N° d'ordre : 16/2015 -M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
FACULTE DE MATHEMATIQUES

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MAGISTER.

EN MATHÉMATIQUES
SPÉCIALITÉ : PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

Par : MOUSLI AMINA

Sujet

Sur Les Inégalités Exponentielles dans l'Estimation Fonctionnelle

Soutenu publiquement le 16/04/2015, devant le jury composé de :

Mr	. K. BOUKHETALA	Professeur	à l'USTHB	Président.
Mr	. A. TATACHAK	Professeur	à l'USTHB	Directeur du Mémoire.
Mme	. Z. GUESSOUM	Maître de conférence/A	à l'USTHB	Examinatrice.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage, la force et la santé pour mener à bien ce travail.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Abdelkader TATACHAK Professeur à l'USTHB, mon directeur de mémoire, je le remercie de m'avoir encadré, guidé et encouragé.

Je remercie vivement Monsieur Kamal BOUKHETALA Professeur à l'USTHB,de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance.

Mes remerciements sincères à Madame Zohra GUESSOUM Maître de Conférence à l'USTHB, pour ces encouragements, conseils et je suis honorée qu'elle ait acceptée d'examiner ce mémoire et faire partie de mon jury.

Je remercie également Monsieur Djedour et Madame Djabalah pour leurs soutiens et encouragements.

Je tiens à remercier sarah Ghettab qui avec un simple coup de téléphone me redonner le moral pour travailler, aussi je la remercie pour sa disponibilité, et sa motivation.

Mes remerciements à Monsieur Kamal MARAMI directeur des assurances et Monsieur Abdelkader BAGHOUS sous directeur de l'analyse et du suivi à la direction des assurances, Ministère des finances, de m'avoir permis de réaliser ce mémoire dans les meilleurs conditions.

Un grand merci à mes collègues de travail de la direction des assurances, ministère des finances, en particulier bahia, Fayza, Bania, khadija, pour leurs encouragements, leurs soutiens et leurs soucis pour que je mène a bien se mémoire.

J'adresse mes remerciements à mes collègue de promo : Nawel, Kanza.

A ma mère et ma soeurs,a qui je ne cesserais de dire merci.
A et belle famille : beaux parents, belles soeurs et beaux frères en particulier ma belle grand mère qui demandé toujours des nouvelles de ce mémoire.
a ma toute petite famille : mon époux pour sa patience, sa présence, ses encouragements , merci, et le plus beau des remerciement va vers mon tout petit bout chou 'Iyed' qui je crois connait les mathématiques bien avant qu'il ne vienne au monde.

Résumé

Les inégalités exponentielles sont très importantes en théorie de l'estimation fonctionnelle. Elles permettent de donner une majoration de l'erreur de l'estimation qui quantifie la qualité de l'estimateur. L'objectif de ce mémoire est de synthétiser l'historique de l'existant pour certaines inégalités exponentielles, et en particulier celles fréquemment utilisées dans l'estimation non paramétrique fonctionnelle, et lesquelles, pour certaines d'entre elles, n'ont été appliquées que récemment pour atteindre des taux de convergence optimaux . L'intérêt majeur de ces outils dans les études asymptotiques est la détermination des vitesses de convergence des estimateurs étudiés. Dans ce mémoire des illustrations de l'inégalité de Bernstein sont faites par le biais de simulations et cela pour mettre en évidence la qualité d'un estimateur à taille d'échantillon finie.

Abstract

Exponential inequalities are very important in the theory of functional estimation . They can give an error bound of the estimate that quantifies the quality of the estimator. The aim of this thesis is to summarize the history of the existing for some exponential inequalities , especially those commonly used in functional nonparametric estimation , and for some of them , they have been applied only recently to achieve optimal convergence rate. The main advantage of these tools in the asymptotic study is to determine the rates of convergence of estimators studied. In this thesis llustrations of Bernstein's inequality are made through simulations and this to highlight the quality of an estimator finite sample size.

Table des matières

Liste des tableaux

Table des figures

Introduction

Dans presque toutes les branches des sciences quantitatives, les inégalités jouent un rôle important dans leurs développement et sont considérées être encore plus importantes que les égalités. C'est en effet le cas en probabilités et statistiques.

Un problème qui revient très souvent consiste a répondre à la question suivante : Dans le cas où $X_1,...,X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, centrées et de carré intégrable et cela pour tout t positif, et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$; comment arriver à trouver une borne à la quantité $P(|S_n| > t)$?

une borne classique est celle de Tchebychev (1853-1884)

$$P(|S_n| > t) \leq \text{var}(S_n)/t^2 \tag{1}$$

mais cette borne est faible, par cause des hypothèses qui lui sont donnée. En effet on

ne suppose que l'existence du moment d'ordre deux. Beaucoup d'auteurs ont essayé de trouver une autre borne à $P(|S_n| > t)$ en remplaçant la fonction quadratique dans (1) par une autre fonction qui est plus adéquate.

$$P(|S_n| > t) \leq y(t) \tag{2}$$

Le théorème central limite et la loi forte des grands nombres étaient source d'inspiration et ont permis a ces auteurs de considérer la situation dans lesquelles $y(t)$ est du type $\exp(-at^2)$, cette forme a été obtenue par Bernstein (1924,[3]), Kolmogorov (1929, [22]) et Hoeffding (1963,[18]), les fonctions $\exp(-at)$ et $\exp(-at\log(t+1))$ apparaissent également dans de nombreuses inégalités intéressants comme Prokhorov (1959,[30]), ou encore Bennett (1962,[1]).

La plus part de ces résultats ont été obtenus par une approche basée sur l'utilisation de l'inégalité de Markov exponentielle. Le défi de cette méthode est de trouver la meilleure borne supérieur possible de la fonction génératrice des moments. Pour ce cas particulier, (2) sera nommée *inégalité exponentielle*, or cette forme ne s'applique pas a des variables aléatoires quelconques, par contre on leur demandera d'être bornées par une constante M positive p.s ou d'avoir des moments bornées.

Fuk-Nagaev (1971, [14]) étendent le résultat de Nagaev (1965, [26]) et proposent des inégalités formulées en termes de moments tronqués, et par conséquent, n'exige pas de restrictions sur les moments. Pour cette raison, elles sont très avantageuses pour une variété d'applications.

Une extension aux inégalités de Bennett et de Bernstein, l'inégalité de Talagrand s'applique aux fonctionnelles de variables aléatoires cette forme est apparue la premier fois dans les travaux de Hoeffding (1963, [18]). Rio (2000, [31]) donne une version maximal de ces inégalités

Par souci de répondre à des problèmes qui concernent des phénomènes de plus en plus réels, la condition d'indépendance sera écartée, et donnera place à des formes de dépendances approchant au mieux la réalité. L'α-mélange introduit par Rosenblatt (1956,[35]) est l'un des indices le plus utilisé pour mesurer la dépendance, cette forme englobe de nombreux modèles utilisés en statistique mathématique ou en économétrie comme le montre Doukhan (1994,[9]) dans son ouvrage sur le mélange. Ainsi de nouvelles inégalités sont établies en prenant en compte cette nouvelle situation.

Statulevicius and Jakimavicius (1988) donne une inégalité de type Bernstein aux sommes partielles avec des constantes qui dépendent de la borne des variables et du coefficient de mélange fort.
Bosq (1997,[4]) parvient à des inégalités par la méthode de couplage avec lesquels il montre la convergence uniforme presque sûre de l'estimateur à noyau, Rio (2000,[31]) étend l'inégalité maximale de Fuk-Nagaev. Cette inégalité est une extension aux suites mélangeantes des inégalités de bennett et de Bernstein pour les suites de variables aléatoires indépendantes, elle trouve son application à la loi du logarithme itéré et aux inégalités des moments de type Rosenthal. aussi elle permet de vérifier la convergence de la fonction de répartition empirique centrée et normalisée vers un pont brownien sous des conditions de mélange fort du type $\alpha_n = O(n^{-\nu}), \quad \nu > 1$

Se basant sur l'estimation de la transformé de laplace, Merlvède, Peligrad, et Rio (2009,[25]) arrivent à une inégalité exponentielle pour les variables bornées et sous la condition de mélange du type $\alpha_n = \exp(-2cn), \quad c > 0$

Une autre notion de dépendance est celle de dépendance positive ou association introduite par Esary and all (1967,[12]). Des variables aléatoire sont dites associées lorsque la covariance de tout paire de fonctions non décroissants de ces variables est positive.

En (1999, [10]) Doukhan et Louhichi proposent un nouveau concept de dépendance, la dépendance faible qui englobe aussi bien le mélange fort que l'association, aussi une première inégalité exponentiel est donnée dans se sens par des méthodes combinatoires, Dedecker et Prieur (2004,[7]) arrivent a une inégalité de type bennett utilisent un argument de couplage en cas de causalité. Par la technique de cumulants et des résultats de Bentkus et Rudzkis (1980, [2]) Neumann et Kallabis (2006,[21]) prouvent une inégalités exponentielles du type de Bernstein sous la condition de décroissance exponentielle du coefficient de dépendance faible et de causalité. Doukhan et Neumann (2007,[11]) étendent ce résultat au cas de processus non causaux et une décroissance sous exponentielles du coefficient de dépendance faible, sont application aboutit à de nombreux énoncés liés à la loi du logarithme en probabilité.

Notre travail est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre nous présentons des inégalités exponentielles dans le cas ou les variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées, des précisions et des remarques sont données concernant leurs preuves

Dans le deuxième chapitre nous présentons des inégalités exponentielles dans le cas ou les variables aléatoires sont α-mélangeantes, des précisions et des remarques sont données concernant leurs preuves, et cela après avoir fait des rappels sur la dépendance des variables aléatoire et énoncé d'important résultats lier a des techniques nécessaire aux preuves de ces inégalités.

Dans le troisième chapitre nous présentons des inégalités exponentielles dans le cas ou les variables aléatoires sont associées, des précisions et des remarques sont données concernant leurs preuves et cela après avoir fait des rappels sur la dépendance faible des variables aléatoires, et énoncer d'important résultats lier a la technique de cumulants nécessaire aux preuves de ces inégalités.

Dans le dernier chapitre des simulations sont faites en commençant par des ajustements de densités de probabilités par la méthode du noyau puis nous simulons l'inégalité de Bernstein en prenant pour estimateur, l'estimateur à noyau centré en variant le noyau et la densité de probabilité des observations et cela pour différentes tailles d'échantillon.

Chapitre 1

Inégalités exponentielles : cas de variables aléatoires i.i.d

La plus part de ces résultats ont été obtenus par une approche basée sur l'utilisation de l'inégalité de Markov exponentielle. Le défi de cette méthode est de trouver la meilleure borne supérieure de la fonction génératrice des moments.

1.1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (1853-1884)

Théorème 1.1 Soit $r > 0$ un nombre réel, et X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisable. On suppose que $|X|^r$ est fini (on dira que X admet un moment d'ordre r ou encore que X est r-intégrable). Alors on a :

$$P(|X| \geq t) \leq \frac{E|X|^r}{t^r}$$

Pour $r = 1$ (resp. $r = 2$), ce résultat est connu sous le nom d'**inégalité de Markov** (reps. d'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev**). Il s'agit des premières inégalités pouvant servir à évaluer des déviations par rapport à la moyenne. Malheureusement elles ne présentent pour ainsi dire pas d'intérêt pratique : les bornes obtenues sont extrêmement faibles à cause des hypothèses faites sur X. En effet, on suppose simplement l'existence d'un moment d'ordre r.

Preuve : 1- Inégalité de Markov

Soit la fonction de densité de $X, f(.)$
Soit $t > 0$

$$\begin{aligned} E(X) = \int_0^\infty xf(x)dx &\geq \int_t^\infty xf(x)dx \\ &\geq t\int_t^\infty f(x)dx \\ &\geq tP(X \geq t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$$

2- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$\forall t > 0 : P\left(|X - E(X)| \geq t\right) = P\left(|X - E(X)|^2 \geq t^2\right)$ en appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $[X - E(X)]^2$

nous obtenons :

$$P\left(|X - E(X)| \geq t\right) \leq \frac{E\left([X - E(X)]^2\right)}{t^2} = \frac{Var(X)}{t^2} = \frac{\sigma^2}{t^2}$$

dans le cas où $E(X) = 0$

$$P\left(|X| \geq t\right) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

1.2 Inégalité de Bernstein (1924)

Théorème 1.2 : Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées d'espérance nulle. Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
Supposons $\forall i$, il existe une constant $M > 0$ telle que

$$E|X_i|^q \leq q! M^{q-2} E X_i^2 < +\infty, \quad q = 3, 4, \ldots$$

(condition de Cramer)

Et posons

$$v_n^2 = \textstyle\sum_{i=1}^{n} E X_i^2.$$

Alors $\forall t > 0$ on a :

$$P\left(|S_n| \geq t\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2(tM + 2v_n^2)}\right)$$

Remarque 1.1 Cette inégalité est plus utilisée pour montrer la convergence presque sûr dans l'estimation non paramétrique.

