| 3.8.3 | Test | 67 |

| | | |
|-------|--|-----------|
| 4 | Simulation et illustrations numériques | 70 |
| 4.1 | Introduction | 70 |
| 4.2 | Simulation de modele de séries chronologiques | 71 |
| 4.2.1 | Exemple A : ARMA(1,1). | 71 |
| 4.2.2 | Exemple B : AR(1). | 71 |
| 4.2.3 | Exemple C : ARFIMA(1, 0.4, 1). | 71 |
| 4.2.4 | Exemple D : ARFIMA(1,-0.2,0). | 72 |
| 4.2.5 | Exemple E : ARFIMA(0, 0.4, 0). | 72 |
| 4.3 | Interprétation des graphiques | 73 |
| 4.3.1 | Les chroniques | 73 |
| 4.3.2 | Les fonctions d'autocorrélations | 74 |
| 4.3.3 | Les périodogrammes | 75 |
| 4.4 | Application du test basé sur la mesure d'information | 77 |
| 4.5 | Conclusion | 80 |

d'ordre :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère De L'Enseignement Supérieur Et De La Recherche
Scientifique
Université Des Sciences Et De La Technologie Houari Boumediene
Faculté Des Mathématiques

Mémoire
Présenté Pour L'Obtention du Dipôme de Magister
En Mathématiques

Spécialité : Statistique Mathématique & Probabilité

Par : DJAZOULI Adel

Thème

Analyse Spectrale des Modèles ARFIMA

Soutenu publiquement le ...06.\..06..\ 2015 , devant le jury composé
de :

| | | |
|------------------------|---------------------------------|-----------------------|
| Mme.DJ.Merad | Maitre de conférences à l'USTHB | Présidente |
| Mme K. Djabelah | Maitre de conférences à l'USTHB | Directrice de Mémoire |
| Mme. H.Saggou | Maitre de conférences à l'USTHB | Examinatrice |

Remerciements

Je remercie vivement Madame *Djaballah Khadidja* maitre de conférence à L'USTHB pour avoir accepté de diriger ce travail, grâce à son soutien constant, à ses encouragements et à ses conseils précieux, que j'ai pu mener ce travail à bien. Qu'elle trouve ici ma profonde gratitude.

Je reste très reconnaissant à Madame *Merad Djenat* docteur, à L'USTHB, pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie également et profondément Madame *Saggou Hafida*, docteur à L'USTHB, pour l'intérêt qu'elle a bien voulu porter à ce travail et d'avoir accepté de le juger.

Je remercie ma famille en particulier à mes très chers parents à qui je dois tout et qui j'espère seront fiers de moi.

Enfin, je tiens à remercier mes amis et mes collègues de la faculté de mathématique. pour leur soutien.

Introduction Générale

Une série chronologique est un ensemble d'observations qui est obtenu de façon séquentielle à des intervalles de temps réguliers ou non. La modélisation et la prévision des séries chronologiques est un enjeu important dans de nombreux domaines, elles ont été utilisées en astronomie ('on the periodicity of sunspots', 1906), en météorologie ('time-series regression of sea level on weather', 1968), en théories du signal ('Noise in FM receivers', 1963), en biologie ('the autocorrelation curves of schizophrenic brain waves and the power spectrum', 1960), en économie ('time-series analysis of imports, exports and other economic variables', 1971) ...etc.

Les astronomes ont été les premiers à utiliser l'analyse de Fourier pour des séries chronologiques. Leur but était de détecter des saisonnalités cachées au sein de leurs données. Ainsi, Lagrange a utilisé ces méthodes pour détecter de la périodicité cachée en 1772 et en 1778. Un demi siècle plus tard, en 1847, Buys et Ballot, dans 'Les changements périodiques de températures' ont proposé des méthodes pour étudier la périodicité de données astronomiques.

Toutefois, il a fallu attendre 1889 pour que Sir Arthur Shuster introduise le périodogramme, qui constitue la base des méthodes spectrales d'analyse de séries chronologiques.

L'étude des séries temporelles semble avoir atteint sa maturité au cours des années 70 où des développements signifiants sont apparus. En 1965, Cooley et Tukey ont beaucoup aidé l'étude spectrale des séries.

La nature intrinsèque d'une série chronologique est telle que les valeurs observées sont généralement dépendantes et l'objectif est d'identifier et de modéliser la structure de dépendance temporelle. Les séries chronologiques linéaires peuvent être divisées en deux principales catégories. Les processus à mémoire courte et les processus à mémoire longue. Nous dirons qu'un processus linéaire est à mémoire courte si sa fonction d'autocovariance est absolument sommable c-à-d $\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma(h)| < \infty$ où $\gamma(h) \stackrel{def}{=} cov(X_0, X_h)$. On dit que le processus est à longue mémoire si $\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma(h)| = \infty$. à mémoire courte sont largement utilisés dans de nombreux domaines et de mul-

tiples modèles ont été proposés : AR, ARMA (Yule [1927], Walker [1931], Box and Jenkins [1976], Azencott and Castelle [1984], Brockwell and Davis [1996] ...). Par contre, les modèles permettant de représenter les processus à mémoire longue ne sont apparus qu'au début des années 50, historiquement pour l'étude du comportement inhabituel des niveaux du fleuve Nil en Egypte (Hurst [1951], Mandelbrot [1965]). Les processus à mémoire longue occupent une place de plus en plus importante dans la littérature des séries chronologiques (Granger et Joyeux [1980]). En effet les processus à mémoire longue s'avèrent plus adaptés à l'étude des séries chronologiques issues par exemple de l'hydrologie, l'économie, la climatologie, les trafics informatiques et l'économétrie financière.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude des processus stationnaires à mémoire longue (ARFIMA). Les modèles ARFIMA permettent de rendre compte des dépendances à long terme avec parcimonie, en ajoutant un terme d aux paramètres du modèles ARMA classiques. Un avantage considérable de ces modèles est qu'ils peuvent rendre compte à la fois des dépendances à court terme via les paramètres p et q , mais aussi des dépendances à long terme via le paramètre d , tout en déterminant leurs contributions respectives. De plus, les paramètres du modèle peuvent être estimés par la méthode du maximum de vraisemblance, permettant ainsi de déterminer si le paramètre d est significativement différent de 0. La modélisation ARFIMA peut être utilisée afin d'apporter la preuve statistique de la présence de dépendance à long terme dans les séries.

Dans notre travail, nous adoptons le test de A.Mokkadem, dont le but est de tester la présence de dépendance à long terme, afin de tester l'hypothèse que le processus observé soit un bruit blanc fractionnaire (*Voir la définition page 30*), contre l'alternative que le processus soit un ARFIMA.

Notre travail est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre on présente les notions et préliminaires de bases et quelques notations utilisées en séries chronologiques, nous présentons les processus linéaires stationnaires ainsi que les fonctions d'autocovariance et la fonction d'autocorrélation. Nous introduisons par la suite la notion d'analyse spectrale et nous donnons les densités spectrales de quelques processus. A la fin nous présentons les processus non stationnaire.

Le second chapitre est consacré à l'étude des processus à mémoire longue, en particulier les processus ARFIMA. Nous présentons une étude des propriétés spectrales de cette classe de processus.

Dans le troisième chapitre, nous abordons l'étude fréquentielle des sé-

ries chronologiques par l'analyse spectrale, nous donnons les propriétés de la densité spectrale de quelques processus (Bruit blanc, ARMA, AR, MA), la méthode de calcul de l'autocovariance à partir de la densité spectrale, l'interprétation de cette dernière et son estimation par le périodogramme, et afin de tester la mémoire longue, nous présentons le test de mesure d'information proposée par A.Mokkadem, que nous élargissons aux processus à longue mémoire afin de tester lesure d'information proposée par Abdelkader Mokkadem, que nous élargissons aux processus à longue mémoire afin de tester l'hypothèse que le processus observé est un bruit blanc fractionnaire.contre l'alternative que le processus observé est un ARFIMA; afin de détecter la présence de mémoire longue.

Chapitre 1

Généralités sur les processus stochastiques

Sommaire

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Introduction | 4 |
| 1.2 | Définitions et notations | 5 |
| 1.3 | Présentation des processus linéaires stationnaires | 8 |
| 1.4 | Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation | 9 |
| 1.5 | Présentation spectrale du processus ARMA..... | 11 |
| 1.6 | Présentation des processus linéaires non stationnaires | 14 |
| 1.7 | Conclusion..... | 21 |

1.1 Introduction

La théorie des séries temporelles est appliquée de nos jours dans des domaines aussi divers que l'économétrie, la médecine, la démographie... Une série Chronologique est une suite d'observations au cours du temps. Ce chapitre est consacré à la définition des notions de base utilisées pour l'étude des séries temporelles.

1.2 Définitions et notations

Définition 1 *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires notée $(X_t; t \in T)$ et défini sur un même espace (Ω, F, P) , ces variables peuvent représenter une certaine grandeur qui varie dans le temps de façon aléatoire dont l'indicateur représente le temps.*

Définition 2 *La prévision d'un processus stochastique est la détermination de ce qui se passera prochainement, avec plus au moins de certitude.*

Définition 3 *Une série chronologique (ou série temporelle) est une suite d'observations d'une certaine grandeur, effectuées à intervalles réguliers, prises séquentiellement dans le temps, débutant à un instant t .*

Définition 4 *Un processus (ε_t) i.i.d (indépendantes identiquement distribuées), constitue un bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ^2 , ssi il est d'espérance nulle $E(\varepsilon_t) = 0$ et de fonction d'auto-covariance définie par $\mu_X(t)$ la fonction moyenne du processus X_t . :*

$$\gamma_\varepsilon(h) = \text{cov}(\varepsilon_{t+h}, \varepsilon_t) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{si } h \neq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Définition 5 (Processus linéaire) *Un processus X_t est dit linéaire si on peut l'exprimer en fonction du bruit blanc à travers un filtre linéaire (voire la définition page 60).*

Cela dit, qu'on peut représenter les processus linéaires de deux façons équivalentes :

a/ Le processus X_t en fonction du bruit blanc

$$\begin{aligned} X_t &= \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \Psi(B) \varepsilon_t \end{aligned} \quad (1.2)$$

Où $\Psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$ et $\psi_0 = 1$

b/ Le processus X_t en fonction de son passé avec bruit additif

$$\begin{aligned} X_t &= \varepsilon_t + \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + \dots \\ &= \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_t = \Pi(B)X_t$$

Où $\Pi(B) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j$

– **Equivalence des deux représentations (a) et (b)**

Cette équivalence découle du fait que

$$(a) \wedge (b) \implies \Psi(B)\Pi(B)X_t = X_t$$

$$\iff \Psi(B)\Pi(B) = 1$$

$$\iff \Psi(B) = [\Pi(B)]^{-1}$$

et par suite,

$$X_t = \Psi(B)\varepsilon_t$$

$$\iff \varepsilon_t = \Psi^{-1}(B)X_t$$

$$\iff \varepsilon_t = \Pi(B)X_t \tag{1.4}$$

Définition 6 (Stationnarité stricte) *Le processus stochastique X_t est dit stationnaire au sens strict, si pour toute valeur de n les caractéristiques du n -uple $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ sont invariantes par rapport à n'importe quelle translation suivant l'axe du temps, c-à-dire, les lois de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ et $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ sont identiques pour tout $h \in \mathbb{Z}$.*

Définition 7 (Stationnarité faible) Le processus X_t est dit stationnaire au sens faible (ou du second ordre), si ses deux moments de premiers ordre sont finis et invariants dans le temps, autrement dit s'ils vérifient les deux propriétés suivantes :

- La moyenne $\mu_X(t) < +\infty$ est indépendante du temps t .
- La covariance $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(h)$ est indépendante du temps $t, \forall h = r - s$ où $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$.

Définition 8 (Causalité) Un processus stochastique X_t est dit causal s'il existe une suite de constante $\{\psi_j\}_{j \geq 0}$ tel que :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} |\psi_j| < \infty \text{ et } X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \text{ où } t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

On note par :

- $\mu_X(t)$ la fonction moyenne du processus X_t .
- $\gamma_X(r, s) = \text{cov}(X_r, X_s) = E[(X_r - E(X_r))(X_s - E(X_s))]$ la fonction d'autocovariance du processus X_t .
- $\rho_X(k) = \frac{\gamma_X(k)}{\gamma_X(0)}$ la fonction d'auto-corrélation du processus X_t .
- $\tilde{X}_t = X_t - \mu_X(t)$ le processus centré avec $\mu_X(t) = E(X_t)$
- ε_t le bruit blanc.
- B l'opérateur de retard ($B^j X_t = X_{t-j}$).
- $L(\beta)$ la fonction de vraisemblance.
- $S^2(\cdot)$ la somme des carrés des erreurs.
- $\hat{\beta}_n^{MV}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance et $\hat{\beta}_n^{MC}$ l'estimateur des moindres carrés pour les coefficients des deux polynômes du processus $ARMA$ pour un échantillon de taille n .
- l l'horizon de prévision.
- $\hat{X}_t(l)$ la fonction de prévision.

1.3 Présentation des processus linéaires stationnaires (AR, MA, ARMA)

1.3.1 Processus autorégressifs AR(p)

Soit X_t un processus stochastique de fonction moyenne $\mu_X(t)$. S'il existe un polynôme Φ d'ordre p et un bruit blanc ε_t de moyenne nulle $E(\varepsilon_t) = 0$ et de variance $var(\varepsilon_t) = \sigma^2$ vérifiant $\Phi(B)X_t = \varepsilon_t$, alors X_t est un processus autorégressif.

Autrement dit, si $\Phi(B) = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j B^j$ et $\Phi(B)X_t = \varepsilon_t$ le processus X_t est un $AR(p)$ et il peut être représenté sous la forme :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad (1.5)$$

Remarque 9 Cette appellation (autorégressive) vient du fait que l'expression du processus est une régression multiple de sa valeur courante et de ses p valeurs précédentes, c-à-d on peut utiliser ce modèle dans le cas où l'actuelle valeur du processus dépend de ses p valeurs précédentes.

1.3.2 Processus moyenne mobile MA(q)

S'il existe un polynôme Θ d'ordre q et un bruit blanc ε_t de moyenne nulle et de variance σ^2 (vérifiant $\hat{X}_t = \Theta(B)\varepsilon_t$) alors X_t forme un processus moyenne mobile.

Autrement dit, si $\Theta(B) = \sum_{j=1}^q \theta_j B^j$ et $\hat{X}_t = \Theta(B)\varepsilon_t$ le processus X_t est un $MA(q)$ qui se présente sous la forme :

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (1.6)$$

$$\iff \tilde{X}_t = X_t - \mu = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

On utilise ce modèle dans le cas où les valeurs du processus constituent des perturbations autour d'une valeur moyenne μ .

1.3.3 Processus autoregressif moyenne mobile ARMA(p,q)

Pour mieux représenter le processus stochastique, il est parfois utile de combiner deux processus : le processus autorégressif $AR(p)$ et le processus moyenne mobile $MA(q)$, ce qui donne le processus *autorégressif moyenne mobile* $ARMA(p, q)$.

Donc pour que le processus X_t soit un $ARMA(p, q)$ il faut et il suffit qu'il existe deux polynômes Φ, Θ et un bruit blanc ε_t , de sorte que $\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$

Autrement dit, si $\Theta(B) = \sum_{j=1}^q \theta_j B^j$, $\Phi(B) = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j B^j$ et $X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$.

Le processus X_t est un processus $ARMA(p, q)$ qui se représente sous forme :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (1.7)$$

Si en outre le processus X_t est centré ($\mu = 0$), alors :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Autrement, on modélise le processus $\tilde{X}_t = X_t - \mu$ au lieu du processus X_t et l'on écrit :

$$\tilde{X}_t = \phi_1 \tilde{X}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{X}_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

1.4 Fonctions d'autocovariance et d'autocorrelation

Supposons dans ce qui suit, X_t est un processus stationnaire centré de fonction d'autocovariance γ_X .

1.4.1 Fonction d'autocovariance d'un processus AR(p)

Si X_t est un processus autorégressif, alors : $\forall k \geq 1$,

$$\begin{aligned}\gamma_X(k) &= \text{cov}(X_{t+k}, X_t) \\ &= E(X_{t+k}X_t) \\ &= E(X_{t-k}X_t)\end{aligned}$$

(à cause de la stationnarité du processus).

$$X_{t-k} \cdot X_t = \phi_1 X_{t-k} X_{t-1} + \phi_2 X_{t-k} X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-k} X_{t-p} + X_{t-k} \varepsilon_t$$

$$\implies E(X_{t-k} \cdot X_t) = \phi_1 E(X_{t-k} X_{t-1}) + \phi_2 E(X_{t-k} X_{t-2}) + \dots + \phi_p E(X_{t-k} X_{t-p}) + E(X_{t-k} \varepsilon_t)$$

$$\implies \gamma_X(k) = \phi_1 \gamma_X(k-1) + \phi_2 \gamma_X(k-2) + \dots + \phi_p \gamma_X(k-p)$$

(relation entre auto-covariances).

En divisant cette dernière relation par γ_0 on obtient

$$\rho_X(k) = \phi_1 \rho_X(k-1) + \phi_2 \rho_X(k-2) + \dots + \phi_p \rho_X(k-p)$$

La quantité ϕ_k notée ϕ_{kk} en tant que fonction de k , est appelée fonction d'autocorrélation partielle. Cette fonction constitue alors un outil utile pour reconnaître l'ordre p d'un processus $AR(p)$ puisque la fonction d'autocorrélation est la dernière pondération d'un processus $AR(p)$.

