N° d'ordre : 08/2004 – M/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة هواري بومدين
للعلوم والتكنولوجيا
U S T H B

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE

FACULTE DES MATHEMATIQUES

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

en **MATHEMATIQUES**

Spécialité: **Recherche Opérationnelle (Mathématiques de Gestion)**

Par

MAACHOU NACERA

Sujet

Optimisation Multi-Objectifs Discrète d'un Problème Fractionnaire Quadratique

Soutenu publiquement le 25/05/2004 devant le jury composé des Me :

ABBAS Moncef	Professeur, USTHB (Alger)	Président
MOULAI Mustapha	Maître de Conférences, USTHB (Alger)	Directeur de thèse
AÏT HADDADENE Hacène	Maître de Conférences, USTHB (Alger)	Examinateur
BERRACHEDI Abdelhafid	Maître de Conférences, USTHB (Alger)	Examinateur
CHERGUI Mohamed EL-Amine	Chargé de Recherche, USTHB (Alger)	Examinateur

Table des matières

Chapitre II. La Programmation Fractionnaire Unicritère (PFU)

CHAPITRE III. La Programmation Fractionnaire Linéaire Multi-objectifs à variables Entières (PFLME)

Chapitre IV. Une Méthode d'Optimisation Mono-objectifs Discrète d'un Problème Fractionnaire Quadratique (MODPFQ)

Chapitre V. Une Méthode d'Optimisation Multi-objectifs Discrète d'un Problème Fractionnaire Quadratique (MOMDPFQ)

RESUME

Les différents travaux de recherche présentés dans cette thèse ont trait à l'optimisation multi-objectifs fractionnaire quadratique en présence de variables entières. Notre premier objectif fut la réalisation d'une étude détaillée sur la programmation fractionnaire en passant en revue l'important de la littérature existante dans la programmation fractionnaire linéaire discrète [2]. En s'appuyant sur un concept introduit par R. Gupta et M.C. Puri dans [18] et sur une technique de coupes planes présentée par M. Abbas et M. Moulaï dans [4], une nouvelle méthode de résolution du problème fractionnaire quadratique en variables entière a été mise au point. Ensuite, notre attention s'est focalisée sur la maîtrise des concepts de la programmation fractionnaire linéaire multi-objectifs discrète PFLME dans le but de surmonter la difficulté de résolution du problème fractionnaire quadratique discret multi-objectifs (PFLEM) représentant le noyau du thème de notre thèse. L'étape finale fut l'élaboration d'une méthode discrète exacte de résolution d'un problème fractionnaire quadratique à objectifs multiples dont l'algorithme converge en un nombre fini d'étapes. Un code a été écrit en langage MATLAB permettant la résolution des problèmes discrets linéaires, fractionnaires linéaires et fractionnaires quadratiques.

INTRODUCTION GENERALE

D'un point de vue général, nous dirons que la recherche opérationnelle a pour objet de développer des concepts, des modèles et des méthodologies destinés à conduire des processus de décision. L'une des principales missions pour laquelle la recherche opérationnelle s'est vouée est d'aider à la prise de décision et à la gestion.

Les modèles traditionnels développés dans le cadre des méthodes quantitatives de gestion considéraient en général un objectif unique pour lesquels il existe des solutions optimales. Les algorithmes mis au point consistent alors à définir un moyen d'atteindre, le plus rapidement possible, une telle solution. Cependant, dans de nombreux cas, cette modélisation des problèmes ne traduit pas exactement la réalité à appréhender.

Une autre façon plus réaliste de modéliser les problèmes a vu le jour, il y a maintenant une trentaine d'années, permettant une représentation fidèle de la réalité.
La nouveauté consiste à optimiser un ou plusieurs objectifs linéaires ou non linéaires éventuellement conflictuels simultanément.
Aussi, les chercheurs sont confrontés non plus à la recherche d'une solution optimale mais à la recherche des conséquences d'une décision afin d'élaborer des procédures d'aide à la décision.

Toute la difficulté de ce genre de problèmes réside dans le fait que le sens « moins bien » pour un objectif correspondant au sens du « mieux » pour un autre objectif : il faut donc reconstruire un équilibre du système appelé *solution de compromis* et dépendant des préférences du décideur.

Aussi, nous nous sommes rendu compte que les publications traitant de l'optimisation fractionnaire linéaire en nombres entiers sont relativement peu nombreuses en particulier lorsqu'on est amené à représenter la réalité en écrivant la fonction objectif sous forme d'un produit ou d'une somme de deux fonctions fractionnaires linéaires. Cet état de choses, bien que source de difficultés potentielles, nous a davantage motivé pour explorer cette classe de problèmes. Il s'agit de l'optimisation fractionnaire quadratique en nombres entiers.

Dans cette thèse, la programmation mathématique multi-objectifs représente le cadre général de ce travail. On s'est particulièrement intéressé au cas où les objectifs sont fractionnaires quadratiques et les contraintes linéaires en présence de variables entières (PFQME) vu le large champ d'application (la gestion des ressources hydrologiques, finances, l'irrigation,…etc).

Notre premier objectif fut de réaliser une étude détaillée sur la programmation fractionnaire mono-objectif (PF) en passant en revue l'important de la littérature existante {voir [2][23][29]} dans le but d'aboutir à un passage possible de l'aspect fractionnaire linéaire au fractionnaire quadratique. Ensuite de l'aspect fractionnaire quadratique mono-objectif au fractionnaire quadratique multi-objectifs. Ce dernier nous a conduit à mettre au point une méthode de résolution d'un problème discret fractionnaire quadratique.
Ensuite, notre attention s'est focalisée sur la maîtrise des concepts de la programmation fractionnaire linéaire multi-objectifs discrète PFLME dans le but de surmonter la difficulté de résolution du problème fractionnaire quadratique discret multi-objectifs (PFLEM) représentant le noyau du thème de notre thèse. L'étape finale fut l'élaboration d'une méthode discrète exacte de résolution d'un problème fractionnaire quadratique à objectifs multiples dont l'algorithme converge en un nombre fini d'étapes. Un programme informatique (code) a été écrit en langage MATLAB permettant la résolution des problèmes discrets linéaires, fractionnaires linéaires et fractionnaires quadratiques mono-objectif et multi-objectifs.

Notre thèse comporte cinq chapitres :
Le premier chapitre porte sur les principaux résultats de la programmation linéaire, notamment les méthodes de résolution les plus souvent utilisées dans ce domaine.
Le chapitre 2 est consacré à la programmation fractionnaire linéaire mono-objectif. Un panorama actualisé des méthodes de résolution en variables continues {[11],[23]} et en variables entières {[16],[18]} est donné suivi d'une analyse bibliographique.
Le chapitre 3 se focalise sur la programmation fractionnaire multi-objectifs en variables entières et sur quelques travaux récents existants en littérature.

Le chapitre 4 présente une méthode de résolution d'un problème fractionnaire quadratique en nombres entiers. Cette méthode est basée sur un concept introduit par R. Gupta et M.C. Puri dans [18] et sur la méthode de M. Abbas et M. Moulaï dans [5].
Le chapitre 5 est consacré à une méthode de détermination de l'ensemble de toutes les solutions entières efficaces basée sur l'approche de résolution due à M. Abbas et M. Moulaï [5]. Et enfin, nous terminons par une conclusion générale.

CHAPITRE I

Notions fondamentales sur la programmation Linéaire

I.1/ Introduction:

Dans ce chapitre, nous faisons des rappels sur les principaux résultats de la programmation linéaire à variables continus et à variables entières. Nous aborderons les différentes méthodes de résolution nécessaires pour l'étude et la résolution d'un problème fractionnaire quadratique en nombres entiers à un objectif et multi-objectifs dans les prochains chapitres. Nous commençons par énoncer quelques propriétés sur les points et les ensembles dans R^n , ensuite nous décrirons les méthodes qui sont les plus souvent utilisés pour la résolution d'un problème linéaire à variables continus et à variables entières.

I.2/ Propriétés des points et des ensembles dans R^n

I.2.1/ Ensembles ouverts et fermés

Une n-dimension hypersphere ouverte centrée en $\bar{x} \in R^n$ et de rayon $\delta > 0$ est l'ensemble $H_{S'} = \{x \in R^n /(x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2 + \ldots + (x_n - \bar{x}_n)^2 < \delta^2\}$.

Dans R une hypersphere est un intervalle ouvert. Dans R^2 une hypersphere est un disque qui ne contient pas de périphérique. Dans R^3 une hypersphere est une sphère qui ne contient pas de surface, et ainsi de suite.

Un point $\bar{x} \in S' \subset R^n$ est un point intérieur de S' si et seulement si $\bar{x}$ appartient à une n-dimension hypersphere ouverte $H_{S'}$ centrée en $\bar{x}$ tel que $H_{S'} \subset S'$. Un ensemble est ouvert si tout ses éléments sont des points intérieurs. Si S' est un ensemble *ouvert*, alors son complément est un ensemble fermé, et vice versa. Un ensemble fermé contient tout ses points frontières. Un point *frontière* de $S' \subset R^n$ est un point $\bar{x} \in \Re^n$ tel que chaque n-dimension hypersphere centrée en $\bar{x}$ contient des points de S' et des points qui ne sont pas de S'. La fermeture de S' est la réunion de S' et son ensemble de points frontières.

Un ensemble $S' \subset R^n$ est borné si et seulement si il existe une n_dimension hypershere qui contient S'. Sinon, l'ensemble est non borné.

Exemple. L'ensemble de la fig.1.a est fermé et borné mais ne contient aucun point intérieur. L'ensemble de la fig.1.b est borné mais ni ouvert ni fermé. L'ensemble de fig.1.c est fermé et non borné.

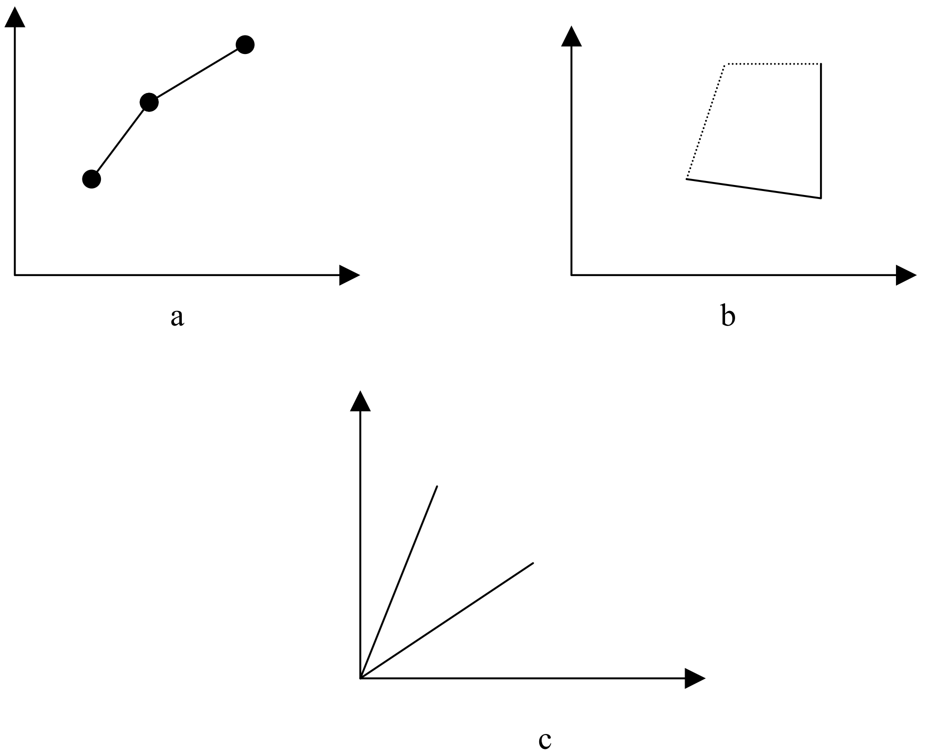


Fig.1

I.2.2/ Ensembles convexes et points extrêmes

Un ensemble $S' \subset R^n$ est convexe si et seulement si pour tout $x^1, x^2 \in S'$ le point $(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \in S'$ pour tous $\lambda \in [0,1]$. Sinon, l'ensemble est non convexe. Ou encore, un ensemble est convexe lorsque tous les points appartenant au segment reliant deux points quelconques de l'ensemble sont dans l'ensemble. L'ensemble vide est par convention convexe.

Soit $S' \subset R^n$, un point $\bar{x} \in S'$ est un point extrême (parfois appelé *sommet*) de S' si et seulement si il n'existe pas deux points $x^1, x^2 \in S', x^1 \neq x^2$ tels que $\bar{x} = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ pour une valeur $\lambda \in \left]0,1\right[$. Ou encore, un point extrême est un point qui ne peut s'écrire comme combinaison convexe stricte de deux points différents de l'ensemble en question. Par sa définition, un point extrême ne peut être un point intérieur. Donc, tous les points extrêmes sont des points frontières.

I.2.3/ Dimension et addition d'ensembles

Un ensemble de vecteurs $\{v^1, v^2, \dots, v^l\}$, où $v^i \in R^n$, i=1, …, l, est linéairement indépendant si et seulement si la seule combinaison linéaire nulle s'obtient avec les coefficients nulles.

Soit $\bar{x} \in S' \subset R^n$. Alors, le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants dans $\{(x - \bar{x}) \in R^n / x \in S'\}$ spécifie la dimension de S'.

Soient X et Y deux ensembles dans R^n. Alors, l'ensemble addition de X et Y (noté X⊕Y est donné par

$X \oplus Y = \{z \in R^n / z = x + y, x \in X, y \in Y\}$

Ce qui signifie que chaque point de X est rajouté à chaque point de Y.

I.2.4/ Hyperplans et demi espaces

Un hyperplan est une variété linéaire de dimension n-1 de R^n fermé et convexe.

H est un hyperplan s'il existe un $\bar{z} \in R$ tel que H=$\{x \in R^n / c^T x = \bar{z}\}$. Chaque hyperplan définit deux demi-espaces.

Les ensembles formés par l'intersection d'un nombre fini de demi- espaces sont polyédriques et possédant un nombre fini de points extrêmes et d'arêtes infinies.

Un polyèdre convexe est l'intersection (éventuellement vide) d'un nombre fini de demi- espaces fermés et/ou d'hyperplans. Un polyèdre convexe, borné et non vide, est appelé un polytope.

Soit $S' \subset R^n$ et H un hyperplan de R^n. Alors, H est un hyperplan de soutien de S' en $\bar{x} \in S'$ si $\bar{x} \in H$ et tout ensemble S' est dans l'un des demi-espaces définis par H.

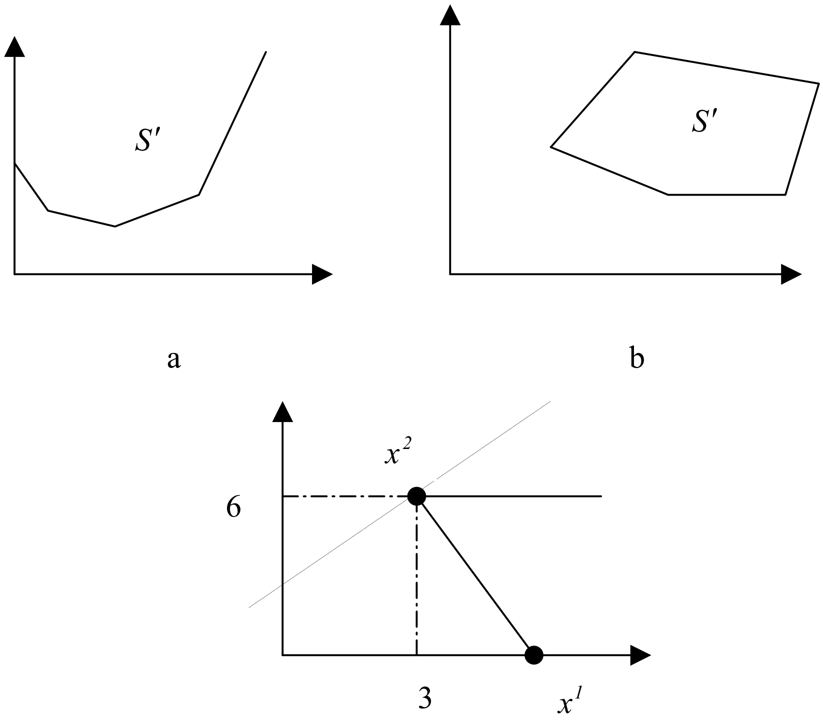
Exemple. Dans la fig.2.a, l'ensemble S' est un polyèdre. Dans la fig.2.b, l'ensemble S' est un polytope. Dans la fig.2.c, l'ensemble S' est l'intersection des trois demi-espaces

$$\{x \in R^2 / 2x_1 + x_2 \geq 12\}$$

$$\{x \in R^2 / x_2 \leq 6\}$$

$$\{x \in R^2 / x_2 \geq 0\}$$

L'hyperplan défini par $-x_1 + 3x_2 = 15$ (en discontinu) Soutient S' en $x^2 = (3,6)$.



a b

c

Fig.2

I.2.5/ Ensembles connexes

Soit $S' \subset R^n$. Alors S' est connexe s'il ne s'écrit pas comme réunion disjointe de deux ouverts non vides (de façon équivalente, si les seules parties à la fois ouvertes et fermées de S' sont l'ensemble vide et S' lui-même).

I.3/ Quelques résultats sur la programmation linéaire à variables continues

I.3.1/ Formulation du problème :

Il s'agit d'un problème dans lequel les variables sont réelles et doivent satisfaire un ensemble d'équations et/ou d'inéquations linéaires (dites « contraintes ») et la valeur d'une fonction linéaire de ces variables (appelée « fonction objectif ») doit être rendue minimum (ou maximum) . La forme générale du problème de la programmation linéaire, noté (P), est la suivante :

$$(P)\quad \begin{cases} Opt \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \\ s.c. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ \begin{matrix}\le\\ \ge\end{matrix}\ b_i \qquad i=1,\dots,m \\ \\ \quad x_j \ge 0, \qquad j=1,\dots,n \end{cases}$$

où c_{ij}, a_{ij}, b_i sont des constantes et x_j des variables

z : représente la fonction objectif à optimiser,

$x \in R^n$: désigne un vecteur solution à composantes réelles positives.

Cette forme générale peut être simplifiée : en effet, il est possible de ramener le problème à des formes plus compactes, mais équivalentes, en particulier aux formes « canoniques » et « standards ». Dans la suite de ce travail nous utiliserons la forme canonique.

De manière évidente, il est toujours possible de ramener :

- L'optimisation à une minimisation ou maximisation (maximiser le fonction z est équivalent à minimiser la fonction « $-z$ ») ;
- Toutes les inégalités ($\ge$) peuvent devenir de inégalités de forme ($\le$) (il suffit de multiplier l'inégalité par (-1)).

