N° d'ordre : 02 /012-M /PH

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE
Faculté de Physique

MEMOIRE

PRESENTE POUR OBTENTION DU DIPLOME DE MAGISTER

EN PHYSIQUE

SPECIALITE : Physique Théorique Des Basses et Moyennes Energies

PAR : HAMIL BILEL

THEME

Traitement de certains problèmes relativistes par les intégrales de chemin

Soutenu publiquement le 28 /04 /2012, Devant le jury composé de:

M. A. CHOUCHAOUI	Prof à l'USTHB	Président
M. L. CHETOUANI	Prof à l'Université de Constantine	Directeur de mémoire
Mme. F. CHAFA	Prof à l'USTHB	Examinatrice
Mme. F.Z. IGHEZOU	Prof à l'USTHB	Examinatrice
M. M. BENTAIBA	Prof à l'Université de Blida	Examinateur

Remerciements

Ce présent travail a été réalisé au département de physique de la faculté des sciences exactes de l'université Mentouri-Constantine sous la direction scientifique de Mr le Pr. L. Chetouani.

Je lui exprime ma profonde gratitude et mon très grand respect, pour le sujet qu'il m'a proposé et aussi pour son immense aide dans la concrétisation de ce travail.

Je remercie très sincèrement M. Chouchaoui qui m'a fait l'honneur d'être le président de Jury. Mes remerciements vont aussi vers M. Bentaiba, Mme. Chafa, Mme. Ighezou quiont accepté la soutenance de cette thèse achevant ainsi un projet particulièrement important de ma vie.

Un grand merci aussi à toutes les personnes qui ne sont pas citées et qui ont néanmoins contribuées à ce travail.

Bilel Hamil

Table des matières

1 Introduction générale **3**

2 Particule de Dirac dans un champ non–abelien **6**

2.1 Introduction 6

2.2 Fonction de Green : approche globale 9

2.2.1 Formulation 9

2.2.2 Calcul de $G(x_f, x_i)$ 13

2.3 Fonction de Green : approche locale 26

2.3.1 Formulation 26

2.3.2 Calcul de $S(x_f.x_i)$ 27

2.4 Conclusion 37

3 Particule de Dirac dans des champs externes : Solution par la méthode des intégrales de chemins **38**

3.1 Introduction 38

3.2 Formulation intégrale de chemin et calcul de S_1 41

3.3 Formulation intégrale de chemin et calcul de S_2 46

3.4 Applications 47

3.4.1 -Cas 1 : $H_3(x_1) = \beta$ 47

3.4.2 -Cas 2 : $H_3(x_1) = \beta x_1$: 48

3.5 Conclusion 53

4 Équation de Pauli et intégrales de chemins **55**

4.1 Introduction . . . 55

4.2 Formulation intégrale de chemin de S_1 et S_2 . . . 58

4.3 Cas libre . . . 60

4.4 Conclusion . . . 65

5 Conclusion Générale **66**

Chapitre 1

Introduction générale

Dans ce mémoire thèse de Magister, nous proposons de montrer, pour des particules relativistes de spin (=1/2) et de masse m, comment obtenir la solution de l'équation de Dirac, en utilisant les intégrales de chemin. Ces particules sont en mouvement dans des champs avec des formes qui sont choisies de telle manière que les solutions soient exactes et analytiques . Succinctement, au lieu de solutionner directement l'equation de Dirac,

$$\left(\gamma^{\mu}\left(i\partial_{\mu}-gA_{\mu}\right)-m\right)\Psi\left(x\right)=0 \qquad \mu=0,1,2,3$$

nous déterminons un certain noyau appelé propagateur (ou encore fonction de Green) décrivant toute la dynamique du système (ou particule) et qui est solution de

$$\left(\gamma^{\mu}\left(i\partial_{\mu}-gA_{\mu}\right)-m\right)S\left(x,x'\right)=\delta^{4}\left(x-x'\right) \qquad \mu=0,1,2,3$$

ou symboliquement

$$\left(\gamma\left(p-gA\right)-m\right)S=I$$

La détermination de S constitue ainsi l'objet de ce mémoire, car elle permet à partir de la décomposition spectrale d'extraire les fonctions d'onde ainsi que le spectre des énergies.

Rappelons que dans le cas non relativiste et suivant Feynman, la forme standard du propagateur s'écrit $\sum e^{iA}$ où A est l'action prise sur un chemin et où la somme concerne tous les chemins possibles.Cette somme infinie, depuis l'introduction de transformations spatio- temporelles a pu être calculée pratiquement pour tous les cas solubles suivant la mécanique non relativiste traditionnelle . Par contre, pour des particules relativistes, de spin 1/2 par exemple, la forme standard n'est plus valable en principe à cause du spin qui , par essence, prend des valeurs discrètes. L'insertion de cette entité fondamentale que constitue le spin, dans le formalisme de Feynman au moyen de chemins continus est actuellement un problème.

Concrètement pour les calculs, la forme en exponentielle (surtout gaussienne) semble être la forme la plus appropriée et grâce aux variables non commutantes ou de Grassmann, le spin trouve sa place dans la formulation intégrale de chemin .

Aussi, dans ce mémoire nous avons utilisé deux formalismes ceux de Alexandrou [1] et de Gitman [2]qui sont actuellement les plus appropriés pour l'équation de Dirac .Ces formalismes sont basés sur la formule

$$
\begin{aligned}
O^{-1} &= \frac{1}{O} = O\frac{1}{O^2} = -iO\int_0^\infty de \exp\left[ie\left(O^2\right)\right] \\
&= -i\int_0^\infty de \int \exp\left[ie\left(O^2 + i\varepsilon\right) + O\chi\right] d\chi
\end{aligned}
$$

qui permet de reconvertir l'inverse d'un opérateur O en une exponentielle au moyen de

-d'une somme (dans le cas dit global) avec e un paramètre de type bosonique

-de deux sommes (dans le cas dit local) avec e, χ deux paramètres respectivement de type bosonique et fermionique ou qui anticommutent.

La différence entre ces deux formalismes réside dans l'utilisation d'une certaine matrice supplémentaire γ^5 et son ajout permet d' homogéneiser les termes afin que l'action soit un scalaire.

Bien qu'un certain intérêt est porté actuellement sur les deux formalismes[1] et [2] la situation ne semble pas tout à fait claire et afin de voir si ces deux formalismes peuvent se développer, il y a lieu d'abord de les maîtriser en effectuant des calculs afin de confronter les résultats avec ceux existant dans la littérature.Une fois le test réussi , nous pourrons alors dire que les formalismes peuvent constituer une alternative à l'équation différentielle (de Dirac) et c'est l'objectif de ce mémoire.

Ce mémoire s'inscrit dans la continuité de certains travaux effectués récemment[3] et qui ont traité divers problèmes d'interaction parmi lesquelles le cas important de l'interaction d'une particule de Dirac avec une onde plane et ceci suivant les deux approches globale et locale .

Ce mémoire comporte trois chapitres en plus de l'introduction et la conclusion

Dans le 2ème chapitre , il est question du traitement du problème de l'interaction d'une particule de Dirac avec une interaction de type non abelien décrite par un champ ayant des proprietés semblales à celle de l'onde plane mais qui comporte en plus, des générateurs de groupe SU(N) . Ce type de problème est considéré pour la 1ère fois dans cette thèse en remarquant qu'il n'y a aucun calcul avec ce genre de problème bien que le formalisme existe.

Dans le 3ème chapitre, il est question de la séparation des variables dans le formalisme des intégrales pour simplifier les intégrations, l'importance de la séparation étant assez connue dans la résolution de problèmes à plusieurs variables dans les équations différentielles.

Enfin sur une idée de Levy-Leblond , nous montrons dans le 4ème chapitre ,comment ramener pour une particule de spin 1/2, soumise à un champ magnétique statique et dont le mouvement est décrit par l'équation de Pauli avec des noyaux linéaires en E et p . S'inspirant de Dirac sur la nature relativiste du spin, nous construisons le propagateur de Schrodinger suivant l'approche supersymétrique , et c'est ainsi que le propagateur de l'équation de Pauli est écrit sous la forme d'une somme d'un produit de deux propagateurs relatifs à ces deux noyaux linéaires . Comme exemple, le cas de la particule libre est considéré.

Chapitre 2

Particule de Dirac dans un champ non–abelien

2.1 Introduction

Il s'agit dans ce chapitre, de déterminer la solution pour une particule de spin 1/2 soumise à un champ de type non abélien en utilisant les intégrales de chemins. Indirectement, il s'agit de résoudre l'équation de Dirac suivante

$$(i\,\gamma^{\mu}\,\,(\partial_{\mu}\,\,+\,\,ig\,\,A_{\mu}\,\,(x))-\,\,m)\,\Psi\,(x)=0,$$

où A_μ est un champ non abélien . Evidemment cette équation de Dirac n'a de solutions analytiques que pour des intéractions ayant des formes bien particulières. Aussi, nous considérons dans ce chapitre, un champ non abélien particulier de type Volkov, c'est à dire qu'il obéit aux propriétés suivantes :

-il est développable sur la base des générateurs $\{T^a\}_a$ du groupe $SU(N)$,

$$A_\mu = A_\mu^a T_a \qquad\qquad a = 1, ..., N^2 - 1,$$

où les A_μ^a sont des composantes partielles.

-il est une fonction uniquement du produit kx,où k est le 4-vecteur onde tel que

$$k^2 = k^\mu k_\mu = 0.$$

-il satisfait à la condition de jauge de Lorentz.

$$\partial_\mu A^\mu = 0,$$

condition équivalente à

$$k_\mu \dot{A}^\mu = 0,$$

ou encore

$$kA = 0.$$

La résolution directe de cette équation de Dirac a été effectuée récemment[4] et la solution a été obtenue de manière analytique. En ce qui concerne les intégrales de chemins, il n'existe dans la littérature aucun calcul concret de propagteurs avec des champs de type non abélien, mis à part la formulation path integral qui a été donnée[5] .

Aussi nous proposons dans ce chapitre de donner pour la 1ère fois la solution à ce type de problème.

Pour celà nous déterminons le propagateur $S\left(x_f, x_i\right)$ ou élément de matrice dans l'espace de configuration de l'opérateur S solution de l'équation formelle

$$\left(\ \gamma^\mu\ \left(p_\mu\ - g\ A_\mu^a\ T_a\right) -\ m\right) S = I. \tag{2.1}$$

Cet opérateur S est simplement égal à

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\left(\ \gamma^\mu\ \left(p_\mu\ - g\ A_\mu^a\ T_a\right) -\ m\right)} && (2.2) \\ &= \frac{\left(\ \gamma^\mu\ \left(p_\mu\ - g\ A_\mu^a\ T_a\right) +\ m\right)}{\left(\ \gamma^\mu\ \left(p_\mu\ - g\ A_\mu^a\ T_a\right) -\ m\right)\left(\ \gamma^\mu\ \left(p_\mu\ - g\ A_\mu^a\ T_a\right) +\ m\right)} && (2.3) \end{aligned}$$

Il existe actuellement deux manières de construire la représentation intégrale de chemin pour ce propagateur

- une approche dite globale : après multiplication par $\left(\ \gamma^\mu\ \left(p_\mu\ - g\ A_\mu^a\ T_a\right) +\ m\right)$, il apparait au dénominateur une forme qui rappelle l'équation de Klein-Gordon et c'est cette forme qui est représentée par une intégrale de chemin. Nous avons donc une approche mixte d'opérateurs plus intégrale de chemin. La forme intégrale de chemin donne des solutions du problème mais en faisant agir l'opérateur introduit initialement , on élimine ainsi par projection les solutions superflues (non physiques).

-une approche dite locale : l'opérateur $\left(\gamma^{\mu} \ \left(p_{\mu} \ - g \ A^{a}_{\mu} \ T_a\right) + \ m\right)$ est représenté également par une intégrale de chemin à l'aide d'une variable de Grassmann .

La représentation est donc intégralement path integral et les solutions que nous obtenons sont alors physiques.

C'est cette démarche dûe à Alexandrou et al .[1] que nous adoptons dans ce chapitre.

Dans ce chapitre, l'espace temps $x^{\mu} = \left(x^0; \overrightarrow{x}\right) = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ est muni de la métrique $g^{\mu\nu} = (+, -, -, -, -)$ et nous notons par m la masse du fermion, par g la constante de couplage, par γ^{μ} les matrices de Dirac. Les générateurs T_a vérifient en outre :

$$[T_a \ ,T_b] = T_a \ T_b - T_b T_a = i f_{ab}{}^{c} T_c \tag{2.4}$$

$$\mathrm{tr}\left(T_a T_b\right) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \tag{2.5}$$

$$[T_a \ ,T_b]_{+} = T_a \ T_b + T_b T_a = \frac{1}{N}\delta_{ab} + d_{ab}{}^{c} T_c \tag{2.6}$$

où $f_{ab}{}^{c}$ sont les constantes de structure du groupe $SU\left(N\right)$ (anti-symétriques dans toute permutation d'indice) et que pour $N = 2$ et $3, (2T_a \ )$ peut être est représenté respectivement par les matrices de Pauli et Gill-Mann . Les constantes $d_{ab}{}^{c}$ sont réelles et symétriques dans toute permutation d'indice.

Commençons par l'approche simple dite globale pour déterminer la fonction de Green.

2.2 Fonction de Green : approche globale

2.2.1 Formulation

Posons d'abord

$$O_{\pm} = \left(\gamma^{\mu} \ \left(p_{\mu} \ - g \ A_{\mu}^{a} \ T_{a}\right) \pm \ m\right), \tag{2.7}$$

nous pouvons voir que le produit

$$O_{-}O_{+} = p_{\mu} \ p^{\mu} - \ m^{2} \ + \ g^{2} \left(\ \gamma^{\mu} A_{\mu}^{a} \ T_{a}\right)^{2} + 2g \left(\ \gamma^{\mu} A_{\mu}^{a} \ T_{a}\right) \left(\gamma^{\mu} p_{\mu}\right) - ig \left(k_{\mu}\gamma^{\mu}\right) \left(\ \gamma^{\mu} \dot{A}_{\mu}^{a} T_{a}\right) \tag{2.8}$$

où $\dot{A}$ désigne la dérivation par rapport à kx . En utilisant le cône de lumière, le carré est calculable

$$\left(\ \gamma^{\mu} A_{\mu}^{a} \ T_{a}\right)^{2} = \left(\frac{1}{N}\delta_{ab} + d_{ab}{}^{c}T_{c} + \frac{i}{2} f_{ab}{}^{c}T_{c}\right) \left(\eta_{\mu\upsilon} + \frac{1}{2}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)\right) A_{\mu}^{a} \ A_{\nu}^{b} \ = \frac{A_{\mu}^{a} \ A_{a}^{\mu}}{2N} \tag{2.9}$$

et nous constatons qu'il est indépendant des générateurs.

Introduisons l'espace de configuration pour déterminer la fonction de Green . Il est facile de voir que pour déterminer la fonction de Green S il suffit de déterminer G : S et G étant reliés par

$$S(x_f, x_i) = \left(i \ \gamma^{\mu} \ \left(\partial_{\mu x_f} \ + \ ig \ A_{\mu}^{a} \ (x_f) \, T_a\right) + \ m\right) G(x_f, x_i) \tag{2.10}$$

où G est la fonction de Green

$$G(x_f, x_i) = -\frac{i}{2} \int_0^{\infty} de \langle x_f \mid \exp(-i\frac{e}{2}\mathcal{H}) \mid x_i \rangle$$

avec

$$\mathcal{H}(e,x,p)=em^2-ep^2-eg^2\frac{A_\mu^a A_a^\mu}{2N}-i2eg\left(p^\mu A_\mu^a T_a\right)-ge\left(k_\mu\gamma^\mu\right)\left(\ \gamma^\mu \dot{A}_\mu^a T_a\right), \qquad (2.11)$$

Pour construire la forme path integral de G , nous utilisons la méthode usuelle qui élimine les opérateurs et qui consiste à :

- d'abord subdiviser l'intervalle $[x_i, x_f]$ en N parties égales

-à insérer $(N-1)$ relations de fermeture

$$\int \mid x\rangle\langle x\mid d^4x=1,$$

-à insérer N relations de fermeture

$$\int \mid p\rangle\langle p\mid d^4p=1,$$

où les vecteurs $\mid p\rangle$ sont tels que

$$P^\mu\mid p\rangle=p^\mu\mid p\rangle,$$

-à utiliser le produit scalaire

$$\langle x\mid p\rangle=\frac{1}{(2\pi)^2}\exp(ipx),$$

pour changer de base $\mid x\rangle\rightarrow\mid p\rangle$.

Nous obtenons alors pour G la forme discrète suivante

$$\begin{array}{c} G(x_f,x_i)=-\frac{i}{2}\mathcal{T}\lim\limits_{N\longrightarrow\infty}\int_0^\infty de_0\int d^4x_1...d^4x_{N-1}\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}...\frac{d^4p_N}{(2\pi)^4}de_1...de_N \\ \prod\limits_{k=1}^{N}\delta\left(e_k-e_{k-1}\right)\exp\left\{i\left[p_k\frac{\Delta x_k}{\Delta\tau}-\frac{1}{2}\mathcal{H}(e_k,\overline{x}_k,p_k)\right]\Delta\tau\right\}, \end{array} \qquad (2.12)$$

ou encore sous la forme continue

$$G(x_f,x_i)=-\frac{i}{2}\mathcal{T}\int_0^\infty de_0\int DxDe\int DpDp_e\exp\left\{i\int\left[p\dot{x}+p_e\dot{e}-\frac{1}{2}\mathcal{H}(e,x,p)\right]d\tau\right\}, \qquad (2.13)$$

où nous avons noté par

$$Dx = \prod_{j=1}^{N} d^4 x_j$$

$$Dp = \prod_{j=1}^{N+1} \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4}$$

et introduit le symbôle $\mathcal{T}$ qui est le $\mathcal{T}-$produit à cause du problème d'ordre des générateurs T_a (opérateurs) et de matrices γ^μ qui ne commutent pas. Nous avons noté par

$$x_f \equiv x_N, \quad x_i \equiv x_0, \quad \text{et } \Delta\tau = 1/N.$$

A ce niveau, pour éliminer les opérateurs que sont les générateurs T_a nous utilisons la procédure de [5] qui consiste à

-exprimer les générateurs par une relation bilinéaire d'opérateurs Γ

$$T_a = \frac{i}{4} f_{ap}^{\ \ b} \Gamma_b \Gamma^p, \tag{2.14}$$

-imposer aux Γ une relation d'anticommutation

$$[\Gamma_b, \Gamma_p]_+ = \delta_{bp}, \tag{2.15}$$

donc un caractère fermionique aux Γ.

Avec cette écriture, la fonction de Green devient

$$\begin{aligned} G \ &= \ -\frac{i}{2}\mathcal{T}\int_0^\infty de_0 \int DxDe \int DpDp_e \exp\left\{ i\int_0^1 \left[p\dot{x} + p_e \dot{e} + \frac{e}{2}\left\{ p^2 - m^2 + g^2 \frac{A_\mu^a A_a^\mu}{2N} + \right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left. \frac{ig}{2}\left(p^\mu A_\mu^a f_{ap}^{\ \ b}\Gamma_b(\tau)\Gamma^p(\tau)\right) + \frac{g}{4}\left(k_\mu \gamma^\mu(\tau)\right)\left(\gamma^\mu(\tau)\dot{A}_\mu^a f_{ap}^{\ \ b}\Gamma_b(\tau)\Gamma^p(\tau)\right) \right\} \right] d\tau \right\}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Procédons maintenant à l'élimination des opérateurs .

Pour celà, nous introduisons des variables anticommutantes (de Grassmann) et l'aide de deux identités qui consistent :

-d'abord à avoir une forme linéaire pour les Γ^a et les γ^n en utilisant des dérivées fonctionnelles (à gauche)par rapport à des sources (anti commutantes)

$$\mathcal{T}\exp\left\{F\ \ (\Gamma(\tau))\right\} = \exp\left\{F\left(\frac{\delta_g}{\delta\varkappa_a}\right)\right\}\mathcal{T}\exp\left\{\int_0^1 \varkappa_a\Gamma^a d\tau\right\}_{\varkappa=0}, \tag{2.17}$$

-ensuite à éliminer le $\mathcal{T}-$produit à l'aide de la formule

$$\begin{gathered}\mathcal{T}\exp\left\{\int_0^1 \varkappa_a\Gamma^a d\tau\right\}_{\varkappa=0} = \\ \exp\left(\Gamma^a\ \tfrac{\partial}{\partial\,\vartheta^a}\right)\int_{\zeta(1)+\zeta(0)=0}\mathcal{D}\xi\exp\left\{\int\left(-\xi\ ^a\dot{\xi}^a + 2\chi^a\zeta^a\right)d\tau\right\},\end{gathered} \tag{2.18}$$

Ces deux formules sont applicables pour les γ^μ : il suffit de faire le remplacement suivant $(\Gamma^a,\ \vartheta^a,\xi^a)\rightarrow(\gamma^\mu,\theta^\mu,\Psi^\mu)$

Ainsi notre fonction de Green prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}G\left(x_f,x_i\right) \quad = \quad & -\frac{i}{2}\exp\left(\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial\ \theta^\mu}+\Gamma^a\ \frac{\partial}{\partial\ \vartheta^a}\right)\int_0^\infty de_0\int DxDe\int DpDp_e\int\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\xi\exp\left\{i\int_0^1\left[p\dot{x}+\right.\right. \\ & \left.\left. i\Psi\dot{\Psi}+i\xi\dot{\xi}+p_e\dot{e}-\frac{1}{2}\mathcal{H}(e,x,p,2\xi+\vartheta,2\Psi+\theta)\right]d\tau\right\}_{\theta=\vartheta=0},\end{aligned}$$

où les mesures $\mathcal{D}\Psi$ et$\mathcal{D}\xi$ sont définies par

$$\mathcal{D}\Psi = D\Psi\left[\int_{\psi(1)+\psi(0)=0}D\Psi\exp\left\{-\int_0^1\Psi_\mu\dot{\Psi}^\mu d\tau\right\}\right]^{-1}, \tag{2.19}$$

$$\mathcal{D}\xi = D\xi\left[\int_{\zeta(1)+\zeta(0)=0}D\xi\exp\left\{-\int_0^1\xi\ ^a\dot{\xi}^a d\tau\right\}\right]^{-1}, \tag{2.20}$$

ϑ et θ étant des variables de Grassmann impaires

avec les conditions aux limites suivantes

$$\xi\left(1\right)+\xi\left(0\right)=0, \tag{2.21}$$

et

$$\Psi\left(1\right)+\Psi\left(0\right)=0. \tag{2.22}$$

Effectuons le changement $(\xi,\Psi)\rightarrow(\zeta,\psi)$ définit par

$$2\zeta\left(\tau\right)=2\ \xi\left(\tau\right)+\vartheta, \tag{2.23}$$

$$2\psi\left(\tau\right)=2\ \Psi\left(\tau\right)+\theta, \tag{2.24}$$

la fonction de Green prend alors la forme suivante

$$\begin{aligned}G\left(x_f,x_i\right)=&-\tfrac{i}{2}\exp\left(\gamma^\mu\tfrac{\partial}{\partial\,\theta^\mu}+\Gamma^a\ \tfrac{\partial}{\partial\,\vartheta^a}\right)\int_0^{+\infty}de_0\int DxDeDp_eDp\int_A\mathcal{D}\psi\int_B\mathcal{D}\zeta\exp\left\{i\int_0^1\left[p\dot{x}+\right.\right.\\ &i\zeta\dot{\zeta}+i\psi\dot{\psi}+p_e\dot{e}+\tfrac{e}{2}\left\{p^2-m^2\ +\ g^2\tfrac{1}{2N}A_\mu^aA_a^\mu+2ig\left(p^\mu A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)+\right.\\ &\left.\left.\left.4g\left(k_\mu^\mu\psi\right)\left(\psi^\mu\dot{A}_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right\}\right]d\tau+\psi\left(0\right)\psi\left(1\right)+\zeta\left(0\right)\zeta\left(1\right)\right\}_{\theta=\vartheta=0},\end{aligned} \tag{2.25}$$

où

$$A=\{\psi(\tau)/\psi(1)+\psi(0)=\theta\}$$

et

$$B=\{\zeta(\tau)/\zeta(1)+\zeta(0)=\vartheta\}$$

sont les deux nouveaux domaines d'intégration.

2.2.2 Calcul de $G\left(x_f,x_i\right)$

Aprés avoir obtenu la formulation de G au moyen d'intégrales de chemins, passons au calcul explicite de son expression.

A ce niveau, il est utile de faire une remarque : il apparait dans l'exposant de l'exponentielle l'expression

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \Bigg[p\dot{x} + i\zeta\dot{\zeta} + i\psi\dot{\psi} + p_e\dot{e} + \tfrac{e}{2}\Bigg\{ p^2 - m^2 \ + \ g^2\tfrac{1}{2N}A_\mu^a A_a^\mu + 2ig\left(p^\mu A_\mu^a \ f_{ap}^{\ b} \ \zeta_b\zeta^p\right) + 4g\left(k\psi\right)\left(\psi^\mu \dot{A}_\mu^a \ f_{ap}^{\ b} \ \zeta_b\zeta^p\right) \Bigg\}\Bigg] d\tau \tag{2.26}$$

qui est l'action, et si l'on s'intéresse aux chemins classiques suivies par notre particule de spin 1/2 les équations régissant son mouvement sont données par

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta e} &= -\dot{p}_e + \frac{1}{2}\left[p^2 - m^2 \ + \ g^2\frac{1}{2N}A_\mu^a A_a^\mu + 2ig\left(p^\mu A_\mu^a \ f_{ap}^{\ b} \ \zeta_b\zeta^p\right) + 4g\left(k\psi\right)\left(\psi^\mu \dot{A}_\mu^a \ f_{ap}^{\ b} \ \zeta_b\zeta^p\right)\right] = 0 \\
\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta p_e} &= \dot{e} = 0 \\
\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta x^\rho} &= -\dot{p}_\rho + ek_\rho\left(\ g^2\frac{1}{2N}\dot{A}_\mu^a A_a^\mu + ig\left(p^\mu \dot{A}_\mu^a \ f_{ap}^{\ b} \ \zeta_b\zeta^p\right) + 2g\left(k\psi\right)\left(\psi^\mu \ddot{A}_\mu^a \ f_{ap}^{\ b} \ \zeta_b\zeta^p\right)\right) = 0 \\
\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta p^\rho} &= \dot{x}_\rho + ep_\rho + ieg\left(A_\rho^a \ f_{ap}^{\ b} \ \zeta_b\zeta^p\right) = 0 \\
\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta \zeta^\rho} &= 2i\dot{\zeta}_\rho - 2eig\left(p^\mu A_\mu^a \ f_{a\rho}^{\ p} \ \zeta_p\right) - 4g\left(k\psi\right)\left(\psi^\mu \dot{A}_\mu^a \ f_{a\rho}^{\ b} \ \zeta_b\right) = 0 \\
\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta \psi^\rho} &= 2i\dot{\psi}_\rho + 2egk_\rho\left(\psi^\mu A_\mu^a \ f_{ap}^{\ b} \ \zeta_b\zeta^p\right) - 2eg\left(k\psi\right)\left(\dot{A}_\rho^a \ f_{ap}^{\ b} \ \zeta_b\zeta^p\right) = 0
\end{aligned}$$

Ayant fait au passage cette remarque, procédons aux intégrations.

