

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
FACULTÉ DE PHYSIQUE



MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

EN : PHYSIQUE

Spécialité : Physique Théorique des Basses et Moyennes Énergies

Par

BERBICHE AMINE

Étude de l'appariement neutron-proton dans les noyaux de masse impaire avec conservation du nombre de particules

Soutenu publiquement le 29/05/2011, devant le jury composé de :

<i>Mme. KHALAL-KOUACHE Karima</i>	<i>Professeur à l'USTHB</i>	<i>Présidente</i>
<i>Mr. FELLAH Mohamed</i>	<i>Professeur à l'USTHB</i>	<i>Directeur de thèse</i>
<i>Mlle. ALLAL Nassima Hosni</i>	<i>Professeur à l'USTHB</i>	<i>Examinatrice</i>
<i>Mr. OUDIH Mohamed Réda</i>	<i>Maître de Conférences/A à l'USTHB</i>	<i>Examineur</i>
<i>Mr. BENCHOUK Chafik</i>	<i>Maître de Conférences/A à l'USTHB</i>	<i>Examineur</i>

Je remercie DIEU qui m'a permis de mener à bien ce travail.

*À mes parents et à mes grands-parents,
À ma sœur et à mon frère.*

Remerciements

Cette partie a été la dernière à être rédigée, et pourtant la plus délicate de ce mémoire. Il m'est en effet difficile d'exprimer en peu de phrases, ma gratitude envers tous les gens qui m'ont aidé au cours de mon travail, je prie donc d'avance ceux que j'aurais oublié de bien vouloir m'excuser.

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe spécialisée en "étude de la structure nucléaire", du laboratoire de physique théorique de la faculté de physique de l'USTHB.

Je ne remercierai jamais assez le professeur M. Fellah, directeur de l'équipe, de m'avoir accueilli au sein du laboratoire, d'avoir mis à ma disposition les moyens nécessaires à l'aboutissement de ce travail, et de l'avoir dirigé. Le professeur M. Fellah dirige son équipe en donnant l'exemple. Sa rigueur, sa pédagogie, ses critiques constructives et ses encouragements constants m'ont énormément inspiré.

J'adresse aussi mes remerciements aux membres du jury : d'abord à Mme K. Khalal-Kouache, professeur à l'USTHB, qui a accepté de le présider. J'exprime aussi ma profonde gratitude envers Mlle N.H. Allal, professeur à l'USTHB, non uniquement pour avoir accepté de faire partie du jury, mais aussi pour ses précieux conseils au fil de mes longues années d'études. Mr. M.R. Oudih et Mr. C. Benchouk, maîtres de conférences à l'USTHB, ont accepté de faire partie du jury, je les en remercie, et je les remercie également pour les discussions scientifiques dont ils ont bien voulu me gratifier.

Je remercie également Mlle N.H. Benhamouda, maître de conférences à l'USTHB, Mme D. Mokhtari et Mr. S. Kerrouchi, Docteurs à l'USTHB, ainsi que Mme I. Ami pour leur écoute et pour leurs précieuses suggestions.

Ce fut un grand plaisir pour moi que de travailler dans l'ambiance chaleureuse de notre équipe, notamment en compagnie de mon ami M.K. Bensmaïa, et de mes collègues : A. Haddouche, F. Hammache, M. Taïbeche, Y. Hamza, R. Rezzouk, H. Kadi, M. Douici et M. Belabbes. Je vous remercie et je vous souhaite une excellente réussite.

Je termine en remerciant tous les membres de ma famille qui m'ont encouragé tout au long de mes études, mes amis ainsi que mes collègues de "l'école de cours spécialisés Fayçal", et en souhaitant une bonne lecture à chacun et à chacune.

Table des matières

Introduction	10
1 Théorie de l'appariement	13
1.1 Opérateur hamiltonien	14
1.2 Linéarisation de l'hamiltonien	15
1.3 Diagonalisation et transformation de Bogoliubov-Valatin	17
1.4 Energies des états BCS	21
1.4.1 Systèmes ayant un nombre pair de particules	21
1.4.2 Systèmes ayant un nombre impair de particules	24
2 Appariement neutron-proton	26
2.1 Hamiltonien du système	27
2.2 Linéarisation de l'hamiltonien auxiliaire	29
2.3 Energies des quasi-particules	31
2.4 Détermination des vecteurs propres	31
2.5 Transformation de Bogoliubov-Valatin généralisée	33
2.6 Etat BCS	34
2.7 Les noyaux pair-pairs	36
2.7.1 Le nombre de particules	36
2.7.2 L'énergie	37
2.7.3 Les paramètres du gap	39
2.8 Les noyaux impairs	39
3 Conservation du nombre de nucléons	41
3.1 Appariement entre particules identiques pour des systèmes ayant un nombre pair de particules	42
3.1.1 Opérateur de projection	43
3.1.2 Forme discrète du projecteur	44
3.1.3 Projection de l'état $ BCS\rangle$	45

3.1.4	Calcul des valeurs moyennes	46
3.1.5	Extraction de la partie réelle	48
3.2	Systèmes ayant un nombre impair de particules	49
3.2.1	Projection de l'état fondamental	50
3.2.2	Calcul des valeurs moyennes	50
3.3	Appariement isovectoriel pour les systèmes pair-pairs	52
3.3.1	Projection de l'état fondamental	52
3.3.2	Calcul des valeurs moyennes	53
3.3.3	Extraction de la partie réelle	56
3.4	Systèmes ayant un nombre impair de particules	59
3.4.1	Etat fondamental projeté	59
3.4.2	Calcul des valeurs moyennes	60
3.4.3	Extraction de la partie réelle	62
4	Résultats numériques et discussion	64
4.1	Paramètres du gap et constantes d'appariement	65
4.2	Recouvrement des fonctions d'ondes	69
4.3	Convergence de la méthode de projection SBCS	70
4.4	Energie après projection	71
	Conclusion	74
	Annexe : Valeur moyenne du terme d'appariement	81

Table des figures

0-1	1
4-1	Variation des paramètres Δ_{nn} , Δ_{pp} et Δ_{np} en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} , dans le cadre du modèle à un niveau avec dégénérescence $\Omega = 12$, pour un système pair-pair avec les paramètres $Z = 4$ et $N = 8$ (a), et pour un système impair avec les paramètres $Z = 4$ et $N = 7$ (b).	67
4-2	Variation de l'énergie non projetée en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} , dans le cadre du modèle à un niveau avec dégénérescence $\Omega = 12$, pour un système pair-pair avec les paramètres $Z = 4$ et $N = 8$, et pour un système impair avec les paramètres $Z = 4$ et $N = 7$	68
4-3	Variation des énergies avant et après projection, dans le cadre du modèle à un niveau avec dégénérescence $\Omega = 12$, pour un système pair-pair avec les paramètres $Z = 4$ et $N = 8$ (a), et pour un système impair avec les paramètres $Z = 4$ et $N = 7$ (b).	72

Liste des tableaux

4.1	Variation du recouvrement des états, projeté et non projeté, en fonction des degrés d'extraction des fausses composantes, dans le cas d'un système impair, pour les paramètres : $Z=4$, $N=7$, $G_{pp}=G_{nn}=0,125\text{MeV}$ et $G_{np}=0,137\text{MeV}$	69
4.2	Variation de l'énergie correspondant à l'état fondamental projeté en fonction des degrés d'extraction des fausses composantes, dans le cas d'un système pair-pair, pour les paramètres : $Z=4$, $N=8$, $G_{pp}=G_{nn}=0,0625\text{MeV}$ et $G_{np}=0,044\text{MeV}$	70
4.3	Variation de l'énergie correspondant à l'état fondamental projeté en fonction des degrés d'extraction des fausses composantes, dans le cas d'un système impair, pour les paramètres : $Z=4$, $N=7$, $G_{pp}=G_{nn}=0,0625\text{MeV}$ et $G_{np}=0,044\text{MeV}$	70

Introduction

Manquant d'une expression formelle décrivant l'interaction nucléon-nucléon, les physiciens se sont toujours attelés à construire des modèles nucléaires tendant à approcher le plus possible la réalité expérimentale. Cette construction s'effectue le plus souvent sur deux niveaux bien distincts, d'abord l'élaboration d'un modèle à particules indépendantes décrivant le comportement global du système nucléaire, ensuite l'ajout des différentes interactions microscopiques résiduelles, parmi lesquelles l'une des plus importantes est la correction d'appariement. En effet, un grand nombre de données expérimentales soutiennent l'existence d'un effet de paires dans les systèmes nucléaires[1]. L'apparition de la théorie BCS en 1957[2] fut alors d'une grande importance, non uniquement parcequ'elle apporta une explication au phénomène de la supraconductivité, mais un intérêt non moins important en la théorie, réside dans le fait que les idées qui y avaient été introduites soient fondamentales, et aient pu être exploitées dans d'autres domaines de la physique. En particulier, un an après, soit en 1958, Bohr, Mottelson et Pines[3], l'ont adaptée à l'étude de la force d'appariement dans le noyau atomique.

Dès l'introduction de la théorie BCS en physique nucléaire, de nombreuses équipes se lancèrent sur cette idée, dans le but de mesurer l'influence de la force de pairing sur les processus régissant la structure du noyau atomique, et de corriger les défauts du formalisme. Le défaut le plus important est la non conservation du nombre de particules, qui mène vers des résultats médiocres lorsque l'on s'intéresse à la prédiction du comportement d'une multitude d'observables physiques, dont on peut citer le moment d'inertie[4] ou encore le moment quadrupolaire[5]. Différentes techniques, communément appelées techniques de projection (pour projection de l'état BCS sur l'état physique) furent mises au point.

La première méthode permettant d'éliminer les fausses composantes de l'état BCS fut proposée par Bayman[6] en 1960. D'autres méthodes suivirent rapidement, et cela même jusqu'à des années assez récentes[7]-[9]. La plupart des méthodes précédemment citées sont approximatives, ou alors exactes mais difficiles à mettre en œuvre du point de vue numérique[10]. Il existe toutefois une technique

de projection qui soit à la fois exacte et facile à programmer, il s'agit de la méthode SBCS[11]-[12] (pour Sharp BCS). En effet, sa facile mise en œuvre au plan numérique vient du fait qu'elle soit basée sur l'utilisation de sommes discrètes, au lieu de sommes intégrales, comme pour la méthode de Bayman. Elle consiste en la construction, à partir de l'état BCS, d'une suite d'états convergeant rapidement vers la solution physique[10]. Cette méthode a été utilisée avec succès, donnant lieu à de nombreux travaux, dont on peut citer ceux de l'équipe d'"étude de la structure nucléaire" du Laboratoire de Physique Théorique[13]-[21].

Les données expérimentales étant plutôt bien reproduites théoriquement pour les noyaux situés à l'intérieur de la vallée de stabilité, au cours des dernières années, le plus grand intérêt fut porté aux noyaux situés aux limites de cette vallée, soit proches des lignes limites qu'on appelle drip-line neutron et drip-line proton. L'intérêt croissant voué au cours de ces dernières années aux noyaux exotiques est essentiellement dû au développement de la situation expérimentale. La construction d'accélérateurs d'ions lourds toujours plus puissants, et de détecteurs au pouvoir de résolution toujours plus grand[22], mit à la disposition des théoriciens de la physique nucléaire, une base de données expérimentales vaste, permettant d'étudier la limite de validité des modèles nucléaires existants d'une part, et d'accéder à de nouvelles propriétés des noyaux d'autre part. Un bon nombre de mécanismes régissant les réactions nucléaires fut donc exploré[23], et dont on peut citer à titre d'exemple les processus de capture rapide de protons (rp-process)[24]-[25], de neutrons sous ses deux formes, rapide (r-process)[26]-[27] et lente (s-process)[28]-[29], les transitions bêta qui ont suscité de nombreux travaux[30]-[33] ainsi que les énergies de séparation de nucléons, uniques ou en paires, neutrons ou protons, et qui ont aussi été à l'origine de nombreux travaux[34]-[37].

L'effet de l'appariement neutron-proton est important sur les noyaux pour lesquels $Z \approx N$ [38], où les neutrons et les protons de valence occupent les mêmes niveaux d'énergies du modèle en couches. Dans cette optique, Allal et al[39] ont étudié des noyaux pour lesquels $Z = N$, à l'aide d'un hamiltonien tenant compte de l'appariement neutron- proton, et où ils ont tenu compte de la conservation du nombre de particules. Pour leur part, Kerrouchi et al[40] ont estimé les énergies de séparation de deux protons dans une étude similaire. Le plus grand nombre des travaux précédemment cités concernent des noyaux pairs. En fait, l'étude théorique des noyaux atomiques concerne la plupart du temps ce type de noyaux, laissant les propriétés des noyaux de masse impaire très peu explorées[41]-[42]. Une étude a donc été faite par Hammache et al[43], dans laquelle ils tiennent compte de l'appariement isovectoriel pour des noyaux impairs, sans toutefois te-

nir compte de la conservation du nombre de particules. L'objectif du présent travail, est l'élimination des fluctuations du nombre de particules, lors de l'étude de systèmes nucléaires de masses impaires, avec prise en compte du terme isovectoriel de l'appariement neutron-proton.

Le mémoire sera présenté en quatre chapitres. Le premier sera consacré à une illustration des concepts de base de la théorie BCS, appliquée pour l'appariement entre particules identiques. On y exposera notamment la nouvelle technique de linéarisation, basée sur l'utilisation du théorème de Wick, linéarisation qui permettra la construction de la transformation de Bogoliubov-Valatin[44]-[45] ainsi que la détermination des états des systèmes étudiés. On y introduira aussi la méthode du blocage de Wahlborn[46], permettant le traitement des systèmes impairs.

Dans le second chapitre, on portera notre attention sur le terme isovectoriel de l'appariement neutron-proton. On y définira l'hamiltonien qui sera utilisé dans la suite du travail, et la manière dont il sera linéarisé, toujours à l'aide du théorème de Wick. La transformation de Bogoliubov-Valatin généralisée sera immédiatement introduite, ainsi que les états des systèmes étudiés, toujours en utilisant la technique du niveau bloqué pour les systèmes de masse impaire. Le calcul des valeurs moyennes des observables nombre de particules et hamiltonien sera exposé.

Le troisième chapitre sera consacré à l'élimination des fluctuations du nombre de particules des états précédemment déterminés. Dans un but de clarté, on montrera d'abord la manière d'obtenir un opérateur de projection sous forme discrète, et on l'appliquera dans le cadre de l'appariement entre particules identiques. On généralisera ensuite son utilisation au cas de l'appariement neutron-proton, et cela pour les systèmes pairs comme pour les systèmes impairs. Immédiatement après, on déterminera les nouvelles expressions du nombre de particules et de l'énergie.

Le formalisme établi sera testé dans le cadre d'un modèle schématique à un niveau. Les résultats en seront exposés au quatrième et dernier chapitre.

Dans la conclusion générale, on discutera de la pertinence des résultats obtenus, ainsi que des applications qui s'ouvrent en perspectives à ce travail.

Chapitre 1

Théorie de l'appariement

Le noyau atomique est un système de fermions (les nucléons), se comportant de manière similaire au gaz d'électrons à la surface d'un matériau supraconducteur. Des différences de taille entre les deux systèmes résident pourtant dans le fait que les électrons supraconducteurs sont très nombreux, ont une masse très faible et sont soumis à une interaction coulombienne, alors que les nucléons sont en faible nombre, très massifs et soumis principalement à l'interaction nucléaire forte. Cependant, au-delà des similitudes et des différences qui peuvent exister entre les deux systèmes, un fait expérimental important réside dans l'existence d'un gap en énergie entre le niveau fondamental et le premier niveau excité, particulièrement pour les systèmes nucléaires pair-pairs, c'est-à-dire avec des nombres pairs de protons et de neutrons, d'où l'introduction de l'interaction d'appariement en physique nucléaire. En effet, l'hypothèse selon laquelle les nucléons se trouvant sur la même couche (voir le modèle en couches[1],[46]) peuvent s'apparier, permet d'obtenir un gain en énergie qui explique les observations expérimentales.

Dans cette première approche, on considère un système nucléaire de nombre de masse A pouvant être ou bien pair-pair (nombre pair de protons et nombre pair de neutrons) ou bien impair (nombre pair de protons et impair de neutrons ou l'inverse). On étudiera sur ce système l'interaction d'appariement entre particules identiques. La méthode qui sera utilisée sera celle de la linéarisation par le théorème de Wick. On commencera par définir l'hamiltonien du système, auquel on applique le théorème de Wick. On linéarise ensuite l'expression résultante, on en déduit les équations du gap ainsi que la transformation de Bogoliubov-Valatin, et finalement, on terminera par le calcul de l'énergie du système.

1.1 Opérateur hamiltonien

Le formalisme utilisé dans cette partie est celui de la seconde quantification. L'hamiltonien du système de particules considérées (neutrons ou protons) y est donné par l'expression :

$$H = H_0 + V \quad (1.1)$$

où le premier terme, H_0 , représente le champ moyen du modèle à particules indépendantes choisi, qui est issu soit d'un calcul de Hartree-Fock, soit choisi de manière phénoménologique comme le modèle de Woods-Saxon[47] par exemple. Pour diagonaliser H_0 , on choisit généralement la base de l'oscillateur harmonique à trois dimensions[48] possédant les mêmes symétries que celles vérifiées par H_0 . Dans le cas, par exemple, où H_0 posséderait la symétrie axiale, on choisit comme base de représentation celle de l'oscillateur harmonique à trois dimensions à symétrie axiale. Une fois diagonalisé, H_0 s'écrit en seconde quantification comme suit :

$$H_0 = \sum_{k>0} \varepsilon_k (a_k^+ a_k + a_{\tilde{k}}^+ a_{\tilde{k}}) \quad (1.2)$$

Les opérateurs a_k^+ (a_k) sont des opérateurs de création (d'annihilation) d'un nucléon se trouvant dans l'état $|k\rangle$ d'énergie ε_k du modèle à particules indépendantes. Ils satisfont aux relations d'anticommutation de fermions :

$$\begin{aligned} \{a_k^+, a_j^+\} &= \{a_k, a_j\} = 0, \forall k, j \\ \{a_k^+, a_j\} &= \delta_{k,j} \end{aligned} \quad (1.3)$$

L'état $|\tilde{k}\rangle = a_{\tilde{k}}^+ |0\rangle$ est le renversé par rapport au sens du temps de l'état $|k\rangle = a_k^+ |0\rangle$ [49], où $|0\rangle$ est l'état du vide de particules. On suppose de plus que H_0 est invariant par renversement du sens du temps, ce qui entraîne que les états $|k\rangle$ et $|\tilde{k}\rangle$ ont même énergie, soit :

$$\varepsilon_{\tilde{k}} = \varepsilon_k \quad (1.4)$$

Le terme V quant à lui représente une interaction résiduelle qu'on ajoute comme correction au champ moyen. Dans cette étude, on ne considère que la correction d'appariement, et dans le cas où l'on ne tient compte que de l'appariement entre particules identiques, l'étude se fait pour un système de particules pouvant être ou bien des protons ou bien des neutrons. Il suffit à la fin, d'effectuer le pro-

duit tensoriel des fonctions d'ondes calculées. L'interaction d'appariement étant une force à deux corps (car s'exerçant entre des particules formant des paires), sa forme la plus générale est donnée par l'expression :

$$V = \frac{1}{4} \sum_{klmn} \langle kl | V | mn \rangle a_k^+ a_l^+ a_n a_m \quad (1.5)$$

où les $\langle kl | V | mn \rangle$ sont ses éléments de matrices antisymétrisés. On suppose qu'ils sont invariants par renversement du sens du temps, de plus, l'interaction d'appariement étant supposée indépendante des niveaux occupés par les nucléons, ces éléments de matrices sont alors donnés par :

$$\langle kl | V | mn \rangle = -4G \delta_{k\bar{l}} \delta_{m\bar{n}} \quad (1.6)$$

où G est une constante positive appelée constante d'appariement, et ayant la dimension d'une énergie, le signe moins étant alors rajouté car la force d'appariement est attractive. L'interaction résiduelle d'appariement s'exprime alors par :

$$V = -G \sum_{k,l>0} a_k^+ a_k^+ a_{\bar{l}} a_l \quad (1.7)$$

On en tire l'expression finale de l'opérateur hamiltonien :

$$H = H_0 + V$$

$$H = \sum_{k>0} \varepsilon_k (a_k^+ a_k + a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}}) - G \sum_{k,l>} a_k^+ a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{l}} a_l \quad (1.8)$$

Cet hamiltonien n'est pas diagonal, d'où le besoin d'utiliser des méthodes d'approximation pour sa diagonalisation. On utilisera dans ce travail, la méthode de linéarisation.

1.2 Linéarisation de l'hamiltonien

Dans cette partie, on se propose de diagonaliser approximativement l'hamiltonien (1.8), en le linéarisant par l'utilisation du théorème de Wick. Après la linéarisation, l'hamiltonien obtenu ne commute plus avec l'opérateur nombre de particules donné par :

$$\mathbf{N} = \sum_{j>0} (a_j^+ a_j + a_{\bar{j}}^+ a_{\bar{j}}) \quad (1.9)$$

Le nombre de particules devant être conservé en moyenne, on l'introduit sous forme de contrainte dans l'hamiltonien (1.1). Le théorème de Wick est alors appliqué à l'hamiltonien auxiliaire \acute{H} qui est donné par :

$$\acute{H} = H - \lambda N \quad (1.10)$$

où λ est un paramètre de Lagrange et qui est en fait le potentiel chimique relatif au type de particules considérées[50]. On obtient :

$$\begin{aligned} \acute{H} = & \sum_{k>0} (\varepsilon_k - \lambda) (a_k^+ a_k + a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}}) + \sum_{k>0} (\varepsilon_k - \lambda) (: a_k^+ a_k : + : a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}} :) \\ & - G \sum_{k,l>0} \left\{ \begin{array}{l} a_k^+ a_{\bar{k}}^+ a_l^+ a_l - a_k^+ a_l^+ a_{\bar{k}}^+ a_l + a_k^+ a_l^+ a_{\bar{k}}^+ a_l \\ + a_k^+ a_{\bar{k}}^+ : a_l^+ a_l : - a_k^+ a_l^+ : a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}} : + a_k^+ a_l^+ : a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}} : \\ + : a_k^+ a_{\bar{k}}^+ : a_l^+ a_l - : a_k^+ a_l^+ : a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}} + : a_k^+ a_l^+ : a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}} \\ + : a_k^+ a_{\bar{k}}^+ a_l^+ a_l : \end{array} \right. \quad (1.11) \end{aligned}$$

La linéarisation de l'hamiltonien auxiliaire consiste à négliger le terme contenant le produit normal $-G \sum_{kl>0} : a_k^+ a_{\bar{k}}^+ a_l^+ a_l :$. En notant par :

$$\Delta = \sum_{k>0} G a_{\bar{k}}^+ a_k = \sum_{k>0} G a_k^+ a_{\bar{k}} \quad (1.12)$$

\acute{H} s'écrit :

$$\acute{H} = E_0 + \left\{ \left(\varepsilon_k - \lambda - G a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}} \right) : a_k^+ a_k : + \left(\varepsilon_k - \lambda - G a_k^+ a_k \right) : a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}} : \right\} - \sum_{k>0} \Delta \left(: a_{\bar{k}}^+ a_k : + : a_k^+ a_{\bar{k}} : \right) \quad (1.13)$$

où l'on a posé :

$$E_0 = \sum_{k>0} (\varepsilon_k - \lambda) \left(a_k^+ a_k + a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}} \right) - G \sum_{k,l>0} \left(a_k^+ a_{\bar{k}}^+ a_l^+ a_l + a_k^+ a_l^+ a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}} \right) \quad (1.14)$$

Ecrivons \acute{H} sous la forme matricielle suivante :

$$\acute{H} = E_0 + \sum_{k>0} \left\{ \left(a_k^+ \quad a_{\bar{k}} \right) \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ a_{\bar{k}}^+ \end{pmatrix} + c_k \right\} \quad (1.15)$$

Après développement, on obtient :

$$H' = E_0 + \sum_{k>0} \left\{ x a_k^+ a_k + y a_k^+ a_{\bar{k}}^+ + z a_{\bar{k}} a_k - t a_k^+ a_{\bar{k}} + t + c_k \right\} \quad (1.16)$$

L'identification avec l'expression (1.13) conduit à :

$$x = \xi_k, \quad y = -\Delta, \quad z = -\Delta, \quad t_k = -\xi_k, \quad \text{et } c_k = \xi_k$$

où l'on a noté $:\xi_k = \tilde{\varepsilon}_k - G a_k^+ a_k$, avec $:\tilde{\varepsilon}_k = \varepsilon_k - \lambda$, sachant que l'on suppose que $a_k^+ a_k = a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}}$, c'est-à-dire que le vide de particules $|0\rangle$ est invariant par renversement du sens du temps. La nouvelle expression de H' est :

$$H' = (E_0 + \sum_{k>0} \xi_k) + \sum_{k>0} \left\{ \begin{pmatrix} a_k^+ & a_{\bar{k}} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} a_k \\ a_{\bar{k}}^+ \end{pmatrix} \right\} \quad (1.17)$$

où A est la matrice carrée d'ordre 2 donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} \xi_k & -\Delta \\ -\Delta & -\xi_k \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

On remarque que A n'est finalement rien d'autre que la matrice d'excitation utilisée dans la méthode de linéarisation habituelle, c'est-à-dire la méthode utilisant les commutateurs de H avec les opérateurs a^+ et a [51]. Grâce au théorème de Wick, la matrice d'excitation A a toutefois été obtenue de manière plus rapide et plus simple.