La quantité ϕ_{kk} définit alors, l'ordre du processus autorégressif et l'on a :

$$\begin{cases} \phi_{kk} = 0 & \forall k \geq p+1 \\ \phi_{kk} \neq 0 & \text{si } k = p \end{cases}$$

1.4.2 Fonction d'autocovariance d'un processus MA(p)

Si X_t est un processus moyenne mobile, alors :

$$\gamma_X(k) = \text{cov}(X_{t+k}; X_t)$$

$$\begin{aligned}
&= E(X_{t+k}X_t) \\
\gamma_X(k) &= E \left[\left(\sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t+k-j} \right) \left(\sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} \right) \right] \\
\gamma_X(k) &= \sum_{j=0}^q \sum_{i=0}^q \theta_j \theta_i E(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+k-j}) \\
\gamma_X(k) &= \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^q \theta_j \theta_{j+|k|} & \text{si } k \leq q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.8)
\end{aligned}$$

Dans le cas où X_t n'est pas centré on le remplace par $\tilde{X}_t = X_t - E(X_t)$ et γ_X sera égale à $\gamma_{\tilde{X}}$.

1.4.3 Fonction d'autocovariance d'un bruit blanc

A partir de la définition du bruit blanc, sa fonction d'autocovariance est alors :

$$\gamma_\varepsilon(h) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.9)$$

1.5 Présentation spectrale du processus ARMA

Définition 10 (Densité spectrale) Soit X_t un processus stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocovariance $\gamma_X(\cdot)$, satisfaisant $\sum_{h=-\infty}^{+\infty} |\gamma_X(h)| < \infty$.

La densité spectrale du processus X_t est alors définie par :

$$f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} e^{-ih\lambda} \gamma_X(h) \quad (1.10)$$

où $-\infty < \lambda < +\infty$

1.5.1 Densité spectrale pour un bruit blanc

Le bruit blanc étant un processus stationnaire de moyenne nulle, alors sa densité spectrale s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} e^{-ih\lambda} \gamma_\varepsilon(h) \\ &= \frac{1}{2\pi} \gamma_\varepsilon(0) \\ f_\varepsilon(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \sigma^2 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Proposition 11 *Soit X_t un processus stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale $f_X(\lambda)$. Si $(\psi_j)_{j \geq 0}$ est une suite numérique vérifiant $\sum_{j=0}^{+\infty} |\psi_j| < \infty$, alors le processus $Y_t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j X_{t-j}$ est stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale :*

$$f_Y(\lambda) = |\Psi(e^{-i\lambda})|^2 f_X(\lambda) = \Psi(e^{-i\lambda}) \Psi(e^{i\lambda}) f_X(\lambda) \tag{1.12}$$

1.5.2 Densité spectrale pour les modèles linéaires

Etant donné le modèle linéaire :

$$X_t = \Psi(B)\varepsilon_t$$

avec $\Psi(B) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j B^j$
et compte tenu de la proposition 11, la densité du modèle a pour fonction :

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |\Psi(e^{-i\lambda})|^2 \tag{1.13}$$

1.5.3 Densité spectrale des processus ARMA, AR, MA

Dans cette partie, nous supposons que le processus X_t est centré.

1.5.3.1 Le processus ARMA

Le processus $ARMA(p, q)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\Phi(B)X_t &= \Theta(B)\varepsilon_t \\ \iff X_t &= \Phi^{-1}(B)\Theta(B)\varepsilon_t \\ X_t &= \Psi(B)\varepsilon_t \text{ avec } \Psi(B) = \Phi^{-1}(B)\Theta(B) = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j B^j \\ X_t &= \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j B^j \right) \varepsilon_t\end{aligned}$$

Il en résulte alors, compte tenu de la proposition 11, la densité spectrale du processus $ARMA$:

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{\Theta(e^{-i\lambda})}{\Phi(e^{-i\lambda})} \right|^2 \quad (1.14)$$

1.5.3.2 Le processus AR(p)

Le processus $AR(p)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\Phi(B)X_t &= \varepsilon_t \\ \iff X_t &= \Phi^{-1}(B)\varepsilon_t \\ X_t &= \Psi(B)\varepsilon_t = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j B^j \right) \varepsilon_t \text{ avec } \Psi(B) = \Phi^{-1}(B) = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j B^j\end{aligned}$$

Il en résulte alors, compte tenu de la proposition 21, la densité spectrale du processus AR :

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|\Phi(e^{-i\lambda})|^2} \quad (1.15)$$

1.5.3.3. Le processus MA(q)

Le processus $MA(q)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} X_t &= \Theta(B)\varepsilon_t \\ \iff X_t &= \Theta(B)\varepsilon_t \text{ (sous la condition } \Phi(z) \neq 0, \forall z, |z| \leq 1 \\ &= \Psi(B)\varepsilon_t \text{ avec } \Psi(B) = \Theta(B) \\ &= \sum_{j=0}^q \theta_j B^j = \sum_{j=0}^q \psi_j B^j + \sum_{j=q+1}^{+\infty} \psi_j B^j \text{ avec } \psi_j = \theta_j, \forall j = 0, \dots, q \text{ et } \psi_j = 0 \forall j > q \\ \implies X_t &= \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j B^j \right) \varepsilon_t \end{aligned}$$

Il en résulte alors, compte tenu de la proposition 21, la densité spectrale du processus MA :

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |\Theta(e^{-i\lambda})|^2 \quad (1.16)$$

1.6 Présentation des processus linéaires non stationnaires (ARIMA)

On a étudié précédemment les modèles AR, MA, ARMA qui sont des modèles linéaires stationnaires (les moments d'ordre 1 et 2 sont invariants dans le temps) et qui peuvent donner une bonne représentation de certaines séries chronologiques d'une part. D'autre part, il existe d'autres séries où l'un des deux premiers moments ou les deux à la fois varient dans le temps, ce qui provoque la non stationnarité, et l'on pourra pas utiliser les modèles AR, MA, ARMA pour les représenter.

Une classe des séries chronologiques dont l'un des deux premiers moments ou les deux varient avec le temps, exhibe une homogénéité dans la variation du niveau dans le sens où des parties de la série ont la même moyenne ou la même moyenne avec tendance.

Dans le cas où la non stationnarité est causée par l'existence des racines unitaires et les différences stationnaires, au lieu de modéliser le processus on modélise ses différences.

Ce changement dans le processus crée alors, un nouveau processus (processus des différences). Ainsi, la présentation du processus des différences par un modèle *ARMA* est devenu une présentation du processus initial par le modèle *ARIMA*.

1.6.1 Présentation du processus *ARIMA*

S'il existe deux polynômes Φ_1, Θ d'ordre p, q respectivement, un entier d et un bruit blanc ε_t de moyenne nulle et de variance σ^2 vérifiant :

$$\Phi_1(B) (1 - B)^d X_t = \Theta(B) \varepsilon_t$$

Alors X_t est un processus autorégressif moyenne mobile intégré (*ARIMA*).

Autrement dit, si $\Phi_1(B) = \sum_{j=0}^p \phi_{1j} B^j$ et $\Theta(B) = \sum_{j=0}^q \theta_j B^j$ avec

$$\Phi_1(B) (1 - B)^d X_t = \Theta(B) \varepsilon_t$$

tel que les racines de $\Phi_1(B)$ sont à l'extérieur du disque unitaire, le processus X_t est un *ARIMA*(p, d, q).

Les différences d'ordre d pour un processus *ARIMA*(p, d, q) représente alors, de nouveaux processus *ARMA*(p, q).

$$\begin{aligned} \Phi(B) \tilde{X}_t &= \Theta(B) \varepsilon_t \\ \iff \Phi_1(B) (1 - B)^d X_t &= \Theta(B) \varepsilon_t \\ \iff \Phi_1(B) Y_t &= \Theta(B) \varepsilon_t \quad \text{avec } Y_t = (1 - B)^d X_t \text{ et } \Phi_1(B) \neq 0, \forall B, |B| \leq 1 \end{aligned}$$

D'où Y_t représente un processus *ARMA*(p, q) stationnaire.

1.6.2 Relation entre le processus et ses différences

En posant, $Y_t = (1 - B)^d X_t \implies X_t = (1 - B)^{-d} Y_t$ et $S = (1 - B)^{-1}$

On écrit

$$X_t = S^d Y_t$$

Le développement fini d'ordre m est alors pour $d = 1$:

$$X_t = Y_t + Y_{t-1} + \dots + Y_{m+1} + X_m$$

Preuve.

Sachant que :

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{j=0}^{m-1} B^j = 1 + B + B^2 + \dots + B^{m-1} \\ &= \frac{1 - B^m}{1 - B} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{1}{1 - B} Y_t \\ \Rightarrow X_t &= \frac{(1 - B^{t-m})}{(1 - B)(1 - B^{t-m})} Y_t \\ \Rightarrow X_t &= \frac{S_{t-m}}{(1 - B^{t-m})} Y_t \end{aligned}$$

On trouve

$$(1 - B^{t-m}) X_t = S_{t-m} Y_t$$

D'où le processus X_t s'écrit en tant que somme de nombre fini de termes d'un processus stationnaire plus une valeur initiale X_m . ■

1.6.3 Formes explicites du processus ARIMA

En ce qui concerne la présentation du processus ARIMA, on peut considérer trois formes explicites pour le modèle général où chacune de ces formes présente un aspect spécial utile dans l'un des problèmes statistiques, où l'actuelle valeur du processus peut s'exprimer :

1. en fonction des précédentes valeurs du processus et l'actuelle valeur du bruit blanc, ainsi que ses précédentes valeurs $X_t = H(X_{t-i}, \varepsilon_t, \varepsilon_{t-j})_{p \geq i \geq 1, q \geq j \geq 1}$.
2. En fonction de l'actuelle valeur du processus et les précédentes valeurs du bruit blanc $X_t = H(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-i})_{i \geq 1}$.
3. En fonction des précédentes valeurs du processus et de l'actuelle valeur du bruit blanc $X_t = H(X_{t-i}, \varepsilon_t)_{q \geq i \geq 1}$.

1.6.3.1 Forme d'équation différentielle du modèle

Dans cette forme, on exprime les X_t en fonction des X_{t-j} et ε_{t-k} avec $j \geq 1$ et $k \geq 0$, ce qui donne la représentation suivante :

$$\Phi_1(B)(1 - B)^d X_t = \Theta(B)\varepsilon_t \quad (1.17)$$

$$\text{avec } \Phi_1(B) = \sum_{j=0}^q \phi_{1j} B^j$$

$$\text{et } \Theta(B) = \sum_{j=0}^q \theta_j B^j$$

$$\text{et } \Phi(B) = \Phi_1(B)(1 - B)^d = \sum_{i=0}^{p+d} \varphi_i B^i$$

Ou sous forme plus explicite selon la relation

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \dots + \varphi_{p+d} X_{t-p-d} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

1.6.3.2 Forme du processus en fonction du bruit blanc

On sait que tout modèle linéaire peut être écrit sous la forme :

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \quad (1.18)$$

et puisque le processus ARIMA est un modèle linéaire, on peut alors le représenter sous la forme précédente qui est elle même celle d'un processus en fonction du bruit blanc.

- **Expression générale des poids ψ_j**

En écrivant :

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} X_t = \Psi(B)\varepsilon_t \\ \Phi(B)X_t = \Phi(B)\Psi(B)\varepsilon_t \end{cases} & (1.19) \\
\Rightarrow & \Phi(B)\Psi(B)\varepsilon_t = \Theta(B)\varepsilon_t \\
\Rightarrow & \Phi(B)\Psi(B) = \Theta(B) \\
\Rightarrow & \left(\sum_{j=0}^{p+d} \varphi_j B^j \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k B^k \right) = \sum_{i=0}^q \theta_i B^i \\
\Rightarrow & \sum_{j=0}^{p+d} \sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k \varphi_j B^{j+k} = \sum_{i=0}^q \theta_i B^i
\end{aligned}$$

et en généralisant les coefficients similaires des deux polynômes terme à terme, on trouve :

$$\psi_j = \varphi_1 \psi_{j-1} + \varphi_2 \psi_{j-2} + \dots + \varphi_{p+d} \psi_{j-p-d} - \theta_j$$

Sachant que $\psi_0 = 1, \psi_j = 0 \quad \forall j \leq 0$ et $\theta_j = 0 \quad \forall j \geq q + 1$

- Forme tronquée du modèle de choc aléatoire

La forme d'équation différentielle du modèle *ARIMA* étant :

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

C'est une équation différentielle de solution :

$$X_t = C_k(t - k) + I_k(t - k) \quad (1.20)$$

Où $C_k(t - k)$ est une solution générale de l'équation :

$$\Phi(B)C_k(t - k) = 0$$

et où $I_k(t - k)$ est une fonction quelconque, vérifiant la relation :

$$\begin{aligned}
\Phi(B)I_k(t - k) &= \Theta(B)\varepsilon_t \\
\Rightarrow I_k(t - k) &= \sum_{j=0}^{t-k-1} \psi_j \varepsilon_{t-j} \quad \forall t \geq k + 1
\end{aligned}$$

D'où

$$X_t = \sum_{j=0}^{t-k-1} \psi_j \varepsilon_{t-j} + C_k(t-k)$$

- La fonction complémentaire en tant qu'espérance conditionnelle

Une des propriétés de la fonction complémentaire C_k , est qu'elle varie en changeant d'origine k :

$$C_k(t-k) = C_{k-m}(t-k+m) + \sum_{j=k-m+1}^k \psi_{t-j} \varepsilon_j$$

Preuve. D'après la relation 1.18 on a :

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{t-k-1} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{j=t-k}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \quad (1.21)$$

Or la représentation $\varphi(B)X_t = \theta(B)\varepsilon_t$ est une équation différentielle de solution :

$$X_t = C_k(t-k) + \sum_{j=0}^{t-k-1} \psi_j \varepsilon_{t-j} \quad (1.22)$$

D'où à partir d'une comparaison des relations 1.21 et 1.22 on a :

$$C_k(t-k) = \sum_{j=t-k}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \quad (1.23)$$

Or, la relation 1.18 peut s'écrire sous la forme :

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{t-k-1} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{j=t-k}^{t-k+m-1} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{j=t-k+m}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \quad (1.24)$$

On tire à partir de 1.23 et 1.24

$$C_k(t-k) = C_{k-m}(t-k+m) + \sum_{j=t-m+1}^k \psi_{t-j} \varepsilon_j \quad (1.25)$$

Il en résulte que C_k change avec l'origine k . ■

Une autre propriété fournie par la forme tronquée est celle que la fonction complémentaire coïncide avec l'espérance conditionnelle de X_t sachant X_k et l'on a :

$$E(X_t | X_k) = C_k(t - k)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} E(X_t | X_k) &= E\left(C_k(t - k) + \sum_{j=0}^{t-k-1} \psi_j \varepsilon_{t-j} \mid \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{k-j}\right) \\ &= E(C_k(t - k) \mid \{\varepsilon_{k-j}; j \geq 0\}) + \sum_{j=0}^{t-k-1} \psi_j E(\varepsilon_{t-j} \mid \{\varepsilon_{k-j}; j \geq 0\}) \\ &= C_k(t - k) \quad \text{car } \varepsilon_t \text{ iid } \rightsquigarrow N(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

■

1.6.3.3 Forme inversée du modèle

La forme inversée du modèle est l'expression du bruit blanc en fonction des termes du processus qui s'écrit :

- **L'expression général des $\{\pi_j\}_{j \geq 0}$**

Partant de :

$$\begin{cases} \Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \Pi(B)X_t \end{cases} \quad (1.26)$$

Après substitution, on obtient

$$\begin{aligned} \Phi(B)X_t &= \Theta(B)\Pi(B)X_t \\ \iff \Phi(B) &= \Theta(B)\Pi(B) \\ \iff 1 - \sum_{j=1}^{p+d} \varphi_j B^j &= \left(1 - \sum_{k=1}^q \theta_k B^k\right) \left(1 - \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i B^i\right) \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\pi_j = \theta_1 \pi_{j-1} + \theta_2 \pi_{j-2} + \dots + \theta_q \pi_{j-q} + \varphi_j \quad \text{pour } j > 0$$

avec $\pi_j = 0, \forall j < 0, \varphi_j = 0, \forall j > p + d$

Or, pour $j > p + d \wedge q$ les poids π_j représentent les solutions de l'équation différentielle :

$$\Theta(B)\pi_j = 0$$

Remarque 12 *Le processus auto régressif moyenne mobile ARMA possède les trois représentations précédentes en remplaçant seulement, les $\varphi_j, j \geq 0$ par les $\phi_j, j \geq 0$.*

1.7 Conclusion

Dans ce premier chapitre nous avons présenté les notions et préliminaires de bases et quelques notations utilisés en séries chronologiques, nous présentons les processus linéaires stationnaires ainsi que les fonctions d'autocovariance et la fonction d'autocorrélation.

Dans le chapitre suivant, nous allons aborder une classe importante des processus, qui est les processus à mémoire longue.

Chapitre 2

Processus à mémoire longue

Sommaire

| | |
|---|----|
| 2.1 Introduction | 22 |
| 2.2 Processus à mémoire longue..... | 23 |
| 2.3 La mémoire longue..... | 24 |
| 2.4 Les processus ARFIMA..... | 29 |
| 2.5 Quelques exemples de processus à mémoire longue.. | 42 |
| 2.6 Conclusion..... | 45 |

2.1 Introduction

L'étude des modèles à « longue mémoire » et leurs applications constituent actuellement un des domaines populaires de la recherche statistique.