D'abord en intégrant sur p_e nous obtenons $\delta(\dot{e})$ ce qui signifie que

$$e_0 = e_1 = ... = e$$

Il est plus commode de réintroduire l'impulsion par linéarisation , alors nous avons

$$
\begin{aligned}
G\left(x_f,x_i\right) \;=\; & -\frac{i}{2}\exp\left(\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial\,\theta^{\mu}}+\Gamma^{a}\;\frac{\partial}{\partial\,\vartheta^{a}}\right)\int_0^{\infty}de\int Dx\int Dp\int\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\zeta\exp\left\{i\int_0^1\left[p\dot{x}+i\psi\dot{\psi}+i\zeta\dot{\zeta}+\right.\right.\\
& \left.\frac{e}{2}\left(p^2-m^2\;+\;g^2\frac{1}{2N}A_{\mu}^{a}A_{a}^{\mu}+2ig\left(p^{\mu}A_{\mu}^{a}\;f_{ap}^{\;\;b}\;\zeta_b\zeta^{p}\right)+4g\left(k_{\mu}^{\mu}\psi\right)\left(\psi^{\mu}\dot{A}_{\mu}^{a}\;f_{ap}^{\;\;b}\;\zeta_b\zeta^{p}\right)\right)\right]d\tau+\\
& \left.\psi^{\mu}\left(0\right)\psi_{\mu}\left(1\right)+\zeta\left(0\right)\zeta\left(1\right)\right\}_{\theta=\vartheta=0}. \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

Comme $A_{\mu}^{a}\left(kx\right)$ est fonction uniquement de kx, nous allons réduire le mouvement quadri-dimensionnel en un mouvement à une dimension. Pour celà, posons

$$\varphi=kx,$$

et rendons kx et x indépendants en introduisant l'identité suivante

$$\int d\varphi_f\int d\varphi_i\delta(\varphi_i-kx_i)\delta(\varphi_f-\varphi_i-k(x_f-x_i))=1,$$

ou plutôt sa généralisation

$$\int d\varphi_f\int d\varphi_i\delta(\varphi_i-kx_i)\int\prod_{j=1}^{N}d\varphi_j\prod_{j=1}^{N+1}\delta(\Delta\varphi_j-k\Delta x_j)=1,$$

exprimée dans l'espace des phases (φ,p_{φ})

$$\int d\varphi_f\int d\varphi_i\;\delta(\varphi_i-kx_i)\int\prod_{j=1}^{N}d\varphi_j\int\prod_{j=1}^{N+1}\frac{dp_{\varphi_j}}{2\pi}\exp\left\{\sum_{j=1}^{N+1}p_{\varphi_j}(\Delta\varphi_j-k\Delta x_j)\right\}=1, \qquad (2.28)$$

avec

$$\Delta\varphi_j=\varphi_j-\varphi_{j-1},$$

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1},$$

en changeant

$$p_\mu \rightarrow p_\mu + k_\mu p_\varphi. \tag{2.29}$$

G devient alors

$$\begin{aligned} G\left(x_f, x_i\right) &= -\frac{i}{2}\exp\left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial\ \theta^\mu} + \Gamma^a\ \frac{\partial}{\partial\ \vartheta^a}\right)\int de \int Dx \int Dp \int d\varphi_f \int d\varphi_i \delta\left(\varphi_i - kx_i\right)\int D\varphi \int Dp_\varphi\ \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\zeta \\ & \exp\left\{i\int_0^1\left[p\dot{x} + i\psi\dot{\psi} + i\zeta\dot{\zeta} + \frac{e}{2}\left\{p^2 - m^2\ +\ g^2\frac{1}{2N}A_\mu^a A_a^\mu + 2ig\left(p^\mu A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right) + \right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left. 4g\left(k_\mu^\mu\psi\right)\left(\psi^\mu \dot{A}_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right\} + p_\varphi\left(\dot{\varphi} + ekp\right)\right]d\tau + \psi\left(0\right)\psi\left(1\right) + \zeta\left(0\right)\zeta\left(1\right)\right\}_{\theta=\vartheta=0}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

En intégrant sur les variables positions il est facile de voir que l'on obtient $\delta(\dot{p})$ c'est à dire

$$p_1 = p_2 = ... = p_{N+1} = p$$

que l'impulsion est conservée au cours du mouvement .

Ainsi, G se réduit à

$$\begin{aligned} G\left(x_f, x_i\right) = -\tfrac{i}{2}\exp\left(\gamma^\mu \tfrac{\partial}{\partial\ \theta^\mu} + \Gamma^a\ \tfrac{\partial}{\partial\ \vartheta^a}\right)\int de \int \tfrac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\varphi_f \int d\varphi_i \delta\left(\varphi_i - kx_i\right)\int D\varphi \int Dp_\varphi\ \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\zeta \\ \exp\left\{ip\left(x_f - x_i\right) + \tfrac{ie}{2}\left(p^2 - m^2\ \right) + \right. \\ i\int_0^1\left\{i\psi\dot{\psi} + i\zeta\dot{\zeta} + \tfrac{e}{2}\left\{\ g^2\tfrac{1}{2N}A_\mu^a A_a^\mu + 2ig\left(p^\mu A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right) + 4g\left(k_\mu^\mu\psi\right)\left(\psi^\mu \dot{A}_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right\} + \right. \\ \left.\left.\left. p_\varphi\left(\dot{\varphi} + ekp\right)\right\}d\tau + \psi\left(0\right)\psi\left(1\right) + \zeta\left(0\right)\zeta\left(1\right)\right\}_{\theta=\vartheta=0}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Nous pouvons maintenant intégrer sur p_φ

$$\int Dp_{\varphi}\exp\left\{i\int p_{\varphi}\left(\dot{\varphi}+ekp\right)d\tau\right\}=\delta\left(\dot{\varphi}+ekp\right), \tag{2.32}$$

ce qui réduit les contributions des chemins au calcul du propagateur uniquement à la droite d'équation

$$\begin{aligned} \varphi\left(\tau\right) &= \varphi_i - ekp\tau. & (2.33)\\ d\tau &= -\frac{1}{ekp}d\varphi & (2.34)\end{aligned}$$

Notons à ce niveau que les A_{μ}^{a} sont fonction uniquement de la variable τ .

Ainsi, G se réduit à

$$\begin{aligned} G\left(x_f,x_i\right) = -\tfrac{i}{2}\exp\left(\gamma^{\mu}\tfrac{\partial}{\partial\,\theta^{\mu}}+\Gamma^{a}\ \tfrac{\partial}{\partial\,\vartheta^{a}}\right)\int de\int\tfrac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\varphi_f\delta\left(\varphi_f-\varphi_i+ekp\right)\int d\varphi_i\delta\left(\varphi_i-kx_i\right)\int\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\zeta \\ \exp\Bigg\{ip\left(x_f-x_i\right)+\tfrac{ie}{2}\left(p^2-m^2\ \right)+ \\ i\textstyle\int_0^1\Bigg\{i\psi\dot{\psi}+i\zeta\dot{\zeta}+\tfrac{e}{2}\Bigg\{\ g^2\tfrac{1}{2N}A_{\mu}^{a}A_{a}^{\mu}+2ig\left(p^{\mu}A_{\mu}^{a}\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)+4g\left(k_{\mu}^{\mu}\psi\right)\left(\psi^{\mu}\dot{A}_{\mu}^{a}\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\Bigg\} \\ \Bigg\}d\tau+\psi\left(0\right)\psi\left(1\right)+\zeta\left(0\right)\zeta\left(1\right)\Bigg\}_{\theta=\vartheta=0}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

De même, posons

$$\eta = k\psi,$$

et rendons ψ et $k\psi$ indépendants en introduisant l'identité suivante

$$\int d\eta_i d\eta_f\delta(\eta_i-k\psi_i)\int\prod_{j=1}^{N}d\eta_j\int\prod_{j=1}^{N+1}dp_{\eta_j}\exp\left\{ip_{\eta_j}(\triangle\eta_j-k\Delta\psi_j)\right\}=1,$$

ou bien sous sa forme fonctionnelle

$$\int d\eta_i d\eta_f\delta(\eta_i-k\psi_i)\int D\eta\int Dp_{\eta}\exp\left\{i\int_0^1 p_{\eta}(\dot{\eta}-k\dot{\psi})d\tau\right\}=1, \tag{2.36}$$

où η et p_{η} sont des variables de Grassmann impaires.

L'expression de $G\left(x_f,x_i\right)$ devient alors

$$G\left(x_f,x_i\right)=-\tfrac{i}{2}\exp\left(\gamma^{\mu}\tfrac{\partial}{\partial\,\theta^{\mu}}+\Gamma^{a}\ \tfrac{\partial}{\partial\,\vartheta^{a}}\right)\int de\int\tfrac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\varphi_f\delta\left(\varphi_f-\varphi_i+ekp\right)\int d\varphi_i\delta\left(\varphi_i-kx_i\right)$$
$$\int d\eta_i d\eta_f\delta(\eta_i-k\psi_i)\int D\eta\int Dp_\eta\int\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\zeta\exp\Bigg\{ip\left(x_f-x_i\right)+\tfrac{ie}{2}\left(p^2-m^2\ \right)+$$
$$i\int_0^1\Bigg\{i\psi\dot{\psi}+i\zeta\dot{\zeta}+\tfrac{e}{2}\Bigg\{\ g^2\tfrac{1}{2N}A_\mu^aA_a^\mu+2ig\left(p^\mu A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)+4g\eta\left(\psi^\mu\dot{A}_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\Bigg\}+$$
$$\left.p_\eta(\dot{\eta}-k\dot{\psi})\Bigg\}d\tau+\psi\left(0\right)\psi\left(1\right)+\zeta\left(0\right)\zeta\left(1\right)\Bigg\}\right|_{\theta=\vartheta=0}. \tag{2.37}$$

Pour se libérer le domaine d'intégration A , effectuons le changement $\psi^\mu\rightarrow\omega^\mu$défini par

$$\psi^\mu(\tau)=\frac{1}{2}\int_0^1\varepsilon(\tau-\tau^{'})\omega^\mu(\tau^{'})d\tau^{'}+\frac{\theta^\mu}{2}, \tag{2.38}$$

où $\omega^\mu(\tau)$ et θ^μ sont des variables de Grassmann impaires.

La transformation (2.38) permet d'avoir ainsi une forme quadratique en $\omega^\mu(\tau)$

Notons que,

$$\psi^\mu(1)=\frac{1}{2}\int_0^1\omega^\mu(\tau)d\tau+\frac{\theta^\mu}{2},$$

$$\psi^\mu(0)=-\frac{1}{2}\int_0^1\omega^\mu(\tau)d\tau+\frac{\theta^\mu}{2},$$

et que le terme décrivant l'interaction spin-champ s'écrit

$$\psi^\mu\dot{A}_\mu^a\left(\varphi\right)\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p=\dot{A}_\mu^a\left(\varphi\left(\tau\right)\right)\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\frac{1}{2}\left\{\int_0^1\varepsilon(\tau-\tau')\omega^\mu(\tau')d\tau'+\theta^\mu\right\}.$$

Pour des raisons de commodité, nous adoptons la notation condensée qui consiste à omettre les intégrations et les parametres τ et τ'. Avec cette notation, nous avons

$$\dot{A}_{\mu}^{a}\left(\varphi\left(\tau\right)\right)\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_{b}\zeta^{p}\frac{1}{2}\left\{\int_{0}^{1}\varepsilon(\tau-\tau')\omega^{\mu}(\tau')d\tau'+\theta^{\mu}\right\}=\frac{1}{2}\dot{A}_{\mu}^{a}f_{ap}^{\ b}\ \zeta_{b}\zeta^{p}\left\{\varepsilon\omega^{\mu}+\theta^{\mu}\right\},$$

$$\int_{0}^{1}\psi_{\mu}\dot{\psi}^{\mu}d\tau=\frac{-1}{2}\omega_{\mu}\varepsilon\omega^{\mu}+\frac{\theta_{\mu}}{2}\omega^{\mu},$$

$$\psi^{\mu}(0)\psi_{\mu}(1)=\frac{1}{2}\theta_{\mu}\omega^{\mu},$$

et ainsi

$$\begin{aligned}G\left(x_{f},x_{i}\right)=&-\tfrac{i}{2}\exp\left(\gamma^{\mu}\tfrac{\partial}{\partial\,\theta^{\mu}}+\Gamma^{a}\ \tfrac{\partial}{\partial\,\vartheta^{a}}\right)\int de\int\tfrac{d^{4}p}{(2\pi)^{4}}\int d\varphi_{f}\delta\left(\varphi_{f}-\varphi_{i}+ekp\right)\int d\varphi_{i}\delta\left(\varphi_{i}-kx_{i}\right)\\&\int d\eta_{i}d\eta_{f}\delta(\eta_{i}+\tfrac{k}{2}(\omega-\theta))\int D\eta\int Dp_{\eta}\int\mathcal{D}\omega\int\mathcal{D}\zeta\exp\Bigg\{ip\left(x_{f}-x_{i}\right)+\tfrac{ie}{2}\left(p^{2}-m^{2}\ \right)+\\&i\int_{0}^{1}\Bigg\{\tfrac{-i}{2}\omega_{\mu}\varepsilon\omega^{\mu}+i\zeta\dot{\zeta}+\tfrac{e}{2}\Bigg\{\ g^{2}\tfrac{1}{2N}A_{\mu}^{a}A_{a}^{\mu}+2ig\left(p^{\mu}A_{\mu}^{a}\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_{b}\zeta^{p}\right)+\\&\tfrac{g\eta}{2}\left(\dot{A}_{\mu}^{a}f_{ap}^{\ b}\ \zeta_{b}\zeta^{p}\right)\left\{\varepsilon\omega^{\mu}+\theta^{\mu}\right\}\Bigg\}+p_{\eta}(\dot{\eta}-k\omega)\Bigg\}d\tau+\zeta\left(0\right)\zeta\left(1\right)\Bigg\}_{\theta=\vartheta=0}\end{aligned}\quad.\tag{2.39}$$

Il est commode à ce niveau de changer

$$\omega^{\mu}(\tau)\longrightarrow\omega^{\mu}(\tau)+ik^{\mu}\int_{0}^{1}\varepsilon^{-1}(\tau-\tau^{'})p_{\eta}(\tau^{'})d\tau^{'},\tag{2.40}$$

ainsi

$$\omega_{\mu}\varepsilon\omega^{\mu}\longrightarrow\omega_{\mu}\varepsilon\omega^{\mu}-2ip_{\eta}k\omega,$$

et

$$\varepsilon\omega^{\mu}\longrightarrow\varepsilon\omega^{\mu}+ik^{\mu}p_{\eta}.$$

Alors G devient

$$G\left(x_f,x_i\right)=\exp\left(\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial\,\theta^\mu}+\Gamma^a\ \frac{\partial}{\partial\,\vartheta^a}\right)\int de\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\varphi_f\delta\left(\varphi_f-\varphi_i+ekp\right)\int d\varphi_i\delta\left(\varphi_i-kx_i\right)$$
$$\int d\eta_i d\eta_f dp_{\eta_i}\int D\eta\int Dp_\eta\int\mathcal{D}\omega\int\mathcal{D}\zeta\exp\left\{ip\left(x_f-x_i\right)+\frac{ie}{2}\left(p^2-m^2\ \right)+i\int_0^1\left\{\frac{-i}{2}\omega_\mu\varepsilon\omega^\mu+i\zeta\dot{\zeta}+\right.\right.$$
$$\frac{e}{2}\left\{\ g^2\frac{1}{2N}A_\mu^a A_a^\mu+2ig\left(p^\mu A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)+\frac{g\eta}{2}\left(\dot{A}_\mu^a f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\left\{\varepsilon\omega^\mu+\theta^\mu\right\}\ \right\},$$
$$\left.\left.+p_\eta\dot{\eta}+p_{\eta_i}\left(\eta_i+\frac{k}{2}\left(\omega-\theta\right)\right)\right\}d\tau+\zeta\left(0\right)\zeta\left(1\right)\right\}_{\theta=\vartheta=0} \tag{2.41}$$

où nous avons remplacé la fonction δ

$$\delta(\eta_i+\frac{k}{2}(\omega-\theta))=\int dp_{\eta_i}\exp\left[ip_{\eta_i}\left(\eta_i+\frac{k}{2}\left(\omega-\theta\right)\right)\right], \tag{2.42}$$

par la forme en exponentielle.

Nous pouvons alors effectuer l'intégration sur les p_η : il apparait une fonction de Dirac

$$\int Dp_\eta\exp\left[i\int p_\eta\dot{\eta}d\tau\right]=\delta(\dot{\eta}), \tag{2.43}$$

qui exprime que le chemin d'équation

$$\dot{\eta}=0\Leftrightarrow\eta=\eta_i=\eta_f$$

contribue principalement à la détermination du propagateur .

Après réarrangement des termes en ω, nous obtenons pour l'intégrale sur les vitesses ω^μ , la forme standard suivante

$$\int\mathcal{D}\omega\exp\left\{\int_0^1\left[\frac{1}{2}\omega_\mu\varepsilon\omega^\mu+\mathcal{J}_\mu\omega^\mu\right]d\tau\right\}, \tag{2.44}$$

où

$$\mathcal{J}_\mu(\tau)=\frac{i}{2}k_\mu p_{\eta_i}+i\frac{g\eta_i}{4}\int_0^1\left(\dot{A}_\mu^a f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\varepsilon(\tau^{'}-\tau)d\tau^{'}, \tag{2.45}$$

dont le résultat est simplement égal à

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \mathcal{J}_\mu(\tau)\varepsilon^{-1}(\tau-\tau')\mathcal{J}^\mu(\tau')d\tau d\tau'\right\}.$$

En utilisant les propriétés du champ de Volkov, il est facile de voir que

$$\mathcal{J}_\mu\varepsilon^{-1}\mathcal{J}^\mu = 0, \tag{2.46}$$

alors G se simplifie

$$\begin{aligned} G\left(x_f,x_i\right) = -\tfrac{i}{2}\exp\left(\gamma^\mu\tfrac{\partial}{\partial\,\theta^\mu}+\Gamma^a\ \tfrac{\partial}{\partial\,\vartheta^a}\right)\int de\int\tfrac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\varphi_f\delta\left(\varphi_f-\varphi_i+ekp\right)\int d\varphi_i\delta\left(\varphi_i-kx_i\right) \\ \textstyle\int d\eta_i d\eta_f dp_{\eta_i}\delta\left(\eta_i-\eta_f\right)\int\mathcal{D}\zeta\exp\left\{ip\left(x_f-x_i\right)+\tfrac{ie}{2}\left(p^2-m^2\ \right)+i\int_0^1\left\{i\zeta\dot{\zeta}+\right.\right. \\ \tfrac{e}{2}\left\{\ g^2\tfrac{1}{2N}A^a_\mu A^\mu_a+2ig\left(p^\mu A^a_\mu\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)+\tfrac{g\eta_i}{2}\left(\theta^\mu\dot{A}^a_\mu f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\ \right\}+ \\ \left.\left. p_{\eta_i}\left(\eta_i-\tfrac{k}{2}\theta\right)\ \right\}d\tau+\zeta\left(0\right)\zeta\left(1\right)\ \right\}_{\theta=\vartheta=0}, \end{aligned} \tag{2.47}$$

et après intégration sur p_{η_i}

$$\int dp_{\eta_i}\exp\left\{ip_{\eta_i}\left(\eta_i-\frac{k}{2}\theta\right)\right\}=\delta\left(\eta_i-\frac{k}{2}\theta\right) \tag{2.48}$$

les valeurs de $\eta_i=\frac{k}{2}\theta=\eta_f$ sont alors fixées .

La fonction de Green a maintenant la forme suivante

$$\begin{aligned} G\left(x_f,x_i\right) = -\tfrac{i}{2}\exp\left(\gamma^\mu\tfrac{\partial}{\partial\,\theta^\mu}+\Gamma^a\ \tfrac{\partial}{\partial\,\vartheta^a}\right)\int de\int\tfrac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\varphi_f\delta\left(\varphi_f-\varphi_i+ekp\right)\int d\varphi_i\delta\left(\varphi_i-kx_i\right) \\ \textstyle\int\mathcal{D}\zeta\exp\left\{ip\left(x_f-x_i\right)+\tfrac{ie}{2}\left(p^2-m^2\ \right)+i\int_0^1\left\{i\zeta\dot{\zeta}+\tfrac{e}{2}\left\{\ g^2\tfrac{1}{2N}A^a_\mu A^\mu_a+\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. g\left(\tfrac{k\theta}{2}\right)\left(\theta^\mu\dot{A}^a_\mu f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)+2ig\left(p^\mu A^a_\mu\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right\}d\tau+\zeta\left(0\right)\zeta\left(1\right)\right\}_{\theta=\vartheta=0}. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Il nous reste encore à effectuer les intégrations sur les variables relatives aux générateurs du groupe $SU\left(2\right)$.

Effectuons le changement $\zeta \rightarrow \xi$ défini par

$$\zeta\left(\tau\right)=\xi\left(\tau\right)+\frac{1}{2}\vartheta, \tag{2.50}$$

la fonction de Green prend alors la forme suivante

$$\begin{gathered}G\left(x_f,x_i\right)=-\tfrac{i}{2}\exp\left(\gamma^{\mu}\tfrac{\partial}{\partial\,\theta^{\mu}}+\Gamma^{a}\ \tfrac{\partial}{\partial\,\vartheta^{a}}\right)\int de\int\tfrac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\int d\varphi_f\delta\left(\varphi_f-\varphi_i+ekp\right)\int d\varphi_i\delta\left(\varphi_i-kx_i\right)\\ \int\mathcal{D}\zeta\exp\left\{ip\left(x_f-x_i\right)+i\int_0^1\left\{i\xi\dot{\xi}-\tfrac{1}{2}\mathcal{H}(p,2\xi+\vartheta)\right\}d\tau\right\}_{\theta=\vartheta=0}\end{gathered}. \tag{2.51}$$

Revenons aux deux identités (2.17) et (2.18) : d'abord éliminons les variables de Grassmann ξ et introduisons la relation entre les T et les Γ, notre fonction de Green prend la forme suivante

$$\begin{gathered}G\left(x_f,x_i\right)=-\tfrac{i}{2}\exp\left(\gamma^{\mu}\tfrac{\partial}{\partial\,\theta^{\mu}}\right)\int de\int\tfrac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\int d\varphi_f\delta\left(\varphi_f-\varphi_i+ekp\right)\int d\varphi_i\delta\left(\varphi_i-kx_i\right)\\ \exp\left\{ip\left(x_f-x_i\right)+\tfrac{ie}{2}\left(p^2-m^2\ \right)+\int_0^1\ \tfrac{ie}{2}\left\{g^2\tfrac{1}{2N}A_{\mu}^{a}A_{a}^{\mu}-\right.\right.\\ \left.\left.ig\left(\tfrac{k\theta}{2}\right)\left(\theta^{\mu}\dot{A}_{\mu}^{a}T_a\right)+2g\left(p^{\mu}A_{\mu}^{a}\ T_a\right)\ \right\}d\tau\right\}_{\theta=0}\end{gathered}. \tag{2.52}$$

Le $\mathcal{T}$-produit a été omis , car il n'y a pas de problème d'ordre .

Il nous reste maintenant à effectuer les dérivations pour reintroduire les γ^{μ} le calcul est grandement facilité par l'identité suivante :

$$\exp\left(\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial\ \theta^{\mu}}\right)F\left(\theta\right)_{\theta=0,}=F\left(\frac{\partial}{\partial\ \theta^{\mu}}\right)\exp\left(\theta_{\mu}\gamma^{\mu}\right)_{\theta=0}. \tag{2.53}$$

Aprés dérivation, notre fonction de Green devient :

$$G\left(x_f.x_i\right)=\tfrac{-i}{2}\int de\int\tfrac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\varphi_f\int d\varphi_i\delta\left(\varphi_i-kx_i\right)\delta\left(\varphi_f-\varphi_i+ekp\right)\exp\Big\{ip\left(x_f-x_i\right)+\tfrac{ie}{2}\left(p^2-m^2\ \right)+\tfrac{i\,g^2}{2pk}\tfrac{1}{2N}\int\left(A_\mu^aA_a^\mu\right)d\varphi-\tfrac{i}{pk}g\int\left(\left(p^\mu A_\mu^aT_a\ \right)-i\left(\tfrac{k_\nu}{2}\gamma^\nu\right)\left(\gamma^\mu\dot{A}_\mu^aT_a\right)\right)d\varphi\Big\},\tag{2.54}$$

où il nous reste encore à éliminer les 2 fonctions δ. A l'aide de sa représentation intégrale

$$\delta\left(\varphi_f-\varphi_i+ekp\right)=\int\frac{dp_{\varphi_f}}{2\pi}\exp\left\{ip_{\varphi_f}\left(\varphi_f-\varphi_i+ekp\right)\right\},\tag{2.55}$$

et en changeant

$$p^\mu\longrightarrow-p^\mu+k^\mu p_\varphi,\tag{2.56}$$

nous obtenons

$$G\left(x_f,x_i\right)=\tfrac{i}{2}\int de\int\tfrac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\Big\{-ip\left(x_f-x_i\right)+\tfrac{ie}{2}\left(p^2-m^2\ \right)+\tfrac{i\,g^2}{2pk}\tfrac{1}{2N}\int_{kx_i}^{kx_f}\left(A_\mu^aA_a^\mu\right)d\varphi-\tfrac{i}{pk}g\left[\int_{kx_i}^{kx_f}\left(p^\mu A_\mu^aT_a\ \right)d\varphi+i\left(\tfrac{k_\nu}{2}\gamma^\nu\right)\gamma^\mu\left(A_\mu^a\left(x_f\right)-A_\mu^a\left(x_i\right)\right)T_a\right]\Big\},\tag{2.57}$$

et nous déduisons aprés dérivation, la fonction de Green relative à notre problème

$$S\left(x_f,x_i\right)=\tfrac{i}{2}\int de\int\tfrac{d^4p}{(2\pi)^4}\Big\{\left(\hat{p}+m\right)\left\{1+g\tfrac{\hat{k}}{2\ k\ p}\left(\hat{A}^a\left(x_f\right)-\hat{A}^a\left(x_i\right)\right)T_a\right\}+\tfrac{g}{kp}\hat{k}\left(pA\left(x_f\right)T\ \right)-g\left(\hat{A}\left(x_f\right)T\ \right)-g^2\hat{k}\tfrac{\left(A\left(x_f\right)A\left(x_i\right)\ \right)}{2N(\ k\ p)}\Big\}\exp\Big\{-ip\left(x_f-x_i\right)+\tfrac{ie}{2}\left(p^2-m^2\ \right)+\tfrac{i\,g^2}{2pk}\tfrac{1}{2N}\int_{kx_i}^{kx_f}\left(A_\mu^aA_a^\mu\right)d\varphi-\tfrac{i}{pk}g\int_{kx_i}^{kx_f}\left(p^\mu A_\mu^aT_a\ \right)d\varphi\Big\}.\tag{2.58}$$

Remarquons que l'expression n'est pas symétrique et donc qu'il n'est pas encore possible d'extraire les fonctions d'onde.