1.3 Diagonalisation et transformation de Bogoliubov-Valatin

La forme (1.17) de H' se prête plus facilement à la diagonalisation. En effet, on calcule aisément les valeurs propres de la matrice A , qui sont données par :

$$\beta_{1,2} = \pm E_k = \pm \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2} \quad (1.19)$$

E_k représente l'énergie d'excitation de la quasi-particule qui sera définie ultérieurement. Le problème aux valeurs propres de A conduit à la factorisation suivante :

$$A = TDT^{-1}$$

où D est la matrice diagonale des valeurs propres semblable à A : $D = \text{diag}(E_k, -E_k)$, et T est la transformation de la similitude constituée des vecteurs propres de A . Il est utile de remarquer que si on note (u_k, v_k) le vecteur propre associé à la valeur propre $+E_k$, alors $(-v_k, u_k)$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre $-E_k$. Il suffit donc de déterminer l'un des vecteurs propres pour en déduire l'autre. De plus, ces vecteurs propres seront supposés orthonormés, ils satisfont donc la relation d'orthonormalisation suivante :

$$u_k^2 + v_k^2 = 1 \quad (1.20)$$

Les vecteurs propres étant réels, la transformation définie par T est orthogonale, on a alors :

$$T^{-1} = {}^t T \quad (1.21)$$

Ce qui donne pour A :

$$A = TD^t T \quad (1.22)$$

L'hamiltonien H' prend la forme :

$$H' = \left(E_0 + \sum_{k>0} \xi_k \right) + \sum_{k>0} \left\{ \begin{pmatrix} a_k^+ & a_{\bar{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k & v_k \\ -v_k & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k & -v_k \\ v_k & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ a_{\bar{k}}^+ \end{pmatrix} \right\}$$

ou encore :

$$H' = \left(E_0 + \sum_{k>0} \xi_k \right) + \sum_{k>0} \left\{ \begin{pmatrix} u_k a_k^+ - v_k a_{\bar{k}}, u_k a_{\bar{k}} + v_k a_k^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k a_k - v_k a_{\bar{k}}^+ \\ u_k a_{\bar{k}}^+ + v_k a_k \end{pmatrix} \right\}$$

et en posant

$$\begin{aligned} \alpha_k &= u_k a_k - v_k a_{\bar{k}}^+ \\ \alpha_k^+ &= u_k a_k^+ - v_k a_{\bar{k}} \end{aligned} \quad (1.23)$$

on trouve la nouvelle expression approximativement diagonale de H' , donnée par :

$$H' = E_0 + \sum_{k>0} (\xi_k - E_k) + \sum_{k>0} E_k \left(\alpha_k^+ \alpha_k + \alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_{\bar{k}} \right) \quad (1.24)$$

Les expressions (1.23) définissent une transformation qui n'est autre que celle de Bogoliubov-Valatin[44]-[45], et qui permet de passer à une nouvelle représentation, qui est la représentation quasi-particules, où les opérateurs α_k^+ (α_k) sont des opérateurs de création (d'annihilation) de quasi-particules. La quasi-particule k créé par α_k^+ se trouve être une combinaison d'une vraie particule avec une amplitude de probabilité u_k , et d'un vrai trou de particules avec une amplitude de probabilité v_k . L'intérêt d'avoir défini une nouvelle représentation est d'avoir obtenu une forme diagonale pour l'hamiltonien, ce qui facilite grandement le calcul des valeurs moyennes d'observables physiques. Cette linéarisation de l'hamiltonien n'a toutefois été possible que parce qu'on a négligé le produit normal : $a_k^+ a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{l}} a_l$;, on a donc fait une approximation appelée couramment approximation des quasi-particules indépendantes. De plus, le fait d'avoir abouti à la forme diagonale (1.24), montre que la méthode de linéarisation, rejoint finalement la méthode variationnelle de BCS habituelle.

L'étape suivante consiste en principe à tenir compte du produit normal qui a été négligé jusqu'ici pour permettre une diagonalisation simple de l'hamiltonien. Ce terme est petit, car issu lui-même d'une partie (celle due aux effets d'appariement) de l'interaction résiduelle V . Une suite possible du formalisme, consiste à considérer ce terme d'interaction comme une petite perturbation, lorsqu'il est additionné à l'hamiltonien de quasi-particules indépendantes (1.24). On n'effectuera pas ce traitement perturbatif, qui ne fera que compliquer davantage les calculs, et ce sans changer de manière significative les prévisions numériques.

Il reste maintenant à définir les états sur lesquels vont agir les nouveaux opérateurs et donc le nouvel hamiltonien. On commence par déterminer le vide de cette nouvelle représentation. Il est donné par :

$$|BCS\rangle = \prod_{j>0} \alpha_j \alpha_{\bar{j}} |0\rangle \quad (1.25)$$

c'est-à-dire qu'il est obtenu à partir du vide de vraies particules en y détruisant toutes les quasi-particules. Si on revient à la représentation particule, celui-ci s'écrit :

$$|BCS\rangle = \prod_{j>0} \left(u_j a_j - v_j a_{\bar{j}}^+ \right) \left(u_j a_{\bar{j}} + v_j a_j^+ \right) |0\rangle$$

ou encore :

$$|BCS\rangle = \prod_{j>0} v_j \left(u_j + v_j a_j^+ a_j^+ \right) |0\rangle$$

En normalisant cet état, et sachant que la transformation de Bogoliubov-Valatin est unitaire, on obtient :

$$|BCS\rangle = \prod_{j>0} \left(u_j + v_j a_j^+ a_j^+ \right) |0\rangle \quad (1.26)$$

On retrouve finalement l'expression bien connue de l'état de Bardeen, Cooper et Schrieffer[2], qui représente approximativement l'état fondamental du système étudié; en effet, pour un tel état, les particules sont rangées sur les niveaux d'énergies les plus bas du modèle à particules indépendantes. On y voit aussi clairement que les particules sont regroupées par paires. En effet, chaque niveau d'énergie peut être soit inoccupé avec une amplitude de probabilité u_ν , soit occupé par une paire de particules appariées avec une amplitude de probabilité v_ν . Les états excités, se déduisent simplement de l'état fondamental en y créant le nombre de quasi-particules voulu. L'état à une quasi-particule par exemple est donné par :

$$|\nu\rangle = \alpha_\nu^+ |BCS\rangle = a_\nu^+ \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} \left(u_j + v_j a_j^+ a_j^+ \right) |0\rangle \quad (1.27)$$

On remarque qu'il décrit l'état d'un système à un nombre impair de particules, dans lequel une particule célibataire (inappariée) occupe l'état $|\nu\rangle$ du modèle à particules indépendantes. Le reste des particules constitue un cœur à un nombre pair de particules, ces dernières étant rangées sous formes de paires sur les états du modèle à particules indépendantes. L'état excité à deux quasi-particules appariées est donné par :

$$|\nu\tilde{\nu}\rangle = \alpha_\nu^+ \alpha_{\tilde{\nu}}^+ |BCS\rangle = u_\nu \left(-v_\nu + u_\nu a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ \right) \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} \left(u_j + v_j a_j^+ a_j^+ \right) |0\rangle$$

dont la forme normée est :

$$|\nu\tilde{\nu}\rangle = \left(-v_\nu + u_\nu a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ \right) \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} \left(u_j + v_j a_j^+ a_j^+ \right) |0\rangle \quad (1.28)$$

Cet état décrit un système avec deux particules appariées sur le niveau $|\nu\rangle$, le reste des particules formant toujours un cœur à un nombre pair de particules.

D'une manière générale, l'état excité ayant $2l$ quasi-particules appariées et h quasi-particules inappariées est donné par :

$$|\nu_1 \tilde{\nu}_1 \dots \tilde{\nu}_l \nu_l, \nu_{l+1} \nu_{l+2} \dots \nu_{l+h}\rangle = \left(\prod_{i=1}^l \alpha_{\nu_i}^+ \alpha_{\tilde{\nu}_i}^+ \right) \left(\prod_{j=1}^h \alpha_{\nu_{l+j}}^+ \right) |BCS\rangle$$

$$|\nu_1 \tilde{\nu}_1 \dots \tilde{\nu}_l \nu_l, \nu_{l+1} \nu_{l+2} \dots \nu_{l+h}\rangle = \prod_{i=1}^l (-v_{\nu_i} + u_{\nu_i} a_{\nu_i}^+ a_{\tilde{\nu}_i}^+) \prod_{j=1}^h a_{\nu_{l+j}}^+ \prod_{\substack{k>0 \\ k \neq \nu_1 \dots \nu_l, \nu_{l+1} \dots \nu_{l+h}}} (u_k + v_k a_k^+ a_{\bar{k}}^+) |0\rangle \quad (1.29)$$

1.4 Energies des états BCS

Le calcul de l'énergie de l'état fondamental du système ayant un nombre pair de particules est obtenu habituellement par un calcul variationnel consistant à minimiser la valeur moyenne de l'hamiltonien H' calculée à l'aide du vide BCS (1.26) pris comme fonction d'onde d'essai. L'énergie et le nombre de particules seront calculés dans la représentation particules, en prenant comme hamiltonien et opérateur nombre de particules les expressions (1.10) et (1.9) respectivement. Une fois ce calcul effectué, on minimisera la valeur moyenne de H' par rapport aux probabilités u_ν et v_ν , ce qui nous détermine leurs expressions, c'est-à-dire celles dont on tient compte pour calculer l'énergie de l'état fondamental du système de nucléons considérés.

1.4.1 Systèmes ayant un nombre pair de particules

Valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules

Il s'agit de calculer la valeur moyenne $\langle \Psi | \mathbf{N} | \Psi \rangle$. Pour simplifier les calculs, on adopte le procédé suivant : au lieu d'appliquer le terme $a_k^+ a_k$ (respectivement $a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}}$) à l'état $|BCS\rangle$, et de multiplier à gauche par son conjugué hermitique, on applique uniquement a_k (et $a_{\bar{k}}$), et on en déduit le conjugué hermitique $\langle BCS | a_k^+$ (respectivement $\langle BCS | a_{\bar{k}}^+$), la valeur moyenne recherchée est finalement obtenue en effectuant le produit scalaire des termes précédents. Un procédé similaire sera suivi pour tous les calculs suivants, pour les systèmes pair-pairs et impairs.

L'application de a_k et $a_{\bar{k}}$ à l'état $|BCS\rangle$, et l'expression de leurs conjugués

hermitiques sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k |BCS\rangle = v_k a_{\bar{k}}^+ \prod_{\substack{j>0 \\ \neq k}} (u_j + v_j a_j^+ a_{\bar{j}}^+) |0\rangle \\ a_{\bar{k}} |BCS\rangle = -v_k a_k^+ \prod_{\substack{j>0 \\ \neq k}} (u_j + v_j a_j^+ a_{\bar{j}}^+) |0\rangle \\ \langle BCS| a_k^+ = \prod_{\substack{j>0 \\ \neq k}} \{ \langle 0| (u_j + v_j a_{\bar{j}} a_j) \} v_k a_{\bar{k}} \\ \langle BCS| a_{\bar{k}}^+ = -\prod_{\substack{j>0 \\ \neq k}} \{ \langle 0| (u_j + v_j a_{\bar{j}} a_j) \} v_k a_k \end{array} \right. \quad (1.30)$$

Pour la valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules, on trouve immédiatement :

$$\begin{aligned} \langle BCS| \mathbf{N} |BCS\rangle &= \sum_{k>0} \left\{ (\langle BCS| a_k^+) (a_k |BCS\rangle) (\langle BCS| a_{\bar{k}}^+) (a_{\bar{k}} |BCS\rangle) \right\} \\ \langle BCS| \mathbf{N} |BCS\rangle &= 2 \sum_{k>0} v_k^2 \end{aligned} \quad (1.31)$$

Valeur moyenne de l'opérateur hamiltonien

Réécrivons, pour simplifier, l'hamiltonien sous la forme suivante :

$$H' = H'_0 + H'_{app} \quad (1.32)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} H'_0 = \sum_{k>0} \xi_k (a_k^+ a_k + a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}}) \\ H'_{app} = -G \sum_{k>0} a_k^+ a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}} a_k - G \sum_{\substack{k,l>0 \\ k \neq l}} a_k^+ a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{l}} a_l \end{array} \right. \quad (1.33)$$

A partir des calculs précédents, on obtient directement :

$$\langle BCS| H'_0 |BCS\rangle = 2 \sum_{k>0} \xi_k v_k^2 \quad (1.34)$$

Quant au terme H'_{app} , en appliquant $a_{\bar{l}}a_l$ à l'état $|BCS\rangle$, en permutant l et k et en calculant leurs conjugués hermitiques, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{\bar{k}}a_k |BCS\rangle = v_k \prod_{\substack{j>0 \\ \neq k}} (u_j + v_j a_j^+ a_{\bar{j}}^+) |0\rangle \\ a_{\bar{l}}a_l |BCS\rangle = v_l \prod_{\substack{j>0 \\ \neq l}} (u_j + v_j a_j^+ a_{\bar{j}}^+) |0\rangle \\ \langle BCS | a_k^+ a_{\bar{k}}^+ = \prod_{\substack{j>0 \\ \neq k}} \{ \langle 0 | (u_j + v_j a_{\bar{j}} a_j) \} v_k \\ \langle BCS | a_l^+ a_{\bar{l}}^+ = \prod_{\substack{j>0 \\ \neq l}} \{ \langle 0 | (u_j + v_j a_{\bar{j}} a_j) \} v_l \end{array} \right. \quad (1.35)$$

ce qui conduit à :

$$\langle BCS | H'_{app} | BCS \rangle = -G \sum_{k>0} v_k^2 - G \sum_{\substack{k,l>0 \\ k \neq l}} u_k u_l v_k v_l \quad (1.36)$$

La valeur moyenne de l'hamiltonien H' s'exprime finalement par :

$$E_0 = \langle BCS | H' | BCS \rangle = 2 \sum_{k>0} (\xi_k - \frac{G}{2} v_k^2) v_k^2 - \frac{\Delta^2}{G} \quad (1.37)$$

Equations du gap

Les coefficients u_k et v_k doivent être choisis de manière à minimiser l'énergie E_0 . On doit alors avoir :

$$\frac{\partial E_0}{\partial u_k} = \frac{\partial E_0}{\partial v_k} = 0 \quad , \quad \forall k \quad (1.38)$$

En posant :

$$\Delta = G \sum_{k>0} u_k v_k \quad (1.39)$$

où Δ désigne la demi largeur du gap, on aboutit à l'expression finale des probabilités d'inoccupation et d'occupation qui sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k^2 \\ v_k^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{\xi_k - G v_k^2}{\sqrt{(\xi_k - G v_k^2)^2 + \Delta^2}} \right] \quad (1.40)$$

L'énergie de l'état fondamental est finalement donnée par l'expression :

$$E_0 = 2 \sum_{k>0} \left(\varepsilon_k - \frac{G}{2} v_k^2 \right) v_k^2 - \frac{\Delta^2}{G} \quad (1.41)$$

1.4.2 Systèmes ayant un nombre impair de particules

La description de ces systèmes se fait dans le cadre de la méthode variationnelle du blocage de Wahlborn[46]. Dans cette dernière, on utilise comme fonction d'onde d'essai, approximant l'état fondamental, l'état à une quasi-particule (1.27), où l'on bloque un nucléon du système sur un niveau $|\nu\rangle$, choisi généralement comme étant le niveau le plus élevé de la mer de Fermi des niveaux d'énergie du modèle à particules indépendantes. Dans ce cas, l'amplitude de probabilité d'occupation de cet état est $v_\nu = 1$, et les nucléons restants constituent un coeur pair, pour lequel les calculs sont tout à fait analogues à ceux déjà effectués dans le paragraphe précédent, ce qui fait de la méthode de Wahlborn une méthode très maniable pour le traitement des systèmes impairs. On calcule donc la valeur moyenne :

$$\begin{aligned} F_\nu &= \langle \nu | H' | \nu \rangle = \langle BCS |_\nu (a_\nu H' a_\nu^\dagger) | BCS \rangle_\nu \\ |BCS \rangle_\nu &= \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} \left(u_j + v_j a_j^\dagger a_j \right) |0\rangle \quad , \quad \nu \text{ fixé} \end{aligned}$$

où H' est l'hamiltonien auxiliaire donné par (1.10) en fonction des paramètres u_k et v_k provenant de l'expression de l'état à une quasi-particule (1.27), puis on minimise F_ν par rapport à ces paramètres, soit :

$$\frac{\partial F_\nu}{\partial u_k} = \frac{\partial F_\nu}{\partial v_k} = 0 \quad , \quad \forall k \quad (1.42)$$

La combinaison avec la relation d'orthonormalisation (1.20), conduit aux équations du gap :

$$\begin{Bmatrix} u_k^2 \\ v_k^2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{\xi_k - Gv_k^2}{\sqrt{(\xi_k - Gv_k^2)^2 + \Delta^2}} \right] \quad , \quad k \neq \nu \quad (1.43)$$

Après la minimisation, on calcule finalement l'expression de l'énergie du fon-

damental qui est donnée par :

$$E_0 = \langle \nu | H | \nu \rangle = \varepsilon_\nu + 2 \sum_{\substack{k>0 \\ k \neq \nu}} (\varepsilon_k - \frac{G}{2} v_k^2) v_k^2 - \frac{(\Delta_\nu)^2}{G} \quad (1.44)$$

Où la demi largeur du gap s'exprime par :

$$\Delta_\nu = G \sum_{\substack{k>0 \\ k \neq \nu}} u_k v_k \quad (1.45)$$

La valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules est donnée par :

$$\langle \nu | \mathbf{N} | \nu \rangle = 1 + 2 \sum_{\substack{k>0 \\ k \neq \nu}} v_k^2$$

Avant de passer au traitement de l'appariement neutron-proton, il est utile de remarquer que le niveau bloqué ne figure pas dans la somme de la demi largeur du gap (expression (1.45)) pour les systèmes impairs. Ceci concorde tout à fait avec les hypothèses de travail, puisque la particule bloquée ne participe pas dans l'énergie d'appariement, qui est responsable du gap en énergie.

Chapitre 2

Appariement neutron-proton

Au chapitre précédent, il n'a été question d'interaction d'appariement qu'entre nucléons de même nature, c'est-à-dire que l'on n'a considéré que des paires de neutrons appariés ou de protons appariés. Or, pour des noyaux dont le nombre de neutrons avoisine celui des protons, les niveaux d'énergie des modèles à particules indépendantes pour chaque espèce de nucléons sont voisins. La prise en compte des interactions d'appariement entre nucléons de natures différentes peut alors améliorer grandement la compatibilité des résultats théoriques et expérimentaux[31],[40],[52]. Pour tenir compte de cette interaction supplémentaire, on fait appel (en plus du formalisme de la seconde quantification) au formalisme du spin isotopique, dans lequel le proton et le neutron ne sont plus considérés comme des particules distinctes, mais comme deux états distincts (la charge électrique ne jouant plus que le rôle de paramètre) d'une même particule : le nucléon[54].

On commencera dans ce chapitre par la définition du nouvel hamiltonien, c'est-à-dire celui tenant compte de l'appariement neutron-proton, sachant que seul sera considéré celui correspondant au terme triplet de la somme des isospins des nucléons des paires, c'est-à-dire l'appariement de type isovectoriel. Cet appariement contient en effet trois composantes : proton-proton, neutron-neutron et neutron-proton, quant à la prise en compte du terme isoscalaire, elle présente de grandes difficultés au niveau du formalisme mathématique, elle sera donc négligée au cours de cette étude. On linéarise cet hamiltonien à l'aide du théorème de Wick, ce qui déterminera la nouvelle transformation de Bogoliubov-Valatin qu'on appelle la transformation de Bogoliubov-Valatin généralisée. On déterminera le nouvel état fondamental, pour les systèmes pair-pairs et les systèmes pair-impairs. On calculera immédiatement après les valeurs moyennes de l'opérateur nombre de particules, ainsi que celles de l'opérateur hamiltonien. On conclura finalement ce chapitre par la détermination des nouvelles équations du gap.

2.1 Hamiltonien du système

Considérons un noyau de nombre de masse A et de numéro atomique Z . Contrairement au chapitre précédant, les neutrons et les protons interagissant entre eux, les deux systèmes de nucléons ne seront plus étudiés indépendamment¹. Les différents nucléons seront considérés comme étant identiques et faisant partie du même système physique : le noyau atomique. L'hamiltonien d'un tel système[52],[53] est donné par :

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{\nu>0,t} \varepsilon_{\nu t} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t}) \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'}^{T=1} \sum_{\nu,\mu>0} (a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} + a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'}) \quad t = n, p \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'}^{T=0} \sum_{\nu,\mu>0} (a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} - a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'}) \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Il est utile de noter que tout au long de ce travail, l'interaction d'appariement sera supposée indépendante des états occupés par les nucléons, ce qui apparaît sur l'hamiltonien précédant par le fait que les constantes d'appariement ($G_{tt'}^{T=0}$ et $G_{tt'}^{T=1}$) soient indépendantes des indices ν et μ des états du modèle à particules indépendantes ; de plus, cette interaction ne s'exerce qu'entre des nucléons occupant des états ($|\nu t\rangle$ et $|\tilde{\nu} t'\rangle$) renversés l'un de l'autre par rapport au sens du temps. Les opérateurs $a_{\nu t}^+$ ($a_{\nu t}$) sont des opérateurs de création (d'annihilation) de nucléons se trouvant dans l'état $|\nu t\rangle = |\nu\rangle \otimes |t\rangle$ où $|\nu\rangle$ caractérise le niveau du modèle à particules indépendantes et $|t\rangle$ l'état neutron ou proton ($t = n, p$) occupés par le nucléon considéré. Les $\varepsilon_{\nu t}$ sont les énergies correspondantes. On suppose aussi que les constantes d'appariement sont positives, ce qui signifie que les signes (-) présents devant les sommes caractérisent l'attractivité de l'interaction d'appariement.

L'indice T présent sur la constante d'appariement renseigne sur l'état (qu'on appelle aussi canal) d'isospin dans lequel se trouve la paire de nucléons appariés. En effet, l'isospin du système formé par la paire de nucléons est la somme (analogue à une somme de spins habituels) des isospins de chaque nucléon pris séparément. Le résultat est donc formé par quatre vecteurs d'isospin total, dont l'un forme l'état singulet d'isospin (cas isoscalaire), et les trois autres l'état tri-

¹Lorsqu'on étudie les deux systèmes de particules indépendamment, l'espace de Hilbert du système total qu'est le noyau est le produit tensoriel des espaces de Hilbert de chaque système pris séparément de l'autre.

plet d'isospin (cas isovectoriel). Dans ce travail, on ne s'intéresse qu'au cas de l'appariement isovectoriel, l'hamiltonien du noyau se réécrit donc sous la forme :

$$H = \sum_{\nu>0,t} \varepsilon_{\nu t} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\bar{\nu} t}^+ a_{\bar{\nu} t}) - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu,\mu>0} (a_{\nu t}^+ a_{\bar{\nu} t'}^+ a_{\bar{\mu} t'} a_{\mu t} + a_{\nu t}^+ a_{\bar{\nu} t'}^+ a_{\bar{\mu} t} a_{\mu t'}) \quad (2.2)$$

L'hamiltonien étant établi, on a à présent à déterminer ses fonctions propres qui soient en même temps fonctions propres de l'opérateur nombre de particules :

$$\mathbf{N} = \sum_t \mathbf{N}_t, \quad t = n, p \quad (2.3)$$

où

$$\mathbf{N}_t = \sum_{\nu>0} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\bar{\nu} t}^+ a_{\bar{\nu} t}) \quad (2.4)$$

et qui s'écrit alors :

$$\mathbf{N} = \sum_{\nu>0,t} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\bar{\nu} t}^+ a_{\bar{\nu} t}) \quad (2.5)$$

Ce problème n'admettant évidemment pas de solution exacte (sauf dans des cas particuliers), on a recours à des méthodes d'approximation, où l'on conserve en moyenne le nombre de neutrons ainsi que le nombre de protons[54]. Au lieu de diagonaliser l'hamiltonien (2.2), on diagonalise l'hamiltonien auxiliaire formé par l'introduction des multiplicateurs de Lagrange λ_n et λ_p qui représentent les potentiels chimiques ou les énergies des niveaux de Fermi des systèmes de neutrons et de protons du noyau considéré[50]. L'hamiltonien auxiliaire à diagonaliser est donné par l'expression :

$$H' = H - \sum_t \lambda_t \mathbf{N}_t \quad (2.6)$$

On réécrit finalement cet hamiltonien sous la forme :

$$H' = \sum_{\nu>0,t} (\varepsilon_{\nu t} - \lambda_t) (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\bar{\nu} t}^+ a_{\bar{\nu} t}) - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu,\mu>0} (a_{\nu t}^+ a_{\bar{\nu} t'}^+ a_{\bar{\mu} t'} a_{\mu t} + a_{\nu t}^+ a_{\bar{\nu} t'}^+ a_{\bar{\mu} t} a_{\mu t'}) \quad (2.7)$$

La méthode approximative qui sera utilisée pour la diagonalisation de cet hamiltonien auxiliaire est celle de la linéarisation, basée sur l'utilisation du théorème de Wick.

2.2 Linéarisation de l'hamiltonien auxiliaire

Pour diagonaliser l'hamiltonien (2.7), c'est-à-dire trouver sa matrice d'excitation après linéarisation puis la diagonaliser, on lui applique le théorème de Wick. On obtient :

$$\begin{aligned}
H' = & \sum_{\nu>0,t} (\varepsilon_{\nu t} - \lambda_t) (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t}) - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu,\mu>0} (a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} + a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'}) \\
& - a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} - a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} + a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} + a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'}) \\
& + \sum_{\nu>0,t} (\varepsilon_{\nu t} - \lambda_t) (: a_{\nu t}^+ a_{\nu t} : + : a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t} :) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu,\mu>0} (a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ : a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} : + a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ : a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} : \\
& + : a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ : a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} : + : a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ : a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} : - a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ : a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} : - a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ : a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} : \\
& - : a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ : a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} : - : a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ : a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} : + a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ : a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} : + a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ : a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} : \\
& + : a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ : a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} : + : a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ : a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} : + : a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} : + : a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} :)
\end{aligned}$$

avec les notations habituelles.