Preuve :

Soit $0 \leq s < \frac{1}{M}$

$$\begin{aligned}
E \exp(sX_i) &\leq 1 + \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q!} s^q E|X_i|^q \\
&\leq 1 + s^2 E X_i^2 \sum_{q=2}^{\infty} (sM)^{q-2} \quad \text{par la condition de Cramer} \\
&= 1 + \frac{s a^2 E X_i^2}{1 - sM} \\
&\leq \exp\left(\frac{s^2 E X_i^2}{1 - sM}\right)
\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Markov à S_n, On arrive à :

$$
\begin{aligned}
P\left(S_n \geq t\right) &\leq \exp\left(-st\right)\prod_{i=1}^{n} E\exp\left(\lambda X_i\right) \qquad \text{par indépendance des } X_i \\
&\leq \exp\left(-st\right)\exp\left(\frac{s^2 v_n^2}{1-sM}\right) \\
&\leq \exp\left(\frac{s^2 v_n^2}{1-sM} - st\right)
\end{aligned}
$$

Optimiser ce majorant conduit à :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2 v_n^2}{1-sM} - st\right) = 0$$

c'est-à-dire

$$s = s_0 = \frac{t}{Mt + 2v_n^2} > 0$$

on arrive a :

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{s_0^2 v_n^2}{1-s_0 M} - s_0 t\right) &= \left(\frac{\left(\frac{t}{Mt+2v_n^2}\right)^2 v_n^2}{1-\left(\frac{t}{Mt+2v_n^2}\right)M} - \left(\frac{t}{Mt+2v_n^2}\right)t\right) \\
&= \frac{t^2}{2(Mt+2v_n^2)} - \frac{t^2}{Mt+2v_n^2} \\
&= -\frac{t^2}{2(Mt+2v_n^2)}
\end{aligned}
$$

donc
$P\left(S_n \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2(tM+2v_n^2)}\right)$

les mêmes calculs serons faits pour la variable aléatoire $(-X_i)$ car

$$P(S_n \leq -t) = P(-S_n \geq t)$$

et

$$P(|S_n| \geq t) \leq P(S_n \geq t) + P(S_n \leq -t)$$

Conduit à l'inégalité de Bernstein :

$$P\left(|S_n| \geq t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2(tM+2v_n^2)}\right)$$

■

1.3 Inégalité de Kolmogorov (1929)

Théorème 1.3 : Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées d'espérance nulle, on note $v_n^2=\sum_{i=1}^{n} EX_i^2$ et $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$, telles que $|X_i|\leq Mv_n$ p.s pour $1\leq i\leq n$, où M est un constante positive, pour tout $t>0$,

(a) Si $Mt\leq 1$, alors

$$P\left(S_n/v_n\geq t\right)\leq \exp\left(-\frac{t^2}{2}\left(1-\frac{Mt}{2}\right)\right)$$

(b) Si $Mt\geq 1$, alors

$$P\left(S_n/v_n\geq t\right)\leq \exp\left(-\frac{t}{4M}\right)$$

Preuve : Soit $s>0$, pour $sMt\leq 1$

$$\begin{aligned}
E\exp(sX_i) &= 1+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m!}s^m EX_i^m\\
&\leq 1+\frac{s^2EX_i^2}{2}\left(1+\frac{Msv_n}{3}+\frac{M^2s^2v_n^2}{4\cdot 3}+\cdots\right)\\
&\leq \exp\left(\frac{s^2EX_i^2}{2}\left(1+\frac{Msv_n}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Markov nous obtenons
$e^{-sv_nt}Ee^{-sS_n}\leq \exp\left\{-sv_nt+\frac{t^2v_n^2}{2}\left(1+\frac{Msv_n}{2}\right)\right\}$
En considérant
$s=\frac{t}{v_n}$ ou $s=\frac{1}{Mv_n}$ pour les cas $Mt\leq 1$ et $Mt\geq 1$ respectivement
On optimise le membre de droite de la dernière inégalité et on conclut la preuve.

■

1.4 Inégalité de Chernoff (1952)

L'inégalité de Chernoff donne des bornes décroissantes de façon exponentielle sur les distributions de sommes de variables aléatoires indépendantes. Bien qu'appliquer dans un cadre plus restreint que les inégalités de types Markoviennes, cette inégalité est meilleure.

Théorème 1.4 : Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles et s et t deux réels strictement positifs, avec $Ee^{sX}<\infty$ Alors,

$$P(X\geq t)=P(e^X\geq e^t)\leq \frac{Ee^{sX}}{e^{st}}$$

L'inégalité de Chernoff permet en particulier de dériver l'inégalité de Hoeffding (voir par exemple POLLARD D., " Empirical Processes : Theory and Applications ", NFS-CBMS Regional Conference Series in Probability and Statistics, vol. 2, Institute of Math. Stat. And Am. Stat. Assoc., 1990).

1.5 Inégalité de Prokhorov (1959)

Théorème 1.5 : sous les même conditions du théorème 1.3, pour tous $t > 0$

$$P\left(S_n/v_n \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{t}{2M}\operatorname{arcsin}h\left(\frac{Mt}{2}\right)\right)$$

Preuve : Soit $G(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P(X_i < t)$, la fonction de répartition de G est concentrée sur l'intervalle $[-Mv_n, Mv_n]$, et

$$\int y^2 dG(y) = \frac{1}{n}v_n^2.$$

Soit G^* une fonction de répartition telle que

$$G^*(\{-Mv_n\}) = G^*(\{Ms_n\}) = 1/(2nM^2)\ G^*(\{0\}) = 1 - 1/(nM^2)$$

$$\begin{aligned}\int(\cosh sy - 1)dG(y) &\leq \int(\cosh sy - 1)dG^*(y)\\ &= \frac{1}{nM^2}(\cosh sMv_n - 1)\end{aligned}$$

Alors pour tout $s > 0$,

$$\begin{aligned}P\left(S_n/v_n \geq t\right) &\leq e^{-v_n ts} E e^{sS_n}\\ &= e^{-v_n ts}\prod_{i=1}^{n} E e^{sX_i}\\ &\leq \exp\left(-v_n ts + \sum_{i=1}^{n}\left(Ee^{sX_i} - 1\right)\right)\\ &= \exp\left(-v_n ts + n\int(e^{sy} - 1 - sy)dG(y)\right)\\ &\leq \exp\left(-v_n ts + n\int(\cosh sy - 1)dG(y)\right)\\ &\leq \exp\left(-v_n ts + \frac{2}{M^2}\int(\cosh sMv_n - 1)\right)\end{aligned}$$

Optimiser ce majorant conduit à

$$\frac{d}{ds}\left[-v_n ts + \frac{2}{M^2}\int(\cosh sMv_n - 1)\right] = 0$$

c'est-à-dire

$$s = s_0 = \frac{1}{Ms_n}\operatorname{arcsin}h\frac{tM}{2} > 0$$

et la valeur minimum est :

$$-\frac{t}{2M}\operatorname{arcsin}h\frac{tM}{2} > 0$$

1.6 Inégalité de Bennett (1962)

Théorème 1.6 :Soient $Z_1, Z_2 ... Z_n$ des variables aléatoires réelles et indépendantes telles que $|Z_i| \leq M$ pour $1 \leq i \leq n$ avec une probabilité 1, on note $v_n^2 = \sum_{i=1}^{n} EZ_i^2$, et $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, pour tout $x \geq 0$, on a **l'inégalité de Bennett** :

$$P(|S_n| \geq t) \leq 2\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{t^2}{v_n^2}\Phi\left(\frac{Mt}{v_n^2}\right)\right), \text{ avec } \Phi(t) = \frac{2}{t^2}((1+t)\log(1+t)-t) \quad (1.1)$$

On en déduit **l'inégalité de Bernstein**

$$P(|S_n| \geq t) \leq 2\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{t^2}{(v_n^2 + Mt/3)}\right)$$

Preuve
La preuve est fondée sur l'inégalité de Markov. En raison de l'indépendance des Z_i, on évalue d'abord la transformée de Laplace de Z_i
pour tout réel $s \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
E(\exp(sZ_i)) &= E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} Z_i^k\right) \\
&\leq 1 + s^2 EZ_i^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(sM)^{k-2}}{k!} = 1 + v_n^2 \frac{\exp(sM) - 1 - sM}{M^2}, \\
&\leq \exp\left(v_n^2 g(Ms)\right),
\end{aligned}$$

où la fonction $g(.)$ est définie par

$$g(t) = \frac{\exp(sM) - 1 - sM}{M^2}.$$

La première inégalité provient du fait que $EZ_i = 0$ et $|EZ_i^k| \leq M^{k-2} EZ_i^2$ lorsque $k > 1$.

On en déduit, par indépendance et par l'inégalité de Markov, que

$$P(S_n \geq t) \leq \exp\left(v_n^2 g(t) - st\right).$$

Optimiser ce majorant conduit à

$$\frac{d}{ds}\left(v_n^2 g(s) - st\right) = v_n^2 \frac{\exp(sM) - 1}{M} - t = 0$$

c'est-à-dire

$$s = s_0 = \frac{1}{M}\log\left(1 + \frac{tM}{v_n^2}\right) > 0$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
Vg(s_0)-s_0t &= \frac{v_n^2}{M^2}\left(1+\frac{tM}{v_n^2}-1-\log\left(1+\frac{tM}{v_n^2}\right)\right)-\frac{t}{M}\log\left(1+\frac{tM}{v_n^2}\right)\\
&= \left(\frac{v_n^2}{M^2}\right)\times\left[\left(1+\frac{tM}{v_n^2}\right)\log\left(1+\frac{xM}{v_n^2}\right)-\frac{tM}{v_n^2}\right]\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{v_n^2}\right)\times 2\times\left(\frac{v_n^2}{Mt}\right)^2\left[\left(1+\frac{tM}{v_n^2}\right)\log\left(1+\frac{tM}{v_n^2}\right)-\frac{tM}{v_n^2}\right]\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{v_n^2}\right)\Phi\left(\frac{tM}{v_n^2}\right)
\end{aligned}$$

les mêmes calculs serons faits pour la variable aléatoire $(-Z_i)$ car

$$P(S_n \le -t) = P(-S_n \ge t)$$

et

$$\begin{aligned}
P(|S_n| \ge t) &\le P(S_n \ge t)+P(S_n \le -t)\\
&\le 2\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{t^2}{v_n^2}\Phi\left(\frac{Mt}{v_n^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

■

L'inégalité de Bernstein se déduit de la relation

$$(1+t)\log(1+t)-t \ge \frac{t^2}{2(1+t/3)}$$

qui s'écrit $(1+t/3)\Phi(t) \ge 1$.

Pour la preuve on note que :

$f(t) = t^2((1+t/3)\Phi(t)-1)$ vérifie $f(0) = 0$ et que $f^{'}(t) \ge 0$.

Ce dernier point résulte du fait que :

$f^{'}(t) = 0$ et que $f^{''}(t) = \frac{1}{3}((1+t)\log(1+t)-t) \ge 0$.

Remarque 1.2 Lorsque l'on ne dispose pas d'information sur les variances des variables aléatoires considérées, il est possible d'utiliser d'autres résultats, en particulier l'inégalité de Hoeffding

1.7 Inégalité de Hoeffding (1963)

L'inégalité de Hoeffding est une inégalité de concentration concernant les sommes de variables aléatoires indépendantes et bornées.

Théorème 1.7 Soient $Y_1, Y_2 ... Y_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que

$$a_i \leq Y_i \leq b_i \text{ et } \quad EY_i = 0$$

On note que $\Delta_i = b_i - a_i$
On a : pour $t > 0$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq t\right) \leq \exp\left(\frac{-2t^2}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2}\right) \tag{1.2}$$

Pour la preuve de cette inégalité, et afin d'obtenir une majoration de la fonction génératrice des moments, Hoeffding utilise la convexité de la fonction exponentielle.

Preuve 1.1 Par la majoration de Chernoff (i.e, une application de l'inégalité de Markov à l'exponentielle de la somme de variables aléatoires d'intérêt), nous obtenons
pour tout $s > 0$,
$\forall t > 0$,

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq t\right) &= P\left(s\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq \ st\right) \\ &= P\left(e^{s(\sum_{i=1}^{n} Y_i)} \geq \ e^{st}\right) \\ &\leq \frac{E(e^{s(\sum_{i=1}^{n} Y_i)})}{e^{st}} = e^{st}\prod_{i=1}^{n} E(e^{sY_i}) \quad Y_i \text{ indépendants} \end{aligned}$$

Le but est d'optimiser cette inégalité, avant cela Hoeffding donne une majoration de $E(e^{sY})$, dans un lemme dit de Hoeffding.

Lemme 1.1 Si $a \leq Y \leq b$, $E(Y) = 0$ et $\Delta = b - a$, alors :

$$E(e^{sY}) \leq e^{\left(\frac{s^2}{8}\Delta^2\right)}$$

Preuve du Lemme :
pour i fixé, On décompose Y en une combinaison convexe, $Y = \lambda a + (1-\lambda)b$, avec $0 < \lambda < 1$.
On pose $\lambda = \dfrac{b-Y}{b-a}$ et $Y = \dfrac{b-Y}{b-a}a + \dfrac{Y-a}{b-a}b = \lambda a + (1-\lambda)b$.