Pour la symétriser, utilisons la relation

$$\hat{a}\hat{b}+\hat{b}\hat{a}=2ab,$$

où

$$\hat{a}=\gamma^{\mu}a_{\mu},$$

et après quelques manipulations, nous obtenons

$$\begin{array}{c} S\left(x_f,x_i\right)=\frac{i}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int de\left\{1+g\frac{\hat{k}}{2\ k\ p}\left(\hat{A}\left(x_f\right)T\right)\right\}\left(\hat{p}+m\right)\left\{1-g\frac{\hat{k}}{2\ k\ p}\left(\hat{A}\left(x_i\right)T\right)\right\} \\ \exp\left\{-ip\left(x_f-x_i\right)+\frac{ie}{2}\left(p^2-m^2\ \right)+\frac{i\ g^2}{2pk}\frac{1}{2N}\int_{kx_i}^{kx_f}\left(A_{\mu}^{a}A_{a}^{\mu}\right)d\varphi-\frac{i}{pk}g\int_{kx_i}^{kx_f}\left(p^{\mu}A_{\mu}^{a}T_a\ \right)d\varphi\right\}, \end{array} \tag{2.59}$$

qui , aprés intégration sur e, nous obtenons la forme définitive de la fonction de Green

$$\begin{array}{c} S\left(x_f,x_i\right)=-\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left\{1+g\frac{\hat{k}}{2\ k\ p}\left(\hat{A}\left(x_f\right)T\right)\right\}\frac{(\hat{p}+m)}{(p^2-m^2\ )}\left\{1-g\frac{\hat{k}}{2\ k\ p}\left(\hat{A}\left(x_i\right)T\right)\right\} \\ \exp\left\{-ip\left(x_f-x_i\right)+\frac{i\ g^2}{2pk}\frac{1}{2N}\int_{kx_i}^{kx_f}\left(A_{\mu}^{a}A_{a}^{\mu}\right)d\varphi-\frac{i}{pk}g\int_{kx_i}^{kx_f}\left(p^{\mu}A_{\mu}^{a}T_a\ \right)d\varphi\right\}, \end{array} \tag{2.60}$$

qui est totalement symétrique.

Maintenant, il est possible de déterminer les fonctions d'onde et le spectre des énergies.

Fonctions d'ondes et energies

Comme il y a 2 pôles dans l'expression précédente $p_{+}^{0}=\omega-i\varepsilon$ et $p_{-}^{0}=-\omega+i\varepsilon$, où $\omega=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$ est l'énergie d'une particule libre, il est facile de déterminer des fonctions d'onde en utilisant la méthode des résidus

- pour $\tau_b>\tau_a$, le contour d'intégration (1/2 cercle) qui englobe p_{+}^{0} est choisi en dessous de l'axe

- et pour $\tau_b<\tau_a$,le contour d'intégration (1/2 cercle) qui englobe p_{-}^{0} est choisi au dessus de l'axe .

C'est ainsi que nous obtenons la décomposition spectrale suivante :

$$
\begin{aligned}
S\left(x_f,x_i\right) = & -i\theta\left(\tau_f-\tau_i\right)\int \tfrac{d^3p}{(2\pi)^3}\tfrac{m}{p^0}\left\{1+g\tfrac{\hat{k}}{2\,kp}\left(\hat{A}^a\left(x_f\right)T_a\right)\right\}\tfrac{(\hat{p}+m)}{2m}\left\{1-g\tfrac{\hat{k}}{2\;k\;p}\hat{A}^a\left(x_i\right)T_a\right\} \\
& \exp\left\{-ip\left(x_f-x_i\right)+\tfrac{i\;g^2}{2pk}\tfrac{1}{2N}\int_{kx_i}^{kx_f}\left(A_\mu^aA_a^\mu\right)d\varphi-\tfrac{i}{pk}g\int_{kx_i}^{kx_f}\left(p^\mu A_\mu^aT_a\;\right)d\varphi\right\} \\
& -i\theta\left(\tau_i-\tau_f\right)\int \tfrac{d^3p}{(2\pi)^3}\tfrac{m}{P^0}\left\{1-g\tfrac{\hat{k}}{2\;k\;P}\left(\hat{A}^a\left(x_f\right)T_a\right)\right\}\tfrac{(-\hat{p}+m)}{2m}\left\{1+g\tfrac{\hat{k}}{2\;k\;p}\hat{A}^a\left(x_i\right)T_a\right\} \\
& \exp\left\{-ip\left(x_f-x_i\right)+\tfrac{i\;g^2}{2pk}\tfrac{1}{2N}\int_{kx_i}^{kx_f}\left(A_\mu^aA_a^\mu\right)d\varphi-\tfrac{i}{pk}g\int_{kx_i}^{kx_f}\left(p^\mu A_\mu^aT_a\;\right)d\varphi\right\}
\end{aligned}
, \tag{2.61}
$$

et qui par comparaison à

$$
S\left(x_f,x_i\right)=-i\theta\left(\tau_f-\tau_i\right)\sum_{\alpha.\pm\sigma}\int d^3p\Psi^+_{\alpha,\sigma,p}\left(x_f\right)\bar{\Psi}^+_{\alpha,\sigma,p}\left(x_i\right)-i\theta\left(\tau_i-\tau_f\right)\sum_{\alpha.\pm\sigma}\int d^3p\Psi^-_{\alpha,\sigma,p}\left(x_f\right)\bar{\Psi}^-_{\alpha,\sigma,p}\left(x_i\right), \tag{2.62}
$$

nous permet d'dentifier les fonctions d'onde (normalisées) décrivant le mouvement de la particule de Dirac sous l'action du champ non-abelian

$$
\begin{aligned}
\Psi^+_{\alpha,\sigma,p}\left(x\right) = & \tfrac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(\tfrac{m}{p^0}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-ipx+\tfrac{i\;g^2}{2pk}\tfrac{1}{2N}\int_0^{kx}\left(A_\mu^aA_a^\mu\right)d\varphi\right\} \\
& \exp\left\{-igT_a\frac{\int_0^{kx}\left(p^\mu A_\mu^a d\varphi\right)+\frac{i}{2}\left(k_\mu\gamma^\mu\right)\left(\gamma^\mu A_\mu^a(x)\right)}{k\;p}\right\}u_\sigma\left(p\right)w_\alpha
\end{aligned}
, \tag{2.63}
$$

où

$$
\sum_{.\pm\sigma}u_\sigma\left(p\right)\bar{u}_\sigma\left(p\right)=\frac{\left(\hat{p}+m\right)}{2m},
$$

$$
\sum_{.\pm\sigma}v_\sigma\left(p\right)\bar{v}_\sigma\left(p\right)=\frac{\left(-\hat{p}+m\right)}{2m},
$$

sont les projecteurs sur les états d'énergie positive et négative (respectivement) et w_α , w_β les éléments de la ligne w^+ et de la colonne w (respectivement) tel que le produit $w^+\,w=I$ ou encore tel que

$$w_\alpha^+ w_\beta = \delta_{\alpha\beta}.$$

Nous pouvons finalement écrire la fonction d'onde suivant la forme donnée dans l'article [4]

$$\Psi^+_{\alpha,\sigma,p}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{m}{p^0}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-ipx + \frac{i\,g^2}{2pk}\frac{1}{2N}\int_0^{kx}\left(A^a_\mu A^\mu_a\right)d\varphi\right\}$$
$$\cos\theta\left\{\left(1 - igT_a\frac{\tan\theta}{\theta\,(pk)}\int_0^{kx}\left(p^\mu A^a_\mu(\varphi'')\right)d\varphi''\right) + \frac{g\,(k_\mu\,\gamma^\mu\,)\,(\,\gamma^\mu\,A^a_\mu\,)}{2k\;p}\right. ,$$
$$\left.\left[\frac{\tan\theta}{\theta}T_a + \frac{g}{pk}\frac{1}{2N}\int_0^{kx}d\varphi''\left(p^\mu A^a_\mu(\varphi'')\right)\left(-i\frac{\tan\theta}{\theta} + \frac{g}{pk}\frac{\theta - \tan\theta}{\theta^3}T_b\int_0^{kx}d\varphi''\left(p^\mu A^a_\mu(\varphi'')\right)\right)\right]\right\}u_\sigma(p)\,w_\alpha \tag{2.64}$$

avec

$$\theta = \left[\left(\frac{g}{k\;P}\right)\left(\frac{1}{2N}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left[\left(\int_0^{kx}\left(p^\mu A^a_\mu(\varphi')\right)d\varphi'\right)\left(\int_0^{kx}\left(p^\mu A^a_\mu(\varphi'')\right)d\varphi''\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Passons à l'approche dite locale

2.3 Fonction de Green : approche locale

2.3.1 Formulation

Au lieu d'utiliser la représentation classique en temps propre bosonique, on utilise une differente représentation au moyen de laquelle on introduit un temps propre bosonique e et un temps propre fermionique χ. La fonction de Green s'écrit en représentation intégrale

$$\begin{aligned} S = \textstyle\int_0^\infty de \int \exp\Big\{ & i\tfrac{e}{2}\left[\left(\,\gamma^\mu\;\left(ip_\mu\;-g\;A^a_\mu\;T_a\right) -\;m\right)\left(i\;\gamma^\mu\;\left(p_\mu\;-g\;A^a_\mu\;T_a\right) +\;m\right)\right] - \\ & \tfrac{i}{2}\left(\,\gamma^\mu\;\left(-p_\mu\;-g\;A^a_\mu\;T_a\right) +\;m\right)\chi\Big\} d\chi\;. \end{aligned} \tag{2.65}$$

L'opérateur S s'écrit donc

$$S = \int_0^\infty de \int \exp(-i\mathcal{H})d\chi, \tag{2.66}$$

avec

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} \quad = \quad & \frac{e}{2}\left[m^2 - p^2 - g^2\frac{1}{2N}A^a_\mu A^\mu_a - \frac{i}{2}g\left(p^\mu A^a_\mu\ f_{ap}^{\ b}\ \Gamma_b\Gamma^p\right) - \frac{1}{4}g\left(k_\mu\gamma^\mu\right)\left(\ \gamma^\mu \dot{A}^a_\mu\ f_{ap}^{\ b}\ \Gamma_b\Gamma^p\right)\right] + \\
& \frac{1}{2}\left(\left(\gamma^\mu p_\mu\right) + \frac{ig}{4}\ \left(\gamma^\mu A^a_\mu\ f_{ap}^{\ b}\ \Gamma_b\Gamma^p\right) + m\right)\chi\ . \qquad (2.67)
\end{aligned}
$$

Ensuite, l'élément de matrice $\langle x_f \mid S \mid x_i\rangle$ s'écrit sous forme intégrale de chemins comme suit :

$$
\begin{aligned}
S(x_f, x_i) = & \exp\left(\gamma^\mu \tfrac{\partial}{\partial\,\theta^\mu} + \Gamma^a\ \tfrac{\partial}{\partial\,\vartheta^a}\right)\int_0^\infty de_0 \int d\chi_0 \exp\left[\tfrac{-i}{2}\left(m^2\ e + m\chi\right)\right]\int DxDpDeDp_eD\chi Dp_\chi \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\zeta \\
& \exp\left\{i\int_0^1\left[p\dot{x} + p_e\dot{e} + p_\chi\dot{\chi} + i\psi_\mu\dot{\psi}^\mu + i\zeta^a\dot{\zeta}^a + \right.\right. \\
& \tfrac{e}{2}\left(p^2 +\ g^2\tfrac{1}{2N}A^a_\mu A^\mu_a + 2ig\left(p^\mu A^a_\mu\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right) + 4g\left(k_\mu\psi^\mu\right)\left(\psi^\mu \dot{A}^a_\mu\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right) - \\
& \left.\left.\left(\left(\psi^\mu p_\mu\right) + ig\left(\psi^\mu A^a_\mu\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right)\chi\right]d\tau + \psi\left(0\right)\ \psi\left(1\right) + \zeta\left(0\right)\zeta\left(1\right)\right\}\ . \qquad (2.68)
\end{aligned}
$$

2.3.2 Calcul de $S\left(x_f.x_i\right)$

La fonction de Green correspondante à une particule de Dirac soumise à l'action d'un champ non abélien est donnée par l'expression intégrale de chemins suivante :

$$
\begin{aligned}
S(x_f, x_i) = & \exp\left(\gamma^\mu \tfrac{\partial}{\partial\,\theta^\mu} + \Gamma^a\ \tfrac{\partial}{\partial\,\vartheta^a}\right)\int_0^\infty de_0 \int d\chi_0 \exp\left[\tfrac{-i}{2}\left(m^2\ e + m\chi\right)\right]\int DxDpDeDp_eD\chi Dp_\chi \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\zeta \\
& \exp\left\{i\int_0^1\left[p\dot{x} + p_e\dot{e} + p_\chi\dot{\chi} + i\psi_\mu\dot{\psi}^\mu + i\zeta^a\dot{\zeta}^a + \right.\right. \\
& \tfrac{e}{2}\left(p^2 +\ g^2\tfrac{1}{2N}A^a_\mu A^\mu_a + 2ig\left(p^\mu A^a_\mu\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right) + 4g\left(k_\mu\psi^\mu\right)\left(\psi^\mu \dot{A}^a_\mu\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right) - \\
& \left.\left.\left(\left(\psi^\mu p_\mu\right) + ig\left(\psi^\mu A^a_\mu\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right)\chi\right]d\tau + \psi\left(0\right)\ \psi\left(1\right) + \zeta\left(0\right)\zeta\left(1\right)\right\}\ . \qquad (2.69)
\end{aligned}
$$

L'action correspondante est alors

$$
\mathcal{A} = \Bigg\{ \int_0^1 \Bigg[p\dot{x} + p_e \dot{e} + p_\chi \dot{\chi} + i\psi_\mu \dot{\psi}^\mu + i\zeta^a \dot{\zeta}^a +
$$

$$
\tfrac{e}{2}\left(p^2 - m^2 + \ g^2 \tfrac{1}{2N} A^a_\mu A^\mu_a + 2ig\left(p^\mu A^a_\mu \ f_{ap}^{\ \ b}\ \zeta_b \zeta^p\right) + 4g\left(k_\mu \psi^\mu\right)\left(\psi^\mu \dot{A}^a_\mu \ f_{ap}^{\ \ b}\ \zeta_b \zeta^p\right)\right) -
$$

$$
\left(\left(\psi^\mu p_\mu\right) + ig\left(\psi^\mu A^a_\mu \ f_{ap}^{\ \ b}\ \zeta_b \zeta^p\right) + m\right)\chi \Bigg] d\tau + \psi^\mu(0)\ \ \psi_\mu(1) + \zeta(0)\,\zeta(1) \Bigg\} \ .
$$

Nous pouvons alors tirer les équations de mouvement classiques suivantes :

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta x^\rho} &= -\dot{p}_\rho + k_\rho \left(e\ g^2 \frac{1}{2N} \dot{A}^a_\mu A^\mu_a + eg\left(p^\mu \dot{A}^a_\mu \ f_{ap}^{\ \ b}\ \zeta_b \zeta^p\right) + 2eg\left(k\psi\right)\left(\psi^\mu \ddot{A}^a_\mu \ f_{ap}^{\ \ b}\ \zeta_b \zeta^p\right) - ig\left(\psi^\mu \dot{A}^a_\mu \ f_{ap}^{\ \ b}\ \zeta_b \zeta^p\right)\chi \right.\\
\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta p^\rho} &= \dot{x}_\rho + ep_\rho + ieg\left(A^a_\rho \ f_{ap}^{\ \ b}\ \zeta_b \zeta^p\right) - \psi_\rho \chi = 0 \\
\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \zeta^\rho} &= 2i\dot{\zeta}_\rho - 2eig\left(p^\mu A^a_\mu \ f_{a\rho}^{\ \ p}\ \zeta_p\right) - 4g\left(k\psi\right)\left(\psi^\mu \dot{A}^a_\mu \ f_{a\rho}^{\ \ b}\ \zeta_b\right) + 2ig\left(\psi^\mu A^a_\mu \ f_{a\rho}^{\ \ b}\ \zeta_b\right)\chi = 0 \\
\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \psi^\rho} &= 2i\dot{\psi}_\rho + 2egk_\rho\left(\psi^\mu A^a_\mu \ f_{ap}^{\ \ b}\ \zeta_b \zeta^p\right) - 2eg\left(k\psi\right)\left(\dot{A}^a_\rho \ f_{ap}^{\ \ b}\ \zeta_b \zeta^p\right) - \left(p_\rho + ig\left(A^a_\rho \ f_{ap}^{\ \ b}\ \zeta_b \zeta^p\right)\right)\chi = 0
\end{aligned}
$$

Comme dans le cas global, nous avons encore

$$
e_0 = e_1 = \ldots = e \ ,
$$

et

$$
\chi_0 = \chi_1 = \ldots = \chi \ .
$$

à cause des $\delta\left(\dot{e}\right)$ et $\delta(\dot{\chi})$ qui sont apparus suite aux intégrations sur $p_e$et p_χ.

Nous introduisons la même identité

$$
\int d\varphi_f \int d\varphi_i \delta(\varphi_i - kx_i) \int D\varphi \int Dp_\varphi \exp\left\{ i \int p_\varphi(\dot{\varphi} - k\dot{x})d\tau \right\} = 1 \ , \tag{2.70}
$$

pour réduire le mouvement quadri dimensionnel en un mouvement unidimensionnel . Après le changement

$$
p_\mu \to p_\mu + k_\mu p_\varphi \ , \tag{2.71}
$$

et après intégration sur les positions : il apparait encore $\delta\left(\dot{p}\right)$ qui exprime que p est une constante de mouvement $(p = Cte)$.La fonction de Green se réduit à :

$$S\left(x_f, x_i\right) = \exp\left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial\,\theta^\mu} + \Gamma^a\ \frac{\partial}{\partial\,\vartheta^a}\right) \int de \int d\chi \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\left[\frac{-i}{2}\left(m^2\ e + m\chi\right) + ip\left(x_f - x_i\right) + \frac{ie}{2}p^2\right]$$
$$\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\zeta \int d\varphi_f \int d\varphi_i \delta\left(\varphi_i - kx_i\right) \int D\varphi Dp_\varphi \exp\left\{ i\int_0^1 \left[p_\varphi\left(\dot{\varphi} + ekp\right) + \right.\right.$$
$$\frac{e}{2}\left(\ g^2 \frac{1}{2N} A^a_\mu A^\mu_a + 2ig\left(p^\mu A^a_\mu\ f^{\ b}_{ap}\ \zeta_b\zeta^p\right) + 4g\left(k_\mu\psi^\mu\right)\left(\psi^\mu \dot{A}^a_\mu\ f^{\ b}_{ap}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right) -$$
$$\left.\left.\left(\left(\psi^\mu p_\mu\right) + p_\varphi k\psi + ig\left(\psi^\mu A^a_\mu\ f^{\ b}_{ap}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right)\chi + i\psi_\mu\dot{\psi}^\mu + i\zeta^a\dot{\zeta}^a\right] d\tau + \psi\left(0\right)\psi\left(1\right) + \zeta\left(0\right)\zeta\left(1\right) \right\} \tag{2.72}$$

Nous introduisons une deuxieme variable $\eta = k\psi$ via l'identité suivante

$$\int d\eta_i d\eta_f \delta(\eta_i - k\psi_i) \int D\eta \int Dp_\eta \exp\left\{ i\int_0^1 p_\eta(\dot{\eta} - k\dot{\psi})d\tau \right\} = 1, \tag{2.73}$$

où η et p_η sont des variables de Grassmann impaires.

La fonction de Green est alors

$$S\left(x_f.x_i\right) = \exp\left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial\,\theta^\mu} + \Gamma^a\ \frac{\partial}{\partial\,\vartheta^a}\right) \int de \int d\chi \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\left[\frac{-i}{2}\left(m^2\ e + m\chi\right) + ip\left(x_f - x_i\right) + \frac{ie}{2}p^2\right]$$
$$\int d\varphi_f \int d\varphi_i \delta\left(\varphi_i - kx_i\right) \int D\varphi \int Dp_\varphi \int d\eta_i d\eta_f \delta(\eta_i - k\psi_i) \int D\eta \int Dp_\eta \int \mathcal{D}\psi \int \mathcal{D}\zeta$$
$$\exp\left\{ i\int_0^1 \left[p_\varphi\left(\dot{\varphi} + ekp - \eta\chi\right) + \frac{e}{2}\left(\ g^2 \frac{1}{2N} A^a_\mu A^\mu_a + 2ig\left(p^\mu A^a_\mu\ f^{\ b}_{ap}\ \zeta_b\zeta^p\right) + 4g\eta\left(\psi^\mu \dot{A}^a_\mu\ f^{\ b}_{ap}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right) + \right.\right.$$
$$\left. p_\eta(\dot{\eta} - k\dot{\psi}) - \left(\left(\psi^\mu p_\mu\right) + ig\left(\psi^\mu A^a_\mu\ f^{\ b}_{ap}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right)\chi + i\psi_\mu\dot{\psi}^\mu + i\zeta^a\dot{\zeta}^a \right] d\tau +$$
$$\left. \psi\left(0\right)\psi\left(1\right) + \zeta\left(0\right)\zeta\left(1\right) \right\}, \tag{2.74}$$

et après un changement $\psi^\mu \rightarrow \omega^\mu$pour passer aux variables de vitesse

$$\psi^\mu(\tau) \longrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 \varepsilon(\tau - \tau^{'})\omega^\mu(\tau^{'})d\tau^{'} + \frac{\theta^\mu}{2}, \tag{2.75}$$

afin d'eliminer les conditions aux limites , $\omega^n(\tau)$ et θ^n étant des variables de Grassmann impaires, avec la notation condensée

$$f\varepsilon g=\int f\left(\tau\right)\varepsilon\left(\tau-\tau'\right)g\left(\tau'\right)d\tau'.$$

nous obtenons la forme suivante

$$\begin{gathered}S\left(x_f,x_i\right)=\exp\left(\gamma^\mu\tfrac{\partial}{\partial\,\theta^\mu}+\Gamma^a\ \tfrac{\partial}{\partial\,\vartheta^a}\right)\int de\int d\chi\int\tfrac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left[\tfrac{-i}{2}\left(m^2\ e+m\chi\right)+ip\left(x_f-x_i\right)+\tfrac{ie}{2}p^2\right]\\ \int d\varphi_f\int d\varphi_i\delta\left(\varphi_i-kx_i\right)\int D\varphi\int Dp_\varphi\textstyle\int d\eta_id\eta_f\left(\eta_i+\frac{k}{2}\left(\omega-\theta\right)\right)\int D\eta\int Dp_\eta\displaystyle\int\mathcal{D}\omega\int\mathcal{D}\zeta\\ \exp\left\{i\textstyle\int_0^\infty\displaystyle\left[p_\varphi\left(\dot\varphi+ekp-\eta\chi\right)+\tfrac{e}{2}\ g^2\left(\tfrac{1}{2N}A_\mu^aA_a^\mu+2ig\left(p^\mu A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right)+\right.\right.\\ 2g\eta\left(\dot A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\left(\varepsilon\omega^\mu+\theta^\mu\right))+p_\eta\left(\dot\eta+\tfrac{ik\ p}{2}\chi\right)-\tfrac{1}{2}\left(p_\mu++ig\left(A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right)\left(\varepsilon\omega^\mu+\theta^\mu\right)\chi-\\ \left.\left.\tfrac{i}{2}\omega_\mu\varepsilon\omega^\mu+i\zeta^a\dot\zeta^a\right]d\tau+\zeta\left(0\right)\zeta\left(1\right)\right\}.\end{gathered}\tag{2.76}$$