Depuis une vingtaine d'années, la littérature est abondante et riche en résultats. On peut citer les ouvrages généraux de Beran (1994), Deniau, Doukhan, Oppenheim et Renault (2000), Doukhan, Oppenheim et Taqqu (2003) et Robinson (2003). Les domaines d'applications utilisant ces modèles n'ont cessé de se développer ces dernières années, touchant des domaines variés. Citons quelques travaux couvrant un large spectre : Hurst (1951), Hosking (1984) en hydrologie, Mandelbot (1962), Lo (1991), Willinger, Taqqu et Tevelevsky (1999) en finance, Hassler et Wolters (1995) en macroéconomie, Graf (1983), Beran et Terrin (1996) en géophysique, Taqqu, Willinger, Sherman et Wilson (1997) en télécommunications.

D'autres domaines d'applications plus récents ont fait également l'objet de la modélisation à « longue mémoire » : la psychologie, Wagennakers, Farrel et Ratcli (2004), Tore, Delignieers et Lemoine (2006) et la démographie, Gil-Alana (2003) et Mishra (2008).

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à une classe de processus à mémoire longue dont la fonction d'autocovariance varie régulièrement à l'infini, et nous nous intéressons principalement au plus classique des modèles utilisés dans un cadre paramétrique le modèle $ARFIMA(p; d; q)$, qui est une extension des modèles $ARIMA$; ces modèles possèdent un pôle fractionnaire au point $z = 1$ qui introduit une structure de vraisemblance à longue portée. Une autre classe de modèle, moins populaire, le mouvement brownien fractionnaire noté FBM et le bruit Gaussien fractionnaire FGN .

2.2 Processus à mémoire longue

Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité, T un ensemble d'indices et (E, ε) un espace mesurable. On appelle processus aléatoire une famille $X = \{X_t, t \in T\}$, de variables aléatoires à valeurs dans (E, ε) indexées par $t \in T$.

Le paramètre t ici représente le temps. Lorsque $T \subset \mathbb{Z}$, nous dirons que le processus est à temps discret ou encore que le processus est une série chronologique et lorsque $T \subset \mathbb{R}$, le processus est à temps continu. Dans la suite, on ne s'intéresse qu'aux séries chronologiques.

Quant à $(E; \varepsilon)$, on considérera tout au long de ce mémoire $(\mathbb{R}^p; B(\mathbb{R}^p))$ avec $p \geq 1$, où $B(\mathbb{R}^p)$ est la tribu de Borel de \mathbb{R}^p .

2.2.1 Décomposition de Wold

Soit X un processus stationnaire et centré. On appelle $M = \overline{Sp}\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, l'enveloppe linéaire du processus (l'adhérence dans $L^2(\Omega, F, P)$ des combinaisons linéaires finies $\sum_{i=1}^p a_i X_{t_i}$).

On note de façon similaire $M_n = \overline{Sp}\{X_t, -\infty < t \leq n\}$ et $M_{-\infty} = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} M_n$.

Pour tout n , M_n est un sous espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert M . Le processus X est dit déterministe si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, X_t appartient à $M_{-\infty}$. Ces processus sont aussi appelés processus singuliers. Ainsi, un processus sera dit purement non déterministe ou régulier si et seulement

si $M_{-\infty} = \{0\}$.

Théorème 13 (*Décomposition de Wold*). *Tout processus stationnaire X est la somme de processus régulier et de processus singulier; ces deux processus sont orthogonaux et la décomposition est unique. Ainsi, un processus stationnaire purement non déterministe peut s'écrire sous la forme*

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k Z_{t-k} \quad (2.1)$$

où $\psi_0 = 1$, $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k^2 < \infty$, $Z_t \sim BB(0, \sigma^2)$, et Z_t

2.3 La mémoire longue

D'une manière générale, un processus est appelé processus à mémoire longue si ce processus est stationnaire au sens large et si sa fonction d'autocovariance n'est pas absolument sommable.

Même s'il semble y avoir un accord général selon lequel pour avoir la mémoire longue, les séries chronologiques doivent présenter une décroissance lente de la fonction d'autocovariance, la condition $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| = \infty$ est trop générale pour pouvoir développer une théorie statistique pertinente. Certaines restrictions sont donc nécessaires sur la forme de la décroissance de la fonction d'autocovariance à l'infini. Ces restrictions peuvent porter soit directement sur la fonction d'autocovariance, soit sur les propriétés de la densité spectrale dans un voisinage de la fréquence nulle. Ces deux types de conditions ne sont pas équivalentes.

Définition 14 *Un processus stationnaire $(X_t)_{t \geq 0}$ de fonction d'auto-covariance γ_X est à mémoire longue au sens de la covariance si :*

$$\gamma_X(h) \sim L_1(h)^{2d-1}, \text{ quand } h \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

où d est le paramètre de mémoire, $L_1(\cdot)$ est une fonction à variation lente à l'infini, *i.e* si pour tout $a > 0$, $\lim_{h \rightarrow \infty} L_1(ah)/L_1(h) = 1$ et $d < 1/2$.

Une autre définition de la longue mémoire très utilisée dans le domaine spectral est donnée par :

Définition 15 *Un processus stationnaire $(X_t)_{t \geq 0}$ de densité spectrale f_X est un processus à mémoire longue si*

$$f_X(\lambda) \sim |\lambda|^{-2d} L_2(1/|\lambda|) \quad \text{quand } \lambda \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

où $L_2(\cdot)$ une fonction à variation lente à l'infini et $d < 1/2$.

(Voir la définition de la densité spectrale page 49).

On remarque donc que quand $d \geq 1/2$ la fonction f_X définie en 2.3 n'est pas intégrable et ne correspond donc pas à la densité spectrale d'un processus stationnaire.

Ce cas sera exploré dans la suite à travers l'introduction des $M(d)$ processus et la notion de densité spectrale généralisée introduite par Yaglom [1958] (voir réf[14]).

Une troisième définition est basée directement sur la décomposition de Wold du processus 2.1.

Définition 16 *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus régulier et soit $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$ où $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ est un bruit blanc sa décomposition de Wold. Nous dirons que le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est à mémoire longue si*

$$\psi_j \sim j^{d-1} L_3(j), \text{ quand } j \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

où $L_3(\cdot)$ est une fonction à variation lente à l'infini et $d < 1/2$.

Ces trois définitions de la longue mémoire ne sont pas équivalentes à moins de rajouter des hypothèses supplémentaires.

Théorème 17 *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stationnaire régulier de décomposition de Wold donné en 2.1*

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k Z_{t-k}$$

où $\{Z_t\}$ est une sequence de bruit blanc. Si on suppose que $0 < d < 1/2$ alors

- Si le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ satisfait 2.4 alors il satisfait aussi 2.2.
- Si la fonction $L1(\cdot)$ est quasi-monotone et à variation lente, alors 2.2 entraîne 2.3.

La preuve se trouve dans [Palma, 2007, Page 40]. Un ensemble de définitions alternatives sont obtenues en imposant des conditions supplémentaires sur le choix des fonctions à variations lentes $L1()$; $L2()$ et $L3()$. Voir Palma [2007] et les références qui s’y trouvent.

Nous opérons dans la suite pour une classe plus générale de processus pas nécessairement stationnaires mais qui peuvent être rendus stationnaires en leur appliquant un nombre fini de différentiation. Cette classe de processus comprend à la fois les processus à longue mémoire, les processus à racine unité et les processus à courte mémoire. Nous appelons dans la suite ce type de processus $M(d)$ où d est le paramètre de mémoire.

2.3.1 Définition des $M(d)$ Processus

Soit $X = \{X_t, t \in Z\}$ un processus à valeurs réelles pas nécessairement stationnaire.

On note par I l’opérateur identité et par B l’opérateur retard définis respectivement par

$$[IX]_t \stackrel{def}{=} X_t \text{ et } [BX]_t \stackrel{def}{=} X_{t-1}, \quad t \in Z \quad (2.5)$$

Nous définissons récursivement pour un entier $K \geq 1$, $B^K = B \circ B^{K-1}$. En outre, notons

$[\Delta X]_t$ l’opérateur de différentiation :

$$[\Delta X]_t \stackrel{def}{=} X_t - X_{t-1}, \quad t \in Z \quad (2.6)$$

De même, nous définissons récursivement, pour un entier $K \geq 1$, la différentiation d’ordre K comme : $\Delta^K = \Delta \circ \Delta^{K-1}$.

Définition 18 *Un processus X est dit stationnaire au K – ième ordre si le processus*

$([\Delta^K X]_t)$ est stationnaire.

Soit f une fonction positive sur $[-\pi, \pi]$ symétrique tel qu'il existe un entier K satisfaisant la condition,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |1 - e^{-i\lambda}|^{2K} f(\lambda) d\lambda < \infty$$

Définition 19 *Le processus X admet comme densité spectrale généralisée f si $([\Delta^K X]_t)$ est stationnaire.*

$$f_K(\lambda) = |1 - e^{-i\lambda}|^{2K} f(\lambda) \quad (2.7)$$

Cette classe de processus inclut non seulement les processus à mémoire courte et les processus à mémoire longue, mais également les processus ARIMA et les processus ARFIMA .

Nous allons maintenant définir les processus admettant le paramètre de mémoire d , plus simplement les *processus* $M(d)$ (nous parlerons aussi de $M(d)$ -processus). On définira d'abord cette notion pour les processus stationnaires, où $d < 1/2$ et ensuite on étendra cette définition pour $d \in \mathbb{R}$.

Soit f^* une fonction positive, paire, bornée sur $(-\pi, \pi)$ et minorée par une constante strictement positive dans un voisinage de l'origine. Un processus stationnaire X est un processus $M(d)$ de paramètre de mémoire d , $-\infty < d < 1/2$ et de densité spectrale courte mémoire f^* , si sa densité spectrale est donnée par :

$$f(\lambda) \stackrel{def}{=} |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d} f^*(\lambda), \quad \lambda \in (-\pi, \pi). \quad (2.8)$$

Pour $d \geq 1/2$, on considère les processus non-stationnaires et on étend la définition précédente, valide pour les processus stationnaires de la manière suivante.

Définition 20 On dit que le processus X de paramètre de mémoire $d \in \mathbb{R}$ est un $M(d)$ -processus de densité spectrale courte mémoire f^* , si f^* est positive, paire, bornée sur $(-\pi, \pi)$ et minorée par une constante strictement positive dans un voisinage de l'origine et pour n'importe quel entier $K > d - 1/2$, son $K - i\text{ème}$ ordre de différentiation $([\Delta^K X]_t)$

est stationnaire de densité spectrale

$$f \Delta^K X(\lambda) = |1 - e - i\lambda|^{2(K-d)} f^*(\lambda), \quad \lambda \in (-\pi, \pi) \quad (2.9)$$

Nous excluons par cette définition la présence de composantes à variations lentes dans la densité spectrale à la fréquence nulle. Observons que $f \Delta^K X(\lambda)$ dans 2.9 est intégrable

si $-(K - d) < 1/2$. Observons q'un processus $M(d)$ est stationnaire uniquement si $d < 1/2$.

Pour $d > 1/2$, un processus $M(d)$ n'est pas stationnaire, mais nous pouvons néanmoins lui associer *la densité spectrale généralisée*

$$f_X(\lambda) = |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d} f^*(\lambda) \quad (2.10)$$

Le processus X sera dit :

- à longue mémoire si $0 < d < 1/2$,
- à courte mémoire si $d = 0$,
- à mémoire négative si $d < 0$; dans ce cas, le processus est non inversible si $d < -1/2$,
- Si $d > 1/2$, le processus est non stationnaire.

Remarque 21 La définition des $M(d)$ -processus a été proposée par Hurvich and Ray [1995] (voir réf[15]). Une définition alternative pour les $M(d)$ -processus a été introduite par Robinson [1994] et utilisée plus récemment par d'autres auteurs (voir Tanaka [1999] (voir réf[16]), Shimotsu and Phillips [2005] (voir réf[17]), Shimotsu and Phillips [2006] (voir réf[18])). Leur définition ne repose plus sur le fait qu'il faille différencier plusieurs fois la série mais

plutôt sur une troncature de l'opérateur d'intégration/différentiation fractionnaire. Les processus ainsi construits ne sont plus stationnaires mais asymptotiquement stationnaires. Les deux approches présentent des avantages et des inconvénients.

Le paramètre de mémoire d joue un rôle très important dans la définition des $M(d)$ -processus car il caractérise le comportement de la densité spectrale généralisée $f(\lambda)$ aux basses fréquences. En effet, si on suppose que f^* est continue en zéro, alors (2.10) implique que $f(\lambda) \sim |\lambda|^{-2d} f^*(0)$ quand $\lambda \rightarrow 0$.

Permettre à d de prendre des valeurs non entières produit un changement fondamental dans la structure de corrélation d'un processus fractionnaire comparativement à la structure de corrélation d'une série chronologique standard telle que les modèles *ARMA*. L'étude des $M(d)$ -processus a récemment attiré l'attention parmi les théoriciens et les praticiens. En économétrie, les $M(d)$ -processus avec $d > 0$ fournissent des modèles pertinents pour de nombreuses séries macro-économiques (inflation, taux d'intérêt, taux de change, qui ne sont pas stationnaires . . .) aussi bien que certaines séries financières (modélisation de la volatilité des rendements des actifs financiers, modèles de taux,...).

2.4 Les processus *ARFIMA*

Dans cette section, nous étudions les processus *ARFIMA* qui sont les modèles les plus simples présentant la longue mémoire.

Le processus à mémoire longue très répandu est le processus autorégressif fractionnaire intégré et à moyenne mobile dit processus *ARFIMA*($p; d; q$) où p représente le nombre de coefficient de la partie *AR*, d le paramètre de mémoire et q le nombre de coefficients de la partie *MA*. Ce processus est devenu très populaire depuis son introduction au début des années 1980, principalement à cause de sa structure mathématique relativement simple et de ses nombreux points communs avec les modèles *ARMA*, qui restent le modèle prédominant pour l'analyse des séries chronologiques linéaires. Le processus a été originellement proposée par Granger and Joyeux [1980] et

Hosking [1981] comme une extension des modèles *ARIMA* au cas où les valeurs de d appartiendrait à $(-1/2; 1/2)$.

L'approche *ARFIMA* permet en ce sens d'atténuer les contraintes pesant sur les paramètres du modèle qui devaient modéliser le comportement à la fois de court terme et de long terme de la série. Avec les processus *ARFIMA*, le comportement de court terme des séries peut être saisi par les paramètres *ARMA* et le comportement de court terme et long terme par le paramètre d'intégration fractionnaire d .

2.4.1 Le processus *ARFIMA*(0, d , 0)

Le processus *ARFIMA*(0, d , 0) noté (X_t) encore appelé bruit fractionnaire $FN(d, \sigma^2)$ où d est le paramètre de mémoire ou paramètre de différenciation fractionnaire et σ^2 la variance de l'innovation est une classe particulière de processus *ARFIMA*(p, d, q) dans laquelle les polynômes $\phi(B)$ et $\theta(B)$ des parties *AR* et *MA* sont réduits à l'opérateur identité I . Ainsi, il se définit par

Définition 22 soit $d \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, (X_t) est un processus *ARFIMA*(0, d , 0) s'il satisfait l'équation

$$(I - B)^d X_t = \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \rightsquigarrow bb(0, \sigma^2) \text{ et } B \text{ est l'opérateur retard } (B^j X_t = X_{t-j})$$

Remarque 23 On a

$$(I - B)^{-d} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j$$

où

$$\begin{aligned} \pi_j &= \frac{d(d-1)\dots(d-j+1)}{j!} \\ &= \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+d)\Gamma(-d)} \\ &= \prod_{0 \leq k \leq j} \frac{k-1-d}{k}, j = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

$\Gamma(x)$ étant la fonction Gamma définie par

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, & \text{si } x > 0 \\ \infty, & \text{si } x = 0 \\ x^{-1} \Gamma(1+x), & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit inversible s'il existe une suite de constantes (π_j) telle que $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j^2 < \infty$ et

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}$$

Pour un processus fractionnaires $(I - B)^{-d} X_t = \varepsilon_t$, on a :

$$\pi_j = \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d) \Gamma(j+d+1)}$$

Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit causal s'il existe une suite de constantes (ψ_j) telle que $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ et

$$\begin{aligned} X_t &= (I - B)^{-d} \varepsilon_t \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \end{aligned}$$

Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus fractionnaire ARIMA $(0, d, 0)$, on a le développement en série de

$$(I - B)^{-d} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$$

où

$$\begin{aligned} \psi_j &= \frac{(-d)(-d-1)\dots(-d-j+1)}{j!} (-j)^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \\ &= \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d) \Gamma(j+1)} \\ &= \prod_{0 \leq k \leq j} \frac{k-1+d}{k}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

et

$$\frac{\psi_j}{\psi_{j-1}} = \frac{(d+j+1)}{j}$$

où

$$\psi_j = \frac{(d+j-1)}{j} \psi_{j-1}$$

Le processus $(I - B)^d X_t = \varepsilon_t$ est causal et inversible si et seulement $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$.

a. Fonction d'autocovariance $\gamma(h)$ d'un processus ARIMA (0,d, 0)

Soit (X_t) un processus ARIMA(0, d, 0), on a

$$\nabla^d X_t = \varepsilon_t \Leftrightarrow \nabla^{-d} \varepsilon_t = X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

Il est clair que le processus (X_t) est centré et on a pour $h \geq 0$,

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= E(X_t X_{t+h}) - E(X_t) E(X_{t+h}) \\ \gamma(h) &= E(X_{t+h} X_t) \\ &= E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{t+h-k}\right) \\ &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h} \\ \gamma(h) &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d)} \frac{\Gamma(j+h+d)}{\Gamma(j+h+1)\Gamma(d)} \end{aligned}$$

b. Densité spectrale d'un processus ARIMA (0, d, 0)

On a

$$\nabla^d X_t = \varepsilon_t$$

où (ε_t) est un processus de bruit blanc de variance σ^2 .