Le programme linéaire est de forme canonique, si toutes les contraintes sont sous forme d'inégalités. Donc, toutes les contraintes d'égalités sont soumises sous forme d'inégalité au prix d'un dédoublement, le système de contraintes devient :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le -b_i \end{cases}$$

Pour obtenir la forme standard, toutes les contraintes d'inégalités sont soumises sous forme d'égalité par l'introduction des variables d'écart non négatives, le système de contraintes devient :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i, et\ s_i \ge 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - s_i = b_i, et\ s_i \ge 0$$

Notons par :

S' : L'ensemble des solutions réalisables réelles. S' est défini par les contraintes linéaires

$$S' = \left\{ x \in R^n / \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1,\ldots,m, \quad x \geq 0 \right\}$$

I.3.2/ Caractérisation des solutions réalisables

L'ensemble des solutions réalisables d'un problème linéaire est soit

1. Un polytope ;
2. Un polyèdre convexe, non vide mais non borné ;
3. Un ensemble vide.

I.3.3/ Caractérisation géométrique des solutions optimales

1. Si S' est un polytope :
   - Soit la solution optimale est unique et située en un sommet de S' ;
   - Soit il existe une infinité de solutions optimales qui sont les points d'une face S' ; ces solutions sont donc une combinaison convexe d'un nombre fini de sommets.
2. Si S' est un polyèdre convexe, non vide mais non borné, il est possible que le problème n'ait pas de solution optimale à distance finie ; il existe alors une solution réalisable (à l'infini) telle que $z = -\infty$.
3. Si $S' = \phi$, le problème n'a pas de solution optimale.

I.3.4/ Propriétés fondamentales de caractérisation des sommets

Le problème de PL étant mis sous forme standard, chaque sommet du polyèdre S' correspond à une et une seule solution réalisable et inversement, cette solution est appelée *solution réalisable de base* à laquelle correspond une base réalisable notée B .

I.3.5/ L'algorithme simplexe

L'algorithme simplexe s'interprète comme un mouvement de sommet en sommet adjacent du polyèdre. Lorsqu'en un sommet, il n'y a pas d'arête le long de laquelle la fonction objectif croisse, l'optimum est atteint. Autrement dit, l'algorithme simplexe est une procédure itérative qui converge vers la (les) solution(s) de base réalisable(s) fournissant l'optimum de la fonction objectif. Ou à défaut, mettre en évidence, le fait que le problème n'a pas de solution optimale (ensemble non borné).

L'algorithme de simplexe contient deux phases :

Phase I. *procédure d'initialisation*

Déterminer une première solution réalisable de base, c'est-à-dire les coordonnées d'un premier sommet de S'. Si cette procédure échoue, cela signifiera que l'ensemble S' des solutions réalisables est vide, et que le problème est impossible (les contraintes ne peuvent pas être satisfaites simultanément).

Phase II. *Procédure itérative*

Calculer, à partir d'une solution de base réalisable, une autre solution de base donnant une valeur meilleure de la fonction objectif; géométriquement, comme il a été cité plus haut, une itération consistera à passer d'un sommet du polyèdre S' à un autre sommet du polyèdre S', adjacent au précédent. Les coordonnées de ces deux sommets adjacents correspondent à deux solutions réalisables de base. Cette caractéristique permettra de déterminer relativement aisément la nouvelle solution réalisable de base à partir de l'ancienne.

Il existe deux tests d'arrêt pour la procédure de simplexe:

- Une solution optimale est déterminée.
- Il n'existe pas de solution optimale finie: S' est non borné et la fonction objectif peut tendre vers l'infini.

I.3.6/ L'algorithme dual simplexe

Soit le problème primal (Pr) à *résoudre,* sous la forme standard:

$$(Pr)\begin{cases} Max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \\ s.c. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\dots,m \\ \qquad x_j \ge 0, \qquad j = 1,\dots,n \end{cases}$$

Le problème dual s'écrit

$$(Pd)\begin{cases} Min \quad w = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i \\ s.c. \quad \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \ge c_{ij}, \quad j = 1,\dots,n \\ \qquad y_i \ge 0 \qquad i = 1,\dots,m \end{cases}$$

On suppose que la base initiale B est disponible. Sinon, appliquer la méthode des variables artificielles.
Le principe de la méthode dual simplexe, est de démarrer d'une solution primale (irréalisable) satisfaisant aux critères d'Optimalités: autrement dit, le raisonnement se fera sur les solutions de base $y^{(B)}$, mais les calculs s'effectueront sur les solutions $x^{(B)}$. C'est à dire que l'algorithme dual de simplexe s'applique sur le problème primal et non au dual. Comme pour l'algorithme de simplexe, l'algorithme dual contient deux phases.

Phase I. *Procédure d'initialisation*
Déterminer une première base duale réalisable. Cette phase n'est donc pas nécessaire que si la base initiale, supposée déterminée par hypothèse, n'est pas duale réalisable. Si une telle base n'existe pas, cela signifie géométriquement, le polyèdre des solutions réalisables du dual est vide. Donc, le problème dual n'admet pas de solution et il en résulte que soit le problème primal n'admet pas de solution, soit il est non borné.

Phase II. *Procédure itérative*
Partir d'une première solution non réalisable et se déplacer de solution de base non réalisable en solution de base non réalisable en faisant des concessions sur la fonction objectif.
La procédure s'arrêtera, dès qu'on trouve une solution réalisable.

I.4/ Quelques résultats sur la programmation linéaire à variables entières

Lorsque les variables d'un programme mathématique représentent des décisions stratégiques, ou simplement lorsque certaines variables ne peuvent prendre des valeurs fractionnaires, il faut intégrer dans le modèle des contraintes d'intégralité : le problème n'a de sens que si toutes les variables, ou une partie d'entre elles, prennent des valeurs entières. Ceci modifie profondément la nature des programmes linéaires. Lorsque toutes les variables doivent être entières, le problème résultant, est le problème général de programmation linéaire totalement à variables entières suivant :

$$\begin{cases} Max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \\ s.c. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\dots,m \\ \quad x_j \text{ entier non negatif} \end{cases}$$

Exemple. Soit le (PLE) suivant :

$$(IPL)\begin{cases} Max \quad z = x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ 2x_1 \le 11 \\ 2x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \quad entier \end{cases}$$

Si l'on oublie la contrainte d'intégralité, la solution optimale du problème (PL) est le point $(\frac{7}{2},\frac{7}{2})$, correspondant à la valeur de la fonction objectif $z_{PL} = \frac{21}{2}$. En tronquant, on obtient la solution optimale entière qui est le point $(4,3)$, correspondant à la valeur de la fonction objectif $z_{PLE} = 10$.

I.4.1/ Méthodes des coupes pour la résolution d'un problème PLE

Les méthodes de coupes sont des algorithmes exacte pour les problèmes PLE. Ces méthodes se sont révélés très performantes ces dernières années, particulièrement lorsqu'elles sont combinées de façon efficace avec la technique de Branch-and-Bound. Ces méthodes résolvent une séquence de relaxations du problème PLE. Les solutions obtenues sont graduellement améliorées pour donner une meilleure approximation de la solution optimale du problème. Pour les grandes instances, le problème PLE ne peut pas être résolu à l'optimum, les algorithmes de coupes produisent alors des solutions relativement proches d'une solution optimale en un temps d'exécution raisonnable, avec une garantie sur la valeur de l'approximation.

Les algorithmes de coupes pour la résolution d'un problème PLE ont été d'abord proposés par R. E. Gomory [15]. Les progrès réalisés durant las années quatre vingt dans la théorie polyèdrale ont fait resurgir les méthodes de coupes qui sont maintenant devenues des méthodes de choix pour une variété de problèmes, tel que le problème du voyageur de commerce.

Définitions

1. Etant donné un problème PLE (P_E), on dit que l'inéquation :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \leq \beta$$

est valide si elle est satisfaite par tout point de S. Une coupe est une inéquation qui n'est pas satisfaite pour tout point de S', domaine des solutions réalisables de la relaxation (P_c) de (P_E).

2. Si a est un scalaire quelconque, on désigne par:
   - $\lfloor a \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à a ;
   - $\lceil a \rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal à a ;
   - $\langle a \rangle = a - \lfloor a \rfloor$, est appelé la partie fractionnaire de a et $\lfloor a \rfloor$ sa partie entière.

Les structures basiques de l'algorithme de coupe:

1. Résoudre le programme linéaire relaxé du problème PLE considéré.
2. Si la solution obtenue est réalisable pour le problème PLE, terminer, la solution est optimale.
3. Sinon, déterminer une ou plusieurs coupes qui séparent la solution optimale du problème relaxé de l'enveloppe convexe de S , et injecter les dans le système de contraintes du problème relaxé.
4. Revenir à la première étape

Typiquement, le problème relaxé est résolu en utilisant l'algorithme simplexe. Après avoir rajouter les coupes, le problème est *ré-optimisé* en utilisant la méthode dual simplexe. Noter que les valeurs des fonctions objectifs des problèmes relaxés fournissent une borne inférieure (supérieure pour les problèmes de maximisation) pour la valeur optimale de ces fonctions. Ces bornes supérieures peuvent être utilisées pour mesurer la progression vers la valeur optimale.

I.4.2/ Méthode dual fractionnaire

Cette méthode consiste à appliquer l'algorithme décrit ci-dessus en introduisant l'un des types de coupes suivants:

Soient

$\bar{J}$: l'ensemble des indices des variables de bases associés au tableau du simplexe courant;

x^* : la solution de base optimale courante du problème relaxé en utilisant l'algorithme simplexe;

Si x^* n'est pas entière, choisissons x_j^* fractionnaire et considérons la ligne correspondante dans le tableau simplexe

$$x_j + \sum_{i \in \bar{J}} \alpha_i x_i = x_j^* \tag{1}$$

Proposition 1.1[15]

L'inégalité

$$\sum_{i \in \bar{J}} \lfloor \alpha_i \rfloor x_i \geq \lfloor x_j^* \rfloor \tag{2}$$

est violée par x^*, vérifiée par toutes les solutions non négatives entières que vérifie (1), et par conséquent par toutes les solutions réalisables entières.

Proposition 1.2[15]

Pour tout entier t, la coupe :

$$\sum_{i \in \bar{J}} \lfloor t\alpha_i \rfloor x_i \geq \lfloor t x_j^* \rfloor \tag{3}$$

Est satisfaite par toutes les solutions non négatives entières que vérifie (1), par conséquent par toutes les solutions réalisables entières.

I.5/ Procédure par séparation et évaluation (Branch and Bound)

Les méthodes de « Branch and Bound » B&B ont été spécialement élaborées pour des problèmes à variables discrètes.

$$(P)\begin{cases} Max & z(x) \\ s.c. & x \in S \end{cases}$$

Le principe général de cette méthode est d'énumérer toutes les solutions de S, c'est-à-dire, à chaque étape, on subdivise l'ensemble S en un nombre fini de sous ensembles $S^{(i)}$ en veillant à ce que :

$$\bigcup_{i=1}^{p} S^i = S$$

De cette façon, le problème est réduit à l'étude des problèmes P_i plus restreints :

$$(p_i)\begin{cases} Max & z(x) \\ s.c. & x \in S^i \end{cases}$$

Il sera généralement conseillé de choisir une subdivision qui correspond à une partition de S, c'est-à-dire qui vérifie également :

$S^i \cap S^j = \phi,\ \forall(i,j),\quad i \neq j$

Ces subdivisions successives sont représentées à l'aide d'une arborescence (Fig.3)

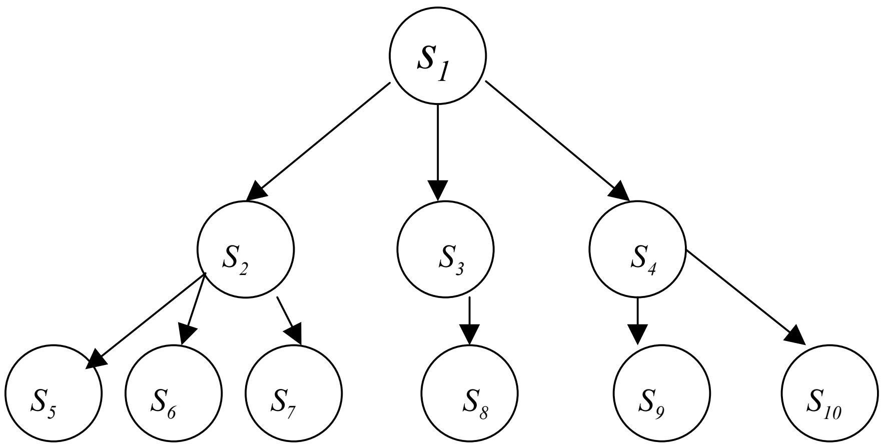


Fig.3

Une méthode de Branch and Bound sera essentiellement constituée de trois éléments principaux :

Procédure de séparation

Qui à chaque fois qu'il est nécessaire de séparer un ensemble de solutions, déterminera combien de sous-ensembles considérer et comment les constituer.

Procédure d'évaluation

Elle consiste à analyser un sous problème : pour l'essentiel, cette analyse vise à évaluer la valeur optimale de la fonction objectif du sous problème, plus précisément à déterminer une borne inférieure (supérieure pour un problème de maximisation) de cette valeur.

Procédure de cheminement

Elle indique quels sous-ensemble analyser et dans quel ordre. Bien évidement, il est souhaitable d'examiner le moins de sous-ensemble possible : certains d'entre eux pourront ne peut pas être séparés car, par exemple, leur analyse mettra en évidence qu'ils ne contiennent pas de solutions meilleures que celles déjà trouvées. Nous dirons qu'un tel sous-ensemble, ou nœud correspondant à l'arborescence, est *sondé*. C'est parce que certains sous-ensembles ne devront pas être examinés explicitement que les méthodes B&B sont parfois appelées *méthodes d'énumération implicite.*

Lorsqu'un nœud de l'arborescence est sondé, il conviendra de remonter dans l'arborescence vers un autre nœud situé à un niveau inférieur ou égal dans l'arborescence , cette partie de la procédure de cheminement est souvent appelé "backtracking process"

Pour réaliser une énumération implicite efficace, il convient de définir le plus adéquatement possible la façon de cheminer dans l'arborescence. On peut distinguer deux grandes façons de procéder selon:

- Que la règle qui détermine le nœud suivant à examiner est fixé à priori, c'est à dire sans tenir compte en particulier de la valeur de la fonction d'évaluation si ce n'est pour sonder un nœud de l'arborescence;
- Qu'il s'agit d'une règle adaptative en ce sens que la sélection du nœud suivant à examiner dépendra de l'information recueillie lors de l'analyse des nœuds précédents et tout particulièrement des valeurs de la fonction d'évaluation.

Nous indiquons dans chacune des catégories, la règle la plus communément appliquée.

Procédure en profondeur d'abord (Depth first search). Parfois dénommée "prcédure par séparation et évaluation séquentielle (PSES)".

On y applique une règle à priori qui consiste:

- chaque fois qu'un sous-ensemble analysé n'est pas sondé, à sélectionner un seul des sous-ensembles de sa subdivision et toujours le même. Il s'agit évidemment de celui dont, a priori, on estime qu'il devrait contenir le meilleure solution. Traditionnellement, on situe systématiquement ce nœud suivant comme celui le plus à gauche de la subdivision;
- quand un nœud est sondé, on remonte dans l'arborescence (backtracking) jusqu'au premier nœud que l'on rencontre dont tous les sous nœuds n'ont pas encore été examinés, parmi ceux ci, le nœud le plus à gauche est sélectionné.

L'idée de cette procédure est bien sûr de descendre rapidement dans l'arborescence, sans examiner trop de nœuds et sans faire trop d'analyse, vers un nœud dont on espère qu'il contient une très bonne solution. Si c'est le cas, l'obtention de celle-ci permettra beaucoup plus de nœuds lors du processus de remonter dans l'arborescence.

Ce type de procédure est mieux adapté à des problèmes fort structurés pour lesquels, il est possible de suggérer une règle a priori. Son principal avantage est la facilité d'implémentation. L'évaluation de la fonction objectif dans la procédure d'évaluation ne sert donc qu'à sonder les sous-ensembles, et non pas comme le deuxième type de procédure, à déterminer le cheminement à suivre.

I.5/ Conclusion

Ce chapitre nous a permis de faire un tour d'horizon sur les travaux consacrés aux programmes linéaires à variables continues ou à variables entières. Nous avons abordés les résultats nécessaires pour la résolution du problème fractionnaire quadratique multi-objectifs à variables entières.

CHAPITRE II

La Programmation fractionnaire unicritere

II.1/ Introduction

Les programmes fractionnaires consistent à optimiser un objectif mis sous forme d'un rapport de deux fonctions linéaires ou non, soumis à un ensemble de contraintes. Différentes versions de ce modèle, linéaires ou non linéaires, en nombres entiers ou en continu, ont une multitude d'application que ce soit en optimisation combinatoire, en programmation stochastique, en bases de données ou en économie. Trois grandes stratégies de résolution d'un programme fractionnaire émergeant dans la littérature: la résolution directe, la résolution par paramétrisation et la résolution d'un problème équivalent à objectif simplifié.

Notations

$\lfloor \lambda \rfloor$: partie entière d'un nombre réel λ

Etant donné A une matrice de format mxn :

a_i^j : élément de la ligne i et de la colonne j de A, $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$

Etant donné un problème d'optimisation (P):

$\upsilon(P)$: la valeur optimale de (P)

$S(P)$: ensemble des solutions réalisables de (P).

II.2/ Présentation d'un Problème fractionnaire:

Etant donné f, h et g_i, $i = 1,...,m$, des fonctions réelles définies sur R^n, avec h ne s'annulant pas sur un sous-ensemble X de R^n, le problème de programmation fractionnaire consiste à déterminer un élément x^* de X optimisant la fonction f/h sur un domaine défini par le système de contraintes $g(x) \le 0$ avec x dans l'ensemble X. Le problème a donc, la forme suivante:

$$(P)\begin{cases} Max & \dfrac{f(x)}{h(x)} \\ s.c. & g(x) \le 0 \\ & x \in X \end{cases}$$

avec comme hypothèses classiques:

- $S(P) \neq \phi$;
- les fonctions f, h et g sont continues sur R^n;
- $\forall x \in X : h(x) > 0$;
- $\exists x \in S(P) : f(x) \ge 0$.

Lorsque la fonction f est concave et les fonction h et g sont convexes, (P) est désigné par programme fractionnaire concave-convexe. (P) est dit fractionnaire linéaire, ou encore hyperbolique, lorsque f, h et g sont des fonctions linéaires ou affines de la variable x. Le problème se modélise donc, comme suit:

$$\begin{cases} Max & \dfrac{cx+\alpha}{dx+\beta} \\ s.c. & Ax \le b \\ & x \in X \end{cases}$$

Lorsque les fonctions f et h sont quadratiques. Le problème se modélise comme suit :

$$\begin{cases} Max & \dfrac{C^T x + x^T Ex + \alpha}{D^T x + x^T Fx + \beta} \\ s.c. & Ax \le b \\ & x \in X \end{cases}$$

où α et β sont des réels, C et D sont des vecteurs de R^n, E et F des matrices de format $n \times n$, A est une matrice réelle de format mxn et b est un vecteur de R^m.