Après le changement suivant

$$\begin{gathered}\omega^\mu\rightarrow\omega^\mu-ik_\mu p_\eta\varepsilon^{-1},\\ \omega_\mu\varepsilon\omega^\mu\rightarrow\omega_\mu\varepsilon\omega^\mu+2ip_\eta k_\mu\omega^\mu\ ,\end{gathered}$$

et le remplaçement de

$$\delta\left(\eta_i+\frac{k}{2}\left(\omega-\theta\right)\right)=\int dp_{\eta i}\exp\left\{ip_{\eta i}\left(\eta_i+\frac{k}{2}\left(\omega-\theta\right)\right)\right\},\tag{2.77}$$

par son expression en exponentielle, $p_{\eta i}$ étant une variable de Grassmann impaire, la fonction de Green prend la forme suivante

$$\begin{gathered}S\left(x_f,x_i\right)=\exp\left(\gamma^\mu\tfrac{\partial}{\partial\,\theta^\mu}+\Gamma^a\ \tfrac{\partial}{\partial\,\vartheta^a}\right)\int de\int d\chi\int\tfrac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left[\tfrac{-i}{2}\left(m^2\ e+m\chi\right)+ip\left(x_f-x_i\right)+\tfrac{ie}{2}p^2\right]\\ \int d\varphi_f\int d\varphi_i\delta\left(\varphi_i-kx_i\right)\int D\varphi\int Dp_\varphi\textstyle\int d\eta_id\eta_fdp_{\eta i}\int D\eta\int Dp\displaystyle\int\mathcal{D}\zeta\\ \exp\left\{i\textstyle\int_0^1\displaystyle\left[p_\varphi\left(\dot\varphi+ekp-\eta\chi\right)+\tfrac{e}{2}\ g^2\left(\tfrac{1}{2N}A_\mu^aA_a^\mu+2ig\left(p^\mu A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right)+\right.\right.\\ g\eta\left(\theta^\mu\dot A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)+p_\eta\left(\dot\eta+\tfrac{ik\ p}{2}\chi\right)-\tfrac{1}{2}\left(p_\mu\theta^\mu++ig\left(\theta^\mu A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right)\chi+\\ \left.\left.i\zeta^a\dot\zeta^a\right]d\tau+\zeta\left(0\right)\zeta\left(1\right)\right\}\mathcal{I}\left(\chi,\zeta,\varphi\right)\ ,\end{gathered}\tag{2.78}$$

où nous avons posé

$$\begin{array}{c}\mathcal{I}\left(\chi,\zeta,\varphi\right)=\int\mathcal{D}\omega\exp\left\{\int\int\left[\frac{1}{2}\omega_{\mu}\varepsilon\omega^{\mu}+i\frac{g\ e}{4}\eta\left(\dot{A}_{\mu}^{a}\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_{b}\zeta^{p}\right)\varepsilon\omega^{\mu}+\right.\right.\\ \left.\left.\frac{i}{2}\left(p_{\mu}^{\mu}++ig\left(A_{\mu}^{a}\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_{b}\zeta^{p}\right)\right)\chi\varepsilon\omega^{\mu}+\frac{i}{2}\ p_{\eta_{i}}k_{\mu}\omega^{\mu}\right]d\tau d\tau'\right\}\ ,\end{array} \tag{2.79}$$

Cette expression a exactement la forme suivante

$$\mathcal{I}\left(\chi,\zeta,\varphi\right)=\int\mathcal{D}\omega\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\omega_{\mu}(\tau)\varepsilon(\tau-\tau')\omega^{\mu}(\tau')d\tau d\tau'+\int_{0}^{1}\mathcal{J}_{\mu}(\tau)\omega^{\mu}d\tau\right\},$$

et le résultat est

$$\mathcal{I}\left(\chi.\zeta,\varphi\right)=\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\mathcal{J}_{\mu}(\tau)\varepsilon^{-1}(\tau-\tau')\mathcal{J}^{\mu}(\tau')d\tau d\tau'\right\}\ ,$$

avec

$$\begin{array}{c}\mathcal{J}_{\mu}(\tau)=\frac{i}{2}k_{\mu}p_{\eta_{i}}+i\frac{g\eta_{i}}{4}\int_{0}^{1}\left(\dot{A}_{\mu}^{a}f_{ap}^{\ b}\ \zeta_{b}\zeta^{p}\right)\varepsilon(\tau^{'}-\tau)d\tau^{'}+\\ \frac{i}{2}\int_{0}^{1}\left(p_{\mu}++ig\left(A_{\mu}^{a}\ \left(\varphi\left(\tau'\right)\right)f_{ap}^{\ b}\ \zeta_{b}\zeta^{p}\right)\right)\varepsilon\left(\tau'-\tau\right)\chi d\tau'\ .\end{array} \tag{2.80}$$

Grâce aux propriétés du champ de Volkov, il est facile de voir que

$$\begin{array}{c}\mathcal{J}_{\mu}\varepsilon^{-1}\mathcal{J}^{\mu}=\frac{1}{2}\left(g\ e\right)^{2}\int\int\eta\left(\tau\right)\left(\dot{A}_{\mu}^{a}f_{ap}^{\ b}\ \zeta_{b}\zeta^{p}\right)\varepsilon\left(\tau-\grave{\tau}\right)\eta\left(\tau'\right)\left(\dot{A}_{\mu}^{a}f_{ap}^{\ b}\ \zeta_{b}\zeta^{p}\right)d\tau d\tau'+\\ \frac{1}{4}\ p_{\eta_{i}}pk\chi-\frac{i}{2}\int_{0}^{1}\left(p_{\mu}++ig\left(A_{\mu}^{a}\ \left(\varphi\left(\tau'\right)\right)f_{ap}^{\ b}\ \zeta_{b}\zeta^{p}\right)\right)\varepsilon\left(\tau'-\tau\right)\eta\left(\tau'\right)\left(\dot{A}_{\mu}^{a}f_{ap}^{\ b}\ \zeta_{b}\zeta^{p}\right)\chi d\tau d\tau'\ ,\end{array} \tag{2.81}$$

et la fonction de Green se simplifie

$$S\left(x_f.x_i\right)=\exp\left(\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial\,\theta^\mu}+\Gamma^a\ \frac{\partial}{\partial\,\vartheta^a}\right)\int de\int d\chi\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left[\frac{-i}{2}\left(m^2\ e+m\chi\right)+ip\left(x_f-x_i\right)+\frac{ie}{2}p^2\right]$$
$$\int d\varphi_f\int d\varphi_i\delta\left(\varphi_i-kx_i\right)\int D\varphi\int Dp_\varphi\int d\eta_i d\eta_f dp_{\eta_i}\int D\eta\int Dp_\eta\int\mathcal{D}\zeta$$
$$\exp\left\{i\int_0^1\left[p_\varphi\left(\dot\varphi+ekp-\eta\chi\right)+\frac{e}{2}\ g^2\left(\frac{1}{2N}A_\mu^aA_a^\mu+2ig\left(p^\mu A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right)+\right.\right.$$
$$g\eta e\left(\theta^\mu\dot A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)+p_\eta\left(\dot\eta+\frac{ik\ p}{2}\chi\right)+p_{\eta_i}\left(\eta_i-\frac{k}{2}\theta-i\frac{pk}{4}\chi\right)+$$
$$\frac{1}{2}\left(p_\mu+ig\left(A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right)\left(\theta^\mu-ig\ e\varepsilon\eta\left(\dot A^{a\mu}\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right)\chi-$$
$$\left.\left.\frac{i}{2}\left(g\ e\right)^2\eta\left(\dot A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\varepsilon\eta\left(\dot A^{a\mu}\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)+i\zeta\dot\zeta\right]d\tau+\zeta\left(0\right)\zeta\left(1\right)\right\}\ . \tag{2.82}$$

Intégrons maintenant sur les variables p_η ; il apparait $\delta\left(\dot\eta+\frac{ipk}{2}\chi\right)$ qui exprime que le chemin solution de

$$\dot\eta=-\frac{ipk}{2}\chi\ , \tag{2.83}$$

et d'équation

$$\eta(\tau)=\eta_i-\frac{ipk}{2}\chi\tau\ . \tag{2.84}$$

est selectionné pour le calcul de S . Ainsi S se devient à :

$$S\left(x_f,x_i\right)=\exp\left(\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial\,\theta^\mu}+\Gamma^a\ \frac{\partial}{\partial\,\vartheta^a}\right)\int de\int d\chi\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left[\frac{-i}{2}\left(m^2\ e+m\chi\right)+ip\left(x_f-x_i\right)+\frac{ie}{2}p^2\right]$$
$$\int d\varphi_f\int d\varphi_i\delta\left(\varphi_i-kx_i\right)\int D\varphi\int Dp_\varphi\int d\eta_i\int dp_{\eta_i}\int d\eta_f\delta\left(\eta_f-\eta_i+\frac{i}{2}pk\chi\right)$$
$$\exp\left\{i\int_0^1\left[i\zeta^a\dot\zeta^a+p_\varphi\left(\dot\varphi+ekp-\eta_i\chi\right)+\frac{e}{2}\ g^2\left(\frac{1}{2N}A_\mu^aA_a^\mu+2ig\left(p^\mu A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right)+\right.\right.$$
$$g\eta e\left(\theta^\mu\dot A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)+p_{\eta_i}\left(\eta_i-\frac{k}{2}\theta-i\frac{pk}{4}\chi\right)+$$
$$\frac{1}{2}\left(p_\mu+ig\left(A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right)\left(\theta^\mu-ig\ e\varepsilon\left(\eta_i-\frac{i}{2}pk\chi\tau\right)\left(\dot A^{a\mu}\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right)\chi-$$
$$\left.\left.\frac{i}{2}\left(g\ e\right)^2\left(\eta_i-\frac{i}{2}pk\chi\tau\right)\left(\dot A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\varepsilon\left(\eta_i-\frac{i}{2}pk\chi\tau'\right)\left(\dot A^{a\mu}\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right]d\tau+\zeta\left(0\right)\zeta\left(1\right)\right\}\ . \tag{2.85}$$

En simplifiant

$$\begin{aligned}&\left(\eta_i-\frac{i}{2}pk\chi\tau\right)A\left(\varphi(\tau)\right)\varepsilon(\tau-\tau')\left(\eta_i-\frac{i}{2}pk\chi\tau'\right)A(\varphi(\tau'))\\&=-ikpA(\varphi(\tau))\varepsilon(\tau-\tau')\tau'A(\varphi(\tau'))\eta_i\chi\ .\end{aligned} \tag{2.86}$$

et en intégrant sur p_{η_i} , qui donne un résultat simple

$$\int dp_{\eta_i} \exp\left[i\int p_{\eta_i}\left(\eta_i - \frac{k}{2}\theta - i\frac{pk}{4}\chi\right)\right] = \delta\left(\eta_i - \frac{k}{2}\theta - i\frac{pk}{4}\chi\right) \ , \tag{2.87}$$

fonction qui impose

$$\eta_i = \frac{1}{2}k\theta + i\frac{pk}{4}\chi \ , \tag{2.88}$$

et donc

$$\eta_f = \eta_i - \frac{i}{2}pk\chi \ . \tag{2.89}$$

On peut s'assurer que

$$\eta_f + \eta_i = k\theta$$

Nous avons ainsi la forme suivante pour S

$$\begin{gathered} S\left(x_f, x_i\right) = \exp\left(\gamma^\mu \tfrac{\partial}{\partial\,\theta^\mu} + \Gamma^a\ \tfrac{\partial}{\partial\,\vartheta^a}\right)\int de\int d\chi\int \tfrac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left[\tfrac{-i}{2}\left(m^2\ e + m\chi\right) + ip\left(x_f - x_i\right) + \tfrac{ie}{2}p^2\right] \\ \int d\varphi_f\int d\varphi_i\delta\left(\varphi_i - kx_i\right)\int D\varphi\int Dp_\varphi \\ \exp\left\{i\int_0^1\left[i\zeta^a\dot{\zeta}^a + p_\varphi\left(\dot{\varphi} + ekp - \tfrac{1}{2}k\theta\right) + \tfrac{e}{2}\ g^2\left(\tfrac{1}{2N}A^a_\mu A^\mu_a + 2ig\left(p^\mu A^a_\mu\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right) + \right.\right. \\ ge\left(\tfrac{1}{2}k\theta + i\tfrac{pk}{4}\chi - \tfrac{ipk}{2}\chi\tau\right)\left(\theta^\mu\dot{A}^a_\mu\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right) + \\ \tfrac{1}{2}\left(p_\mu + ig\left(A^a_\mu\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right)\left(\theta^\mu - ig\ e\varepsilon\left(\tfrac{1}{2}k\theta\right)\left(\dot{A}^{a\mu}\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right)\chi - \\ \left.\left.\tfrac{i\ kp}{2}\left(g\ e\right)^2\left(\dot{A}^a_\mu\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\varepsilon\left(\tau - \tau'\right)\tau'\left(\dot{A}^{a\mu}\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)(k\theta)\right]\ d\tau + \zeta(0)\,\zeta(1)\right\} \ . \end{gathered} \tag{2.90}$$

Intégrons sur p_φ, il apparait encore une fonction $\delta\left(\dot{\varphi} + ekp - \frac{1}{2}k\theta\chi\right)$ de Dirac, c'est à dire que le chemin d'équation

$$\dot{\varphi} = -epk + \frac{1}{2}k\theta\chi, \tag{2.91}$$

est selectionné pour le calcul de S.

Nous voyons en inversant la relation précédente que nous avons une relation entre φ et τ

$$\frac{d\tau}{d\varphi}=-\frac{1}{e_0pk}\left(1+\frac{ik\theta}{2e_0pk}\chi\right). \tag{2.92}$$

Il nous reste encore à effectuer les integrations sur les variables relatives aux générateurs du groupe $SU(2)$.

Revenons aux deux identités (2.17) et (2.18) : d'abord éliminons les variables de Grassmann ζ et introduisons la relation entre les T et les Γ, alors la fonction de Green prend la forme suivante

$$\begin{aligned}S(x_f.x_i)=\exp\left(\gamma^\mu\tfrac{\partial}{\partial\,\theta^\mu}\right)\int de\int d\chi\int\tfrac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\varphi_f\int d\varphi_i\delta\left(\varphi_i-kx_i\right)\delta\left(\varphi_f-\varphi_i+ekp-\tfrac{k\theta}{2}\chi\right)\\ \exp\left\{i\int_0^1\left[eg\left(p^\mu A_\mu^a\ T_a\right)-eg\left(\tfrac{1}{2}k\theta+i\tfrac{pk}{4}\chi-\tfrac{ipk}{2}\chi\tau\right)\left(\dot{A}_\mu^aT_a\right)-\right.\right.\\ \tfrac{1}{2}\left(gA_\mu^aT_a\right)\left(\theta-ge\varepsilon\left(\tfrac{k\theta}{2}\right)\left(\dot{A}_\mu^aT_a\right)\right)\chi+\\ \left.\left.+\tfrac{k\ p}{4}\left(ge\right)^2\left(\dot{A}_\mu^aT_a\right)\varepsilon\tilde{\tau}\left(\dot{A}^{a\mu}T_a\right)k\theta\chi\right]\ d\tau\right\}\\ \exp\left[\tfrac{-i}{2}\left(m^2\ e+m\chi\right)+ip\left(x_f-x_i\right)+\tfrac{ie}{2}p^2+i\tfrac{e}{2}g^2\tfrac{g^2}{2N}\int A_\mu^aA_a^\mu d\tau-\tfrac{1}{2}p_\mu\theta^\mu\chi\right].\end{aligned} \tag{2.93}$$

Le $\mathcal{T}$-produit a été omis , car il n'y a pas de problèmes d'ordre .

Avec les réarrangements suivantes :

$$\int p\varepsilon\left(\tau-\tau'\right)\dot{A}\left(\tau'\right)d\tau'd\tau=\frac{p}{ekp}\left(A\left(x_f\right)+A\left(x_i\right)\right)+\frac{2\ p}{(ekp)^2}\int_{\varphi_i}^{\varphi_f}d\varphi A\left(\varphi\right), \tag{2.94}$$

$$\begin{aligned}\int A\left(\tau\right)\varepsilon\left(\tau-\tau'\right)\dot{A}\left(\tau'\right)d\tau'd\tau=\tfrac{2}{(ekp)^2}\int_{\varphi_i}^{\varphi_f}d\varphi A\left(\varphi\right)A\left(\varphi\right)-\\ \tfrac{\left(A\left(x_f\right)+A\left(x_i\right)\right)}{(ekp)^2}\int_{\varphi_i}^{\varphi_f}d\varphi A\left(\varphi\right)\end{aligned}, \tag{2.95}$$

$$\begin{aligned}\int\int\dot{A}\left(\tau\right)\varepsilon\left(\tau-\tau'\right)\tilde{\tau}\dot{A}\left(\tau'\right)k\theta\chi d\tilde{\tau}d\tau=\tfrac{A(x_i)A\left(x_f\right)}{(e\ k\ p)^2}k\theta\chi+\tfrac{\left(A\left(x_f\right)+A(x_i)\right)}{(e\ k\ p)^3}\int_{\varphi_i}^{\varphi_f}d\varphi A\left(\varphi\right)k\theta\chi-\\ \tfrac{1}{(ekp)^3}\int_{\varphi_i}^{\varphi_f}d\varphi A\left(\varphi\right)Ak\theta\chi\end{aligned}, \tag{2.96}$$

il vient

$$S\left(x_f.x_i\right)=\exp\left(\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial\,\theta^\mu}\right)\int de\int d\chi\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\varphi_i\delta\left(\varphi_i-kx_i\right)$$
$$\int d\varphi_f\delta\left(\varphi_f-\varphi_i+ekp-\tfrac{k\theta}{2}\chi\right)\exp\left[ip\left(x_f.-x_i\right)+\tfrac{ei}{2}\left(p^2-m^2\ \right)\right]$$
$$\exp\left\{i\int\ \left[\tfrac{-1}{2kp}\left(g^2\tfrac{1}{2N}\left(A_\mu^aA_\mu^a\right)+2g\left(p^\mu A_\mu^a\ T_a\right)\right)\right]d\varphi-\right.$$
$$gi\tfrac{(k\ \theta)}{2\ k\ p}\theta^\mu\left(A_\mu^a\left(x_f\right)-A_\mu^a\left(x_i\right)\right)T_a-\tfrac{i}{2}\chi\left[-p\theta+m+\tfrac{g}{2kp}p^\mu\left(A_\mu^a\left(x_f\right)+A_\mu^a\left(x_i\right)\right)T_a\left(k\theta\right)+\right.$$
$$\left.\left.\left(\tfrac{g^2}{2N}\right)\frac{A_\mu^a\left(x_f\right)A_a^\mu\left(x_i\right)}{(\ k\ p)}\left(k\theta\right)-\tfrac{g}{2}\theta^\mu\left(A_\mu^a\left(x_f\right)+A_\mu^a\left(x_i\right)\right)T_a\right]\right\}\ . \tag{2.97}$$

Nous pouvons encore éliminer les deux δ en utilisant la forme en exponentielle

$$\delta\left(\varphi_f-\varphi_i+ekp\frac{k\theta}{2}\chi\right)=\int dp_{\varphi_f}\exp\left[ip_{\varphi_f}\left(\varphi_f-\varphi_i+ekp\frac{k\theta}{2}\chi\right)\right]\ , \tag{2.98}$$

et aprés avoir fait le changement :

$$p\ \ \to p-kp_{\varphi_f}\ ,$$

nous obtenons,

$$S\left(x_f,x_i\right)=\exp\left(\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial\,\theta^\mu}\right)\int de\int d\chi\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\varphi_i\delta\left(\varphi_i-kx_i\right)$$
$$\int d\varphi_f\delta\left(\varphi_f-kx_f\right)\exp\left[ip\left(x_f-x_i\right)+\tfrac{ei}{2}\left(p^2-m^2\ \right)\right]$$
$$\exp\left\{i\int_{\varphi_i}^{\varphi_f}\ \left[\tfrac{-1}{2kp}\left(g^2\tfrac{1}{2N}\left(A_\mu^aA_a^\mu\right)+2g\left(p^\mu A_\mu^a\ T_a\right)\right)\right]d\varphi-\right.$$
$$gi\tfrac{(k\ \theta)}{2\ k\ p}\theta^\mu\left(A_\mu^a\left(x_f\right)-A_\mu^a\left(x_i\right)\right)T_a-\tfrac{i}{2}\chi\left[-p\theta+m+\tfrac{g}{2kp}p^\mu\left(A_\mu^a\left(x_f\right)+A_\mu^a\left(x_i\right)\right)T_a\left(k\theta\right)+\right.$$
$$\left.\left.\left(\tfrac{g^2}{2N}\right)\frac{A_\mu^a\left(x_f\right)A_a^\mu\left(x_i\right)}{(\ k\ p)}\left(k\theta\right)-\tfrac{g}{2}\theta^\mu\left(A_\mu^a\left(x_f\right)+A_\mu^a\left(x_i\right)\right)T_a\right]\right\}\ . \tag{2.99}$$

Nous voyons que nous pouvons intégrer sur χ temps propre, de type grassmannien

$$S\left(x_f,x_i\right)=-\tfrac{i}{2}\exp\left(\gamma^\mu\tfrac{\partial}{\partial\,\theta^\mu}\right)\int de\int\tfrac{d^4p}{(2\pi)^4}\int d\varphi_i\delta\left(\varphi_i-kx_i\right)$$
$$\int d\varphi_f\delta\left(\varphi_f-kx_f\right)\exp\left[ip\left(x_f.-x_i\right)+\tfrac{ei}{2}\left(p^2-m^2\ \right)\right]$$
$$\exp\left\{i\int_{\varphi_i}^{\varphi_f}\left[\tfrac{-1}{2kp}\left(g^2\tfrac{1}{2N}\left(A_\mu^aA_\mu^a\right)+2g\left(p^\mu A_\mu^a\ T_a\right)\right)\right]d\varphi\right\}$$
$$\left(-p\theta+m\right)\left\{1-ig\tfrac{(k\ \theta)}{2\ k\ p}\theta^\mu\left(A_\mu^a\left(x_f\right)-A_\mu^a\left(x_i\right)\right)T_a\right\}+$$
$$\tfrac{g}{2kp}p^\mu\left(A_\mu^a\left(x_f\right)+A_\mu^a\left(x_i\right)\right)T_a\left(k\theta\right)+\left(\tfrac{g^2}{2N}\right)\tfrac{A_\mu^a\left(x_f\right)A_a^\mu\left(x_i\right)}{(\ k\ p)}\left(k\theta\right)-\tfrac{g}{2}\theta^\mu\left(A_\mu^a\left(x_f\right)+A_\mu^a\left(x_i\right)\right)T_a\ , \tag{2.100}$$

et effectuer plus facilitement la dérivation qui reste, à l'aide de la formule suivante

$$\exp\left(\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial\ \theta^\mu}\right)F\left(\theta\right)_{\theta=0,}=F\left(\frac{\partial}{\partial\ \theta^\mu}\right)\exp\left(\theta_\mu\gamma^\mu\right)_{\theta=0}. \tag{2.101}$$

Nous obtenons après cette opération

$$S\left(x_f,x_i\right)=\tfrac{-i}{2}\int de\int\tfrac{d^4p}{(2\pi)^4}\left\{\left(\hat{p}+m\right)\left\{1+g\tfrac{\hat{k}}{2\ k\ p}\left(\hat{A}^a\left(x_f\right)-\hat{A}^a\left(x_i\right)\right)T_a\right\}+\tfrac{g}{kp}\hat{k}\left(pA\left(x_f\right)T\ \right)-\right.$$
$$\left.g\left(\hat{A}\left(x_f\right)T\ \right)-g^2\hat{k}\tfrac{\left(A\left(x_f\right)A\left(x_i\right)\ \right)}{2N(\ k\ p)}\right\}\exp\left\{-ip\left(x_f-x_i\right)+\right.$$
$$\left.\tfrac{ie}{2}\left(p^2-m^2\ \right)+\tfrac{i\ g^2}{2pk}\tfrac{1}{2N}\int_{kx_i}^{kx_f}\left(A_\mu^aA_a^\mu\right)d\varphi-\tfrac{i}{pk}g\int_{kx_i}^{kx_f}\left(p^\mu A_\mu^aT_a\ \right)d\varphi\right\} \tag{2.102}$$

où nous avons utilisé la relation $\hat{a}\hat{b}+\hat{b}\hat{a}=2ab$ où $\hat{a}=\gamma^\mu a_\mu$. Aprés quelques manipulations, nous obtenons une forme plus symétrique

$$S\left(x_f,x_i\right)=\tfrac{-i}{2}\int\tfrac{d^4p}{(2\pi)^4}\int de\left\{1+g\tfrac{\hat{k}}{2\ k\ p}\left(\hat{A}\left(x_f\right)T\right)\right\}\left(\hat{p}+m\right)\left\{1-g\tfrac{\hat{k}}{2\ k\ p}\left(\hat{A}\left(x_i\right)T\right)\right\}$$
$$\exp\left\{-ip\left(x_f-x_i\right)+\tfrac{ie}{2}\left(p^2-m^2\ \right)+\tfrac{i\ g^2}{2pk}\tfrac{1}{2N}\int_{kx_i}^{kx_f}\left(A_\mu^aA_a^\mu\right)d\varphi-\tfrac{i}{pk}g\int_{kx_i}^{kx_f}\left(p^\mu A_\mu^aT_a\ \right)d\varphi\right\}, \tag{2.103}$$

et après intégration sur le temps propre e , nous obtenons l'expression finale de la fonction de Green

$$S\left(x_f.x_i\right)=-\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left\{1+g\frac{\hat{k}}{2\ k\ p}\left(\hat{A}\left(x_f\right)T\right)\right\}\frac{(\hat{p}+m)}{(p^2-m^2\ )}\left\{1-g\frac{\hat{k}}{2\ k\ p}\left(\hat{A}\left(x_i\right)T\right)\right\}$$
$$\exp\left\{-ip\left(x_f-x_i\right)+\frac{i\ g^2}{2pk}\frac{1}{2N}\int_{kx_i}^{kx_f}\left(A_\mu^a A_a^\mu\right)d\varphi-\frac{i}{pk}g\int_{kx_i}^{kx_f}\left(p^\mu A_\mu^a T_a\ \right)d\varphi\right\}. \tag{2.104}$$

Ce résultat est exactement le même que celui obtenu dans l'approche globale

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre , nous avons déterminé la fonction d'onde pour une particule de Dirac en mouvement sous l'action d'un champs non- abelien suivant le formalisme d'Alexandrou et al, en calculant la fonction de Green de deux manières différentes :approches globale et locale .

L'obtention de la solution nous a été grandement facilitée grace à l'introduction de deux contraintes, la première $\varphi=kx$ relative à l'espace et la deuxième $\eta=k\psi$ sur les variables de Grassmann , ce qui nous a permis d'effectuer les intégrations sans aucun problème grâce aux fonctions de Dirac qui sont apparues .

Les fonctions d'onde extraites de la décomposition spectrale sont identiques à celles obtenues par résolution directe de l'équation de Dirac.

Chapitre 3

Particule de Dirac dans des champs externes : Solution par la méthode des intégrales de chemins

3.1 Introduction

En utilisant la méthode des intégrales de chemins, nous proposons dans ce chapitre, de montrer comment déterminer la solution pour une particule de spin 1/2 , électriquement neutre et dont le mouvement dans des champs externes spécifiques est régi par l'équation suivante

$$\left[\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+g\ \varepsilon_{ijk}\ \gamma^{i}\gamma^{j}H_{K}+m\right]\Psi\left(x\right)=0, \tag{3.1}$$

où ε_{ijk} est le tenseur habituel de Levy-Civita et H_K est une interaction fonction uniquement de la variable $x_1$de manière à ce que les solutions aient des formes assez simples et standard (fonctions spéciales...)