$$\begin{aligned}
X_t &= \nabla^{-d} \varepsilon_t \\
&= (I - B)^{-d} \varepsilon_t \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \\
&= \psi(B)
\end{aligned}$$

(X_t) est stationnaire de deuxième ordre, donc la densité spectrale $f_X(\lambda)$ du processus (X_t) s'écrit :

$$f_X(\lambda) = |\psi(e^{-i\lambda})|^2 f_\varepsilon(\lambda)$$

où

$$f_\varepsilon(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

est la densité spectrale du processus de bruit blanc (ε_t) , donc

$$\begin{aligned}
f_X(\lambda) &= |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d} \frac{\sigma^2}{2\pi} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \cos^2 \frac{\lambda}{2} + \sin^2 \frac{\lambda}{2} - \left(\cos 2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) - i \sin 2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right) \right|^{-2d}
\end{aligned}$$

comme

$$\begin{aligned}
\cos \lambda &= \cos 2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) = \cos^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) \\
\sin \lambda &= \sin 2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) = 2 \cos \left(\frac{\lambda}{2} \right) \sin \left(\frac{\lambda}{2} \right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
f_X(\lambda) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \cos^2 \frac{\lambda}{2} + \sin^2 \frac{\lambda}{2} - \cos^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) + i 2 \cos \frac{\lambda}{2} \sin \frac{\lambda}{2} \right|^{-2d} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| 2 \sin \frac{\lambda}{2} \left(i \cos \frac{\lambda}{2} + \sin \frac{\lambda}{2} \right) \right|^{-2d} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| 2 \sin \frac{\lambda}{2} \right|^{-2d} \left| \sin \frac{\lambda}{2} + i \cos \frac{\lambda}{2} \right|^{-2d} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| 2 \sin \frac{\lambda}{2} \right|^{-2d}
\end{aligned}$$

donc la fonction d'autocovariance $\gamma(h)$ s'écrit

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} f_X(\lambda) d\lambda \\ \gamma(h) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| 2 \sin \frac{\lambda}{2} \right|^{-2d} d\lambda \\ &= \frac{\sigma^2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(h\lambda) \left(2 \sin \frac{\lambda}{2} \right)^{-2d} d\lambda\end{aligned}$$

et en utilisant l'égalité

$$\int_0^{\pi} \cos(kx) \sin^{n-1}(x) dx = \frac{\pi \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \Gamma(n+1) 2^{1-n}}{n \Gamma\left(\frac{n+k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)}$$

on obtient

$$\gamma(h) = \frac{(-1)^h \Gamma(1-2d)}{\Gamma(h-d+1) \Gamma(1-h-d)} \sigma^2, \quad h = 0, 1, 2$$

La mémoire d'un processus peut-être caractérisée par les propriétés de sa fonction d'autocovariance ou de sa densité spectrale.

1. Un processus est dit à longue mémoire si

$$\begin{aligned}\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\gamma(j)| &= +\infty \\ f(0) &= +\infty.\end{aligned}$$

L'autocovariance entre des observations éloignées du processus n'est pas négligeable.

2. Un processus à courte mémoire sera caractérisé par la propriété suivante

$$\begin{aligned}\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\gamma(j)| &< +\infty \\ f(0) &< +\infty.\end{aligned}$$

Si $d \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ alors il existe un unique processus stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ solution de $(I - B)^{-d} X_t = \varepsilon_t, \forall t \in \mathbb{Z}$. Il est

défini par

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}$$

où

$$b_j = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)}$$

Soit $f, \gamma, \text{corr}, \text{corrpart}$ les fonctions de la densité spectrale, autocovariance, autocorrélation partielle associées au processus (X_t) , on a alors

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| 2 \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right|^{-2d} \end{aligned}$$

$$\gamma(h) = \frac{(-1)^h \Gamma(1-2d)}{\Gamma(1+h-d)\Gamma(1-h+d)} \sigma^2,$$

$$\text{corr}(h) = \frac{\Gamma(h+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(h-d+1)\Gamma(d)} = \prod_{0 < k \leq h} \frac{k-1+d}{k-d}, \quad h = 1, 2, \dots,$$

$$\text{corrpart}(h) = d/(h-d), \quad h = 1, 2, \dots,$$

Preuve. Montrons que $d \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\Leftrightarrow$ Il existe un unique processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ solution de $(I - B)^{-d} X_t = \varepsilon_t, \forall t \in \mathbb{Z}$ tel que

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}.$$

1^{ere} Cas : $0 < d < \frac{1}{2}$

Les coefficients b_j sont ceux du développement de $(1-z)^{-d}$. Ils appartiennent à L^2 ; et d'où $\sum_{j=0}^{\infty} b_j e^{-i\lambda j}$ converge dans $L^2(]-\pi, \pi[, \lambda)$.

De plus, par un théorème de Carleman, cette série de fonctions converge ponctuellement presque partout vers $(1 - e^{-i\lambda})^{-d} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}$ converge dans

L^2 et est stationnaire.

Si ε_t est représenté par

$$\varepsilon_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dW(\lambda)$$

où $\{W(\lambda), -\pi < \lambda \leq \pi\}$ est un processus à valeurs complexes et à accroissements orthogonaux, alors

$$(I - B)^{-d} \varepsilon_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} (1 - e^{-i\lambda})^{-d} dW(\lambda)$$

Si $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est la suite des coefficients du développement $(I - Z)^{-d}$, alors $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l^1$. On peut

appliquer l'opérateur $(I - B)^d$ au processus $(I - B)^{-d} \varepsilon_t$ et

$$\begin{aligned} (I - B)^d (I - B)^{-d} \varepsilon_t &= \int_{-\pi}^{\pi} (1 - e^{-i\lambda})^d (1 - e^{-i\lambda})^{-d} e^{i\lambda t} dW(\lambda) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dW(\lambda) \\ &= \varepsilon_t \end{aligned}$$

Le processus $X_t = (I - B)^{-d} \varepsilon_t$ est donc bien solution du problème.

Montrons l'unicité de cette solution. Soit $\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dZ_Y(\lambda)$ une autre solution stationnaire, où $\{Z_Y(\lambda), -\pi < \lambda \leq \pi\}$ est un processus à valeurs complexes et à accroissements orthogonaux.

$$(I - B)^d Y_t = \varepsilon_t$$

Or la solution calculée est $X_t = (I - B)^{-d} \varepsilon_t$

$$\begin{aligned} X_t &= (I - B)^{-d} (I - B)^d Y_t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} (1 - e^{-i\lambda})^{-d} (1 - e^{-i\lambda})^d dZ_Y(\lambda) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dZ_Y(\lambda) \\ &= Y_t \end{aligned}$$

2^{eme} Cas : $-\frac{1}{2} < d < 0$

La démonstration est similaire à cela près qu'on applique à ε_t d'abord le filtre dans l^1 (obtenant ainsi un processus à densité spectrale continue bornée) puis le filtre inverse à coefficients dans l^2 .

Cas $d = 0$: Il ne présente pas d'intérêt.

La densité spectrale de $(X_t)_t$ se calcule directement par

$$\begin{aligned} f_X(\lambda) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - e^{-i\lambda}|^{2d} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| 2 \sin \frac{\lambda}{2} \right|^{-2d} \end{aligned}$$

d'où l'autocovariance :

$$\forall h \in \mathbb{N}, \text{Cov}(h) = \frac{(-1)^h \Gamma(1 - 2d)}{\Gamma(1 + h - d) \Gamma(1 - h + d)} \sigma^2.$$

L'application de l'algorithme de Durbin -Levinson donne pour l'autocorrélation partielle d'ordre h :

$$\begin{aligned} \text{Corrpart}(h) &= \frac{\Gamma(h - d) \Gamma(1 - d)}{\Gamma(d) \Gamma(h - d + 1)} \\ &= \frac{d}{h - d}. \end{aligned}$$

■

2.4.2 Le processus ARFIMA(p, d, q)

Soit $d \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus ARFIMA (p,d,q) si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une solution stationnaire de l'équation

$$\phi(B)(I - B)^{-d} X_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (2.11)$$

où ϕ et θ sont des polynômes premiers entre eux de degré respectif p et q et ε_t un processus de bruit blanc $(0, \sigma^2)$.

On voit immédiatement que $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus ARFIMA(p, d, q) si et seulement si $Y_t = (I - B)^d X_t$ est un processus ARMA(p, q).

On peut remarquer aussi, que si de plus $\theta(z)$ n'a pas de zéro dans le disque unité fermé, alors le processus $Y_t = \phi(B) \theta^{-1}(B) X_t$ vérifie $(I - B)^d Y_t = \varepsilon_t$, et $\phi(B) X_t = \theta(B) Y_t$, on peut donc voir un processus ARFIMA (p, d, q) comme un processus "ARMA (p, q)" conduit par un bruit fractionnaire.

a. Propriétés d'un processus ARFIMA (p,d,q)

Soit $d \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, ϕ et θ deux polynômes sans racines communes.

1. Si $\phi(z) \neq 0$ pour chaque $|z| = 1$, alors il existe une unique solution donnée par $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j (1-B)^{-d} \varepsilon_{t-j}$ où $\psi(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j = \frac{\theta(z)}{\phi(z)}$.
2. La solution de (X_t) est causale si et seulement si $\phi(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$.
3. La solution est inversible si et seulement si $\theta(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$.
4. Si la solution $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est causale et inversible, alors si $d \neq 0$, la fonction d'autocorrélation

$$\rho(h) = o(h^{2d-1}) \quad \text{quand } h \rightarrow \infty$$

et sa densité spectrale

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{\theta(e^{-i\lambda})}{\phi(e^{-i\lambda})} \right|^2 |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d} \\ &\underset{\lambda \rightarrow 0}{\simeq} \frac{\sigma^2}{2\pi} \left(\frac{\theta(1)}{\phi(1)} \right) \lambda^{-2d}. \end{aligned}$$

L'existence et l'unicité d'une solution $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ d'un modèle $ARIMA(p; d; q)$ se montrent de manière analogue à ceux des modèles $ARMA$ classiques et à ceux d'un processus fractionnaire $ARIMA(0, d, 0)$ du Théorème 1 précédent.

Montrons les propriétés de la fonction d'autocorrélation $\rho(h)$

Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est causale $\phi(z) \neq 0, |z| \leq 1$, on écrit :

$$X_t = \psi(B) Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Y_{t-j}$$

où

$$Y_t = (1-B)^{-d} \varepsilon_t$$

et

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j \\ &= \frac{\theta(z)}{\phi(z)}. \end{aligned}$$

Soit $\gamma_Y(\cdot)$ la fonction d'autocovariance de (Y_t) et $\gamma_X(\cdot)$ celle du processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$. On a :

$$\begin{aligned}\gamma_X(h) &= \text{cov}(X_{t+h}, X_t) = E(X_{t+h}X_t) - E(X_{t+h})E(X_t) \\ E(X_{t+h}, X_t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\sum_{j=-n}^n \psi_j Y_{t+h-j} \right) \left(\sum_{k=-n}^n \psi_k Y_{t-k} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n \sum_{k=-n}^n \psi_j \psi_k E(Y_{t+h-j} Y_{t-k})\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}E(Y_{t+h-j} Y_{t-k}) &= \text{cov}(Y_{t+h-j}, Y_{t-k}) + E(Y_{t+h-j})E(Y_{t-k}) \\ &= \gamma_Y(h-j+k) + [E(Y_t)]^2,\end{aligned}$$

donc

$$E(X_{t+h}X_t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_k [\gamma_Y(h-j+k) + [E(Y_t)]^2]$$

et

$$\begin{aligned}\gamma_X(h) &= \text{cov}(X_{t+h}, X_t) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} \gamma_Y(h-j+k) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} \gamma_Y(h-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}(k) \gamma_Y(h-k)\end{aligned}$$

où $\tilde{\gamma}(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}$ est la fonction d'autocovariance d'un processus *ARMA* dont le bruit blanc a pour variance $\sigma^2 = 1$. Donc

$$|\tilde{\gamma}(k)| < cr^k$$

avec $0 < r < 1$ (Comportement de la fonction d'autocovariance d'un processus *ARMA* classique).

Ainsi, la quantité.

$$h^{1-2d} \sum_{|k| > \sqrt{h}} |\tilde{\gamma}(k)| \longrightarrow 0 \text{ quand } h \longrightarrow \infty.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} h^{1-2d} \tilde{\gamma}(h) &= h^{1-2d} \sum_{|k| > \sqrt{h}} \tilde{\gamma}(k) \gamma_Y(h-k) \\ &\quad + h^{1-2d} \sum_{|k| \leq \sqrt{h}} \tilde{\gamma}(k) \gamma_Y(h-k) \end{aligned}$$

Le premier terme du deuxième membre tend vers zéro car $\gamma_Y(h-k)$ reste toujours bornée.

Or

$$\begin{aligned} \gamma_Y(h-k) &= o\left((h-k)^{2d-1}\right) \\ &= o\left(h^{2d-1}\right) \end{aligned}$$

quand $h \longrightarrow \infty$ uniformément pour tout k tel que $|k| \leq \sqrt{h}$.

On en déduit que $h^{2d-1} \tilde{\gamma}(h)$ converge vers $C \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}(k)$ quand $h \longrightarrow +\infty$.

Donc, la fonction d'autocorrélation

$$\rho(h) = o\left(h^{2d-1}\right), \text{ quand } h \longrightarrow +\infty.$$

La densité spectrale de (X_t) satisfaisant le modèle

$$X_t = \psi(B) Y_t,$$

s'écrit

$$f_X(\lambda) = |\psi(e^{-i\lambda})|^2 f_Y(\lambda)$$

où $f_X(\lambda)$ est la densité spectrale du processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Comme $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus fractionnaire ARIMA $(0, d, 0)$ vérifiant

$$(1-B)^{-d} Y_t = \varepsilon_t$$

où $\varepsilon_t \rightsquigarrow bb(0, \sigma^2)$,

par ailleurs

$$\psi(z) = \theta(z) / \phi(z)$$

ona :

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{\theta(e^{-i\lambda})}{\phi(e^{-i\lambda})} \right|^2 |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d}$$

et quand $\lambda \rightarrow 0$

$$f_X(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\simeq} \frac{\sigma^2}{2\pi} \left(\frac{\theta(1)}{\phi(1)} \right)^2 \lambda^{-2d}.$$

b.Exemple de processus ARFIMA

On représente 1000 observations simulées d'un $ARFIMA(1, d, 0)$ avec $d = 0.4$, $\phi = 0.5$ et la variance d'innovation $\sigma^2 = 1$. On observe une décroissance lente de l'auto-corrélogramme empirique.

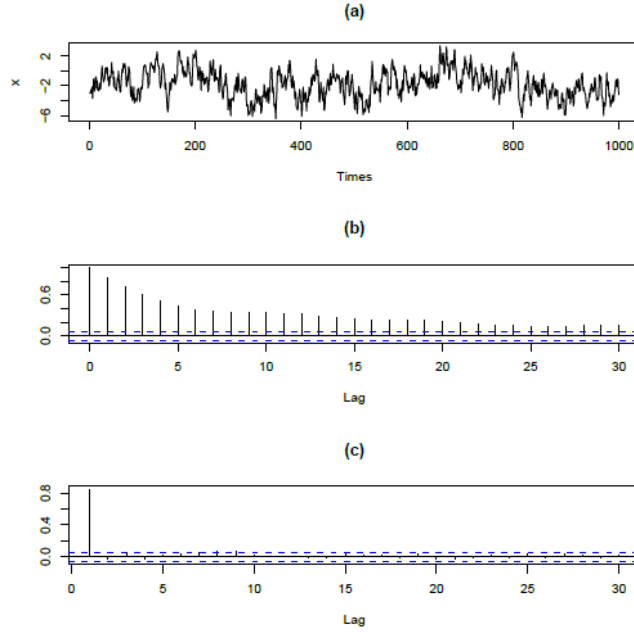


Fig. 2.1 - 1000 observations d'un processus ARFIMA(1, d, 0)

2.5 Quelques processus à mémoire longue

Dans cette section, nous étudions successivement le mouvement brownien fractionnaire (*FBM*) et le bruit Gaussien fractionnaire (*FGN*).

2.5.1 Le Mouvement Brownien fractionnaire (FBM)

Le *FBM* noté $B^H(t)$ et défini sur \mathbb{R} est un processus Gaussien à trajectoires continues centré et de fonction d'auto-covariance

$$E(B^H(t)B^H(s)) = \frac{\sigma^2}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad t, s \in \mathbb{R}$$

où $H \in (0, 1)$, est le paramètre de Hurst et σ^2 la variance d'innovation. La valeur de H détermine la nature du *FBM*. Ainsi,

- si $H = 1/2$, le processus est en fait un mouvement brownien standard ;
- si $H > 1/2$, les incréments du processus sont positivement corrélés ;
- si $H < 1/2$, les incréments du processus sont négativement corrélés.