II.3/ Stratégies de résolution d'un programme fractionnaire

La forme particulière des programmes fractionnaires a fait que de nombreux auteurs ont entrepris d'élaborer des méthodes de résolution spécifiques qui se sont avérées plus efficaces que l'application directe de méthodes générales de programmation non linéaire.

Dans la littérature émergeant trois grandes stratégies de résolution d'un programme fractionnaire.

- *La résolution directe* (Sect. II.3.2) *:* Le programme est traité sous sa forme originale. Elle a été utilisée pour les programmes hyperbolique à variables bivalentes (0-1).
- *La résolution par paramétrisation* (Sect. II.3.3) *:* à l'inverse de la résolution directe, on construit un problème à objectif simplifié, combinaison linéaire du numérateur et du dénominateur par l'intermédiaire d'un paramètre, tout en gardant inchangé l'ensemble des contraintes. Une séquence de résolution de ce type de problème fournit une solution du programme fractionnaire. Cette méthode a été utilisée pour les différents programmes fractionnaires linéaires et non linéaires, à variables continues et à variables discrètes, sur des domaines bornés.
- *La résolution d'un programme équivalent* (Sect. II.3.4) *:* Un changement de variables permet lui aussi de simplifier l'objectif, mais en transportant la difficulté sur l'ensemble des contraintes. Par exemple un programme hyperbolique est transformé en un programme à objectif linéaire, avec des contraintes additionnelles.

II.3.1/ Applications

Les programmes fractionnaires linéaires ou non linéaires, en continu, à variables entières ou à variables 0-1 se rencontrent dans plusieurs domaines tels que les bases des données, la programmation stochastique et l'économie.

II.3.1.1/ Bases de données

L'optimisation des requêtes en recherche documentaire [29] est une application informatique qui débouche sur un programme hyperbolique à variables 0-1.

Plus précisément, étant donné un ensemble de documents avec attributs (mots-clés, mots d'un titre, noms d'auteurs,…etc.), le problème envisagé a trait à un système automatique de récupération de documents en réponse à une requête. Heine [21] a montré que l'efficacité d'un tel système dépend de la forme de requête et que l'écriture "optimale" de cette requête par un utilisateur est loin d'être évidente. Le but est donc d'établir une interface qui aide l'utilisateur à trouver une forme satisfaisante de requête. Le critère choisi est celui de Van Rijsbergen [31] qui, grâce à une étude mathématique basée sur la théorie de la mesure, a élaboré un critère d'évaluation de l'efficacité d'un système de recherche documentaire comme suit:

Pour une requête donnée, en notant Dr l'ensemble des documents récupérés, l'efficacité du système est fonction de deux paramètres fondamentaux:

- La précision, c'est à dire la probabilité pour que le document récupéré soit adéquat Da :

$$Pa = \frac{|Da \cap Dr|}{|Dr|}$$

- La récupération, c'est à dire la probabilité pour que le document adéquat soit récupéré:

$$Pr = \frac{|Da \cap Dr|}{|Da|}$$

Le critère à minimiser de Van Rijsbergen s'écrit :

$$VR(\alpha) = 1 - \frac{1}{\frac{\alpha}{Pa} + \frac{1-\alpha}{Pr}}$$

$$= \frac{\alpha|Dr| + (1-\alpha)|Da| - |Da \cap Dr|}{\alpha|Dr| + (1-\alpha)|Da|}$$

Où $\alpha \in [0,1]$ est un paramètre caractérisant la préférence pour la précision (proche de un) ou la récupération (α proche de zéro).

Par la suite on suppose que toute requête est mise sous forme normale disjonctive. En désignant par (clé)$_j$, $j = 1,...,n$, toutes les conjonctions logiques élémentaires possibles, en notant par Nr_j le nombre de documents récupérés correspondants et par Na_j celui des documents adéquats parmi les Nr_j récupérés, et en définissant enfin les variables bivalentes $x_j, j = 1,...,n$, comme suit:

$$x_j = \begin{cases} 1 & si\ \textbf{(clé)}_j \in \textbf{requête,} \\ \textbf{0} & \textbf{sinon,} \end{cases}$$

On obtient:

$$|Da| = \sum_{j=1}^{n} Na_j, \qquad |Dr| = \sum_{j=1}^{n} Nr_j x_j, \qquad |Da \cap Dr| = \sum_{j=1}^{n} Na_j x_j,$$

Avec ces notations, le critère à minimiser $VR(\alpha)$ s'écrit:

$$VR(\alpha) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(1-\alpha)Na_j + \sum_{j=1}^{n}(\alpha Nr_j - Na_j)x_j}{\sum_{j=1}^{n}(1-\alpha)Na_j + \sum_{j=1}^{n}\alpha Nr_j x_j}$$

Et ainsi le problème d'optimisation de requêtes a la forme générale d'un programme hyperbolique sans contraintes en variables 0-1:

$$\begin{cases} Min & \dfrac{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \alpha}{\sum_{j=1}^{n} q_j x_j + \beta} \\ s.c. & x_j \in \{0,1\} \qquad j = 1,\dots,n \end{cases}$$

Une limitation $\overline{Nr}$ sur le nombre global de documents à récupérer nécessiterait l'introduction d'une contrainte de type sac à dos:

$$\sum_{j=1}^{n} Nr_j x_j \leq \overline{Nr}.$$

II.3.1.2/ Génération de colonnes

Dans le but d'étendre la programmation linéaire généralisée au cas des programmes mixtes de grandes tailles, P. Hansen, M. Minoux, et M. Labbé [19] ont proposé des procédures arborescentes utilisant l'algorithme dual du simplexe, et dans lesquelles la génération des colonnes est réalisée par résolution de programmes fractionnaires en nombres entiers avec contraintes.

Soit donc la forme standard d'un programme linéaire mixte à m contraintes dont le nombre n de variables démesurément grand (par exemple la matrice de contraintes ne peut être connue explicitement) :

$$\begin{cases} Min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.c. & \sum_{j=1}^{n} A^j x_j = b \\ & x_j \geq 0, \quad j \in J = \{1,\dots,n\} \\ & x_j \text{ entier}, \quad \forall j \in J_E \subset J; J_E \neq \phi \end{cases}$$

Dans une méthode classique de Branch and Bound, considérons la solution optimale $\bar{x}$ du problème linéaire associé au problème courant, B la matrice de base, J_B l'ensemble des indices

des variables de base et $J_N = J_{sup} \cup J_{inf}$ celui des indices des variables hors-base (J_{sup}($resp. J_{inf}$) est l'ensemble des indices des variables hors-base à leurs borne supérieure (resp.inférieure)).
S'il existe $i \in J_B \cap J_E$ tel que $\bar{x}_i \notin N$, ce problème courant est séparé en deux sous problèmes par ajout de la contrainte $x_i \leq \lfloor \bar{x}_i \rfloor$ d'une part, et de la contrainte $x_i \geq \lfloor \bar{x}_i \rfloor + 1$ d'autre part.
Pour le sous-problème incluant par exemple la contrainte $x_i \geq \lfloor \bar{x}_i \rfloor + 1$, la détermination de la variable x_k entrant dans la base, consiste à déterminer une colonne A^k telle que

$$\frac{\pi A^k - c_k}{\beta A^k} = min\left\{ min\left\{ \frac{\pi A^j - c_j}{\beta A^j} / \beta A^j < 0, j \in J_{inf} \right\}; min\left\{ \frac{\pi A^j - c_j}{\beta A^j} / \beta A^j > 0, j \in J_{sup} \right\} \right\}$$

où π est le multiplicateur du simplexe (c'est-à-dire $c_B B^1$) et β est la ligne i de B^{-1} (itération courante de l'algorithme dual du simplexe).

Par exemple, considérons le problème de découpe unidimensionnelle qui consiste à minimiser la chute. On suppose que les pièces à découper ont une longueur commune L, que les demandes des clients correspondent à b_i pièces de longueur $l_i, i = 1,...,m$. Les colonnes de la matrice des contraintes A représentent les n possibilités de découpes satisfaisantes. Plus précisément, pour tout $j \in \{1,...,n\}$ et tout $i \in \{1,...,m\}$, a_{ij} représente le nombre de découpes de longueur l_i. La variable de décision x_j représente le nombre d'utilisation du type de découpe représenté par a_{ij}, et tout les coûts c_j valent 1, $j = 1,...,n$. Pour ce problème de découpe, il faut donc résoudre deux programmes hyperboliques en variables entières dont le premier type :

$$\begin{cases} Min & \dfrac{\sum_{i=1}^{m} \pi_j y_j - 1}{\sum_{i=1}^{m} u_j y_j} \\ s.c. & \sum_{i=1}^{m} l_i y_j \leq L \qquad i = 1,...,m \\ & \sum_{i=1}^{m} u_i y_j \leq 0 \qquad j = 1,...,n \\ & y \in N^m, y \notin \{A^j / j \in J_{sup}\} \text{ (solutions interdites)} \end{cases}$$

et dont la solution optimale y^* permet de spécifier la colonne A^k.

II.3.1.3/ Parametrisation d'un programme linéaire

Considérons un programme linéaire mis sous forme standard:

$$(P)\begin{cases} Min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.c. & \sum_{j=1}^{n} A^j x_j = b \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

Lorsqu'un seul coefficient c_p de l'objectif, $p \in \{1,\ldots,n\}$, varie (les autres étant tous constants) la valeur optimale de (P) est une fonction de c_p concave linéaire par morceaux. Etudier l'effet d'une variation du coefficient c_p sur la valeur optimale $\upsilon(P)$ de (P) peut se ramener à un programme fractionnaire.

Par exemple, en supposant que $\upsilon(P)$ est finie, une forme d'analyse de sensibilité peut être la suivante:
quelle est la valeur maximale de c_p telle que la valeur associée du problème ne dépasse pas $\theta\upsilon(p)$, avec $\theta \in [0,1]$ donné?
En posant $y = c_p x_p$, en supposant la valeur optimale de x_p non nulle (*i.e.* positive), la question se formule comme suit:
quelle est la valeur du programme hyperbolique en variables continues suivant?

$$(P)\begin{cases} Min & \dfrac{y}{x_p} \\ s.c. & \sum_{j=1}^{n} A^j x_j = b \\ & \sum_{j \neq p} c_j x_j + y \leq \theta\upsilon(P) \\ & y \geq 0, x_j \geq 0, \quad j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

II.3.1.4/ Programmation stochastique

Considérons le programme linéaire :

$$\begin{cases} Max & cx \\ s.c. & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{cases}$$

et supposons que les composantes de l'objectif c sont non constantes, indépendantes et varient suivant une loi de probabilité donnée. La programmation stochastique (PS) se propose de maximiser la probabilité pour que la valeur de l'objectif soit supérieure à une valeur donnée k, c'est à dire:

$$(PS_k) \qquad \underset{\omega \in \Omega}{Max}\, P\{\omega : (\exists x \geq 0), Ax = b, c(\omega)x \geq k\}$$

où la notation $c(\omega)$ signifie qu'elle est une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité de mesure P.

Lorsque les composantes c_j considérées comme des variables aléatoires, suivent une loi de Gauss ayant m comme moyenne et V comme covariance, Bereanu [8] a montré que le programme (PS_k) est équivalent au programme déterministe suivant:

$$\begin{cases} Max & \dfrac{m^T x - k}{(x^T V x)^{\frac{1}{2}}} \\ s.c. & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{cases}$$

qui est un programme fractionnaire linéaire-convexe à variables continues.

II.3.2/ Résolution directe

Cette section traite des méthodes qui résolvent le programme fractionnaire sous sa forme originale, c'est à dire sans modifier ni l'objectif ni l'ensemble des contraintes. Cette approche est utilisée pour résoudre les programmes hyperboliques à variables entières (en particulier en 0-1).

Le premier paragraphe est consacré au programme hyperbolique à variables continues, le second, au programme hyperbolique à variables entières, tandis que le troisième, est consacré au programme fractionnaire quadratique en points extrêmes.

II.3.2.1/ Programmation hyperbolique en variables continues

Plusieurs approches furent élaborées [12,13]pour la recherche d'une solution optimale d'un programme hyperbolique à variables continues. Parmi les plus récentes, celle de A. Cambini et L. Martein [9] qui permet aussi d'optimiser le problème hyperbolique sur un domaine de solutions réalisables S non borné. Les grandes lignes de cette méthode sont présentées ci-dessous:

On considère le programme hyperbolique continu (P) :

$$\begin{cases} Max & \dfrac{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \alpha}{\sum_{j=1}^{n} q_j x_j + \beta} \\ s.c. & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{cases}$$

où α et β sont des réels, p et q sont des vecteurs de R^n, A est une matrice réelle de format $m \times n$ et b est un vecteur de R^m.

L'algorithme génère une séquence finie x_i, $i = 1,...,l$ de solution niveau optimale dont la première est trouvée de la façon suivante:
Résoudre le problème linéaire $P_0 : \min_{x \in S}(qx + \beta)$ et considérons x^0 comme une solution optimale (le programme P_0 possède une solution optimale, puisque sa fonction objectif est bornée). Si x^0 est unique, alors elle est aussi une solution niveau optimale, sinon résoudre le problème linéaire

$$(P_1)\begin{cases} Max & px + \alpha \\ s.c. & qx = qx^0 \\ & x \in S \end{cases}$$

Si (P_1) n'a pas de solutions, alors la valeur de la fonction objectif est infinie; sinon une solution optimale x^1 de (P_1) est aussi une solution niveau optimale.
Soit $\bar{\gamma}_k = \bar{\beta}\,\bar{p}_k - \bar{\alpha}\,\bar{q}_k$
Algorithme
Etape1: Trouver la solution optimale niveau x^1.
Si une telle solution n'existe pas, alors $\sup_{x \in S} Z(x) = +\infty$. Terminer.
Sinon, poser $k = 1$ et aller à l'étape 2.

Etape 2: Si $J = \{ j / \bar{q}_j > 0 \} = \phi$, terminer. x^i est une solution optimale du problème (P).
Sinon, soit k tel que $\dfrac{\bar{p}_k}{\bar{q}_k} = \max_{j \in J}(\bar{p}_j / \bar{q}_j)$
Si $\bar{\gamma}_k > 0,$ aller à l'étape 3

Si $\bar{\gamma}_k \leq 0$, terminer. x^i est une solution optimale de programme fractionnaire linéaire continu.

Etape 3: La variable hors base x_{N_k} entre dans la base en moyennant une opération pivot. Si une telle opération est possible, poser $i = i + 1$ et aller à l'étape 2.

Si une telle opération n'est pas possible. Terminer: $\underset{x \in S}{Sup}\, Z(x) = \dfrac{\bar{p}_k}{\bar{q}_k}$

II.3.2.2/ Problème hyperbolique à variables entières

De nombreux auteurs ont résolu le problème de la programmation linéaire en nombres entiers par la méthode directe en utilisant différents algorithmes, par exemples les techniques de séparation et évaluation progressive, les variantes des coupes de Gomory, comme celle de D. Granot et F. Granot [16], la méthode des pénalités présenté par M. Abbas et M. Moulaï, [1]. Nous présenterons la méthode des coupes Gomory dans ce qui suit:

II.3.2.2.1/ Méthode des coupes de Gomory

Considérons le problème de la programmation fractionnaire linéaire en nombres entiers suivant (P):

$$(P) \begin{cases} Max & \dfrac{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \alpha}{\sum_{j=1}^{n} q_j x_j + \beta} \\ s.c. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & x \text{ entier} \end{cases}$$

Dans la méthode de Granot, on rajoute aux m premières lignes de la matrice des contraintes A, les trois $(m+1),(m+2)$ et $(m+3)$ lignes relatives respectivement aux vecteurs numérateur p, dénominateur q et le vecteur gradient de la fonction objectif où:

$\bar{\gamma}_j = \bar{\beta}\,\bar{p}_j - \bar{\alpha}\,\bar{q}_j, \quad \forall j$

A chaque itération de l'algorithme, les $(m+2)$ lignes sont modifiées à travers les opérations ordinaires de pivot, par contre la dernière ligne selon la formule du gradient réduit citée ci-dessus.

Une fois les valeurs du gradient réduit pour les variables hors base sont calculées, on teste:

- Si $\bar{\gamma}_j \le 0$, pour tout indice hors base j, alors la solution $(x_B = \bar{a}_0, x_N = 0)$ est une solution optimale du problème (P) où B est l'ensemble des indices de base et N est celui hors base.
- Sinon, il existe un indice k, $k \in I_N$, pour lequel $\bar{\gamma}_k > 0$. Soit $\theta_k = min\{\bar{a}_{i0} / \bar{a}_{ik} ; \bar{a}_{ik} > 0\}$.

  Alors toute ligne v, pour laquelle $\left\lfloor \dfrac{\bar{a}_{v0}}{\bar{a}_{vk}} \right\rfloor \le \theta_k$, peut servir comme une ligne source pour générer une coupe de Gomory de la forme

$$s + \sum_{j \in I_N} \left\lfloor \frac{\bar{a}_{vj}}{\bar{a}_{vk}} \right\rfloor x_j = \left\lfloor \frac{\bar{a}_{v0}}{\bar{a}_{vk}} \right\rfloor, \quad s \ge 0.$$

Cette coupe peut être rajoutée au problème initial et servir comme ligne pivot, avec la $k^{ème}$ colonne comme une colonne pivot. Puisque la valeur du pivot dans ce cas est $\left\lfloor \dfrac{\bar{a}_{vk}}{\bar{a}_{vk}} \right\rfloor = 1$, les nouveaux coefficients obtenus après l'opération de pivot usuelle sont tous entiers.

Exemple

Considérons le problème fractionnaire linéaire (P) :

$$(P)\begin{cases} Max \quad Z = \dfrac{2x_1 + x_2 + x_3}{x_1 + x_2 + x_3 + 2} \\ s.c. \qquad 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 11 \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0, \quad entiers \end{cases}$$

Le tableau du simplexe peut être représenté par le programme fractionnaire linéaire relaxé (P') suivant:

$$(P')\begin{cases} Max \quad Z = \dfrac{2x_1 + x_2 + x_3}{x_1 + x_2 + x_3 + 2} \\ s.c. \qquad 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0, \quad entiers \end{cases}$$

Le tableau du simplexe correspondant au problème (P') est:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_B
x_4	3	4	2	1	11
$\overline{p}$	2	1	1	0	0
$\overline{q}$	1	1	1	0	-2
$\overline{\gamma}$	4	2	2	0	0

Le vecteur gradient est $\overline{\gamma} = (4,2,2)$, donc il existe un $k = 1$, tel que $\overline{\gamma}_1 = 4 > 0$.

$\theta_1 = min\{\overline{a}_{io} / \overline{a}_{i1}; \overline{a}_{i1} > 0\} = 11/3$.

Comme le problème contient une seule contrainte, alors $v = 1$.