La linéarisation consiste à négliger les deux derniers produits normaux. Les produits contractés sont donnés par :[55]

$$\begin{cases} a_{\nu t}^+ a_{\mu t'}^+ = \delta_{\nu\tilde{\mu}} a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ \\ a_{\nu t}^+ a_{\mu t'}^+ = \delta_{\nu\mu} a_{\nu t}^+ a_{\nu t'}^+ \\ a_{\nu t}^+ a_{\mu t'}^+ = \delta_{\nu\tilde{\mu}} a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ \end{cases} \quad (2.8)$$

on trouve :

$$\begin{aligned}
H' = & \sum_{\nu>0,t} (\varepsilon_{\nu t} - \lambda_t) (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} + a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t}) - \frac{1}{2} \sum_{\nu>0,tt'} G_{tt'} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\nu} t'} + a_{\nu t}^+ a_{\nu t} a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\nu} t}) \quad (2.9) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu,\mu>0} (a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} + a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'}) + \sum_{\nu>0,t} (\varepsilon_{\nu t} - \lambda_t) (: a_{\nu t}^+ a_{\nu t} : + : a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t} :) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{\nu>0,tt'} G_{tt'} (a_{\nu t}^+ a_{\nu t} : a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\nu} t'} : + a_{\nu t}^+ a_{\nu t} : a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\nu} t} : + : a_{\nu t}^+ a_{\nu t} : a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\nu} t'} : + : a_{\nu t}^+ a_{\nu t} : a_{\tilde{\nu} t'}^+ a_{\tilde{\nu} t} : \\
& - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\nu,\mu>0} (a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ : a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} : + a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ : a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} : + : a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ : a_{\tilde{\mu} t'} a_{\mu t} : + : a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} t'}^+ : a_{\tilde{\mu} t} a_{\mu t'} :)
\end{aligned}$$

Cette nouvelle forme approximative de H' , se prête facilement à la diagonalisation. En effet, il est facile de noter que H' s'écrit aussi sous la forme :

$$H' = E_0 + \sum_{\nu>0} \left\{ \begin{pmatrix} a_{\nu p}^+ & a_{\nu n}^+ & a_{\tilde{\nu} p} & a_{\tilde{\nu} n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & l_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & l_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & l_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & l_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\nu p} \\ a_{\nu n} \\ a_{\tilde{\nu} p}^+ \\ a_{\tilde{\nu} n}^+ \end{pmatrix} + c \right\} \quad (2.10)$$

où E_0 contient les termes complètement contractés de l'expression (2.9) et c une constante qui sera déterminée par la suite. Après développement et identification avec cette dernière, on obtient :

$$H' = E_0 + \sum_{\nu>0, t} \xi_{\nu t} + \sum_{\nu>0} \begin{pmatrix} a_{\nu p}^+ & a_{\nu n}^+ & a_{\tilde{\nu} p} & a_{\tilde{\nu} n} \end{pmatrix} A_{\nu} \begin{pmatrix} a_{\nu p} \\ a_{\nu n} \\ a_{\tilde{\nu} p}^+ \\ a_{\tilde{\nu} n}^+ \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

où A_{ν} représente la matrice d'excitation recherchée, elle est donnée par :

$$A_{\nu} = \begin{pmatrix} \xi_{\nu p} & 0 & -\Delta_{pp} & -\Delta_{np} \\ 0 & \xi_{\nu n} & -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} \\ -\Delta_{pp} & -\Delta_{np} & -\xi_{\nu p} & 0 \\ -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} & 0 & -\xi_{\nu n} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

dans laquelle on a noté par :

$$\xi_{\nu t} = \tilde{\xi}_{\nu t} - \frac{1}{2} \sum_r G_{rt} (1 + \delta_{rt}) a_{\tilde{\nu} t}^+ a_{\tilde{\nu} t} \quad (2.13.a)$$

$$\tilde{\xi}_{\nu t} = (\varepsilon_{\nu t} - \lambda_t)$$

$$\Delta_{tr} = G_{tr} \sum_{\nu>0} a_{\nu t}^+ a_{\tilde{\nu} r}^+ = G_{tr} \sum_{\nu>0} a_{\tilde{\nu} r}^{\square} a_{\nu t} \quad (2.13.b)$$

Avant d'entamer la diagonalisation de la matrice d'excitation, signalons, comme au premier chapitre la facilité avec laquelle elle a été déterminée grâce au théorème de Wick. En effet, dans la méthode de linéarisation habituelle, la détermination de la matrice d'excitation nécessite un calcul de commutateurs[55]. La présente méthode, basée sur la seule utilisation du théorème de Wick, permet d'accéder d'une manière directe et simple à l'expression de la matrice d'excitation de l'opérateur H' .

2.3 Energies des quasi-particules

Pour la diagonalisation de la matrice A_ν , il faut d'abord déterminer les racines de l'équation caractéristique :

$$P_4(\lambda) = \det(A_\nu - \lambda I) = 0 \quad (2.13)$$

Les valeurs propres de A_ν sont donc les racines de l'équation :

$$\lambda^4 - \lambda^2(E_{\nu p}^2 + E_{\nu n}^2 + 2\Delta_{np}^2) + E_{\nu p}^2 E_{\nu n}^2 + \Delta_{np}^4 + 2\Delta_{np}^2(\xi_{\nu n}\xi_{\nu p} - \Delta_{nn}\Delta_{pp}) = 0 \quad (2.14)$$

dans laquelle on a noté par :

$$E_{\nu t}^2 = \xi_{\nu t}^2 + \Delta_{tt}^2, \quad t = n, p \quad (2.15)$$

Les énergies $E_{\nu t}$, $t = n, p$, représentent les énergies des quasi-particules du type neutron et proton respectivement déterminées dans le chapitre précédent. La résolution de l'équation (2.14) qui est une équation bicarrée donne finalement quatre valeurs propres distinctes :

$$\pm E_\nu^\pm = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \left\{ (E_{\nu p}^2 + E_{\nu n}^2 + 2\Delta_{np}^2) \pm \sqrt{(E_{\nu p}^2 - E_{\nu n}^2)^2 + 4\Delta_{np}^2 (E_{\nu p}^2 + E_{\nu n}^2 - 2[\xi_{\nu n}\xi_{\nu p} - \Delta_{nn}\Delta_{pp}])} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

2.4 Détermination des vecteurs propres

On détermine d'abord les deux vecteurs propres associés aux valeurs propres positives (2.16), on en déduit immédiatement les deux vecteurs propres restants. En effet, il est facile de remarquer que si un vecteur ${}^tX = (x, y, z, l)$ est vecteur propre de A_ν associé à la valeur propre $+E_\nu$, le vecteur ${}^tY = (-z, -l, x, y)$ est aussi vecteur propre de A_ν associé à la valeur propre $-E_\nu$ [54]. On n'a ainsi à déterminer que les deux vecteurs propres associés aux valeurs propres positives E_ν^\pm .

$$\text{Soient les vecteurs propres } X_{\nu 1} = \begin{pmatrix} u_{\nu 1p} \\ u_{\nu 1n} \\ v_{\nu 1p} \\ v_{\nu 1n} \end{pmatrix} \text{ et } X_{\nu 2} = \begin{pmatrix} u_{\nu 2p} \\ u_{\nu 2n} \\ v_{\nu 2p} \\ v_{\nu 2n} \end{pmatrix}, \text{ associés aux}$$

valeurs propres E_ν^+ et E_ν^- , leurs composantes sont déterminées par :

$$u_{\nu 12p} = \frac{T_{\nu 1}}{T_\nu} \quad ; \quad u_{\nu 12n} = \frac{-T_{\nu 2}}{T_\nu} \quad ; \quad v_{\nu 12p} = \frac{T_{\nu 3}}{T_\nu} \quad ; \quad v_{\nu 12n} = \frac{-T_{\nu 4}}{T_\nu} \quad (2.17)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{\nu 1} = \begin{vmatrix} (\xi_{\nu n} - E_{\nu 1(2)}) & -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} \\ -\Delta_{np} & -(\xi_{\nu p} + E_{\nu 1(2)}) & 0 \\ -\Delta_{nn} & 0 & -(\xi_{\nu n} + E_{\nu 1(2)}) \end{vmatrix} \\ T_{\nu 2} = \begin{vmatrix} -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} & 0 \\ -(\xi_{\nu p} + E_{\nu 1(2)}) & 0 & -\Delta_{pp} \\ 0 & -(\xi_{\nu n} + E_{\nu 1(2)}) & -\Delta_{np} \end{vmatrix} \\ T_{\nu 3} = \begin{vmatrix} -\Delta_{nn} & 0 & (\xi_{\nu n} - E_{\nu 1(2)}) \\ 0 & -\Delta_{pp} & -\Delta_{np} \\ -(\xi_{\nu n} + E_{\nu 1(2)}) & -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} \end{vmatrix} \\ T_{\nu 4} = \begin{vmatrix} 0 & (\xi_{\nu n} - E_{\nu 1(2)}) & -\Delta_{np} \\ -\Delta_{pp} & -\Delta_{np} & -(\xi_{\nu p} + E_{\nu 1(2)}) \\ -\Delta_{np} & -\Delta_{nn} & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

qui sous forme développée s'écrivent :

$$\begin{aligned} T_{\nu 1} &= (\xi_{\nu n}^2 - E_{\nu 1(2)}^2) (\xi_{\nu p} + E_{\nu 1(2)}) + \Delta_{np}^2 (\xi_{\nu n} + E_{\nu 1(2)}) + \Delta_{nn}^2 (\xi_{\nu p} + E_{\nu 1(2)}) \\ T_{\nu 2} &= \Delta_{np} \Delta_{pp} (\xi_{\nu n} + E_{\nu 1(2)}) + \Delta_{np} \Delta_{nn} (\xi_{\nu p} + E_{\nu 1(2)}) \\ T_{\nu 3} &= -\Delta_{nn} (\Delta_{pp} \Delta_{nn} - \Delta_{np}^2) - \Delta_{pp} (\xi_{\nu n}^2 - E_{\nu 1(2)}^2) \\ T_{\nu 4} &= \Delta_{np} (\xi_{\nu n} - E_{\nu 1(2)}) (\xi_{\nu p} + E_{\nu 1(2)}) - \Delta_{np} (\Delta_{pp} \Delta_{nn} - \Delta_{np}^2) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Et où :

$$T_\nu = \sqrt{T_{\nu 1}^2 + T_{\nu 2}^2 + T_{\nu 3}^2 + T_{\nu 4}^2} \quad (2.20)$$

A partir des deux vecteurs propres précédents, on détermine les deux vecteurs propres restants, leurs expressions sont données par :

$$X_{\nu 3} = \begin{pmatrix} -v_{\nu 1p} \\ -v_{\nu 1n} \\ u_{\nu 1p} \\ u_{\nu 1n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_{\nu 4} = \begin{pmatrix} -v_{\nu 2p} \\ -v_{\nu 2n} \\ u_{\nu 2p} \\ u_{\nu 2n} \end{pmatrix}$$

Signalons enfin que la construction des vecteurs propres précédents[55], s'est faite de sorte que la base des kets propres qu'ils constituent soit orthonormée.

2.5 Transformation de Bogoliubov-Valatin généralisée

La matrice A_ν donnée par l'expression (2.12) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$A_\nu = TDT^{-1} \quad (2.21)$$

où

$$T = \begin{pmatrix} u_{\nu 1p} & u_{\nu 2p} & -v_{\nu 1p} & -v_{\nu 2p} \\ u_{\nu 1n} & u_{\nu 2n} & -v_{\nu 1n} & -v_{\nu 2n} \\ v_{\nu 1p} & v_{\nu 2p} & u_{\nu 1p} & u_{\nu 2p} \\ v_{\nu 1n} & v_{\nu 2n} & u_{\nu 1n} & u_{\nu 2n} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

et où :

$$D = \begin{pmatrix} E_{\nu 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{\nu 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_{\nu 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{\nu 2} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Ceci permet d'écrire l'hamiltonien auxiliaire (2.11) sous la forme suivante :

$$H' = E_0 + \sum_{\nu > 0} \left\{ \begin{pmatrix} a_{\nu p}^+ & a_{\nu n}^+ & a_{\tilde{\nu} p} & a_{\tilde{\nu} n} \end{pmatrix} TDT^{-1} \begin{pmatrix} a_{\nu p} \\ a_{\nu n} \\ a_{\tilde{\nu} p}^+ \\ a_{\tilde{\nu} n}^+ \end{pmatrix} + \xi_{\nu p} + \xi_{\nu n} \right\} \quad (2.24)$$

Introduisons de nouveaux opérateurs de création et d'annihilation définis par :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\nu 1} \\ \alpha_{\nu 2} \\ \alpha_{\tilde{\nu} 1}^+ \\ \alpha_{\tilde{\nu} 2}^+ \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} a_{\nu p} \\ a_{\nu n} \\ a_{\tilde{\nu} p}^+ \\ a_{\tilde{\nu} n}^+ \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Le fait que la matrice d'excitation (2.12) soit symétrique simplifie considérablement les calculs, car, dans ce cas, l'inverse de la matrice de passage T , qui est orthogonale, est donnée par sa matrice transposée :

$$T^{-1} = {}^t T \quad (2.26)$$

La transformation (2.25) est la transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin, dont on peut tirer, grâce à la remarque précédente, la forme condensée donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\nu\tau}^+ = \sum_{t=n,p} (u_{\nu\tau t} a_{\nu t}^+ + v_{\nu\tau t} a_{\bar{\nu}t}) \\ \alpha_{\nu\tau} = \sum_{t=n,p} (u_{\nu\tau t} a_{\nu t} + v_{\nu\tau t} a_{\bar{\nu}t}^+) \\ \tau = 1, 2 \end{array} \right\} \quad (2.27)$$

Les opérateurs $\alpha_{\nu\tau}^+$ ($\alpha_{\nu\tau}$) sont des opérateurs de création (d'annihilation) pour les nouvelles quasi-particules[4], la quasi-particule $\nu\tau$ créée par $\alpha_{\nu\tau}^+$ étant définie comme la combinaison linéaire de deux vraies particules avec les amplitudes de probabilités $u_{\nu\tau n}$ et $u_{\nu\tau p}$, et de deux vrais trous avec les amplitudes de probabilités $v_{\nu\tau n}$ et $v_{\nu\tau p}$. La transformation inverse de la transformation de Bogoliubov-Valatin généralisée se déduit de manière immédiate, en effet, à partir de la relation (2.25), on obtient :

$$\begin{pmatrix} a_{\nu p} \\ a_{\nu n} \\ a_{\bar{\nu}p}^+ \\ a_{\bar{\nu}n}^+ \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \alpha_{\nu 1} \\ \alpha_{\nu 2} \\ \alpha_{\bar{\nu}1}^+ \\ \alpha_{\bar{\nu}2}^+ \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Dont la forme condensée est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{\bar{\nu}t}^+ = \sum_{\tau=1,2} (u_{\nu\tau t} \alpha_{\bar{\nu}\tau}^+ + v_{\nu\tau t} \alpha_{\nu\tau}) \\ a_{\bar{\nu}t} = \sum_{\tau=1,2} (u_{\nu\tau t} \alpha_{\bar{\nu}\tau} + v_{\nu\tau t} \alpha_{\nu\tau}^+) \\ t = n, p \end{array} \right\} \quad (2.29)$$

La nouvelle représentation, c'est-à-dire la représentation quasi-particules, permet si elle est utilisée d'avoir affaire à un hamiltonien diagonal, les calculs de valeurs moyennes se trouvant ainsi grandement facilités.

2.6 Etat BCS

Dans le passage en représentation quasi-particules, on doit commencer par la détermination du nouvel état de vide qui est le vide de quasi-particules, et qui représente le nouvel état $|BCS\rangle$. Cet état est déterminé à partir du vide ($|0\rangle$) de vraies particules en y éliminant toutes les quasi-particules, il est alors défini par :

$$|BCS\rangle = k \prod_{\nu>0} \alpha_{\nu 1} \alpha_{\bar{\nu}1} \alpha_{\nu 2} \alpha_{\bar{\nu}2} |0\rangle \quad (2.30)$$

où k est une constante de normalisation. L'utilisation de la transformation de Bogoliubov-Valatin généralisée permet d'aboutir au résultat suivant :

$$|BCS\rangle = |\Psi\rangle = \prod_{\nu>0} |\Psi_\nu\rangle \quad (2.31)$$

où :

$$|\Psi_\nu\rangle = [B_1^\nu A_{\nu p}^+ A_{\nu n}^+ + B_p^\nu A_{\nu p}^+ + B_n^\nu A_{\nu n}^+ + B_4^\nu (a_{\nu p}^+ a_{\nu n}^+ + a_{\nu n}^+ a_{\nu p}^+) + B_5^\nu] |0\rangle \quad (2.32)$$

et où l'opérateur $A_{\nu t}^+ = a_{\nu t}^+ a_{\nu t}^+$ est l'opérateur de création de paires de particules appariées, l'une étant dans l'état $|\nu t\rangle$ et l'autre dans l'état $|\tilde{\nu} t\rangle$. Les coefficients B sont donnés par :

$$B_i^\nu = \frac{b_i^\nu}{K_\nu} \quad , \quad i = 1, p, n, 4, 5 \quad (2.33)$$

où K_ν est une constante de normalisation exprimée par :

$$K_\nu = \{(b_1^\nu)^2 + (b_p^\nu)^2 + (b_n^\nu)^2 + 2(b_4^\nu)^2 + (b_5^\nu)^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.33.a)$$

et où les b^ν sont exprimés par :

$$b_1^\nu = (v_{\nu 1p} v_{\nu 2n} - v_{\nu 1n} v_{\nu 2p})^2 \quad (2.33.b)$$

$$b_p^\nu = v_{\nu 1p}^2 (u_{\nu 2p} v_{\nu 2p} + u_{\nu 2n} v_{\nu 2n}) + v_{\nu 2p}^2 (u_{\nu 1n} v_{\nu 1n} - u_{\nu 1p} v_{\nu 1p}) - 2u_{\nu 1n} v_{\nu 1p} v_{\nu 2p} v_{\nu 2n} \quad (2.33.c)$$

$$b_n^\nu = v_{\nu 1n}^2 (u_{\nu 2p} v_{\nu 2p} + u_{\nu 2n} v_{\nu 2n}) + v_{\nu 2n}^2 (u_{\nu 1p} v_{\nu 1p} - u_{\nu 1n} v_{\nu 1n}) - 2u_{\nu 1p} v_{\nu 1n} v_{\nu 2p} v_{\nu 2n} \quad (2.33.d)$$

$$b_4^\nu = v_{\nu 1n} v_{\nu 1p} (u_{\nu 2p} v_{\nu 2p} + u_{\nu 2n} v_{\nu 2n}) - v_{\nu 2n}^2 u_{\nu 1n} v_{\nu 1p} - v_{\nu 2p}^2 u_{\nu 1p} v_{\nu 1n} \quad (2.33.e)$$

$$b_5^\nu = (u_{\nu 1n} v_{\nu 1n} + u_{\nu 1p} v_{\nu 1p}) (u_{\nu 2p} v_{\nu 2p} + u_{\nu 2n} v_{\nu 2n}) - (u_{\nu 1n} v_{\nu 2n} + u_{\nu 1p} v_{\nu 2p})^2 \quad (2.33.f)$$

On remarque que l'état $|BCS\rangle$, donné par les expressions (2.31,2.32), ne peut décrire que des systèmes avec un nombre pair de particules. En effet, il s'exprime comme une combinaison linéaire d'opérateurs de création de paires de particules appariées, chacun des opérateurs étant associé à l'une des amplitudes de probabilités données par les expressions (2.34). L'état $|\Psi_\nu\rangle$ peut comprendre[43] deux paires homogènes neutron-neutron et proton-proton avec l'amplitude de probabilité B_1^ν . Il peut comprendre une paire homogène neutron-neutron ou proton-proton, avec les amplitudes B_n^ν et B_p^ν respectivement. Il peut comprendre une paire mixte neutron-proton avec une amplitude de probabilité $2B_4^\nu$, comme il peut ne contenir aucune particule avec l'amplitude de probabilité B_5^ν .

A partir de l'état $|BCS\rangle$, et en y créant un nombre donné de quasi-particules, on peut construire des états excités décrivant des systèmes nucléaires avec des nombres de particules pair ou impair. L'état auquel on s'intéresse est défini par :

$$|\nu T\rangle = a_{\nu T}^+ \prod_{j \neq \nu} |\Psi_j\rangle \quad , \quad T = n, p \quad (2.34)$$

Cet état a la propriété de décrire des systèmes avec un nombre impair de nucléons. Il sera utilisé, ainsi que l'état $|\Psi\rangle$ pour le calcul des valeurs moyennes des observables auxquelles on s'intéresse, notamment l'hamiltonien ainsi que l'opérateur nombre de particules.

2.7 Les noyaux pair-pairs

L'état fondamental de tels noyaux est décrit par le ket $|\Psi\rangle$, exprimé par (2.31). Dans ce paragraphe, on calcule les valeurs moyennes de l'opérateur nombre de particules, de l'hamiltonien ainsi que les paramètres du gap Δ_{nn} , Δ_{pp} et Δ_{np} . Pour faciliter et accélérer les calculs, on suit un procédé analogue à celui du premier chapitre.

2.7.1 Le nombre de particules

L'opérateur nombre de particules est donné par l'expression (2.5), c'est-à-dire :

$$\mathbf{N} = \sum_{k>0,t} (a_{kt}^+ a_{kt} + a_{\bar{k}t}^+ a_{\bar{k}t})$$

Appliquons l'opérateur d'annihilation a_{kt} à l'état $|\Psi\rangle$, il vient :

$$a_{kt} |\Psi\rangle = \left[B_1^k (-\delta_{tp} a_{kp}^+ a_{kn}^+ a_{kn}^+ - \delta_{tn} a_{kp}^+ a_{kp}^+ a_{kn}^+) - B_p^k \delta_{tp} a_{kp}^+ - B_n^k \delta_{tn} a_{kn}^+ - B_4^k (\delta_{tn} a_{kp}^+ + \delta_{tp} a_{kn}^+) \right] \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq k}} |\Psi_j\rangle \quad (2.35)$$

on en déduit l'expression de son conjugué hermitique :

$$\langle \Psi | a_{kt}^+ = \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq k}} \langle \Psi_j | \left[B_1^k (-\delta_{tp} a_{kn} a_{kn} a_{kp} - \delta_{tn} a_{kn} a_{kp} a_{kp}) - B_p^k \delta_{tp} a_{kp} - B_n^k \delta_{tn} a_{kn} - B_4^k (\delta_{tn} a_{kp} + \delta_{tp} a_{kn}) \right] \quad (2.36)$$

on établit ainsi immédiatement :

$$\langle \Psi | a_{kt}^+ a_{kt} | \Psi \rangle = (B_1^k)^2 (\delta_{tp} + \delta_{tn}) + (B_p^k)^2 \delta_{tp} + (B_n^k)^2 \delta_{tn} + (B_4^k)^2 (\delta_{tp} + \delta_{tn}) \quad (2.37)$$

De manière analogue il vient :

$$\langle \Psi | a_{kt}^+ a_{\bar{k}t} | \Psi \rangle = (B_1^k)^2 (\delta_{tp} + \delta_{tn}) + (B_p^k)^2 \delta_{tp} + (B_n^k)^2 \delta_{tn} + (B_4^k)^2 (\delta_{tp} + \delta_{tn}) \quad (2.38)$$

on en déduit alors la valeur moyenne sur l'état $|\Psi\rangle$, de l'opérateur nombre de particules qui est donnée par :

$$\langle \Psi | \mathbf{N} | \Psi \rangle = 2 \sum_{k>0} \left[2(B_1^k)^2 + (B_p^k)^2 + (B_n^k)^2 + 2(B_4^k)^2 \right] \quad (2.39)$$

2.7.2 L'énergie

Récrivons l'hamiltonien sous la forme suivante :

$$H' = \sum_{k>0,t} \tilde{\varepsilon}_{kt} \mathbf{N}_{kt} + H_{app} \quad (2.40)$$

où :

$$\mathbf{N}_{kt} = a_{kt}^+ a_{\bar{k}t} + a_{kt}^+ a_{kt} \quad (2.41)$$

et :

$$\begin{aligned} H_{app} = & -\frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{j>0} (a_{jt}^+ a_{j't'}^+ a_{\bar{j}t'} a_{jt} + a_{jt}^+ a_{j't'}^+ a_{\bar{j}t} a_{j't'}) \\ & -\frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} (a_{jt}^+ a_{j't'}^+ a_{\bar{l}t'} a_{lt} + a_{jt}^+ a_{j't'}^+ a_{\bar{l}t} a_{l't'}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

En s'inspirant du calcul de la valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules, on établit immédiatement :

$$\langle \Psi | \sum_{k>0,t} \tilde{\varepsilon}_{kt} \mathbf{N}_{kt} | \Psi \rangle = 2 \sum_{k>0} \left[\left((B_1^k)^2 + (B_4^k)^2 \right) (\tilde{\varepsilon}_{kp} + \tilde{\varepsilon}_{kn}) + (B_p^k)^2 \tilde{\varepsilon}_{kp} + (B_n^k)^2 \tilde{\varepsilon}_{kn} \right] \quad (2.43)$$