Ce processus a été introduit par Mandelbrot and Van Ness [1968] pour expliquer le phénomène de Hurst (persistance des périodes de crue et de décrue des débits du fleuve Nil) observé par Hurst [1951] sur les données du Nil. Le *FBM* est un processus auto-similaire i.e

$B^H(at) \stackrel{l}{=} |a|^H B^H(t)$, où $\stackrel{l}{=}$ signifie égalité des lois fini-dimensionnelles. Notons $(B^H(k))$, $k \in \mathbb{Z}$, les échantillons du *FBM* $B^H(t)$, $t \in \mathbb{R}$ aux instants entiers avec $H \in (0, 1)$. Les incréments du processus $B^H(k)$ sont stationnaires ; sa densité spectrale généralisée est donnée à une constante multiplicative près par (voir Samorodnitsky and Taqqu [1994]).

$$f_{FBM}(\lambda) \stackrel{def}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda + 2k\pi|^{-2H-1}, \quad \lambda \in (-\pi, \pi)$$

On peut l'exprimer sous la forme 2.10,

$$f_{FBM}(\lambda) = |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d} f_{FBM}^*(\lambda), \quad (2.12)$$

en posant $d = H + 1/2 \in (1/2, 3/2)$ et

$$f_{FBM}^*(\lambda) = \left| \frac{2 \sin(\lambda/2)}{\lambda} \right|^{2H+1} + |2 \sin(\lambda/2)|^{2H+1} \sum_{k \neq 0} |\lambda + 2k\pi|^{-2H-1} \quad (2.13)$$

2.5.2 Le Bruit Gaussien Fractionnaire (FGN)

Un processus $X = \{X_k, k \in \mathbb{Z}\}$ est un *FGN* s'il se définit comme les incréments d'un *FBM* aux instants entiers à savoir

$$X_k = B_H(k+1) - B_H(k) \quad k \in \mathbb{Z}$$

où $(B^H(t))$ est un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in [0, 1)$.

C'est un processus Gaussien centré stationnaire dont la fonction d'auto-covariance $\gamma(h) = E(X_k X_{k+h})$ est donnée par

$$\gamma(h) \stackrel{def}{=} \frac{\sigma^2}{2} \{|h+1|^{2H} + |h-1|^{2H} - 2|h|^{2H}\} \quad h \in \mathbb{Z}_0 \quad (2.14)$$

où H et σ^2 sont définis comme précédemment. Le comportement asymptotique de la fonction d'auto-covariance γ d'un *FGN* est donné par la relation

$$\gamma(h) \sim \sigma^2 H(2H+1) h^{2H-1} \quad as \quad h \rightarrow \infty \quad (2.15)$$

quand $H \neq 1/2$. Si on note d le paramètre de mémoire, alors, $d = H - 1/2$; d'où dans le cas du *FGN*, d appartient à $(-1/2, 1/2)$ et de façon équivalente 2.15 se réécrit

$$\gamma(h) \sim \sigma^2 d(2d+1) |h|^{2d-1} \quad as \quad h \rightarrow \infty$$

Comme $\gamma(h) = 0$ pour $h \geq 1$ quand $H = 1/2$ ou de façon équivalente quand $d = 0$, le processus X_k est un bruit blanc dans ce cas. La densité spectrale du *FGN* est donnée par

$$f(\lambda) = C_H \left(2 \sin \frac{\lambda}{2}\right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\lambda + 2\pi k|^{2H+1}} \sim C_H |\lambda|^{1-2H} \quad quand \quad \lambda \rightarrow 0, \quad (2.16)$$

où C_H est une constante. Comme application, on représente 1000 observations simulées d'un *FGN* avec $\sigma^2 = 1$ et $d = 0.4$. On observe une décroissance lente de la courbe d'autocorrélogramme empirique comme attendu.

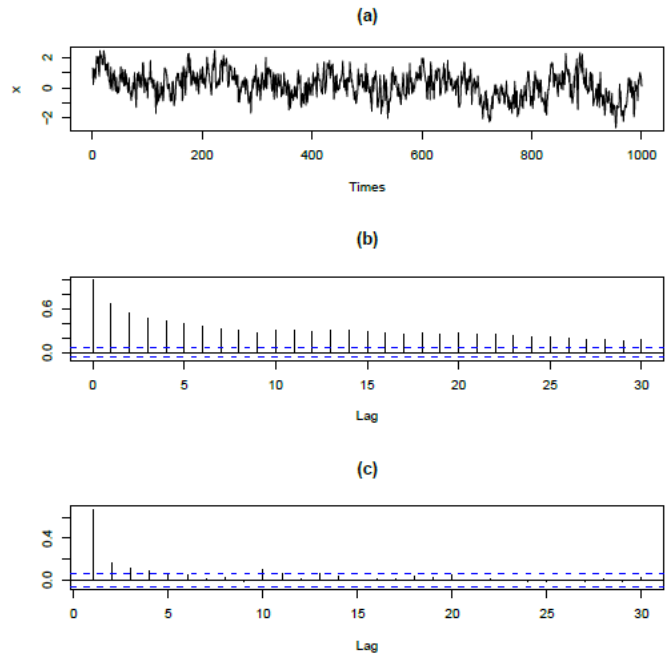


Fig. 2.2 - 1000 observations d'un FGN(0.4)

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons discuté une classe importante de processus, qui est la classe des processus à longue mémoire. Nous nous sommes intéressé en particulier au processus *ARFIMA*. Pour un premier temps, nous avons définie les $M(d)$ – *processus* admettant le paramètre de mémoire $d < 1/2$ pour les processus stationnaire, puis pour $d \in \mathbb{R}$. Par la suite nous avons donner quelques exemples de processus à mémoire longue, soit, le mouvement Brownien fractionnaire (FBM), le bruit Gaussien fractionnaire (FGN).

Chapitre 3

Analyse spectrale

Sommaire

| | | |
|-----|---|----|
| 3.1 | Introduction. | 23 |
| 3.2 | Suites et séries de Fourier | 24 |
| 3.3 | Densité spectrale | 26 |
| 3.4 | Périodogramme | 33 |
| 3.5 | Utilité de la densité spectrale | 37 |
| 3.6 | Les filtres. | 37 |
| 3.7 | Conclusion | 39 |

3.1 Introduction

Depuis de nombreuses décennies, l'analyse spectrale est un des axes majeurs du traitement des séries chronologiques. Les méthodes et les outils associés ont considérablement évolué, initialement basées sur la transformée de Fourier puis reliées à des modélisations paramétriques, ces techniques se sont adaptées pour suivre l'évolution de signaux non stationnaires. Ainsi, l'analyse spectrale continue d'intéresser les chercheurs en traitement du signal.

Ce chapitre a pour but de présenter les principes de cet axe du traitement du signal.

3.2 Suites et séries de Fourier

Soit x_t une série chronologique mesurée en temps discret à des dates équidistantes. Faire une décomposition de Fourier de x_t consiste à la projeter sur une base, composée de fonctions élémentaires et orthogonales entre elles.

Un ensemble de fonctions $f_j = 0, \dots, \infty$ est appelé système orthogonal de fonction si :

$$\left(\begin{array}{l} \int f_j(x) f_m(x) dx = 0 \quad j \neq m; \quad j, m = 0, \dots, \infty \\ \int |f_j(x)|^2 dx \neq 0 \quad \forall j \end{array} \right) \quad (3.1)$$

Ce système est dit complet s'il n'existe pas de fonction $g(x)$ telle que :

$$\int_a^b |g(x)| dx = 0 \quad \text{et} \quad g(x) f_j(x) = 0 \quad \forall j \quad (3.2)$$

Dans le cas d'une décomposition de Fourier, on choisit le système de fonctions orthogonales :

$$\cos(\omega_j t), \sin(\omega_j t); \quad j = 0, \dots, \infty; \quad \omega_j \in [-\pi, \pi]$$

Décomposer x_t en série de Fourier consiste alors à trouver les coefficients a_j et b_j tels que :

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j \cos(\omega t) + b_j \sin(\omega t)) \quad (3.3)$$

En pratique, on mesure le processus discret x_t sur N périodes ($t = 0, \dots, N - 1$), comme on a N observations, on va vouloir les projeter sur un total de N fonctions de type $(a_j \cos(\omega_j t), b_j \sin(\omega_j t))$.

– Si N est impair donc $(N - 1)$ pair, on considère les fréquences

$$\omega_j = \frac{2\pi j}{N}, \quad \left(j = 0, \dots, \frac{N-1}{2} \right)$$

On peut alors construire le système de fonctions :

$$\left\{ \sin 0t, \dots, \sin \frac{\pi(N-1)}{N}t, \cos 0t, \dots, \cos \frac{\pi(N-1)}{N}t \right\}$$

. Il y a exactement $\frac{(N-1)}{N} + 1$ fonctions sinus et le même nombre de fonctions cosinus, soit un total de $(N + 1)$ fonctions.

Cependant, pour $j = 0$, le sinus est nul $\forall t$. On considère alors le système :

$$\left\{ \sin \frac{2\pi}{N}t, \dots, \sin \frac{\pi(N-1)}{N}t, \cos 0t, \dots, \cos \frac{\pi(N-1)}{N}t \right\}$$

qui comporte alors N fonctions.

– Si N est pair, on obtient le système :

$$\{ \sin 0t, \dots, \sin \pi t, \cos 0t, \dots, \cos \pi t \}$$

mais pour $j = 0$ et $j = \frac{N}{2}$ les sinus sont nuls, par conséquent le système est

$$\left\{ \sin \frac{2\pi}{N}t, \dots, \sin \frac{\pi(N-2)}{N}t, \cos \frac{2\pi}{N}t, \dots, \cos \pi t \right\}$$

on a au total N fonctions.

On a donc la décomposition de x_t en série de Fourier : $x_t = \sum_{j=0}^{L(N)} (a_j \cos(\frac{2\pi j}{N}) + b_j \sin(\frac{2\pi j}{N}))$ où $L(N) = \frac{N}{2}$ si N est pair, et $L(N) = \frac{N-1}{2}$ si N est impair.

Pour le calcul des coefficients a_j et b_j on utilise la méthode des moindres carrés, qui donne :

$$\begin{cases} \hat{a}_0 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t = \bar{x}, \\ \hat{a}_j = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N x_t \cos\left(\frac{2\pi j}{N}(t-1)\right) \\ \hat{b}_j = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N x_t \sin\left(\frac{2\pi j}{N}(t-1)\right) \end{cases}$$

$j = 0, \dots, \frac{N-1}{2}$ si N est impair et si N est pair, les résultats ne sont pas très différents. Simplement, les fréquences ω_j sont définies, pour $j = 0, \dots, \frac{N}{2}$ pour les termes en cosinus, et $j = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$ pour les termes en sinus. La valeur des \hat{b}_j ne change donc pas, tandis qu'il faudra rajouter un $\hat{a}_{\frac{N}{2}}$ qui vaut $-\bar{x}$.

Définition 24 (Transformée de Fourier) *Etant donné une fonction $g(x)$ définie sur une infinité de points discrets, on appelle transformée de Fourier*

de $g(x)$ la fonction $f(\omega)$ définie par :

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x}. \quad (3.4)$$

3.3 Densité spectrale

La densité spectrale, dans le domaine fréquentiel, est l'équivalent de la fonction d'auto-covariance dans le domaine temporel. Elle permet de mettre en évidence les phénomènes périodiques (cyclique ou saisonnier) et les phénomènes d'avances et de retard entre plusieurs séries. Considérons une série univariée $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$, stationnaire et d'espérance μ . L'auto-covariance d'ordre j s'écrit :

$$\gamma_j = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-j} - \mu)] \quad (3.5)$$

En supposant que la fonction d'auto-covariance soit absolument sommable, on définit la fonction génératrice des auto-covariances comme :

$$g_y(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j z^j \quad (3.6)$$

En divisant $g_y(z)$ par 2π et en l'évaluant en $z = e^{-i\omega}$, on obtient la densité spectrale de y en ω :

$$s_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} g_y(e^{-i\omega}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j e^{-i\omega j} \quad (3.7)$$

Notons que la densité spectrale est une fonction de ω , en donnant une valeur particulière à ω et une séquence d'auto-covariance $\{\gamma_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, on peut calculer la valeur de $s_y(\omega)$.

En manipulant un peu la formule de Moivre et les propriétés des fonctions trigonométriques, il vient :

$$\begin{aligned}
s_y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j \cos(\omega j) \right] \\
s_y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left[\gamma_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(\omega j) \right]
\end{aligned} \tag{3.8}$$

3.3.1 Propriétés de la densité spectrale

Les propriétés de la fonction densité spectrale sont :

1. $s_y(\omega)$ est une fonction continue.
2. $s_y(\omega)$ est à valeurs réelles.
3. $s_y(\omega) = s_y(-\omega)$.
4. $s_y(\omega) \succeq 0$.
5. $s_y(\omega)$ est une fonction périodique, de période 2π .

Dès lors, on se contentera d'évaluer cette fonction sur l'intervalle $[0, \pi]$.

3.3.2 Densité spectrale de quelques processus

Considérons un processus $MA(\infty)$ donné par :

$$Y_t = \mu + \psi(L) \varepsilon_t$$

$$\text{avec } \psi(L) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j L^j, \quad \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty, \quad E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = \begin{cases} \sigma^2 & t = s \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

La fonction génératrice d'auto-covariance est donnée par :

$$g_y(z) = \sigma^2 \psi(z) \psi(z^{-1}) \tag{3.9}$$

D'où, de 3.7, la densité spectrale pour un processus $MA(\infty)$ est donnée par :

$$s_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sigma^2 \psi(e^{-i\omega}) \psi(e^{i\omega}) \tag{3.10}$$

3.3.2.1 Processus bruit blanc

Soit un bruit blanc ε_t défini par :

$$\varepsilon_t \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

La fonction d'auto-covariance d'un tel processus y_j est nulle pour tout $j \neq 0$, et vaut σ^2 en $j = 0$. Sa densité spectrale peut donc facilement être calculée :

$$s_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\gamma_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(\omega j) \right] = \frac{\sigma^2}{2\pi} \quad (3.11)$$

On voit donc que la densité spectrale reste constante sur toute la bande de fréquence d'où le nom de bruit blanc.

3.3.2.2 Processus moyenne mobile

Supposons que Y_t suit un processus $MA(1)$,

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

Ici, $\psi(z) = 1 + \theta z$ donc la densité spectrale est

$$\begin{aligned} s_y(\omega) &= (2\pi)^{-1} \sigma^2 (1 + \theta e^{-i\omega}) (1 + \theta e^{i\omega}) \\ &= (2\pi)^{-1} \sigma^2 (1 + \theta e^{i\omega} + \theta e^{-i\omega} + \theta^2) \end{aligned}$$

On utilise alors l'identité trigonométrique

$$e^{i\omega} + \theta e^{-i\omega} = 2 \cos \omega$$

Et on obtient

$$s_y(\omega) = (2\pi)^{-1} \sigma^2 [1 + \theta^2 + 2\theta \cos(\omega)] \quad (3.12)$$

On voit que, si θ est positif, $s_y(\omega)$ est une fonction monotone décroissante de ω , pour des fréquences situées dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, et une fonction monotone croissante dans le cas contraire

3.3.2.3 Processus autorégressif

Supposons que Y_t suit un processus $AR(1)$ donné par :

$$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

On a $\psi(z) = \frac{1}{1-\phi z}$ avec $|\phi| < 1$.

Donc, la densité spectrale est

$$s_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma^2}{(1 - \phi e^{-i\omega})(1 - \phi e^{i\omega})} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma^2}{(1 - \phi e^{-i\omega} - \phi e^{i\omega} + \phi^2)}$$

On trouve :

$$s_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma^2}{(1 + \phi^2 - 2 \cos(\omega))} \quad (3.13)$$

On voit alors que la densité spectrale est une fonction monotone croissante en ω lorsque $\phi < 0$, et en est une fonction monotone croissante dans le cas contraire.

3.3.2.4 Processus $ARMA(p, q)$

En général, pour un processus $ARMA(p, q)$

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \dots + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

La densité spectrale est donnée par :

$$s_y(\omega) = \frac{\sigma^2 (1 + \theta_1 e^{-i\omega} + \theta_2 e^{-i2\omega} + \dots + \theta_q e^{-iq\omega})}{2\pi (1 - \phi_1 e^{-i\omega} + \phi_2 e^{-i2\omega} + \dots + \phi_p e^{-ip\omega})} \times \frac{(1 + \theta_1 e^{i\omega} + \theta_2 e^{i2\omega} + \dots + \theta_q e^{iq\omega})}{(1 - \phi_1 e^{i\omega} + \phi_2 e^{i2\omega} + \dots + \phi_p e^{ip\omega})} \quad (3.14)$$

Si les polynômes autorégressif et moyenne mobile sont factorisés comme suit :

$$\begin{aligned} 1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \dots + \theta_q z^q &= (1 - \eta_1 z)(1 - \eta_2 z) \dots (1 - \eta_q z) \\ 1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2 - \dots - \theta_p z^p &= (1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z) \dots (1 - \lambda_p z) \end{aligned}$$

Donc la densité spectrale peut être écrite

$$s_y(\omega) = \frac{\sigma^2 \prod_{j=1}^q [1 + \eta_j^2 - 2\eta_j \cos(\omega)]}{2\pi \prod_{j=1}^p [1 + \lambda_j^2 - 2\lambda_j \cos(\omega)]} \quad (3.15)$$

3.3.3 Calcul de l'auto-covariance à partir de la densité spectrale

Si on connaît la valeur de l'auto-covariance $\{\gamma_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, on peut calculer la valeur de $s_y(\omega)$ pour n'importe quelle fréquence ω . L'inverse est toujours vrai, si on connaît la valeur de $s_y(\omega)$ pour tout ω dans $[0, \pi]$, on peut calculer la valeur de la $k^{\text{ième}}$ auto-covariance $k^{\text{ième}}$, $\forall \gamma_k$. Cela signifie que la densité spectrale $s_y(\omega)$ et la séquence d'auto-covariances contiennent la même information. La proposition suivante fournit une formule pour le calcul de n'importe quelle auto-covariance à partir de la densité spectrale.