Nous nous limitons dans les applications à deux formes de champ

-$H_K = \beta$

-$H_K = \beta x_1$

en déterminant exactement les fonctions d'onde après calcul des propagateurs.

Le but de chapitre est de montrer comment :

- réduire le mouvement de l'espace-temps à $(3+1)$ dimensions en deux mouvements dans deux espaces différents de dimensions respectivement 2 et $(1+1)$

- calculer les 2 propagateurs relatifs à chaque espace selon l'approche supersymétrique de Gitman .

Au lieu de résoudre cette equation, nous déterminons la fonction de Green S solution de

$$\left[\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+g\ \varepsilon_{ijk}\ \gamma^{i}\gamma^{j}H_{K}+m\right]S\left(x_{f},x_{i}\right)=\delta^{4}\left(x_{f}-x_{i}\right), \tag{3.2}$$

et à partir de la décomposition spectrale de S, nous déduisons les fonctions d'onde afin de comparer nos résultats à ceux qui ont été obtenus par resolution directe de l'équation de Dirac [6] .

Passons donc à la détermination de S.

Symboliquement, l'équation précédente s'écrit

$$\left[-i\gamma^{\mu}p_{\mu}+g\ \varepsilon_{ijk}\ \gamma^{i}\gamma^{j}H_{K}+m\right]S=I, \tag{3.3}$$

c'est à dire que l'opérateur S est solution de

$$S=\frac{1}{\left[-i\gamma^{\mu}\hat{p}_{\mu}+g\ \varepsilon_{ijk}\ \gamma^{i}\gamma^{j}H_{K}+m\right]}. \tag{3.4}$$

Afin de séparer le mouvement relatif à l'espace (3+1), multiplions à gauche par $\gamma^{1}\gamma^{2}$ et à droite pour le dénominateur

$$S=\gamma^{1}\gamma^{2}\frac{1}{\left[\mathcal{K}_{x_{1}x_{2}}\ +\ \mathcal{K}_{x_{3}x_{0}}\right]}, \tag{3.5}$$

où

$$\mathcal{K}_{x_{1}x_{2}}=-i\gamma^{2}p_{1}+i\gamma^{1}p_{2}+\gamma^{1}\gamma^{2}m-gH_{z}\left(x_{1}\right), \tag{3.6}$$

et

$$\mathcal{K}_{x_{3}x_{0}}=\ -i\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}p_{3}-i\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{0}p_{0}, \tag{3.7}$$

sont les 2 nouveaux hamiltoniens qui régissent les mouvements dans les deux plans respectifs (x_1, x_2) et (x_3, x_0).

Il est facile de voir que $[\mathcal{K}_{x_1x_2}, \mathcal{K}_{x_3x_0}] = 0$.

Afin de passer à la formulation intégrales de chemin, introduisons pour S d'abord la forme exponentielle

$$S = -i\gamma^1\gamma^2 \int_0^\infty ds \exp\left[is\left(\mathcal{K}_{x_1x_2} \ + \ \mathcal{K}_{x_3x_0}\right)\right],$$

et à l'aide d' une nouvelle variable s' et de l'identité

$$\int_0^\infty ds' \delta\left(s' - s\right) = I,$$

et donc de sa forme en exponentielle

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty ds' \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \exp\left[i\lambda\left(s' - s\right)\right] = I, \tag{3.8}$$

S prend la forme suivante :

$$S = -\frac{i\gamma^1\gamma^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' \exp\left[is\left(\mathcal{K}_{x_1x_2} \ - \ \lambda\right)\right] \exp\left[is'\left(\ \mathcal{K}_{x_3x_0} \ + \ \lambda\right)\right], \tag{3.9}$$

et par intégration sur les deux variables s et s' nous avons finalement

$$S = \frac{i}{2\pi}\gamma^1\gamma^2 \int_{-\infty}^\infty d\lambda \ S_1 \ \ S_2, \tag{3.10}$$

où

$$S_1 = \frac{1}{\mathcal{K}_{x_3x_0} \ + \ \lambda}, \tag{3.11}$$

est le propagateur libre ,

et

$$S_2 = \frac{1}{\mathcal{K}_{x_1x_2} \ - \ \lambda}, \tag{3.12}$$

est le propagateur relatif à la particule de Dirac électriquement neutre soumise à l'interaction $H_3\left(x_1\right)$.

Ainsi nous avons écrit S sous la forme d'un produit de deux propagateurs décrivant les mouvements respectivement dans les plans (x_3, x_0) et (x_1, x_2).

Donnons maintenant la formulations intégrale de chemin pour S_1 et S_2.

3.2 Formulation intégrale de chemin et calcul de S_1

Commençons par S_1 qui verifie :

$$S_1 = -\frac{1}{-i\Gamma^3 \hat{p}_3 - i\Gamma^0 \hat{p}_0 + \lambda}, \tag{3.13}$$

où nous avons posé

$$\Gamma^3 = \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3,$$

et

$$\Gamma^0 = \gamma^1 \gamma^2 \gamma^0,$$

en les considérant comme deux nouvelles matrices . Remarquons que $\left\{\Gamma^3, \Gamma^0\right\}_+ = 0$

Introduisons la matrice $\Gamma^5 = \Gamma^0 \Gamma^3$anticommutant avec Γ^3, Γ^0 et telle que $\left(\Gamma^5\right)^2 = 1$, on obtient alors

$$\begin{aligned} S_1 &= -\Gamma^5 \frac{1}{\left(-i\Gamma^3 \hat{p}_3 - i\Gamma^0 \hat{p}_0 + \lambda\right)\Gamma^5} && (3.14) \\ &= -\hat{\Gamma}^5 \frac{1}{-i\hat{\Gamma}^3 \hat{p}_3 - i\hat{\Gamma}^0 \hat{p}_0 + \lambda \hat{\Gamma}^5}, && (3.15) \end{aligned}$$

où nous avons posé $\hat{\Gamma}^i = \Gamma^i \Gamma^5$ et $\hat{\Gamma}^5 = \Gamma^5$ qui sont également des matrices de Dirac. Ainsi le dénominateur de S_1 est un opérateur intégralement de type fermionique.

Maintenant, nous sommes en position de donner la représentation intégrale de chemin pour S_1.

A l'aide d'un temps e (bosonique) et d'un temps χ(fermionique) anti commutant avec les Γ, écrivons d'abord S_1 sous la forme d'une exponentielle

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{-1}{2}\hat{\Gamma}^5 \int_0^\infty de \int \exp\left\{ i\frac{e}{2}\left[\left(-i\hat{\Gamma}^3\hat{p}_3 - i\hat{\Gamma}^0\hat{p}_0 + \lambda\hat{\Gamma}^5\right)^2\right] \right. \\ &\quad \left. + i\chi\left(-i\hat{\Gamma}^3\hat{p}_3 - i\hat{\Gamma}^0\hat{p}_0 + \lambda\hat{\Gamma}^5\right) \right\} d\chi, \\ &= \frac{-1}{2}\hat{\Gamma}^5 \int_0^\infty de \int \exp(-i\mathcal{H}) d\chi, \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{H} = -\frac{e}{2}\left(-i\hat{\Gamma}^3\hat{p}_3 - i\hat{\Gamma}^0\hat{p}_0 + \lambda\hat{\Gamma}^5\right)^2 + \left(-i\hat{\Gamma}^3\hat{p}_3 - i\hat{\Gamma}^0\hat{p}_0 + \lambda\hat{\Gamma}^5\right)\chi, \tag{3.16}$$

est l'hamiltonien régissant le mouvement dans le plan (x_3, x_0) et utilisons l'espace de configuration pour calculer le propagateur

$$S_1\left(x_{f3}, x_{f0}, x_{i3}, x_{i0}\right) = \frac{-1}{2}\hat{\Gamma}^5 \int_0^\infty de \int \langle x_{f3}, x_{f0} \left| \exp(-i\mathcal{H}) \right| x_{i3}, x_{i0} \rangle d\chi. \tag{3.17}$$

Passons à la représentation intégrale de chemin : il nous faut éliminer les opérateurs impulsion et position. Pour celà subdivisons l'intervalle spatio-temporel en N parties et introduisons $N-1$ relations de fermetures relatives aux positions

$$\int d^2x_j \ \ |x_j\rangle\langle x_j| = 1,$$

et N relations de fermetures relatives aux impulsions

$$\int d^2p_i \ \ |p_i\rangle\langle p_i| = 1,$$

Alors, (3.17) devient

$$\begin{aligned} S_1\left(x_{f3}, x_{f0}, x_{i3}, x_{i0}\right) = \tfrac{-1}{2}\Gamma^5 \mathcal{T} \textstyle\int_0^\infty de \int d\chi \displaystyle\int Dx_3 Dx_0 \int Dp_3 Dp_0 \exp\left\{ i \int \left[p_3\dot{x}_3 + p_0\dot{x}_0 + \right.\right. \\ \left.\left. \tfrac{e}{2}\left(\lambda^2 - (p_3)^2 + (p_0)^2\right) + \left(i\hat{\Gamma}^3\hat{p}_3 + i\hat{\Gamma}^0\hat{p}_0 - \lambda\hat{\Gamma}^5\right)\chi \right] d\tau \right\} . \end{aligned} \tag{3.18}$$

Les matrices $\hat{\Gamma}$ ne commutant pas, nous avons introduit le $\mathcal{T}-$ produit .

Eliminons alors ce $\mathcal{T}-$ produit : pour cela nous utilisons deux étapes

- à l'aide de la formule utilisant des courants Grassmanniens

$$\mathcal{T}\exp\left\{F\left(\Gamma\left(\tau\right)\right)\right\} = \exp\left\{F\left(\frac{\delta_g}{\delta\,\rho_n}\right)\right\}\mathcal{T}\exp\left\{\int_0^1 \rho_n\Gamma^n d\tau\right\}_{\rho=0},$$

qui permet le déplaçement vers la droite du $\mathcal{T}-$ produit , $\frac{\delta}{\delta\,\rho_n}$ étant la dérivée fonctionnelle (à gauche) par rapport au courant ρ_n(Grassmannien)

-et à l'aide de l'identité

$$\begin{gathered}\mathcal{T}\exp\left\{\int_0^1 \rho_n\hat{\Gamma}^n d\tau\right\}_{\rho=0} = \exp\left(i\hat{\Gamma}^n\ \frac{\partial}{\partial\,\theta^n}\right) \\ \int_{\psi(1)+\psi(0)=\theta}\mathcal{D}\psi\exp\left\{\int\left(\psi_n\dot{\psi}^n - 2i\rho_n\psi^n\right)d\tau + \psi_n\left(1\right)\psi^n\left(0\right)\right\}\end{gathered}, \tag{3.19}$$

nous éliminons le $\mathcal{T}-$ produit, la mesure $\mathcal{D}\psi$ étant définie par

$$\mathcal{D}\psi = D\psi\left\{D\psi\exp\left\{\int_0^1 \psi_n\dot{\psi}^n d\tau\right\}\right\}^{-1}.$$

Ainsi donc notre fonction de Green(ou propagateur)) a la représentation intégrale suivante :

$$\begin{gathered}S_1\left(x_{f3}, x_{f0}; x_{i3}, x_{i0}\right) = \frac{-1}{2}\Gamma^5\exp\left(i\hat{\Gamma}^n\ \frac{\partial}{\partial\,\theta^n}\right)\int_0^\infty de\int d\chi\int Dx_3Dx_0\int Dp_3Dp_0\mathcal{D}\psi\exp\left\{i\int\left[p_3\dot{x}_3 + p_0\dot{x}_0 + \right.\right. \\ \left.\left.\frac{e}{2}\left(\lambda^2 - (p_3)^2 + (p_0)^2\right) + 2i\left(-i\psi^3p_3 - i\psi^0p_0 + \psi^5\lambda\right)\chi - i\psi_n\dot{\psi}^n\right]d\tau + \psi_n\left(1\right)\psi^n\left(0\right)\right\}\end{gathered}, \tag{3.20}$$

avec n= 0,3, 5.

Passons au calcul de S_1.

Avant d'effectuer l'intégration sur les chemins $x_3(\tau)$ et $x_0(\tau)$, intégrons par partie

$$\int d\tau p\dot{x} = p_f x_f - p_i x_i - \int d\tau x\dot{p}, \tag{3.21}$$

et comme

$$\int Dx\exp\left\{-i\int x\dot{p}\ d\tau\right\} = (2\pi)^{N-1}\delta(\dot{p}),$$

alors (3.20) se ramène à

$$S_1\left(x_{f3},x_{f0};x_{i3},x_{i0}\right)=\frac{-1}{2}\Gamma^5\exp\left(i\hat{\Gamma}^n\ \frac{\partial}{\partial\,\theta^n}\right)\int_0^\infty de\int d\chi\int\frac{dp_3}{2\pi}\frac{dp_0}{2\pi}\int\mathcal{D}\psi\exp\left\{ip_3\left(x_{f3}-x_{i3}\right)+ip_0\left(x_{f0}-x_{i0}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{ie}{2}\left(\lambda^2-(p_3)^2+(p_0)^2\right)+i\left[2i\int\left(-i\psi^3p_3-i\psi^0p_0+\psi^5\lambda\right)\chi-i\psi_n\dot{\psi}^n\right]d\tau+\psi_n\left(1\right)\psi^n\left(0\right)\right\} \tag{3.22}$$

L'étape suivante est l'élimination des variables de Grassmann.

Effectuons le changement $\psi^n\to\omega^n$ défini par

$$\psi^n(\tau)=\frac{1}{2}\int_0^1\varepsilon(\tau-\tau^{'})\omega^n(\tau^{'})d\tau^{'}+\frac{\theta^n}{2}, \tag{3.23}$$

afin d'éliminer d'abord la condition $\psi\left(1\right)+\psi\left(0\right)=\theta$.

Alors S_1prend la forme suivante :

$$S_1\left(x_{f3},x_{f0};x_{i3},x_{i0}\right)=-\frac{1}{2}\Gamma^5\exp\left(i\hat{\Gamma}^n\ \frac{\partial}{\partial\,\theta^n}\right)\int_0^\infty de\int d\chi\int\frac{dp_3}{2\pi}\frac{dp_0}{2\pi}\exp\left\{ip_3\left(x_{f3}-x_{i3}\right)+ip_0\left(x_{f0}-x_{i0}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{ie}{2}\left(\lambda^2-(p_3)^2+(p_0)^2\right)-\left(-i\theta^3p_3-i\theta^0p_0+\theta^5\lambda\right)\chi\right\},$$
$$\int\mathcal{D}\omega\exp\left\{\int_0^1\left[-\frac{1}{2}\omega_n\varepsilon\omega^n+\mathcal{J}_n\omega^n\right]d\tau\right\} \tag{3.24}$$

où

$$\mathcal{J}_3=-ip_3\chi\varepsilon,$$
$$\mathcal{J}_0=-ip_0\chi\varepsilon,$$
$$\mathcal{J}_5=-\lambda\chi\omega^5,$$

sont 3 courants.

L'intégrale sur ω ayant la forme d'une gaussienne, nous pouvons procéder à l'intégration sur les ω et le résultat est simplement :

$$S_1\left(x_{f3},x_{f0},x_{i3},x_{i0}\right)=\tfrac{-1}{2}\Gamma^5\exp\left(i\hat{\Gamma}^n\ \tfrac{\partial}{\partial\,\theta^n}\right)\int_0^\infty de\int d\chi\int\tfrac{dp_3}{2\pi}\tfrac{dp_0}{2\pi}\exp\Big\{ip_3\left(x_{f3}-x_{i3}\right)+ip_0\left(x_{f0}-x_{i0}\right)+$$
$$\tfrac{ie}{2}\left(\lambda^2-(p_3)^2+(p_0)^2\right)-\left(-i\theta^3p_3-i\theta^0p_0+\theta^5\lambda\right)\chi\Big\}\quad .$$
$$\exp\left\{\int_0^1\left[-\tfrac{1}{2}\mathcal{J}_n\varepsilon^{-1}\mathcal{J}^n\right]d\tau\right\}. \tag{3.25}$$

Comme

$$\mathcal{J}_n\varepsilon^{-1}\mathcal{J}^n=0\ , \tag{3.26}$$

à cause du fait que $\chi^2=0$,alors S_1 se simplifie

$$S_1\left(x_{f3},x_{f0};x_{i3},x_{i0}\right)=-\tfrac{1}{2}\Gamma^5\exp\left(i\hat{\Gamma}^n\ \tfrac{\partial}{\partial\,\theta^n}\right)\int_0^\infty de\int d\chi\int\tfrac{dp_3}{2\pi}\tfrac{dp_0}{2\pi}\exp\Big\{ip_3\left(x_{f3}-x_{i3}\right)+ip_0\left(x_{f0}-x_{i0}\right)+$$
$$\tfrac{ie}{2}\left(\lambda^2-(p_3)^2+(p_0)^2\right)-\left(-i\theta^3p_3-i\theta^0p_0+\theta^5\lambda\right)\chi\Big\}\quad . \tag{3.27}$$

Procédons maintenant à la dérivation en utilisant la formule suivante

$$\exp(i\Gamma^n\frac{\partial_l}{\partial\theta^n})f(\theta)\mid_{\theta=0}=f(\frac{\partial_l}{\partial\xi})\exp(i\xi_n\Gamma^n)\mid_{\xi=0}, \tag{3.28}$$

où ξ étant une variable de Grassmann impaire. Ainsi, avec cette identité et après un calcul simple, les matrices $\hat{\Gamma}$ sont réintroduites et la fonction de Green s'écrit comme suit

$$S_1\left(x_{f3},x;x_{i3},x_{i0}\right)=\tfrac{-1}{2}\Gamma^5\int_0^\infty de\int d\chi\int\tfrac{dp_3}{2\pi}\tfrac{dp_0}{2\pi}\exp\Big\{ip_3\left(x_{f3}-x_{i3}\right)+ip_0\left(x_{f0}-x_{i0}\right)+$$
$$\tfrac{ie}{2}\left(\lambda^2-(p_3)^2+(p_0)^2\right)+i\chi\left(-i\hat{\Gamma}^3p_3-i\hat{\Gamma}^0p_0+\hat{\Gamma}^5\lambda\right)\Big\}\ . \tag{3.29}$$

,

Nous pouvons encore simplifier l'expression de S_1en intégrant sur le temps propre Grassmannien χ

$$
\begin{aligned}
S_1\left(x_{f3},x_{f0};x_{i3},x_{i0}\right) = \tfrac{-i}{2}\Gamma^5 \textstyle\int_0^\infty de \displaystyle\int \tfrac{dp_3}{2\pi}\tfrac{dp_0}{2\pi}\left(-i\hat{\Gamma}^3 p_3 - i\hat{\Gamma}^0 p_0 + \hat{\Gamma}^5\lambda\right) \\
\exp\left\{ip_3\left(x_{f3}-x_{i3}\right)+ip_0\left(x_{f0}-x_{i0}\right)+\tfrac{ie}{2}\left(\lambda^2-\left(p_3\right)^2+\left(p_0\right)^2\right)\right\}
\end{aligned}, \tag{3.30}
$$

et aprés avoir introduit les anciennes matrices Γ et intégré sur la variable e , nous obtenons finalement l'expression du propagateur

$$
\begin{aligned}
S_1\left(x_{f3},x_{f0};x_{i3},x_{i0}\right) = \int \tfrac{dp_3}{2\pi}\tfrac{dp_0}{2\pi}\tfrac{\left(i\Gamma^3 p_3+i\Gamma^0 p_0+\lambda\right)}{\left(\lambda^2-\left(p_3\right)^2+\left(p_0\right)^2\right)} \\
\exp\left\{-ip_3\left(x_{f3}-x_{i3}\right)-ip_0\left(x_{f0}-x_{i0}\right)\right\}
\end{aligned}, \tag{3.31}
$$

Passons au calcule de S_2.

3.3 Formulation intégrale de chemin et calcul de S_2

Effectuons le changement sur les 3 matrices $\left(\gamma^1,\gamma^2,\gamma^1\gamma^2\right) \rightarrow \left(\Gamma^1,\Gamma^2,\Gamma^0\right)$ en posant

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2 &= \gamma^2, \\
\Gamma^1 &= \gamma^1, \\
\Gamma^0 &= \gamma^1\gamma^2.
\end{aligned}
$$

Les 3 matrices $\left(\Gamma^1,\Gamma^2,\Gamma^0\right)$ vérifient les relations d'anticommutation habituelles.

Ainsi la fonction de Green a maintenant pour expression

$$
S_2 = -\frac{1}{-i\Gamma^2\hat{p}_1+i\Gamma^1\hat{p}_2+\Gamma^0 m - \left(\lambda+gH_3\left(x_1\right)\right)}, \tag{3.32}
$$

et avec la matrice Γ^5, nous avons encore

$$
\begin{aligned}
S_2 &= -\hat{\Gamma}^5\frac{1}{\left[-i\Gamma^2\hat{p}_1+i\Gamma^1\hat{p}_2+\hat{\Gamma}^0 m-\hat{\Gamma}^5\left(\lambda+gH_3\left(x_1\right)\right)\right]} &(3.33)\\
&= \frac{-1}{2}\hat{\Gamma}^5\int_0^\infty de\int\langle x_{f2},x_{f1}\left|\exp(-i\mathcal{H})\right|x_{i2},x_{i1}\rangle d\chi. &(3.34)
\end{aligned}
$$

En suivant la même démarche que celle utilisée pour S_1, nous pouvons facilement montrer que S_2a la forme intégrale de chemin suivante

$$S_2\left(x_{f2},x_{f1};x_{i2},x_{i1}\right)=\frac{-i}{2}\hat{\Gamma}^5\exp\left(i\hat{\Gamma}^n\ \frac{\partial}{\partial\ \theta^n}\right)\int_0^\infty de\int d\chi\int Dx_1Dx_2\int Dp_1Dp_2\mathcal{D}\psi\exp\left\{i\int\left[p_1\dot{x}^1+p_2\dot{x}^2+\frac{e}{2}\left[-\left(p_1\right)^2-\left(p_2\right)^2-m^2+\left(\lambda+gH_3\left(x_1\right)\right)^2+4\psi^2\psi^5\partial_1\left(\lambda+gH_3\left(x_1\right)\right)\right]+2i\left[i\psi^2p_1-i\psi^1p_2+\psi^0m-\psi^5\ \left(\lambda+gH_z\left(x_1\right)\right)\right]\chi-i\psi\dot{\psi}\right]d\tau+\psi\left(1\right)\psi\left(0\right)\right\}. \tag{3.35}$$

Comme l'interaction dépend uniquement de x_1, nous pouvons intégrer sur les variables x_2, et S_2 se simplifie et se réduit à

$$S_2\left(x_{f2},x_{f1};x_{i2},x_{i1}\right)=\frac{-i}{2}\hat{\Gamma}^5\exp\left(i\hat{\Gamma}^n\ \frac{\partial}{\partial\ \theta^n}\right)\int_0^\infty de\int d\chi\int\frac{dp_2}{2\pi}\int Dx_1\int Dp_1\mathcal{D}\psi\exp\left\{ip_2\left(x_{f2}-x_{i2}\right)+i\int\left[p_1\dot{x}^1+\frac{e}{2}\left[-\left(p_1\right)^2-\left(p_2\right)^2-m^2+\left(\lambda+gH_3\left(x_1\right)\right)^2+4\psi^2\psi^5\partial_1\left(\lambda+gH_3\left(x_1\right)\right)\right]+2i\left[i\psi^2p_1-i\psi^1p_2+\psi^0m-\psi^5\ \left(\lambda+gH_z\left(x_1\right)\right)\right]\chi-i\psi\dot{\psi}\right]d\tau+\psi\left(1\right)\psi\left(0\right)\right\}. \tag{3.36}$$

Avec les expressions de S_1 et de S_2 nous obtenons formellement le propagateur S qui dépend uniquement des chemins $x_1\left(\tau\right)$, ψ^0 ,ψ^2et ψ^5

Pour illustrer la méthode de séparation exposée dans ce chapitre , choisissons deux types d'interaction afin de calculer explicitement S_2.

3.4 Applications

3.4.1 -Cas 1 : $H_3\left(x_1\right)=\beta$

Pour ce cas simple, suivons la même démarche que celle utilisée pour le cas libre S_1nous avons d'abord

$$S_2\left(x_{f2},x_{f1};x_{i2},x_{i1}\right)=\frac{-i}{2}\hat{\Gamma}^5\exp\left(i\hat{\Gamma}^n\ \frac{\partial}{\partial\ \theta^n}\right)\int_0^\infty de\int d\chi\int\frac{dp_2}{2\pi}\int Dx_1\int Dp_1\mathcal{D}\psi\exp\left\{ip_2\left(x_{f2}-x_{i2}\right)+i\int\left[p_1\dot{x}^1+\frac{e}{2}\left[-\left(p_1\right)^2-\left(p_2\right)^2-m^2+\left(\lambda+g\beta\right)^2\right]+2i\left[i\psi^2p_1-i\psi^1p_2+\psi^0m-\psi^5\ \left(\lambda+g\beta\right)\right]\chi-i\psi\dot{\psi}\right]d\tau+\psi\left(1\right)\psi\left(0\right)\right\}, \tag{3.37}$$

et après intégration, nous obtenons encore le propagateur libre

$$\begin{array}{c}\hat{S}_2^c\left(x_{f2},x_{f1},x_{i2},x_{i1}\right)=-\int\frac{dp_2}{2\pi}\frac{dp_1}{2\pi}\frac{\left[i\gamma^2p_1-i\gamma^1p_2+\gamma^1\gamma^2m\ -\ (\lambda+g\beta)\right]}{\left[-(p_1)^2-(p_2)^2-m^2+(\lambda+g\beta)^2\right]}\\ \exp\left\{-ip_2\left(x_{f2}-x_{i2}\right)-ip_1\left(x_{f1}-x_{i1}\right)\right\}\end{array}. \tag{3.38}$$

3.4.2 -Cas 2 : $H_3\left(x_1\right)=\beta x_1$:

Pour ce cas relativement compliqué, la fonction de Green a pour expression

$$\begin{array}{c}S_2\left(x_{f2},x_{f1};x_{i2},x_{i1}\right)=\frac{-i}{2}\hat{\Gamma}^5\exp\left(i\hat{\Gamma}^n\ \frac{\partial}{\partial\,\theta^n}\right)\int_0^\infty de\int d\chi\int\frac{dk_2}{2\pi}\int Dx_1\int Dp_1\mathcal{D}\psi\exp\left\{ip_2\left(x_{f2}-x_{i2}\right)+\right.\\ i\int\left[p_1\dot{x}^1+\frac{e}{2}\left[-\left(p_1\right)^2-\left(p_2\right)^2-m^2+\left(\lambda+g\beta x_1\right)^2+4\psi^2\psi^5\partial_1\left(\lambda+g\beta x_1\right)\right]+\right.\\ \left.\left.2i\left[i\psi^2p_1-i\psi^1p_2+\psi^0m-\psi^5\ \ \left(\lambda+g\beta x_1\right)\right]\chi-i\psi\dot{\psi}\right]d\tau+\psi\left(1\right)\psi\left(0\right)\right\}\end{array}, \tag{3.39}$$

et qui ,en intégrant sur les variables p_1 , peut être simplifiée

$$\begin{array}{c}\hat{S}_2^c\left(x_{f2},x_{f1},x_{i2},x_{i1}\right)=\frac{-i}{2}\hat{\Gamma}^5\exp\left(i\hat{\Gamma}^n\ \frac{\partial}{\partial\,\theta^n}\right)\int_0^\infty de\int d\chi\int\frac{dp_2}{2\pi}\int\mathcal{D}x_1\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi^1\mathcal{D}\psi^0\\ \exp\left\{ip_2\left(x_{f2}-x_{i2}\right)-\frac{e}{2}\left(\left(p_2\right)^2+m^2\right)+i\int\left[\left[\frac{\left(\dot{x}_1\right)^2}{2e}+\frac{e}{2}\left(\lambda+g\beta x_1\right)^2+ie\bar{\psi}\sigma_2\bar{\psi}\partial_1\left(\lambda+g\beta x_1\right)\right]+\right.\right.\\ 2i\left[i\frac{\left(\dot{x}_1\right)}{e}w\bar{\psi}-i\psi^1p_2+\psi^0m-\bar{w}\ \bar{\psi}\ \ \left(\lambda+g\beta x_1\right)\right]\chi-i\bar{\psi}\dot{\bar{\psi}}-i\psi_0\dot{\psi}^0-i\psi_1\dot{\psi}^1\Big]d\tau+\\ \left.\bar{\psi}\left(1\right)\bar{\psi}\left(0\right)+\psi_0\left(1\right)\dot{\psi}^0\left(0\right)+\psi_1\left(1\right)\psi^1\left(0\right)\right\}\end{array}, \tag{3.40}$$

où

$$\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\ i&0\end{pmatrix},$$

$$\bar{\psi}=\begin{pmatrix}\psi^5\\ \psi^2\end{pmatrix},$$

$$\bar{w}=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix},$$

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ont été introduits pour avoir une forme plus compacte .