Calculons à présent la valeur moyenne du terme d'appariement H_{app} sur l'état $|\Psi\rangle$, pour cela, on applique chacun des termes $a_{\bar{j}t'} a_{jt}$, $a_{\bar{j}t} a_{j't'}$, $a_{\bar{l}t'} a_{lt}$ et $a_{\bar{l}t} a_{l't'}$ sur l'état $|\Psi\rangle$, et on conjugue hermitiquement les résultats obtenus ; on multiplie finalement chaque terme par son conjugué et on somme pour aboutir au résultat recherché. Pour les applications des termes $a_{\bar{j}t'} a_{jt}$, $a_{\bar{j}t} a_{j't'}$, $a_{\bar{l}t'} a_{lt}$ et $a_{\bar{l}t} a_{l't'}$ à l'état

$|\Psi\rangle$, on trouve :

$$a_{\tilde{j}t'}a_{jt}|\Psi\rangle = \left\{ \begin{array}{l} B_1^j \left(\delta_{t'n} \delta_{tp} a_{jp}^+ a_{jn}^+ - \delta_{tp} \delta_{t'p} a_{jn}^+ a_{jn}^+ - \delta_{t'p} \delta_{tn} a_{jp}^+ a_{jn}^+ - \delta_{t'n} \delta_{tn} a_{jp}^+ a_{jp}^+ \right) \\ - B_p^j \delta_{tp} \delta_{t'p} - B_n^j \delta_{t'n} \delta_{tn} - B_4^j (\delta_{t'n} \delta_{tp} + \delta_{t'p} \delta_{tn}) \end{array} \right\} \prod_{\substack{k>0 \\ k \neq j}} |\Psi_k\rangle$$

$$a_{\tilde{j}t}a_{jt'}|\Psi\rangle = \left\{ \begin{array}{l} B_1^j \left(\delta_{t'p} \delta_{tn} a_{jp}^+ a_{jn}^+ - \delta_{tp} \delta_{t'p} a_{jn}^+ a_{jn}^+ - \delta_{t'n} \delta_{tp} a_{jp}^+ a_{jn}^+ - \delta_{t'n} \delta_{tn} a_{jp}^+ a_{jp}^+ \right) \\ - B_p^j \delta_{tp} \delta_{t'p} - B_n^j \delta_{t'n} \delta_{tn} - B_4^j (\delta_{t'n} \delta_{tp} + \delta_{t'p} \delta_{tn}) \end{array} \right\} \prod_{\substack{k>0 \\ k \neq j}} |\Psi_k\rangle$$

$$a_{\tilde{l}t'}a_{lt}|\Psi\rangle = \left\{ \begin{array}{l} B_1^l \left(\delta_{t'n} \delta_{tp} a_{lp}^+ a_{ln}^+ - \delta_{tp} \delta_{t'p} a_{ln}^+ a_{ln}^+ - \delta_{t'p} \delta_{tn} a_{lp}^+ a_{ln}^+ - \delta_{t'n} \delta_{tn} a_{lp}^+ a_{lp}^+ \right) \\ - B_p^l \delta_{tp} \delta_{t'p} - B_n^l \delta_{t'n} \delta_{tn} - B_4^l (\delta_{t'n} \delta_{tp} + \delta_{t'p} \delta_{tn}) \end{array} \right\} \prod_{\substack{k>0 \\ k \neq l}} |\Psi_k\rangle$$

$$a_{\tilde{l}t}a_{lt'}|\Psi\rangle = \left\{ \begin{array}{l} B_1^l \left(\delta_{t'p} \delta_{tn} a_{lp}^+ a_{ln}^+ - \delta_{tp} \delta_{t'p} a_{ln}^+ a_{ln}^+ - \delta_{t'n} \delta_{tp} a_{lp}^+ a_{ln}^+ - \delta_{t'n} \delta_{tn} a_{lp}^+ a_{lp}^+ \right) \\ - B_p^l \delta_{tp} \delta_{t'p} - B_n^l \delta_{t'n} \delta_{tn} - B_4^l (\delta_{t'n} \delta_{tp} + \delta_{t'p} \delta_{tn}) \end{array} \right\} \prod_{\substack{k>0 \\ k \neq l}} |\Psi_k\rangle$$

On somme les termes précédents, chacun d'entre eux étant multiplié par son conjugué hermitique, cela donne alors la valeur moyenne sur l'état $|\Psi\rangle$ du terme d'appariement :

$$\begin{aligned} \langle \Psi | H_{app} | \Psi \rangle &= -\frac{1}{2} \sum_{j>0} \{ 2(B_1^j)^2 (G_{nn} + G_{pp} + G_{np}) + 4(B_4^j)^2 G_{np} + 2(B_p^j)^2 G_{pp} + 2(B_n^j)^2 G_{nn} \} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} \left\{ \begin{array}{l} 2G_{pp} (B_1^l B_n^l + B_p^l B_5^l) (B_1^j B_n^j + B_p^j B_5^j) \\ + 2G_{nn} (B_1^l B_p^l + B_n^l B_5^l) (B_1^j B_p^j + B_n^j B_5^j) \\ + 4G_{np} (B_1^l B_4^l - B_4^l B_5^l) (B_1^j B_4^j - B_4^j B_5^j) \end{array} \right. \quad (2.44) \end{aligned}$$

On établit finalement l'énergie de l'état fondamental du système qui est donnée par l'expression :

$$E_0 = \langle \Psi | H' | \Psi \rangle = \langle \Psi | \sum_{k>0,t} \tilde{\epsilon}_{kt} \mathbf{N}_{kt} | \Psi \rangle + \langle \Psi | H_{app} | \Psi \rangle \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned}
E_0 = & 2 \sum_{j>0} \left\{ \begin{aligned} & \left((B_1^j)^2 + (B_4^j)^2 \right) (\tilde{\varepsilon}_{jp} + \tilde{\varepsilon}_{jn}) + (B_p^j)^2 \tilde{\varepsilon}_{jp} + (B_n^j)^2 \tilde{\varepsilon}_{jn} \\ & - \frac{1}{2} G_{pp} \left((B_1^j)^2 + (B_p^j)^2 \right) - \frac{1}{2} G_{nn} \left((B_1^j)^2 + (B_n^j)^2 \right) \\ & - \frac{1}{2} G_{np} \left((B_1^j)^2 + 2 (B_4^j)^2 \right) \end{aligned} \right. \\
& - \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} \left\{ \begin{aligned} & G_{pp} (B_1^j B_n^j + B_p^j B_5^j) (B_1^l B_n^l + B_p^l B_5^l) \\ & + G_{nn} (B_1^j B_p^j + B_n^j B_5^j) (B_1^l B_p^l + B_n^l B_5^l) \\ & + 2 G_{np} B_4^j (B_1^j - B_5^j) B_4^l (B_1^l - B_5^l) \end{aligned} \right. \quad (2.46)
\end{aligned}$$

2.7.3 Les paramètres du gap

Les paramètres du gap sont donnés par les expressions (2.13.b), c'est-à-dire :

$$\Delta_{tr} = G_{tr} \sum_{j>0} a_{jt}^+ a_{jr}^+ = G_{tr} \sum_{j>0} a_{jr}^- a_{jt}^-$$

Les calculs sont très simples à effectuer, et sont tout à fait analogues à ceux effectués dans le paragraphe précédent ; aussi, on en donne directement les résultats qui s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned}
\Delta_{pp} &= -G_{pp} \sum_{j>0} (B_n^j B_1^j + B_5^j B_p^j) \\
\Delta_{nn} &= -G_{nn} \sum_{j>0} (B_p^j B_1^j + B_5^j B_n^j) \\
\Delta_{np} &= -G_{np} \sum_{j>0} (B_4^j B_1^j - B_4^j B_5^j)
\end{aligned} \quad (2.47)$$

2.8 Les noyaux impairs

L'étude des systèmes impairs, se fera comme au premier chapitre, à l'aide de la méthode du blocage de Wahlborn[46]. En effet, un noyau impair peut avoir ou bien un nombre pair de neutrons et un nombre impair de protons, ou bien l'inverse. Dans ce qui suit, on effectue les calculs dans le cadre général, c'est-à-dire sans se soucier du type de nucléons en nombre impair. L'état fondamental d'un tel système est donné par l'expression (2.34) :

$$|\nu T\rangle = a_{\nu T}^+ \prod_{j \neq \nu} |\Psi_j\rangle \quad , \quad T = n, p$$

Dans un système décrit à l'état fondamental par le vecteur propre précédent, on suppose qu'une particule du type T pouvant être un proton ou un neutron, selon le type de nucléons se trouvant en nombre impair dans le noyau, soit bloquée sur le niveau $|\nu\rangle$ du modèle à particules indépendantes. Le reste des nucléons forme un cœur pair-pair sur lequel les calculs viennent d'être explicités au paragraphe précédent. On s'aperçoit encore une fois de l'élégance de la méthode du blocage de Wahlborn, qui permet d'exploiter les calculs effectués pour les systèmes pair-pairs dans le cas des systèmes impairs. On détermine donc aisément les valeurs moyennes recherchées. Pour l'opérateur nombre de particules, on trouve :

$$\langle \nu T | \mathbf{N} | \nu T \rangle = 1 + 2 \sum_{\substack{k>0 \\ k \neq \nu}} \left[2(B_1^k)^2 + (B_p^k)^2 + (B_n^k)^2 + 2(B_4^k)^2 \right] \quad (2.48)$$

Quant à la valeur moyenne de l'énergie, elle est donnée par :

$$\begin{aligned} E_0 = \langle \nu T | H' | \nu T \rangle &= \langle \nu T | \sum_{k>0,t} \tilde{\epsilon}_{kt} \mathbf{N}_{kt} | \nu T \rangle + \langle \nu T | H_{app} | \nu T \rangle \quad (2.49) \\ E_0 &= \tilde{\epsilon}_{\nu T} + 2 \sum_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} \left\{ \begin{aligned} & \left((B_1^j)^2 + (B_4^j)^2 \right) (\tilde{\epsilon}_{jp} + \tilde{\epsilon}_{jn}) + (B_p^j)^2 \tilde{\epsilon}_{jp} + (B_n^j)^2 \tilde{\epsilon}_{jn} \\ & - \frac{1}{2} G_{pp} \left((B_1^j)^2 + (B_p^j)^2 \right) - \frac{1}{2} G_{nn} \left((B_1^j)^2 + (B_n^j)^2 \right) \\ & - \frac{1}{2} G_{np} \left((B_4^j)^2 + \frac{1}{2} (B_1^j)^2 \right) \end{aligned} \right\} \\ & - \sum_{\substack{j,l>0, \neq \nu \\ j \neq l}} \left\{ \begin{aligned} & G_{pp} (B_1^j B_n^j + B_p^j B_5^j) (B_1^l B_n^l + B_p^l B_5^l) \\ & + G_{nn} (B_1^j B_p^j + B_n^j B_5^j) (B_1^l B_p^l + B_n^l B_5^l) \\ & + 2G_{np} B_4^j (B_1^j - B_5^j) B_4^l (B_1^l - B_5^l) \end{aligned} \right\} \quad (2.50) \end{aligned}$$

Les paramètres du gap sont finalement donnés par :

$$\begin{aligned} \Delta_{pp}^{(\nu)} &= -G_{pp} \sum_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} (B_n^j B_1^j + B_5^j B_p^j) \\ \Delta_{nn}^{(\nu)} &= -G_{nn} \sum_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} (B_p^j B_1^j + B_5^j B_n^j) \\ \Delta_{np}^{(\nu)} &= -G_{np} \sum_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} (B_4^j B_1^j + B_4^j B_5^j) \end{aligned}$$

Chapitre 3

Conservation du nombre de nucléons

Il a été mentionné dans les chapitres précédents, que du fait de la linéarisation, le nouvel hamiltonien (pour l'appariement entre particules identiques comme pour l'appariement neutron-proton) ne commute plus avec le nombre de particules. On a néanmoins conservé le nombre de particules en moyenne, en introduisant un multiplicateur de Lagrange comme contrainte dans l'hamiltonien. Il est dans la logique des choses de vouloir améliorer les calculs effectués, en considérant comme états quantiques décrivant les systèmes nucléaires étudiés, des états dont on a exclu les fluctuations du nombre de particules. En effet, comme on le verra ci-après, les états utilisés dans les chapitres précédents, peuvent être écrits comme combinaisons linéaires d'un grand nombre d'états, chacun décrivant un système possédant un nombre donné de particules, d'où le besoin de ne garder de ces combinaisons que l'état physique, c'est-à-dire celui décrivant un système avec le bon nombre de particules.

L'élimination des états non physiques est possible par l'utilisation de différentes méthodes développées par les équipes de recherche qui s'intéressent à l'interaction d'appariement, et parmi lesquelles on peut citer la méthode de Lipkin-Nogami[8],[58]. Dans le cadre de ce travail, on utilise la méthode développée au sein de notre laboratoire depuis maintenant presque une quarantaine d'années, et qui est celle de la projection SBCS[11]-[12], pour Sharp BCS, et où l'on utilise le terme Sharp dans le sens où l'on effectue une projection stricte, c'est-à-dire que l'on ne garde que l'état correspondant au bon nombre de particules, tous les autres états étant éliminés, sachant de plus que les projecteurs utilisés sont des projecteurs discrétisés, pour les protons, comme pour les neutrons.

Ce chapitre sera divisé en deux parties : une première partie dans laquelle

on illustrera la méthode SBCS, en l'appliquant à des systèmes où l'on ne considère que l'appariement entre particules identiques, et une seconde partie où l'on tiendra compte de l'appariement isovectoriel. Dans chacune des deux parties, on commencera par projeter les états, à l'aide de projecteurs discrétisés. On utilisera finalement les états projetés pour refaire les calculs de valeurs moyennes effectués au chapitre I et au chapitre II, c'est-à-dire pour déterminer la valeur moyenne de l'hamiltonien, de l'opérateur nombre de particules ainsi que des paramètres du gap, cela pour les systèmes pair-pairs comme pour les systèmes impairs.

3.1 Appariement entre particules identiques pour des systèmes ayant un nombre pair de particules

L'état $|BCS\rangle$ décrivant les systèmes avec un nombre pair de nucléons est donné par l'expression (1.26), c'est-à-dire :

$$|BCS\rangle = \prod_{j>0} \left(u_j + v_j a_j^+ a_j^+ \right) |0\rangle$$

cet état peut être réécrit sous la forme :

$$|BCS\rangle = \left(\prod_{j>0} u_j \right) \prod_{j>0} \left(1 + \frac{v_j}{u_j} a_j^+ a_j^+ \right) |0\rangle$$

une fois le deuxième produit développé, cela conduit à l'expression :

$$|BCS\rangle = \left(\prod_{j>0} u_j \right) \left[|0\rangle + \sum_{j>0} \frac{v_j}{u_j} a_j^+ a_j^+ |0\rangle + \frac{1}{2} \sum_{j,l>0} \frac{v_j v_l}{u_j u_l} a_j^+ a_j^+ a_l^+ a_l^+ |0\rangle + \dots \right]$$

qu'on peut écrire sous la forme condensée suivante :

$$|BCS\rangle = \sum_{l=0}^{\Omega} |\Phi_l\rangle \quad (3.1)$$

où Ω est la dégénérescence totale de paires et $|\Phi_l\rangle$ est la composante à l paires de particules donnée par :

$$|\Phi_l\rangle = \left(\prod_{j>0} u_j \right) \frac{1}{l!} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_l > 0 \\ j_1 + j_2 + \dots + j_l = l}} \frac{v_{j_1} \dots v_{j_l}}{u_{j_1} \dots u_{j_l}} A_{j_1}^+ \dots A_{j_l}^+ |0\rangle \quad (3.2)$$

où $A_j^+ = a_j^+ a_j^+$ est l'opérateur de création d'une paire de particules appariées dans l'état $|j\rangle$. On s'aperçoit, grâce à l'expression précédente, que l'état $|BCS\rangle$ s'écrit comme combinaison linéaire d'un grand nombre d'états, chacun correspondant à un nombre déterminé de particules. La nécessité de ne garder que la composante décrivant le système étudié s'avère donc évidente. Pour cela, on élimine les autres états qu'on désigne sous le nom de fausses composantes, ceci en utilisant la méthode de projection SBCS sur le bon nombre de particules. Celle-ci nécessite l'introduction d'un projecteur, qui une fois appliqué à l'état $|BCS\rangle$ permet de ne garder que l'état physique.

3.1.1 Opérateur de projection

L'opérateur qui permet de projeter l'état $|BCS\rangle$ sur le bon nombre de particules est donné par l'expression habituelle :[46]

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\varphi(\mathbf{N} - 2P)) d\varphi \quad (3.3)$$

où \mathcal{P} représente le nombre de paires de particules présentes dans le système étudié. En effet, si on applique cet opérateur au développement de l'état $|BCS\rangle$ donné par les expressions (3.1) et (3.2), cela donne :

$$\mathcal{P} |BCS\rangle = \left(\prod_{j>0} u_j \right) \sum_{l=0}^{\Omega} \frac{1}{l!} \sum_{j_1, \dots, j_l > 0} \frac{v_{j_1} \dots v_{j_l}}{u_{j_1} \dots u_{j_l}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\varphi(\mathbf{N} - 2P)) A_{j_1}^+ \dots A_{j_l}^+ |0\rangle d\varphi \quad (3.4)$$

Or, l'application de l'opérateur nombre de particules dans l'expression précédente donne :

$$N A_{j_1}^+ \dots A_{j_l}^+ |0\rangle = 2l A_{j_1}^+ \dots A_{j_l}^+ |0\rangle \quad (3.5)$$

et sachant que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\varphi(n - n')) d\varphi = \delta_{n, n'} \quad (3.6)$$

on trouve finalement :

$$\mathcal{P} |BCS\rangle = |\Phi_p\rangle = \left(\prod_{j>0} u_j \right) \frac{1}{P!} \sum_{j_1, \dots, j_P > 0} \frac{v_{j_1} \dots v_{j_P}}{u_{j_1} \dots u_{j_P}} A_{j_1}^+ \dots A_{j_P}^+ |0\rangle \quad (3.7)$$

On voit clairement dans ce résultat, que le projecteur \mathcal{P} permet d'obtenir, à partir de l'état $|BCS\rangle$, un état décrivant un système avec un nombre $2P$ de particules. L'utilisation de ce projecteur n'est toutefois pas toujours aisée, on utilisera alors une autre forme de ce projecteur, obtenue par la discrétisation de l'intégrale du second membre de l'expression (3.3).

3.1.2 Forme discrète du projecteur

En séparant l'intégrale de l'expression (3.3) en deux sommes, l'une dans l'intervalle $[0, \pi]$ et l'autre dans l'intervalle $[\pi, 2\pi]$, et en effectuant le changement de variables $\varphi = \psi + \pi$ dans la seconde, on obtient :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \exp(i\varphi(\mathbf{N} - 2P)) d\varphi \quad (3.8)$$

et en subdivisant l'intervalle $[0, \pi]$ en $2n + 2$ intervalles équidistants, on obtient :

$$\mathcal{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n+1} \int_{\frac{k\pi}{2(n+1)}}^{\frac{(k+1)\pi}{2(n+1)}} \exp(i\varphi(\mathbf{N} - 2P)) d\varphi \quad (3.9)$$

En choisit la somme de Darboux supérieure pour l'intégrale, cela donne :

$$\mathcal{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_n \quad (3.10)$$

où :

$$\mathcal{P}_n = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^{2n+1} \exp(i \frac{k\pi}{2(n+1)} (\mathbf{N} - 2P)) \quad (3.11)$$

On sépare encore cette somme en deux parties, de $k = 0$ à $k = n + 1$, et de $k = n + 2$ à $k = 2n + 1$. En posant $k' = 2n + 2 - k$ dans la seconde somme, on obtient finalement :

$$\mathcal{P}_n = \frac{1}{2(n+1)} \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{(\frac{\mathbf{N}}{2} - P)} + c.c \right\} \quad (3.12)$$

où :

$$z_k = \exp\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right) \quad \text{et} \quad \xi_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } k = 0 \text{ ou } k = n + 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.13)$$

et où le second terme *c.c* est le complexe conjugué du premier terme. L'opérateur nombre de particules \mathbf{N} étant donné par l'expression (1.9), c'est-à-dire :

$$\mathbf{N} = \sum_{j>0} (a_j^+ a_j + a_{\bar{j}}^+ a_{\bar{j}}) = \sum_{j>0} (n_j + n_{\bar{j}}) = \sum_j n_j \quad (3.14)$$

où $n_j = a_j^+ a_j$, on écrit donc :

$$\exp\left(i \frac{k\pi \mathbf{N}}{2(n+1)}\right) = \exp(i\varphi_k \mathbf{N}) = \exp\left(i\varphi_k \sum_j n_j\right) = \prod_j \exp(i\varphi_k n_j)$$

avec :

$$\varphi_k = \frac{k\pi}{2(n+1)} \quad (3.15)$$

En écrivant le développement en série de $\exp(i\varphi_k n_j)$, on aboutit finalement à :

$$\exp(i\varphi_k n_j) = 1 + n_j(\sqrt{z_k} - 1) \quad (3.16)$$

et l'on trouve ainsi l'expression du projecteur discrétisé[40]. C'est cette forme qui sera utilisée dans la suite de ce chapitre :

$$\mathcal{P}_n = \frac{1}{2(n+1)} \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} \prod_j [1 + n_j(\sqrt{z_k} - 1)] + c.c \right\} \quad (3.17)$$

3.1.3 Projection de l'état $|BCS\rangle$

Il s'agit à présent d'appliquer le projecteur donné par l'expression (3.17) à l'état $|BCS\rangle$. Sachant que :

$$\prod_j [1 + n_j(\sqrt{z_k} - 1)] = \prod_{j>0} [1 + n_j(\sqrt{z_k} - 1)] [1 + n_{\bar{j}}(\sqrt{z_k} - 1)] \quad (3.18)$$

On a :

$$\begin{aligned} \left[1 + a_j^+ a_{\bar{j}}(\sqrt{z_k} - 1)\right] |BCS\rangle &= \left[1 + a_j^+ a_{\bar{j}}(\sqrt{z_k} - 1)\right] (u_j + v_j a_j^+ a_{\bar{j}}^+) \prod_{\substack{l>0 \\ l \neq j}} (u_l + v_l a_l^+ a_{\bar{l}}^+) |0\rangle \\ &= (u_j + \sqrt{z_k} v_j a_j^+ a_{\bar{j}}^+) \prod_{\substack{l>0 \\ l \neq j}} (u_l + v_l a_l^+ a_{\bar{l}}^+) |0\rangle \end{aligned} \quad (3.19)$$

En appliquant de nouveau l'opérateur $[1 + n_j(\sqrt{z_k} - 1)]$, on trouve :

$$[1 + a_j^+ a_j(\sqrt{z_k} - 1)] [1 + a_j^+ a_j(\sqrt{z_k} - 1)] |BCS\rangle = (u_j + z_k v_j a_j^+ a_j^+) \prod_{\substack{l>0 \\ l \neq j}} (u_l + v_l a_l^+ a_l^+) |0\rangle \quad (3.20)$$

On obtient ainsi l'expression de l'état projeté, qui est donnée par :

$$|BCS\rangle_n = \frac{1}{2(n+1)} \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} \prod_{j>0} (u_j + z_k v_j a_j^+ a_j^+) \prod_{\substack{l>0 \\ l \neq j}} (u_l + v_l a_l^+ a_l^+) |0\rangle + c.c \right\} \quad (3.21)$$

Après normalisation, cet état s'exprime par :

$$|BCS\rangle_n = C_n \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} \prod_{j>0} (u_j + z_k v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle + c.c \right\} \quad (3.22)$$

où C_n est la constante de normalisation déterminée par l'expression :

$$C_n^{-2} = 2(n+1) \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} \prod_{j>0} (u_j^2 + z_k v_j^2) + c.c \right\} \quad (3.23)$$

3.1.4 Calcul des valeurs moyennes

Pour simplifier la détermination des valeurs moyennes, on utilise tout au long de ce chapitre, la propriété[39] qui stipule que si \hat{O} est un opérateur qui conserve le nombre de particules, et que l'on veuille calculer sa valeur moyenne sur un état $|\Psi_n\rangle$ qui est l'état projeté d'un état $|\Psi\rangle$ quelconque, alors :

$$\langle \Psi_n | \hat{O} | \Psi_n \rangle = 2(n+1) C_n \langle \Psi_n | \hat{O} | \Psi \rangle = 2(n+1) C_n \langle \Psi | \hat{O} | \Psi_n \rangle \quad (3.24)$$

La simplicité apportée par l'utilisation de cette méthode est due au fait qu'il soit suffisant d'appliquer l'opérateur requis sur l'état non projeté, et de multiplier scalairement par l'opérateur projeté, ce qui diminue grandement la quantité de calculs à effectuer. Notons aussi qu'une fois ces calculs de valeurs moyennes effectués, ils seront poursuivis par le processus d'extraction de la partie réelle. En effet, les valeurs moyennes d'observables physiques doivent être réelles.

a) Opérateur nombre de particules

L'application de l'opérateur nombre de particules donné par l'expression (3.14) à l'état $|BCS\rangle$ donne :

$$\mathbf{N}|BCS\rangle = \sum_{j>0} 2v_j a_j^+ a_j^+ \prod_{\substack{l>0 \\ l \neq j}} (u_l + v_l a_l^+ a_l^+) |0\rangle \quad (3.25)$$