Proposition 25 *Si la fonction d'auto-covariance γ_k est absolument sommable, et si*

$$s_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j e^{i\omega j} = \frac{1}{2\pi} \left[\gamma_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(\omega j) \right] \quad (3.16)$$

Alors, on peut inverser cette dernière formule, ce qui donne :

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} s_y(\omega) e^{-i\omega k} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} s_y(\omega) \cos(\omega k) d\omega$$

Preuve

On a

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} s_y(\omega) e^{-i\omega j} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j e^{-i\omega k} e^{i\omega j} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(\omega(k-j)) + i \sin(k-j)] d\omega\end{aligned}$$

Si on évalue cette dernière intégrale en $k = j$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(\omega(k-j)) + i \sin(k-j)] d\omega = 2\pi$$

Par contre, pour $k \neq j$, cette intégrale est nulle. On reste donc avec :

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_y(\omega) e^{i\omega k} d\omega = \gamma_k \quad (3.17)$$

Pour dériver la seconde égalité, il faut se souvenir que $s_y(\omega)$ est symétrique autour de $\omega = 0$. Dès lors,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} s_y(\omega) e^{i\omega j} d\omega &= \int_{-\pi}^0 s_y(\omega) e^{i\omega j} d\omega + \int_0^{\pi} s_y(\omega) e^{i\omega j} d\omega \\ &= \int_{-\pi}^0 s_y(-\omega) e^{-i\omega j} d\omega + \int_0^{\pi} s_y(\omega) e^{i\omega j} d\omega \\ &= \int_{-\pi}^0 s_y(-\omega) [e^{-i\omega j} + e^{i\omega j}] d\omega \\ &= \int_0^{\pi} s_y(-\omega) 2 \cos(\omega j) d\omega \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} s_y(-\omega) \cos(\omega j) d\omega\end{aligned}$$

3.3.4 Interprétation de la densité spectrale

En posant $k = 0$ dans l'équation 3.17, il vient :

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_y(\omega) d\omega = \gamma_0$$

En d'autres termes, l'aire en-dessous du spectre représente la variance du processus Y_t concerné. Plus généralement, la grandeur $\int_{-\omega_1}^{\omega_1} s_y(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\omega_1} s_y(\omega) d\omega$

représente la partie de la variance du processus qu'on peut attribuer à des cycles de fréquences inférieures ou égale à ω_1 . Par extension, la grandeur $\widehat{\gamma}_0$ représente la portion de la variance de Y_t qu'on peut attribuer à des cycles de fréquence ω .

Que signifie t-il d'attribuer une certaine portion de la variance de Y aux cycles de fréquences inférieurs ou égale à ω_1 ?

Pour explorer cette question, on considère le processus stochastique suivant, supposons que la valeur de Y à la date t est déterminé par :

$$Y_t = \sum_{j=1}^M [\alpha_j \cos(\omega_j t) + \delta_j \sin(\omega_j t)] \quad (3.18)$$

Où α_j et δ_j sont des variables centrées, ce qu'il veut dire que $E(Y_t) = 0$ pour tout t . Les séquences $\{\alpha_j\}_{j=1}^M$ et $\{\delta_j\}_{j=1}^M$ sont non corrélées telle que :

$$E(\alpha_j \alpha_k) = \begin{cases} \sigma_j^2 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

$$E(\delta_j \delta_k) = \begin{cases} \sigma_j^2 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

$$E(\delta_j \alpha_k) = 0$$

La variance de Y_t est alors :

$$\begin{aligned} E(Y_t^2) &= \sum_{j=1}^M [E(\alpha_j^2) \cos^2(\omega_j t) + E(\delta_j^2) \sin^2(\omega_j t)] \\ &= \sum_{j=1}^M \sigma_j^2 [\cos^2(\omega_j t) + \sin^2(\omega_j t)] \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^M \sigma_j^2$$

Donc pour ce processus, la portion de la variance de Y due aux cycles de fréquences ω_j est donnée par σ_j^2 .

Si les fréquences sont ordonnées $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_M < \pi$, la portion de la variance de Y due aux cycles de fréquences inférieure ou égale à ω_j est donnée par $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_j^2$.

3.4 Périodogramme

3.4.1 Construction et interprétation du périodogramme

On a estimé les coefficients de Fourier a_j et b_j en utilisant une régression par moindres carrés. Dans une analyse de régression classique, l'étape suivante consiste à effectuer une analyse de la variance. On a vu que la décomposition de X_t en série de Fourier est :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} [\alpha_j \cos(\omega_j t) + b_j \sin(\omega_j t)]$$

La part de $\sum x_t^2$ expliquée par $\cos(\omega_j t)$ vaut $(\frac{N}{2}) a_j^2$, la part de $\sum x_t^2$ expliquée par $\sin(\omega_j t)$ vaut $(\frac{N}{2}) b_j^2$, et la part globale de $\sum x_t^2$ expliquée par les cycles à la fréquence ω_j vaudra $(\frac{N}{2}) (a_j^2 + b_j^2)$.

Cette proposition justifie la construction et la représentation d'une fonction périodogramme, définie par :

$$I(\omega_j) = \frac{N}{2} (a_j^2 + b_j^2). \quad (3.19)$$

La découverte de pics dans cette fonction indique que les fréquences pour lesquelles ces pics apparaissent sont les fréquences qui expliquent le mieux la dynamique de X_t . En remplaçant les coefficients de Fourier par leurs valeurs, on obtient :

$$I(\omega_j) = \frac{2}{N} \left[\left(\sum_{t=0}^N x_t \cos \omega_j (t-1) \right)^2 + \left(\sum_{t=0}^N x_t \sin \omega_j (t-1) \right)^2 \right] \quad (3.20)$$

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t e^{i\omega_j(t-1)}$$

$$c_j = \left(\frac{1}{N} \sum_{t=0}^N x_t \cos \omega_j (t-1) \right) + i \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t \sin \omega_j (t-1) \right) = A_j + iB_j$$

Et donc

$$2Nc_j c_j^* = 2N (A_j + iB_j) (A_j - iB_j) = 2N (A_j^2 + B_j^2) = I(\omega_j)$$

On peut se servir du périodogramme pour repérer les périodicités dans les données, comme on a montré ci-dessous, mais aussi pour épurer ces données d'un certain bruit. Par exemple, on peut éliminer toutes les fréquences pour lesquelles la valeur du périodogramme n'atteint pas un certain pourcentage de la valeur maximale du périodogramme. Pour effectuer la transformation inverse, repasser du périodogramme à une série chronologique, il suffit de reconstruire la somme en annulant les coefficients de Fourier pour les fréquences «parasites», et de garder les coefficients de Fourier correspondant aux fréquences «significatives».

3.4.2 Estimation de la densité spectrale

3.4.2.1 Estimateur « naturel »

L'idée la plus immédiate pour estimer la densité spectrale consiste à remplacer la fonction d'auto-covariance estimée dans la formule de la densité spectrale. On commence par estimer la fonction d'auto-covariance :

$$\hat{\gamma}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^T (Y_t - \bar{Y}) (Y_{t-j} - \bar{Y}) \quad j = 0, \dots, T-1$$

on obtient alors l'estimateur :

$$\hat{s}_y(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^T \hat{\gamma}_j e^{-i\omega j} = \frac{1}{2\pi} \left[\hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{t=1}^{T-1} \hat{\gamma}_j \cos(\omega j) \right] \quad (3.21)$$

Examinons à présent les propriétés de cet estimateur :

1. On peut montrer, comme précédemment, que : $\hat{\gamma}_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{s}_y(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\pi} \hat{s}_y(\omega) d\omega$

2. Distribution asymptotique. Fuller (1976) a montré qu'asymptotiquement, $\frac{2\widehat{s}_y(\omega)}{s_y(\omega)} \longrightarrow \chi_2^2$ De plus, ces statistiques sont mutuellement indépendantes pour des fréquences différentes.
3. Par conséquent, l'estimateur « naturel » est asymptotiquement sans biais. En effet, comme l'espérance d'une χ_2^2 est 2, $E\left[\frac{2\widehat{s}_y(\omega)}{s_y(\omega)}\right] = 2$. Ou encore, $E[\widehat{s}_y(\omega)] = s_y(\omega)$
4. Le problème est qu'une χ_2^2 a une variance bien trop large : ses quantiles à 95% sont [0.05, 7.4]. Notre estimateur naturel s'avère donc non efficace, et son utilisation entraîne trop d'imprécision.

3.4.2.2 Estimation paramétrique

On suppose que les données peuvent être modélisées par un processus $ARMA(p, q)$

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}.$$

Une excellente façon pour estimer la densité spectrale est d'estimer d'abord les paramètres $\mu, \phi_1, \phi_2, \phi_p, \theta_1, \theta_q$ et σ^2 par la méthode du maximum de vraisemblance. L'estimateur du maximum de vraisemblance $(\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2, \dots, \widehat{\phi}_p, \widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \dots, \widehat{\theta}_q, \widehat{\sigma}^2)$ va être remplacé dans (3) pour estimer la densité spectrale $s_y(\omega)$ à n'importe quel fréquence ω .

Si le modèle est correctement déterminé, plus la taille de l'échantillon est grande, plus l'estimateur du maximum de vraisemblance va être proche de la vraie valeur ; donc, l'estimateur de la densité spectrale doit avoir les même propriétés.

3.4.2.3 Estimation non paramétrique

Nous allons essayer de trouver un nouvel estimateur plus efficace en se basant sur l'hypothèse que $s_y(\omega)$ sera proche de $s_y(\lambda)$ si ω est proche de λ . Sous cette hypothèse, on se conduit à penser qu'on peut estimer $s_y(\omega)$ par une moyenne pondérée des $\widehat{s}_y(\omega_j)$, avec des λ choisis dans un voisinage de ω . Cette supposition forme la base d'une autre classe d'estimateur de la

population spectrale connue sous estimateur non paramétrique ou estimateur par kernel. On calcul le nouvel estimateur $\widehat{s}_y(\omega_j)$ comme suit :

$$\widehat{s}_y(\omega_j) = \sum_{m=-h}^h k(\omega_{j+m}, \omega_j) \widehat{s}_y(\omega_{j+m}) \quad (3.22)$$

Où h est le paramètre bandwidth, qui indique combien de fréquences différentes sont jugées utiles pour estimer $s_y(\omega_j)$. La fonction $k(\cdot)$ est un Kernel, appelée fenêtre spectrale, c'est-à-dire une fonction de pondération symétrique autour de 0, avec un maximum en m , et qui a la propriété :

$$\sum_{m=-h}^h k(\omega_{j+m}, \omega_j) = 1$$

Notons que cette technique ne délivre d'estimateur que pour certaines fréquences définies à priori (celles pour lesquelles on peut estimer le périodogramme). Une approche est de prendre $k(\omega_{j+m}, \omega_j)$ proportionnel à

$h + 1 - |m|$. On peut montrer que

$$\sum_{m=-h}^h [h + 1 - |m|] = (h + 1)^2$$

Donc pour satisfaire la propriété (5), le kernel est

$$k(\omega_{j+m}, \omega_j) = \frac{h + 1 - |m|}{(h + 1)^2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=-h}^h [h + 1 - |m|] &= \sum_{m=-h}^h (h + 1) - \sum_{m=-h}^h |m| \\ &= (h + 1)^2 \end{aligned}$$

Et l'estimateur (4) devient

$$\widehat{s}_y(\omega_j) = \sum_{m=-h}^h \left[\frac{h + 1 - |m|}{(h + 1)^2} \right] \widehat{s}_y(\omega_{j+m})$$

3.5 Utilité de la densité spectrale

L'analyse spectrale est une opération de moyenne sur le périodogramme.

Elle détermine l'évolution de la variance d'un processus stochastique aux différentes fréquences. Elle décompose de façon distincte l'information contenue dans la fonction d'auto-covariance et permet d'identifier clairement les influences qui président la conduite de chaque série, pour ensuite adopter une spécification correspondante aux phénomènes cycliques (ou périodique) et la recherche des composantes périodiques d'une série. Le principal objectif de l'analyse spectrale est, donc, l'identification d'une série temporelle aux principales fréquences, sachant que cette analyse doit se faire sur des séries stationnaires (détendanciées).

L'intérêt des représentations spectrales est, ainsi, la mise en évidence de cycles et/ou de fluctuations d'une série. En effet les variances associées aux différentes fréquences ont des amplitudes décroissantes au fur et à mesure que l'on passe des basses fréquences aux hautes fréquences. Pour interpréter la densité spectrale, en termes de cycle, on s'intéresse aux pics les plus importants. Si la densité spectrale est parallèle à l'axe des abscisses, il n'y a aucun pic et donc il n'existe pas de cycle : c'est le cas du bruit blanc.

3.6 Les filtres

Filtrer une série chronologique consiste à effectuer des opérations sur cette dernière. En particulier, lorsqu'on remplace la valeur présente d'un processus Y_t par une somme pondérée des valeurs passées, présentes et futures de Y_t , on dit qu'on applique un filtre linéaire à la série. De manière générale, considèrera qu'un processus X_t entre comme input dans une « boîte noire »

Celle-ci applique un filtre A à la série X_t , et délivre un processus Y_t comme output. Si le filtre A est linéaire, on écrira :

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j X_{t-j}$$

En utilisant l'opérateur de retard, on obtient

$$Y_t = A(L)X_t$$

Le filtre A est défini par les coefficients $\{a_j\}$, qui sont aussi les coefficients du polynôme $A(L)$. Si le filtre ne prend en compte que les valeurs passées ou futures, on dira qu'il s'agit d'un filtre unilatéral. De manière générale, si les a_j sont absolument sommables, on peut montrer que :

$$s_y(\omega_j) = (2\pi)^2 s_x(\omega_j) s_a(\omega_j) s_a^*(\omega_j)$$

Où $s_a(\omega)$ est la transformée de Fourier des a_j :

$$s_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-i\omega j} \quad (3.23)$$

Et $s_a^*(\omega)$ est le complexe conjugué de $s_a(\omega)$. On peut également formuler ce résultat en utilisant la notation polynomiale $A(L) = \sum a_j L^j$. Dans ce cas, il suffit de remarquer :

$$(2\pi) s_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-i\omega j} = A(e^{-i\omega}) \quad (3.24)$$

Le résultat (6) peut alors s'écrire :

$$s_y(\omega) = s_x(\omega) A(e^{-i\omega}) A(e^{i\omega}) \quad (3.25)$$

3.6.1 Effet d'un filtre linéaire

Pour analyser les effets d'un filtre linéaire, nous examinons ici les modifications que ce dernier apporte à une série parfaitement périodique et déterministe. Soit donc un filtre linéaire A dans lequel on injecte une série X_t définie par

$$X_t = 2\alpha \cos(\omega t + \beta)$$

Il en ressort une nouvelle série Y_t :

$$\begin{aligned}
Y_t &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j x_{t-j} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j 2\alpha \cos [\omega (t - j) + \beta] \\
&= \alpha e^{i(\omega t + \beta)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j [e^{-i\omega j} + \alpha e^{i[(\omega(t-j)) + \beta]}] \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{i\omega j}
\end{aligned}$$

Mais alors, on définit $s_a(\omega)$ comme

$$s_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-i\omega j}$$

Et donc,

$$2\pi s_a(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-i\omega j}$$

Cette dernière grandeur est un nombre complexe, qu'on peut représenter en coordonnées polaire.

3.7 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'étude fréquentielle des séries temporelles, qui est l'analyse spectrale. Nous avons donné la densité spectrale de quelques modèles, et nous avons estimé cette dernière par le periodogramme. Et afin de tester la mémoire longue, nous avons présenté le test de mesure d'information.

3.8 Test d'une mesure d'information

Dans ce test on présente une nouvelle méthode proposée par A. MOKKADEM [voir réf.5] pour le problème de tester le caractère randomness contre l'alternative de la dépendance du processus ARMA. Il donne la loi asymptotique de sa statistique sous l'hypothèse nulle et sous l'hypothèse alternative. Sa méthode est basée sur une nouvelle mesure d'informations entre les deux processus stochastiques stationnaires. Comme application, il tire aussi un test pour une simple hypothèse dans le cas autorégressif et dans le cas ARMA.

Afin de comparer deux densités spectrales φ et φ' , on définit un nouveau paramètre :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \log \left(\frac{\varphi}{\varphi'} \right) dw - \log \int_{-\infty}^{+\pi} \left(\frac{\varphi}{\varphi'} \right) dw \quad (3.26)$$

On utilise ce paramètre pour construire un test de bruit blanc pour séries temporelles en posant $\varphi' = 1$.

A. MOKKADEM [voir réf.5] utilise une statistique associées à ce paramètre pour tester un bruit contre l'alternative ARMA.

Le problème de tester le bruit blanc contre d'autres types de dépendance dans l'analyse des séries temporelles a été étudié par Hotelling et Pabst (1936) et Wald et Wolfowitz (1943). La première étude systématique du problème dans un contexte de séries chronologique est due à Bell, Woodroffe et Avadhani (1970).

L'approche ici [voir réf.5] est un peu différente, A. MOKKADEM teste le bruit blanc contre l'alternatif ARMA et on suppose de plus dans l'hypothèse alternative que les ordres sont limités par des nombres entiers p et q donnés.

La statistique utilisée ici est une fonction de l'estimateur spectrale du processus AR classique. De plus, les hypothèses sont moins restrictives en particulier on ne suppose pas que l'innovation possède une densité.

3.8.1 La mesure d'information

Soit deux densités spectrales φ et φ' sur le cercle unité, on définit (quand les intégrales existes)

$$M(\varphi, \varphi') = \log \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{\varphi(e^{iw})}{\varphi'(e^{iw})} dw - \frac{1}{2\pi} \int_T \log \frac{\varphi(e^{iw})}{\varphi'(e^{iw})} dw \quad (3.27)$$

Cette quantité introduite par A. Mokkadem [voir réf.5] est comme une mesure d'information et apparait comme l'information de Kullback modifiée dans le cas gaussien ; toutefois elle est adaptée pour obtenir des tests utiles.