Effectuons le changement de variable suivant $\left(\psi,\ \bar{\psi}\right) \rightarrow \left(\xi, \bar{\xi}\right)$, défini par

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \bar{\xi} + \frac{1}{2}\bar{\theta} + \left(v\left(\tau\right) - \frac{v\left(1\right) + v\left(0\right)}{2}\right)\chi, \\ \psi &= \left(\xi + \frac{1}{2}\theta\right), \end{aligned}$$

où $v\left(\tau\right)$ est une variable auxiliaire qui sera fixée par la suite . Ce changement a été déjà utilisé dans l'article de Boudiaf [7].

Posons maintenant $\left(\lambda + g\beta x_1\right) = g\beta x$, nous obtenons l'expression suivante de la fonction de Green

$$\begin{gathered} S_2\left(x_{f2}, x_{f1}; x_{i2}, x_{i1}\right) = \tfrac{-i}{2}\hat{\Gamma}^5 \exp\left(i\hat{\Gamma}^n\ \tfrac{\partial}{\partial\ \theta^n}\right) \int de \int d\chi \int \tfrac{dp_2}{2\pi}\mathcal{D}x_1 \int \mathcal{D}\bar{\xi}\mathcal{D}\xi^2\mathcal{D}\xi^0 \exp\Big\{ ip_2\left(x_{f2} - x_{i2}\right) \\ -\tfrac{ie}{2}\left(\left(p_2\right)^2 + m^2\right) - \left[i\theta^1 p_2 + \theta^0 m\right]\chi + i\int\Big[\tfrac{\left(\dot{x}_1\right)^2}{2e} + \tfrac{e}{2}\left(g\beta x\right)^2 + \tfrac{ieg}{4}\beta\bar{\theta}\sigma_2\bar{\theta} + \tfrac{ieg}{2}\beta\bar{\xi}\sigma_2\bar{\theta} + \tfrac{ieg}{4}\beta\bar{\xi}\sigma_2\bar{\xi} - \\ 2ieg\beta\left(\bar{\xi} + \tfrac{1}{2}\bar{\theta}\right)\sigma_2\left(v\left(\tau\right) - \tfrac{v(1)+v(0)}{2}\right)\chi + i\bar{\theta}\left(v\left(1\right) - v\left(0\right)\right)\chi + 2i\left[\tfrac{\left(\dot{x}_1\right)}{e}w - \bar{w}\ i\ g\beta x\right]\left(\bar{\xi} + \tfrac{1}{2}\bar{\theta}\right)\chi + \\ 2i\left[-i\xi^1 p_2 + \xi^0 m\right]\chi - i2\dot{v}\left(\bar{\xi} + \tfrac{1}{2}\bar{\theta}\right)\chi - i\bar{\xi}\dot{\bar{\xi}} - i\xi_0\dot{\xi}^0 - i\xi_1\dot{\xi}^1\Big]d\tau\Big\} \end{gathered}, \tag{3.41}$$

et à ce niveau, fixons la variable auxiliare $v\left(\tau\right)$ en imposant

$$\left(\bar{\xi} + \frac{1}{2}\bar{\theta}\right)\left[2\dot{v} - 2eg\beta\sigma_2\left(v\left(\tau\right) - \frac{v\left(1\right) + v\left(0\right)}{2}\right) + 2i\left[\frac{\dot{x}}{e}w - \bar{w}\ 2i\ g\beta x\right]\right\}\chi = 0. \tag{3.42}$$

Cette équation différentielle peut être résolue et la solution est simplement

$$v(\tau)=\exp\left[e\ g\beta\sigma_2\right]\left\{v(0)+\int\limits_0^\tau d\tau'\exp\left[-e\ g\beta\sigma_2\tau'\right]\left[i\frac{\dot{x}}{e}w+\bar{w}g\beta x-e\sigma_2 g\beta\frac{(v(1)+v(0))}{2}\right]\right\}, \tag{3.43}$$

tout en remarquant au passage que :

$$v(1)-v(0)=\frac{\exp\left[-\frac{e\ g\beta\sigma_2}{2}\right]}{\cosh\left[\frac{e\ g\beta\sigma_2}{2}\right]}\int\limits_0^1 d\tau'\exp\left[-e\ g\beta\sigma_2\tau'\right]\left[i\frac{\dot{x}}{e}w+\bar{w}g\beta x\right]. \tag{3.44}$$

La fonction de Green prend finalement la forme suivante

$$\begin{aligned}S_2\left(x_{f2},x_{f1};x_{i2},x_{i1}\right)=&\ \tfrac{-i}{2}\hat{\Gamma}^5\exp\left(i\hat{\Gamma}^n\ \tfrac{\partial}{\partial\ \theta^n}\right)\int de\int d\chi\int\tfrac{dp_2}{2\pi}\mathcal{D}x_1\int\mathcal{D}\bar{\xi}\mathcal{D}\xi^2\mathcal{D}\xi^0\exp\left\{ik_2\left(x_{f2}-x_{i2}\right)\right.\\&-\tfrac{ie}{2}\left((p_2)^2+m^2\right)-\left[i\theta^1k_2+\theta^0m\right]\chi+\tfrac{ieg}{4}\beta\bar{\theta}\sigma_2\bar{\theta}+i\int\left[\left\{\tfrac{(\dot{x})^2}{2e}+\tfrac{e}{2}(g\beta x)^2+f(\tau)x\right\}-\right.\\&\left.\left.i\bar{\xi}\dot{\bar{\xi}}-i\xi_0\xi^0-i\xi_1\xi^1+\tfrac{ieg}{2}\beta\bar{\xi}\sigma_2\bar{\theta}+\tfrac{ieg}{4}\beta\bar{\xi}\sigma_2\bar{\xi}-2i\left[-i\xi^1p_2+\xi^0m\right]\chi\right]d\tau\right\},\end{aligned} \tag{3.45}$$

où

$$f(\tau)=-\bar{\theta}\ g\beta\frac{\exp\left[-\frac{e\ g\beta\sigma_2}{2}\right]}{\cosh\left[\frac{e\ g\beta\sigma_2}{2}\right]}\exp\left[-e\ g\beta\sigma_2\acute{\tau}\right]w\chi+i\bar{\theta}g\beta\frac{\exp\left[-\frac{e\ g\beta\sigma_2}{2}\right]}{\cosh\left[\frac{e\ g\beta\sigma_2}{2}\right]}\exp\left[-e\ g\beta\sigma_2\acute{\tau}\right]\bar{w}\chi.$$

L'intégrale sur les chemins $x(\tau)$ a une forme bien connue : c'est celle relative à l'oscillateur harmonique forcé et le résultat est le suivant

$$\begin{aligned}&\int\mathcal{D}x\exp\left\{i\int\left\{\tfrac{(\dot{x})^2}{2e}+\tfrac{e}{2}(g\beta x)^2+f(\tau)x\right\}d\tau\right\}=\\&\left(\tfrac{g\beta}{2i\pi\sinh(eg\beta)}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{\tfrac{ig\beta}{2\sinh(eg\beta)}\left[\left(x_f^2+x_i^2\right)\cosh(eg\beta)-2x_fx_i\right]+\tfrac{ix_f}{\sinh(eg\beta)}\int d\tau f(\tau)\sinh(eg\beta\tau)+\right.\\&\left.\tfrac{ix_i}{\sinh(eg\beta)}\int d\tau f(\tau)\sinh((eg\beta)(1-\tau))\right\}.\end{aligned} \tag{3.46}$$

La fonction de Green devient donc

$$S_2\left(x_{f2},x_{f1},x_{i2},x_{i1}\right)=\tfrac{-i}{2}\hat{\Gamma}^5\exp\left(i\hat{\Gamma}^n\ \tfrac{\partial}{\partial\ \theta^n}\right)\int de\int d\chi\int\tfrac{dp_2}{2\pi}\mathcal{K}\left(x_f,x_i\right)\exp\left\{ip_2\left(x_{f2}-x_{i2}\right)\right.$$
$$-\tfrac{ie}{2}\left(\left(p_2\right)^2+m^2\right)-\left[i\theta^1p_2+\theta^0m\right]\chi+\tfrac{ieg}{4}\beta\bar{\theta}\sigma_2\bar{\theta}-g\beta\tfrac{x_f}{2\sinh(eg\beta)}\left[\tanh\left(\tfrac{eg\beta}{2}\right)\theta^5+i\theta^2\right]\chi-\quad,$$
$$\left.-g\beta\tfrac{x_i}{2\sinh(eg\beta)}\left[\tanh\left(\tfrac{eg\beta}{2}\right)\theta^5-i\theta^2\right]\chi\right\}\mathcal{I}\left(\bar{\theta}\right)\tag{3.47}$$

posons

$$\mathcal{K}\left(x_f,x_i\right)=\left(\tfrac{g\beta}{2i\pi\sinh(eg\beta)}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{\tfrac{ig\beta}{2\sinh(eg\beta)}\left[\left(x_f^2+x_i^2\right)\cosh\left(eg\beta\right)-2x_fx_i\right]\right\},$$

et

$$\mathcal{I}\left(\bar{\theta}\right)=\int\mathcal{D}\bar{\xi}\mathcal{D}\xi^2\mathcal{D}\xi^0\exp\left\{\int\left\{\bar{\xi}\dot{\bar{\xi}}+\xi_0\dot{\xi}^0+\xi_1\dot{\xi}^1-2\left[-i\xi^1k_2+\xi^0m\right]\chi-\tfrac{eg}{2}\beta\bar{\xi}\sigma_2\bar{\theta}-\tfrac{eg}{4}\beta\bar{\xi}\sigma_2\bar{\xi}\right\}d\tau\right\}.$$

En intégrant sur $\bar{\xi},\xi^2,\xi^0$ il est facile de montrer que

$$\mathcal{I}\left(\bar{\theta}\right)=\cosh\left(\tfrac{eg}{2}\beta\right)\exp\left\{\left(\tfrac{1}{2}\tanh\left(\tfrac{eg\beta}{2}\right)\bar{\theta}\sigma_2\bar{\theta}\right)+\tfrac{eg}{2}\beta\bar{\theta}\sigma_2\bar{\theta}\right\}d\tau\right\}.$$

Un calcul direct, assez long montre que

$$S_2\left(x_{f2},x_{f1};x_{i2},x_{i1}\right)=\tfrac{-i}{2}\hat{\Gamma}^5\exp\left(i\hat{\Gamma}^n\ \tfrac{\partial}{\partial\ \theta^n}\right))\int de\int d\chi\int\tfrac{dp_2}{2\pi}\cosh\left(\tfrac{eg}{2}\beta\right)\mathcal{K}\left(x_f,x_i\right)\exp\left\{ip_2\left(x_{f2}-x_{i2}\right)\right.$$
$$\left.-\tfrac{ie}{2}\left(\left(p_2\right)^2+m^2\right)\right\}\exp\left(\theta^nQ_{nm}\theta^m+\Upsilon_n\theta^n\chi\right),\tag{3.48}$$

où

$$Q_{nm}=-f_{nm}\tanh\left(\frac{eg\beta}{2}\right),$$

$$\Upsilon_n=-\left[iw^1p_2+w^0m\right]\chi-g\beta\frac{x_f}{2\sinh\left(eg\beta\right)}\left[\tanh\left(\frac{eg\beta}{2}\right)w^5+iw^2\right]-g\beta\frac{x_i}{2\sinh\left(eg\beta\right)}\left[\tanh\left(\frac{eg\beta}{2}\right)w^5-iw^2\right],$$

et

$$w^0=\left(\begin{array}{cccc}1&0&0&0\end{array}\right),$$

$$w^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$w^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$w^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aprés avoir intégré sur la variable χ et utilisé l'identité suivante

$$\exp(i\hat{\Gamma}^n \frac{\partial_l}{\partial \theta^n}) F(\theta)_{\theta=0,} = F\left(\frac{\partial}{\partial\ \theta^n}\right) \exp\left(i\theta_n \hat{\Gamma}^n\right)_{\theta=0}, \tag{3.49}$$

et aprés quelques manipulations, nous obtenons le résultat suivant

$$\begin{array}{c} S_2(x_{f2}, x_{f1}; x_{i2}, x_{i1}) = \frac{-i}{2} \int de \int \frac{dp_2}{2\pi} \cosh\left(\frac{eg}{2}\beta\right) \mathcal{K}(x_f, x_i) \Phi(e) \\ \exp\left\{ip_2(x_{f2} - x_{i2}) - \frac{ie}{2}\left((p_2)^2 + m^2\right)\right\} \end{array}, \tag{3.50}$$

où

$$\Phi(e) = \hat{\Gamma}^5 \left[-i\Gamma^1 p_2 + \Gamma^0 m - x_f\ g\beta + \frac{\partial}{\partial x_f}\Gamma^2\right] \left(1 - \tanh\left(\frac{eg\beta}{2}\right)\Gamma^2\right), \tag{3.51}$$

est le facteur de spin.

En utilisant la formule suivante qui permet de séparer les variables

$$\begin{array}{c} \left(\frac{g\beta}{2i\pi\sinh(eg\beta)}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{ig\beta}{2\sinh(eg\beta)}\left[\left(x_f^2 + x_i^2\right)\cosh(eg\beta) - 2x_f x_i\right]\right\} = \\ \frac{(g\beta)^{\frac{1}{2}}}{4\pi}\left(\frac{\xi}{1-\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{1}{4}\frac{1-\xi^2}{1+\xi^2}\left(\delta^2 + \alpha^2\right) + i\frac{\xi}{1+\xi^2}\alpha\delta\right\} = \\ \frac{(g\beta)^{\frac{1}{2}}}{4\pi}\exp\left(-\frac{5\pi i}{4}\right)\int d\nu \frac{\exp\left(eg\beta\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin(-\nu\pi)} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}(\nu+1)\right) \times \\ \left[D_\nu\left(\sqrt{ig\beta}x_f\right) D_{-\nu-1}\left(i\sqrt{ig\beta}x_i\right) + D_\nu\left(-\sqrt{ig\beta}x_i\right) D_{-\nu-1}\left(-i\sqrt{ig\beta}x_f\right)\right] \end{array}, \tag{3.52}$$

où D_ν sont les fonctions de Weber, ainsi que l'égalité :

$$\begin{array}{c} \left[D_\nu(\alpha) D_{-\nu-1}(\beta) + D_\nu(-\alpha) D_{-\nu-1}(-i\beta)\right] = \frac{\Gamma(\nu)}{\sqrt{2\pi}}\left[\exp\left(-i\frac{\pi}{2}(\nu+1)\right) D_\nu(\alpha) + \exp\left(i\frac{\pi}{2}(\nu+1)\right) D_\nu(-\alpha)\right] \times \\ \left[\exp(i\pi(\nu+1)) D_\nu(\beta) + D_\nu(-\beta)\right] \quad . \qquad \forall\ \alpha, \beta, \nu \end{array}, \tag{3.53}$$

et les vecteus propres de Γ^2

$$q_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad q_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$q_{-1}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad q_{-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

nous obtenons la décomposition spectrale suivante

$$\begin{array}{c} S_2^c\left(x_{f2}, x_f, x_{i2}, x_i\right) = -\sum\limits_{\epsilon, s=\pm 1} \int \frac{dp_2}{2\pi} \left[i\Gamma^1 p_2 + \Gamma^0 m - x_f\ g\beta + \frac{\partial}{\partial x_f}\Gamma^2\right] \\ \exp\left\{ -ip_2\left(x_{f2} - x_{i2}\right)\right\} \frac{1}{4\pi} \exp\left(-\frac{5\pi i}{4}\right) \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\pi(\varpi - is)\right]}{(g\beta)^{\frac{1}{2}}\left(1+\exp -\pi(\varpi - is)\right)} \times \\ \left[D_{\frac{s-1}{2}+\frac{i\varpi}{2}}\left(\sqrt{ig\beta}x_f\right) + \exp\left(i\frac{1}{2}\pi\left(s + i\varpi + 1\right)\right) D_{\frac{s-1}{2}+\frac{i\varpi}{2}}\left(-\sqrt{ig\beta}x_i\right)\right] \times \\ \left[D_{\frac{s-1}{2}+\frac{i\varpi}{2}}\left(\sqrt{ig\beta}x_i\right) + \exp\left(-i\frac{1}{2}\pi\left(s + i\varpi + 1\right)\right) D_{\frac{s-1}{2}+\frac{i\varpi}{2}}\left(-\sqrt{ig\beta}x_f\right)\right] \quad q_s^\epsilon \bar{q}_s^\epsilon \end{array} , \tag{3.54}$$

Ce qui nous permet d'extraire les fonctions d'onde

$$\begin{array}{c} \Psi_s^\epsilon\left(x_2, x\right) = -\left[i\gamma^1 p_2 + \gamma^1\gamma^2 m - x\ g\beta + \frac{\partial}{\partial x}\gamma^2\right] \times \\ \exp\left\{ -ip_2 x_2\right\} \left[\frac{1}{4\pi} \exp\left(-\frac{5\pi i}{4}\right) \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\pi(\varpi - is)\right]}{(g\beta)^{\frac{1}{2}}\left(1+\exp -\pi(\varpi - is)\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \left[D_{\frac{s-1}{2}+\frac{i\varpi}{2}}\left(\sqrt{ig\beta}x\right) + \exp\left(i\frac{1}{2}\pi\left(s + i\varpi + 1\right)\right) D_{\frac{s-1}{2}+\frac{i\varpi}{2}}\left(-\sqrt{ig\beta}x\right)\right] q_s^\epsilon \end{array} . \tag{3.55}$$

3.5 Conclusion

Pour conclure ce chapitre , nous avons d'abord montré pour des interactions bien spécifiques comment séparer les dynamiques en traitant de manière indépendante les propagateurs correspondants. La formulation intégrale de chemin a été ensuite donnée et après intégration sur les variables nous avons montré comment obtenir les propagateurs pour deux formes de champ.

Par comparaison ,les fonctions d'onde extraites nous ont permis de conclure que nos calculs sont corrects.

Chapitre 4

Équation de Pauli et intégrales de chemins

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on se propose de donner la formulation intégrale de chemins pour l'équation de Pauli. Pour cela nous suivons la méthode dûe à Levy-leblond [8]qui a permis de linéariser l'équation de Schrodinger et qui consiste à faire jouer à $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ le même rôle. La méthode de linéarisation est donc la même que celle utilisée par Dirac pour obtenir son équation en partant de l'équation de Klein-Gordon et il est connu maintenant que l'équation de Dirac est actuellement l'une des équations fondamentales de la physique.

En linéarisant l'équation de Schrodinger pour une particule libre et en appliquant les régles de Dirac qui consistent à changer $\left(E \rightarrow E - eV;\ \vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}\right)$, Levy-Leblond a pu déduire l'équation bien connue de Pauli et qui est la suivante

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - eV - \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 + \frac{ie}{2m}\vec{\sigma}\ \left(\vec{p} \wedge \vec{A}\right)\right]\Psi\left(\vec{r}, t\right) = 0.$$

Nous proposons dans ce chapitre en linéarisant cette équation, de montrer comment la formuler au moyen des intégrales de chemin . La procédure que nous utilisons est la suivante : nous déterminons d'abord la fonction de Green relative à l'équation en question que nous factorisons. Nous exprimons ensuite la fonction de Green en une somme d'un produit de deux fonctions de Green. La technique intégrale de chemin de Gitman utilisée pour l'equation de Dirac est appliquée afin d'avoir des expressions sans opérateur.

Nous considérons le cas de la particule libre pour tester nos calculs.

Partons donc de l'équation que doit vérifier la fonction de Green S

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}-eV-\frac{1}{2m}\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)^2+\frac{ie}{2m}\vec{\sigma}\left(\vec{p}\wedge\vec{A}\right)\right]S\left(\vec{r}_f,t_f,\vec{r}_i,t_i\right)=\delta^3\left(\vec{r}_f-\vec{r}_i\right)\delta\left(t_f-t_i\right)\ . \quad (4.1)$$

Symboliquement, l'équation précédente se reécrit

$$\left[E-eV-\frac{1}{2m}\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)^2+\frac{ie}{2m}\vec{\sigma}\ \left(\vec{p}\wedge\vec{A}\right)\right]S=1\ , \quad (4.2)$$

ce qui nous permet de tirer

$$S=\frac{1}{\left[E-eV-\frac{1}{2m}\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)^2+\frac{ie}{2m}\vec{\sigma}\ \left(\vec{p}\wedge\vec{A}\right)\right]}\ . \quad (4.3)$$

Cette expression peut être réarrangée, grâce aux propriétés des matrices de Pauli, de la façon suivante

$$S=\frac{2m}{\left[2m\left(E-eV\right)-\left[\vec{\sigma}\ .\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)\right]^2\right]}\ . \quad (4.4)$$

Ecrivons maintenant S sous la forme factorisée

$$S=2m\frac{1}{\left[a'\left(E-eV\right)+\vec{b}'\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)+c'\right]}\frac{1}{\left[a\left(E-eV\right)+\vec{b}\left(\vec{p}-e\vec{A}\right)+c\right]}. \quad (4.5)$$

Il est évident que les deux dernières expressions doivent être les mêmes ,ce qui nous donne par comparaison les relations suivantes

$$\begin{gathered}a'a=0\ ,\quad (a'c+c'a)=1\ ,\quad (a'b+b'a)=0,\\ c'c=0\ ,\quad (c'b_i+b_i'c)=0\ ,\\ \left(b_j'b_i+b_i'b_j\right)=-2\delta_{ji}\quad (i=j=1,2,3)\,.\end{gathered} \quad (4.6)$$

mais avec la condition supplémentaire $\left[E - eV, \vec{p} - e\vec{A}\right]$ =0 . Ce qui implique que nous devons fixer $V = 0$ (ou Cte) et $\vec{A} = \vec{A}\,(x, y, z)$

Choisissons $V = 0$ et $\vec{A} = \vec{A}\,(x, y, z)$ et comme $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, nous nous limitons ainsi à une particule soumise à un champ magnétique statique. Posons

$$\begin{array}{c} b_4 = i\left(\ a + \frac{1}{2m}c\right)\ ,\ b_4' = i\left(\ a' + \frac{1}{2m}c'\right)\ , \\ b_5 = \left(a - \frac{1}{2m}c\right)\ ,\ b_5' = \left(\ a' - \frac{1}{2m}c'\right)\ , \end{array} \tag{4.7}$$

alors il est facile d'obtenir la relation suivante

$$\left(b'_\mu b_\nu + b'_\nu b_\mu\right) = -2\delta_{\mu\nu}\ ,\ (\mu = \nu = 1, 2, 3, 4, 5)\ . \tag{4.8}$$

qui rappelle celle qui est vérifiée par les matrices α_i de Dirac

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij},\ \ (i, j = 1, 2, 3)\ \ . \tag{4.9}$$

Il est facile de voir que si l'on pose

$$\begin{array}{c} b_i = M\alpha_i\ , b_i' = -\alpha_i M^{-1},\quad (i = 1, 2, 3)\ , \\ b_4 = M\beta\ , b_4' = -\beta M^{-1}, \\ b_5 = -iM\ , b_5' = -iM^{-1}\ . \end{array} \tag{4.10}$$

la relation entre les b et b' est satisfaite et que M est une matrice inversible $\left(MM^{-1} = M^{-1}M = 1\right)$

.