On multiplie scalairement par l'état projeté $|BCS_n\rangle$, et on trouve alors, en tenant compte de la propriété des opérateurs conservant le nombre de particules :

$$\langle BCS_n | \mathbf{N} | BCS_n \rangle = 2(n+1)C_n^2 \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-p} \sum_{j>0} v_j^2 z_k \prod_{\substack{l>0 \\ l \neq j}} (u_l^2 + z_k v_l^2) + c.c \right\} \quad (3.26)$$

b) Opérateur hamiltonien

On sépare l'opérateur hamiltonien, donné par l'expression (1.8), en deux parties distinctes, telles que celles données par les expressions (1.32) et (1.33), c'est-à-dire :

$$H = H_0 + H_{app}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 = \sum_{k>0} \epsilon_k (a_k^+ a_k + a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}}) \\ H_{app} = -G \sum_{k>0} a_k^+ a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{k}} a_k - G \sum_{\substack{k,l>0 \\ k \neq l}} a_k^+ a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{l}} a_l \end{array} \right\}$$

À partir du calcul précédant de la valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules \mathbf{N} , on détermine de manière immédiate la valeur moyenne du premier terme H_0 de l'hamiltonien, on trouve :

$$\langle BCS_n | H_0 | BCS_n \rangle = 2(n+1)C_n^2 \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} E_0(z_k) + c.c \right\} \quad (3.27)$$

avec :

$$E_0(z_k) = 2 \sum_{j>0} \epsilon_j v_j^2 z_k \prod_{\substack{l>0 \\ l \neq j}} (u_l^2 + z_k v_l^2) \quad (3.28)$$

Quant au terme d'appariement, un calcul tout à fait similaire donne :

$$\langle BCS_n | H_{app} | BCS_n \rangle = 2(n+1)C_n^2 \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} E_{app}(z_k) + c.c \right\} \quad (3.29)$$

où :

$$E_{app}(z_k) = -G \sum_{j>0} z_k v_j^2 \prod_{\substack{l>0 \\ l \neq j}} (u_l^2 + z_k v_l^2) - G \sum_{\substack{j,m>0 \\ j \neq m}} z_k u_j u_m v_j v_m \prod_{\substack{l>0 \\ l \neq j,m}} (u_l^2 + z_k v_l^2) \quad (3.30)$$

On en déduit finalement la valeur moyenne de l'opérateur hamiltonien, elle s'exprime par :

$$\langle BCS_n | H | BCS_n \rangle = 2(n+1)C_n^2 \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} E(z_k) + c.c \right\} \quad (3.31)$$

avec :

$$E(z_k) = E_0(z_k) + E_{app}(z_k) \quad (3.32)$$

où :

$$E(z_k) = 2 \sum_{j>0} \left(\epsilon_j - \frac{G v_j^2}{2} \right) v_j^2 z_k \prod_{\substack{l>0 \\ l \neq j}} (u_l^2 + z_k v_l^2) - G \sum_{j,m>0} z_k u_j u_m v_j v_m \prod_{\substack{l>0 \\ l \neq j,m}} (u_l^2 + z_k v_l^2) \quad (3.33)$$

3.1.5 Extraction de la partie réelle

Comme il a été signalé précédemment, les valeurs moyennes déterminées dans les paragraphes précédents étant complexes, elles ne sont pas directement exploitables pour des calculs numériques, on aborde donc le processus d'extraction de leurs parties réelles. Pour ce faire, on y remplace z_k , qui est défini par les expressions (3.13), par l'expression :

$$z_k = \exp(2ix_k) \quad \text{où} \quad x_k = \frac{\varphi_k}{2} = \frac{k\pi}{2(n+1)} \quad (3.34)$$

En utilisant les notations suivantes :[40]

$$\begin{aligned} R_k &= \prod_j \rho_{jk}, \quad \rho_{jk} = (1 - (2u_j v_j)^2 \sin^2 x_k)^{\frac{1}{2}}, \\ \psi_k &= [\Omega - 2P] x_k + \sum_j \varphi_{jk}, \quad \tan \varphi_{jk} = -(u_j^2 - v_j^2) \tan x_k \end{aligned} \quad (3.35)$$

la condition de normalisation s'écrit :

$$C_n^{-2} = 4(n+1) \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k R_k \psi_k \quad (3.36)$$

La valeur moyenne de l'opérateur hamiltonien, représentant le niveau fondamental, s'écrit finalement :

$$E_n = 4(n+1) C_n^2 \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k \left[2 \sum_{j>0} (\epsilon_j - \frac{G v_j^2}{2}) v_j^2 R_i^j \cos \psi_k^j - G \sum_{j,m>0} u_j u_m v_j v_m R_i^{jm} \cos \psi_k^{jm} \right] \quad (3.37)$$

avec :

$$R_k^{\nu\mu} = \frac{R_k}{\rho_{\nu k} \rho_{\mu k}}, \quad \psi_k^{\nu\mu} = \psi_k - \varphi_{\nu k} - \varphi_{\mu k} \quad (3.38)$$

3.2 Systèmes ayant un nombre impair de particules

Pour de tels systèmes, le nombre de nucléons est égal à $N = 2P + 1$. Dans ce cas, l'expression du projecteur est donnée par :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\varphi(\mathbf{N} - 2P - 1)) d\varphi \quad (3.39)$$

La discrétisation de ce projecteur, s'effectue de manière analogue à celle effectuée dans le cas des systèmes pairs, et le projecteur discrétisé obtenu s'écrit dans ce cas :

$$\mathcal{P}_n = \frac{1}{2(n+1)} \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-(P+\frac{1}{2})} \prod_j [1 + n_j(\sqrt{z_k} - 1)] + c.c \right\} \quad (3.40)$$

avec les mêmes notations que celles utilisées dans les paragraphes précédents.

3.2.1 Projection de l'état fondamental

L'état fondamental qui décrit des systèmes avec un nombre impair de particules, dans le cadre de l'appariement entre particules identiques, a été donné au premier chapitre dans l'expression (1.27), c'est-à-dire :

$$|\nu\rangle = \alpha_\nu^+ |BCS\rangle_\nu = a_\nu^+ \prod_{\substack{j>0 \\ j\neq\nu}} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle$$

La projection de cet état, consiste à lui appliquer le projecteur défini précédemment, c'est-à-dire celui donné par l'expression (3.40). On détermine ainsi l'état fondamental projeté, décrivant des systèmes avec un nombre impair de particules, il est donné par :

$$|\nu_n\rangle = C_{\nu n} \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} a_\nu^+ \prod_{\substack{j>0 \\ j\neq\nu}} (u_j + z_k v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle + c.c \right\} \quad (3.41)$$

où $C_{\nu n}$ est la constante de normalisation, définie par :

$$C_{\nu n}^{-2} = 2(n+1) \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} \prod_{\substack{j>0 \\ j\neq\nu}} (u_j^2 + z_k v_j^2) + c.c \right\} \quad (3.42)$$

qui devient après extraction de la partie réelle :

$$C_{\nu n}^{-2} = 4(n+1) \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k R_k^\nu \psi_k^\nu \quad (3.43)$$

3.2.2 Calcul des valeurs moyennes

La propriété des opérateurs conservant le nombre de particules sera utilisée, de manière similaire aux calculs précédents. Dans le souci d'alléger le texte, et d'éviter les répétitions, on omettra de donner les détails du calcul, qui sont en tous points analogues à ceux des calculs effectués pour les systèmes avec un nombre pair de particules. Toutefois, en donnant les résultats et après extraction de la partie réelle, on illustrera les différences existant entre ces calculs et ceux qui les précèdent.

La valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules est donnée par :

$$\langle \nu_n | \mathbf{N} | \nu_n \rangle = 2(n+1)C_{\nu n}^2 \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} \left[\prod_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} (u_j^2 + z_k v_j^2) + 2 \sum_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} v_j^2 z_k \prod_{\substack{l>0 \\ l \neq \nu, j}} (u_l^2 + z_k v_l^2) \right] + c.c \right\} \quad (3.44)$$

Une fois la partie réelle extraite, cette valeur moyenne devient :

$$\langle \nu_n | \mathbf{N} | \nu_n \rangle = 1 + 8(n+1)C_{\nu n}^2 \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k \sum_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} v_j^2 R_i^{\nu j} \cos \psi_k^{\nu j} \quad (3.45)$$

La valeur moyenne de l'opérateur hamiltonien est donnée quant à elle par :

$$E_n(\nu) = \langle \nu_n | H | \nu_n \rangle = \epsilon_\nu + 2(n+1)C_{\nu n}^2 \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k z_k^{-P} E(z_k) + c.c \right\} \quad (3.46)$$

avec

$$E(z_k) = 2 \sum_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} (\epsilon_j - \frac{Gv_j^2}{2}) v_j^2 z_k \prod_{\substack{l>0 \\ l \neq j}} (u_l^2 + z_k v_l^2) - G \sum_{\substack{j,m>0 \\ j,m \neq \nu}} z_k u_j u_m v_j v_m \prod_{\substack{l>0 \\ l \neq \nu, j, m}} (u_l^2 + z_k v_l^2) \quad (3.47)$$

Après extraction de la partie réelle, cette valeur moyenne devient :

$$E_n(\nu) = \epsilon_\nu + 2(n+1)C_{\nu n}^2 \sum_{k=0}^{n+1} \xi_k \left[4 \sum_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} (\epsilon_j - \frac{Gv_j^2}{2}) v_j^2 R_i^{\nu j} \cos \psi_k^{\nu j} - 2G \sum_{\substack{j,m>0 \\ j,m \neq \nu}} u_j u_m v_j v_m R_i^{\nu jm} \cos \psi_k^{\nu jm} \right] \quad (3.48)$$

Le fait remarquable dans les résultats qui précèdent, est l'apparition de la particule bloquée, dans les valeurs moyennes des opérateurs nombre de particules et hamiltonien. En effet, la valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules s'écrit comme la somme de l'occupation (avec une probabilité égale à l'unité) de la particule bloquée et d'un cœur formé par un nombre pair de particules, quant à l'énergie du fondamental, elle s'écrit comme la somme de l'énergie de la même particule bloquée, et de l'énergie du cœur. Ceci conforte nos résultats, du moment que l'on a souligné au premier chapitre, que l'on utilise la méthode du blocage de Whalborn, dans laquelle on bloque une particule sur un niveau donné, et où l'on effectue les calculs sur le cœur, les propriétés de la particule bloquée étant connues avec certitude.

3.3 Appariement isovectoriel pour les systèmes pair-pairs

3.3.1 Projection de l'état fondamental

L'état fondamental décrivant de tels systèmes est l'état $|\Psi\rangle$ donné par l'expression (2.31). Pour projeter cet état sur le bon nombre de particules, on utilise les mêmes projecteurs écrits sous leur forme discrète, utilisés dans les paragraphes précédents, en projetant cependant cet état deux fois de suite, une fois en utilisant un projecteur sur le bon nombre de neutrons, et une autre en utilisant celui sur le bon nombre de protons[40]. L'ordre dans lequel on applique les projecteurs n'est pas important, du fait qu'ils commutent entre eux. En effet, ces projecteurs s'expriment comme suit :

$$\mathcal{P}_n = \frac{1}{2(m+1)} \left\{ \sum_{k=0}^{m+1} \xi_k z_k^{-P_N} \prod_j [1 + n_{jn}(\sqrt{z_k} - 1)] + c.c \right\} \quad (3.49)$$

pour les neutrons, et :

$$\mathcal{P}_p = \frac{1}{2(m'+1)} \left\{ \sum_{k'=0}^{m'+1} \xi_{k'} z_{k'}^{-P_Z} \prod_j [1 + n_{jp}(\sqrt{z_{k'}} - 1)] + c.c \right\} \quad (3.50)$$

pour les protons, sachant que P_Z (P_N) représente le nombre de paires de protons (neutrons) présents dans le système étudié, et où l'on a :

$$\mathbf{N} = \sum_{j>0,t} (a_{jt}^+ a_{jt} + a_{\tilde{j}t}^+ a_{\tilde{j}t}) = \sum_{j>0,t} (n_{jt} + n_{\tilde{j}t}) = \sum_{j,t} n_{jt} \quad , \quad t = n, p \quad (3.51)$$

Commençons par appliquer le produit d'opérateurs contenu dans le projecteur \mathcal{P}_p à l'état $|\Psi\rangle$, cela donne :

$$\begin{aligned} \prod_{j>0} [1 + n_{jp}(\sqrt{z_{k'}} - 1)] [1 + n_{\tilde{j}p}(\sqrt{z_{k'}} - 1)] |\Psi\rangle &= \prod_{j>0} [1 + n_{jp}(\sqrt{z_{k'}} - 1)] [1 + n_{\tilde{j}p}(\sqrt{z_{k'}} - 1)] |\Psi_j\rangle \\ &= \prod_{j>0} \left[z_{k'} B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + z_{k'} B_p^j A_{jp}^+ + B_n^j A_{jn}^+ + \sqrt{z_{k'}} B_4^j (a_{jp}^+ a_{jn}^+ + a_{jn}^+ a_{jp}^+) + B_5^j \right] |0\rangle \end{aligned}$$

On applique ensuite le produit d'opérateurs contenu dans le projecteur \mathcal{P}_n , ce qui

donne finalement :

$$\mathcal{P}_n \mathcal{P}_p |\Psi\rangle = |\Psi\rangle_{mm'} = C_{mm'} \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{k'=0}^{m'+1} \xi_k \xi_{k'} \left\{ z_k^{-P_N} z_{k'}^{-P_Z} |\Psi(z_k, z_{k'})\rangle + \bar{z}_k^{-P_N} \bar{z}_{k'}^{-P_Z} |\Psi(\bar{z}_k, z_{k'})\rangle + c.c \right\} \quad (3.52)$$

où :

$$|\Psi(z_k, z_{k'})\rangle = \prod_{j>0} |\Psi_j(z_k, z_{k'})\rangle \quad (3.53)$$

avec :

$$|\Psi_j(z_k, z_{k'})\rangle = \left\{ z_k z_{k'} B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + z_{k'} B_p^j A_{jp}^+ + z_k B_n^j A_{jn}^+ + \sqrt{z_k z_{k'}} B_4^j (a_{jp}^+ a_{jn}^+ + a_{jn}^+ a_{jp}^+) + B_5^j \right\} |0\rangle \quad (3.54)$$

et $C_{mm'}$ étant la constante de normalisation donnée par :

$$C_{mm'}^{-2} = 4(m+1)(m'+1) \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{k'=0}^{m'+1} \xi_k \xi_{k'} \left\{ z_k^{-P_N} z_{k'}^{-P_Z} \prod_{j>0} A_j(z_k, z_{k'}) + \bar{z}_k^{-P_N} \bar{z}_{k'}^{-P_Z} \prod_{j>0} A_j(\bar{z}_k, z_{k'}) + c.c \right\} \quad (3.55)$$

où, dans le but d'alléger l'écriture, on a posé :

$$A_j(z_k, z_{k'}) = \left\{ z_k z_{k'} (B_1^j)^2 + z_{k'} (B_p^j)^2 + z_k (B_n^j)^2 + 2\sqrt{z_k z_{k'}} (B_4^j)^2 + (B_5^j)^2 \right\} \quad (3.56)$$

sachant que le terme \bar{z}_k désigne le complexe conjugué du terme z_k . Cet état représente l'état fondamental du système projeté ayant le bon nombre de protons Z et le bon nombre de neutrons N .

3.3.2 Calcul des valeurs moyennes

Comme signalé précédemment, la propriété des opérateurs conservant le nombre de particules[40] sera utilisée tout au long de ce chapitre. Dans le cas de l'appariement isovectoriel, elle s'écrit :

$$\langle \Psi_{mm'} | \hat{O} | \Psi_{mm'} \rangle = 4(m+1)(m'+1) C_{mm'} \langle \Psi_{mm'} | \hat{O} | \Psi \rangle = 4(m+1)(m'+1) C_{mm'} \langle \Psi | \hat{O} | \Psi_{mm'} \rangle \quad (3.57)$$

avec \hat{O} opérateur conservant le nombre particules, et $|\Psi_{mm'}\rangle$ état projeté de l'état $|\Psi\rangle$. Le reste des calculs est exactement analogue à celui effectué dans le cas de l'appariement entre particules identiques, c'est-à-dire que l'on a à effectuer le calcul des valeurs moyennes des opérateurs nombre de particules et hamiltonien, et d'y extraire les parties réelles.

Opérateur nombre de particules

On utilise l'opérateur nombre de particules donné par l'expression (2.5). Appliquons d'abord le terme $a_{jt}^+ a_{jt}$ à l'état $|\Psi\rangle$, on obtient :

$$a_{jt}^+ a_{jt} |\Psi\rangle = \left\{ \delta_{tp} \left(B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + B_p^j A_{jp}^+ + B_4^j a_{jn}^+ a_{jp}^+ \right) + \delta_{tn} \left(B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + B_n^j A_{jn}^+ + B_4^j a_{jp}^+ a_{jn}^+ \right) \right\} \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j}} |\Psi_i\rangle \quad (3.58)$$

En sommant sur tous les j , en multipliant scalairement par $|\Psi_{mm'}\rangle$ et en exploitant la relation (3.57), il vient :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{mm'} | \sum_{j>0,t} a_{jt}^+ a_{jt} | \Psi_{mm'} \rangle &= 4(m+1)(m'+1) C_{mm'}^2 \quad (3.59) \\ &\times \sum_{k=0}^{m+1m'+1} \sum_{k'=0} \xi_k \xi_{k'} \left\{ z_k^{-P_N} z_{k'}^{-P_Z} N(z_k, z_{k'}) + \bar{z}_k^{-P_N} \bar{z}_{k'}^{-P_Z} N(\bar{z}_k, \bar{z}_{k'}) + c.c \right\} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} N(z_k, z_{k'}) &= \sum_{j>0,t} \left\{ \delta_{tp} \left[z_k z_{k'} (B_1^j)^2 + z_{k'} (B_p^j)^2 + \sqrt{z_k z_{k'}} (B_4^j)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \delta_{tn} \left[z_k z_{k'} (B_1^j)^2 + z_k (B_n^j)^2 + \sqrt{z_k z_{k'}} (B_4^j)^2 \right] \right\} \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j}} A_i(z_k, z_{k'}) \quad (3.60) \end{aligned}$$

De la même manière, on détermine :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{mm'} | \sum_{j>0,t} a_{jt}^+ a_{jt} | \Psi_{mm'} \rangle &= 4(m+1)(m'+1) C_{mm'}^2 \quad (3.61) \\ &\times \sum_{k=0}^{m+1m'+1} \sum_{k'=0} \xi_k \xi_{k'} \left\{ z_k^{-P_N} z_{k'}^{-P_Z} N(z_k, z_{k'}) + \bar{z}_k^{-P_N} \bar{z}_{k'}^{-P_Z} N(\bar{z}_k, \bar{z}_{k'}) + c.c \right\} \end{aligned}$$

on a donc :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{mm'} | \mathbf{N} | \Psi_{mm'} \rangle &= 8(m+1)(m'+1) C_{mm'}^2 \quad (3.62) \\ &\times \sum_{k=0}^{m+1m'+1} \sum_{k'=0} \xi_k \xi_{k'} \left\{ z_k^{-P_n} z_{k'}^{-P_z} N(z_k, z_{k'}) + \bar{z}_k^{-P_n} \bar{z}_{k'}^{-P_z} N(\bar{z}_k, \bar{z}_{k'}) + c.c \right\} \end{aligned}$$

Opérateur hamiltonien

L'hamiltonien du système est donné par l'expression (2.2), c'est-à-dire :

$$H = \sum_{j>0,t} \varepsilon_{jt} (a_{jt}^+ a_{jt} + a_{jt}^+ a_{\bar{j}t}) - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{j,l>0} (a_{jt}^+ a_{jt}^+ a_{\bar{l}t'} a_{lt} + a_{jt}^+ a_{\bar{j}t}^+ a_{\bar{l}t'} a_{lt'})$$

La valeur moyenne du premier terme se déduit directement de la valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules, on l'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{mm'} | \sum_{j>0,t} \varepsilon_{jt} (a_{jt}^+ a_{jt} + a_{jt}^+ a_{\bar{j}t}) | \Psi_{mm'} \rangle &= 4(m+1)(m'+1) C_{mm'}^2 \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{k'=0}^{m'+1} \xi_k \xi_{k'} \quad (3.63) \\ &\times (z_k^{-P_N} z_{k'}^{-P_Z} \sum_{j>0} E_0^j(z_k, z_{k'}) \prod_{i \neq j} A_i(z_k, z_{k'}) \\ &+ \bar{z}_k^{-P_N} \bar{z}_{k'}^{-P_Z} \sum_{j>0} E_0^j(\bar{z}_k, \bar{z}_{k'}) \prod_{i \neq j} A_i(z_k, z_{k'}) + c.c) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} E_0^j(z_k, z_{k'}) &= 2\{\varepsilon_{jp} [z_k z_{k'} (B_1^j)^2 + z_{k'} (B_p^j)^2 + \sqrt{z_k z_{k'}} (B_4^j)^2] \\ &+ \varepsilon_{jn} [z_k z_{k'} (B_1^j)^2 + z_k (B_n^j)^2 + \sqrt{z_k z_{k'}} (B_4^j)^2]\} \quad (3.64) \end{aligned}$$

Passons à présent au calcul de la valeur moyenne du terme d'appariement, pour cela, on le réécrit sous la forme d'une somme de quatre termes, tel que donné par l'équation (2.42), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} H_{app} &= -\frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{j>0} (a_{jt}^+ a_{\bar{j}t}^+ a_{\bar{j}t'} a_{jt} + a_{jt}^+ a_{\bar{j}t}^+ a_{\bar{j}t} a_{jt'}) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} (a_{jt}^+ a_{\bar{j}t}^+ a_{\bar{l}t'} a_{lt} + a_{jt}^+ a_{\bar{j}t}^+ a_{\bar{l}t} a_{lt'}) \end{aligned}$$

Les calculs étant longs et sans difficultés majeures, ils sont donnés en annexe. On donne alors dans ce qui suit directement le résultat final pour l'énergie projetée[40], et qu'on écrit sous la forme :

$$E_{m,m'} = 4(m+1)(m'+1) C_{mm'}^2 \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{k'=0}^{m'+1} \xi_k \xi_{k'} \left[z_k^{-P_N} z_{k'}^{-P_Z} E(z_k, z_{k'}) + \bar{z}_k^{-P_N} \bar{z}_{k'}^{-P_Z} E(\bar{z}_k, \bar{z}_{k'}) + c.c \right] \quad (3.65)$$

avec :

$$\begin{aligned}
E(z_k, z_{k'}) &= \sum_{j>0} (E_0^j(z_k, z_{k'}) - G_{nn}E_n^j(z_{k'}) - G_{pp}E_p^j(z_k) - G_{np}E_{np}^j(z_k, z_{k'})) \prod_{i \neq j} A_i(z_k, z_{k'}) \\
&\quad - \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} (G_{nn}z_k F_n^j(z_{k'}) F_n^l(z_{k'}) + G_{pp}z_{k'} F_p^j(z_k) F_p^l(z_k)) \\
&\quad + 2G_{np}\sqrt{z_k z_{k'}} F_{np}^j(z_k, z_{k'}) F_{np}^l(z_k, z_{k'}) \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l}} A_i(z_k, z_{k'}) \tag{3.66}
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
E_0^j(z_k, z_{k'}) &= 2 \left\{ \left[(B_1^j)^2 z_k z_{k'} + (B_4^j)^2 \sqrt{z_k z_{k'}} \right] (\varepsilon_{jn} + \varepsilon_{jp}) + (B_n^j)^2 z_k \varepsilon_{jn} + (B_p^j)^2 z_{k'} \varepsilon_{jp} \right\} \\
E_n^j(z_{k'}) &= z_k \left[(B_1^j)^2 z_{k'} + (B_n^j)^2 \right] \quad ; \quad F_n^j(z_{k'}) = B_1^j B_p^j z_{k'} + B_n^j B_5^j \\
E_p^j(z_k) &= z_{k'} \left[(B_1^j)^2 z_k + (B_p^j)^2 \right] \quad ; \quad F_p^j(z_k) = B_1^j B_n^j z_k + B_p^j B_5^j \tag{3.67} \\
E_{np}^j(z_k, z_{k'}) &= \sqrt{z_k z_{k'}} \left[(B_1^j)^2 \sqrt{z_k z_{k'}} + 2(B_4^j)^2 \right] \quad ; \quad F_{np}^j(z_k, z_{k'}) = B_4^j (B_1^j \sqrt{z_k z_{k'}} - B_5^j)
\end{aligned}$$

et où $A_i(z_k, z_{k'})$ est donné par l'expression (3.56).