La coupe de Gomory est de la forme:

$$x_5 + \left\lfloor \frac{\overline{a}_{11}}{\overline{a}_{11}} \right\rfloor x_1 + \left\lfloor \frac{\overline{a}_{12}}{\overline{a}_{11}} \right\rfloor x_2 + \left\lfloor \frac{\overline{a}_{13}}{\overline{a}_{11}} \right\rfloor x_3 = \lfloor \theta_1 \rfloor$$

donc la coupe est:

$x_1 + x_2 + x_5 = 3$. $x_5 > 0$, *entier*

En rajoutant cette contrainte au tableau du simplexe, on obtient:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_B
x_4	3	4	2	1	0	11
x_5	1	1	0	0	1	3
$\overline{p}$	2	1	1	0	0	0
$\overline{q}$	1	1	1	0	0	-2
$\overline{\gamma}$	4	2	2	0	0	0

Après le pivotage, on obtient le tableau suivant:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_B
x_4	0	1	2	1	-3	2
x_1	1	1	0	0	1	3
$\overline{p}$	0	-1	1	0	-2	-6
$\overline{q}$	0	0	1	0	-1	-5
$\overline{\gamma}$	0	-5	-1	0	-4	0

On remarque que le vecteur gradient est $\bar{\gamma} = (-1,-5,-4)$, donc la solution entière réalisable $\bar{x} = (3,0,0)$ est une solution **optimale entière** pour le problème (P).

II.3.3/ Résolution par parametrisation

Afin de simplifier l'objectif du programme mathématique, un paramètre est introduit permettant par exemple de ramener un programme hyperbolique en un programme (paramétré) linéaire, ou bien un programme fractionnaire quadratique en un programme (paramétré) quadratique, tout en gardant l'ensemble des contraintes inchangé. Ainsi le programme obtenu peut être résolu "paramétriquement": une séquence de résolution de tels programmes à objectif simplifié engendre une suite de solutions convergeant vers une solution optimale du programme fractionnaire initial.

Proposée initialement en 1956 par Isbell et Marlow [22] pour des programmes hyperboliques, ce n'est qu'à partir de 1967 que cette approche a connu un grand élan avec Dinkelbach [13] qui l'a généralisée aux programmes fractionnaires non linéaires.
Un rappel du programme paramétré et de ses principales propriétés est suivi des différents algorithmes construits autour de cette approche.

Afin d'assurer la convergence de la procédure, l'hypothèse de compacité du domaine défini par les contraintes est adoptée tout au long de cette section.
Soit le programme fractionnaire

$$(P)\begin{cases} Max & \dfrac{f(x)}{h(x)} \\ s.c. & g(x) \le 0 \\ & x \in X \end{cases}$$

Le programme paramétré associé consiste à simplifier l'objectif en combinant linéairement le numérateur et le dénominateur par l'intermédiaire d'un paramètre $\lambda \in R$. Il est donc défini comme suit

$$(Q(\lambda))\begin{cases} Max & f(x) - \lambda h(x) \\ s.c. & g(x) \le 0 \\ & x \in X \end{cases}$$

pour tout $\lambda \in R$.

Dans le cas d'un programme hyperbolique

$$\begin{cases} Max & \dfrac{px+\alpha}{qx+\beta} \\ s.c. & Ax \le b \\ & x \in X \end{cases}$$

le programme paramétré est un programme linéaire dont l'objectif est fonction de $\lambda \in R$:

$$\begin{cases} Max & (p-\lambda q)x+(\alpha-\lambda\beta) \\ s.c. & Ax \le b \\ & x \in X \end{cases}$$

En notant λ^* la valeur optimale de (P), le résultat fondamental liant le programme fractionnaire au programme paramétré associé est donné par:

Proposition (Dinkelbach [13]): Toute solution optimale de $Q(\lambda^*)$ est une solution optimale de (P).

En tant que fonction de la variable λ, la valeur optimale $\upsilon(\lambda)$ du programme paramétré vérifie quelques propriétés que nous résumons ci-après:

Proposition : La fonction $\lambda \to \upsilon(\lambda)$ est continue, strictement décroissante, convexe.

$\upsilon(0) > 0$ et $\upsilon(\lambda)$ tend vers $-\infty$ quand λ tend vers $+\infty$. Si de plus f et h sont affines, alors υ est linéaire par morceaux.

En particulier, l'équation $\upsilon(\lambda) = 0$ admet une solution unique λ^*, plus précisément:

Proposition:

(a) $\upsilon(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda^*$

(b) $\upsilon(\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda < \lambda^*$

(c) $\upsilon(\lambda) < 0 \Leftrightarrow \lambda > \lambda^*$

Ainsi la résolution de (P) revient à trouver la racine de l'équation non linéaire à une seule variable: $\upsilon(\lambda) = 0$.

Un catalogue des algorithmes est donné dans la littérature. Il inclut des algorithmes de résolution itératifs (Newton [13,22], interpolation linéaire[28]).

Méthode de type primal

En notant que la connaissance d'une solution réalisable $\bar{x}_\lambda$ de $Q(\lambda)$ vérifiant $f(\bar{x}_\lambda) - \lambda h(\bar{x}_\lambda) > 0$ suffit à conclure que $\lambda < \lambda^*$, plusieurs auteurs ont privilégié l'utilisation d'heuristiques constructives. Ce principe peut être illustré comme suit: tout algorithme itératif de montée engendrant une suite de solutions peut être interrompu dès qu'une solution $\bar{x}_\lambda$ vérifie $f(\bar{x}_\lambda) - \lambda h(\bar{x}_\lambda) > 0$, sinon la résolution de $Q(\lambda)$ doit être exacte. En notant dans cette dernière alternative x_λ une solution optimale de $Q(\lambda)$, le processus est itéré en donnant à λ la valeur $f(\bar{x}_\lambda)/h(\bar{x}_\lambda)$ dans le premier cas ou la valeur $f(x_\lambda)/h(x_\lambda)$ dans le second cas.

Algorithme [29]

Etape1 Soit x_0 une solution réalisable de (P). Poser $i = 0$.

Etape 2 Poser $\lambda_{i+1} = \dfrac{(px_i + \alpha)}{(qx_i + \beta)}$. Résoudre le problème linéaire en nombres entiers $Q(\lambda_{i+1})$.

- Si x_i est une solution optimale de $Q(\lambda_{i+1})$, alors x_i est une solution optimale de (P).
- Sinon, soit x_{i+1} une solution optimale de $Q(\lambda_{i+1})$. Poser $i = i + 1$ et répéter l'étape 2.

II.3.4/ Résolution d'un programme équivalent à objectif non fractionnaire

La transformation du programme fractionnaire en un programme équivalent à objectif non fractionnaire est obtenu par un changement de variables. A l'inverse de l'approche paramétrée, ce changement de variables induit l'ajout d'une contrainte et d'une variable. Plus précisément, cette transformation, proposée par Charnes et Cooper [12] pour le programme hyperbolique à variables continues.

$$(P)\begin{cases} Max & \dfrac{px + \alpha}{qx + \beta} \\ s.c. & Ax \le b \\ & x \in X \end{cases}$$

s'effectue en introduisant deux nouvelles variables

$y = \left(\dfrac{1}{qx + \beta}\right)x$ et $t = \left(\dfrac{1}{qx + \beta}\right)$

Pour aboutir à un programme linéaire équivalent

$$(PE)\begin{cases} Max & py+\alpha t \\ s.c. & Ay-bt \le 0 \\ & qy+\beta t = 1 \\ & y,t \ge 0 \end{cases}$$

Cette notion d'équivalence est précisée ci-dessous:

Proposition (Charnes-Copper[12]):

Si (y^*,t^*) est une solution optimale de (PE), alors $t^*>0$ et $x^*=\dfrac{y^*}{t^*}$ est une solution optimale de (P).

En fait, s'il existe une solution réalisable x telle que $\dfrac{px+\alpha}{qx+\beta}>0$, la contrainte d'égalité $qy+\beta t=1$ peut être remplacée par la contrainte d'inégalité $qy+\beta t\le 1$, plus simple à traiter [113].

Cette transformation en un programme linéaire équivalent a pour but d'appliquer les algorithmes standards tel que la méthode du simplexe[12].

Pour les programmes fractionnaires à variables entières, D. Granot et F. Granot [16] proposent une méthode de génération de coupes (de type Gomory) appliquée au programme linéaire (PE)

D'autre part, dans le cas d'un programme hyperbolique à n variables bivalentes, Williams [33] propose une transformation spécifique en un programme linéaire équivalent en variables mixtes dont la taille croit de $n+1$ variables continues et de $3n$ contraintes. Ce nouveau programme est résolu par un algorithme de type Branch and Bound.

Remarque

Cette transformation peut être plus généralement effectuée sur un programme fractionnaire concave-convexe

$$(P)\begin{cases} Max & \dfrac{f(x)}{h(x)} \\ s.c. & g(x)\le 0 \\ & x\ge 0 \end{cases}$$

Pour aboutir à un programme concave équivalent

$$(PE)\begin{cases} Max & t\,f\left(\dfrac{y}{t}\right) \\ s.c. & g\left(\dfrac{y}{t}\right) \le 0 \\ & t\,h\left(\dfrac{y}{t}\right) = 1 \\ & y,t \ge 0 \end{cases}$$

obtenu en posant

$y = \left(\dfrac{1}{h(x)}\right)x$ et $t = \left(\dfrac{1}{h(x)}\right)$

Remarque:

Dans le cas d'un programme hyperbolique à variables 0-1, cette transformation induit des contraintes de type quadratique. Plus précisément, en notant que $x_i \in \{0,1\}$ est équivalent à $x_j(x_j - 1) = 0$, la contrainte $\dfrac{1}{t}y_i \in \{0,1\}$ s'écrit sous la forme équivalent $y_j(y_j - t) = 0$, soit $y_j^2 - y_j t = 0$ qui est de type quadratique.

Exemple

Considérons le programme fractionnaire linéaire suivant :

$$\begin{cases} Max\ Z = \dfrac{x_2 - 5}{-x_1 - x_2 + 9} \\ s.c. \quad 2x_1 + 5x_2 \ge 10 \\ \qquad 4x_1 + 3x_2 \le 20 \\ \qquad -x_1 + x_2 \le 2 \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Le changement de variable donne la formulation suivante :

$$\begin{cases} Max\ \{y_2 - 5t\} \\ s.c.\quad 2y_1 + 5y_2 - 10t \geq 0 \\ \qquad 4y_1 + 3y_2 - 20t \leq 0 \\ \qquad -y_1 + y_2 - \quad 2t \leq 0 \\ \qquad -y_1 - y_2 + \quad 9t = 1 \\ \qquad\quad y_1, y_2, t \geq 0 \end{cases}$$

En utilisant la méthode du simplexe, on obtient $y_1 = \frac{2}{3}, y_2 = \frac{4}{3}$ et $t = \frac{1}{3}$. Cela donnera $x_1 = (2,4)$ comme solution optimale du programme fractionnaire linéaire.

II.3.5/ Problème fractionnaire quadratique en points extrêmes

Il existe peu d'auteurs qui ont résolu les problèmes fractionnaires quadratiques par la méthode directe, tel que le domaine réalisable est un ensemble des points extrêmes d'un polytope convexe. Cette méthode a été présentée par R. Gupta et M. C. Puri [18] que nous présenterons dans ce qui suit:

Considérons le problème de la programmation fractionnaire quadratique en points extrêmes suivant:

$$(P)\begin{cases} Min \qquad f(x) = \dfrac{C^T x + x^T Ex + \alpha}{D^T x + x^T Fx + \beta} \\ \qquad\qquad Ax \leq b \\ \qquad\qquad x \text{ est un point extrême} \\ \qquad\qquad x \geq 0 \end{cases}$$

où

(1) $C, D \in R^n$;

(2) α, β des éléments de R ;

(3) E, F des $n \times n$ matrices symétriques;

(4) $C^T x + x^T Ex + \alpha \geq 0 \quad \forall x \in S$;

(5) $D^T x + x^T Fx + \beta > 0 \quad \forall x \in S$.

La solution optimale du problème (P) est un point extrême du domaine S. Donc, Pour le résoudre, il faut déterminer les points extrêmes. Pour obtenir les différents points extrêmes du domaine S, On construit le problème fractionnaire linéaire relaxé (P_1) du problème (P), où toutes les solutions de base sont explorées.

Le problème (P_1), construit est le suivant:

$$(P_1)\begin{cases} Min \quad g(x) = \dfrac{(C+U)^T x + \alpha}{(D+V)^T x + \beta} \\ Ax \le b \\ x \text{ est un point extrême} \\ x \ge 0 \end{cases}$$

où

$$U_j = \begin{cases} Min \quad E_j^T x, \quad j = 1,...,n \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}, \qquad V_j = \begin{cases} Max \quad F_j^T x, \quad j = 1,...,n \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Après la détermination des solutions réalisables de base (points extrêmes), du problème (P_1), on les ordonne par ordre croissant de la fonction objectif de (P_1), g_i, $i = 1,...,N$, tel que, $g_N = Max\{g(x) : Ax \le b, x \ge 0\}$, en premier lieu. Puis, on les ordonne par ordre croissant de la fonction objectif de (P), $f_i, i = 1,...,P$, tel que, . $f_P = Max\{f(x) : Ax \le b, x \ge 0\}$, en second lieu.

Soient:

M_i : un ensemble d'indices des meilleures i ème solutions réalisables de base de (P_1).

L_k : un ensemble d'indices des meilleures k ème solutions réalisables de base de (P).

Il est clair que:

$f_1 = Min\{f(x) : Ax \le b, x \ge 0\}$ et $g_1 = Min\{g(x) : Ax \le b, x \ge 0\}$

Soit $L = \phi$.

Etape 0

$s = 1$ et $p = 1$

Etape 1

$g_s = Min\{g(x) : Ax \le b, x \ge 0\} = g(x_t)$; $M_s = \{s\}$

$f_{s'} = Min\{f(x) : s' \in M_s\} = f(x_{t'})$.

Si $g_s \ge f_p = f(x_{t'})$, $t' \in M_s$, Alors $x_{t'}$ *est la solution optimale* du problème (P). $L = \{t'\}$

Sinon, augmenter la valeur de $s = s + 1$ et $M = M \cup \{s\}$. Aller à l'étape 1.

Etape 2

Si pour $s = N$, on a $g_N < f_{s'} = f(x_{t'})$, $t' \notin L$, alors, augmenter l'ensemble $L = L \cup \{t'\}$. Aller à l'étape 1.

Etape finale

Si pour $s = N$ et $s' = P$, on a $g_N < f_P = f(x_{t'})$, $t' \notin L$, alors le problème n'admet pas des solutions réalisables.

Exemple

Soit le problème fractionnaire quadratique en points extrêmes suivant:

$$(P)\begin{cases} Min \quad f(x) = \dfrac{3x_1 + 2x_2 + x_1^2 + 2x_x x_2 + x_2^2 + 2}{-x_1 + x_1^2 + \frac{1}{9}x_2^2 + 1} \\ x_1 + 4x_2 \geq 5 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 45 \\ 6x_1 - x_2 \leq 36 \\ -4x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ -5x_1 + 2x_2 \leq 6.5 \\ 55x_1 - 3x_2 \geq 52 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

S est le domaine réalisable du problème (P).

On construit le problème (P_1):

Soient:

$U_1 = \underset{x \in S}{Min} \quad x_1 + x_2$

=2.

$U_2 = \underset{x \in S}{Min} \quad x_1 + x_2$

=2.

$V_1 = \underset{x \in S}{Max}\, x_1$

= 7

$V_2 = \underset{x \in S}{Max}\, \dfrac{1}{9} x_2$

= 1

Donc le problème (P_1), est le suivant:

$$(P_1)\left\{ \underset{x \in S}{Min} \quad \frac{3x_1 + 2x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 2}{-x_1 + 7x_1 + x_2 + 1} \right.$$

Après simplification:

$$(P_1)\left\{\underset{x\in S}{Min} \quad \frac{5x_1+4x_2+2}{6x_1+x_2+1}\right.$$

$x_1=(6,0)$, $\quad g_1=0.86$, $\quad M_1=\{1\}$, $\quad f(x_1)=1.81.$

$g_1=0.86<1.81$

$x_2=(5,0)$, $\quad g_2=0.87$, $\quad M_2=\{1,2\}$, $\quad f(x_2)=2.$

$g_2=0.87<1.81$

$x_3=(7,6)$, $\quad g_3=1.24$, $\quad M_3=\{1,2,3\}$, $\quad f(x_3)=4.34.$

$g_3=1.24<1.81$

$x_4=(1,1)$, $\quad g_4=1.38$, $\quad M_4=\{1,2,3,4\}$, $\quad f(x_4)=9.9.$

$g_4=1.38<1.81$

$x_5=(3,9)$, $\quad g_5=1.89$, $\quad M_5=\{1,2,3,4,5\}$, $\quad f(x_5)=10.8.$

$g_4=1.89>1.81$

Donc, $x_1=(6,0)$, est la solution optimale du problème (P_1), et la valeur de la fonction objectif est : $f(x_1)=1.81.$

II.4/ Conclusion

Ce tour d'horizon montre toute la richesse et la variété des travaux consacrés aux programmes fractionnaires.

De nombreuses applications, économiques ou algorithmiques dont certaines sont décrites ici, ont été à la source des motivations de nombreuses recherches.

Ce catalogue nous a incités à apporter notre contribution à la résolution des programmes fractionnaires quadratiques en présence de variables entières qui sera exposé en détails dans le chapitre 4.

CHAPITRE III

Programme Fractionnaire Linéaire Multi-objectifs à variables Entières (PFLME)

III.1/ Introduction

Il s'agit dans ce chapitre de présenter le problème de la programmation fractionnaire linéaire multi-objectifs à variables entières (PFLME) et décrire une approche exacte et récente proposée par M. Abbas et M. Moulaï [5] pour la résolution de ce problème. Cette méthode est la base des nouvelles approches de résolution qu'on proposera dans les prochains chapitres. Elle sera illustrée par un exemple numérique.

III.2/ Le problème PFLME

Un programme fractionnaire linéaire multi-objectifs à variables entières est constitué d'un système de contraintes linéaires définissant un domaine discret de solutions réalisables, et d'un ensemble de fonctions fractionnaires linéaires à maximiser ou à minimiser définissant des critères conflictuels. Le problème consiste à déterminer toutes les solutions réalisables entières x telle qu'il n'existe aucune autre solution réalisable entière y qui fournisse des valeurs au moins aussi bonnes que celles de x sur chaque critère et même meilleure sur au moins un critère.

III.2.1/ Formulation mathématique d'un problème PFLME

Soit (P) un programme linéaire multi-objectifs à variables entières. (P) peut être formulé de la façon suivante:

$$
(P)\begin{cases}
Max \quad Z_1(x) = \dfrac{p^1x+\alpha^1}{q^1x+\beta^1} \\
Max \quad Z_2(x) = \dfrac{p^2x+\alpha^2}{q^2x+\beta^2} \\
\quad\quad\quad . \\
\quad\quad\quad . \\
\quad\quad\quad . \\
Max \quad Z_r(x) = \dfrac{p^rx+\alpha^r}{q^rx+\beta^r} \\
s.c. \quad x \in S = \{x \in R^n \ / \ Ax \le b, A \in R^{m\times n}, b \in R^m, x \ge 0\} \\
\quad\quad x \ \ entier
\end{cases}
$$

où $r \ge 2$ est un nombre entier; α^i et β^i sont des scalaires; $p^i, q^i \in R^n$, $i \in \{1,...,r\}$. On suppose que la région admissible non vide S est bornée et $q^ix + \beta^i > 0$ sur S pour tout $i \in \{1,...,r\}$.