Remplaçons a, b, c et a', b',c' dans l'expression de S, alors

$$S = 2m\frac{1}{\left[\frac{i(\beta-1)}{2}E - \alpha_i\left(p^i - eA^i\right) + mi\left(\beta + 1\right)\right]}\frac{1}{\left[-\frac{i(\beta+1)}{2}E + \alpha_i\left(p^i - eA^i\right) - mi\left(\beta - 1\right)\right]}\ , \tag{4.11}$$

et passons à l'espace de configuration pour obtenir la fonction de Green

$$S(\vec{r}_f,t_f,\vec{r}_i,t_i)=2m\langle\vec{r}_f,t_f\mid\frac{1}{\left[\frac{i(\beta-1)}{2}E-\alpha_i(p^i-eA^i)+mi(\beta+1)\right]}\times$$
$$\frac{1}{\left[-\frac{i(\beta+1)}{2}E+\alpha_i(p^i-eA^i)-mi(\beta-1)\right]}\mid\vec{r}_i,t_i\rangle\ .$$

Insérons la relation de fermeture $\int\mid\vec{r}_a,t_a\rangle\langle\vec{r}_a,t_a\mid d\vec{r}_a dt_a=1$, nous obtenons

$$S(\vec{r}_f,t_f,\vec{r}_i,t_i)=2m\int d\vec{r}_a dt_a S_1(\vec{r}_f,t_f,\vec{r}_a,t_a)S_2(\vec{r}_a,t_a,\vec{r}_i,t_i)\ , \tag{4.12}$$

où

$$S_1(\vec{r}_f,t_f,\vec{r}_a,t_a)=\langle\vec{r}_a,t_a\mid\frac{1}{\left[\frac{i(\beta-1)}{2}E-\alpha_i\left(p^i-eA^i\right)+mi\left(\beta+1\right)\right]}\mid\vec{r}_i,t_i\rangle \tag{4.13}$$

et

$$S_2(\vec{r}_a,t_a,\vec{r}_i,t_i)=\langle\vec{r}_a,t_a\mid\frac{1}{\left[-\frac{i(\beta+1)}{2}E+\alpha_i\left(p^i-eA^i\right)-mi\left(\beta-1\right)\right]}\mid\vec{r}_i,t_i\rangle \tag{4.14}$$

Ainsi nous avons montré que le propagateur relatif à l'équation de Pauli est une somme d'un produit de deux propagateurs relatifs à deux noyaux linéaires en E et $\vec{p}$.

4.2 Formulation intégrale de chemin de S_1 et S_2

Effectuons le changement sur les 4 matrices $(\beta,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\to\left(\gamma^0,\gamma,^1\gamma^1,\gamma^3\right)$ en posant

$$\gamma^0=\beta,$$
$$\gamma^1=\beta\alpha_1,$$
$$\gamma^2=\beta\alpha_2,$$
$$\gamma^3=\beta\alpha_3.$$

Les 4 matrices $\left(\gamma^0,\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3\right)$ vérifient les relations d'anticommutation habituelles, multiplions à gauche par γ^0 et à droite pour le dénominateur, on obtient

$$S_1(\vec{r}_f,t_f,\vec{r}_a,t_a)=\gamma^0\langle\vec{r}_a,t_a\mid\frac{1}{\left[\frac{i(1-\gamma^0)}{2}E+\gamma^i\left(p_i-eA_i\right)+mi\left(1+\gamma^0\right)\right]}\mid\vec{r}_i,t_i\rangle \tag{4.15}$$

et

$$S_2(\vec{r}_a,t_a,\vec{r}_i,t_i)=\gamma^0\langle\vec{r}_a,t_a\mid\frac{1}{\left[-\frac{i(1+\gamma^0)}{2}E-\gamma^i\left(p_i-eA_i\right)-mi\left(1-\gamma^0\right)\right]}\mid\vec{r}_i,t_i\rangle. \tag{4.16}$$

Pour homogénéiser les deux noyaux, utilisons la matrice $\gamma^5=\gamma^0\ \gamma^1\ \gamma^2\ \gamma^3$ et changeons $\gamma\rightarrow\hat{\gamma}$ telle que $\left(\gamma^0\ ,\gamma^1\ ,\gamma^2\ ,\gamma^3\ ,\gamma^5\ \right)\rightarrow\left(\gamma^0\,\gamma^5,\gamma^1\ \gamma^5,\gamma^2\ \gamma^5,\gamma^3\ \gamma^5,\gamma^5\ \right)=\left(\hat{\gamma}^0\ ,\hat{\gamma}^1\ ,\hat{\gamma}^2\ ,\hat{\gamma}^3\ ,\hat{\gamma}^5\ \right)$. A l'aide de deux temps propres λ et χ(bosonique et fermionique) les deux propagateurs se mettent d'abord sous la forme en exponentielle

$$\begin{aligned}S_1(\vec{r}_f,t_f,\vec{r}_a,t_a)=-\hat{\gamma}^0\textstyle\int_0^\infty d\lambda\int\exp&\left\{i\frac{\lambda}{2}\left[\frac{i\left(\hat{\gamma}^5-\hat{\gamma}^0\ \right)}{2}E+\hat{\gamma}^i\left(p_i-eA_i\right)+mi\left(\hat{\gamma}^5\ \ +\hat{\gamma}^0\right)\right]^2\right.\\&\left.+\frac{i}{2}\chi\left[\frac{i\left(\hat{\gamma}^5-\hat{\gamma}^0\ \right)}{2}E+\hat{\gamma}^i\left(p_i-eA_i\right)+mi\left(\hat{\gamma}^5\ \ +\hat{\gamma}^0\right)\right]\right\}d\chi\ ,\end{aligned} \tag{4.17}$$

et

$$\begin{aligned}S_2(\vec{r}_a,t_a,\vec{r}_i,t_i)=-\hat{\gamma}^0\textstyle\int_0^\infty d\lambda\int\exp&\left\{i\frac{\lambda}{2}\left[\frac{-i\left(\hat{\gamma}^5\ \ +\hat{\gamma}^0\right)}{2}E-\hat{\gamma}^i\left(p_i-eA_i\right)-mi\left(\hat{\gamma}^5-\hat{\gamma}^0\ \ \right)\right]^2\right.\\&\left.+\frac{i}{2}\chi\left[\frac{-i\left(\hat{\gamma}^5\ \ +\hat{\gamma}^0\right)}{2}E-\hat{\gamma}^i\left(p_i-eA_i\right)-mi\left(\hat{\gamma}^5-\hat{\gamma}^0\ \ \right)\right]\right\}d\chi\end{aligned} \tag{4.18}$$

et suivant la même démarche que celle utilisée dans les chapitres précédents , les formes intégrales de chemin pour les deux propagateurs sont alors aisément obtenues

$$S_1(\vec{r}_f,t_f,\vec{r}_a,t_a)=\hat{\gamma}^0\exp\left(i\hat{\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int D^3r\int D^3pDEDtD\psi\exp\left\{i\int\left[-\vec{p}\,\dot{\vec{r}}-E\,\dot{t}+\right.\right.$$
$$\frac{\lambda}{2}\left(2mE-\vec{p}^2-e^2\vec{A}^2+2e\vec{p}\vec{A}-4ie\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)\psi_i\psi_j\right)-i\left[\frac{i\left(\psi^5-\psi^0\right)}{2}E+\psi^i\left(p_i-eA_i\right)+mi\left(\psi^5+\psi^0\right)\right]\chi+$$
$$\left.\left.i\psi\dot{\psi}\right]d\tau+\psi\left(1\right)\psi\left(0\right)\right\} \tag{4.19}$$

et

$$S_2(\vec{r}_a,t_a,\vec{r}_i,t_i)=-\hat{\gamma}^0\exp\left(i\hat{\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int D^3r\int D^3pDEDtD\psi\exp\left\{i\int\left[-\vec{p}\,\dot{\vec{r}}-E\,\dot{t}+\right.\right.$$
$$\frac{\lambda}{2}\left(2mE-\vec{p}^2-e^2\vec{A}^2+2e\vec{p}\vec{A}-4ie\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)\psi_i\psi_j\right)+i\left[\frac{i\left(\psi^5+\psi^0\right)}{2}E+\psi^i\left(p_i-eA_i\right)+mi\left(\psi^5-\psi^0\right)\right]\chi+$$
$$\left.\left.i\psi\dot{\psi}\right]d\tau+\psi\left(0\right)\psi\left(1\right)\right\}. \tag{4.20}$$

Pour illuster la méthode , considérons le cas simple de la particule libre. Le cas libre constitue en quelque sorte un test

4.3 Cas libre

posons dans les deux expressions $A_i=0$. Nous obtenons alors pour S_1

$$S_1(\vec{r}_f,t_f,\vec{r}_a,t_a)=-\hat{\gamma}^0\exp\left(i\hat{\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int D^3r\int D^3pDEDtD\psi\exp\left\{i\int\left[-\vec{p}\,\dot{\vec{r}}-E\,\dot{t}+\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{\lambda}{2}\left(2mE-\vec{p}^2\right)-i\left[\frac{i\left(\psi^5-\psi^0\right)}{2}E+\psi^ip_i+mi\left(\psi^5+\psi^0\right)\right]\chi+i\psi\dot{\psi}\right]d\tau+\psi\left(1\right)\psi\left(0\right)\right\} \tag{4.21}$$

et pour S_2

$$S_2(\vec{r}_a,t_a,\vec{r}_i,t_i)=-\hat{\gamma}^0\exp\left(i\hat{\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int D^3r\int D^3pDEDt\mathcal{D}\psi\exp\left\{i\int\left[-\vec{p}\,\dot{\vec{r}}-E\,\dot{t}+\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{\lambda}{2}\left(2mE-\vec{p}^2\right)-i\left[\frac{-i\left(\psi^5\ +\psi^0\right)}{2}E-\psi^ip_i-mi\left(\psi^5-\psi^0\ \right)\right]\chi+i\psi\dot{\psi}\right]d\tau+\psi\left(1\right)\psi\left(0\right)\right\}.\tag{4.22}$$

Procédons aux intégrations sur les chemins $\vec{r}$ et t : il apparait évidemment des fonctions de Dirac $\delta(\dot{\vec{p}})$ et $\delta(\dot{E})$,ce qui implique que l'énergie et l'impulsion sont conservées au cours du mouvement et le resultat se réduit à :

$$S_1(\vec{r}_f,t_f,\vec{r}_a,t_a)=-\hat{\gamma}^0\exp\left(i\hat{\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{dE}{2\pi}\mathcal{D}\psi\exp\left\{-i\vec{p}(\vec{r}_a\ -\ \vec{r}_i)-iE\left(t_a\ -\ t_i\right)+\right.$$
$$\left.\frac{i\lambda}{2}\left(2mE-\vec{p}^2\right)+\int\left[\left[\frac{i\left(\psi^5-\psi^0\ \right)}{2}E+\psi^ip_i+mi\left(\psi^5\ \ +\psi^0\right)\right]\chi+i\psi\dot{\psi}\right]d\tau+\psi\left(1\right)\psi\left(0\right)\right\},\tag{4.23}$$

et

$$S_2(\vec{r}_a,t_a,\vec{r}_i,t_i))=-\hat{\gamma}^0\exp\left(i\hat{\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{dE}{2\pi}\mathcal{D}\psi\exp\left\{-i\vec{p}(\vec{r}_a\ -\ \vec{r}_i)-iE\left(t_a\ -\ t_i\right)+\right.$$
$$\left.i\frac{\lambda}{2}\left(2mE-\vec{p}^2\right)+\int\left[\left[\frac{-i\left(\psi^5\ +\psi^0\right)}{2}E-\psi^ip_i-mi\left(\psi^5-\psi^0\ \right)\right]\chi+i\psi\dot{\psi}\right]d\tau+\psi\left(1\right)\psi\left(0\right)\right\}.\tag{4.24}$$

Intégrons maintenant sur les variables de Grassman, en rappelant qu'elles doivent satisfaire à la condition $\psi\left(1\right)+\psi\left(0\right)=\theta$. Notons que cette condition peut être modifiée si l'on change ψ $\rightarrow\zeta$, à l'aide de la relation

$$\psi=\frac{1}{2}\left(\zeta+\theta\right)\ ,\tag{4.25}$$

afin d'avoir

$$\zeta\left(1\right)+\zeta\left(0\right)=0,$$

qui est une condition d'antipériodicité . Ainsi nous avons

$$S_1(\vec{r}_f,t_f,\vec{r}_a,t_a) = -\hat{\gamma}^0 \exp\left(i\hat{\gamma}\tfrac{\partial}{\partial\theta}\right)\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int \tfrac{d^3p}{(2\pi)^3}\tfrac{dE}{2\pi}\exp\Bigg\{-i\vec{p}\left(\vec{r}_a - \vec{r}_i\right) - iE\left(t_a - t_i\right) + \frac{i\lambda}{2}\left(2mE-\vec{p}^2\right)+\frac{1}{2}\left[\frac{i\left(\theta^5-\theta^0\right)}{2}E+\theta^i p_i + mi\left(\theta^5+\theta^0\right)\right]\chi\Bigg\}$$
$$\int \mathcal{D}\zeta \exp\left[\int\left(\zeta_0\dot{\zeta}_0-\zeta_i\dot{\zeta}_i-\zeta_5\dot{\zeta}_5+\frac{1}{2}\left[\frac{i\left(\zeta^5-\zeta^0\right)}{2}E+\zeta^i p_i+mi\left(\zeta^5+\zeta^0\right)\right]\chi\right)d\tau\right], \tag{4.26}$$

et

$$S_2(\vec{r}_a,t_a,\vec{r}_i,t_i)) = -\hat{\gamma}^0 \exp\left(i\hat{\gamma}\tfrac{\partial}{\partial\theta}\right)\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int \tfrac{d^3p}{(2\pi)^3}\tfrac{dE}{2\pi}\exp\Bigg\{-i\vec{p}\left(\vec{r}_a - \vec{r}_i\right) - iE\left(t_a - t_i\right) + i\frac{\lambda}{2}\left(2mE-\vec{p}^2\right)+\frac{1}{2}\left[\frac{-i\left(\theta^5+\theta^0\right)}{2}E-\theta^i p_i - mi\left(\theta^5-\theta^0\right)\right]\chi\Bigg\}\times$$
$$\int \mathcal{D}\zeta \exp\left[\int\left(\zeta_0\dot{\zeta}_0-\zeta_i\dot{\zeta}_i-\zeta_5\dot{\zeta}_5+\frac{1}{2}\left[\frac{-i\left(\zeta^5+\zeta^0\right)}{2}E-\zeta^i p_i-mi\left(\zeta^5-\zeta^0\right)\right]\chi\right)d\tau\right]. \tag{4.27}$$

Les intégrales sur les variables de Grassmann sont simplement égales à

$$\int \mathcal{D}\zeta \exp\left[\int\left(\zeta_0\dot{\zeta}_0-\zeta_i\dot{\zeta}_i-\zeta_5\dot{\zeta}_5+\frac{1}{2}\left[\frac{i\left(\zeta^5-\zeta^0\right)}{2}E+\zeta^i p_i+mi\left(\zeta^5+\zeta^0\right)\right]\chi\right)d\tau\right]=1\ , \tag{4.28}$$

et

$$\int \mathcal{D}\zeta \exp\left[\int\left(\zeta_0\dot{\zeta}_0-\zeta_i\dot{\zeta}_i-\zeta_5\dot{\zeta}_5+\frac{1}{2}\left[\frac{-i\left(\zeta^5+\zeta^0\right)}{2}E-\zeta^i p_i-mi\left(\zeta^5-\zeta^0\right)\right]\chi\right)d\tau\right]=1\ , \tag{4.29}$$

à cause du fait que $\chi^2 = 0$, et en rappelant que notre particule est non relativiste et qu'il n'y pas de champ magnétique pour que le spin intéragisse, il vient :

$$S_1(\vec{r}_f,t_f,\vec{r}_a,t_a) = -\hat{\gamma}^0 \exp\left(i\hat{\gamma}\tfrac{\partial}{\partial\theta}\right)\int_0^\infty d\lambda\int d\chi\int \tfrac{d^3p}{(2\pi)^3}\tfrac{dE}{2\pi}\exp\Bigg\{-i\vec{p}\left(\vec{r}_a - \vec{r}_i\right) - iE\left(t_a - t_i\right) + \frac{i\lambda}{2}\left(2mE-\vec{p}^2\right)+\frac{1}{2}\left[\frac{i\left(\theta^5-\theta^0\right)}{2}E+\theta^i p_i + mi\left(\theta^5+\theta^0\right)\right]\chi\Bigg\}, \tag{4.30}$$

et

$$S_2(\vec{r}_a,t_a,\vec{r}_i,t_i)) = -\hat{\gamma}^0 \exp\left(i\hat{\gamma}\tfrac{\partial}{\partial\theta}\right)\int_0^\infty d\lambda \int d\chi \int \tfrac{d^3p}{(2\pi)^3}\tfrac{dE}{2\pi}\exp\Bigg\{-i\vec{p}\,(\vec{r}_a - \vec{r}_i) - iE\,(t_a - t_i) + i\tfrac{\lambda}{2}\left(2mE-\vec{p}^2\right) + \tfrac{1}{2}\left[\frac{-i\left(\theta^5+\theta^0\right)}{2}E - \theta^i p_i - mi\left(\theta^5-\theta^0\right)\right]\chi\Bigg\}. \tag{4.31}$$

Intégrons sur χ le temps propre Grassmannien, il vient

$$S_1(\vec{r}_f,t_f,\vec{r}_a,t_a) = -\tfrac{1}{2}\hat{\gamma}^0 \exp\left(i\hat{\gamma}\tfrac{\partial}{\partial\theta}\right)\int_0^\infty d\lambda \int \tfrac{d^3p}{(2\pi)^3}\tfrac{dE}{2\pi}\left[\frac{i\left(\theta^5-\theta^0\right)}{2}E + \theta^i p_i + mi\left(\theta^5+\theta^0\right)\right] \exp\Bigg\{-i\vec{p}\,(\vec{r}_a - \vec{r}_i) - iE\,(t_a - t_i) + \tfrac{i\lambda}{2}\left(2mE-\vec{p}^2\right)\Bigg\}, \tag{4.32}$$

et

$$S_2(\vec{r}_a,t_a,\vec{r}_i,t_i) = -\tfrac{1}{2}\hat{\gamma}^0 \exp\left(i\hat{\gamma}\tfrac{\partial}{\partial\theta}\right)\int_0^\infty d\lambda \int d\chi \int \tfrac{d^3p}{(2\pi)^3}\tfrac{dE}{2\pi}\left[\frac{-i\left(\theta^5+\theta^0\right)}{2}E - \theta^i p_i - mi\left(\theta^5-\theta^0\right)\right] \exp\Bigg\{-i\vec{p}\,(\vec{r}_a - \vec{r}_i) - iE\,(t_a - t_i) + i\tfrac{\lambda}{2}\left(2mE-\vec{p}^2\right)\Bigg\}. \tag{4.33}$$

La formule suivante

$$\exp\left(i\gamma\frac{\partial}{\partial\,\theta}\right)F\left(\theta\right)_{\theta=0} = F\left(\frac{\partial}{\partial\,\theta}\right)\exp\left(i\theta\gamma\right)_{\theta=0}\ , \tag{4.34}$$

permet de faciliter les calculs . Il vient alors

$$S_2(\vec{r}_a,t_a,\vec{r}_i,t_i) = -\tfrac{i}{2}\hat{\gamma}^0 \exp\left(i\hat{\gamma}\tfrac{\partial}{\partial\theta}\right)\int_0^\infty d\lambda \int \tfrac{d^3p}{(2\pi)^3}\tfrac{dE}{2\pi}\left[\frac{-i\left(\hat{\gamma}^5+\hat{\gamma}^0\right)}{2}E - \hat{\gamma}^i p_i - mi\left(\hat{\gamma}^5-\hat{\gamma}^0\right)\right] \exp\Bigg\{-i\vec{p}\,(\vec{r}_a - \vec{r}_i) - iE\,(t_a - t_i) + i\tfrac{\lambda}{2}\left(2mE-\vec{p}^2\right)\Bigg\}. \tag{4.35}$$

et

$$S_1(\vec{r}_f,t_f,\vec{r}_a,t_a) = -\frac{i}{2}\hat{\gamma}^0 \int_0^\infty d\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{dE}{2\pi}\left[\frac{i\left(\hat{\gamma}^5-\hat{\gamma}^0\ \right)}{2}E + \hat{\gamma}^i p_i + mi\left(\hat{\gamma}^5\ \ +\hat{\gamma}^0\right)\right]$$
$$\exp\left\{-i\vec{p}\,(\vec{r}_a\ -\ \vec{r}_i) - iE\,(t_a\ -\ t_i) + \frac{i\lambda}{2}\left(2mE - \vec{p}^2\right)\right\}, \tag{4.36}$$

L'intégration sur le temps propre λ permet de réduire encore les deux formes précédentes à

$$S_2(\vec{r}_a,t_a,\vec{r}_i,t_i) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{dE}{2\pi}\frac{\left[\frac{i(\beta-1)}{2}E\ -\ \alpha^i p_i\ +\ im\ (\beta+1)\right]}{(2mE-\vec{p}^2)}$$
$$\exp\left\{-i\vec{p}\,(\vec{r}_a\ -\ \vec{r}_i) - iE\,(t_a\ -\ t_i)\right\}, \tag{4.37}$$

et

$$S_1(\vec{r}_f,t_f,\vec{r}_a,t_a) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{dE}{2\pi}\frac{\left[-\frac{i(\beta+1)}{2}E\ \ +\alpha^i p_i\ \ - im(\beta-1)\right]}{(2mE-\vec{p}^2)}$$
$$\exp\left\{-i\vec{p}\,(\vec{r}_a\ -\ \vec{r}_i) - iE\,(t_a\ -\ t_i)\right\}. \tag{4.38}$$

D'où finalement l'expression du propagateur

$$S(\vec{r}_f,t_f,\vec{r}_i,t_i) = 2m\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{dE}{2\pi}\frac{1}{[2mE\ -\vec{p}^2]}$$
$$\exp\left\{-i\vec{p}\,(\vec{r}_f\ \ -\vec{r}_i) - iE\,(t_f\ -\ t_i)\right\}, \tag{4.39}$$

en constatant que les matrices γ ont disparu comme il se doit : notre particule est sans spin

.

Comme il y a un seul pôle $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$, aprés intégration d'abord sur E à l'aide des résidus nous avons

$$S(\vec{r}_f,t_f,\vec{r}_i,t_i) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\exp\left\{-i\vec{p}\,(\vec{r}_f\ \ -\vec{r}_i) - i\frac{\vec{p}^2}{2m}(t_f\ -\ t_i)\right\} \tag{4.40}$$

et aprés intégration sur $\vec{p}$, nous obtenons le propagateur connu

$$S(\vec{r}_f,t_f,\vec{r}_i,t_i) = \left(\frac{m}{2\pi i\,(t_f\ -\ t_i)}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left[\frac{im}{2}\frac{(\vec{r}_f\ \ -\vec{r}_i)^2}{(t_f\ -\ t_i)}\right]$$

.

relatif à une particule non relativiste libre.

4.4 Conclusion

Pour conclure : nous avons montré, pour une particule avec spin=1/2 soumise à un champ magnétique statique et aprés avoir décomposé l'opérateur de Pauli en un produit de deux opérateurs linéaires par rapport à E et $\vec{p}$, que le propagateur s′écrit sous la forme de la somme d′un produit de deux propagateurs relatifs à ces deux noyaux linéaires.

Le spin1/2 de par sa nature relativiste , nous a ainsi permis indirectement d'appliquer la formulation intégrale de chemin supersymétrique utlisée pour l'équation de Dirac. Nous avons testé notre procédure en considérant la particule libre et le test a été concluant.

Chapitre 5

Conclusion Générale

Dans ce mémoire de Magister qui traite essentiellement de l'équation de Dirac par le formalisme des intégrales de chemin, nous pouvons voir qu'il comporte trois travaux :

Dans le chap.2, le problème d'une particule de Dirac en interaction avec un champ de type non abélien a été considéré. Ce champ a des propriétés similaires à celle de l'onde plane de Volkov mais avec en plus des générateurs de groupe SU(N). C'est ainsi que la fonction de Green a été d'abord formulée suivant deux approches globale et locale en utilisant la méthode habituelle qui consiste à

-introduire des relations de fermeture pour éliminer les opérateurs positions et impulsions

-utiliser deux identités pour éliminer les matrices de Dirac et les générateurs du groupe pour les remplacer par des variables anticommutantes (de Grassmann).

Les variables bosoniques (positions et impulsions) et fermioniques (Grassmann) décrivent respectivement le mouvement extérieur et interne de la particule. Le champ non abélien est également décrit par des variables de Grassmann.

Le calcul de la fonction de Green a été ensuite effectué en trois étapes

- une identité a été introduite pour réduire l'espace dans lequel s'effectue le mouvement

-une deuxième identité est utilisée pour réduire également l'espace relatif au mouvement du spin

-avec les formules qui ont permis d'introduire les variables fermioniques qui décrivent le mouvement du champ, dans la formulation, ces formules ont été simplement réutilisées (sans le T-produit) pour avoir la forme définitive de la fonction de Green.

La décomposition spectrale a permis alors d'extraire les fonctions d'onde qui sont exactement les mêmes que celles obtenues par résolution directe de l'équation de Dirac.

Dans le chap.3, il est question de la séparation des variables dans les intégrales de chemin, dont l'importance est assez connue dans la résolution de problèmes à plusieurs variables dans les équations différentielles.

En prenant des interactions bien spécifiques et en introduisant une identité qui, après multiplication par une certaine matrice , la fonction de Green a été scindée en deux fonctions de Green dont l'une concerne la particule libre . Deux exemples ont été traités : les cas de la particule libre et le cas de la particule soumise à une force linéaire. C'est ainsi que les fonctions d'onde ont été obtenues.

Enfin le chap.4 est consacré à l'équation de Pauli formulée suivant l'approche supersymétrique des intégrales des chemin. En effectuant le chemin inverse ayant permis à Levy-Leblond d'obtenir l'équation et avec l'aide d'une 5eme matrice (produit des 4 matrices de Dirac) , le propagateur est d'abord factorisé en un produit de noyaux linéaires par à rapport à l'énergie et à l'impulsion et ensuite formulé suivant l'approche supersymétrique .Le propagateur a été obtenu sous la forme d'une somme d'un produit de deux propagateurs relatifs aux deux noyaux linéaires et le cas de la particule libre est traité comme exemple ou test.

Une remarque peut être faite cependant sur le formalisme des intégrales de chemin utilisé comme alternative à l'équation de Dirac. Nous savons que, pour l'équation de Schrödinger le propagateur a la forme standard $\sum \exp\{\ iS\ \}$ où la somme porte sur tous les chemins possibles et S est l'action de la mécanique classique et il semble que cette forme n'est pas appropriée pour l'équation de Dirac à cause des matrices γ et donc du spin de la particule qui, comme on le sait, prend des valeurs discrètes alors que les chemins sont en principe des fonctions continues. Mais concrètement pour traiter des problèmes, le formalisme avec la forme standard -celui utilisé dans la thèse- semble le mieux adapté pour les calculs. Le spin en tant que grandeur est inséré dans le formalisme à l'aide de variables anticommutantes (de Grassmann), compliquant en quelque sorte la représentation classique.