3.3.3 Extraction de la partie réelle

On utilise les mêmes notations que celles utilisées dans le cadre de l'appariement entre particules identiques, et dans ce cas, la condition de normalisation s'écrit :

$$(C_{mm'})^{-2} = 8(m+1)(m'+1) \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{k'=0}^{m'+1} \xi_k \xi_{k'} [\rho(x_k, x_{k'}) \cos \theta(x_k, x_{k'}) + \rho(-x_k, x_{k'}) \cos \theta(-x_k, x_{k'})] \tag{3.68}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\rho(x_k, x_{k'}) &= \prod_{j>0} \rho_j(x_k, x_{k'}) \quad , \quad \varphi(x_k, x_{k'}) = \sum_{j>0} \varphi_j(x_k, x_{k'}) \\
\rho_j(x_k, x_{k'}) &= \sqrt{(a^{(j)})^2 + (b^{(j)})^2} \quad , \quad \tan \varphi_j(x_k, x_{k'}) = \frac{b^{(j)}}{a^{(j)}} \tag{3.69}
\end{aligned}$$

où :

$$a^{(j)} = (B_1^j)^2 \cos(2x_k + 2x_{k'}) + (B_p^j)^2 \cos 2x_{k'} + (B_n^j)^2 \cos 2x_k + 2(B_4^j)^2 \cos(x_k + x_{k'}) + (B_5^j)^2$$

$$b^{(j)} = (B_1^j)^2 \sin(2x_k + 2x_{k'}) + (B_p^j)^2 \sin 2x_{k'} + (B_n^j)^2 \sin 2x_k + 2(B_4^j)^2 \sin(x_k + x_{k'}) \quad (3.70)$$

La valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules est donnée par :

$$\langle \Psi_{mm'} | \mathbf{N} | \Psi_{mm'} \rangle = 16(m+1)(m'+1)C_{mm'}^2 \sum_{k=0}^{m+1m'+1} \sum_{k'=0} \xi_k \xi_{k'} \sum_{j>0} [N_J(x_k, x_{k'}) + N_J(-x_k, x_{k'})] \quad (3.71)$$

où :

$$N_J(x_k, x_{k'}) = \frac{\rho(x_k, x_{k'})}{\rho_j(x_k, x_{k'})} \{ 2(B_1^j)^2 \cos \theta_{j22}(x_k, x_{k'}) + (B_p^j)^2 \cos \theta_{j02}(x_k, x_{k'}) + (B_n^j)^2 \cos \theta_{j20}(x_k, x_{k'}) + 2(B_4^j)^2 \cos \theta_{j11}(x_k, x_{k'}) \} \quad (3.72)$$

et où :

$$\begin{aligned} \theta(x_k, x_{k'}) &= -2P_N x_k - 2P_Z x_{k'} + \varphi(x_k, x_{k'}) \\ \theta_{i\dots j}(x_k, x_{k'}) &= \theta(x_k, x_{k'}) - \varphi_i(x_k, x_{k'}) - \dots - \varphi_j(x_k, x_{k'}) \\ \theta_{iqr}(x_k, x_{k'}) &= \theta_i(x_k, x_{k'}) + qx_k + rx_{k'} \quad , \quad \theta_{i\dots jqr}(x_k, x_{k'}) = \theta_{i\dots j}(x_k, x_{k'}) + qx_k + rx_{k'} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Enfin, la valeur moyenne de l'hamiltonien s'écrit :

$$E_{m,m'} = 8(m+1)(m'+1)C_{mm'}^2 \sum_{k=0}^{m+1m'+1} \sum_{k'=0} \xi_k \xi_{k'} \{ \sum_{j>0} [\varepsilon_j(x_k, x_{k'}) + \varepsilon_j(-x_k, x_{k'})] + \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} [\varepsilon_{jl}(x_k, x_{k'}) + \varepsilon_{jl}(-x_k, x_{k'})] \} \quad (3.74)$$

où :

$$\begin{aligned} \varepsilon_j(x_k, x_{k'}) &= \frac{\rho(x_k, x_{k'})}{\rho_j(x_k, x_{k'})} \{ R_0^j(x_k, x_{k'}) \cos \Phi_0^j(x_k, x_{k'}) \\ &\quad - G_{nn} R_n^j(x_{k'}) \cos \Phi_n^j(x_k, x_{k'}) - G_{pp} R_p^j(x_k) \cos \Phi_p^j(x_k, x_{k'}) \\ &\quad - G_{np} R_{np}^j(x_k, x_{k'}) \cos \Phi_{np}^j(x_k, x_{k'}) \} \end{aligned} \quad (3.75)$$

et :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{jl}(x_k, x_{k'}) &= \frac{\rho(x_k, x_{k'})}{\rho_j(x_k, x_{k'}) \rho_l(x_k, x_{k'})} \{ -G_{nn} Q_n^j(x_{k'}) Q_n^l(x_{k'}) \cos \Phi_n^{jl}(x_k, x_{k'}) \\ &\quad - G_{pp} Q_p^j(x_k) Q_p^l(x_k) \cos \Phi_p^{jl}(x_k, x_{k'}) \\ &\quad - 2G_{np} Q_{np}^j(x_k, x_{k'}) Q_{np}^l(x_k, x_{k'}) \cos \Phi_{np}^{jl}(x_k, x_{k'}) \} \end{aligned} \quad (3.76)$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
R_0^j(x_k, x_{k'}) &= \sqrt{(a_0^{(j)})^2 + (b_0^{(j)})^2} \quad ; \quad \eta_0^j(x_k, x_{k'}) = \arctan\left(\frac{b_0^{(j)}}{a_0^{(j)}}\right) \\
R_{i1}^j(x_k, x_{k'}) &= \sqrt{(a_{i1}^{(j)})^2 + (b_{i1}^{(j)})^2} \quad ; \quad \eta_{i1}^j(x_k, x_{k'}) = \arctan\left(\frac{b_{i1}^{(j)}}{a_{i1}^{(j)}}\right) \\
Q_{i2}^j(x_k, x_{k'}) &= \sqrt{(a_{i2}^{(j)})^2 + (b_{i2}^{(j)})^2} \quad ; \quad \delta_{i2}^j(x_k, x_{k'}) = \arctan\left(\frac{b_{i2}^{(j)}}{a_{i2}^{(j)}}\right) \quad (3.77) \\
i &= n, p, np
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_0^j(x_k, x_{k'}) &= \theta_j(x_k, x_{k'}) + \eta_0^j(x_k, x_{k'}) \\
\Phi_n^j(x_k, x_{k'}) &= \theta_j(x_k, x_{k'}) + \eta_n^j(x_{k'}) + 2x_k \\
\Phi_p^j(x_k, x_{k'}) &= \theta_j(x_k, x_{k'}) + \eta_p^j(x_k) + 2x_{k'} \\
\Phi_{np}^j(x_k, x_{k'}) &= \theta_j(x_k, x_{k'}) + \eta_{np}^j(x_k, x_{k'}) \quad (3.78) \\
\Phi_n^{jl}(x_k, x_{k'}) &= \theta_{jl}(x_k, x_{k'}) + \delta_n^j(x_{k'}) + \delta_n^l(x_{k'}) + 2x_k \\
\Phi_p^{jl}(x_k, x_{k'}) &= \theta_{jl}(x_k, x_{k'}) + \delta_p^j(x_k) + \delta_p^l(x_k) + 2x_{k'} \\
\Phi_{np}^{jl}(x_k, x_{k'}) &= \theta_{jl}(x_k, x_{k'}) + \delta_{np}^j(x_k, x_{k'}) + \delta_{np}^l(x_k, x_{k'}) + x_k + x_{k'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0^{(j)} &= 2(B_1^j)^2 (\varepsilon_{jn} + \varepsilon_{jp}) \cos(2x_k + 2x_{k'}) + 2(B_p^j)^2 \varepsilon_{jp} \cos 2x_{k'} \\
&\quad + 2(B_n^j)^2 \varepsilon_{jn} \cos 2x_k + 2(B_4^j)^2 (\varepsilon_{jn} + \varepsilon_{jp}) \cos(x_k + x_{k'}) \\
b_0^{(j)} &= 2(B_1^j)^2 (\varepsilon_{jn} + \varepsilon_{jp}) \sin(2x_k + 2x_{k'}) + 2(B_p^j)^2 \varepsilon_{jp} \sin 2x_{k'} \quad (3.79) \\
&\quad + 2(B_n^j)^2 \varepsilon_{jn} \sin 2x_k + 2(B_4^j)^2 (\varepsilon_{jn} + \varepsilon_{jp}) \sin(x_k + x_{k'})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{n1}^{(j)} &= (B_1^j)^2 \cos 2x_{k'} + (B_n^j)^2 \quad ; \quad a_{p1}^{(j)} = (B_1^j)^2 \cos 2x_k + (B_p^j)^2 \\
b_{n1}^{(j)} &= (B_1^j)^2 \sin 2x_{k'} \quad ; \quad b_{p1}^{(j)} = (B_1^j)^2 \sin 2x_k \quad (3.80)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{np1}^{(j)} &= (B_1^j)^2 \cos(2x_k + 2x_{k'}) + 2(B_4^j)^2 \cos(x_k + x_{k'}) \\
b_{np1}^{(j)} &= (B_1^j)^2 \sin(2x_k + 2x_{k'}) + 2(B_4^j)^2 \sin(x_k + x_{k'}) \quad (3.81)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{n2}^{(j)} &= B_1^j B_p^j \cos 2x_{k'} + B_n^j B_5^j \quad ; \quad a_{p2}^{(j)} = B_1^j B_n^j \cos 2x_k + B_p^j B_5^j \\
b_{n2}^{(j)} &= B_1^j B_p^j \sin 2x_{k'} \quad ; \quad b_{p2}^{(j)} = B_1^j B_n^j \sin 2x_k \quad (3.82)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{np2}^{(j)} &= B_1^j B_4^j \cos(x_k + x_{k'}) - B_4^j B_5^j \\
b_{np2}^{(j)} &= B_1^j B_4^j \sin(x_k + x_{k'})
\end{aligned} \tag{3.83}$$

3.4 Systèmes ayant un nombre impair de particules

3.4.1 Etat fondamental projeté

L'état fondamental non projeté d'un système avec un nombre impair de particules, déterminé à l'aide de la méthode du blocage de Whalborn, est donné par l'expression (2.34), c'est-à-dire :

$$|\nu T\rangle = a_{\nu T}^+ \prod_{j \neq \nu} |\Psi_j\rangle \quad , \quad T = n, p$$

où T désigne le type de la particule célibataire, et qui est bloquée sur le niveau $|\nu\rangle$ du modèle à particules indépendantes. Pour ce qui suit, considérons un système avec un nombre impair Z de protons, et un nombre pair N de neutrons. Pour les systèmes où les particules en nombre impair sont les neutrons, il suffira d'exploiter les mêmes résultats en permutant entre les protons et les neutrons, ceci étant dû à la symétrie d'écriture de l'hamiltonien dans les deux cas de figures. On utilise donc les projecteurs suivants :

$$\mathcal{P}_n = \frac{1}{2(m+1)} \left\{ \sum_{k=0}^{m+1} \xi_k z_k^{-PN} \prod_j [1 + n_{jN}(\sqrt{z_k} - 1)] + c.c \right\} \tag{3.84}$$

pour le système de neutrons, et :

$$\mathcal{P}_p = \frac{1}{2(m'+1)} \left\{ \sum_{k'=0}^{m'+1} \xi_{k'} z_{k'}^{-(PZ+\frac{1}{2})} \prod_j [1 + n_{jP}(\sqrt{z_{k'}} - 1)] + c.c \right\} \tag{3.85}$$

pour le système de protons.

On commence par appliquer le projecteur \mathcal{P}_p à l'état $|\nu T\rangle$, et ensuite le projecteur \mathcal{P}_n . En agissant de la même manière dans le cas inverse, c'est-à-dire le cas où les protons sont en nombre impair, on détermine l'état fondamental projeté

pour les deux cas de figures, et il est donné par :

$$\begin{aligned} |\nu T_{mm'}\rangle &= C_{\nu mm'} \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{k'=0}^{m'+1} \xi_k \xi_{k'} a_{\nu\tau}^+ \left\{ z_k^{-P_N} z_{k'}^{-P_Z} |\Psi(z_k, z_{k'})\rangle_\nu + \bar{z}_k^{-P_N} \bar{z}_{k'}^{-P_Z} |\Psi(\bar{z}_k, \bar{z}_{k'})\rangle_\nu + c.c \right\} \\ T &= n, p \end{aligned} \quad (3.86)$$

où :

$$|\Psi(z_k, z_{k'})\rangle_\nu = \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq \nu}} |\Psi_i(z_k, z_{k'})\rangle \quad (3.87)$$

avec :

$$|\Psi_i(z_k, z_{k'})\rangle = \left\{ z_k z_{k'} B_1^i A_{ip}^+ A_{in}^+ + z_{k'} B_p^i A_{ip}^+ + z_k B_n^i A_{in}^+ + \sqrt{z_k z_{k'}} B_4^i (a_{ip}^+ a_{in}^+ + a_{in}^+ a_{ip}^+) + B_5^i \right\} |0\rangle \quad (3.88)$$

$C_{\nu mm'}$ est la constante de normalisation, donnée par :

$$C_{\nu mm'}^{-2} = 4(m+1)(m'+1) \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{k'=0}^{m'+1} \xi_k \xi_{k'} \left\{ z_k^{-P_N} z_{k'}^{-P_Z} \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} A_j(z_k, z_{k'}) + \bar{z}_k^{-P_N} \bar{z}_{k'}^{-P_Z} \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} A_j(\bar{z}_k, \bar{z}_{k'}) + c.c \right\} \quad (3.89)$$

3.4.2 Calcul des valeurs moyennes

Opérateur nombre de particules

Comme pour les paragraphes précédents, pour l'opérateur nombre de particules, on utilise l'expression (2.5). On commence par appliquer le terme $a_{jt}^+ a_{jt}$ à l'état $|\nu T\rangle$, cela donne :

$$\begin{aligned} a_{jt}^+ a_{jt} |\nu T\rangle &= \delta_{j\nu} \delta_{t\nu} |\nu T\rangle + a_{\nu T}^+ \left\{ \delta_{tp} \left[B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + B_p^j A_{jp}^+ + B_4^j a_{jn}^+ a_{jp}^+ \right] \right. \\ &\quad \left. + \delta_{tn} \left[B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + B_n^j A_{jn}^+ + B_4^j a_{jp}^+ a_{jn}^+ \right] \right\} \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j, \nu}} |\Psi_i\rangle \end{aligned} \quad (3.90)$$

On somme sur tous les j et les t , on multiplie scalairement par $|\nu T_{mm'}\rangle$ et en exploitant la relation des opérateurs conservant le nombre de particules, ainsi

que la condition de normalisation donnée par l'expression (3.89), il vient :

$$\begin{aligned} \langle \nu T_{mm'} | \sum_{j>0,t} a_{jt}^+ a_{jt} | \nu T_{mm'} \rangle &= 1 + 4(m+1)(m'+1)C_{\nu mm'}^2 \\ &\times \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{k'=0}^{m'+1} \xi_k \xi_{k'} \left\{ z_k^{-PN} z_{k'}^{-PZ} N^\nu(z_k, z_{k'}) + \bar{z}_k^{-PN} \bar{z}_{k'}^{-PZ} N^\nu(\bar{z}_k, z_{k'}) + c.c \right\} \end{aligned} \quad (3.91)$$

où :

$$\begin{aligned} N^\nu(z_k, z_{k'}) &= \sum_{\substack{j>0,t \\ j \neq \nu}} \{ \delta_{tp} [z_k z_{k'} (B_1^j)^2 + z_{k'} (B_p^j)^2 + \sqrt{z_k z_{k'}} (B_4^j)^2] \\ &+ \delta_{tn} [z_k z_{k'} (B_1^j)^2 + z_k (B_n^j)^2 + \sqrt{z_k z_{k'}} (B_4^j)^2] \} \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j, \nu}} A_i(z_k, z_{k'}) \end{aligned} \quad (3.92)$$

On refait le même type de calcul pour le terme $\sum_{j>0,t} a_{jt}^+ a_{jt}$, en ajoutant cela au résultat précédent, la valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules est donnée par :

$$\begin{aligned} \langle \nu T_{mm'} | \mathbf{N} | \nu T_{mm'} \rangle &= 1 + 8(m+1)(m'+1)C_{\nu mm'}^2 \\ &\times \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{k'=0}^{m'+1} \xi_k \xi_{k'} \left\{ z_k^{-PN} z_{k'}^{-PZ} N^\nu(z_k, z_{k'}) + \bar{z}_k^{-PN} \bar{z}_{k'}^{-PZ} N^\nu(\bar{z}_k, z_{k'}) + c.c \right\} \end{aligned} \quad (3.93)$$

Opérateur hamiltonien

La valeur moyenne de l'opérateur hamiltonien est simple à calculer, aussi, dans le souci d'éviter les répétitions, on se contentera de donner le cheminement des étapes qui mènent au résultat. Si on utilise l'expression (2.2) pour l'hamiltonien, c'est-à-dire :

$$H = \sum_{j>0,t} \varepsilon_{jt} (a_{jt}^+ a_{jt} + a_{jt}^+ a_{jt}^-) - \frac{1}{2} \sum_{tt'} G_{tt'} \sum_{j,l>0} (a_{jt}^+ a_{jt}^+ a_{lt'} a_{lt} + a_{jt}^+ a_{jt}^+ a_{lt'} a_{lt'})$$

la valeur moyenne du premier terme se déduit de manière immédiate à partir de celle de l'opérateur nombre de particules. La valeur moyenne du terme d'appariement se calcule de manière analogue à celle effectuée pour les systèmes pair-pairs, à la différence près, que du fait de l'existence d'un niveau $|\nu\rangle$ bloqué, l'indice ν s'élimine automatiquement des sommes sur les indices j et l pendant les calculs. Ceci s'accorde donc bien avec nos hypothèses physiques selon lesquelles la par-

ticule bloquée reste célibataire, c'est-à-dire qu'elle ne subit pas d'appariement et qu'elle ne contribue donc pas au terme d'énergie correspondant. La valeur moyenne de l'opérateur hamiltonien est donc donnée par :

$$E_{m,m'} = \varepsilon_{\nu T} + 4(m+1)(m'+1)C_{\nu mm'}^2 \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{k'=0}^{m'+1} \xi_k \xi_{k'} \left[z_k^{-P_N} z_{k'}^{-P_Z} E^\nu(z_k, z_{k'}) + \bar{z}_k^{-P_N} \bar{z}_{k'}^{-P_Z} E^\nu(\bar{z}_k, \bar{z}_{k'}) + c.c. \right] \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} E^\nu(z_k, z_{k'}) &= \sum_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} (E_0^j(z_k, z_{k'}) - G_{nn} E_n^j(z_{k'}) - G_{pp} E_p^j(z_k) - G_{np} E_{np}^j(z_k, z_{k'})) \prod_{\substack{i \neq j \\ i \neq \nu}} A_i(z_k, z_{k'}) \\ &\quad - \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l \\ j \neq \nu}} (G_{nn} z_k F_n^j(z_{k'}) F_n^l(z_{k'}) + G_{pp} z_{k'} F_p^j(z_k) F_p^l(z_k)) \\ &\quad + 2G_{np} \sqrt{z_k z_{k'}} F_{np}^j(z_k, z_{k'}) F_{np}^l(z_k, z_{k'}) \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l \\ i \neq \nu}} A_i(z_k, z_{k'}) \end{aligned}$$

où les termes $E_i^j(z_k, z_{k'})$, $F_i^j(z_{k'})$, $F_i^j(z_k)$ et $F_i^j(z_k, z_{k'})$ (avec $i = n, p, np$) sont donnés par les mêmes expressions que celles utilisées pour les systèmes pair-pairs, c'est-à-dire les expressions (3.67). On remarque aussi que même si la particule bloquée ne contribue pas à l'énergie d'appariement, son énergie due à l'occupation du niveau $|\nu\rangle$ du modèle à particules indépendantes apparaît dans l'énergie totale.

3.4.3 Extraction de la partie réelle

L'extraction de la partie réelle est effectuée de manière analogue à celle effectuée pour les systèmes pair-pairs, cela donne pour la condition de normalisation :

$$C_{\nu mm'}^{-2} = 8(m+1)(m'+1) \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{k'=0}^{m'+1} \xi_k \xi_{k'} \left[\frac{\rho(x_k, x_{k'})}{\rho_\nu(x_k, x_{k'})} \cos \theta_\nu(x_k, x_{k'}) + \frac{\rho(-x_k, x_{k'})}{\rho_\nu(-x_k, x_{k'})} \cos \theta_\nu(-x_k, x_{k'}) \right] \quad (3.95)$$

La valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules est donnée par :

$$\langle \nu T_{mm'} | \mathbf{N} | \nu T_{mm'} \rangle = 1 + 16(m+1)(m'+1) C_{\nu mm'}^2 \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{k'=0}^{m'+1} \xi_k \xi_{k'} \sum_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} [N_J^\nu(x_k, x_{k'}) + N_J^\nu(-x_k, x_{k'})] \quad (3.96)$$

avec :

$$N_j^\nu(x_k, x_{k'}) = \frac{\rho(x_k, x_{k'})}{\rho_j(x_k, x_{k'})\rho_\nu(x_k, x_{k'})} \{2(B_1^j)^2 \cos \theta_{j\nu 22}(x_k, x_{k'}) + (B_p^j)^2 \cos \theta_{j\nu 02}(x_k, x_{k'}) \\ + (B_n^j)^2 \cos \theta_{j\nu 20}(x_k, x_{k'}) + 2(B_4^j)^2 \cos \theta_{j\nu 11}(x_k, x_{k'})\} \quad (3.97)$$

La valeur moyenne de l'hamiltonien est donnée par :

$$E_{m,m'} = \varepsilon_{\nu T} + 8(m+1)(m'+1)C_{\nu mm'}^2 \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{k'=0}^{m'+1} \xi_k \xi_{k'} \left\{ \sum_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} [\varepsilon_j^\nu(x_k, x_{k'}) + \varepsilon_j^\nu(-x_k, x_{k'})] \right. \\ \left. + \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l \\ j \neq \nu}} [\varepsilon_{jl}^\nu(x_k, x_{k'}) + \varepsilon_{jl}^\nu(-x_k, x_{k'})] \right\} \quad (3.98)$$

où :

$$\varepsilon_j^\nu(x_k, x_{k'}) = \frac{\rho(x_k, x_{k'})}{\rho_j(x_k, x_{k'})\rho_\nu(x_k, x_{k'})} \{R_0^j(x_k, x_{k'}) \cos \Phi_0^{j\nu}(x_k, x_{k'}) - G_{nn}R_n^j(x_{k'}) \cos \Phi_n^{j\nu}(x_k, x_{k'}) \\ - G_{pp}R_p^j(x_k) \cos \Phi_p^{j\nu}(x_k, x_{k'}) - G_{np}R_{np}^j(x_k, x_{k'}) \cos \Phi_{np}^{j\nu}(x_k, x_{k'})\} \quad (3.99)$$

et :

$$\varepsilon_{jl}^\nu(x_k, x_{k'}) = \frac{\rho(x_k, x_{k'})}{\rho_j(x_k, x_{k'})\rho_l(x_k, x_{k'})\rho_\nu(x_k, x_{k'})} \{-G_{nn}Q_n^j(x_{k'})Q_n^l(x_{k'}) \cos \Phi_n^{jl\nu}(x_k, x_{k'}) \\ - G_{pp}Q_p^j(x_k)Q_p^l(x_k) \cos \Phi_p^{jl\nu}(x_k, x_{k'}) \\ - 2G_{np}Q_{np}^j(x_k, x_{k'})Q_{np}^l(x_k, x_{k'}) \cos \Phi_{np}^{jl\nu}(x_k, x_{k'})\} \quad (3.100)$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi_0^{j\nu}(x_k, x_{k'}) &= \theta_{j\nu}(x_k, x_{k'}) + \eta_0^j(x_k, x_{k'}) \\ \Phi_n^{j\nu}(x_k, x_{k'}) &= \theta_{j\nu}(x_k, x_{k'}) + \eta_n^j(x_{k'}) + 2x_k \\ \Phi_p^{j\nu}(x_k, x_{k'}) &= \theta_{j\nu}(x_k, x_{k'}) + \eta_p^j(x_k) + 2x_{k'} \\ \Phi_{np}^{j\nu}(x_k, x_{k'}) &= \theta_{j\nu}(x_k, x_{k'}) + \eta_{np}^j(x_k, x_{k'}) \\ \Phi_n^{jl\nu}(x_k, x_{k'}) &= \theta_{jl\nu}(x_k, x_{k'}) + \delta_n^j(x_{k'}) + \delta_n^l(x_{k'}) + 2x_k \\ \Phi_p^{jl\nu}(x_k, x_{k'}) &= \theta_{jl\nu}(x_k, x_{k'}) + \delta_p^j(x_k) + \delta_p^l(x_k) + 2x_{k'} \\ \Phi_{np}^{jl\nu}(x_k, x_{k'}) &= \theta_{jl\nu}(x_k, x_{k'}) + \delta_{np}^j(x_k, x_{k'}) + \delta_{np}^l(x_k, x_{k'}) + x_k + x_{k'} \end{aligned} \quad (3.101)$$

Chapitre 4

Résultats numériques et discussion

Le formalisme mathématique permettant de tenir compte de l'appariement neutron-proton pour les noyaux de masse impaire, avec conservation du nombre de particules, ayant été mis au point dans les chapitres précédents, on consacra ce dernier chapitre aux tests numériques qui ont permis d'en vérifier la validité. En effet, en tenant compte des derniers résultats théoriques, des modifications ont été apportées aux codes de calcul existant au sein de notre laboratoire, codes qui permettent de calculer les différents paramètres auxquels on a eu affaire au cours de ce travail (notamment les constantes d'appariement), et qui permettent entre autre de déterminer les valeurs moyennes de différentes observables physiques, dont l'énergie en ce qui concerne ce travail. On procédera de manière similaire à ce que l'on a fait précédemment, c'est-à-dire que l'on présentera d'abord les résultats obtenus pour des systèmes pair-pairs, avant de présenter ceux obtenus pour les systèmes impairs, sachant de plus que l'on ne s'intéressera qu'aux cas schématiques, les tests ayant été faits pour des cas réalistes montrant la nécessité d'un temps conséquent pour effectuer une discussion rigoureuse et appréciable.