La convexité de la fonction exponentielle conduit à :

$$e^{sY} = e^{s(\lambda a + (1-\lambda)b)} \leq \lambda e^{sa} + (1-\lambda)e^{sb}.$$

Par passage à l'espérance, comme $EY = 0$, on a

$$E(e^{sY}) \leq \frac{b}{b-a}e^{sa} + \frac{-a}{b-a}e^{sb}$$

On pose

$$\alpha = \frac{-a}{b-a} \Rightarrow a = -(b-a)\alpha = -\Delta\alpha$$

et

$$1-\alpha = \frac{b}{b-a} \Rightarrow b = (b-a)(1-\alpha) = \Delta(1-\alpha)$$

On obtient :

$E(e^{sY}) \leq (1-\alpha)e^{-\alpha s\Delta} + \alpha e^{(1-\alpha)s\Delta}$

$\log(E(e^{sY})) \leq -\alpha s\Delta + \log(1-\alpha+\alpha e^{s\Delta})$

$E(e^{sY}) \leq e^{(\psi(u))}$, avec $\psi(u) = -\alpha u + \log((1-\alpha)+\alpha e^{u})$ et $u = s\Delta$

Nous avons $\psi(0) = 0$

et

$$\psi^{'}(u) = -\alpha + \frac{\alpha e^{u}}{(1-\alpha)+\alpha e^{u}}$$

$$\begin{aligned}\psi^{''}(u) &= \frac{\alpha e^{u}((1-\alpha)+\alpha e^{u}) - (\alpha e^{u})^2}{((1-\alpha)+\alpha e^{u})^2} \\ &= \frac{(1-\alpha)\alpha e^{u}}{((1-\alpha)+\alpha e^{u})^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\psi^{''}(u)} &= \frac{(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)e^{u} + \alpha^2 e^{2u}}{(1-\alpha)\alpha e^{u}} \\ &= \frac{(1-\alpha)}{\alpha e^{u}} + 2 + \frac{\alpha e^{u}}{(1-\alpha)} \\ &= x + 2 + \frac{1}{x} \quad \text{en posant} \quad x = \frac{(1-\alpha)}{\alpha e^{u}}\end{aligned}$$

la fonction $x+2+\frac{1}{x}$ a un minimum en $x = 1$, par conséquent $\psi^{''}(u) \leq \dfrac{1}{4}$ Comme $\psi(0) = 0$ et $\psi'(0) = 0$, on a par la formule de Taylor qu'il existe une constante $\theta \in \mathbb{R}$, avec $0 \leq |\theta| \leq u$ telle que :

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \psi(0) + \frac{u}{1!}\psi'(0) + \frac{u^2}{2!}\psi''(\theta) \\ &\leq \frac{1}{8}u^2 \\ &\leq \frac{1}{8}(s\Delta)^2\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}E(\exp(sY)) &\leq \exp(\psi(u)) \\ &\leq \exp\left(\frac{s^2}{8}\Delta^2\right)\end{aligned}$$

■

$$E(e^{s(\sum_{i=1}^n Y_i)}) = \prod_{i=1}^n E(e^{sY_i}) \leq \prod_{i=1}^n e^{\frac{s^2}{8}\Delta_i^2}$$

Ainsi, pour tout $t > 0, \forall s \geq 0$

$$P\left(\sum_{i=1}^n Y_i \geq \ t\right) \leq e^{(-st + \frac{s^2}{8}\sum_{i=1}^n \Delta_i^2)}$$

En considérant $s = \frac{4t}{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}$
On optimise le membre de droite de la dernière inégalité et on conclut la preuve.

1.8 Inégalité de Fuk Nagaev(1971)

Théorème 1.8 : Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de fonction de répartition $F_i(x), i = 1 \cdots n$. Soient $x, y_1, \cdots, y_n$ des nombres positifs, posons $\eta = (y_1, \cdots, y_n), y = \max(y_1, \cdots, y_n)$,

$$A(r, \eta) = \sum_{i=1}^n \int_{|u| \leq y_i} |u|^r dF_i(u),$$

ou $1 \leq r \leq 2$. Alors

$$P(S_n \geq t) \leq \sum_{i=1}^n P(|X_i| > y_i) + \exp\left(\frac{t}{y} - \left(\frac{t-\mu}{y} + \frac{A}{y^r}\right)\log\left(1 + \frac{ty^{r-1}}{A}\right) - 1\right)$$

Remarque 1.3 l'avantage de cette inégalité est qu'elle n'exige aucune condition sur les variables aléatoires contrairement aux inégalités précédemment citées, cependant selon HAINKEL (1989,[17]) elle n'a un bon comportement au niveau des bornes de la distribution des $X_i, i = 1 \cdots n$ que si $\sum_{i=1}^n P(|X_i| > y_i)$ est négligeable.

Preuve 1.2 Soit

$$\overline{X}_i = \begin{cases} X_i & \text{si } |X_i| \leq y_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (i = 1, \cdots, n), \quad \text{et } \overline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{X}_i$$

pour $s > 0$,

$$\begin{aligned} P(|S_n| \geq t) &\leq P\left(\overline{S}_n \neq S_n\right) + P\left(|\overline{S}_n| \geq t\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} P(|X_i| \geq y_i) + e^{-st} E e^{s|\overline{S}_n|} \end{aligned} \tag{1.3}$$

On estime $Ee^{s|\overline{S}_n|}$ comme suite. Supposons $1 \leq r \leq 2$. Comme $u^{-2}(e^{su} - 1 - su)$ est monotone pour $u \leq y$ et $u^{-r}(e^{su} - 1 - su)$ pour $u > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} Ee^{s|\overline{S}_n|} &\leq 1 + s \int_{|u| \leq y_i} u dF_i(u) + \int_{|u| \leq y_i} \frac{e^{su} - 1 - su}{u^2} u^2 dF_i(u) \\ &\leq 1 + s \int_{|u| \leq y_i} u dF_i(u) + \frac{e^{sy_i} - 1 - sy_i}{y_i^2} \int_{|u| \leq y_i} u^2 dF_i(u) \\ &\leq 1 + s \int_{u \leq y_i} u dF_i(u) + \frac{e^{sy} - 1 - sy}{y^r} \int_{|u| \leq y_i} |u|^r dF_i(u). \end{aligned}$$

d'où

$$e^{-st} E e^{s|\overline{S}_n|} \leq \exp\{(s|u| - 1 - su) y^{-r} A(r, \eta) - st + s\mu\}$$

L'inégalité sera vérifiée en choisissant $s = \dfrac{1}{y} \log\left(\dfrac{xy^{r-1}}{A(r,\eta)} + 1\right)$

■

1.9 Inégalité de Talagrand (1996)

Les inégalités de concentration de type Talagrand sont une extension aux fonctions de variables indépendantes des inégalités exponentielles de Bennett ou de Bernstein pour les sommes de variables indépendantes. Ce type d'inégalités est apparu la première fois dans les travaux de Hoeffding (1963,[18]).

Talagrand ([38], théorème 4.2.) donne une extension du résultat de Bennett aux fonctionnelles de variables aléatoires indépendantes. Les inégalités de Talagrand s'appliquent en particulier à la fonctionnelle $Z_n = \sup S_n(f), f \in \mathfrak{F}$,où $S_n(f) = f(X_1) + ... + f(X_n)$ et $\mathfrak{F}$ une famille dénombrable de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$. On obtient alors :

Théorème 1.9 : Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans un espace mesurable $(\mathbb{X}, \psi)$. Soit $\mathfrak{F}$ une famille dénombrable de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifiant $\|f\|_\infty \leq b < \infty$ pour tout $f \in \mathfrak{F}$. Soient $Z = \sup \sum_{i=1}^{n} f(X_i : f \in \mathfrak{F})$

et $v = E(\sup\sum_{i=1}^{n} f^2(X_i) : f \in \mathfrak{F})$. Alors pour tout x strictement positif,

$$P(Z \geq E(Z)+x) \leq K \exp\left(-\frac{1}{K'}\frac{x}{b}\log\left(1+\frac{xb}{v}\right)\right)$$

et

$$P(Z \geq E(Z)+x) \leq K \exp\left(-\frac{x^2}{2(c_1 v + c_2 b x)}\right) \tag{1.4}$$

où K, K', c_1 et c_2 sont des constantes universelles strictement positives. De plus, les mêmes inégalités sont valables si l'on remplace Z par $-Z$.

La preuve de Talagrand repose sur des inégalités isopérimétriques pour les mesures produits. Ledoux (1996,[23]) retrouve ces inégalités par des méthodes entropiques en utilisant la méthode dite de Herbst. Il obtient (1.4) avec $K = 2$, $c_1 = 42$ et $c_2 = 8$. Mais il prend v de la forme $E(\sup\sum_{i=1}^{n} f^2(X_i) : f \in \mathfrak{F}) + CbE(Z)$.

Chapitre 2

Inégalités exponentielles : cas de variables aléatoires α-Mélangent

Dans cette partie nous présentent les inégalités suivantes : Roussas (1996,[32]), Bosq (1998,[4]), Fuk and Nagaev dans Rio(2000,[31]).

Le résultats de Bosq et de Fuk Nagaev on été obtenus par la technique de couplage. Quant au résultat de Roussas il utilise l'inégalité de Markov, après avoir donné une borne supérieur à la fonction génératrice des moments adapté a ce cas de mélange fort.
Mais avant cela nous donnons quelques rappels sur le mélange.

2.1 Notions et généralités

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Pour toute σ-algèbres de $\mathcal{A}$, soit $L^2(\mathcal{A})$ l'espace des variables aléatoires, $\mathcal{A}$-mesurables et de carré-intégrable.

Pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux sous σ-algèbres de $\mathcal{A}$, on définit les mesures de dépendance suivantes :

1. Le coefficient de mélange fort (ou d'α-mélange, introduit par Rosenblatt 1956)

$$\alpha(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \sup\{|P(B,C) - P(B)P(C)|, B \in \mathcal{B} et C \in \mathcal{C}\} \tag{2.1}$$

Les coefficients d'α-mélange sont dits :

arithmétiques d'ordre $\nu > 0$ s'il existe une constante positive C telle que :

$$\alpha \leq Cn^{-\nu}$$

géométriques s'il existe une constante positive C et $0 \leq \rho \leq 1$ telle que :

$$\alpha(n) \leq C\rho^n$$

.

2. Le coefficient de régularité absolue (ou de β -mélange, introduit par Kolmogorov (1931))

$$\beta(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \sup\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}|P(B_i,C_j) - P(B_i)P(C_j)|\right\}$$

le sup est pris sur toutes les partitions $(B_i)_{i\in I}$, $(C_j)_{j\in J}$ de Ω avec $B_i \in \mathcal{B}, C_j \in \mathcal{C}$.
Le coefficient $\beta(\mathcal{B},\mathcal{C})$ est tel que $0 \leq \beta(\mathcal{B},\mathcal{C}) \leq 1$

3. Le coefficient de mélange uniforme (ou de ϕ-mélange, introduit par Ibragimov (1962))

$$\phi(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \sup\left\{\left|P(C) - \frac{P(B\cap C)}{P(B)}\right|; B \in \mathcal{B}, P(B) \neq 0\, et\, C \in \mathcal{C}\right\}$$

$\phi(\mathcal{B},\mathcal{C})$ vérifie les inégalités $0 \leq \phi(\mathcal{B},\mathcal{C}) \leq 1$

4. Le coefficient de ψ- mélange (introduit par Blum et al (1963))

$$\psi(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \sup\left\{\left|P(C) - \frac{P(B\cap C)}{P(B)\mathbb{P}(C)}\right|; B \in \mathcal{B}, P(B) \neq 0\, et\, C \in \mathcal{C}, P(C) \neq 0\right\}$$

Le coefficient $\psi(\mathcal{B},\mathcal{C})$ est tel que $0 \leq \psi(\mathcal{B},\mathcal{C}) \leq \infty$

5. Le coefficient de ρ- mélange (introduit par Kolmogorov et Rozanov (1960))

$$\rho(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \sup\{|corr(X,Y)|; X \in L^2 et Y \in L^2\}$$

. $\rho(\mathcal{B},\mathcal{C})$ vérifie les inégalités $0 \leq \rho(\mathcal{B},\mathcal{C}) \leq 1$

Les différents coefficients satisfont les inégalités suivantes :

1. $2\alpha(\mathcal{B},\mathcal{C}) \leq \beta(\mathcal{B},\mathcal{C}) \leq \phi(\mathcal{B},\mathcal{C}) \leq \frac{1}{2}\psi(\mathcal{B},\mathcal{C})$

2. $4\alpha(\mathcal{B},\mathcal{C}) \leq \rho(\mathcal{B},\mathcal{C}) \leq \frac{1}{2}\psi(\mathcal{B},\mathcal{C})$

3. $\rho(\mathcal{B},\mathcal{C}) \leq 2[\phi(\mathcal{B},\mathcal{C})]^{1/2}[\phi(\mathcal{C},\mathcal{B})]^{1/2} \leq [\phi(\mathcal{B},\mathcal{C})]^{1/2}$

Ainsi le α-mélange est le plus faible et le moins restrictive de toutes ces forme de mélange. Toute suite de variables aléatoire mélangeante sera alors forcément α-mélangeante. De plus les processus α-mélangeants sont très présents dans la pratique statistique, en particulier les processus AR et ARMA, qui sont largement utilisés dans l'analyse des séries temporelles,sont α-mélangeantes avec des coefficients géométrique et exponentiel respectivement.

Cela explique donc que l'estimation pour des données mélangeantes est souvent restreinte dans la littérature au cas de données α-mélangeantes ce qui justifie notre choix.