Certaines des propriétés fondamentales de $M(\varphi, \varphi')$ sont les suivantes :

1. $M(\varphi, \varphi')$ est non négative et $M(\varphi, \varphi') = 0$ si et seulement si $\varphi/\varphi' = cst$ presque partout en particulier pour $\varphi' = 1$, $M(\varphi, \varphi')$ si et seulement si $\varphi = cst$, cette propriété est le principal outil pour obtenir un test de bruit blanc.
2. Pour tout réel positif s et s' $M(s\varphi s', \varphi') = M(\varphi, \varphi')$. Cette propriété est utile pour les calculs.
3. $M(\varphi, \varphi') = M\left(\frac{\varphi}{\varphi'}, 1\right)$. Cela signifie que des tests pour comparer φ et φ' peuvent être reliés à des tests de bruit blanc, nous allons utiliser cette propriété pour donner un test pour un processus AR et ARMA.

Soit $e_t, t \in \mathbb{Z}$ une suite de v.a réelles de moyenne 0 et *i.i.d* de variance finie σ^2 et de moments d'ordre 4, $\mu_4 = E(\varepsilon_t^4)$. On considère un processus $ARMA(X) = (X_t)_{(t \in \mathbb{Z})}$ défini par :

$$X_t = \sum_{k=1}^p a_k X_{t-k} + \varepsilon_t - \sum_{k=1}^q b_k X_{t-k} \quad (3.28)$$

Ici on suppose pas que $a_p \neq 0$ ou $b_q \neq 0$, donc p et q sont seulement limités pour l'ordre du processus ARMA. on note respectivement par

$$\begin{aligned} P(z) &= 1 - a_1 z - \dots - a_p z^p \\ &\text{Et} \\ Q(z) &= 1 - b_1 z - \dots - b_q z^q \end{aligned}$$

Les polynômes autorégressif et moyenne mobile.

3.8.2 Hypothèses

On suppose que toutes les racines de P/Q sont à l'extérieur du cercle unité donc (X) est causal. On note par $\gamma(k), k \in \mathbb{Z}$ la fonction d'autocovariance du processus (X)

$$\gamma(k) = E(X_0 X_k) \quad (3.29)$$

Et par Γ_r la matrice d'autocovariance

$$\Gamma_r = [\gamma(i - j)]_{i,j=1,\dots,r} \quad (3.30)$$

Où $r = \max(p, q + 1)$

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)^t$ et τ^2 les solutions des équations de Yule Walker

$$\Gamma_r \alpha = \gamma_r \quad (3.31)$$

et

$$\tau^2 = \gamma(0) - \alpha^t \gamma_r \quad (3.32)$$

Où $\gamma_r = (\gamma(1) \dots \gamma(r))^t$

On appelle le polynôme $R(z) = 1 - a_1 z - \dots - a_r z^r$, le polynôme de Yule Walker d'ordre r du processus (X) et la fonction

$$\varphi(z) = \frac{\tau^2}{2\pi} |R(z)|^{-2} \quad (3.33)$$

la densité spectrale d'ordre r de (X) .

On pose également $|R|^{-2} = \psi$

Si on remplace les covariances $\gamma(k)$ dans 3.31 et 3.32 par les covariances empiriques correspondantes $\hat{\gamma}(k) = \sum_{i=1}^{N-k} X_i X_{i+k}$, basées sur les N observations X_1, X_2, \dots, X_N , on obtient les estimateurs de Yule Walker $\hat{\alpha}$ de α ,

$\hat{\tau}^2$ et τ^2 le polynôme d'ordre r de Yule Walker estimé est :

$$\hat{R}(z) = 1 - \hat{a}_1 z - \dots - \hat{a}_r z^r \quad (3.34)$$

Et les estimateurs correspondants $\widehat{\varphi}$ et $\widehat{\psi}$ de φ et ψ . Dans le cas spectral où $q = 0$ et $r = p$, $\widehat{\alpha}$ est l'estimateur de Yule Walker de $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^t$.

Nous avons besoin d'autres notations. Soit

$$\rho_k = \int_T e^{ikw} \psi(e^{iw}) dw \quad (3.35)$$

et

$$\widehat{\rho}_k = \int_T e^{ikw} \widehat{\psi}(e^{iw}) dw \quad (3.36)$$

Plus précisément $\rho_k = \frac{2\pi(k)}{r^2}$ pour $k = 1, 0, \dots, r$. De 3.31 et 3.32 on voit que ρ est une fonction rationnelle de $(\gamma(0), \dots, \gamma(r))^t = \gamma_r^0 : \rho = G(\gamma_r^0)$.

On note par J la matrice Jacobienne de G et par J_1 la première ligne de J .

3.8.3 Test

On note par H_0 l'hypothèse nulle qui est « la suite (X_t) est une suite de variables aléatoires i.i.d (bruit blanc) » et par H_1 « (X_t) est un processus ARMA d'ordres bornés (p, q) ».

La construction du test pour H_0 contre H_1 est basée sur ce qui suit.

Comme le processus (X_t) est causal et (ε_t) sont i.i.d on a :

- Le processus (X_t) est un bruit blanc si et seulement si sa densité spectrale est constante et $\gamma(k) = 0, k \geq 1$

Comme $r = \max(p, q + 1)$ on a l'équation de Yule-Walker

$$\gamma(k) = a_1\gamma(k-1) + a_2\gamma(k-2) + \dots + a_p\gamma(k-p), \quad k \geq r \quad (3.37)$$

Donc $\gamma(k) = 0$ pour $k = 1, 2, \dots, r$

On revient au polynôme R défini dans 3.33, on note que $\gamma(k) = 0$ pour $k = 1, 2, \dots, r$ si et seulement si $R = 1$ donc si et seulement si $\psi = cst$.

En conclusion on obtient :

$$H_0 \text{ est vraie} \iff M(\psi, 1) = 0 \quad (3.38)$$

On note que $M(\psi, 1) = M(\varphi, 1)$ par la propriété 2.

pour simplifier $M(\psi, 1)$ est notée par la M et $\widehat{M}(\varphi, 1)$ par \widehat{M} .

Le test est maintenant évident : on rejette H_0 si $\widehat{M} > \delta$ pour un certain $\delta > 0$.

Proposition 26

$$\begin{aligned} i. \quad \widehat{M} &= \log(\widehat{\gamma}(0)) - \log(\widehat{\gamma}(0) - \widehat{\alpha}'\widehat{\gamma}_r) & (3.39) \\ ii. \quad \widehat{M} &= -\sum_{j=1}^r \log(1 - \widehat{\phi}_{jj}^2) \end{aligned}$$

où, $\widehat{\phi}_{jj}$ est l'autocorrélation partielle estimée au retard j .

Preuve. (i) est une conséquence de la définition de \widehat{M} . Par l'algorithme de Durbin-Levinson (voir réf.2), il en résulte que :

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{\gamma}(0) - \widehat{\alpha}'\widehat{\gamma}_r}{\widehat{\gamma}(0)} &= \prod_{j=1}^r (1 - \widehat{\phi}_{jj}^2) \\ \log\left(\frac{\widehat{\gamma}(0) - \widehat{\alpha}'\widehat{\gamma}_r}{\widehat{\gamma}(0)}\right) &= \sum_{j=1}^r \log(1 - \widehat{\phi}_{jj}^2) \\ \log(\widehat{\gamma}(0)) - \log(\widehat{\gamma}(0) - \widehat{\alpha}'\widehat{\gamma}_r) &= \sum_{j=1}^r \log(1 - \widehat{\phi}_{jj}^2) \end{aligned}$$

Donc (ii) résulte de (i). ■

Théorème 27 Sous H_0 [voir 1.22]

$$N\widehat{M} \rightsquigarrow \chi_r^2 \quad (3.40)$$

Preuve. Par la proposition 26, on a : $\widehat{M} = -\sum_{j=1}^r \log(1 - \widehat{\phi}_{jj}^2)$, et en utilisant la formule de Taylor, on obtient

$$N\widehat{M} = N \sum_{j=1}^r \widehat{\phi}_{jj}^2 + N \sum_{j=1}^r \frac{\widehat{\phi}_{jj}^4}{(1 - \varepsilon_{jj})^2} \quad (3.41)$$

Où $0 \leq \varepsilon_{jj} \leq \widehat{\phi}_{jj}^2$ donc

$$1 \leq \frac{1}{(1 - \varepsilon_{jj})^2} \leq \frac{1}{(1 - \widehat{\phi}_{jj}^2)^2} \quad (3.42)$$

Sous l'hypothèse nulle, les $N\widehat{\phi}_{jj}^2$ sont standards asymptotiquement normales (voir réf.2) et asymptotiquement indépendante (Box et al., 1994,P68), ainsi

$$N \sum_{j=1}^r \widehat{\phi}_{jj}^2 \rightsquigarrow \chi_r^2.$$

Il reste à examiner le second terme à droite de la formule 3.41. Puisque le processus est ergodique, il s'ensuit, par la loi forte des grands nombres, donc $\lim \widehat{\phi}_{jj}^2 = 0$ *p.s.*, Sous l'hypothèse nulle, puis en utilisant 3.42, on a $\lim \widehat{\phi}_{jj}^2 (1 - \varepsilon_{jj})^2 = 0$ *p.s.*, car $N\widehat{\phi}_{jj}^2$ suit la loi χ_1^2 asymptotiquement, donc $\lim N \sum_{j=1}^r \frac{\widehat{\phi}_{jj}^4}{(1 - \varepsilon_{jj})^2} = 0$ *p.s.* en probabilité, ce qui termine la preuve du théorème.

■

Chapitre 4

Simulation et illustrations numériques

Sommaire

| | | |
|-----|---|----|
| 4.1 | Introduction | 55 |
| 4.2 | simulation de modele de séries chronologiques | 56 |
| 4.3 | Commentaires des graphiques | 58 |
| 4.4 | Test | 69 |
| 4.5 | Principal résultats | 64 |
| 4.6 | Conclusion | 66 |

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter et simuler quelques exemples simples de chroniques satisfaisant les modèles traités dans les chapitres précédents.

On présente dans ces exemples les graphiques des chroniques, des densités spectrales et des fonctions d'autocorrélation, pour les processus à courte et à longue mémoire.

Puis nous généralisons le test de mesure d'information de A. MOKKADDEM [voir réf.5] pour les modèles ARFIMA et nous présentons le test pour quelques exemples simulés de modèles ARFIMA.

4.2 Simulation de modèle de séries chronologiques

Dans les exemples suivants on prend $N = 300$, et $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$

4.2.1 Exemple A : ARMA(1,1).

Soit le modèle à mémoire courte suivant :

$$(1 - 0,7B)Y_t = (1 - 0,4B)\varepsilon_t$$

dans ce cas la densité spectrale est donnée par :

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{|1 - 0,4e^{-i\lambda}|^2}{|1 - 0,7e^{-i\lambda}|^2} \quad -\pi \leq \lambda \leq +\pi$$

4.2.2 Exemple B : AR(1).

Soit le modèle à mémoire courte suivant :

$$(1 - 0,7B)Y_t = \varepsilon_t$$

dans ce cas la densité spectrale est donnée par :

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi |1 - 0,7e^{-i\lambda}|^2} \quad -\pi \leq \lambda \leq +\pi$$

4.2.3 Exemple C : ARFIMA(1, 0.4, 1).

Soit le modèle à longue mémoire suivant :

$$(1 - B)^{0,4} (1 + 0,7B)Y_t = (1 - 0,4B)\varepsilon_t$$

dont la densité spectrale est :

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{|1 - 0,4e^{-i\lambda}|^2}{|1 + 0,7e^{-i\lambda}|^2} |1 - e^{-i\lambda}|^{-0,8} \quad -\pi \leq \lambda \leq +\pi$$

4.2.4 Exemple D : ARFIMA(1,-0.2,0).

Soit le modèle à longue mémoire suivant :

$$(1 - B)^{-0.2} (1 + 0.7B)Y_t = \varepsilon_t$$

dont la densité spectrale est :

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi|1 + 0.7e^{-i\lambda}|^2} |1 - e^{-i\lambda}|^{0.4} \quad -\pi \leq \lambda \leq +\pi$$

4.2.5 Exemple E : ARFIMA(0, 0.4, 0).

$$(1 - B)^{0.4} Y_t = \varepsilon_t$$

dont la densité spectrale est :

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |1 - e^{-i\lambda}|^{-0.8} \quad -\pi \leq \lambda \leq +\pi$$

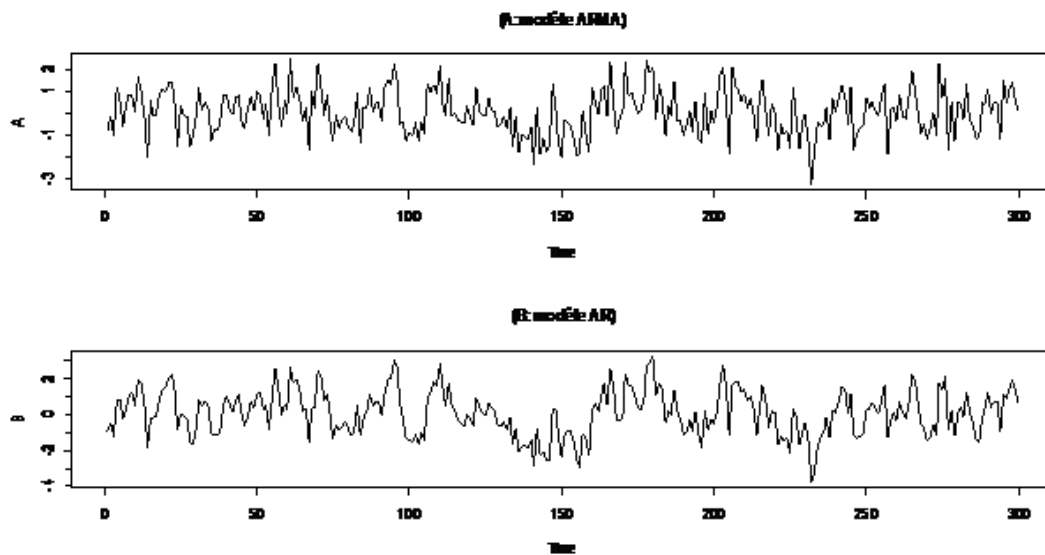


Fig. 4.1 - Les chroniques simulées des modèles ARMA et AR

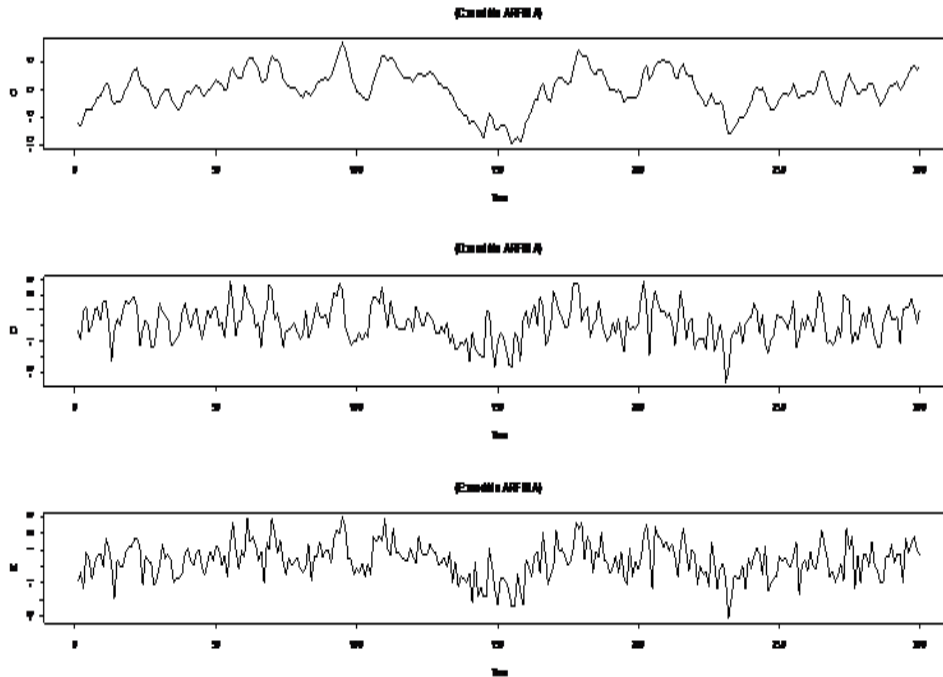


Fig. 4.2 - Les chroniques simulées des modèles ARFIMA

4.3 Interprétation des graphiques

4.3.1 Les chroniques

D'après les Figures 4.1 et 4.2, nous constatons que toutes les chroniques fluctuent autour de zéro. Ajoutant à ceci que les modèles ARMA et le modèle AR fluctuent plus rapidement que les modèles ARFIMA.