Pour ce faire, on utilisera le modèle à un niveau[30],[57], qui est un modèle schématique simple où l'on considère que l'on n'a qu'un seul niveau d'énergie nulle, avec une dégénérescence $\Omega = 12$, c'est-à-dire que l'on a $\varepsilon_{\nu t} = 0$, $\forall \nu$ et $\forall t = n, p$. Quant à la présentation des résultats, on commencera d'abord par exposer les graphes donnant la variation des paramètres du gap en fonction de la constante G_{np} , pour montrer la nécessité de tenir compte de l'appariement isovectoriel. On étudiera ensuite le recouvrement entre les états fondamentaux projetés et non projetés, dans le but de montrer la nécessité de la projection sur le bon nombre de particules. On s'intéressera aussi à la rapidité de la convergence de la méthode

utilisée au cours de ce travail, c'est-à-dire la méthode SBCS, et on terminera par la présentation des graphes donnant la variation des énergies obtenues avant et après projection, dans le but de montrer l'apport de la projection dans les calculs concernant l'observable énergie.

4.1 Paramètres du gap et constantes d'appariement

Dans ce paragraphe, on met en évidence la nécessité d'introduire l'interaction d'appariement isovectoriel, si l'on veut mieux rendre compte des énergies mises en jeu dans les systèmes nucléaires pour lesquels $N=Z$.

Pour les systèmes pair-pairs, on résout le système donné par les équations (2.47), ainsi que les deux équations donnant le nombre de protons et le nombre de neutrons respectivement, c'est-à-dire le système :

$$\begin{aligned}
\Delta_{pp} &= -G_{pp} \sum_{j>0} (B_n^j B_1^j + B_5^j B_p^j) \\
\Delta_{nn} &= -G_{nn} \sum_{j>0} (B_p^j B_1^j + B_5^j B_n^j) \\
\Delta_{np} &= -G_{np} \sum_{j>0} (B_4^j B_1^j - B_4^j B_5^j) \\
Z &= 2 \sum_{j>0} [(B_1^j)^2 + (B_p^j)^2 + (B_4^j)^2] \\
N &= 2 \sum_{j>0} [(B_1^j)^2 + (B_n^j)^2 + (B_4^j)^2]
\end{aligned} \tag{4.1}$$

où les termes B_i^j ($i = 1, n, p, 4, 5$) sont donnés par les expressions (2.33), et où les inconnues sont les paramètres (Δ_{pp} , Δ_{nn} et Δ_{np}) ainsi que les énergies des niveaux de Fermi pour les systèmes de protons et de neutrons. Il est de plus utile de noter que les B_i^j dépendent eux-mêmes des paramètres du gap, ce qui suggère la nécessité d'utiliser une méthode numérique itérative. La résolution du système non-linéaire précédant a donc été faite à l'aide de la méthode de Brown[56]. On a reporté sur la figure (4-1(a)) les variations des paramètres du gap Δ_{pp} , Δ_{nn} et Δ_{np} en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} , obtenus pour les paramètres $Z = 4$, $N = 8$ et $G_{pp} = G_{nn} = 0,125 \text{ MeV}$. On s'aperçoit qu'il existe une valeur critique pour la constante d'appariement G_{np} , à partir de laquelle le paramètre Δ_{np} commence à croître, alors que les paramètres Δ_{pp} et Δ_{nn} décroissent à partir de leurs valeurs

maximales. En effet, en dessous de la valeur critique, le paramètre Δ_{np} est nul, alors que les paramètres Δ_{pp} et Δ_{nn} ont des valeurs constantes et qui ne sont autres que celles correspondant à l'appariement entre particules identiques.

Pour les systèmes impairs, le système non-linéaire à résoudre est donné par :

$$\begin{aligned}
\Delta_{pp}^{(\nu)} &= -G_{pp} \sum_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} (B_n^j B_1^j + B_5^j B_p^j) \\
\Delta_{nn}^{(\nu)} &= -G_{nn} \sum_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} (B_p^j B_1^j + B_5^j B_n^j) \\
\Delta_{np}^{(\nu)} &= -G_{np} \sum_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} (B_4^j B_1^j + B_4^j B_5^j) \\
Z &= 2 \sum_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} [(B_1^j)^2 + (B_p^j)^2 + (B_4^j)^2] \\
N &= 1 + 2 \sum_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} [(B_1^j)^2 + (B_n^j)^2 + (B_4^j)^2]
\end{aligned} \tag{4.2}$$

où ν représente l'indice du niveau bloqué, et où les nucléons en nombre impair sont les neutrons. Dans le cas où ce sont les protons qui sont en nombre impair, les deux dernières équations sont données par :

$$\begin{aligned}
Z &= 1 + 2 \sum_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} [(B_1^j)^2 + (B_p^j)^2 + (B_4^j)^2] \\
N &= 2 \sum_{\substack{j>0 \\ j \neq \nu}} [(B_1^j)^2 + (B_n^j)^2 + (B_4^j)^2]
\end{aligned}$$

Dans la figure (4-1(b)), on représente les variations des paramètres Δ_{pp} , Δ_{nn} et Δ_{np} en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} , obtenus pour les paramètres $Z = 4$, $N = 7$ et $G_{pp} = G_{nn} = 0,125 MeV$, on s'aperçoit ainsi que les allures des courbes obtenues sont tout a fait similaires à celles obtenues dans le cas des systèmes pair-pairs. On a reporté ensuite sur la figure (4-2), la variation de l'énergie BCS donnée par l'expression (2.46) dans le cas des systèmes pair-pairs, et par l'expression (2.50) dans le cas des systèmes impairs, toujours en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} . On s'aperçoit que l'énergie commence à décroître considérablement au-delà de la valeur critique citée précédemment

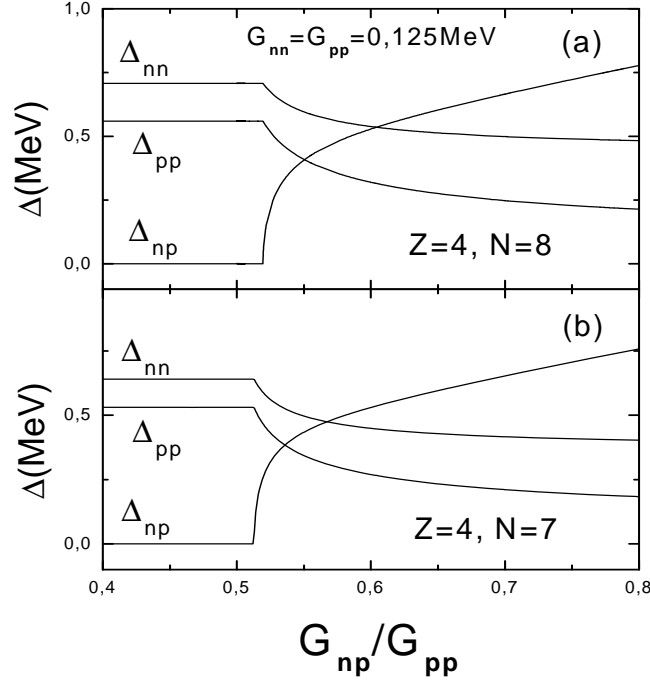


FIG. 4-1 – Variation des paramètres Δ_{nn} , Δ_{pp} et Δ_{np} en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} , dans le cadre du modèle à un niveau avec dégénérescence $\Omega = 12$, pour un système pair-pair avec les paramètres $Z = 4$ et $N = 8$ (a), et pour un système impair avec les paramètres $Z = 4$ et $N = 7$ (b).

L'existence d'une valeur critique pour la constante d'appariement G_{np} , et le changement des allures des courbes des paramètres (Δ_{pp} , Δ_{nn} et Δ_{np}) et des énergies dès que la valeur critique est dépassée, montre l'importante influence de l'appariement isovectorel sur les énergies du système étudié. En effet, la décroissance de l'énergie dès que la constante d'appariement G_{np} dépasse sa valeur critique, démontre que l'appariement isovectorel contribue de manière appréciable à abaisser l'énergie du système par rapport à celle obtenue en ne considérant que l'appariement entre particules identiques. Cela justifie donc l'introduction d'un hamiltonien prenant en compte ce type d'appariement.

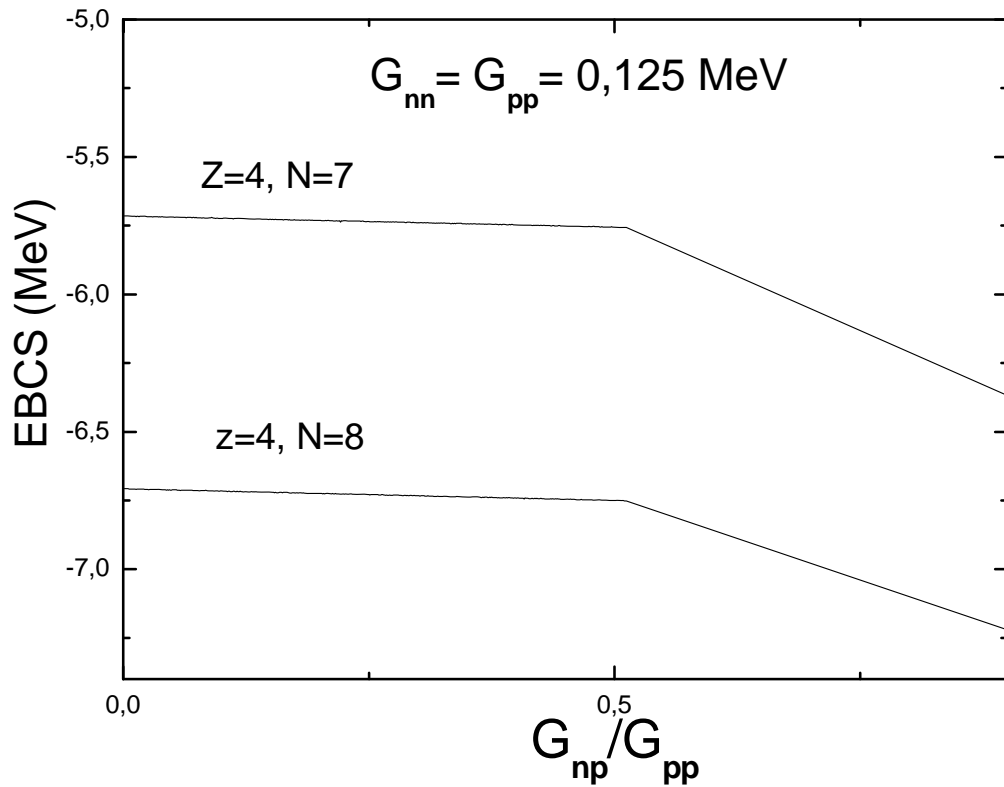


FIG. 4-2 – Variation de l'énergie non projetée en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} , dans le cadre du modèle à un niveau avec dégénérescence $\Omega = 12$, pour un système pair-pair avec les paramètres $Z = 4$ et $N = 8$, et pour un système impair avec les paramètres $Z = 4$ et $N = 7$.

m	m'	$\langle \Psi \Psi_{mm'} \rangle$	m	m'	$\langle \Psi \Psi_{mm'} \rangle$	m	m'	$\langle \Psi \Psi_{mm'} \rangle$	m	m'	$\langle \Psi \Psi_{mm'} \rangle$
0	0	0,498	1	0	0,367	2	0	0,358	3	0	0,358
0	1	0,415	1	1	0,309	2	1	0,302	3	1	0,302
0	2	0,412	1	2	0,307	2	2	0,301	3	2	0,301
0	3	0,412	1	3	0,307	2	3	0,300	3	3	0,300
0	4	0,412	1	4	0,307	2	4	0,300	3	4	0,300

m	m'	$\langle \nu T \nu T_{mm'} \rangle$	m	m'	$\langle \nu T \nu T_{mm'} \rangle$	m	m'	$\langle \nu T \nu T_{mm'} \rangle$	m	m'	$\langle \nu T \nu T_{mm'} \rangle$
0	0	0,501	1	0	0,366	2	0	0,355	3	0	0,355
0	1	0,390	1	1	0,285	2	1	0,276	3	1	0,276
0	2	0,386	1	2	0,282	2	2	0,274	3	2	0,274
0	3	0,386	1	3	0,282	2	3	0,274	3	3	0,274

TAB. 4.1 – Variation du recouvrement des états, projeté et non projeté, en fonction des degrés d'extraction des fausses composantes, dans le cas d'un système impair, pour les paramètres : $Z=4$, $N=7$, $G_{pp}=G_{nn}=0,125\text{MeV}$ et $G_{np}=0,137\text{MeV}$.

4.2 Recouvrement des fonctions d'ondes

L'objectif des tests présentés et discutés dans ce paragraphe est d'illustrer l'importance de la projection de la fonction d'onde sur le bon nombre de particules, projection effectuée grâce à la méthode SBCS illustrée au troisième chapitre. En effet, on a déjà signalé précédemment que les fonctions d'ondes (2.31) et (2.34), obtenues à l'aide de la méthode de linéarisation par le théorème de Wick, contiennent un nombre important de fausses composantes, c'est-à-dire de termes ne correspondant pas à la description physique d'un système déterminé, ce qui justifie la projection. Pour montrer l'écart important existant entre les états projetés et non projetés, on calcule le recouvrement entre les deux états (pour le fondamental), c'est-à-dire la quantité $\langle \Psi | \Psi_{mm'} \rangle$ pour les systèmes pair-pairs (sur le tableau (4.2)), et la quantité $\langle \nu T | \nu T_{mm'} \rangle$ pour les systèmes impairs (sur le tableau (4.1)), et cela en fonction des degrés (m et m') d'extraction des fausses composantes. Pour cela, on utilise les mêmes paramètres que ceux utilisés lors du paragraphe précédent. Ce que l'on remarque immédiatement est la faible contribution de la composante physique, qu'on appelle poids de la composante physique, dans les états non projetés. En effet, l'écart entre l'état fondamental projeté et non projeté est de 70% pour les systèmes pair-pairs, et de 72,6% pour les systèmes impairs. On remarque aussi la rapidité de la convergence de la méthode, qu'on illustrera au paragraphe suivant pour le calcul des énergies. Ainsi, la projection sur le bon nombre de particules s'avère nécessaire.

m'	m	$E_{m,m'}$	m'	m	$E_{m,m'}$	m'	m	$E_{m,m'}$	m'	m	$E_{m,m'}$	m'	m	$E_{m,m'}$
0	0	-3,351	1	0	-3,516	2	0	-3,488	3	0	-3,487	4	0	-3,487
0	1	-3,467	1	1	-3,631	2	1	-3,603	3	1	-3,602	4	1	-3,602
0	2	-3,517	1	2	-3,682	2	2	-3,654	3	2	-3,653	4	2	-3,653
0	3	-3,518	1	3	-3,682	2	3	-3,654	3	3	-3,654	4	3	-3,654
0	4	-3,518	1	4	-3,682	2	4	-3,654	3	4	-3,654	4	4	-3,654

TAB. 4.2 – Variation de l'énergie correspondant à l'état fondamental projeté en fonction des degrés d'extraction des fausses composantes, dans le cas d'un système pair-pair, pour les paramètres : $Z=4$, $N=8$, $G_{pp}=G_{nn}=0,0625\text{MeV}$ et $G_{np}=0,044\text{MeV}$.

m'	m	$E_{m,m'}$	m'	m	$E_{m,m'}$	m'	m	$E_{m,m'}$	m'	m	$E_{m,m'}$	m'	m	$E_{m,m'}$
0	0	-2,858	1	0	-3,009	2	0	-2,988	3	0	-2,988	4	0	-2,988
0	1	-2,989	1	1	-3,140	2	1	-3,119	3	1	-3,118	4	1	-3,118
0	2	-3,006	1	2	-3,156	2	2	-3,135	3	2	-3,135	4	2	-3,135
0	3	-3,007	1	3	-3,158	2	3	-3,137	3	3	-3,136	4	3	-3,136
0	4	-3,007	1	4	-3,158	2	4	-3,137	3	4	-3,137	4	4	-3,137
0	5	-3,007	1	5	-3,158	2	5	-3,137	3	5	-3,137	4	5	-3,137

TAB. 4.3 – Variation de l'énergie correspondant à l'état fondamental projeté en fonction des degrés d'extraction des fausses composantes, dans le cas d'un système impair, pour les paramètres : $Z=4$, $N=7$, $G_{pp}=G_{nn}=0,0625\text{MeV}$ et $G_{np}=0,044\text{MeV}$.

4.3 Convergence de la méthode de projection SBCS

Dans ce qui suit, on étudie la convergence de la méthode de projection SBCS, en considérant l'observable énergie. En effet, une fois les systèmes non linéaires (4.1) et (4.2) résolus, il est possible d'introduire les expressions des énergies avant (2.46 et 2.50) et après (3.74 et 3.98) projection, dans les codes de calcul. On reporte dans le tableau (4.2), les énergies projetées (en MeV) en fonction des degrés d'extraction des fausses composantes pour un système pair-pair, avec les mêmes paramètres que ceux utilisés aux paragraphes précédents, et on en fait de même sur le tableau (4.3) pour le système impair.

Pour le système pair-pair, on remarque que l'on obtient une convergence rapide, qui est atteinte pour $m = 3$ et $m' = 3$. Quant au système impair, la convergence est obtenue dès que l'on a $m = 4$ et $m' = 3$. Il est aussi important de signaler que si l'on se réfère à la condition théorique de convergence, qui est donnée par $2(m + 1) > \text{Max}(P_N, \Omega - P_N)$ et $2(m' + 1) > \text{Max}(P_Z, \Omega - P_Z)$

[23], où P_N (P_Z) représente le nombre de paires de neutrons (protons) présentes dans le système, la convergence (selon les paramètres pris en compte) devrait être atteinte lorsque l'on a $m = 4$ et $m' = 5$ pour le premier système, et pour $m = 4$ et $m' = 5$ pour le deuxième. Les résultats donnés dans les tableaux (4.2 et 4.3) montrent que du point de vue pratique, la convergence est atteinte plus tôt. Ceci est dû au fait que parmi les fausses composantes à éliminer dans les états (2.31) et (2.34), seules les plus proches de l'état physique ont une influence considérable lors du calcul de valeurs moyennes, la convergence est donc atteinte dès que ces composantes sont éliminées. Ce fait prendrait toute son importance si l'on avait à traiter des cas réalistes, car en effet, si au lieu du modèle à un niveau, on s'était intéressé à un modèle réaliste comme celui de Woods-Saxon[47], le nombre total d'orbitales se compterait en centaines. Ce fait souligne aussi de manière plus intense l'efficacité de la méthode de projection SBCS, qui permet des gains précieux en temps de calcul, et qui de plus est aussi efficace pour les systèmes impairs que pour les systèmes pair-pairs.

4.4 Energie après projection

Le but de ce dernier paragraphe, est de montrer l'évolution de l'énergie calculée après projection (qu'on appelle projetée) en fonction de la constante d'appariement G_{np} , et la différence qu'il peut y avoir entre cette énergie et l'énergie calculée sans projection. Dans le cas des systèmes pair-pairs, en considérant les paramètres $Z = 4$, $N = 8$ et $G_{pp} = G_{nn} = 0,125MeV$, on reporte sur la même figure (c'est-à-dire la figure (4-3(a))), les variations des énergies projetée et non projetée en fonction du rapport G_{np}/G_{pp} . Pour les systèmes impairs, on en fait de même sur la figure (4-3(b)), cela en considérant les paramètres $Z = 4$, $N = 7$ et $G_{pp} = G_{nn} = 0,125MeV$.

Trois remarques importantes peuvent être déduites des deux courbes précédentes. Tout d'abord, on remarque l'analogie entre les courbes donnant les énergies avant et après projection. En effet, l'énergie projetée décroît faiblement avant que G_{np} n'atteigne sa valeur critique (la même que pour l'énergie non projetée), puis sa décroissance devient plus prononcée. On remarque aussi une baisse de l'énergie après la projection, ce qui vient encore souligner l'importante influence des composantes non physiques présentes dans les états déterminés par la méthode de linéarisation. Et finalement, il est important de souligner que les deux déductions précédentes ont été faites pour les systèmes pair-pairs comme pour les systèmes impairs.

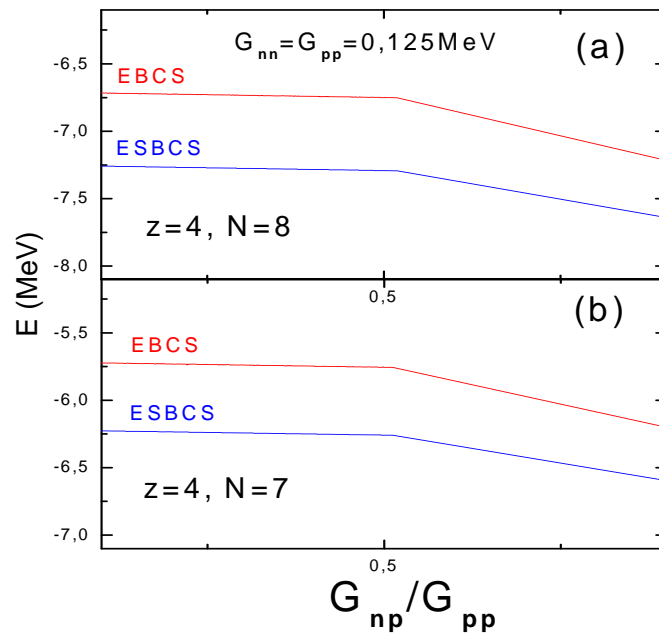


FIG. 4-3 – Variation des énergies avant et après projection, dans le cadre du modèle à un niveau avec dégénérescence $\Omega = 12$, pour un système pair-pair avec les paramètres $Z = 4$ et $N = 8$ (a), et pour un système impair avec les paramètres $Z = 4$ et $N = 7$ (b).

Conclusion

Le but de ce travail est la prise en compte de l'interaction d'appariement dans les systèmes ayant un nombre impair de particules, en conservant strictement ce nombre, et d'écrire les codes de calcul correspondant au formalisme établi. La méthode du blocage de Wahlborn a été utilisée. Dans cette optique, nous avons commencé par établir l'expression la plus générale de l'hamiltonien, tenant compte de tous les types d'effets d'appariement isovectoriel ($T = 1$). La diagonalisation exacte de cet hamiltonien étant en général très ardue, nous avons utilisé la méthode de linéarisation basée sur l'utilisation du théorème de Wick, pour la résolution approximative de son problème aux valeurs propres. Cette méthode est différente de celle de la linéarisation habituelle, qui utilise les commutateurs de l'hamiltonien avec les opérateurs de création et d'annihilation des particules.

Dans une première partie, seul l'appariement entre particules identiques, à la fois dans les systèmes ayant un nombre pair et impair de particules, a été considéré. Ceci a été entrepris, dans le but de mettre en évidence l'efficacité de cette méthode de linéarisation. En effet, elle permet d'exhiber aisément la transformation de Bogoliubov-Valatin, ainsi que la fonction d'onde et l'énergie pour les deux types de systèmes, pair et impair.

Cette étude a ensuite été généralisée par la prise en compte de l'interaction neutron-proton. Après avoir inclus ce dernier type de force dans l'hamiltonien, la méthode de linéarisation a permis d'obtenir d'une manière rapide et efficace les équations du gap, généralisant celles relatives à l'absence de cet effet de paires, à la fois pour les systèmes pairs et impairs.

Les fonctions d'ondes déterminées contenant beaucoup de termes ne correspondant pas à la description physique des systèmes étudiés, on a effectué une projection qui permet l'élimination de ces fausses composantes. La méthode de projection SBCS, développée au sein de notre laboratoire pour les systèmes pairs, a été généralisée pour les systèmes impairs. Les énergies ont ainsi été recalculées à l'aide des états projetés.

Dans une dernière partie, des codes de calcul, pour chacun des systèmes, ont

été réalisés. Dans chacun des cas, les systèmes non linéaires des équations du gap ont été résolus par la méthode de Brown. Les énergies ont par la suite été évaluées dans le cadre du modèle à un niveau. En calculant les recouvrements des fonctions d'ondes BCS et projetées, qui sont de l'ordre de 30% et de 27% pour les systèmes pair et impair respectivement, il a été mis en évidence la nécessité d'éliminer les fausses composantes contenues dans les fonctions d'onde BCS. Il a été de plus, constaté la rapidité de la convergence de la méthode de projection discrète, ce qui la rend très pratique et efficace pour l'étude de systèmes réels.

La suite de ce travail sera d'exploiter les codes de calcul réalisés dans le cadre d'un modèle réaliste, cela afin de confronter les résultats obtenus aux résultats expérimentaux, notamment en ce qui concerne les noyaux sur lesquels l'appariement isovectoriel influe de manière importante, en l'occurrence ceux pour lesquels le nombre de protons est voisin de celui des neutrons. Le champ d'investigation qui s'ouvre est donc très large, du fait de la diversité des grandeurs physiques auxquelles on peut accéder en connaissant l'énergie des noyaux, et l'on peut citer comme exemple les énergies de séparation des neutrons et des protons, les bilans énergétiques de désintégration et autres grandeurs pour lesquelles les résultats expérimentaux sont disponibles. Les tests dans le cadre d'un modèle réaliste ouvriront notamment un volet de discussion important, à savoir le choix de la fonction d'onde utilisée pour décrire les systèmes impairs, un choix qui a été fait une fois la linéarisation effectuée, et qui peut donc être amélioré.