III.3/ Concepts de base

Dominance

Définition

Soient deux vecteurs critères Z^1 ,Z^2 . On dit que Z^1 domine Z^2 si et seulement si $Z^1 \ge Z^2$ et $Z^1 \ne Z^2$ (c'est à dire $Z_i^1 \ge Z_i^2$ pour $i = 1,...,r$, et $Z_i^1 > Z_i^2$ pour au moins un critère i).

Si Z^1 domine Z^2 , alors Z^1 est au moins aussi bon que Z^2 sur tous les critères, et meilleur que lui sur au moins un critère.

Dominance forte

Définition

Soient deux vecteurs critères Z^1 ,Z^2 . On dit que Z^1 domine fortement Z^2 si et seulement si $Z^1 > Z^2$ (c'est à dire $Z_i^1 > Z_i^2$ pour $i = 1,...,r$).

Si Z^1 domine fortement Z^2 , alors Z^1 est meilleur que Z^2 sur tous les critères.

Efficacité

Définition

Une solution $\bar{x}$ est une solution efficace de (P) si $\bar{x} \in X(P)$ et s'il n'existe pas de $x \in X(P)$ tel que $Z(x)$ domine $Z(\bar{x})$.

Un point est efficace si son image par Z est un vecteur critères non dominé. Le terme efficacité est aussi connu sous le nom de Pareto optimalité ou non infériorité.

Une définition équivalente de l'efficacité est :

Définition

Une solution de $X(P)$ est une solution efficace de (P) si $x \in X(P)$ et $Z_i(x) > Z_i(\bar{x})$, $i = 1,\ldots,r$,impliquent que $Z_j(x) < Z_j(\bar{x})$ pour au moins un indice $j \in \{1,2,\ldots,r\}$, $i \neq j$.

A partir d'un point efficace, il est impossible d'augmenter la valeur d'un des critères sans diminuer la valeur d'au moins un autre critère.

Efficacité faible

Définition

Une solution $\bar{x}$ de $X(P)$ est une solution faiblement efficace s'il n'existe pas de $x \in X(P)$ tel que $Z\ (x) > Z\ (\bar{x})$.

Une solution est faiblement efficace si son vecteur critère n'est pas fortement dominé.

Efficacité forte

Définition

Une solution $\bar{x}$ de $X(P)$ est une solution fortement efficace si $\bar{x} \in X(P)$ et s'il n'existe pas de $x \in X(P)$ tel que $x \neq \bar{x}$ et $Z\ (x) \geq Z\ (\bar{x})$.

Une solution x est fortement efficace s'il n'existe pas d'autre solution telle que le vecteur critère, qui lui est associé, soit aussi bon que celui de x. Remarquons que l'efficacité forte implique l'efficacité qui implique à son tour l'efficacité faible.

Le point idéal

Définition

Le point idéal est, dans R^r, le point de cordonnées $\left(Z_1^*,\ldots,Z_r^*\right)$, avec

$$Z_i^* = \max_{x \in X(P)} Z_i(x), \quad i = 1,\ldots,r$$

Le point anti-idéal

Définition

Le point anti-idéal est, dans R^r, le point de cordonnées $\left(Z_1^*,\ldots,Z_r^*\right)$, avec

$Z_{i*} = \min\limits_{x \in X(P)} Z_i(x), \quad i = 1,\ldots,r$

Le point nadir

Nous appelons matrice des gains, une matrice dont les colonnes représentent les performances de r points $x_1^*,\ldots,x_r^*$.

Définition

Le point nadir est, dans R^r, le point de cordonnées $\left(Z_1^{nad},\ldots,Z_r^{nad}\right)$, avec

$Z_i^{nad} = \min\limits_{j \in \{1,2,\ldots,r\}} Z_i\left(x_j^*\right), \quad i = 1,\ldots,r$.

III.4/ Méthode d'exploration exhaustive pour la résolution du problème PFLME

Nous allons décrire une méthode proposée par M. Abbas et M. Moulaï [5] pour la résolution d'un problème PFLME. Cette méthode est basée sur un principe de coupes successives garantissant l'exploration de tout l'ensemble des solutions réalisables entières. A chaque itération, un sous ensemble de solutions réalisables entières est déterminé, parmi ces solutions sont retenues celles dont les vecteurs critères ne sont pas dominés par les vecteurs critères des solutions précédemment retenues. A la fin, seulement les solutions réalisables entières efficaces sont retenues.

Définitions et notations

Soient

(P_1) le programme fractionnaire linéaire à variables entières suivant:

$$(P_1)\begin{cases} Max \quad Z_1(x) = \dfrac{p^1x+\alpha^1}{q^1x+\beta^1} \\ s.c. \qquad x \in S \\ \qquad\quad\; x \ \ entier \end{cases}$$

La résolution du problème (P) nécessite l'introduction des notations suivantes:

Notations et définition :

Dans la suite de ce chapitre nous utilisons les notations suivantes :

Pour $k \geq 1$

$S_k = \{x \in R^{n_1} / A_k x \leq b_k, A_k \in R^{m_1 \times n_1}, b_k \in R^{m_1}, x \geq 0\}$

S_k est la région tronquée courante de S obtenue par application de la coupe $\sum_{j \in N_{k-1}/\{j_{k-1}\}} x_j \geq 1$ où $j_{k-1} \in \Gamma_{k-1}$ et par des coupes de Gomory successives éventuellement.

$x_k^1 = \{x_{k,j}^1\}$ est la solution optimale entière donnant Z_k^1 obtenue sur S_k à l'étape k.

B_k^1 : est une base de S_k.

$a_{k,j}^1 \in R^{m_1 \times 1}$ sont les vecteurs activités de $x_{k,j}^1$ appropriés à la région tronquée courante S_k.

$x_{k,j}$: est la $j^{ème}$ composante de la variable x_k.

$y_{k,j}^1 = (y_{k,ij}^1) = (B_1^1)^{-1} a_{k,j}^1$ où $y_{k,j}^1 \in R^{m_1 \times 1}$.

$I_k = \{j, a_{k,j}^1 \in B_k^1\}$.

$N_k = \{j, a_{k,j}^1 \notin B_k^1\}$.

p_j^1 : est la $j^{ème}$ composante du vecteur p^1.

q_j^1 : est la $j^{ème}$ composante du vecteur q^1.

$p_{k,1}^1 = \sum_{i \in I_1} p_i^1 y_{k,ij}^1$.

$q_{k,1}^1 = \sum_{i \in I_1} q_i^1 y_{k,ij}^1$.

$Z_{k,1}^1 = p^1 x_k^1 + \alpha^1$.

$Z_{k,2}^1 = q^1 x_k^1 + \beta^1$.

$Z_1(x_k^1) = \dfrac{Z_{k,1}^1}{Z_{k,2}^1}$.

$\bar{\gamma}_{k,j}^1 = Z_{k,2}^1(p_j^1 - p_{1,j}^1) - Z_{k,1}^1(q_j^1 - q_{1,j}^1)$, le coût réduit relatif à la $j^{ème}$ composante du vecteur gradient $\bar{\gamma}_k^1$.

$\Gamma_k = \{j / j \in N_1 \ et \ \bar{\gamma}_k^1 = 0\}$.

Remarque1: Si x_k^1 est une solution réalisable pour le problème (P_1) et pour laquelle $\Gamma_k = \phi$, alors x_k^1 est l'unique $k^{ème}$ meilleure solution réalisable entière pour le problème (P_1).

Définition1

Une arête E_{jk} incidente à la solution x_k^t est définie comme l'ensemble :

$$E_{jk} = \left\{ x = (x_i) \in S \middle/ \begin{array}{c} x_i = x_{k,i} - \ddot{E}_{jk} y_{k,ij_h} \quad i \in I_k \\ x_{j,k} = \ddot{E}_{jk} \\ x_v = 0 \quad pour\ tout\ v \in N_k - \{j_k\} \end{array} \right\}$$

où :

$$0 \leq \ddot{E}_{jk} \leq \min\left\{ \frac{x_{k,j}}{y_{k,ij_k}} \middle/ y_{k,ij_k} > 0 \right\} \; et\; \ddot{E}_{jk} \text{ est un entier positif, } \ddot{E}_{jk} y_{k,ij_k} \text{ sont des entiers positifs}$$

pour tout $i \in I_k$

Définition2

Une arête E_{jk} incidente à une solution réalisable entière x_k^l est dite dominée si tous les vecteurs critères des solutions entières appartenants à cette arête sont dominés.

III.5/ Résultats préliminaires

Dans cette section, nous exposons des théorèmes fondamentaux en technique des coupes de plans, cette technique nous permet d'explorer tous les points à composantes entières de la région réalisable S.

Théorème 1 [4]

Toutes les solutions réalisables entières x_k^t, $t \in \{2,3,...d_k\}$ du problème (P) alternées à x_k sur une arête E_{jk} d'une région S (ou une région tronquée de S) qui en découlent dans la direction du vecteur a_{k,j_k}, $j_k \in \Gamma_k$ se trouve dans le demi-espace ouvert : $\sum_{j \in N_k - \{j_k\}} x_j < 1$

Remarque 2

Toutes les solutions réalisables entières, x_k^t, $t \in \{2,3,...,d_k\}$, alternées à x_k et se trouvant sur l'arête E_{j_k} de la région tronquée de S (ou de la région S) peuvent être obtenues en prenant toutes les valeurs entières de θ_{j_k} possibles, dans le rang spécifié et se trouvant toutes dans le demi – espace ouvert $\sum_{j \in N_k - \{j_k\}} x_j < 1$.

Théorème 2 [4]

Une solution entière du problème (P) qui ne se trouve pas sur l'arête E_{j_k}, $j_k \in \Gamma_k$ d'une région de S_k' tronquée (ou de la région S) à travers un point réalisable x_k^l d'un problème (P_l) se trouve dans le demi – espace fermé :

$$\sum_{j \in N_k - \{j_k\}} x_j \geq 1 \qquad (1)$$

Remarque 3

La coupe (1) qui tronque l'arête E_{j_k} tel que $j_k \in \Gamma_k$, n'est qu'une variante de la coupe de Dantzig, puisque la coupe de Dantzig, pour chaque Γ_k est définie par :

$$\sum_{j \in N_k} x_j \geq 1 \qquad (2)$$

Remarque 4

Si pour tout $j_k \in \Gamma_k$ $(\neq \varnothing)$, toutes les valeurs entières possibles de θ_{j_k} correspondant à la solution x_k sont inférieurs à 1, alors, x_k est l'unique $k^{ème}$ meilleure solution réalisable du problème (P), où le problème (P) a des solutions entières alternées à x_k, ne se trouvant pas sur l'arête de la région S (ou une région tronquée de S) émanant de x_k. Dans un tel cas, l'application de (1) donne x_{k+1} si x_k est unique, ou x_k^t, $t \in \{2,3,...,d_k\}$, si x_k a des solutions alternées dans S.

III.6/ Les Conditions d'Optimalité :(Martos [23])

Soit x_k une solution réalisable entière obtenu à l'étape k du problème (P), x_k est une solution optimale du problème (P), si et seulement si, le coût réduit $\gamma_j^k \leq 0$, $\forall\ j \in N_k$

γ_j^k est le coût réduit à la $j^{éme}$ composante du vecteur gradient γ^k.

Développement de la méthode de résolution du programme linéaire en nombres entiers à objectifs fractionnaires multiples

La procédure de résolution d'un programme linéaire en nombres entiers à objectifs fractionnaire multiple (P), commence par la recherche d'une solution optimale entière du programme (P_1).

Algorithme

Etape 1

Résoudre le problème (P_1) et trouver une solution optimale entière x_1^1 sur S_1. De façon similaire, on pourrait considérer un problème (P_i) avec l'objectif Z_i pour tout $i \in \{1,...,l\}$.

Construire l'ensemble Γ_1.

Etape 2

1. Si $\Gamma_1 = \emptyset$

x_1^1 est l'unique solution optimale du problème (P_1), trouver Z_i correspondant à x_1^1, $i \in \{2,3,..., r\}$. Rajouter le premier vecteur critère correspondant $(Z_1,Z_2,...,Z_l)$ à la liste Eff_1

Tronquer le point x_1^1 par la coupe de Dantzig suivante :

$$\sum_{j \in N_1} x_j \geq 1.$$

En appliquant la méthode dual du simplexe et les coupes de Gomory successives, si nécessaire, on obtient une solution réalisable entière x_2^1 dans la région tronquée de S_2.

Trouver le vecteur critère correspondant $(Z_1,Z_2,...,Z_l)$ et rajouter le dans la liste Eff_1 s'il n'est pas dominé par le vecteur critère précédemment rajouté pour obtenir la liste Eff_2.

2. Si $\Gamma_1 \neq \emptyset$

choisir un quelconque $j_1 \in \Gamma_1$. Calculer $\theta_{j_1} = \min_{i \in I_k} \left\{ \frac{x_{i,k}^1}{y_{ij_k,k}^1} / y_{ij_k,k}^1 > 0 \right\}$ correspondant

à la solution x_2^1 .

2.a. Si $\theta_{j_1} \geq 1$:

Calculer toutes les solutions entières réalisables $x_1^r, r \in \{2,3,...,d_1\}$ alternées à x_1^1 à travers l'arête E_{j_1}. Chacune de ces solutions donne lieu à un nouveau critère potentiellement non dominé de la forme $(Z_1,Z_2,...,Z_l)$, $r = 2,...,d_1$.

Tronquée l'arête E_{j_k} par la coupe suivante :

$$\sum_{j \in N_1 - \{j_1\}} x_j \geq 1$$

En appliquant la méthode dual du simplexe et les coupes de Gomory successives, si nécessaire, on obtient une solution réalisable entière x_2^1 dans la région tronquée de S_2. Trouver le vecteur critère correspondant $(Z_1, Z_2, ..., Z_l)$ et rajouter le dans la liste Eff_1 s'il n'est pas dominé par le vecteur critère précédemment rajouté pour obtenir la liste Eff_2.

2.b. Si $\theta_{j_1} < 1$ pour tous les $j_1 \in \Gamma_1$, choisir un quelconque $j_1 \in \Gamma_1$ et appliquer la coupe :

$$\sum_{j \in N_1 - \{j_1\}} x_j \geq 1 .$$

En appliquant la méthode dual du simplexe et les coupes de Gomory successives, si nécessaire, , on obtient une solution réalisable entière x_2^1 dans la région

tronquée de S_2. Trouver le vecteur critère correspondant $(Z_1, Z_2, ..., Z_l)$ et rajouter le dans la liste Eff_1 s'il n'est pas dominé par le vecteur critère précédemment rajouté pour obtenir la liste Eff_2.

Etape 3

Choisir un éventuel $j_2 \in \Gamma_2$ et déterminer les éventuelles solutions réalisables entières x_r^2, $r \in \{2, ..., d_2\}$ alternées à x_2^1. Trouver les vecteurs critères correspondants, s'ils existent. Augmenter la liste Eff_2 par ces vecteurs s'ils ne sont pas dominés par des vecteurs critères précédemment identifiés pour obtenir la liste Eff_3.

Tronquée les solutions obtenues par la coupe suivante :

$$\sum_{j \in N_2 - \{j_2\}} x_j \geq 1$$

Etape k :

Soit x_{k-1} la $(k-1)^{ème}$ meilleure solution du problème (P_l).Choisir $j_{k-1} \in \Gamma_{k-1}$ et déterminer toutes les solutions réalisables entières x_{k-1}^r, $r \in \{2,3, ..., d_{k-1}\}$ alternées à x_{k-1}^1. Lire les vecteurs critères correspondants et augmenter la liste Eff_{k-1} par ces vecteurs s'ils ne sont pas dominés par d'autres vecteurs critères précédemment identifiés pour obtenir la liste Eff_k tronquer les solutions déterminées par la coupe

$$\sum_{j \in N_{k-1} - \{j_{k-1}\}} x_j \geq 1 .$$

Après avoir appliquer la méthode dual du simplexe et les coupes de Gomory successives, si nécessaire, une solution entière réalisable x_k^1 sur la région tronquée de S_k. Trouver le vecteur critère correspondant $(Z_1, Z_2, ..., Z_l)$ et rajouter le dans la liste Eff_{k-1} s'il n'est pas dominé par le vecteur critère précédemment identifié pour obtenir la liste Eff_k. Ceci marque le début de l'étape $k+1$.

Etape terminale

Le processus termine quand le pivotage dans la méthode dual du simplexe est impossible, indiquant que la région courante ne contient pas de solutions réalisables et que tous les points efficaces ont été obtenus.

Théorème 3 [4]

La procédure décrite précédemment, trouve toutes les solutions efficaces du problème (P) et converge en un temps fini d'étapes.

Exemple numérique:

Soit le problème fractionnaire linéaire multi-objectifs en nombres entiers suivant :

$$(P)\begin{cases} \min \dfrac{x_1 - x_2}{2x_2 + 4} \\ \min \dfrac{x_1 + 2}{x_2 - 6} \\ \min -3x_1 - 2x_2 \\ s.c. \quad x_1 - x_2 \leq 1 \\ \quad\quad x_1 + x_2 \leq 2 \\ \quad\quad 4x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ \quad\quad x_1, x_2 \geq 0, \text{ entiers} \end{cases}$$

Etape 1

Considérons le problème (P_1) :

$$(P_1)\begin{cases} \min \dfrac{x_1 - x_2}{2x_2 + 4} \\ s.c. \quad x_1 - x_2 \leq 1 \\ \quad\quad x_1 + x_2 \leq 2 \\ \quad\quad 4x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ \quad\quad x_1, x_2 \geq 0, \text{ entiers} \end{cases}$$

La première solution réalisable entière du problème est :

$x_1^1 = (0,2)$

$Z_1^1 = -0.5;\ Z_2^1 = -0.5;\ Z_{31}^1 = -4$

$Eff_0 = \{(-0.5,-0.5,-4)\}$.

$\Gamma_1 = \phi$, donc la solution $(0,2)$ n'a pas de solutions adjacentes.

On rajoute la coupe de Dantzig: $x_1 + x_4 \geq 1$.

Etape 2 :

Après avoir appliquer la méthode dual simplexe, rajouter las coupes de Gomory nécessaires au problème, pour retrouver une solution entière. La seconde solution réalisable entière au problème est :

$x_2^1 = (0,1)$. L'image de cette solution est : $(-1/6,-2/5,-2)$ est dominée par la solution efficace précédente, donc on la rajoute pas a l'ensemble des solutions efficaces.

$Eff_1 = \{(-0.5,-0.5,-4)\}$.

$\Gamma_1 = \phi$, donc la solution $(0,1)$ n'a pas de solutions adjacentes.

On rajoute la coupe de Dantzig: $x_1 + x_6 \geq 1$.