4.3.2 Les fonctions d'autocorrélations

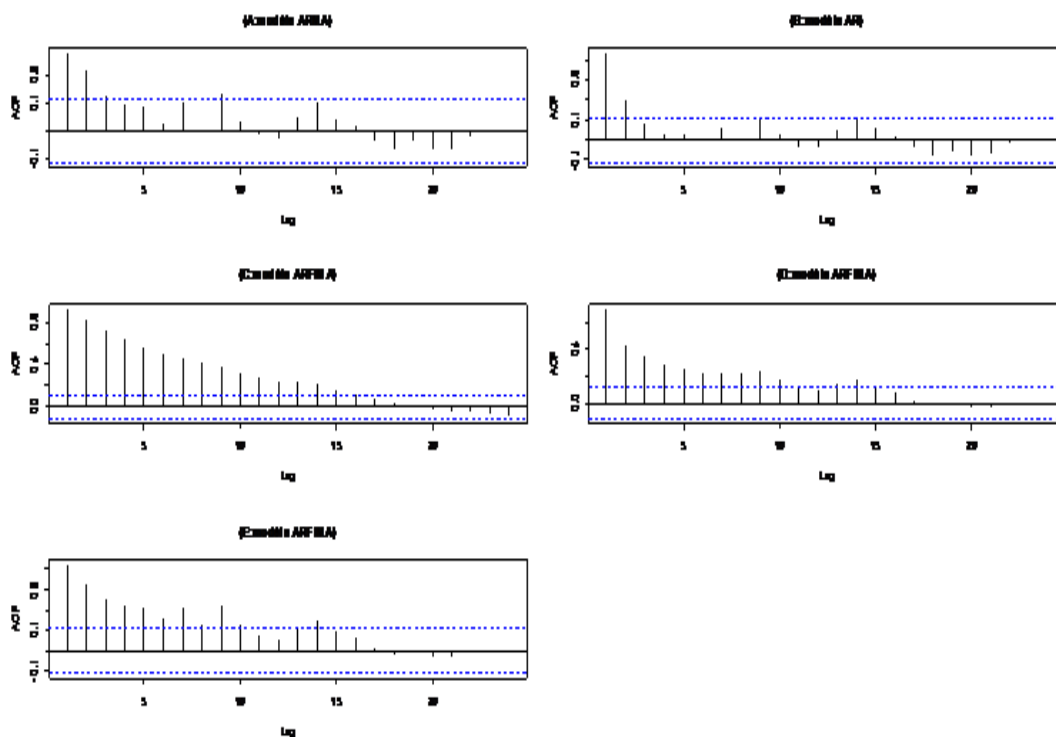


Fig. 4.3 - Les fonctions d'autocorrélations

La Figure 4.3 indique que les fonctions d'auto-corrélations du modèle ARMA et le modèle AR antipersistant décroissent d'une manière exponentielle, alors que celle du modèles ARFIMA à longue mémoire persiste et décroît lentement.

4.3.3 Les périodogrammes

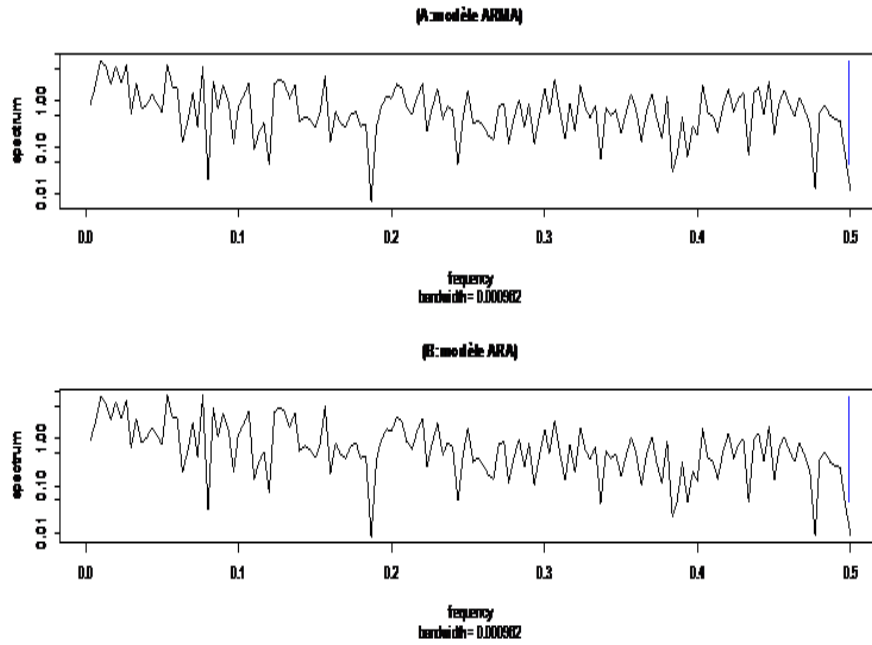


Fig. 4.4 - Les périodogrammes des modèles ARMA et AR

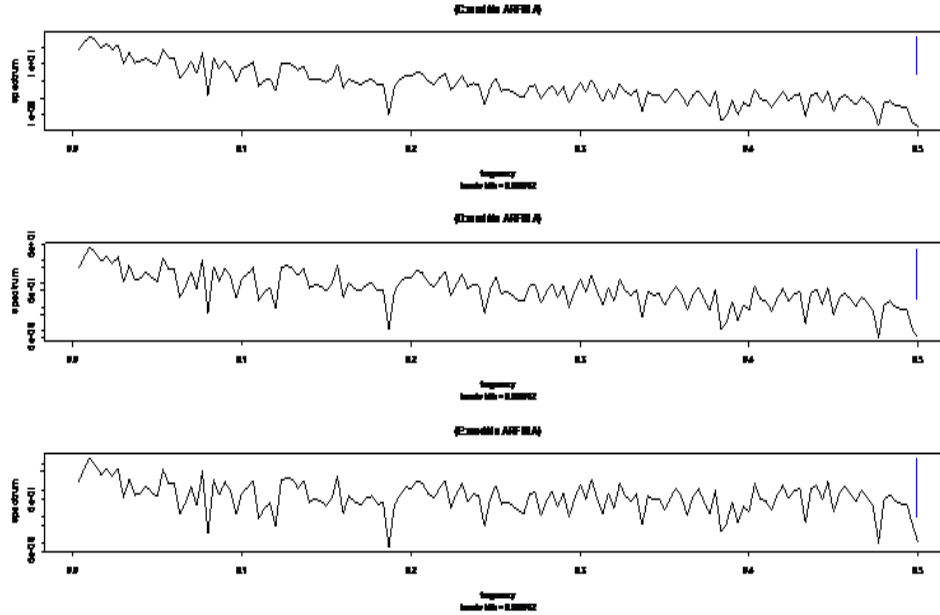


Fig. 4.5 - Les périodogrammes des modèles ARFIMA

D'après les Figures 4.4 et 4.5 on remarque, pour le modèle ARFIMA d'après les valeurs différentes de (d) que le graphe du périodogramme change en fonction de (d) , si d est négative on a une courbe parabolique positive et elle se stabilise à chaque fois que d s'approche de 0.5, par contre on obtient une courbe parabolique négative pour les modèles à court terme.

On remarque que l'autocorrélation des séries à longue mémoire décroît plus lentement par rapport à celle des séries à court terme, et leurs périodogramme, est plus corrélé que celui des séries à court terme.

Dans ce qui suit, nous allons présenter un test pour détecter la mémoire longue dans les exemples précédents, le test de mesure d'information.

4.4 Application du test basé sur la mesure d'information

On applique le test sur des exemples simulés pour tester la possibilité de détection de mémoire longue.

Dans les exemples simulés, on se donne un mécanisme qui décrit un processus Y_t et on veut simuler une trajectoire, $t = 1, \dots, N$, de la série obéissant à ce mécanisme.

On a z_t est un bruit blanc fractionnaire, $z_t \rightsquigarrow ARFIMA(0, 0.2, 0)$, $t = 1, \dots, N$ et $N = 300$,

a. Application du test d'un bruit blanc fractionnaire contre un ARFIMA(1,0.2,1)

On a simulé n variables aléatoires i.i.d $z_t \rightsquigarrow N(0, 1)$ et en utilisant l'équation

$$(1 - B)^{0.2} (1 + 0.8B)Y_t = (1 + 0.4B)\varepsilon_t$$

on obtient un échantillon y_1, y_2, \dots, y_n d'un processus $ARFIMA(0, 0.2, 1)$ avec $t = 1, \dots, N$ et $N = 300$.

- Test

On teste l'hypothèse nulle H_0 « la suite $Z(t)$ est une suite de variables aléatoires i.i.d (bruit blanc fractionnaire) » contre H_1 « (Y_t) est un processus $ARFIMA(p, d, q)$ ».

On sait que sous H_0 , $N\widehat{M} \rightsquigarrow \chi_r^2$, et nous avons $r = \max(p, q + 1) = 3$, d'où $K = N\widehat{M} \rightsquigarrow \chi_3^2$. D'après la table du χ^2 , on a $\chi_3^2 = 7, 8147$, et donc on rejette H_0 si $K > 7$ au seuil $\delta = 5\%$.

- Algorithme de programmation en R

```
z=rnorm(n,1)
y=fracdiff.sim(n , ar = c(-0.8), ma = c(-0.4), d = 0.2,innov= z )
S1=spec.pgram(g$series)
Spec1=S1$spec
bbf=fracdiff.sim(n ,d =0.2 ,innov= z )
Spec2=bbf$spec
dw=(S1$freq[2]-S1$freq[1])*2*pi
M=(log(abs(sum(Spec1/Spec2)*dw))/pi)-(sum(log(abs(Spec1/Spec2)))*dw/pi)
```

```
k=(n)*M
k
```

On obtient pour $ARFIMA(1, 0.2, 0)$, $K = N\widehat{M} = 144.9863 > 7.8147$.

On remarque que la valeur de K est supérieur à la χ_3^2 , par conséquent on rejette H_0 donc Y n'est pas un bruit blanc fractionnaire et on accepte H_1 donc (Y_t) est un processus $ARFIMA(p, d, q)$.

b. Application du test sur un bruit blanc fractionnaire et AR-FIMA(1,0.2,0)

On a z_t est un bruit blanc fractionnaire $ARFIMA(0, 0.2, 0)$, et le processus $ARFIMA(1, 0.2, 0)$ simulé, le modèle s'écrit $(1 - B)^{0.2} (1 - 0.9B)Y_t = \varepsilon_t$, $t = 1, \dots, N$ et $N = 300$.

- Hypothèse

On note par H_0 l'hypothèse nulle qui est « la suite (Z) est une suite de variables aléatoires *i.i.d* (bruit blanc fractionnaire) » contre H_1 « (Y) est un processus $ARFIMA(p, d, q)$ »

Sous H_0 , $N\widehat{M} \rightsquigarrow \chi_r^2$ on rejette H_0 si $\widehat{M} > \sigma$ pour un certain $\sigma > 0$.

$r = \max(p, q + 1) = 2$, $K = N\widehat{M} \rightsquigarrow \chi_2^2$, $\sigma = 5.9915$.

- Algorithme de programmation en R

```
z=rnorm(n,1)
h=fracdiff.sim(n , ar = c(0.9), d = 0.2,innov= z )
S1=spec.pgram(h$series)
Spec1=h$spec
bbf=fracdiff.sim(n ,d =0.2 ,innov= z )
Spec2=bbf$spec
dw=(S1$freq[2]-S1$freq[1])*2*pi
M=(log(abs(sum(Spec1/Spec2)*dw))/pi)-(sum(log(abs(Spec1/Spec2)))*dw/pi)
k=(n)*M
k
```

pour $ARFIMA(1, 0.2, 0)$, $k = N\widehat{M} = 268.1551 > 5,9915$.

On remarque que la valeur de k est supérieur à la $khi(2)$, par conséquent on rejette H_0 donc Y n'est pas un bruit blanc fractionnaire.

c. Application du test sur un bruit blanc gaussien et ARFIMA(0,0.2, 1).

On a z_t est un bruit blanc fractionnaire $ARFIMA(0, 0.2, 0)$, et le processus $ARFIMA(0, 0.2, 1)$ simulé, le modèle s'écrit $(1 - B)^{0.4} Y_t = (1 + 0.7B)\varepsilon_t$, $t = 1, \dots, N$ et $N = 300$.

– **Hypothèse**

On note par H_0 l'hypothèse nulle qui est « la suite (Z) est une suite de variables aléatoires *i.i.d* (bruit blanc fractionnaire) » contre H_1 « (Y) est un processus $ARFIMA(p, d, q)$ »

Sous H_0 , $N\widehat{M} \rightsquigarrow \chi_r^2$ on rejette H_0 si $\widehat{M} > \sigma$ pour un certain $\sigma > 0$.

$r = \max(p, q + 1) = 2$, $K = N\widehat{M} \rightsquigarrow \chi_2^2$, $\sigma = 5.9915$

– **Algorithme de programmation en R**

```
z=rnorm(n,1)
k=fracdiff.sim(n , ma = c(-0.7), d = 0.2,innov= z )
S1=spec.pgram(k$series)
Spec1=S1$spec
bbf=fracdiff.sim(n ,d =0.2 ,innov= z )
Spec2=bbf$spec
dw=(S1$freq[2]-S1$freq[1])*2*pi
M=(log(abs(sum(Spec1/Spec2)*dw))/pi)-(sum(log(abs(Spec1/Spec2)))*dw/pi)
k=(n)*M
k
```

pour $ARFIMA(1, 0.2, 0)$, $k = N\widehat{M} = 147.5624 > 5, 9915$.

On remarque que la valeur de k est supérieur à la $khi(2)$, par conséquent on rejette H_0 donc Y n'est pas un bruit blanc *fractionnaire*.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons donné une étude comparatif entre les processus à mémoire courte ($AR, MA, ARMA$) et les processus à mémoire longue ($ARFIMA, FARIMA$), en comparant les graphiques des chroniques, des densités spectrales et des fonctions d'autocorrélation, obtenues par simulation en prenant $N = 300$; et on remarque la possibilité de détection de mémoire longue.

Et afin de tester la mémoire longue, nous avons appliqué le test de mesure d'information et on a détecté la présence de la mémoire longue par l'application du test sur des modèles simulés.

Conclusion Générale

Au cours de ce mémoire, nous avons présenté une étude basée sur l'aspect spectrale des processus ARFIMA, nous avons étudié le périodogramme de ces modèles, et la possibilité de détecter la mémoire longue.

Les résultats de ce travail se résument principalement en les points suivants :

Dans le premier chapitre nous avons présenté les notions et préliminaires de bases et quelques notations utilisés en séries chronologiques, nous présentons les processus linéaires stationnaires ainsi que les fonctions d'autocovariance et la fonction d'autocorrélation.

Dans le deuxième chapitre nous avons discuté une classe importante de processus, qui est la classe des processus à longue mémoire. Nous avons définie les $M(d)$ - processus admettant le paramètre de mémoire $d < 1/2$ pour les processus stationnaire, puis pour $d \in \mathbb{R}$ et nous nous sommes intéressé principalement au modèle $ARFIMA(p, d, q)$. Par la suite nous avons donné quelques exemples de processus à mémoire longue, soit, le mouvement Brownien fractionnaire (FBM), le bruit Gaussien fractionnaire (FGN).

Nous avons consacré le troisième chapitre à l'étude fréquentielle des séries temporelles, qui est l'analyse spectrale. Nous avons donné la densité spectrale de quelques modèles, et nous avons estimé cette dernière par le périodogramme. Et afin de tester la mémoire longue, nous avons présenté le test de mesure d'information.

Enfin, dans le dernier chapitre nous avons donné une étude comparatif entre les processus à mémoire courte ($AR, MA, ARMA$) et les processus à mémoire longue ($ARFIMA, FARIMA$), en comparant les graphiques des chronique, des densités spectrales et des fonctions d'autocorrélation, obtenus par simulation en prenant $N = 300$; et on a remarqué la possibilité de détection de mémoire longue.

Et afin de tester la mémoire longue, nous avons appliqué le test de mesure d'information et on a détecté la présence de la mémoire longue par l'application du test sur des modèles simulés.

Bibliographie

- [1] Azencott,R, Dacunha-Castelle,D, (1986). *Series of irregular observations*, Springer Verlag, New York.
- [2] Brockwell,P.J.and Davis,R.A. *Introduction to Time Series and Forecasting*. Second Edition.
- [3] Charpentier,A, *Introduction à la théorie des processus en temps discret Modèles ARIMA et méthode Box & Jenkins*
- [4] Hamilton,J.D (1954). *Time series analysis*.
- [5] Mokkadem,A (1995) A measure of information and its applications to test for randomness against ARMA alternatives and to goodness-of-fit test
- [6] Mokkadem, A., (1994), Une mesure d'information et son application à des tests pour les processus ARMA, C.R.Acad. Sci. Paris, T.319, Série I, 197-200.
- [7] Preumont A (1954) Vibrations aléatoires et analyse spectrale.
- [8] R. H. Shumway & D. S. Stoffer (2011)Time Series Analysis and Its Applications.
- [9] E.J.Hannan (1970) Multiple Time Series Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- [10] M.L. Puri (Ed.), (1970). Nonparametric Techniques in Statistical Inference.Cambridge.pp. 215–258
- [11] Wald and Wolfowitz, (1943) On exact tests for randomness in the nonparametric case based on serial correlation. Ann. Math. Statist.14 (1943), pp. 378–388
- [12] Hotelling and Pabst (1936). Rank correlation and tests of significance involving no assumption of normality. Ann. Math. Statist., 7 (1936), pp. 29–43

- [13] Bell, M. Woodroffe, T.V. Avadhani, (1970). Some nonparametric tests for stochastic processes.
- [14] A. M. Yaglom. Correlation theory of processes with random stationary n th increments. Amer. Math. Soc. Transl. (2), 8 :87–141, 1958. ISSN 0065-9290.
- [15] C. M. Hurvich, G. Lang, and P. Soulier. Estimation of long memory in the presence of a smooth nonparametric trend. J. Amer. Statist. Assoc., 100(471) :853–871, 2005. ISSN0162-1459.
- [16] P. M. Robinson. Log-periodogram regression of time series with long range dependence. The Annals of Statistics, 23 :1048–1072, 1995a.
- [17] K. Tanaka. The nonstationary fractional unit root. Econometric Theory, 15(4) :549–582, 1999. ISSN 0266-4666.
- [18] K. Shimotsu and P. C. B. Phillips. Exact local Whittle estimation of fractional integration. Ann. Statist., 33(4) :1890–1933, 2005. ISSN 0090-5364.