Supposons maintenant que $c(.,.)$ désigne un coefficient de mélange arbitrairement pris parmi ceux précédemment définis (α, β, ϕ ou ρ).
Soit $\{Y_i, i \geq 1\}$ (pas nécessairement stationnaire),une suite de variables aléatoires. Pour $-\infty \leq i \leq j \leq k \leq \infty$, on définit la σ-algèbre $\mathcal{F}_i^k$. Étant donné un entier positif l, posons pour tout k fixé, $k \geq 1$;

$$c(l) = c(F_1^k, F_{k+l}^{+\infty})$$

La suite de variable aléatoire est dite c-mélangeante si

$$\lim_{l \to \infty} c(l) = 0$$

La dépendance faible est alors "mesurée" en termes de coefficients de mélange entre les tribus engendrées par les variables avant l'instant k et après l'instant $(k+l)$; ces coefficients étant nuls quand les tribus sont indépendantes.

2.2 Technique de Couplage

L'usage de la technique de Couplage s'avère fructueux pour l'étude de variables aléatoires faiblement dépendantes. Cette technique consiste à remplacer des variables initiales vérifiant une contrainte de mélange par des variables de lois marginales identiques indépendantes entre elles, le coût de ce changement est alors facturé en fonction de type de condition de mélange utilisé. Nous présentons ici les résultats les plus important en couplage, et qui nous serons nécessaires dans les preuves d'inégalités exponentielles pour des variables aléatoires α-mélangeantes.

Lemme 2.1 (Lemme de Berbee) Soit (X,Y) des variables aléatoires définies sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$ Alors il existe une variable aléatoire Y^* dans $\mathbb{R}^{d'}$ tel que

a. $P_{Y^*} = P_Y$ et Y^* est indépendante de Y

b. $P(|Y^* \neq Y|) = \beta(\sigma(X), \sigma(Y))$

Lemme 2.2 (Lemme de Bradley) Soit (X,Y) des variables aléatoires définies sur $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ avec $Y \in L^p(P)$, $\forall p \in [1, +\infty[$, soit c une constant réelle telque $\|Y+c\|_p > 0$ et $\varepsilon \in]0, \|Y+c\|_p]$ Alors il existe une variable aléatoire Y^* tel que

a. $P_{Y^*} = P_Y$

b. $P(|Y^* - Y| > \varepsilon) \leq 11 \left(\dfrac{\|Y+c\|_p}{\varepsilon} \right)^{\frac{p}{2p+1}} [\alpha(\sigma(X), \sigma(Y))]^{\frac{2p}{2p+1}}$

Lemme 2.3 (Lemme de Rio) Soit $\mathcal{B}$ une sous tribu de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire réelle prenant ses valeurs dans un intervalle compact $[a,b]$. Soit δ

une variable de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendante de la tribu engendrée par X et $\mathcal{B}$. Alors il existe une variable aléatoire X^*, mesurable par la tribu $\mathcal{B} \vee \sigma(X) \vee \sigma(\delta)$ (plus petite tribu contenant $\mathcal{B}, \sigma(X) et \sigma(\delta)$), indépendante de $\mathcal{B}$ et de même loi que X, telle que

$$E\left(|X - X^*|\right) \leq (b-a)\alpha(\mathcal{B}, X)$$

2.3 Inégalités de covariance

Lemme 2.4 (Inégalité de Davydov) soit X et Y deux v.a.r telle que $X \in L^q(P), Y \in L^r(P)$ ou $q > 1$, $r > 1$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{p}$ alors

$$|cov(X,Y)| \leq 2p(2\alpha)^{\frac{1}{p}} \|X\|_q \|Y\|_r \tag{2.2}$$

En particulier si $X \in L^\infty(P), Y \in L^\infty(P)$ alors

$$|cov(X,Y)| \leq 4\alpha \|X\|_\infty \|Y\|_\infty$$

(inégalité de Billingsley)

2.4 Inégalité de Roussas (1996)

Théorème 2.1 Soit $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires centrées autour de leurs moyenne, Bornées par M , et formant une suit α-mélange(pas nécessairement stationnaire) avec $\alpha(n)$ comme coefficients de mélange telles que $\sum_{n \geq 1} \alpha(n) = \alpha^* < \infty$. Posons $\overline{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$, et soient $\mu = \mu(n)$ est définit par $\mu = [\frac{n}{2\nu}]$ et $\nu = \nu(n)$ une suite d'entiers positifs qui tendent vers ∞ quand n tend vers ∞, où μ est un large entier pour lequel $2\mu\nu \leq n$ et $n/2\mu\nu$ tend vers 1 quand $n \to \infty$.
Alors pour tout $n \geq 1$ (tout $\mu \geq 2$ et quelque soit ν)

$$P\left(|\overline{S}_n| \geq \varepsilon_n\right) \leq K_1 \left\{1 + 6e^{1/2}[\alpha(\nu)]^{1/\mu}\right\}^\mu e^{-K_2 n \varepsilon_n^2}, \tag{2.3}$$

où $0 < \varepsilon_n \leq K_3/v$. $K_1 \geq 6$, $K_2 = 1/4eM^2(1+8\alpha^*)$, $K_3 = M(1+8\alpha^*)/2$.

Remarque 2.1 **1.** Si $\lim\sup\{1 + 6e^{1/2}[\alpha(\nu)]^{1/\mu}\}^\mu < \infty$ l'inégalité (2.3) est une inégalité de type Hoeffding, elle fournit aussi un taux de convergence de $\overline{S}_n$ pour un choix convenable de ε_n, sous la condition que $0 < \varepsilon_n \leq K_3/v$.

2. Cette inégalité a été publié dans un seul article et reste jusqu'à ce jour presque inconnue et non exploitée dans des problèmes traitant des variables aléatoires α-mélangeantes.

Preuve 2.1 Soit $\lambda > 0$,

On applique l'inégalité de Markov on obtient :

$$P(\overline{S}_n \geq \varepsilon_n) = P\left(\lambda\overline{S}_n \geq \lambda\varepsilon_n\right) = P\left(e^{\lambda\overline{S}_n} \geq e^{\lambda\varepsilon_n}\right) \leq E\left(e^{\lambda\overline{S}_n}\right)/e^{\lambda\varepsilon_n} \tag{2.4}$$

Avant d'optimiser (2.4), on cherche à évaluer $E\left(e^{\lambda\overline{S}_n}\right)$.

Posons $S_n = U_\mu^* + V_\mu^* + W_\mu$, pour $i = 1, ..., \mu$,

avec :

$$\begin{aligned}
U_\mu^* &= U_1 + ... + U_\mu & \text{où,} \quad U_i &= Y_{2(i-1)v+1} + ... + Y_{(2i-1)v} \\
V_\mu^* &= V_1 + ... + V_\mu & \text{où,} \quad V_i &= Y_{(2i-1)v+1} + ... + Y_{2iv} \\
W_\mu &= Y_{2v\mu+1} + ... + Y_n
\end{aligned}$$

Alors,

$|U_i| \leq vM$, $|V_i| \leq vM$ et $|W_\mu| \leq vM$, car les $Y_i \leq M$ p.s

et $\overline{S}_n = \overline{U}_\mu^* + \overline{V}_\mu^* + \overline{W}_\mu$

L'idée est de trouver un majorant de la fonction génératrice des moments pour chaque sous suite afin d'obtenir celle de $\overline{S}_n$. Pour cela deux lemmes sont nécessaires

Lemme 2.5 Soit $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ des variables aléatoires centrées autour de leurs moyenne, Bornées par M , et forment un α-mélange(pas nécessairement stationnaire) avec des coefficients de mélange $\alpha(n)$ tel que $\sum_{i\geq 1}\alpha(n) = \alpha^* < \infty$. Alors

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 \leq (1 + 8\alpha^*)M^2 n \tag{2.5}$$

Preuve : le fait que les Y_n soient bornées par M, et que Y_i est F_1^i-mesurable et Y_j est F_j^∞-mesurable implique que :

$$|Cov(Y_i, Y_j)| \leq 4M^2\alpha(j-i).$$

Donc

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i^2) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} E(Y_iY_j) \leq nM^2 + 8M^2 \sum_{1\leq i<j\leq n} \alpha(j-i)$$

.

Étant donné que

$$\sum_{1\le i<j\le n}\alpha(j-i)=\sum_{j=1}^{n-1}\alpha(j)\le n\sum_{i=1}^{n}\alpha(j)\le n\alpha^*$$

Alors

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)^2\ge(1+8\alpha^*)M^2n$$

■

Lemme 2.6 Soit $Y_1,Y_2,...,Y_n$ les variables aléatoire définit dans le lemme 2.5, et soit ξ et η des variables aléatoires telles que ξ est F_1^k-mesurable et η est F_{k+n}^{∞}-mesurable, $|\eta|\le M_0$ et $E|\xi|^p<\infty$ pour tout $p>1$. Alors :

$$|E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)|\le 6M_0\alpha^{1/q}(n)\|\xi\|_p, \tag{2.6}$$

où $\|\xi\|_p=E^{1/p}|\xi|^P$ et $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$.

Preuve du Lemme : voir Lemme 2.1 dans Davydov (1968).

En appliquant lemme 2.6 :

de l'inégalité (2.6), on a :

$$E(\xi\eta)\le E(\xi)E(\eta)+6M_0\alpha^{1/q}(n)\|\xi\|_p \tag{2.7}$$

Soit $\overline{U}_{\mu}^*=U_{\mu}^*/n$ et soit $\lambda>0$, alors :

$Ee^{\lambda\overline{U}_{\mu}^*}=E(e^{\frac{\lambda}{n}\overline{U}_{\mu-1}^*}.e^{\frac{\lambda}{n}U_{\mu}})$ avec $|\frac{\lambda}{n}U_{\mu}|\le\frac{\lambda\nu M}{n}$, d'où, $e^{\frac{\lambda}{n}U_{\mu}}\le e^{\lambda\nu M/n}$.

Posons $\xi=e^{\frac{\lambda}{n}U_{\mu-1}^*}$ et $\eta=e^{\frac{\lambda}{n}U_{\mu}}$.

Alors ξ est $F_1^{(2\mu-3)\nu}$-mesurable, η est $F_{(2\mu-1)\nu+1}^{\infty}$, ces deux σ-algébres sont séparées par $\nu+1$ v.a.
Alors (2.7) donne :

$$\begin{aligned}E(e^{\frac{\lambda\overline{U}_{\mu-1}^*}{n}}.e^{\frac{\lambda U_{\mu}}{n}})&\le Ee^{\frac{\lambda U_{\mu-1}^*}{n}}.Ee^{\frac{\lambda U_{\mu}}{n}}+6e^{\frac{\lambda\nu M}{n}}\alpha^{1/p}(\nu)E^{1/q}e^{\frac{\lambda pU_{\mu-1}^*}{n}}\\&\le E^{1/p}e^{\frac{\lambda pU_{\mu-1}^*}{n}}.Ee^{\frac{\lambda U_{\mu}}{n}}+6e^{\frac{\lambda\nu M}{n}}\alpha^{1/q}(\nu)E^{1/p}e^{\frac{\lambda pU_{\mu-1}^*}{n}}\\&=E^{1/p}e^{\frac{\lambda pU_{\mu-1}^*}{n}}[Ee^{\frac{\lambda U_{\mu}}{n}}+6e^{\frac{\lambda\nu M}{n}}\alpha^{1/q}(\nu)].\end{aligned} \tag{2.8}$$

Afin d'obtenir un majorant de $Ee^{\frac{\lambda U_{\mu}}{n}}$, nous avons :

$$e^{\frac{\lambda U_{\mu}}{n}}\le 1+\left(\frac{\lambda U_{\mu}}{n}\right)+\left(\frac{\lambda U_{\mu}}{n}\right)^2,$$

avec $|\lambda U_\mu/n| \leq 1/2$, donc $\lambda \leq \dfrac{n}{2\nu M}$;cela est dû au fait que $e^t \leq 1+t+t^2 (|t| \leq \frac{1}{2})$,
Le passage à l'espérance donne :

$$\begin{aligned} E(e^{\lambda U_\mu/n}) &\leq 1+E(\frac{\lambda U_\mu}{n})^2, \quad \text{car} \quad EU_\mu = 0. \\ &\leq e^{E(\frac{\lambda U_\mu}{n})^2}, \quad 1+t \leq e^t (t>0) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Par le Lemme 2.5 :

$$E\left(\frac{\lambda U_\mu}{n}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{n^2} E(U_\mu)^2 \leq \frac{C\lambda^2 M^2 \nu}{n^2}, \text{ avec } C = 1+8\alpha^*,$$

L'inégalité (2.9) donne $E(\frac{\lambda U_\mu}{n}) \leq e^{\frac{C\lambda^2 M^2 \nu}{n^2}}$, et donc l'inégalité (2.8) devient, pour $\lambda \leq n/2vM$:

$$\begin{aligned} Ee^{\lambda \overline{U}^*_\mu} &\leq E^{1/p} e^{\lambda p \overline{U}^*_{\mu-1}} [e^{c\lambda^2 M^2 \nu/n^2} + 6\alpha^{1/q}(\nu) e^{\lambda \nu M/n}] \\ &= E^{1/p} e^{\lambda p \overline{U}^*_{\mu-1}} . e^{c\lambda^2 M^2 \nu/n^2} [1+6\alpha^{1/q}(\nu) e^{\frac{\lambda v M}{n} - \frac{C\lambda^2 M^2 \nu}{n^2}}] \\ &\leq E^{1/p} e^{\lambda p \overline{U}^*_{\mu-1}} . e^{c\lambda^2 M^2 \nu/n^2} [1+6\alpha^{1/q}(\nu) e^{\frac{\lambda \nu M}{n}}] \end{aligned}$$