Annexe : Valeur moyenne du terme d'appariement

On réécrit le terme d'appariement (2.42) sous la forme :

$$\begin{aligned}
H_{app} = & -G_{pp} \sum_{j>0} a_{jp}^+ a_{jp}^+ a_{jp}^- a_{jp} - G_{nn} \sum_{j>0} a_{jn}^+ a_{jn}^+ a_{jn}^- a_{jn} \\
& -\frac{1}{2} G_{np} \sum_{j>0} (a_{jp}^+ a_{jn}^+ a_{jn}^- a_{jp} + a_{jp}^+ a_{jn}^+ a_{jp}^- a_{jn} + a_{jn}^+ a_{jp}^+ a_{jp}^- a_{jn} + a_{jn}^+ a_{jp}^+ a_{jn}^- a_{jp}) \\
& -G_{pp} \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} a_{jp}^+ a_{jp}^+ a_{lp}^- a_{lp} - G_{nn} \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} a_{jn}^+ a_{jn}^+ a_{ln}^- a_{ln} \\
& -\frac{1}{2} G_{np} \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} (a_{jp}^+ a_{jn}^+ a_{ln}^- a_{lp} + a_{jp}^+ a_{jn}^+ a_{lp}^- a_{ln} + a_{jn}^+ a_{jp}^+ a_{lp}^- a_{ln} + a_{jn}^+ a_{jp}^+ a_{ln}^- a_{lp})
\end{aligned}$$

Ensuite, on effectue le calcul des valeurs moyennes terme par terme :

*

$$\begin{aligned}
a_{jp}^+ a_{jp}^+ a_{jp}^- a_{jp} |\Psi\rangle &= a_{jp}^+ a_{jp}^+ a_{jp}^- a_{jp} \{B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + B_p^j A_{jp}^+ + B_n^j A_{jn}^+ \\
&+ B_4^j (a_{jp}^+ a_{jn}^+ + a_{jn}^+ a_{jp}^+) + B_5^j\} |0\rangle \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j}} |\Psi_i\rangle \\
&= \{B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + B_p^j A_{jp}^+\} |0\rangle \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j}} |\Psi_i\rangle
\end{aligned}$$

d'où :

$$\langle \Psi(z_k, z_{k'}) | -G_{pp} \sum_{j>0} a_{jp}^+ a_{jp}^+ a_{jp}^- a_{jp} |\Psi\rangle = -G_{pp} \sum_{j>0} \left[(B_1^j)^2 z_k z_{k'} + (B_p^j)^2 z_{k'} \right] \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j}} A_i(z_k, z_{k'})$$

*

$$\begin{aligned}
a_{jn}^+ a_{jn}^+ a_{jn}^- a_{jn} |\Psi\rangle &= a_{jn}^+ a_{jn}^+ a_{jn}^- a_{jn} \{B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + B_p^j A_{jp}^+ + B_n^j A_{jn}^+ \\
&\quad + B_4^j (a_{jp}^+ a_{jn}^+ + a_{jn}^+ a_{jp}^+) + B_5^j\} |0\rangle \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j}} |\Psi_i\rangle \\
&= \{B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + B_n^j A_{jn}^+\} |0\rangle \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j}} |\Psi_i\rangle
\end{aligned}$$

d'où :

$$\langle \Psi(z_k, z_{k'}) | -G_{nn} \sum_{j>0} a_{jn}^+ a_{jn}^+ a_{jn}^- a_{jn} |\Psi\rangle = -G_{nn} \sum_{j>0} \left[(B_1^j)^2 z_k z_{k'} + (B_n^j)^2 z_k \right] \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j}} A_i(z_k, z_{k'})$$

*

$$\begin{aligned}
a_{jp}^+ a_{jn}^+ a_{jn}^- a_{jp} |\Psi\rangle &= a_{jp}^+ a_{jn}^+ a_{jn}^- a_{jp} \{B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + B_p^j A_{jp}^+ + B_n^j A_{jn}^+ \\
&\quad + B_4^j (a_{jp}^+ a_{jn}^+ + a_{jn}^+ a_{jp}^+) + B_5^j\} |0\rangle \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j}} |\Psi_i\rangle \\
&= \{B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + B_4^j a_{jn}^+ a_{jp}^+\} |0\rangle \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j}} |\Psi_i\rangle
\end{aligned}$$

d'où :

$$\langle \Psi(z_k, z_{k'}) | -\frac{1}{2} G_{np} \sum_{j>0} a_{jp}^+ a_{jn}^+ a_{jn}^- a_{jp} |\Psi\rangle = -\frac{1}{2} G_{np} \sum_{j>0} \left[(B_1^j)^2 z_k z_{k'} + (B_4^j)^2 \sqrt{z_k z_{k'}} \right] \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j}} A_i(z_k, z_{k'})$$

*

$$\begin{aligned}
a_{jp}^+ a_{jn}^+ a_{jp}^- a_{jn} |\Psi\rangle &= a_{jp}^+ a_{jn}^+ a_{jp}^- a_{jn} \{B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + B_p^j A_{jp}^+ + B_n^j A_{jn}^+ \\
&\quad + B_4^j (a_{jp}^+ a_{jn}^+ + a_{jn}^+ a_{jp}^+) + B_5^j\} |0\rangle \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j}} |\Psi_i\rangle \\
&= \{B_4^j a_{jn}^+ a_{jp}^+\} |0\rangle \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j}} |\Psi_i\rangle
\end{aligned}$$

d'où :

$$\langle \Psi(z_k, z_{k'}) | -\frac{1}{2} G_{np} \sum_{j>0} a_{jp}^+ a_{jn}^+ a_{jp}^- a_{jn} | \Psi \rangle = -\frac{1}{2} G_{np} \sum_{j>0} \left[(B_4^j)^2 \sqrt{z_k z_{k'}} \right] \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j}} A_i(z_k, z_{k'})$$

*

$$\begin{aligned} a_{jn}^+ a_{jp}^+ a_{jn}^- a_{jp} | \Psi \rangle &= a_{jn}^+ a_{jp}^+ a_{jn}^- a_{jp} \{ B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + B_p^j A_{jp}^+ + B_n^j A_{jn}^+ \\ &\quad + B_4^j (a_{jp}^+ a_{jn}^+ + a_{jn}^+ a_{jp}^+) + B_5^j \} | 0 \rangle \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j}} | \Psi_i \rangle \\ &= \left\{ B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + B_4^j a_{jp}^+ a_{jn}^+ \right\} | 0 \rangle \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j}} | \Psi_i \rangle \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \langle \Psi(z_k, z_{k'}) | -\frac{1}{2} G_{np} \sum_{j>0} a_{jn}^+ a_{jp}^+ a_{jn}^- a_{jp} | \Psi \rangle &= -\frac{1}{2} G_{np} \sum_{j>0} \left[(B_1^j)^2 z_k z_{k'} + (B_4^j)^2 \sqrt{z_k z_{k'}} \right] \\ &\quad \times \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j}} A_i(z_k, z_{k'}) \end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned} a_{jn}^+ a_{jp}^+ a_{jn}^- a_{jp} | \Psi \rangle &= a_{jn}^+ a_{jp}^+ a_{jn}^- a_{jp} \{ B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + B_p^j A_{jp}^+ + B_n^j A_{jn}^+ \\ &\quad + B_4^j (a_{jp}^+ a_{jn}^+ + a_{jn}^+ a_{jp}^+) + B_5^j \} | 0 \rangle \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j}} | \Psi_i \rangle \\ &= \left\{ B_4^j a_{jp}^+ a_{jn}^+ \right\} | 0 \rangle \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j}} | \Psi_i \rangle \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \langle \Psi(z_k, z_{k'}) | -\frac{1}{2} G_{np} \sum_{j>0} a_{jn}^+ a_{jp}^+ a_{jn}^- a_{jp} | \Psi \rangle &= -\frac{1}{2} G_{np} \sum_{j>0} \left[(B_4^j)^2 \sqrt{z_k z_{k'}} \right] \\ &\quad \times \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j}} A_i(z_k, z_{k'}) \end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned}
a_{jp}^+ a_{jp}^+ a_{lp}^+ a_{lp}^+ |\Psi\rangle &= a_{jp}^+ a_{jp}^+ \left\{ B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + B_p^j A_{jp}^+ + B_n^j A_{jn}^+ + B_4^j (a_{jp}^+ a_{jn}^+ + a_{jn}^+ a_{jp}^+) + B_5^j \right\} |0\rangle \\
&\times a_{lp}^+ a_{lp}^+ \left\{ B_1^l A_{lp}^+ A_{ln}^+ + B_p^l A_{lp}^+ + B_n^l A_{ln}^+ + B_4^l (a_{lp}^+ a_{ln}^+ + a_{ln}^+ a_{lp}^+) + B_5^l \right\} |0\rangle \\
&\times \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l}} |\Psi_i\rangle \\
&= \left\{ -B_n^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ - B_5^j A_{jp}^+ \right\} \times \left\{ -B_1^l A_{lp}^+ - B_p^l \right\} \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l}} |\Psi_i\rangle
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\langle \Psi(z_k, z_{k'}) | -G_{pp} \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} a_{jp}^+ a_{jp}^+ a_{lp}^+ a_{lp}^+ |\Psi\rangle &= -G_{pp} \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} \left\{ z_{k'} (B_1^j B_n^j z_k + B_p^j B_5^j) (B_1^l B_n^l z_k + B_p^l B_5^l) \right\} \\
&\times \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l}} A_i(z_k, z_{k'})
\end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned}
a_{jn}^+ a_{jn}^+ a_{ln}^+ a_{ln}^+ |\Psi\rangle &= a_{jn}^+ a_{jn}^+ \left\{ B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + B_p^j A_{jp}^+ + B_n^j A_{jn}^+ + B_4^j (a_{jp}^+ a_{jn}^+ + a_{jn}^+ a_{jp}^+) + B_5^j \right\} |0\rangle \\
&\times a_{ln}^+ a_{ln}^+ \left\{ B_1^l A_{lp}^+ A_{ln}^+ + B_p^l A_{lp}^+ + B_n^l A_{ln}^+ + B_4^l (a_{lp}^+ a_{ln}^+ + a_{ln}^+ a_{lp}^+) + B_5^l \right\} |0\rangle \\
&\times \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l}} |\Psi_i\rangle \\
&= \left\{ -B_p^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ - B_5^j A_{jn}^+ \right\} \times \left\{ -B_1^l A_{lp}^+ - B_n^l \right\} \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l}} |\Psi_i\rangle
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\langle \Psi(z_k, z_{k'}) | -G_{nn} \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} a_{jn}^+ a_{jn}^+ a_{ln}^+ a_{ln}^+ |\Psi\rangle &= -G_{nn} \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} \left\{ z_k (B_1^j B_p^j z_{k'} + B_n^j B_5^j) (B_1^l B_p^l z_{k'} + B_n^l B_5^l) \right\} \\
&\times \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l}} A_i(z_k, z_{k'})
\end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned}
a_{jp}^+ a_{jn}^+ a_{ln}^+ a_{lp} |\Psi\rangle &= a_{jp}^+ a_{jn}^+ \left\{ B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + B_p^j A_{jp}^+ + B_n^j A_{jn}^+ + B_4^j (a_{jp}^+ a_{jn}^+ + a_{jn}^+ a_{jp}^+) + B_5^j \right\} |0\rangle \\
&\times a_{ln}^+ a_{lp} \left\{ B_1^l A_{lp}^+ A_{ln}^+ + B_p^l A_{lp}^+ + B_n^l A_{ln}^+ + B_4^l (a_{lp}^+ a_{ln}^+ + a_{ln}^+ a_{lp}^+) + B_5^l \right\} |0\rangle \\
&\times \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l}} |\Psi_i\rangle \\
&= \left\{ B_4^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ - B_5^j a_{jn}^+ a_{jp}^+ \right\} \times \left\{ B_1^l a_{lp}^+ a_{ln}^+ - B_4^l \right\} \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l}} |\Psi_i\rangle
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\langle \Psi(z_k, z_{k'}) | -\frac{1}{2} G_{np} \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} a_{jp}^+ a_{jn}^+ a_{ln}^+ a_{lp} |\Psi\rangle &= -\frac{1}{2} G_{np} \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} \{ B_4^j B_4^l \sqrt{z_k z_{k'}} (B_1^j \sqrt{z_k z_{k'}} - B_5^j) \\
&\times (B_1^l \sqrt{z_k z_{k'}} - B_5^l) \} \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l}} A_i(z_k, z_{k'})
\end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned}
a_{jp}^+ a_{jn}^+ a_{lp}^+ a_{ln} |\Psi\rangle &= a_{jp}^+ a_{jn}^+ \left\{ B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + B_p^j A_{jp}^+ + B_n^j A_{jn}^+ + B_4^j (a_{jp}^+ a_{jn}^+ + a_{jn}^+ a_{jp}^+) + B_5^j \right\} |0\rangle \\
&\times a_{lp}^+ a_{ln} \left\{ B_1^l A_{lp}^+ A_{ln}^+ + B_p^l A_{lp}^+ + B_n^l A_{ln}^+ + B_4^l (a_{lp}^+ a_{ln}^+ + a_{ln}^+ a_{lp}^+) + B_5^l \right\} |0\rangle \\
&\times \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l}} |\Psi_i\rangle \\
&= \left\{ B_4^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ - B_5^j a_{jn}^+ a_{jp}^+ \right\} \times \left\{ B_1^l a_{lp}^+ a_{ln}^+ - B_4^l \right\} \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l}} |\Psi_i\rangle
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\langle \Psi(z_k, z_{k'}) | -\frac{1}{2} G_{np} \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} a_{jp}^+ a_{jn}^+ a_{lp}^+ a_{ln} |\Psi\rangle &= -\frac{1}{2} G_{np} \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} \{ B_4^j B_4^l \sqrt{z_k z_{k'}} (B_1^j \sqrt{z_k z_{k'}} - B_5^j) \\
&\times (B_1^l \sqrt{z_k z_{k'}} - B_5^l) \} \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l}} A_i(z_k, z_{k'})
\end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned}
a_{jn}^+ a_{jp}^+ a_{\tilde{l}p} a_{ln} |\Psi\rangle &= a_{jn}^+ a_{jp}^+ \left\{ B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + B_p^j A_{jp}^+ + B_n^j A_{jn}^+ + B_4^j (a_{\tilde{j}p}^+ a_{jn}^+ + a_{jn}^+ a_{\tilde{j}p}^+) + B_5^j \right\} |0\rangle \\
&\times a_{\tilde{l}p} a_{ln} \left\{ B_1^l A_{lp}^+ A_{ln}^+ + B_p^l A_{lp}^+ + B_n^l A_{ln}^+ + B_4^l (a_{\tilde{l}p}^+ a_{ln}^+ + a_{ln}^+ a_{\tilde{l}p}^+) + B_5^l \right\} |0\rangle \\
&\times \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l}} |\Psi_i\rangle \\
&= \left\{ B_4^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ - B_5^j a_{\tilde{j}p}^+ a_{jn}^+ \right\} \times \left\{ B_1^l a_{\tilde{l}n}^+ a_{lp}^+ - B_4^l \right\} \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l}} |\Psi_i\rangle
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\langle \Psi(z_k, z_{k'}) | -\frac{1}{2} G_{np} \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} a_{jn}^+ a_{jp}^+ a_{\tilde{l}p} a_{ln} |\Psi\rangle &= -\frac{1}{2} G_{np} \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} \{ B_4^j B_4^l \sqrt{z_k z_{k'}} (B_1^j \sqrt{z_k z_{k'}} - B_5^j) \\
&\times (B_1^l \sqrt{z_k z_{k'}} - B_5^l) \} \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l}} A_i(z_k, z_{k'})
\end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned}
a_{jn}^+ a_{jp}^+ a_{\tilde{l}n} a_{lp} |\Psi\rangle &= a_{jn}^+ a_{jp}^+ \left\{ B_1^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ + B_p^j A_{jp}^+ + B_n^j A_{jn}^+ + B_4^j (a_{\tilde{j}p}^+ a_{jn}^+ + a_{jn}^+ a_{\tilde{j}p}^+) + B_5^j \right\} |0\rangle \\
&\times a_{\tilde{l}n} a_{lp} \left\{ B_1^l A_{lp}^+ A_{ln}^+ + B_p^l A_{lp}^+ + B_n^l A_{ln}^+ + B_4^l (a_{\tilde{l}p}^+ a_{ln}^+ + a_{ln}^+ a_{\tilde{l}p}^+) + B_5^l \right\} |0\rangle \\
&\times \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l}} |\Psi_i\rangle \\
&= \left\{ B_4^j A_{jp}^+ A_{jn}^+ - B_5^j a_{\tilde{j}p}^+ a_{jn}^+ \right\} \times \left\{ B_1^l a_{\tilde{l}n}^+ a_{lp}^+ - B_4^l \right\} \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l}} |\Psi_i\rangle
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\langle \Psi(z_k, z_{k'}) | -\frac{1}{2} G_{np} \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} a_{jn}^+ a_{jp}^+ a_{\tilde{l}n} a_{lp} |\Psi\rangle &= -\frac{1}{2} G_{np} \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} \{ B_4^j B_4^l \sqrt{z_k z_{k'}} (B_1^j \sqrt{z_k z_{k'}} - B_5^j) \\
&\times (B_1^l \sqrt{z_k z_{k'}} - B_5^l) \} \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l}} A_i(z_k, z_{k'})
\end{aligned}$$

La valeur moyenne du terme d'appariement est donc donnée par :

$$\begin{aligned} \langle \Psi(z_k, z_{k'}) | H_{app} | \Psi \rangle &= 4(m+1)(m'+1)C_{mm'}^2 \\ &\times \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{k'=0}^{m'+1} \xi_k \xi_{k'} \left[z_k^{-P_N} z_{k'}^{-P_Z} E_{app}(z_k, z_{k'}) + \bar{z}_k^{-P_N} \bar{z}_{k'}^{-P_Z} E_{app}(\bar{z}_k, \bar{z}_{k'}) + c.c \right] \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} E_{app}(z_k, z_{k'}) &= \sum_{j>0} (-G_{nn} E_n^j(z_{k'}) - G_{pp} E_p^j(z_k) - G_{np} E_{np}^j(z_k, z_{k'})) \prod_{i \neq j} A_i(z_k, z_{k'}) \\ &- \sum_{\substack{j,l>0 \\ j \neq l}} (G_{nn} z_k F_n^j(z_{k'}) F_n^l(z_{k'}) + G_{pp} z_{k'} F_p^j(z_k) F_p^l(z_k) \\ &+ 2G_{np} \sqrt{z_k z_{k'}} F_{np}^j(z_k, z_{k'}) F_{np}^l(z_k, z_{k'})) \prod_{\substack{i>0 \\ i \neq j,l}} A_i(z_k, z_{k'}) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} E_n^j(z_{k'}) &= z_k \left[(B_1^j)^2 z_{k'} + (B_n^j)^2 \right] ; & F_n^j(z_{k'}) &= B_1^j B_p^j z_{k'} + B_n^j B_5^j \\ E_p^j(z_k) &= z_{k'} \left[(B_1^j)^2 z_k + (B_p^j)^2 \right] ; & F_p^j(z_k) &= B_1^j B_n^j z_k + B_p^j B_5^j \\ E_{np}^j(z_k, z_{k'}) &= \sqrt{z_k z_{k'}} \left[(B_1^j)^2 \sqrt{z_k z_{k'}} + 2(B_4^j)^2 \right] ; & F_{np}^j(z_k, z_{k'}) &= B_4^j (B_1^j \sqrt{z_k z_{k'}} - B_5^j) \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] A.Sitenko and V.Tartakovskii, Theory Of Nucleus, Kluwer Academic Publishers, Netherlands (1997).
- [2] J.Bardeen, L.N.Cooper and J.R.Schrieffer, Phys. Rev. 108 (1957) 1175.
- [3] A.Bohr, B.R.Mottelson and D.Pines, Phys. Rev. 110 (1958) 936.
- [4] N.H. Allal and M. Fellah, Phys. Rev. C43 (1991) 2648.
- [5] N.H. Allal, M. Fellah, N. Benhamouda and M.R. Oudih, Proc. of the International Nuclear Physics Conference, Paris, France, 1998, Vol. 1, p. 256.
- [6] B.F. Bayman, Nucl. Phys. 15 (1960) 33.
- [7] Z. H. Zhang, Y. A. Lei, and J. Y. Zeng, Phys. Rev. C 80 (2009) 034313.
- [8] C. Simenel, Phys. Rev. Lett. 105 (2010) 192701.
- [9] A. Mukherjee, Y. Alhassid, and G. F. Bertsch, Phys. Rev. C 83 (2011) 014319.
- [10] M.R. Oudih, Thèse de Magister, U.S.T.H.B, 1999.
- [11] M. Fellah, T. F. Hammann and D. E. Medjadi, Phys. Rev. C8 (1973) 1585.
- [12] M. Fellah and T.F. Hammann, Nuovo Cimento. 30A (1975) 239.
- [13] N. Benhamouda, M.R. Oudih, N.H. Allal and M. Fellah, Nucl. Phys. A690 (2001) 219.
- [14] M.R. Oudih, N.H. Allal and M. Fellah, Int. J. Mod. Phys. E12 (2003) 109.
- [15] S. Kerrouchi, N. H. Allal et M. Fellah, Séminaire national sur la mécanique quantique et la relativité, USTHB, Novembre 2005.
- [16] N. Benhamouda, N.H. Allal, M. Fellah and M.R. Oudih, Int. J.Mod. Phys. E14 (2005) 197.
- [17] S. Kerrouchi, N. H. Allal et M. Fellah, Conférence Nationale sur les Rayonnements et leurs Applications (CNRA'2006), CRNA, Alger, Novembre 2006.
- [18] M. R. Oudih, M. Fellah, N. H. Allal and N. Benhamouda, Int. J. Mod. Phys. E15 (2006) 643.

- [19] M. R. Oudih, M. Fellah, N. H. Allal and N. Benhammouda, Phys. Rev. C76 (2007) 047307.
- [20] N. Benhamouda, N. H. Allal, M. Fellah and M. R. Oudih, Int. J. Mod. Phys. E17 (2008) 1357.
- [21] N. H. Allal, M. Fellah, N. Benhamouda and M. R. Oudih, Phys. Rev. C77 (2008) 054310.
- [22] G. G. Dussel, R. Id. Betan, R. J. Liotta and T. Verste, Nucl. Phys. A789 (2007) 182.
- [23] S. Kerrouchi, Thèse de Doctorat, U.S.T.H.B, 2010.
- [24] D. Bazin et al., Phys. Rev. Lett. 101 (2008) 252501.
- [25] J. B. Stoker et al., Phys. Rev. C79 (2009) 015803.
- [26] B. S. Meyer, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 231101.
- [27] J. Pereira et al., Phys. Rev. C79 (2009) 035806.
- [28] P. Mohr et al., Phys. Rev. C69 (2004) 032801(R).
- [29] P. Mohr, F. Kappeler and R. Gallino, Phys. Rev. C75 (2007) 012802(R).
- [30] O. Civitarese and M. Reboiro, Phys. Rev. C56 (1997) 1179.
- [31] O. Civitarese, M. Reboiro and P. Vogel, Phys. Rev. C56 (1997) 1840.
- [32] F. Simkovic, Ch. C. Moustakidis, L. Paceaescu and A. Faessler, Phys. Rev. C68 (2003) 054319.
- [33] S. Brant, N. Yoshida and L. Luc , Phys. Rev. C74 (2006) 024303.
- [34] D. Vretenar, G. A. Lalazissis and P. Ring, Phys. Rev. Lett. 82 (1999) 4595.
- [35] L. Satpathy and S. K. Patra, Nucl. Phys. A722 (2003) 24c.
- [36] J. E. Garcia-Ramos et al., Nucl. Phys. A688 (2001) 735.
- [37] G. A. Lalazissis and S. Raman, Phys. Rev. C58 (1998) 1467.
- [38] W.Satula and R.Wyss, Nucl. Phys. A676 (2000) 120.
- [39] N.H.Allal, M.Fellah, M.R.Oudih and N.Benhamouda, Eur. Phys. J. A 27 s01 (2006) 301.
- [40] S. Kerrouchi, D. Mokhtari, N. H. Allal and M. Fellah, Int. J. Mod. Phys. E18 (2009) 141.
- [41] J. Engel, K. Langanke and P. Vogel, Phys. Lett. B429 (1998) 215.
- [42] K. Kaneko and M. Hasegawa, Phys. Rev. C69 (2004) 06130.
- [43] F.Hammache, Mèmoire de Magister, U.S.T.H.B, 2010.

- [44] N.N. Bogoliubov, *Nuovo Cimento*, 7 (1958) 794.
- [45] J.G. Valatin, *Nuovo Cimento*, 7 (1958) 843.
- [46] P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer, New York (1980).
- [47] R.D. Woods and D.S. Saxon, *Phys. Rev.* 95 (1954) 577.
- [48] C.C.Tannoudji, B.Diu and F.Laloë, *Mécanique Quantique*, Vol 1, Hermann, Paris (1973).
- [49] A.Messiah, *Mécanique Quantique*, Tome 2, Dunod, Paris (1964).
- [50] N.H.Allal, Thèse de doctorat, U.S.T.H.B (1994).
- [51] J.Engel, K.Langanke and P.Vogel, *Phys. Lett.* B389 (1996) 211.
- [52] D. Mokhtari, I. Ami, M. Fellah and N. H. Allal, *Int. J. Mod. Phys.* E17 (2008) 655.
- [53] I. Ami, Mémoire de Magister, USTHB, 2005.
- [54] M.Fellah, Thèse de doctorat de troisième cycle, Université d'Alger (1969).
- [55] A.Goswami, *Nucl.Phys.* 60, 228 (1964).
- [56] K. M. Brown, "Numerical Solution of systems of Nonlinear Algebraic Equations" Edited by G.D. Byrne and C.A. Hall, Academic Press, New-York (1973) 281.
- [57] M. Fellah, N. H. Allal, M. Bellabbas, M.R. Oudih and N. Benhamouda, *Phys. Rev.* C76 (2007) 047306.
- [58] H.J. Lipkin, *Ann. Phys. Rev. New York*, 9 (1960)272.