Etape 3 :

Après avoir appliquer la méthode dual simplexe, rajouter las coupes de Gomory nécessaires au problème, pour retrouver une solution entière. la solution réalisable entière au problème est :

$x_3^1 = (0,0)$. L'image de cette solution est : $(0,-1/3,0)$ est dominée par la solution efficace précédente, donc on la rajoute pas a l'ensemble des solutions efficaces.

$Eff_1 = \{(-0.5,-0.5,-4)\}$.

$\Gamma_3 = \{1\}$, donc la solution $(0,0)$ a des solutions adjacentes. On pose $j_3 = 1$.

$\Phi_{j_3} = 1$, donc, la solution voisine est : $(1,1)$ dont l'image $(0,-0.6,-5)$ n'est pas dominée par les solutions efficaces. Donc on la rajoute dans l'ensemble des solutions efficaces.

$Eff_2 = \{(-0.5,-0.5,-4);(0,-0.6,-5)\}$.

On rajoute la coupe de Dantzig: $x_7 \geq 1$.

Après avoir appliquer la méthode dual simplexe, rajouter las coupes de Gomory nécessaires au problème, pour retrouver une solution entière. La solution réalisable entière au problème est :

$x_4^1 = (1,0)$. L'image de cette solution est : $(1/4,-1/2,-3)$ est dominée par la solution efficace précédente, donc on la rajoute pas a l'ensemble des solutions efficaces.

$Eff_3 = \{(-0.5,-0.5,-4);(0,-0.6,-5)\}$.

Etape 4

$\Gamma_1 = \phi$, donc la solution $(1,0)$ n'a pas de solutions adjacentes.

On rajoute la coupe de Dantzig: $x_8 + x_9 \geq 1$.

Il n'est plus possible d'appliquer la méthode dual simplexe. Donc, c'est la fin de l'algorithme.

L'ensemble des solutions efficaces du problème est : $Eff = \{(-0.5,-0.5,-4);(0,-0.6,-5)\}$.

III.6/ Conclusion

Nous avons présentés dans ce chapitre une méthode de résolution proposée par

M. Abbas et M. Moulaï [5]. Elle nous a servi comme un support de travail pour mettre au point, un algorithme de résolution du problème fractionnaire quadratique Multi-objectifs à variables entières.

CHAPITRE IV

Une Méthode d'Optimisation Mono-objectifs Discrète d'un Problème Fractionnaire Quadratique (MODPFQ)

IV.1/ Une méthode de résolution d'un programme fractionnaire quadratique à variables entières

IV.1.1/ Introduction

Soit S l'ensemble des vecteurs de R^n satisfaisant les contraintes $x \geq 0$, $Ax \leq b$ où A est une $m \times n$ matrice réelle, b est un vecteur de R^m . Soient C_1, C_2, D_1 et D_2 quatre vecteurs de R^n , et $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ *et* β_2 quatre éléments de R .

Le problème (P) qu'on projette d'étudier peut s'annoncer sous la forme mathématique suivante:

$$(P)\begin{cases} Min\ f(x) = (\dfrac{C_1x+\alpha_1}{D_1x+\beta_1})(\dfrac{C_2x+\alpha_2}{D_2x+\beta_2}); \\ (C_1x+\alpha_1)(C_2x+\alpha_2) \geq 0 \\ s.c \qquad x \in S \\ \qquad\quad x\ entier \end{cases}$$

ou la forme mathématique suivante :

$$(P)\begin{cases} Min\ f(x) = (\dfrac{C_1x+\alpha_1}{D_1x+\beta_1}) + (\dfrac{C_2x+\alpha_2}{D_2x+\beta_2}); \\ (C_1x+\alpha_1)(D_2x+\beta_2)+(C_2x+\alpha_2)(D_1x+\beta_1) \geq 0 \\ s.c \qquad x \in S \\ \qquad\quad x\ entier \end{cases}$$

Nous supposons que $(D_1x+\beta_1)(D_2x+\beta_2) > 0$, pour tout $x \in S$.

Après développement de la première forme du problème, on aboutis à la formulation suivante:

$$(P)\begin{cases} Min\ f(x) = \dfrac{(C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2)^T x + x^T C_1 C_2 x + \alpha_1\alpha_2}{(D_1\beta_1 + D_2\beta_2)^T x + x^T D_1 D_2 x + \beta_1\beta_2} \\ s.c \qquad x \in S \\ \qquad\quad x\ entier \end{cases}$$

On pose :

$$\begin{array}{lcl} C = C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 & & D = D_1\beta_1 + D_2\beta_2 \\ E = C_1C_2 & \text{et} & F = D_1D_2 \\ \alpha = \alpha_1\alpha_2 & & \beta = \beta_1\beta_2 \end{array}$$

C et D sont deux vecteurs de R^n, E et F deux $n \times n$ matrices des réelles et α, β deux éléments de R .

On obtient le programme fractionnaire quadratique à variables entières suivant :

$$(P)\begin{cases} Min\ f(x) = \dfrac{C^T x + x^T Ex + \alpha}{D^T x + x^T Fx + \beta} \\ s.c \qquad x \in S \\ \qquad\quad x\ entier \end{cases}$$

De même le numérateur $C^T x + x^T Ex + \alpha \geq 0$, pour tout $x \in S$, et le dénominateur $D^T x + x^T Fx + \beta > 0$ pour tout $x \in S$.

Après développent de la deuxième forme du problème, on obtient la formulation suivante:

$$(P)\begin{cases} Min\ f(x) = \dfrac{(C_1\beta_2 + \alpha_1 D_2 + C_2\beta_1 + \alpha_2 D_1)^T x + x^T (C_1 D_2 + C_2 D_1)x + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1}{(D_1\beta_1 + D_2\beta_2)^T x + x^T D_1 D_2 x + \beta_1\beta_2} \\ s.c \qquad x \in S \\ \qquad\quad x\ entier \end{cases}$$

On pose :

$$\begin{array}{lcl} C = C_1\beta_2 + \alpha_1 D_2 + C_2\beta_1 + \alpha_2 D_1 & & D = D_1\beta_1 + D_2\beta_2 \\ E = C_1D_2 + C_2D_1 & \text{et} & F = D_1D_2 \\ \alpha = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 & & \beta = \beta_1\beta_2 \end{array}$$

C et D sont deux vecteurs de R^n, E et F deux $n \times n$ matrices des réelles et α, β deux éléments de R.

On obtient le programme fractionnaire quadratique à variables entières suivant :

$$(P)\begin{cases} Min\ f(x) = \dfrac{C^T x + x^T Ex + \alpha}{D^T x + x^T Fx + \beta} \\ s.c \qquad x \in S \\ \qquad\quad x \ \ entier \end{cases} \qquad (1)$$

De même le numérateur $C^T x + x^T Ex + \alpha \geq 0$, pour tout $x \in S$, et le dénominateur $D^T x + x^T Fx + \beta > 0$ pour tout $x \in S$.

Donc, le problème qu'on projette d'étudier est un programme fractionnaire quadratique à variables entières suivant:

$$(P)\begin{cases} Min\ f(x) = \dfrac{C^T x + x^T Ex + \alpha}{D^T x + x^T Fx + \beta} \\ s.c \qquad x \in S \\ \qquad\quad x \ \ entier \end{cases} \qquad (2)$$

où :

- Le numérateur $C^T x + x^T Ex + \alpha \geq 0$, pour tout $x \in S$, et dénominateur $D^T x + x^T Fx + \beta > 0$ pour tout $x \in S$.
- C et D deux vecteurs de R^n, E et F deux $n \times n$ matrices des réelles et α, β deux éléments de R.

La méthode de résolution que nous allons présentés, détermine la solution optimale du problème (P) à travers une séquence finie des solutions réalisables entières. Elle est basée sur une approche exacte proposée par M. Abbas et M. Moulaï [4], pour explorer toutes les solutions réalisables entières d'un programme fractionnaire linéaire à variables entières.

IV.1.2/ Méthodologie

Il s'agit dans cette section de reprendre dans le cas des variables entières un concept introduit par R. Gupta et M. C. Puri [18] et utiliser une méthode de M. Abbas et M. Moulaï [4] pour balayer toutes les solutions réalisables entières d'un programme fractionnaire linéaire à variables entières.

Considérons le problème relaxé (P_1) associé au problème (P), en résolvant les deux programmes linéaires suivants:

$U_j = \underset{x \in S}{Min}\, x^T E_j, \quad j = 1,...,n$

où U_j est la $j^{ème}$ composante de U .

Et

$V_j = \underset{x \in S}{Max}\, x^T F_j, \quad j = 1,...,n$

où V_j est la $j^{ème}$ composante de V .

Nous aboutissons au problème fractionnaire linéaire à variables entières (P_1) suivant:

$$(P_1)\begin{cases} Min \;\; g(x) = \dfrac{(C+U)^T x + \alpha}{(D+V)^T x + \beta} \\ s.c. \qquad x \in S \\ \qquad\quad x \;\; entier \end{cases}$$

Remarque 1 : Les deux problèmes (1) et (2) ont le même domaine réalisable S .

Notations

f_p est la valeur de $f(x)$ à la $p^{ème}$ meilleure solution réalisable entière de (P)

g_k est la valeur de $g(x)$ à la $k^{ème}$ meilleure solution réalisable entière de (P_1)

T^k =l'ensemble des k premières meilleures solutions réalisables entières du problème (P_1)

$k = 1,2,...,N$ où $g_N = max\{g(x) : x \in S\}$.

Proposition 4.1 :

$g(x) \le f(x), \forall x \in S$.

Preuve

Comme $U = \underset{x \in S}{Min}\, x^T E$ et $V = \underset{x \in S}{Max}\, x^T F$, alors

$$(C+U)^T x + \alpha \le (C + x^T E)^T x + \alpha = C^T x + (x^T E)^T x + \alpha = C^T x + xE^T x + \alpha \ge 0$$

$$(D+V)^T + \beta \ge (D + x^T F)^T + \beta = D^T x + (x^T F)^T x + \beta = D^T x + x\ F^T x + \beta > 0$$

d'où :

$$\frac{(C+U)^T x + \alpha}{(D+V)^T + \beta} \le \frac{C^T x + xE^T x + \alpha}{D^T x + xF^T x + \beta} = f(x)$$

donc $g(x) \le f(x), \forall x \in S$

Proposition 4.2 :

Si pour $k \geq 1$, $g_k \geq min\{f(x) : x \in T^k\} = f(\hat{x})$, alors $\hat{x}$ est la solution optimale entière de (P).

Preuve

$f(\hat{x}) = min\{f(x) : x \in T^k\}$, donc

$$f(x) \geq f(\hat{x}), \forall x \in T^k \quad (1)$$

Comme g_k est la valeur de $g(x)$ à la $k^{ème}$ meilleure solution réalisable entière de (P_1), donc $g_w > g_k$, $\forall w \geq k+1$.

Aussi, $f(x_w) \geq g(x_w) = g_w$, $\forall x_w \in S$ (ref. proposition 4.1)

d'où $f(x_w) \geq g(x_w) > g_k \geq min\{f(x) : x \in T^k\} = f(\hat{x})$. (par hypothèse).

Ce qui implique, $f(x_w) > f(\hat{x}), \quad w \geq k+1$ (2)

(1) et (2) implique que $f(\hat{x})$ est la meilleure valeur de $f(x)$ dans S.

D'où $\hat{x}$ est la solution optimale entière du problème (P) et $f(\hat{x}) = f_1$. On note que $\{x \in T^k : f(x) = f(\hat{x})\}$ est un ensemble des meilleures solutions réalisables entières du problème (P).

Proposition 4.3 :

Si $g_k < min\{f(x) : x \in T^k\}$, alors $g_k < f_1 \leq min\{f(x) : x \in T^{k+1}\}$.

Preuve

Par la *proposition 4.1*, $f(x_w) \geq g_w$, comme pour $w \geq k+1$, $g_w > g_k$, nous aurons $f(x_w) > g_k$, $\forall w \geq k+1$.

d'où

$$min\{f(x) : x \in T^N et\ x \notin T^k\} > g_k \quad (3)$$

par hypothèse :

$$min\{f(x) : x \in T^k\} > g_k \quad (4)$$

(3) et (4) implique que $min\{f(x) : x \in T^N\} > g_k$, donc

$$f_1 > g_k \quad (5)$$

aussi, $min\{f(x) : x \in T^N\} \leq min\{f(x) : x \in T^{k+1}\}$ alors

$$f_1 \leq min\{f(x) : x \in T^{k+1}\} \quad (6)$$

(5) et (6) implique que $g_k < f_1 \leq min\{f(x) : x \in T^{k+1}\}$.

On résoud le problème fractionnaire linéaire à variables entières (PFLE) et on détermine la solution optimale entière. Pour balayer toutes les solutions réalisables entières du domaine S du problème (PFLE), on applique la méthode de M. Abbas et M. Moulaï [4] qui est basée sur un principe des coupes successives garantissant l'exploration de tout l'ensemble des solutions réalisables entières (ref. chapitre III).

Le problème d'un programme fractionnaire quadratique à variables entières sera résolu par l'algorithme proposé dans la section suivante:

IV.1.3/ Algorithme de résolution du problème (PFQE):

Etape initiale:

1- Déterminer les U_j et V_j par la résolution des deux programmes linéaires suivants:

$\underset{x \in S}{Min}\ x^T E_j$ et $\underset{x \in S}{Max}\ x^T F_j$**,** respectivement.

2- Construire le programme fractionnaire linéaire à variables entières (P_1). Aller à l'étape 1.

Etape 1

(1-a)- Résoudre le problème (P_1) et déterminer la solution optimale entière. Construire l'ensemble T^1. Calculer g_1 et déterminer $f(x),\ x \in T^1$.

(2-a)- Si $g_1 \geq min\{f(x) : x \in T^1\} = f(\hat{x})$, alors $\hat{x}$ est la solution optimale entière du problème (P) (ref. proposition 4.2).

Si $g_1 < min\{f(x) : x \in T^1\}$, aller à *Etape* 2

Etape 2

(1-b)- déterminer la $p^{ème}$ $(p \geq 2)$ meilleure solution réalisable entière du problème (P_1) par la méthode des coupes successives (M. Abbas et M. Moulaï [4]). Construire l'ensemble T^p, calculer g_p et $f(x),\ x \in T^p$.

Si $g_p \geq min\{f(x) : x \in T^p\} = f(\hat{x})$,

alors□60□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□606060□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□60□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□606060□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□61□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□61$_{61}$61□□□□□□□□□□□□□□

□□61□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□61$_{61}$61□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□61□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□61$_{61}$61□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□61□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□61$_{61}$61□□□

□□61□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□61$_{61}$61□□

□□□□□□□□□□□□61□□□□□□D Equation.3 $\min\{f(x) : x \in T^N\} = f(\hat{x})$. $\hat{x}$ est la solution optimale entière du problème *(P)* .

Théorème

L'algorithme décrit précédemment, converge en un nombre fini d'étapes.

Preuve

La solution optimale du problème (MODFPQ) est trouvée à travers une séquence finie des solutions réalisables entières. Ces solutions sont explorées en utilisant la méthode proposée par M. Abbas et M. Moulaï [4]. Puisque cette méthode [4] converge en un nombre fini d'étapes car la région des points réalisables est bornée et est tronquée à chaque étape par application répétée des coupes (coupes de Dantzig) correspondant à la solution réalisables entière respective, suivie éventuellement par des coupes de Gomory (voir. Chapitre III), les points entiers de la région réalisable sont parcourus de telle manière que chaque point et/ou chaque arête une fois parcouru ou tronqué ne peut pas réapparaître, alors la méthode de résolution du problème (MODFPQ) converge un nombre fini d'étapes.

IV.1.4/ Exemple numérique

Soit à résoudre le problème suivant :

$$(P)\begin{cases} \min \quad \dfrac{x_1 + 5x_2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + 3}{x_2 + x_1^2 + 1} \\ s.c. \quad 2x_1 + 5x_2 \le 42 \\ \qquad 5x_1 + x_2 \le 36 \\ \qquad x_1 \qquad \le 7 \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0, \text{ entiers} \end{cases}$$

étape initiale

Construire le problème d'un programme fractionnaire linéaire en nombre entiers (p_1), associé au problème (P), en résolvant les quatre programmes linéaires suivants :

$$(PL_1)\begin{cases} min \quad x_1 + x_2 = U_1 \\ s.c. \quad 2x_1 + 5x_2 \le 42 \\ \qquad 5x_1 + x_2 \le 36 \\ \qquad x_1 \qquad \le 7 \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} ; \qquad (PL_2)\begin{cases} min \quad x_1 = U_2 \\ s.c. \quad 2x_1 + 5x_2 \le 42 \\ \qquad 5x_1 + x_2 \le 36 \\ \qquad x_1 \qquad \le 7 \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$(PL_3)\begin{cases} max \quad x_1 = V_1 \\ s.c. \quad 2x_1 + 5x_2 \le 42 \\ \qquad 5x_1 + x_2 \le 36 \\ \qquad x_1 \qquad \le 7 \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} ; \qquad (PL_4)\begin{cases} max \quad 0x_1 + 0x_2 = V_2 \\ s.c. \quad 2x_1 + 5x_2 \le 42 \\ \qquad 5x_1 + x_2 \le 36 \\ \qquad x_1 \qquad \le 7 \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

On trouve les résultats suivants :

$U = (0,0); \quad V = (7,0).$

Alors le problème fractionnaire linéaire en nombres entiers est le suivant :

$$(P_1)\begin{cases} min \quad g(x) = \dfrac{x_1 + 5x_2 + 0x_1 + 0x_2 + 3}{7x_1 + x_2 + 0x_2 + 1} \\ s.c. \quad 2x_1 + 5x_2 \le 42 \\ \qquad 5x_1 + x_2 \le 36 \\ \qquad x_1 \qquad \le 7 \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0, \text{ entiers} \end{cases}$$

donc :

$$(P_1)\begin{cases} min \quad g(x) = \dfrac{x_1 + 5x_2 + 3}{7x_1 + x_2 + 1} \\ s.c. \quad 2x_1 + 5x_2 \le 42 \\ \qquad 5x_1 + x_2 \le 36 \\ \qquad x_1 \qquad \le 7 \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0, \text{ entiers} \end{cases}$$

étape 1

(1-a)- Résoudre le problème (P_1) :

$x^* = x_1 = (7,0)$ est la solution optimale entière du problème (P_1), $g(x_1) = 0.62$.

L'ensemble $T^1 = \{(7,0)\}$, la valeur de la fonction objectif de (P) est $f(x_1) = 1.18$.

(2-a)- Il est clair que : $g(x_1) < f(x_1)$.

étape 2

(1-b)- On détermine la deuxième solution réalisable entière du problème (P_1), en utilisant la méthode des coupes successives proposée par M. Abbas et M. Moulaï [4].