Puisque $\lambda \leq n/2\nu M$ est équivalente à $\frac{\lambda \nu M}{n} \leq \frac{1}{2}$, donc :

$$Ee^{\lambda \overline{U}^*_\mu} \leq [1+6\alpha^{1/q}(\nu) e^{1/2}] e^{C\lambda^2 M^2 \nu/n^2} . E^{1/p} e^{\lambda p \overline{U}^*_{\mu-1}}, \quad \lambda \leq n/2vM. \tag{2.10}$$

Posons $\lambda p = \lambda_1$et appliquons (2.10) pour obtenir, pour $\lambda_1 \leq n/2vM$

$$Ee^{\lambda_1 \overline{U}^*_{\mu-1}} \leq [1+6\alpha^{1/q}(\nu) e^{1/2}] e^{C\lambda_1^2 M^2 \nu/n^2} . E^{1/p} e^{\lambda_1 p \overline{U}^*_{\mu-2}},$$

de sorte que :

$$E^{1/p} e^{\lambda_1 \overline{U}^*_{\mu-1} p} \leq [1+6\alpha^{1/q}(\nu) e^{1/2}]^{1/p} e^{C\lambda_1^2 M^2 \nu/n^2 p} . E^{1/p^2} e^{\lambda_1 p \overline{U}^*_{\mu-2}},$$

et, par conséquent :

$$\begin{aligned} Ee^{\lambda \overline{U}^*_\mu} \leq\ & [1+6\alpha^{1/q}(\nu) e^{1/2}]^{1+\frac{1}{p}} e^{C\lambda_1^2 M^2 \nu/n^2 + C\lambda_1^2 M^2 v/n^2 p} \\ & \times E^{1/p^2} e^{\lambda_1 p \overline{U}^*_{\mu-2}}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

de $\lambda_1 = \lambda p$, nous avons $\lambda_1^2 = \lambda^2 p^2$; et $\frac{C\lambda^2 M^2 \nu}{n^2} + \frac{C\lambda_1^2 M^2 \nu}{n^2 p} = \frac{C\lambda^2 M^2 \nu}{n^2}(1+p)$,

$\lambda_1 \leq n/2\nu M$ est équivalente à $\lambda \leq n/2vpM$. Donc (2.11) devient :

$$Ee^{\lambda_1\overline{U}^*_\mu} \leq [1+6\alpha^{1/q}(v)e^{1/2}]^{1+\frac{1}{p}}e^{\frac{C\lambda^2M^2v}{n^2}(1+p)} \qquad (2.12)$$
$$\times E^{1/p^2}e^{\lambda_1 p\overline{U}^*_{\mu-2}}, \qquad \lambda_1 \leq n/2\nu M$$

Posons $\lambda_2 = \lambda_1 p$ et travaillons comme précédemment afin d'obtenir :

$$Ee^{\lambda_1\overline{U}^*_\mu} \leq [1+6\alpha^{1/q}(\nu)e^{1/2}]^{1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}}e^{\frac{C\lambda^2M^2\nu}{n^2}(1+p+p^2)}.E^{1/p^3}e^{\lambda_2 p\overline{U}^*_{\mu-3}}, \qquad (2.13)$$
$$\lambda \leq n/2\nu p^2 M$$

Par récurrence, et jusqu'à l'ordre $\mu-1$ on a :

$$Ee^{\lambda\overline{U}^*_\mu} \leq [1+6\alpha^{1/q}(\nu)e^{1/2}]^{1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^{\mu-2}}}e^{\frac{C\lambda^2M^2\nu}{n^2}(1+p+p^2+p^{\mu-2})} \qquad (2.14)$$
$$\times E^{1/p^{\mu-1}}e^{\lambda p^{\mu-1}\overline{U}_1}, \qquad \lambda \leq n/2\nu p^{\mu-2}M$$

Cependant,

$\lambda p^{\mu-1}\overline{U}_1 = \frac{\lambda p^{\mu-1}}{n}\overline{U}_1$ et $Ee^{\frac{\lambda p^{\mu-1}}{n}\overline{U}_1} = Ee^{\frac{\lambda p^{\mu-1}}{n}U_1} \leq e^{E(\frac{\lambda p^{\mu-1}}{n}U_1)^2}$

de(2.9), et à condition que $\lambda \leq n/2vp^2M$,

et de plus $E(\frac{\lambda p^{\mu-1}}{n}U_1)^2 \leq \frac{C\lambda^2M^2v}{n^2}$.

Alors :

$Ee^{\frac{\lambda p^{\mu-1}}{n}\overline{U}_1} \leq e^{C\lambda^2p^{2(\mu-1)}M^2\nu/n^2}$ et donc(2.14)devient :

$$E^{1/p^{\mu-1}}e^{\lambda p^{\mu-1}\overline{U}_1} \leq [1+6\alpha^{1/q}(\nu)e^{1/2}]^{1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^{\mu-2}}}e^{\frac{C\lambda^2M^2\nu}{n^2}(1+p+p^2+\ldots+p^{\mu-1})}, \qquad (2.15)$$
$$\lambda \leq n/2\nu p^{\mu-1}M.$$

désormais

$1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^{\mu-2}} < 1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots = \frac{p}{p-1} = q,$

et

$1+p+p^2+\ldots+p^{\mu-1} = \frac{1-p^\mu}{1-p} = \frac{p^\mu-1}{p-1} < \frac{p^\mu}{p-1}.$

Donc (2.15) devient :

$$Ee^{\lambda\overline{U}^*_\mu} \leq [1+6\alpha^{1/q}(\nu)e^{1/2}]^q e^{\frac{C\lambda^2M^2\nu}{n^2}\cdot\frac{p^\mu}{p-1}}, \qquad \lambda \leq n/2\nu p^2M. \qquad (2.16)$$

à ce point, prenons $p = 1 + \frac{1}{\mu - 1} = \frac{\mu}{1 - \frac{1}{\mu} - 1}$, de sorte que $q = \mu$,

$$\frac{p^\mu}{p-1} = (\mu - 1)\left(\frac{\mu}{\mu - 1}\right)^\mu < \frac{\mu}{(\mu-1)^\mu} < 2e\mu, \qquad \forall \mu \geq 2$$

.

Par ailleurs : $\frac{n}{2\nu p^{\mu-1}M} = \frac{n}{2M\nu(1+\frac{1}{\mu-1})^{\mu-1}} > \frac{n}{2M\nu.2e} = \frac{n}{4Me\nu}$ pour tout $\mu \geq 2$.

Conséquent de l'inégalité $\lambda \leq \frac{n}{2\nu M p^{\mu-1}}$ est impliquée par $\lambda \leq \frac{n}{4Me\nu}$. Aussi, $2\nu\mu \leq n$ est équivalente à $\frac{\nu\mu}{n} \leq \frac{1}{2}$. sur la base des ces observations, et quelque soit $\mu \leq \frac{1}{2}$, (2.16) devient :

$$Ee^{\lambda \overline{U}_\mu^*} \leq [1 + 6\alpha^{1/\mu}(\nu)e^{1/2}]^\mu e^{\frac{C\lambda^2 M^2 e}{n}}, \quad \lambda \leq n/4\nu e M. \tag{2.17}$$

à ce stade, observons que (2.17) est la même si $\overline{U}_\mu^*$ est remplacé par $\overline{V}_\mu^* = \overline{V}_\mu/n$ ou $\overline{W}_\mu^* = \overline{W}_\mu/n$, et on appliquons l'inégalité de Markov on obtient :

$$P(\overline{U}_\mu^* \geq \varepsilon_n) = P\left(e^{\lambda \overline{U}_\mu^*} \geq e^{\lambda \varepsilon_n}\right) \leq e^{-\lambda\varepsilon_n}\left[1 + 6e^{1/2}\alpha^{1/\mu}(\nu)\right]^\mu e^{\rho\lambda^2/n}$$

$$= \left[1 + 6e^{1/2}\alpha^{1/\mu}(\nu)\right]^\mu e^{\rho\frac{\lambda^2}{n} - \lambda\varepsilon_n}$$

, où $\rho = CeM^2$.

la fonction $g(\lambda) = \rho\frac{\lambda^2}{n} - \lambda\varepsilon_n$ est minimisée pour

$$\lambda_0 = \frac{n\varepsilon_n}{2\rho}$$

et le minimum est

$$g(\lambda_0) = -\frac{n\varepsilon_n}{4\rho}.$$

Aussi, il faut vérifier que la condition $\lambda \leq \frac{n}{4Me\nu}$ est satisfaite pour λ_0.
condition satisfaite, si $\varepsilon_n < CM/2\nu$. Ainsi :

$$P(\overline{U}_\mu^* \geq \varepsilon_n) \leq \left[1 + 6e^{1/2}\alpha^{1/\mu}(\nu)\right]^\mu e^{-K_2 n\varepsilon_n^2}, \quad 0 < \varepsilon_n \leq K_3/\nu,$$

où $K_2 = 1/4eM^2(1+8\alpha^*)$, et $K_3 = M(1+8\alpha^*)/2$,

En remplaçant $\overline{U}_\mu^*$ par $-\overline{U}_\mu^*$, on a :

$$P(|\overline{U}_\mu^*| \geq \varepsilon_n) \leq 2\left[1 + 6e^{1/2}\alpha^{1/\mu}(\nu)\right]^\mu e^{-K_2 n\varepsilon_n^2}, \varepsilon_n \leq K_3/\nu.$$

Appliquer cette inégalité à $|\overline{V}_\mu^*|$ et $|\overline{V}_\mu|$, et utilisé l'expression $\overline{S}_n = \overline{U}_\mu^* + \overline{V}_\mu^* + \overline{W}_\mu$, on obtient :

$$P(|\overline{S}_n| \geq \varepsilon_n) \leq 6\left[1+6e^{1/2}\alpha^{1/\mu}(\nu)\right]^{\mu} e^{-K_2 n\varepsilon_n^2}, 0<\varepsilon_n \leq K_3/\nu.$$

Cette inégalité est vraie quelque soit $n \geq 1$, et pour tout $\mu \geq 2$ et $\nu \geq 1$ pour les quelles $2\mu\nu \leq n$

$$P(|\overline{S}_n| \geq \varepsilon_n) \leq K_1\left[1+6e^{1/2}\alpha^{1/\mu}(\nu)\right]^{\mu} e^{-K_2 n\varepsilon_n^2}, 0<\varepsilon_n \leq K_3/\nu.$$

■

2.5 Inégalités de Bosq (1997)

Théorème 2.2 Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus réel de moyenne nulle et $\alpha-$mélangeant, tel que : $\sup_{1\leq t\leq n} \|X_t\|_\infty \leq b$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ alors

1 quelque soit l'entier $q \in \left[1, \frac{n}{2}\right]$, et $\forall \varepsilon > 0$

$$P\left(|S_n| > n\varepsilon\right) \leq 4\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{8b^2}q\right) + 22\left(1+\frac{4b}{\varepsilon}\right)^{1/2} q\alpha\left(\left[\frac{n}{2q}\right]\right) \tag{2.18}$$

2 quelque soit l'entier $q \in \left[1, \frac{n}{2}\right]$, et $\forall \varepsilon > 0$

$$P\left(|S_n| > n\varepsilon\right) \leq 4\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{8v^2}q\right) + 22\left(1+\frac{4b}{\varepsilon}\right)^{1/2} q\alpha\left(\left[\frac{n}{2q}\right]\right) \tag{2.19}$$

où $v^2(q) = \dfrac{2}{p^2}\sigma^2(q) + \dfrac{b\varepsilon}{2}$, avec $p = \dfrac{n}{2q}$

et

$$\begin{aligned}\sigma^2(q) = \max_{0\leq j\leq 2q-1} & E(([jp]+1-jp)X_{[jp]+1} + X_{[jp]+2} + \ldots \\ & + X_{[j+1]p} + ((j+1)p - [(j+1)p))X_{[j+1]p+1})^2\end{aligned}$$

Remarque 2.2 La borne (2.19) est meilleure que (2.18) quand ε et α sont négligeable, mais en pratique (2.18) est plus facile à utiliser.

Preuve

1- Considérons le processus en temps continu auxiliaire $Y_t = X_{[t+1]}$, $t \in \mathbb{R}$.

Nous avons $S_n = \int_0^n Y_u du$ (quand le processus $(Y_t)_t$ est mesurable et pour tout w $\int_0^n Y_u(w)du$ existe).