Appendice

Dans cet appendice nous donnons les règles auxquelles obeissent les variables de Grassmann
1-une algèbre de Grassmann est définie par les relations d'anticommutations suivantes

$$\chi_i\chi_j + \chi_j\chi_i = 0 \qquad\qquad i, j = \overline{1, n}$$

n est dite dimension de l'algèbre.
2-En particulier nous avons

$$\chi_i^2 = 0$$

3-toute fonction quelconque est développable en série finie de termes

$$f(\chi) = f_0 + \sum_k f_1(k)\chi_k + \sum_{k_i} f_2(k_1, k_2)\chi_{k_1}\chi_{k_2} + ...$$

4- la dérivée à gauche et à droite $\left(\frac{\partial}{\partial\chi_p}\right) f$ et $f\left(\frac{\partial}{\partial\chi_p}\right)$ est définie comme suit

$$\frac{\partial}{\partial\chi_p}\chi_{i_1}...\chi_{i_s} = \delta_{i_1p}\chi_{i_2}...\chi_{i_s} - \delta_{i_2p}\chi_{i_1}\chi_{i_3}...\chi_{i_s} +$$
$$\delta_{i3p}\chi_{i_1}\chi_{i_2}\chi_{i_4}...\chi_{i_s} + ... + (-1)^{s-1}\delta_{i_sp}\chi_{i_1}...\chi_{i_{s-1}}$$

$$\chi_{i_1}...\chi_{i_s}\frac{\partial}{\partial\chi_p} = \delta_{i_sp}\chi_{i_1}...\chi_{_{i_{s-1}}} - \delta_{i_{s-1}p}\chi_{i_1}...\chi_{_{i_{s-2}}}\chi_{i_s} +$$
$$... + (-1)^{s-1}\delta_{i_1p}\chi_{i_2}...\chi_{i_s}$$

Pour le cas particulier de la dimension 1 nous avons

$$\frac{\partial_l}{\partial\chi_i}\left(\chi_j\chi_k\right) = \delta_{ij}\chi_k - \delta_{ik}\chi_j$$

$$\frac{\partial_R}{\partial\eta_i}\left(\chi_j\chi_k\right) = \delta_{ik}\chi_j - \delta_{ij}\chi_k$$

5-les variables vérifient les relations d'anticommutations suivantes

$$\left[\frac{d}{d\chi_i}, \chi_j\right]_+ = \delta_{ij}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\chi_i}, \frac{\partial}{\partial\chi_j}\right]_+ = 0$$

6-de plus nous avons

$$[d\chi_i, d\chi_k]_+ = 0$$

$$[\chi_i, d\chi_k]_+ = 0$$

7-L'intégration sur les variables χ_i est complètement définie par les deux relations suivantes

$$\int d\chi_i = 0 \quad , \quad \int \chi_i d\chi_i = 1$$

Appendice

Dans cet appendice, nous montrons que les fonctions de Dirac δ qui sont apparues lors des intégrations peuvent etre expliquées en utilisant les chemins de la mécanique classique.

A-Approche globale

Dans le cas global l'action est

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \Bigg[p\dot{x} + i\zeta\dot{\zeta} + i\psi\dot{\psi} + p_e\dot{e} + \tfrac{e}{2}\Bigg\{ p^2 - m^2 \ + \ g^2\tfrac{1}{2N}A_\mu^a A_a^\mu + 2ig\left(p^\mu A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right) + 4g\left(k\psi\right)\left(\psi^\mu \dot{A}_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\Bigg\}\Bigg] d\tau$$

et les équations classiques sont données par

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta e} &= -\dot{p}_e + \frac{1}{2}\left[p^2 - m^2 \ + \ g^2\frac{1}{2N}A_\mu^a A_a^\mu + 2ig\left(p^\mu A_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right) + 4g\left(k\psi\right)\left(\psi^\mu \dot{A}_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right] = 0\\
\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta p_e} &= \dot{e} = 0 \rightarrow e = \text{Cte}\\
\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta p^\rho} &= \dot{x}_\rho + ep_\rho + eig\left(A_\rho^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right) = 0\\
\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta x^\rho} &= -\dot{p}_\rho + \frac{e}{2}k_\rho\left(\ g^2\frac{1}{N}\dot{A}_\mu^a A_a^\mu + 2ig\left(p^\mu \dot{A}_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right) + 4g\left(k\psi\right)\left(\psi^\mu \ddot{A}_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right)\right) = 0\\
\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta \zeta^\rho} &= 2i\dot{\zeta}_\rho - 4ig\left(p^\mu A_\mu^a\ f_{a\rho}^{\ p}\ \zeta_p\right) - 8g\left(k\psi\right)\left(\psi^\mu \dot{A}_\mu^a\ f_{a\rho}^{\ b}\ \zeta_b\right) = 0\\
\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta \psi^\rho} &= 2i\dot{\psi}_\rho + 2gek_\rho\left(\psi^\mu \dot{A}_\mu^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right) - 2eg\left(k\psi\right)\left(\dot{A}_\rho^a\ f_{ap}^{\ b}\ \zeta_b\zeta^p\right) = 0
\end{aligned}$$

où nous avons déduit les relations obtenues par intégrations :

$$e = Cte$$

$$k\dot{x} = -epk$$

$$\dot{\varphi} = -epk$$

et

$$k\psi . = Cte$$

Montrons que p_μ =Cte

$-\dot{p}_\rho + k_\rho \left(\; g^2 \frac{1}{N} \dot{A}^a_\mu A^\mu_a + 2ig \left(p^\mu \dot{A}^a_\mu \; f_{ap}^{\;b} \; \zeta_b \zeta^p \right) + 4g \left(k\psi \right) \left(\psi^\mu \ddot{A}^a_\mu \; f_{ap}^{\;b} \; \zeta_b \zeta^p \right) \right) = 0$

et en utilisant

$2ig \left(p^\mu \dot{A}^a_\mu \; f_{ap}^{\;b} \; \zeta_b \zeta^p \right) = -\frac{2ig}{ep.k} \frac{d}{d\tau} \left(p^\mu A^a_\mu \; f_{ap}^{\;b} \; \zeta_b \zeta^p \right) + \frac{8g^2}{ep.k} \left(k\psi \right) \left(p^\mu A^a_\mu f_{ap}^{\;b} \zeta^p \left(\psi^\nu \dot{A}^c_\nu \; f_{cb}^{\;l} \; \zeta_l \right) \right)$

et

$4g \left(k\psi \right) \left(\psi^\mu \ddot{A}^a_\mu \; f_{ap}^{\;b} \; \zeta_b \zeta^p \right) = -\frac{4g}{ep.k} \frac{d}{d\tau} \left(k\psi \right) \left(\psi^\mu \dot{A}^a_\mu \; f_{ap}^{\;b} \; \zeta_b \zeta^p \right) - \frac{8g^2}{ep.k} \left(k\psi \right) \left(\psi^\mu \dot{A}^a_\mu \; f_{ap}^{\;b} \zeta^p \;\; \left(p^\nu A^c_\nu \; f_{cb}^{\;l} \; \zeta_l \right) \right)$

nous obtenons les équations

$\frac{d}{d\tau} \left[p_\rho + \frac{1}{ep.k} k_\rho \left(\; g^2 \frac{1}{2N} A^a_\mu A^\mu_a + 2ig \left(p^\mu \dot{A}^a_\mu \; f_{ap}^{\;b} \; \zeta_b \zeta^p \right) + 4g \left(k\psi \right) \left(\psi^\mu \ddot{A}^a_\mu \; f_{ap}^{\;b} \; \zeta_b \zeta^p \right) \right) \right] = 0$

$P_\rho = p_\rho + \frac{1}{ep.k} k_\rho \left(\; g^2 \frac{1}{2N} A^a_\mu A^\mu_a + 2ig \left(p^\mu \dot{A}^a_\mu \; f_{ap}^{\;b} \; \zeta_b \zeta^p \right) + 4g \left(k\psi \right) \left(\psi^\mu \ddot{A}^a_\mu \; f_{ap}^{\;b} \; \zeta_b \zeta^p \right) \right) = Cte$

et

$$kP = kp$$

B-Approche locale :

Dans l'approche locale l'action est

$$\mathcal{A} = \int_0^\infty \left[p\dot{x} + p_e \dot{e} + p_\chi \dot{\chi} + i\psi_\mu \dot{\psi}^\mu + i\zeta^a \dot{\zeta}^a + \right.$$

$$\left\{ \frac{e}{2} \left(p^2 + \; g^2 \frac{1}{2N} A^a_\mu A^\mu_a + 2ig \left(p^\mu A^a_\mu \; f_{ap}^{\;b} \; \zeta_b \zeta^p \right) + 4g \left(k_\mu \psi^\mu \right) \left(\psi^\mu \dot{A}^a_\mu \; f_{ap}^{\;b} \; \zeta_b \zeta^p \right) \right) - \right.$$

$$\left. \left. \left(\left(\psi^\mu p_\mu \right) + ig \left(\psi^\mu A^a_\mu \; f_{ap}^{\;b} \; \zeta_b \zeta^p \right) \right) \chi \right\} \right] d\tau$$

et les équations classiques sont données par

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta x^\rho} &= -\dot{p}_\rho + k_\rho \left(e \; g^2 \frac{1}{2N} \dot{A}^a_\mu A^\mu_a + eg \left(p^\mu \dot{A}^a_\mu \; f_{ap}^{\;b} \; \zeta_b \zeta^p \right) + 2eg \left(k\psi \right) \left(\psi^\mu \ddot{A}^a_\mu \; f_{ap}^{\;b} \; \zeta_b \zeta^p \right) - ig \left(\psi^\mu \dot{A}^a_\mu \; f_{ap}^{\;b} \; \zeta_b \zeta^p \right) \chi \right. \\
\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta p^\rho} &= \dot{x}_\rho + ep_\rho + ieg \left(A^a_\rho \; f_{ap}^{\;b} \; \zeta_b \zeta^p \right) - \psi_\rho \chi = 0 \\
\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \zeta^\rho} &= 2i\dot{\zeta}_\rho - 2eig \left(p^\mu A^a_\mu \; f_{a\rho}^{\;p} \; \zeta_p \right) - 4g \left(k\psi \right) \left(\psi^\mu \dot{A}^a_\mu \; f_{a\rho}^{\;b} \; \zeta_b \right) + 2ig \left(\psi^\mu A^a_\mu \; f_{a\rho}^{\;b} \; \zeta_b \right) \chi = 0 \\
\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \psi^\rho} &= 2i\dot{\psi}_\rho + 2egk_\rho \left(\psi^\mu A^a_\mu \; f_{ap}^{\;b} \; \zeta_b \zeta^p \right) - 2eg \left(k\psi \right) \left(\dot{A}^a_\rho \; f_{ap}^{\;b} \; \zeta_b \zeta^p \right) - \left(p_\rho + ig \left(A^a_\rho \; f_{ap}^{\;b} \; \zeta_b \zeta^p \right) \right) \chi = 0
\end{aligned}$$

où nous avons déduit les relations obtenues par intégrations :

$$k\dot{\psi} = -\frac{i}{2}kp\chi$$
$$k\psi\left(\tau\right) = k\psi\left(0\right) - \frac{i}{2}kp\chi\tau$$
$$k\psi\left(\tau\right) = \frac{1}{2}k\theta + i\frac{pk}{4}\chi - \frac{i}{2}kp\chi\tau$$

et

$$k\dot{x} = -epk + k\psi\chi$$
$$k\dot{x} = -epk + \frac{1}{2}k\theta\chi$$
$$\dot{\varphi} = -epk + \frac{1}{2}k\theta\chi$$

Nous voyons en inversant la relation précédente que nous avons une relation entre φ et τ

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = -\frac{1}{epk}\left(1 + \frac{ik\theta}{2epk}\chi\right) \; .$$

Appendice

1-**Technique de Gitman**

La fonction de Green pour une particule de Dirac dans un champ externe vérifie l'équation de Dirac inhomogene suivante :

$$\left(\gamma^{\mu}\left(i\partial_{\mu}-eA_{\mu}\right)-m\right)S\left(x,x'\right)=\delta^{4}\left(x-x'\right)\qquad \mu=0,1,2,3$$

Symboliquement, l'équation précédente s'écrit

$$\left(\gamma\left(p-eA\right)-m\right)S=I$$

c'est à dire que l'opérateur est S solution de

$$S=\frac{1}{\left(\gamma\left(p-eA\right)-m\right)}$$

La technique de Gitman consiste à l'hommogénéisation de l'opérateur S. Alors on multiplie à gauche par γ^{5} et à droite pour le dénominateur, on obtient

$$\begin{aligned} S &= \gamma^{5}\frac{1}{\left(\gamma^{\mu}\gamma^{5}\left(p-eA\right)_{\mu}-\gamma^{5}m\right)} \\ S &= \hat{\gamma}^{5}\frac{1}{\left(\hat{\gamma}^{\mu}\left(p-eA\right)_{\mu}-\hat{\gamma}^{5}m\right)} \end{aligned}$$

où nous avons posé $\hat{\gamma}^{\mu}=\gamma^{\mu}\gamma^{5}$ et $\hat{\gamma}^{5}=\gamma^{5}$ qui sont également des matrices de Dirac vérifiant l'algèbre de Clifford donc les lois d'anti commutation.

On voit que l'opérateur S est l'inverse d'un opérateur de Fermi. On introduit un super temps propre (λ,χ) un temps propre bosonique λ et un temps propre fermionique χ, alors l'opérateur S s'écrit

$$
\begin{aligned}
S &= \hat{\gamma}^5 \frac{1}{\left(\hat{\gamma}^\mu (p-eA)_\mu - \hat{\gamma}^5 m\right)} \\
&= \hat{\gamma}^5 \frac{\left(\hat{\gamma}^\mu (p-eA)_\mu - \hat{\gamma}^5 m\right)}{\left(\hat{\gamma}^\mu (p-eA)_\mu - \hat{\gamma}^5 m\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\hat{\gamma}^5 \int d\lambda \int \exp\left[\frac{i\lambda}{2}\left(\hat{\gamma}^\mu (p-eA)_\mu - \hat{\gamma}^5 m\right) + i\chi \left(\hat{\gamma}^\mu (p-eA)_\mu - \hat{\gamma}^5 m\right)\right] d\chi
\end{aligned}
$$

2-**Technique d'Alexandrou et al**

La fonction de Green pour une particule de Dirac dans un champ externe vérifie l'équation de Dirac s'écrit :

$$S = \frac{1}{(\gamma (p-eA) - m)}$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur de la fonction de Green par le conjuqué du dénominateur, on obtient alors une fonction de Green avec un dénominateur bosonique (homogène) et un numérateur fermionique (non homogène), on obtient ainsi

$$S = (\gamma (p-eA) + m) \frac{1}{\left([\gamma (p-eA)]^2 - m^2\right)}$$

2-1 :**Approche globale**

On utilise la représentation en temps propre bosonique de Schwinger, alors l'opérateur S s'écrit

$$
\begin{aligned}
S &= (\gamma (p-eA) + m) \frac{1}{\left([\gamma (p-eA)]^2 - m^2\right)} \\
&= -\frac{i}{2}\int d\lambda \ (\gamma (p-eA) + m) \exp\left[\frac{i\lambda}{2}\left([\gamma (p-eA)]^2 - m^2\right)\right]
\end{aligned}
$$

Alors la fonction de Green s'écrit en représentation des coordonnées comme

$$S\left(x,x'\right)=-\frac{i}{2}\left(\gamma\left(i\partial_x-eA\left(x\right)\right)+m\right)\int d\lambda\langle x\left|\exp\left[\frac{i\lambda}{2}\left(\left[\gamma\left(p-eA\right)\right]^2-m^2\right)\right]\right|x'\rangle$$

2-2 :**Approche locale**

On introduit un super temps propre (λ,χ) : un temps propre bosonique λ et un temps propre fermionique χ, alors l'opérateur S s'écrit

$$\begin{aligned} S &= \left(\gamma\left(p-eA\right)+m\right)\frac{1}{\left(\left[\gamma\left(p-eA\right)\right]^2-m^2\right)} \\ &= \int d\lambda\int d\chi\,\exp\left[-\frac{i}{2}\left(m^2+m\chi\right)\right]\exp\left[\frac{i\lambda}{2}\left[\gamma\left(p-eA\right)\right]^2-i\left[\gamma\left(p-eA\right)\right]\chi\right] \end{aligned}$$

Appendice

Notre but, dans cet appendice est de montrer comment éliminer les variables Grassmann ξ et introduire les matrices Γ.

Notre fonction de Green étant la suivante

$$\begin{aligned} G\left(x_f, x_i\right) &= \exp\left(\Gamma^a \frac{\partial}{\partial\, \vartheta^a}\right) \int de \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \mathcal{D}\xi \exp\left\{ip\left(x_f - x_i\right) + i\int_0^1 \left\{i\xi\dot{\xi} + \right.\right. \\ & \left.\left. F^a\left(\tau\right) f_{ap}^{\ b}\ (2\xi+\vartheta)_b(2\xi+\vartheta)^p\right\} d\tau\right\}_{\vartheta=0} \end{aligned}$$

les chemins $\xi^n(\tau)$ sont des variables de Grassmann impaires et anticommutantes avec les matrices Γ et vérifiant les conditions au bord suivantes

$$\xi^n(0) + \xi^n(1) = 0$$

L'astuce consiste

-d'abord à introduire des courants $\rho(\tau)$

$$\begin{aligned} G\left(x_f, x_i\right) &= \exp\left(\Gamma^a \frac{\partial}{\partial\, \vartheta^a}\right) \int de \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \mathcal{D}\xi \\ & \exp\left\{ip\left(x_f - x_i\right) + i\int_0^1 \left[i\xi\dot{\xi} + F^a\left(\tau\right) f_{ap}^{\ b}\ (\frac{\delta}{\delta\rho} + \vartheta)_b(\frac{\delta}{\delta\rho} + \vartheta)^p\right] d\tau\right\} * \end{aligned}$$
$$\exp\left\{\int_0^1 2\rho_n(\tau)\xi^n(\tau)d\tau\right\} \quad |_{\rho=\vartheta=0}$$

-et utiliser la formule suivante(voir Appendice *Alexandrou*)

$$\int \mathcal{D}\xi \exp\left\{\int_0^1 \left[-\xi_n(\tau)\dot{\xi}^n(\tau) + 2\rho_n(\tau)\xi^n(\tau)\right] d\tau\right\} = \exp\left\{-\int_0^1 \int_0^\tau \rho_n(\tau)\rho(\tau')^n d\tau d\tau'\right\}$$

il vient

$$G\left(x_f,x_i\right) = \exp\left(\Gamma^a \frac{\partial}{\partial\,\vartheta^a}\right)\int de\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left\{ip\left(x_f-x_i\right)+i\left[\int_0^1 F^a\left(\tau\right)f_{ap}^{\ b}\;(\frac{\delta}{\delta\rho}+\vartheta)_b(\frac{\delta}{\delta\rho}+\vartheta)^p d\tau\right]\right\}*$$
$$\exp\left\{-\int_0^1\int_0^\tau \rho_n(\tau)\rho(\tau^{'})^n d\tau d\tau^{'}\right\}|_{\rho=\vartheta=0}$$

Comme

$$\exp\left\{\int_0^1 F^a\left(\tau\right)f_{ap}^{\ b}\;\frac{\delta}{\delta\rho_b}\frac{\delta}{\delta\rho^p}d\tau\right\}\exp\left\{-\int_0^1\int_0^\tau \rho_n(\tau)\rho(\tau^{'})^n d\tau d\tau^{'}\right\}$$
$$= \left\{1+\int_0^1 F^a\left(\tau\right)f_{ap}^{\ b}\;\frac{\delta}{\delta\rho_b}\frac{\delta}{\delta\rho^p}d\tau+...\right\}\exp\left\{-\int_0^1\int_0^\tau \rho_n(\tau)\rho(\tau^{'})^n d\tau d\tau^{'}\right\}$$

$$\int_0^1 F^a\left(\tau\right)f_{ap}^{\ b}\frac{\delta}{\delta\rho_b}\frac{\delta}{\delta\rho^p}d\tau\exp\left\{-\int_0^1\int_0^s \rho_n(s)\rho(s^{'})^n ds ds^{'}\right\}$$
$$= \left[-\int_0^1\int_0^1\int_0^s F^a\left(\tau\right)f_{ap}^{\ b}\delta_{pn}\delta_{bn}\delta\left(\tau-s\right)\delta\left(\tau-s'\right)ds ds^{'}d\tau\right]\exp\left\{-\int_0^1\int_0^k \rho_m(k)\rho(k^{'})^m dk dk^{'}\right\}+$$
$$\left[\int_0^1\int_0^1\int_0^s\int_0^1\int_0^k F^a\left(\tau\right)f_{ap}^{\ b}\delta_n^p\delta\left(\tau-s\right)\rho(s^{'})^n\delta_k^m\delta\left(\tau-k'\right)\rho_m(k)ds ds^{'}dk dk^{'}d\tau\right]*$$
$$\exp\left\{-\int_0^1\int_0^k \rho_m(k)\rho(k^{'})^m dk dk^{'}\right\}$$

Prenons $\rho=0$, nous avons

$$\int_0^1 F^a\left(\tau\right)f_{ap}^{\ b}\frac{\delta}{\delta\rho_b}\frac{\delta}{\delta\rho^p}d\tau\exp\left\{-\int_0^1\int_0^s \rho_n(s)\rho(s^{'})^n ds ds^{'}\right\}=0$$

$$\exp\left\{\int_0^1 F^a\left(\tau\right)f_{ap}^{\ b}\;\vartheta^b\frac{\delta}{\delta\rho^p}d\tau\right\}\exp\left\{-\int_0^1\int_0^k \rho_m(k)\rho(k^{'})^m dk dk^{'}\right\}|_{\rho=0}=1$$

La fonction de Green prend alors la forme suivante

$$G\left(x_f,x_i\right)=\exp\left(\Gamma\frac{\partial}{\partial\,\vartheta}\right)\int de\int\frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\exp\left\{ip\left(x_f-x_i\right)+i\left[\int_0^1F^a\left(\tau\right)f_{ap}^{\;\;b}\;\vartheta_b\vartheta^p d\tau\right]\right\}|_{\vartheta=0}$$

Introduisons les matices Γpar l$'$intermediaire de l'identité suivante

$$\exp\left(\Gamma\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\exp\left\{\int_0^1 d\tau\rho\left(\tau\right)\vartheta\;d\tau\right\}|_{\vartheta=0}=\exp\left(\int d\tau\rho\left(\tau\right)\Gamma\right)$$

Notons que nos Γ sont idépendant de τ .

Le resultat définitif donc est le suivant

$$G\left(x_f,x_i\right)=\int de\int\frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\exp\left\{ip\left(x_f-x_i\right)+i\left[\int_0^1F^a\left(\tau\right)f_{ap}^{\;\;b}\;\Gamma_b\Gamma^p d\tau\right]\right\}$$

Résumé :

Dans cette thèse de Magister, nous montrons en utilisant les intégrales de chemins, comment obtenir la solution pour des particules de Dirac en mouvement dans des champs ayant des formes choisies de telle manière que les solutions soient exactes et analytiques.

Dans une première partie, nous avons déterminé la fonction d'onde d'une particule de Dirac dans un champ non- abelian suivant le formalisme d'Alexandrou et al, grâce à l'utilisation de deux contraintes, l'une relative à l'espace afin de réduire le mouvement et une deuxième relative au spin.

Dans une deuxième partie, nous montrons comment réduire le mouvement de l'espace-temps à $(3+1)$ dimensions en deux mouvements indépendants dans deux espaces différents de dimensions respectivement 2 et $(1+1)$. Les 2 propagateurs relatifs à chaque espace sont ensuite formulés suivant l'approche supersymétrique de Gitman pour une particule de spin 1/2 , électriquement neutre.

Dans la troisième partie,suivant une idée de Levy-leblond, le propagateur de l'équation de Pauli est écrit sous forme d'un produit de deux propagateurs relatifs à deux noyaux linéaires par rapport à E et $\vec{p}$ et le cas de la particule libre est traité comme exemple.

REFERENCES

(1) C. Alexandrou, R. Rosenfelder and A. W. Schreiber, arXiv :hep-th/9809101. V. 2, (1999).

(2) E.S.Fradkin and D.M.Gitman,Phys.Rev.D. V. 44, 3320. (1991).

(3) S. Zeggari, T. Boudjedaa and L.Chetouani,Phys. Scr.V. 64, 285-291, (2001).

(4) A. V. Koshelkin, Physics Letters B. V. 683, 205-210, (2010).

(5) E. S. Fradkin, D. M. Gitman, Sh. M. Shvartsman, Quantum Electrodynamics whith Unstable Vacuum (Springer-Verlag, Berlin, 1991).

(6) G. V. Shishkin and V.M. Villalba, J. Math. Phys.V. 34, 11, (1993).

(7) N. Boudiaf, A. Merdaci and L.Chetouani, J. Phys. A : Math. Th. V. 42, 12, (2009).

(8) W.Greiner,Quantum Mechanics : An Introduction (Springer-Verlag, Berlin, 1989).

(9) S. Zeggari, T. Boudjedaa and L.Chetouani, Czec. J. of Phys. V. 51, 185-280, (2001).

(10) D. M. Gitman, arXiv :hep-th/9608180. V.1, (1996).

(11) D.M.Gitman,S.I.Zlatev and W.D.Cruz, Braz.J. Phys.V. 2, 419, (1996).

(12) R.P.Feynman and A.R.Hibbs :Quantum Mechanics and Path Integrals (Mc Graw - Hill,NewYork 1965).

(13) L.S.Schulman , Techniques and Application of Path Integration(John Wiley New-York 1981)

(14) Ashok Das, Field Theory A Path Integral Approch ; (World Scientific, Singapore. V. 75, 2006).

(15) F. A. Berezin, The Methode : of Second Quantization (Academic Press, New York and London,1966).

(16)D.M. Gitman, S. L. Zlatev, arXiv :hep-th/9608179. V. 1, (1996).

(17)D. M. Gitman, Sh. M. Shvartsman, arXiv :hep-th/9310074. V. 2, (1993).

(18)R. Fresneda and D. M.Gitman, arXiv :hep-th/0709-3520. V. 1, (2007).

(19)D. M. Gitman and A. V. Saa, arXiv :hep-th/9208049. V. 2, (1992).

(20)D. M. Gitman, Sh. M. Shvartsman, arXiv :hep-th/9310142. V. 1, (1993).