$x_2 = (5,0);\quad T^2 = \{(7,0);(5,0)\};\quad g(x_2) = 0.63;\quad f(x_2) = 1.27.$ On remarque toujours :

$g(x_2) = 0.63 < min\{f(x_i);i \in T^2\} = 1.18$

on détermine la $3^{ème}$ solution réalisable entière de (P_1) :

$x_3 = (7,1);\quad T^3 = \{(7,0);(5,0);(7,1)\};\quad g(x_3) = 0.73;\quad f(x_3) = 1.53.$ On remarque toujours :

$g(x_3) = 0.73 < min\{f(x_i);i \in T^3\} = 1.18$.

on détermine la $4^{ème}$ solution réalisable entière de (P_1) :

$x_4 = (6,6);\quad T^4 = \{(7,0);(5,0);(7,1);(6,6)\};\quad g(x_4) = 1.29;\quad f(x_4) = 3.42.$

On remarque

que :

$g(x_4) = 1.29 > min\{f(x_i);i \in T^4\} = 1.18$. Alors $\boldsymbol{\hat{x} = x_1 = (7,0)}$ **est la *solution optimale entière du problème*** (P), et la valeur de la fonction objectif est $\boldsymbol{f(\hat{x}) = 1.18}$.

IV.2/ Conclusion

La méthode proposée dans ce chapitre pour résoudre les programmes fractionnaires quadratiques à variables entières peut être vu comme une alternative aux méthodes existantes dans la littérature qui peut servir comme un support de travail pour mettre au point, un algorithme de résolution du problème fractionnaire quadratique multi-objectifs à variables entières.

Chapitre V

Une Méthode d'Optimisation Multi-objectifs Discrète d'un Problème Fractionnaire Quadratique (MOMDPFQ)

V.1/ Introduction

Nous nous sommes intéressées dans le chapitre précédent à une méthode de résolution des programmes à un seul critère pour lequel l'objectif à optimiser est un rapport de deux fonctions quadratiques dans un domaine discontinu. Evidement, il existe plusieurs situations pratiques qui exigent des modélisations pour lesquelles les critères sont multiples, ce qui nous a permis de révéler un réel besoin d'une approche de résolution.

En utilisant l'algorithme de résolution d'un programme fractionnaire quadratique en nombres entiers introduit dans le chapitre précèdent, nous avons pu développer un algorithme pour la résolution du problème de la programmation fractionnaire quadratique en nombres entiers à objectifs multiples.

V.2/ Définitions et notations

Considérons le problème fractionnaire quadratique en nombres entiers à objectifs multiples donné sous la forme mathématique suivante :

$$(P)\begin{cases} \min \quad f_1(x) = \dfrac{C_1^T x + x^T E_1 x + \alpha_1}{D_1^T x + x^T F_1 x + \beta_1} \\ \min \quad f_2(x) = \dfrac{C_2^T x + x^T E_2 x + \alpha_2}{D_2^T x + x^T F_2 x + \beta_2} \\ \qquad\qquad . \\ \qquad\qquad . \\ \qquad\qquad . \\ \min \quad f_r(x) = \dfrac{C_r^T x + x^T E_r x + \alpha_r}{D_r^T x + x^T F_r x + \beta_r} \\ \qquad s.c. \quad x \in S \\ \qquad\qquad x \text{ entier} \end{cases}$$

Les critères fractionnaires quadratiques sont induits d'un produit ou d'une somme de deux fonctions fractionnaire linéaire (voir. chapIV).

où $r \geq 2$ est un nombre entier; $\alpha_i et \ \beta_i$ sont des scalaires; $E_i, F_i \in R^{n\times n}$; $C_i, D_i \in R^n$; $i \in \{1,2,...,r\}$ et $S = \{x \in R^n \ / \ Ax \leq b; A \in R^{m\times n}, b \in R^m; x \geq 0\}$.

On suppose que la région admissible non vide S est compacte et convexe, $C_i^T x + x^T E_i x + \alpha_i \geq 0$ et $D_i^T x + x^T F_i x + \beta_i > 0$ sur S pour tout $i \in \{1,2,...,r\}$.

Comme le problème de la programmation fractionnaire linéaire à objectif multiples (voir M. Abbas et M. Moulaï [5]), la solution du problème (P) est de trouver toutes les solutions qui sont efficaces dans le sens de la définition suivante :

Définition

Un point x^0 est efficace si et seulement si il n'existe pas un autre point x^1 tel que $f_i(x^1) \geq f_i(x^0)$, $i \in \{1,2,...,r\}$ et $f_i(x^1) > f_i(x^0)$ pour au moins un indice $i \in \{1,2,...,r\}$.

Un point est efficace si son image par f est un vecteur critères non dominé. Le terme efficacité est aussi connu sous le nom de Pareto optimalité ou non infériorité.

Les fonctions $f_i(x) = \dfrac{C_i^T x + x^T E_i x + \alpha_i}{D_i^T x + x^T F_i x + \beta_i}$, $i \in \{1,2,...,r\}$ sont appelées fonctions objectifs ou critères et *Eff* est l'ensemble des critères non dominés du problème de la programmation fractionnaire quadratique en nombres entiers à objectif multiples.

La résolution du problème (P) commence par celle du problème fractionnaire quadratique entier s'écrivant comme :

$$(P_1)\begin{cases} min \quad f_1(x) = \dfrac{C_1^T x + x^T E_1 x + \alpha_1}{D_1^T x + x^T F_1 x + \beta_1} \\ \\ \qquad\qquad s.c. \quad x \in S \\ \qquad\qquad\qquad x \text{ entier} \end{cases} \tag{1}$$

La résolution du problème (P) nécessite l'introduction des notations suivantes :

- $S_1 = \{x \in R^n / A_1 x \le b_1, A_1 \in R^{m\times n}, b_1 \in R^m, x \ge 0\}$

  S_1 est la région tronquée courante de S obtenue par des coupes de Gomory successives.
- $x_1^1 = \{x_{1,j}^1\}$ est la solution optimale entière donnant f_1^1 obtenue sur S_1.
- f_1^1 est la valeur optimale de f_1 pour le problème (P_1).
- f_i^1 est la valeur optimale de f_i pour le problème (P_i), $i \in \{2,...,r\}$

Pour $k \ge 2$

- $S_k = \{x \in R^n / A_k x \le b_k, A_k \in R^{m\times n}, b_k \in R^m, x \ge 0\}$

  S_k est la région tronquée courante de S obtenue par application de la coupe $\sum_{j \in N_{k-1}/\{j_{k-1}\}} x_j \ge 1$
- $x_k^1 = \{x_{k,j}^1\}$ est la $k^{ème}$ meilleure solution réalisable entière du problème (P_1) obtenue sur S_k à l'étape k.
- f_1^k est la $k^{ème}$ meilleure valeur de f_1 pour le problème (P_1).
- f_i^k est la $k^{ème}$ meilleure valeur de f_i pour le problème (P_i), $i \in \{2,...,r\}$

V.3/ Résultats préliminaires

Comme le problème de la programmation fractionnaire quadratique en nombres entiers à objectif multiples consiste a déterminer l'ensemble des solutions efficaces entières, on parcourt tous les points entiers de la région réalisable S. Il s'agit de reprendre dans le cas des variables entières un concept introduit par R. Gupta et M. C. Puri [18] pour construire un programme fractionnaire linéaire en nombres entiers associé au problème fractionnaire quadratique en nombres entiers, en résolvant les deux programmes linéaires en nombres entiers suivants :

$$(PL_1)\begin{cases} U_{1j} = min\ x^T E_{1j} & j = 1,...,n \\ s.c. \quad x \in S \end{cases} \qquad (PL_2)\begin{cases} V_{1j} = max\ x^T F_{1j} & j = 1,...,n \\ s.c. \quad x \in S \end{cases}$$

Nous construirons un programme fractionnaire linéaire en nombres entiers associé au problème (P_1) de la façon suivante :

$$(Pr_1)\begin{cases} min \quad g_1(x) = \dfrac{(C_1 + U_1)^T x + \alpha_1}{(D_1 + V_1)^T x + \beta_1} \\ s.c. \quad x \in S \\ \qquad x\ entier \end{cases} \tag{2}$$

Remarque 1

Les deux problèmes (1) et (2) ont le même domaine réalisable S.

Remarque 2

Le point $\bar{x}$ est une solution réalisable entière du problème (1) si et seulement si, $\bar{x}$ est une solution réalisable entière du problème (2).

Il consiste, donc a parcourir tous les points entiers de la région réalisable pour le problème (2) en utilisant la technique des coupes planes proposée par M. Abbas et M. Moulaï [4].

Notations

- g_1^1 est la valeur optimale de g_1 pour le problème (Pr_1).
- g_i^1 est la valeur optimale de g_i pour le problème (Pr_i), $i \in \{1,2,...,r\}$.
- g_1^p est la $p^{ème}$ meilleure valeur de g_1 pour le problème (Pr_1).
- g_i^p est la $p^{ème}$ meilleure valeur de g_i pour le problème (Pr_i), $i \in \{1,2,...,r\}$.

- T_i^k = l'ensemble des k premières meilleures solutions réalisables entières du problème (Pr_i), $k = 1,2,...,N$ où $g_i^N = max\{g(x) : x \in S\}$, $i \in \{1,2,...,r\}$.

Proposition 5.1:

$g_i(x) \leq f_i(x), \forall x \in S,\ i \in \{1,2,...,r\}$.

Preuve

voir chapitre IV

Proposition 5.2 :

Si pour $k \geq 1$, $g_i^k \geq min\{f_i(x) : x \in T_i^k\} = f_i(\hat{x})$, alors $\hat{x}$ est la solution optimale entière de (P_i), $i \in \{1,2,...,r\}$.

Preuve

voir chapitre IV

Proposition 5.3 :

Si $g_i^k < min\{f_i(x) : x \in T_i^k\}$, alors $g_i^k < f_i^1 \leq min\{f_i(x) : x \in T_i^{k+1}\}$, $i \in \{1,2,...,r\}$

Preuve

voir chapitre IV

Proposition 5.4

Si $g_i^p \geq min\{f_i(x) : f_i(x) > f_i^k, x \in T_i^P\} = f_i(\hat{x})$, alors $\hat{x}$ est la $(k+1)^{ème}$ meilleure solution réalisable entière de (P_i), $i \in \{1,2,...,r\}$.

Preuve

$f_i(\hat{x}) = min\{f_i(x) : f_i(x) > f_i^k, x \in T_i^P\}$, donc $f_i(x) \geq f_i(\hat{x}), \forall x \in T_i^P$, $i \in \{1,2,...,r\}$ et

$$f_i(\hat{x}) > f_i^k \tag{1}$$

aussi, $f_i(x_e) \geq g_i(x_e) = g_i^e \quad \forall x_e \in S$ (*par prop5.1*) et $f_i(x_e) \geq g_i^e > g_i^p \geq f_i(\hat{x}) \quad \forall e \geq p+1$ $i \in \{1,2,...,r\}$ (*par hypothèse*), alors :

$$f_i(x_e) > f_i(\hat{x}), \quad e \geq p+1 \tag{2}$$

(1) et (2) implique que $\hat{x}$ est la $(k+1)^{mè}$ meilleure solution réalisable entière de (P_i), $i \in \{1,2,...,r\}$.

Proposition 5.5

Si $g_i^p < min\{f_i(x) : f_i(x) > f_i^k, x \in T_i^p\}$, **alors** $g_i^p < f_i^{k+1} \le min\{f_i(x) : f_i(x) > f_i^k, x \in T_i^{P+1}\}$,

$i \in \{1,2,...,r\}$

Preuve

Par la *proposition5.1*, $f_i(x_w) \ge g_i^w, \forall x_w \in S \;, \; i \in \{1,2,...,r\}$.

et $\forall w \ge p+1, \;\; on \;\; a \quad g_i^w > g_i^p$, donc $f_i(x_w) > g_i^p \quad \forall w \ge p+1 \;, \; i \in \{1,2,...,r\}$.

d'où

$$min\{f_i(x) : x \in T_i^N et \; x \notin T_i^P\} > g_i^p \;, \; i \in \{1,2,...,r\} \tag{3}$$

par hypothèse :

$$min\{f_i(x) : f_i(x) > f_i^k, x \in T_i^P\} > g_i^p \;, \; i \in \{1,2,...,r\} \tag{4}$$

(3) et (4) implique que $min\{f_i(x) : f_i(x) > f_i^k, x \in T_i^N\} > g_i^p \;, \; i \in \{1,2,...,r\}$ donc

$$f_i^{k+1} > g_i^p \;, \; i \in \{1,2,...,r\} \tag{5}$$

aussi, $min\{f_i(x) : f_i(x) > f_i^k, x \in T_i^N\} \le min\{f_i(x) : f_i(x) > f_i^k, x \in T_i^{P+1}\}$ alors

$$f_i^{k+1} \le min\{f_i(x) : f_i(x) > f_i^k, x \in T_i^{k+1}\}, \; i \in \{1,2,...,r\} \tag{6}$$

(5) et (6) implique que $g_i^p < f_i^{k+1} \le min\{f_i(x) : f_i(x) > f_i^k, x \in T_i^{k+1}\}, \; i \in \{1,2,...,r\}$.

V.4/ Développement de la procédure

Pour résoudre un problème fractionnaire quadratique en nombres entiers à objectifs multiples, une nouvelle procédure basée sur la construction d'un problème fractionnaire linéaire en nombres entiers à partir d'un problème fractionnaire quadratique en nombres entiers , et la technique des coupes planes est présentée dans les étapes suivantes :

Algorithme de résolution du problème (PFQME):

Etape initiale :

Résoudre le problème relaxé (P_1).

Notons qu'à la place du problème (P_1), on pourra considérer d'une manière analogue le problème (P_i) avec un objectif f_i pour un indice quelconque $i \in \{1,2,...,r\}$.

(1-a)- Construire le problème fractionnaire linéaire en nombres entiers (Pr_1) associé au problème fractionnaire quadratique en nombres entiers (P_1).

(2-a)- Résoudre le problème (Pr_1) et trouver la solution optimale entière x_1^1 sur S_1. Déterminer l'ensemble T_1^1 (solutions adjacentes à la solution optimale). Calculer g_1^1 et $f_1(x)$: $x \in T_1^1$.

(3-a) - Si $g_1^1 \geq min\{f_1(x) : x \in T_1^1\} = f_1(\hat{x})$**.** Donc $\hat{x} = x_1^1$ est la solution optimale entière du problème (P_1).

- Si $\hat{x}$ est unique. Enregistrer le premier r-uplet efficace comme $(f_1, f_2, ..., f_r)$ pour construire l'ensemble des points efficaces Eff_0. *Aller à l'étape1*
- Sinon, soit x_2^1 une solution réalisable entière adjacente à la solution $\hat{x}$. Chaque solution donne naissance à un r-uplet potentiellement efficace de la forme $(f_1, f_2, ..., f_r)$. Eff_0 est l'ensemble des r-uplets non dominé potentielles. *Aller à l'étape1*

Si $g_1^1 < min\{f_1(x) : x \in T_1^1\}$, aller à *(1-b)*.

(1-b)- déterminer la $p^{ème}$ $(p \geq 2)$ meilleure solution réalisable entière du problème (Pr_1) par la méthode des coupes successives (M.Abbas et M.Moulaï [4]). Construire l'ensemble T_1^p, calculer g_1^p et $f_1(x), x \in T_1^p$.

Si $g_1^p \geq min\{f_1(x) : x \in T_1^p\} = f_1(\hat{x})$, alors $\hat{x}$ est la solution optimale entière du problème (P_1)

- Si $\hat{x}$ est unique. Enregistrer le premier r-uplet efficace comme $(f_1, f_2, ..., f_r)$ pour construire l'ensemble des points efficaces Eff_0. *Aller à l'étape1*
- Sinon, soit x_p^1 une solution réalisable entière adjacente à la solution $\hat{x}$. Chaque solution donne naissance à un r-uplet potentiellement efficace de la forme $(f_1, f_2, ..., f_r)$. Eff_0 est l'ensemble des r-uplets non dominé potentielles. *Aller à l'étape1*

Si $g_1^p < min\{f_1(x) : x \in T_1^p\}$. Répéter (1-b) pour les valeurs supérieures à p et continuer jusqu'à ce que la solution optimale entière de (P_1) soit obtenue.

Etape1 (déterminer la $2^{ème}$ meilleure solution réalisable entière de (P_1))

(1)- déterminer l'ensemble T_1^p ($p \geq 2$), calculer g_1^p.

Si $g_1^p \geq min\{f_1(x) : f_1(x) > f_1^1, x \in T_1^P\} = f_1(\hat{x})$, alors $\hat{x}$ est la deuxième meilleure solution réalisable entière du problème (P_1). Lire le r-uplet correspondant $(f_1, f_2, ..., f_r)$ et le rajouter à Eff_0 s'il n'est pas dominé par l'un des r-uplets efficaces précédents.

Par conséquent, Eff_0 devient Eff_1.

Si $g_1^p < min\{f_1(x) : f_1(x) > f_1^1, x \in T_1^P\}$. Répéter l'étape1 pour les valeurs supérieures à p.

***Etape k :** (déterminer la $(k+1)^{ème}$ meilleure solution réalisable entière de (P_1))*

(1)- déterminer l'ensemble T_1^P ($p \geq 2$), calculer g_1^p.

Si $g_1^p \geq min\{f_1(x) : f_1(x) > f_1^k, x \in T_1^P\} = f_1(\hat{x})$, alors $\hat{x}$ est la $(k+1)^{ème}$ meilleure solution réalisable entière du problème (P_1). Lire le r-uplet correspondant $(f_1, f_2, ..., f_r)$ et le rajouter à Eff_0 s'il n'est pas dominé par l'un des r-uplets efficaces précédents. Par conséquent, Eff_0 devient Eff_1.

Si $g_1^p < min\{f_1(x) : f_1(x) > f_1^k, x \in T_1^P\}$. Répéter l'étape k pour les valeurs supérieures à p.

Etape terminale:

Supposons $g_1^N = \max_{x \in S} g_1(x)$ est calculée, et le problème (P_1) contient $(t+a)$ solutions réalisable entière $(a \geq 1)$. Alors $f_1^{t+\hat{a}} = min\{f_1(x) : f_1(x) > f_1^{t+a-1}, x \in T_1^N\}$, $a \geq 1$.

L'algorithme est terminé, si pour un $(t+a), a \geq 1$ (soit $(t+\hat{a})$), on a:

$\{f_1(x) : f_1(x) > f_1^{t+\hat{a}}, x \in T_1^N\} = \phi$. Alors $f_1^{t+\hat{a}}$ est la meilleure valeur de $f_1(x)$ pour le problème (P_1). Donc $x_{t+\hat{a}}$ est la $(t+\hat{a})^{ème}$ meilleure solution réalisable entière de (P_1).

Théorème

L'algorithme de recherche des solutions efficaces entières du problème (P) décrite ci-dessus converge en un nombre fini d'étapes.