Nous allons maintenant définir les «blocs» comme suit

$$V_1 = \int_0^p Y_u du \qquad ,V_1' = \int_p^{2p} Y_u du$$

$$\vdots$$

$$V_q = \int_{2(q-1)p}^{(2q-1)p} Y_u du \qquad ,V_q' = \int_{(2q-1)p}^{2qp} Y_u du$$

où $p = \frac{n}{2q}$

On applique par récurrence le lemme 2.2 de Bradley, pour cela on définit $W_1, \ldots, W_q$ des variables aléatoires indépendantes tel que : $P_{W_j} = P_{V_j}$, $j = 1, \ldots, q$ et

$$P\left(\left|W_j - V_j\right| > \xi\right) \leq 11 \left(\frac{\|V_j + c\|_\infty}{\xi}\right)^{1/2} \alpha([p]) \tag{2.20}$$

ici $c = \delta pb$ et $\xi = \min\left(\frac{n\varepsilon}{4q}, (\delta-1)pb\right)$, pour $\delta > 1$

Notez que, pour chaque j,

$$\left(\|V_j + c\|_\infty\right) \geq c - \|V_j\|_\infty \geq (\delta - 1)bp$$

de sorte que $0 < \xi \leq \left(\|V_j + c\|_\infty\right)$ tel que requis dans le lemme de Bradly.
Alors,d'après le choix de c et ξ l'inégalité (2.20) devient :

$$\begin{aligned} P\left(\left|W_j - V_j\right| > \xi\right) &\leq 11 \left(\frac{(\delta-1)pb}{\min\left(\frac{n\varepsilon}{4q}, (\delta-1)pb\right)}\right)^{1/2} \alpha([p]) \\ &\leq 11 \left(\max\left(\frac{(\delta+1)pb}{\delta-1}, \frac{4qbp(\delta+1)}{n\varepsilon}\right)\right)^{1/2} \alpha([p]) \end{aligned}$$

Si $\delta = 1 + \frac{\varepsilon}{2b}$ alors :

$$P\left(\left|W_j - V_j\right| > \xi\right) \leq 11 \left(2 + \frac{\varepsilon}{2b}\right)^{1/2} \left(\frac{\varepsilon}{2b}\right)^{1/2} \alpha([p])$$

Ainsi

$$P\left(\left|W_j - V_j\right| > \xi\right) \leq 11\left(1+\frac{4b}{\varepsilon}\right)^{1/2} \alpha([p]) \tag{2.21}$$

D'autre part, nous appliquons l'inégalité de Hoeffding (1.2) aux W^j. On obtient alors

$$P\left(\left|\sum_{j=1}^{q} W_j\right| > \frac{n\varepsilon}{4}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{16pb^2}\right)$$

$$P\left(|S_n| \geq n\varepsilon\right) \leq P\left(\left|\sum_1^q V_j\right| > \frac{n\varepsilon}{2}\right) + P\left(\left|\sum_1^q V_j'\right| > \frac{n\varepsilon}{2}\right) \tag{2.22}$$

l'événement :

$$\left\{\left|\sum_{j=1}^{q} V_j\right| > \frac{n\varepsilon}{2}\right\} \subset \left\{\left|\sum_1^q V_j\right| > \frac{n\varepsilon}{2}; \left|V_j - W_j\right| \leq \xi; j = 1, \ldots, q\right\} \cup \left\{\bigcup_1^q |V_j - W_j| > \xi\right\}$$

d'où

$$\begin{aligned} P\left(\left|\sum_{j=1}^{q} V_j\right| > \frac{n\varepsilon}{2}\right) &\leq P\left(\left|\sum_1^q V_j\right| > \frac{n\varepsilon}{2} - q\xi\right) + \sum_1^q P\left\{|V_j - W_j| > \xi\right\} \\ &\leq P\left(\left|\sum_1^q w_j\right| > \frac{n\varepsilon}{4}\right) + \sum_1^q P\left\{\left|V_j - W_j\right| > \xi\right\} \end{aligned}$$

En remplaçant (2.21) et (2.22) dans l'inégalité ci-dessus

$$P\left(\left|\sum_1^q V_j\right| > \tfrac{n\varepsilon}{2}\right) \leq 2\exp\left(\frac{\varepsilon^2}{8b^2}q\right) + 11\left(1+\frac{4b}{\varepsilon}\right)^{1/2} q\alpha([p])$$

la même borne seras déterminée pour les V_j', ainsi l'inégalité du théorème sera établie.

2- La preuve de l'inégalité (2.19) est la même que celle de l'inégalité (2.18) sauf au lieu d'utiliser l'inégalité (1.2) de Hoeffding on utilise l'inégalité de Bernstein

Donc nous avons

$$P\left(\left|\sum_1^q W_j\right| > \frac{n\varepsilon}{4}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{n^2\varepsilon^2/16}{4\sum_1^q EW_j^2 + 2bpn\varepsilon/4}\right) \tag{2.23}$$

par hypothèse $P_{W_j} = P_{V_j}$, d'où :

$$EW_j^2 = EV_j^2 = E\left(\int_{jp}^{(j+1)p} Y_u du\right)^2$$

et

$$\begin{aligned} E\left(\int_{jp}^{(j+1)p} Y_u du\right)^2 &= E\Big(([jp]+1-jp)X_{[jp]+1} + X_{[jp]+2} \\ &+ \ldots + X_{[j+1]p} + ((j+1)p - [(j+1)p])X_{[(j+1)p]+1}\Big)^2 \end{aligned}$$

$$P\left(\left|\sum_1^q W_j\right| > \frac{n\varepsilon}{4}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 q}{8v^2(q)}\right)$$

ce qui implique (2.19) En utilisant l'inégalité (2.2) de Davydov , nous obtenons :

$$v^2(q) \leq \frac{2}{p^2}\left(\max_{1\leq t\leq n} EX_t^2 + 8b^2 \sum_{k=1}^{[p]+1} \alpha(k)\right) + \frac{b\varepsilon}{2} \tag{2.24}$$

■

Le théorème suivant est un cas général, en effet les variables aléatoires ne serons plus nécessairement bornées mais vérifierons la condition (2.25) de cramer.

Théorème 2.3 : Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus de moyenne nulle, on suppose qu'il existe une constante $c > 0$ tel que

$$E|X_t|^k \leq c^{k-2} k! EX_t^2 < +\infty, \quad \text{pour} \quad \text{t=1, ..., n} \quad \text{et} \quad \text{k=3, 4, ...} \tag{2.25}$$

Alors $\forall n \geq 2$, $\forall q \in \left[1, \frac{n}{2}\right]$, $\forall \varepsilon > 0$, et $\forall k \geq 3$

$$P(|S_n| \geq n\varepsilon) \leq a_1 \exp\left(-\frac{q\varepsilon^2}{25m_2^2 + 5c\varepsilon}\right) + a_2(k)\alpha\left(\left[\frac{n}{q+1}\right]\right)^{\frac{2k}{2k+1}} \tag{2.26}$$

où $a_1 = 2\frac{n}{q} + \left(1 + \frac{q\varepsilon^2}{25m_2^2 + 5c\varepsilon}\right)$, avec $m_2^2 = \max_{1\leq t\leq n} EX_t^2$,

et $a_2 = 11n\left(1 + \frac{5m_p^{\frac{k}{2k+1}}}{\varepsilon}\right)$, avec $m_p = \max_{1\leq t\leq n} E\|X_t\|_p$

Preuve Soit q et r des entiers tels que

$$1 \leq qr \leq n < (q+1)r.$$

Considérons les sommes partielles

$$\begin{array}{rcl} Z_1 & = & X_1 + X_{r+1} + \cdots + X_{(q-1)r+1} \\ Z_2 & = & X_2 + X_{r+2} + \cdots + X_{(q-1)r+2} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_r & = & X_r + X_{2r} + \cdots + X_{qr} \\ \Delta & = & X_{qr+1} + \cdots + \cdots + X_{(n)} \quad \text{si} \quad qr < n \\ & = & 0 \qquad \text{ailleurs} \end{array}$$

Nous avons :

$$P(|S_n| \geq n\varepsilon) \leq \sum_{j=1}^{r} P\left(|Z_j| \geq \frac{4n\varepsilon}{5r}\right) + P\left(|\Delta| > \frac{n\varepsilon}{5}\right)$$

Pour obtenir la borne sup de $P\left(|Z_1| \geq \frac{4n\varepsilon}{5r}\right)$, on applique par récurrence le lemme 2.2 de Bradley : soit k un entier ≥ 2, δ un réel > 1 et ξ tel que $0 < \xi \leq (\delta-1)m_k \leq \|X_{(j-1)r+1} + \delta m_k\|_k \leq (1+\delta)m_k$; $j = 1, 2, ..., q$

Nous pouvons et ne supposons que m_k est strictement positif, sinon l'inégalité devrait être trivial. alors, il existe des variables aléatoires Y_j, $j = 1, ..., q$ tel que $P_{Y_j} = P_{X_{(j-1)r+1}}$.

$$P\left(|Y_j - X_{(j-1)r+1}| > \xi\right) \leq 11 \left(\frac{\|X_{(j-1)r+1} + \delta m_k\|_k}{\xi}\right)^{\frac{k}{2k+1}} (\alpha(r))^{\frac{k}{2k+1}}. \tag{2.27}$$

Choisissent

$\delta = 1 + \frac{2\varepsilon}{5m_k}$ et $\xi = \frac{2\varepsilon}{5}$,implique que

$$P\left(|Y_j - X_{(j-1)r+1}| > \frac{2\varepsilon}{5}\right) \leq 11 \left(1 + \frac{5m_k}{\varepsilon}\right)^{\frac{k}{2k+1}} (\alpha(r))^{\frac{k}{2k+1}}. \tag{2.28}$$

Après calcul

$$\begin{aligned} P\left(|Z_j| \geq \frac{4n\varepsilon}{5r}\right) & \leq P\left(|Y_1 + ... + Y_q| \geq \frac{2q\varepsilon}{5}\right) \\ & + \sum_{j=1}^{q} P\left(|Y_j - X_{(j-1)r+1}| > \frac{2\varepsilon}{5}\right) \end{aligned} \tag{2.29}$$

on appliquons l'inégalité de Bernstein aux Y_j, $j = 1, ..., q$ nous obtenons :

$$P\left(|Y_1 + ... + Y_q| \geq \frac{2q\varepsilon}{5}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{q\varepsilon^2}{25m_2^2 + 5c\varepsilon}\right) \tag{2.30}$$

en combinant (2.28),(2.29), et (2.30), nous obtenons une borne sup pour $P\left(|Z_1| \geq \frac{4n\varepsilon}{5r}\right)$, la même borne sera valide pour les variables aléatoires $Z_2, ..., Z_r$

Passons à l'estimation de $P\left(|\Delta| > \dfrac{n\varepsilon}{5}\right)$

$$\begin{aligned} P\left(\Delta > \frac{n\varepsilon}{5}\right) &\leq \exp\left(-s\frac{n\varepsilon}{5}\right) Ee^{s\Delta}, \quad s > 0 \\ &\leq \exp\left(-s\frac{n\varepsilon}{5}\right)\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{s^k}{k!} E|\Delta|^k\right) \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Minkowski et de la condition (2.25) de Camer, nous obtenons :

$$\begin{aligned} E|\Delta|^k &\leq \left(\|X_{qr+1}\|_k + ... + \|X_n\|_k\right)^k \\ &\leq (n - qr)^k c^{k-2} k! m_2^2, \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

"Pour rappel l'inégalité de Minkowski s'écrit : Soit X et Y des variables aléatoires réelles, et soient r et s deux nombre réels positifs.

Si $r \geq 1$, alors

$$E\left[|X+Y|^r\right]^{1/r} \leq \left[E\left(|X|^r\right)\right]^{1/r} + \left[E\left(|X|^r\right)\right]^{1/r}$$

où $\left[E\left(|X|^r\right)\right]^{1/r}$ est une fonction non décroissante de r. ie $0 < r \leq s \quad \Rightarrow \left[E\left(|X|^r\right)\right]^{1/r} \leq \left[E\left(|X|^s\right)\right]^{1/s}$ "

Choisissant ainsi $s = \theta/(n - qr)c$, $0 < \theta < 1$ nous trouvons

$$P\left(\Delta > \tfrac{n\varepsilon}{5}\right) \leq \left(1 + \tfrac{\theta^2}{c^2}\tfrac{m_2^2}{1-\theta}\right)\exp\left(\frac{\theta\varepsilon}{5c}\frac{n}{r}\right)$$

La même méthode sera utiliser pour le calcul de la borne de $-\Delta$ dans ce cas là :

$$P\left(|\Delta| > \tfrac{n\varepsilon}{5}\right) \leq 2\left(1 + \tfrac{\theta^2}{c^2}\tfrac{m_2^2}{1-\theta}\right)\exp\left(-\tfrac{\theta\varepsilon}{5c}q\right)$$

pour $\theta = c\varepsilon/(5m_2^2 + c\varepsilon)$

$$P\left(|\Delta| > \frac{n\varepsilon}{5}\right) \leq 2\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{5(5m_2^2 + c\varepsilon)}\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{5(5m_2^2 + c\varepsilon)}q\right) \tag{2.31}$$

Ainsi (2.28),(2.30)et (2.31)forme la borne de $P\left(|S_n| \geq n\varepsilon\right)$

■

2.6 Inégalité de type Fuk Nagaev (2000)

cette inégalité est une extension aux suites mélangeantes de l'inégalité de Fuk Nagaev

Théorème 2.4 Soit $(X_i)_{i>0}$ une suite de variables aléatoires réelles centrées et $(\alpha_n)_{n>0}$ la suite de coefficients de mélange fort définie par (2.1).

Posons $Q = \sup_{i>0} Q_i$, la fonction quantile de la variable aléatoireX_i, définie par : $\inf t : P(|X| > t) \leq u$.

$$v_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |cov(X_i, X_j)| \tag{2.32}$$

Soit $R(u) = \alpha^{-1}(u)Q(u)$ et $H(u) = R^{-1}(u)$la fonction inverse de R et $\alpha^{-1}(u) = \sum_{i\in\mathbf{N}} 1_{u<\alpha_i}$. Alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $r \geq 1$

$$P\left(\sup_{k\in[1,n]} |S_k| \geq 4\lambda\right) \leq 4\left(1+\frac{\lambda^2}{rv_n^2}\right)^{-r/2} + 4n\lambda^{-1}\int_0^{H(\lambda/r)} Q(u)du \tag{2.33}$$

Remarque : nous pouvons imposer $X_i = 0$ pour $i > n$. En conséquence, nous pouvons remplacer α^{-1} par $\alpha^{-1} \wedge u$ dans les inégalités ci-dessus.

Lemme 2.7 Soit $(X_i)_{i>0}$ une suite de variables aléatoires réelles telle que $\|X_i\|_\infty \leq M$ pour tout entier $i > 0$, et $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ la suite de coefficients de mélange fort définie par (2.1). Supposons de plus que $X_i = 0$ p.s. pour tout $i > n$. Posons $S_k = \sum_{i=1}^{k} = (X_i - E(X_i))$. Soit q un entier strictement positif, v_q tout réel positif tel que

$$v_q \geq \sum_{i>0} E((X_{iq-q+1} + ... + X_{iq})^2) \text{ et } M(n) = \sum_{i=1}^{n} \|X_i\|_\infty.$$

Alors, pour tout $\lambda \geq Mq$,

$$\begin{aligned}
&P(\sup_{k\in[1,n]|S_k|} \geq (1_{q>1} + 5/2)\lambda) \\
&\qquad \leq 4\exp\left(-\frac{v_q}{(qM)^2} h(\lambda qM/v_q)\right) + 4M(n)\alpha_{q+1}\lambda^{-1} \\
&\qquad \leq 4\exp\left(-\frac{\lambda}{2qM}\log(1+\lambda qM/v_q)\right) + 4M(n)\alpha_{q+1}\lambda^{-1}
\end{aligned}$$

où $h(x) = (1+x)\log(1+x) - x$.

Preuve :
Posons $U_i = S_{iq} - S_{iq-q}$. Comme $X_i = 0$ si $i > 0$, les variables U_i sont nulles p.s. à partir d'un certain rang. Puisque tout entier j est à une distance inférieure ou égale à $[q/2]$ d'un multiple de q,

$$\sup_{k\in[1,n]} | S_k | \geq 2[q/2]M + \sup_{j>0} | \sum_{i=1}^{j} U_i |.$$

Donc le lemme 2.7 est une conséquence de l'inégalité suivante :

$$P(\sup_{j>0} | \sum_{i=1}^{j} U_i | \geq 5\lambda/2) \leq 4\exp(-\frac{v_q}{(qM)^2} h(\lambda qM/v_q) + 4M(n)\alpha_{q+1}\lambda^{-1}). \tag{2.34}$$

La seconde partie de l'inégalité du lemme 2.7 découle immédiatement de (2.34) et de la minoration

$$\begin{aligned} h(x) &\geq x \int_0^1 \log(1+tx)dt \\ &\geq x\log(1+x) \int_0^1 tdt \\ &\geq x\log(1+x)/2. \end{aligned}$$

Pour démontrer (2.34) nous appliquons le lemme 2.3de couplage récursivement soit $(\delta_j)_{j>0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendante de la suite $(U_i)_{i>0}$. Pour tout $i > 0$, il existe une fonction mesurable F_i telle que $U_i^* = F_i(U_1, ..., U_{i-2}, U_i, \delta_i)$ satisfasse les conditions du lemme avec $A = \sigma(U_l : l < i-1)$. La suite $(U_i^*)_{i>0}$ ainsi construite a les propriétés suivantes :

1. Pour tout $i > 0$, la variable U_i^* a même loi que U_i,
2. Les variables $(U_{2i}^*)_{i>0}$ sont indépendantes dans leur ensemble ainsi que les variables $(U_{2i-1}^*)_{i>0}$.
3. De plus

$$E(|U_i - U_i^*|) \leq 2\alpha_{q+1} \sum_{k=iq-q+1}^{iq} \|X_k\|_\infty \quad \text{pour tout} i > 0$$

Substituons les variables U_i^* aux variables initiales :

$$\sup_{j>0} | \sum_{i=1}^{j} U_i | \leq \sum_{i>0} |U_i - U_i^*| + \sup_{j>0} | \sum_{i=1}^{j} U_{2i}^* | + \sup_{j>0} | \sum_{i=1}^{j} U_{2i-1}^* | \tag{2.35}$$

Par la propriété 3 suivie de l'inégalité de Markov,

$$P(\sum_{i>0} |U_i - U_i^*| \geq \lambda/2) \leq 4M(n)\alpha_{q+1}\lambda^{-1} \tag{2.36}$$

Pour conclure la preuve du lemme 2.7, il suffit alors d'appliquer l'inégalité 1.1 de Bennett bilatère pour les variables indépendantes successivement aux dernières sommes dans (2.35) et de noter que, d'après la propriété 1, on peut appliquer cette inégalité avec $K = Mq$ et $V = v_q$.

Preuve du théorème : Nous supposons $X_i = 0$ pour tout $i > n$. Soient q un entier strictement positif et $M > 0$. Posons

$$U_i = S_{iq} - S_{iq-q} \tag{2.37}$$

et $\bar{U}_i = (U_i \wedge qM) \vee (-qM)$ pour $i \in 1, ..., [n/q]$.
par convention on pose $\bar{U}_i = 0$ pour $i > [\frac{n}{q}]$.
Soit $\varphi_M(x) = (|x| - M)_+$.
Nous allons nous ramener aux variables $\bar{U}_i$ en montrant que

$$\begin{aligned} \sup_{k \in [1,n]} |S_k| &\leq \sup_{j>0} |\sum_{i=1}^{j} \bar{U}_i| + qM \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \varphi_M(X_k). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Pour établir (2.38), il suffit de noter que, si le maximum de $|S_k|$ est atteint en k_0, alors, pour $j_0 = [k_{0/q}]$,

$$\sup_{k \in [1,n]} |S_k| \leq \left| \sum_{i=1}^{j_0} \bar{U}_i \right| + \sum_{i=1}^{j_0} |U_i - \bar{u}_i| + \sum_{k=j_0+1}^{k_0} |X_k|, \tag{2.39}$$

Puis, par convexité de φ_M, que

$$\sum_{i=1}^{j_0} |U_i - \bar{u}_i| \leq \sum_{k=1}^{qj_0} \varphi_M(X_k), \tag{2.40}$$

et enfin que

$$\sum_{k=j_0+1}^{k_0} |X_k| \leq (k_0 - qj_0)M + \sum_{k=j_0+1}^{k_0} \varphi_M(X_k). \tag{2.41}$$

Pour revenir a la situation du lemme 2.7, nous devons encore recentrer les variables $\bar{U}_i$. Puisque les variables U_i sont centrées,

$$\begin{aligned} \sup_{j>0} \left| \sum_{i=1}^{j} \bar{U}_i \right| &\leq \sup_{j>0} \left| \sum_{i=1}^{j} (\bar{U}_i - E(\bar{U}_i)) \right| + \sum_{i>0} E(|U_i - \bar{U}_i|) \\ &\leq \sup_{j>0} \left| \sum_{i=1}^{j} (\bar{U}_i - E(\bar{U}_i)) \right| + \sum_{k=1}^{n} E(\varphi_M(X_k)) \end{aligned} \tag{2.42}$$

Par convexité de φ_M. Nous avons donc établi que :

$$\sup_{k \in [1,n]} |S_k| \leq \sup_{j>0} \left| \sum_{i=1}^{j} (\bar{U}_i - E(\bar{U}_i)) \right| + qM + \sum_{k=1}^{n} (E(\varphi_M(X_k)) + \varphi_M(X_k)) \tag{2.43}$$

Choisissons le niveau de troncature et la largeur des blocs.

Soit $x = \lambda/r$ et $v = H(x)$. Si $v = 1/2$, alors

$$\begin{aligned} 4n\lambda^{-1}\int_0^{H(\lambda/r)} Q(u)du &\geq 2n\lambda^{-1}\int_0^1 Q(u)du \\ &\geq 2\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n} E(|X_i|) \\ &\geq \lambda^{-1}E(|S_n|), \end{aligned} \tag{2.44}$$

et dans ce cas l'inégalité découle immédiatement de l'inégalité de Markov appliquée à $|S_n|$. Si $v < 1/2$ alors $\alpha^{-1} > 0$. On prend alors

$$q = \alpha^{-1}(u) et M = Q(v), \tag{2.45}$$

de telle sorte

$$qM = R(v) = R(H(x)) \leq x \leq \lambda. \tag{2.46}$$

Nous pouvons maintenant appliquer le lemme 2.7 aux variables $\bar{U}_i$ (on peut aussi adapter sa preuve avec $q = 1$ et x comme majorant commun des variables au premier terme du majorant de (2.44). Puisque

$$E(U_i^2) \leq E(U_i^2) \leq \sum_{l,m \in]iq-q,iq[} |cov(X_l, X_m)|, \tag{2.47}$$

la quantité v_1 peut être choisi égale à s_n^2. Donc

$$P(\sup_{j>0} |\sum_{i=1}^{j} (\bar{U}_j - E(\bar{U}_i))| \geq 5\lambda/2) \leq 4\left(1 + \frac{\lambda^2}{rs_n^2}\right)^{-r/2} + 4nM\alpha_{q+1}\lambda^{-1} \tag{2.48}$$

Majorant maintenant le dernier terme de (2.44).
D'après l'inégalité de Markov :

$$\begin{aligned} & P\left(\sum_{k=1}^{n} E(\varphi_M(X_k)) + \varphi_M(X_k) \geq \frac{\lambda}{2}\right) \\ & \qquad \leq \frac{4}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 (\varphi_k(u) - \varphi(v))_+ du \\ & \qquad \leq \frac{4n}{\lambda}\int_0^v (Q(u) - Q(v)du). \end{aligned} \tag{2.49}$$

Puisque $q > \alpha^{-1}$, $\alpha_q \leq v$ et $M\alpha_{q+1} \leq vQ(u)$. Il suffit donc de remplacer (2.44), (2.48)et (2.49) et de noter que $Mq \leq \lambda$ pour conclure la preuve du théorème.

■

Exemple d'application dans Rio (2000, [31]) Cas de taux de mélange arithmétiques $\alpha_n \leq cn^{-\nu}$ pour tout $n > 0, c \geq 1$ et $\nu > 1$: Supposons que les variables X_i vérifient :

$P(|X_i| > t) \leq t^{-p}$ pour un réel $p > 2$

alors si $b = \nu p/(\nu + p)$, un calcul élémentaire montre que :

$$H(x) \leq c^{p/(\nu+p)} 2^b x^{-b}$$

Donc

$$\frac{4}{\lambda} \int_0^{H(\lambda/r)} Q(u) d \leq 4Cr^{-1} \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{\frac{(\nu+1)p}{\nu+p}}$$

avec $C = 2p(2p-1)^{-1}(2^\nu c)^{\frac{p-1}{\nu+p}}$

Donc pour $r \geq 1$ quelconque et λ positif, le théorème 2.4 donne :

$$P(\sup_{k\in[1,n]} |S_k| \geq 4\lambda) \leq 4\left(1 + \frac{\lambda^2}{rv_n^2}\right)^{-r/2} + 4Cnr^{-1}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{\frac{(\nu+1)p}{\nu+p}} \tag{2.50}$$

quand $\|X_i\|_\infty \leq 1$, le théorème 2.4 appliqué avec $Q = 1$ donne

$$P(\sup_{k\in[1,n]} |S_k| \geq 4\lambda) \leq 4\left(1 + \frac{\lambda^2}{rv_n^2}\right)^{-r/2} + 2cnr^{-1}\left(\frac{2r}{\lambda}\right)^{\nu+1} \tag{2.51}$$

Chapitre 3

Inégalités exponentielles : cas de variables aléatoires Associées

Dans cette partie nous présentons deux principales inégalités exponentielles de Neumann et Kallabis (2006,[21]), et de Doukhan et Neumann (2007, [11]).

Ici la forme des données est moins restrictive de celle du paragraphe précédent correspondant au cas α-mélange, il s'agit là de dépendance positive ou association.

3.1 Notions et généralités

La notion d'association a été introduit dans la littérature statistique par Lehman (1966,[24]) puis par Esary, Proschan et Walkup (1967, [12]). Le même concept a été utilisé en mécanique statistique sous le nom de FKG-inégalités, tiré des initiales des auteurs Fortuin, Kasteleyn et Ginibre. (1971,[13]) et leurs application en théorie de la percolation, au modèle d'Ising.

Définition 1 Un suite finie de variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ est dite associée si pour tout paire de fonctions non décroissantes (par coordonnées) f et $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$Cov(f(X_i, i \in A), g(X_i, i \in B)) \geq 0,$$

valable pour tous sous-ensembles finis A et B dans $\mathbb{N}$.

Ces auteurs utilisent un concept plus général de dépendance faible introduit par Doukhan et Louhichi (1999,[10]) qui englobe aussi bien le mélange fort que l'association, cela se traduit par la condition (3.5) de décroissance exponentielle des coefficients de dépendance faible pour l'inégalité de Neumann et kallabis, et la condition (3.15) de décroissance sous exponentielle qui est plus générale pour l'inégalité de Doukhan et Neumann.