Preuve

L'ensembles des solutions efficaces du problème (MODFPQ) sont trouvées à travers une séquence finie des solutions réalisables entières. Ces solutions sont explorées en utilisant la méthode proposée par M. Abbas et M. Moulaï [4]. Puisque cette méthode [4] converge en un nombre fini d'étapes car la région des points réalisables est bornée et est tronquée à chaque étape par application répétée des coupes (coupes de Dantzig) correspondant à la solution réalisables entière respective, suivie éventuellement par des coupes de Gomory (voir. Chapitre III), les points entiers de la région réalisable sont parcourus de telle manière que chaque point et/ou chaque arête une fois parcouru ou tronqué ne peut pas réapparaître, alors la méthode de résolution du problème (MODFPQ) converge un nombre fini d'étapes.

V.5/ Exemple numérique :

Pour illustrer l'utilisation de notre méthode, considérons un problème de la programmation fractionnaire quadratique bicritères en nombres entiers suivant :

$$(P)\begin{cases} Min \quad \left\{ f_1(x) = \dfrac{3x_1 + 2x_2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2}{-x_1 + x_1^2 + x_2^2 + 1} ; \; f_2(x) = \dfrac{x_1 - 4}{x_2 + 1} \right\} \\ s.c. \quad 3x_1 + 4x_2 \le 15 \\ \quad 6x_1 - x_2 \le 10 \\ \quad -4x_1 + 3x_2 \le 5 \\ \quad -10x_1 + 4x_2 \le 13 \\ \quad x_1, x_2 \ge 0, entiers \end{cases}$$

Etape initiale :

Résoudre le problème relaxé (P_1) :

$$(P_1)\begin{cases} Min \quad f_1(x) = \dfrac{3x_1 + 2x_2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2}{-x_1 + x_1^2 + x_2^2 + 1} \\ s.c. \quad 3x_1 + 4x_2 \le 15 \\ \quad 6x_1 - x_2 \le 10 \\ \quad -4x_1 + 3x_2 \le 5 \\ \quad -10x_1 + 4x_2 \le 13 \\ \quad x_1, x_2 \ge 0, \text{ entiers} \end{cases}$$

(1-a)- Construire le problème fractionnaire linéaire en nombres entiers (Pr_1), associé au problème fractionnaire quadratique en nombres entiers (P_1). En résolvant les quatre programmes linéaires suivant :

$$(PL_1)\begin{cases} min \quad x_1 + x_2 = U_1 \\ s.c. \quad 3x_1 + 4x_2 \le 15 \\ \quad 6x_1 - x_2 \le 10 \\ \quad -4x_1 + 3x_2 \le 5 \\ \quad -10x_1 + 4x_2 \le 13 \\ \quad x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} ; \qquad (PL_2)\begin{cases} min \quad x_1 + x_2 = U_2 \\ s.c. \quad 3x_1 + 4x_2 \le 15 \\ \quad 6x_1 - x_2 \le 10 \\ \quad -4x_1 + 3x_2 \le 5 \\ \quad -10x_1 + 4x_2 \le 13 \\ \quad x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$(PL_3)\begin{cases} max \quad x_1 = V_1 \\ s.c. \quad 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\ \quad 6x_1 - \ x_2 \leq 10 \\ -4x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ -10x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} ; \qquad (PL_4)\begin{cases} max \quad x_2 = V_2 \\ s.c. \quad 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\ \quad 6x_1 - \ x_2 \leq 10 \\ -4x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ -10x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

on obtient le programme fractionnaire linéaire en nombres entiers suivant :

$$(Pr_1)\begin{cases} Min \quad g_1(x) = \dfrac{3x_1 + 2x_2 + 2}{x_1 + 3x_2 + 1} \\ s.c. \quad 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\ \quad 6x_1 - \ x_2 \leq 10 \\ -4x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ -10x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ x_1, x_2 \geq 0, entiers \end{cases}$$

(2-a)- On résout le problème (Pr_1). La solution optimale entière est $x_1^1 = (0,3)$, cette solution n'a pas de solutions adjacentes.

$T_1^1 = \{(0,3)\}$

$$g_1(x_1) = 0.8 \qquad\qquad f_1(x_1) = 1.7$$

(3-a)- Il est clair que $g_1(x_1) = 0.8 < min\{f_1(x) : x \in T^1\} = 1.7$. Donc, on détermine la deuxième meilleure solution de (Pr_1) par la méthode des coupes successives (M. Abbas et M. Moulaï [4]).

On trouve $x_2 = (0,2)$. $T_1^2 = \{(0,3);(0,2)\}$.

$$g_1(x_2) = 6/7 \qquad\qquad f_1(x_2) = 2$$

$g_1(x_2) = 6/7 < min\{f_1(x) : x \in T_1^2\} = 1.7$. On détermine la troisième meilleure solution de (Pr_1).

On trouve $x_3^1 = (0,1)$ et $x_3^2 = (1,3)$ deux solutions adjacentes. $T_1^3 = \{(0,3);(0,2);(0,1);(1,3)\}$.

$$f_1(x_3^1) = 2.5$$

$$g_1(x_3^1) = g_1(x_3^2) = 1$$

$$f_1(x_3^2) = 2.7$$

$g_1(x_3^1) = g_1(x_3^2) = 1 < min\{f_1(x) : x \in T_1^3\} = 1.7$. On détermine la quatrième meilleure solution de (Pr_1).

On trouve $x_4^1 = (1,2)$, $T_1^4 = \{(0,3);(0,2);(0,1);(1,3);(1,2)\}$.

$$g_1(x_4^1) = 1.125 \qquad\qquad f_1(x_4^1) = 3.6$$

$g_1(x_4^1) = 1.125 < min\{f_1(x) : x \in T_1^4\} = 1.7$. On détermine la cinquième meilleure solution de (Pr_1).

On trouve $x_5^1 = (2,2)$, $T_1^5 = \{(0,3);(0,2);(0,1);(1,3);(1,2);(2,2)\}$.

$$g_1(x_5^1) = 1.33 \qquad\qquad f_1(x_5^1) = 4$$

$g_1(x_5^1) = 1.33 < min\{f_1(x) : x \in T_1^5\} = 1.7$. On détermine la sixième meilleure solution de (Pr_1).

On trouve $x_6^1 = (1,1)$, $T_1^6 = \{(0,3);(0,2);(0,1);(1,3);(1,2);(2,2);(1,1)\}$.

$$g_1(x_6^1) = 1.4 \qquad\qquad f_1(x_6^1) = 5.5$$

$g_1(x_6^1) = 1.33 < min\{f_1(x) : x \in T_1^6\} = 1.7$. On détermine la septième meilleure solution de (Pr_1).

On trouve $x_7^1 = (0,0)$, $T_1^7 = \{(0,3);(0,2);(0,1);(1,3);(1,2);(2,2);(1,1);(0,0)\}$.

$$g_1(x_7^1) = 2 \qquad\qquad f_1(x_7^1) = 2$$

$g_1(x_7^1) = 2 > min\{f_1(x) : x \in T_1^7\} = 1.7 = f_1(x_1^1)$. Donc $x_1^1 = (0,3)$ **est la solution optimale** du problème (P_1) produit le premier couple efficace (1.7 ;-1).

$Eff_0 = \{(1.7,-1)\}$

Etape1 **:** Déterminer la deuxième meilleure solution réalisable entière de (P_1)

(1)- $T_1^7 = \{(0,3);(0,2);(0,1);(1,3);(1,2);(2,2);(1,1);(0,0)\}$

$g_1(x_7^1) = 2 = min\{f_1(x) : f_1(x) > f_1^1 = 1.7; x \in T_1^7\} = 2 = f_1(x_7^1)$. Donc $x_7^1 = (0,0)$ **est la deuxième meilleure solution réalisable entière** du problème (P_1) alternative à la solution $x_2^1 = (0,2)$. $x_2^1 = (0,2)$ domine la solution $x_7^1 = (0,0)$**,** par conséquent le couple (2,-4) correspondant à $x_6^1 = (0,0)$ qui est non-dominé aux précédents de Eff_0 est rajouté à Eff_0 pour obtenir $Eff_1 = \{(1.7,-1);(2,-4)\}$.

Déterminer la troisième meilleure solution réalisable entière de (P_1)

(1)- $T_1^7 = \{(0,3);(0,2);(0,1);(1,3);(1,2);(2,2);(1,1);(0,0)\}$

$g_1(x_7^1) = 2 < min\{f_1(x) : f_1(x) > f_1^2 = 2; x \in T_1^7\} = 2.5 = f_1(x_2^1)$. On détermine la huitième meilleure solution de (Pr_1) par la méthode des coupes successives (M. Abbas et M. Moulaï [4]).

On trouve $x_8^1 = (1,0)$. $T_1^8 = \{(0,3);(0,2);(0,1);(1,3);(1,2);(2,2);(1,1);(0,0);(1,0)\}$.

$g_1(x_8^1) = 2.5$ $f_1(x_8^1) = 2.5$

$g_1(x_8^1) = 2.5 = min\{f_1(x) : f_1(x) > f_1^2 = 2; x \in T_1^8\} = 2.5 = f_1(x_2^1)$. Donc $x_2^1 = (0,1)$ **est la troisième meilleure solution réalisable entière** du problème (P_1). Le couple (2.5,-2) correspondant à $x_2^1 = (0,1)$ est dominé aux précédents de Eff_1**.** Par conséquent, $Eff_1 = \{(1.7,-1);(2,-4)\}$.

Etape terminale :

$g_1^N = g_1^8 = \max_{x \in T^7} g_1(x)$ est calculé.

$f_1^4 = min\{f_1(x) : f_1(x) > f_1^3 = 2.5; x \in T_1^8\} = 2.7 = f_1(x_2^2)$. Donc $x_2^2 = (1,3)$ **est la quatrième meilleure solution réalisable entière** du problème (P_1). Le couple (2.7,-0.75) correspondant à $x_2^2 = (1,3)$ est dominé aux précédents de Eff_1**.** Par conséquent, $Eff_1 = \{(1.7,-1);(2,-4)\}$.

$f_1^5 = min\{f_1(x) : f_1(x) > f_1^4 = 2.7; x \in T_1^8\} = 3.6 = f_1(x_3^1)$. Donc $x_3^1 = (1,2)$ **est la cinquième meilleure solution réalisable entière** du problème (P_1). Le couple (3.6,-1) correspondant à $x_3^1 = (1,2)$ est dominé aux précédents de Eff_1**.** Par conséquent, $Eff_1 = \{(1.7,-1);(2,-4)\}$.

$f_1^6 = min\{f_1(x) : f_1(x) > f_1^5 = 3.6; x \in T_1^8\} = 4 = f_1(x_4^1)$. Donc $x_4^1 = (2,2)$ **est la sixième meilleure solution réalisable entière** du problème (P_1). Le couple (4,-0.6) correspondant à $x_4^1 = (2,2)$ est dominé aux précédents de Eff_1**.** Par conséquent $Eff_1 = \{(1.7,-1);(2,-4)\}$.

$f_1^7 = min\{f_1(x) : f_1(x) > f_1^6 = 4; x \in T_1^8\} = 5.5 = f_1(x_5^1)$. Donc $x_5^1 = (1,1)$ **est la septième meilleure solution réalisable entière** du problème (P_1). Le couple (5.5,-1.5) correspondant à $x_5^1 = (1,1)$ est dominé aux précédents de Eff_1**.** Par conséquent, $Eff_1 = \{(1.7,-1);(2,-4)\}$.

$f_1^8 = min\{f_1(x) : f_1(x) > f_1^7 = 5.5; x \in T_1^8\} = 6 = f_1(x_7^1)$. Donc $x_7^1 = (1,0)$ **est la huitième meilleure solution réalisable entière** du problème (P_1). Le couple (6,-3) correspondant à $x_7^1 = (1,0)$ est dominé aux précédents de Eff_1**.** Par conséquent, $Eff_1 = \{(1.7,-1);(2,-4)\}$.

$min\{f_1(x) : f_1(x) > f_1^8 = 6; x \in T_1^8\} = \phi$. Donc l'algorithme est terminé, et $x_7^1 = (1,0)$ est la dernière meilleure solution réalisable entière du problème(P_1).

V.6/ Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle méthode a été proposée pour la résolution des problèmes de programmes fractionnaires quadratiques entiers à objectifs multiples qui peut être vu comme une alternative aux méthodes existantes dans la littérature.

CONCLUSION GENERALE

Les nombreux résultats obtenus lors de la réalisation de ce travail de recherche nous permettent d'espérer et d'être motivé d'avantage pour une amélioration substantielle des méthodes mises au point dans le but de résoudre le problème de l'optimisation en nombres entiers du choix du décideur sur l'ensemble des points efficaces, problème d'actualité fort intéressant.

Notre premier objectif dans cette thèse fut de réaliser une étude détaillée sur la programmation fractionnaire mono-objectif (PF) en passant en revue l'important de la littérature existante {voir [2][11][16]} dans le but d'aboutir à un passage possible de l'aspect fractionnaire linéaire au fractionnaire quadratique. Ensuite de l'aspect fractionnaire quadratique mono-objectif au fractionnaire quadratique multi-objectifs. Ce dernier nous a conduit à mettre au point une méthode de résolution d'un problème discret fractionnaire quadratique. Certes, sa convergence et son efficacité dépend de la méthode de M. Abbas et M. Moulaï [4], utilisée pour balayer toutes les solutions réalisables entières d'un (PFLE). L'avantage principal de cette méthode est qu'aucune optimisation non linéaire n'est exigée.
Les solutions réalisables entières de problème fractionnaire linéaire en nombres entiers relaxé sont explorées et les valeurs de la fonction objectif du problème fractionnaire quadratique en nombres entiers sont calculées. En fait, Nous ne pourrions proposer aucune autre méthode actuellement à moins que celle développée dans ce travail de thèse. On espère vivement que ce travail motive d'autres chercheurs pour développer de meilleures méthodes de résolution.

IL existe des problèmes qui peuvent être résolus par la méthode de résolution proposée dans cette thèse pour les problèmes fractionnaires quadratiques en nombres entiers. Par exemple, Le problème fractionnaire quadratique en 0-1 :

$$\begin{cases} Min \quad f(x) = \dfrac{C^T x + x^T Ex + \alpha}{D^T x + x^T Fx + \beta} \\ s.c. \qquad h(x) \leq 0 \\ \qquad\quad x = 0 \ \ ou \ 1 \end{cases}$$

peut être formulé en un problème fractionnaires quadratiques en nombres entiers en rajoutant les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} x \leq e, \quad e = (1,1,...,1) \\ x \geq 0 \\ x \ entier \end{cases}$$

Le problème devient :

$$\begin{cases} Min \quad f(x) = \dfrac{C^T x + x^T Ex + \alpha}{D^T x + x^T Fx + \beta} \\ s.c. \qquad h(x) \leq 0 \\ \qquad\quad x \leq e, \quad e = (1,1,...,1) \\ \qquad\quad x \geq 0 \\ \qquad\quad x \ entier \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Abbas, M., and Moulaï, M., « Penalities Method for Integer Linear Fractional Programs ». Belgian Journal of Operations Research. Statistics and computer sciences. Vol. 37/4 (1997), 41-51.

[2] Abbas, M., and Moulaï, M., " Integer linear fractional programming with multiple objective", Ricerca Operativa, Vol. 32 n° 103-104 (2003), pp. 51-70.

[3] Abbas, M., and Moulaï, M., « An algorithm for mixed integer linear fractinal programming problem ». Belgian Journal of Operations Research. Statistics and computer sciences. Vol. 39/1 (1999), 21-30.

[4] Abbas, M., and Moulaï, M., « Solving multiple objective integer linear programming ». Ricerca Operativa. Vol. 29 N° 89 (1999), pp. 15-38.

[5] Abbas, M., et Moulaï, M., « Optimisation Multicritère fractionnaire Linéaire en nombres entiers ». (2002).

[6] Bector, C, R., « Duality in non linear fractional programming» (1973).

[7] Bitran, G, R and Magnanti, T., « Duality and sensitivity analysis for fractional programs » (1976).

[8] Breanu, B., «Decision regions and minimum risk solutions in linear programming », Publ.house of the hungarian academy of sciences, Budapest, 1965, p. 37-42.

[9] Cambini, A and Martein, L., «A modified version of Martos's algorithm for the linear fractional problem». Methods of Oper. Res. 53 (1986), p. 33-44

[10] Cambini, A and Martein, L., «Equivalence Fractional Programming ». Optimisation. Vol.23. pp. 41-51. (1992).

[11] Cambini, A., Martein, L. and Stancu-Minasian, I. M., " A survey of bicriteria fractional problems: Advanced modeling and optimization", An electronic International Journal, Vol. 1, n° 1 (1999), pp. 9-46.

[12] Charnes, A and Cooper, W, W., «programming with linear fractional funtionals»(1962), 181-186.

[13] Dinkelbach, W «On nonlinear fractional programming». (1967), p. 492-498

[14] Gold'stein, L, S « Dual problems of convex and fractionally-convex programming in functional spaces » (1967).

[15] Gomory, R, E., «Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs ». Bultin of the AMS 64. 275-278. (1958)

[16] Granot, D and Granot, F., «On integer and mixed integer fractional programming problems ».Annals of Discrete Math.1 (1977). 221-231

[17] Guignard, M and Kim, S., « Lagrangean decomposition for integer programming» (1973).

[18] Gupta, R., and Puri, M, C., « Extreme point quadratic fractional programming problem». Optimisation. Vol. 30. pp 205-214. (1994)

[19] Hansen, P, Minoux, M, et labbé, M., « Extension de la programmation linéaire généralisée au cas des programmes mixtes »1987,p. 569-572

[20] Hansen, P, Poggi De Aragao, M, V and Ribeiro, C, C., « Hyperbolic 0-1 programming and query information retrieval ».Math. Programming, 1991, 52, p. 255-263

[21] Heine, M, H., « Distance between sets as an objective measure of retrieval effectiveness » Informatio Storage et Retrieval, 1973, 9, p. 181-198

[22] Isbell, J, R and Marlow, W, H., «Attribution games». (1956), p. 71-94

[23] Martos, B., « Hyperbolic Programming ».Naval Res.Logist. 11 (1964). 135-155

[24] Michelon, P and Maculan, N., «Lagrangean methods for 0-1 quadratic problems» (1993).

[25] Moulaï, M et Maachou, N., " Multicriteria Integer Quadratic Fractional Programming Problem", CIRO'02, Marrakech, Maroc June, 4 – 6, 2002.

[26] Moulaï, M et Maachou, N., " Une méthode de résolution d'un programme fractionnaire quadratique en variables entières", prépublication, N° 13, 2003, Dépt. R.O, Fac. Math., USTHB.

[27] Naghi, A et Plateau, G., «Méthodes lagrangiennes pour les problèmes hyperboliques en variables 0-1» (1995).

[28] Schaible, S., «Duality in fractional programming : a unied approach» (1975).

[29] Seshan, C, R and Tikekar, V, G., «Algrithms for integer fractiona programming »(1980), 9-16.

[30] Steuer, R, E., « Multiple Criteria Optimisation : Theory, computation and Application ». Wiley. (1986)

[31] Van Rijsbergen, C, J., « Function of evaluation » The journal of documentation, 1974, p. 749-757

[32] Weir, T and Mond, B., «Duality for fractional programmind without constraint qualification» (1968).

[33] Williams, H, P., «Experiments in the formulation of integer programming problems»(1974).