Nous donnons la définition de la dépendance faible au sens de Doukhan et Louhichi (1999)

Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus stationnaire à valeur dans $\mathbb{R}^d$ doté d'une norme $\|.\|$. Soit $h : (\mathbb{R}^d)^u \to \mathbb{R}$ une fonction arbitraire.

$$\text{Lip}h = \sup\left\{ \frac{|h(x_1,...,x_u) - h(y_1,...,y_u)|}{\|x_1,...,y_1\| + \cdots + \|x_u,...,y_u\|} : (x_1,...,x_u) \neq y_1,...,y_u \right\}.$$

Λ désigne l'ensemble des fonctions $h : \mathbb{R}^u \to \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{N}$, tel que Lip$h < \infty$, et $\Lambda^{(1)} = h \in \Lambda : \|h\|_\infty \leq 1$. pour tout $u \geq 1$ ...

Définition 2 Le processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est $\left(\Lambda^{(1)}, \psi, \varepsilon\right)$-faiblement dépendante s'il existe une fonction $\psi : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}_+$ et une suite $\varepsilon = (\varepsilon_r, r \in \mathbb{N})$ qui décroit vers 0 quand r tend vers ∞ tel que, quelque soit $g_1, g_2 \in \Lambda^{(1)}$ avec $g_1 : \mathbb{R}^{du} \to \mathbb{R}, g_2 : \mathbb{R}^{dv} \to \mathbb{R}(u, v \in \mathbb{N})$ et $\forall (s_1, s_2, ..., s_u)$, $(t_1, t_2, ..., t_v)$ avec $1 \leq s_1 \leq ... \leq s_u \leq s_u + r \leq t_1 \leq ... \leq t_v \leq n$, l'inégalité suivante est établie :

$$|cov\left(g_1\left(X_{s_1}...X_{s_u}\right), g_2\left(X_{t_1}...X_{t_v}\right)\right)| \leq \psi(\text{Lip}g_1, \text{Lip}g_2, u, v)\varepsilon_r.$$

(a) Si $\Psi(\text{Lip}g_1, \text{Lip}g_2, u, v) = v\text{Lip}g_2$, alors Le processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est θ-dépendant, et on note $\varepsilon_r = \theta_r$

(b) Si $\Psi(\text{Lip}g_1, \text{Lip}g_2, u, v) = u\text{Lip}g_1 + v\text{Lip}g_2$, alors Le processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est η-dépendant, et on note $\varepsilon_r = \eta_r$

(c) Si $\Psi(\text{Lip}g_1, \text{Lip}g_2, u, v) = uv\text{Lip}g_1\text{Lip}g_2$, alors Le processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est κ-dépendant, et on note $\varepsilon_r = \kappa_r$

(d) Si $\Psi(\text{Lip}g_1, \text{Lip}g_2, u, v) = u\text{Lip}g_1 + v\text{Lip}g_2 + uv\text{Lip}g_1\text{Lip}g_2$, alors Le processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est λ-dépendant, et on note $\varepsilon_r = \lambda_r$

Pour les preuves de ces inégalités les auteurs se base sur une nouvelle technique dite des cumulants.

3.2 Technique des Cumulants

Les cumulants ont été introduits en 1889 par l'astronome, mathématicien et actuaire danois *Nicolai Thiele* (1838 - 1910). *Thiele* les appelle alors half-invariants (demi-invariants). Il faut attendre 1931 pour trouver l'appellation cumulants dans le papier, The derivation of the pattern formulae of two-way partitions from those of simpler patterns, Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2, v. 33, pp. 195-208, par le grand statisticien *Ronald Aylmer Fisher* et par *John Wishart*. L'historien *Stephen Stigler* reporte que le nom cumulant fut suggéré à *Fisher* dans une lettre de *Harold Hotelling*. La fonction de partition en physique statistique pour l'ensemble canonique a été introduit par *Josiah Willard Gibbs* en 1901.

En théorie des probabilité et statistique, le cumulant , noté Γ_k d'une fonction de distribution est un ensemble de quantités qui permet de donner une alternative aux moments d'une distribution de probabilité donnée. Les moments déterminent les cumulants dans le sens où quand deux distributions de probabilité dont les moments sont identiques auront aussi des cumulants identiques, et de même les cumulants déterminer les moments.

Dans certains cas, des traitements théoriques de problèmes avec des cumulants sont plus simples que celles utilisant les moments.

Les cumulants Γ_k d'une variable aléatoire X de moyenne $\mu = E(X)$ et de variance $\sigma^2 = E((X-\mu)^2)$ sont définis par la fonction génératrice des cumulants qui est $g(t)$:

$$g(t) = \ln E\left(e^{tX}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k \frac{t^k}{k!}$$

Elle est donc intimement liée à la fonction génératrice des moments et à la fonction caractéristique de la variable X. Les cumulants sont donnés par les dérivées en 0 de $g(t)$:

$$\Gamma_k = \frac{d^k}{dt^k} \ln E e^{tX}\big|_{t=0}$$

$\Gamma_1 = \mu = g^{'}(0)$, $\Gamma_2 = \sigma^2 = g^{''}(0)$ et $\Gamma_k = 0 = g^{(k)}(0)$.

Comme indiqué plus haut, les cumulants d'une distribution sont liés aux moments de la distribution. Travailler avec la fonction génératrice des cumulants est plus pratique dans la mesure où pour des variables indépendantes X et Y,

$$\begin{aligned} g_{X+Y}(t) &= \ln\left(Ee^{t(X+Y)}\right) = \ln\left(Ee^{(tX)}.Ee^{(tY)}\right) \\ &= \ln\left(Ee^{(tX)}\right) + \ln\left(Ee^{(tY)}\right) \\ &= g_X(t) + g_Y(t) \end{aligned}$$

tandis qu'avec la fonction génératrice des moments $M_X(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= E\left(e^{t(X+Y)}\right) = E\left(e^{(tX)}\right).E\left(e^{(tY)}\right) \\ &= M_X(t).M_Y(t) \end{aligned}$$

Il faut enfin remarquer que :

$g_{\alpha X}(t) = \ln\left(E(e^{t\alpha Y})\right) = g_X(\alpha t)$

Certains auteurs préfèrent définir la fonction génératrice des cumulants directement à partir de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire comme le logarithme népérien de cette fonction caractéristique. La fonction génératrice des cumulants prend alors parfois le nom de **seconde fonction caractéristique d'une distribution**.

$$h(t) = \ln E\left(e^{itX}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k \frac{(it)^k}{k!}$$

Remarque 3.1 La caractérisation des cumulants est valide même pour les distributions dont les plus hauts moments n'existent pas.

– **Quelques propriétés des cumulants**

Invariance

Les cumulants vérifient pour tout variable aléatoire X et tout constante c les relations : $\Gamma_1(X+c) = \Gamma_1(X) + c$ et $\Gamma_k(X+c) = \Gamma_k(X)$ pour $k \geq 2$. Pour résumer, c est ajouté au premier cumulant, et tous les cumulants d'ordre supérieur sont inchangés.

Homogénéité

Le k-ième cumulant est homogène de degré k, c'est-à-dire si c est une constante, alors : $\Gamma_k(cX) = c^k \Gamma_k(X)$

Additivité

Si X et Y sont indépendants, alors :
$\Gamma_k(X+Y) = \Gamma_k(X) + \Gamma_k(Y)$.

– **Résultat de Bentkus et Rudzkis**

Ce résultat correspond à une inégalité exponentielle, Neumann et Kallabis (2006,[21]), et de Doukhan et Neumann (2007, [11]), font usage pour établir de nouvelles inégalités exponentielles.

Théorème 3.1 Soit ξ une variable aléatoire réelle avec $E\xi = 0$, $E|\xi|^r < \infty, \forall r > 0$, le k^{me} cumulant de ξ est définit par :

$$\Gamma_k(\xi) = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{dt^k} \ln E e^{it\xi}\Big|_{t=0}$$

S'il existe $\gamma \geq 0$, $\sigma^2 > 0$, et $B \geq 0$ tel que

$$|\Gamma_k(\xi)| \leq \left(\frac{k!}{2}\right)^{1+\gamma} \sigma^2 B^{k-2}, \forall k = 2, 3, \ldots$$

Alors, $\forall t \geq 0$,

$$P(\xi \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2/2}{\sigma^2 + B^{1/(1+\gamma)} t^{(1+2\gamma)(1+\gamma)}}\right). \tag{3.1}$$

(inégalité due à Bentkus and Rudzkis (1980))

Il résulte de la définition des cumulants que :
pour $1 < t_1 \leq ... \leq t_k < n$, le cumulants de $X_{t_1}, ..., X_{t_k}$

$$\Gamma\left(X_{t_1}, ..., X_{t_k}\right) = \frac{1}{i^k} \frac{\partial^k}{\partial u_{t_1} \ldots \partial u_{t_k}} \, lnEe^{i(u_1 X_1 + ... + u_n X_n)} \Big|_{u_1 = ... = u_n = 0}$$

si $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, alors

$$\Gamma_k\left(S_n\right) = \sum_{1 \leq t_1, ..., t_k \leq n} \Gamma_k\left(X_{t_1}, ..., X_{t_k}\right) \tag{3.2}$$

Nous rappelons quelques notions de Saulis, Statulavicius (1991,[41])

Définition 3 Pour toute variable aléatoire Y de moyenne finie, la variable aléatoire centrée, noté $\bar{Y} = Y - EY$,
pour $1 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq n$, on définit les moments centrés de $X_{t_1}, ..., X_{t_k}$
$\bar{E}\left(X_{t_1}, ..., X_{t_k}\right) = E\left[X_{t_1} \overline{X_{t_2} \ldots \overline{X_{t_{k-1}} \overline{X_{t_k}}}}\right]$.

Exemple

$$\begin{aligned}
\bar{E}\left(X_t\right) &= E\left(X_t\right) \\
\bar{E}\left(X_t X_s\right) &= E\left(X_t X_s\right) - E\left(X_t\right) E\left(X_s\right) = cov\left(X_t, X_s\right) \\
\bar{E}\left(X_{t_1} X_{t_2} X_{t_3}\right) &= E\left(X_{t_1} X_{t_2} X_{t_3}\right) - E\left(X_{t_1}\right) E\left(X_{t_2} X_{t_3}\right) \\
&\quad - E\left(X_{t_1} X_{t_2}\right) . E\left(X_{t_3}\right) + E\left(X_{t_1}\right) E\left(X_{t_2}\right) E\left(X_{t_3}\right)
\end{aligned}$$

– **Résultats de Saulis, Statulavicius (1991,[41])**

pour $1 < t_1 \leq ... \leq t_k < n$, le cumulants de $X_{t_1}, ..., X_{t_k}$ peut être exprimées en fonction des moments centrés comme suit :

$$\Gamma\left(X_{t_1}, ..., X_{t_k}\right) = \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu-1} \sum_{\bigcup_{p=1}^{\nu} I_p = I} N_\nu\left(I_1, ..., I_\nu\right) \prod_{p=1}^{\nu} \bar{E} X_{I_p} \tag{3.3}$$

où $\sum_{\bigcup_{p=1}^{\nu} I_p = I}$ la somme pour toutes les partitions $I_1, ..., I_\nu$ de l'ensemble $I = \{1, ..., k\}$. Étant donné une telle partition, $\bar{E} X_{I_p}$ peut s'écrire $\bar{E}\left(X_{t_{i_1^{(p)}}}, ..., X_{t_{i_{k_p}^{(p)}}}\right)$ si $I_p = \left\{i_1^{(p)}, ..., i_{k_p}^{(p)}\right\}$. le sous ensemble est partitionné tel que $i_1^{(1)} < ... < i_1^{(\nu)}$. $N_\nu\left(I_1, ..., I_\nu\right)$ sont des entiers non négatifs définis comme suit : pour $i \in I$, soit $n_i\left(I_1, ..., I_\nu\right) = \sharp\left\{p : i_1^{(p)} < i < i_{k_p}^{(p)}\right\}$. alors

$$N_1(I) = 1$$

et, $\forall \nu \geq 2$,

$$N_\nu(I_1, ..., I_\nu) = \prod_{p=2}^{\nu} n_{i_1^{(p)}}(I_1, ..., I_\nu);$$

il s'ensuit que $N_\nu(I_1, ..., I_\nu) \neq 0$ si et seulement si $\{I_1, ..., I_\nu\}$ est connexe,à savoir $n_{i_1^{(p)}}(I_1, ..., I_\nu) > 0, \forall p = 2, ..., \nu$.

De plus :

$$\sum_{\nu=1}^{k} \sum_{\bigcup_{p=1}^{\nu} I_p = I} N_\nu(I_1, ..., I_\nu) = (k-1)! \tag{3.4}$$

3.3 Inégalité de Kallabis et Neumann (2006)

Théorème 3.2 Soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles de moyenne nulle et $P(|X_i| \leq M) = 1$, et cela $\forall i = 1, ..., n$ et $M < \infty$. Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ Soit $\sigma_n^2 = var(S_n)$.On suppose qu'il existe $K < \infty$ et $\beta > 0$ tel que, $\forall (s_1, s_2, ..., s_u)$, $(t_1, t_2, ..., t_v)$ avec $1 \leq s_1 \leq ... \leq s_u \leq t_1 \leq ... \leq t_v \leq n$, l'inégalité suivante est établie :

$$|cov(X_{s_1} ... X_{s_u}, X_{t_1} ... X_{t_v})| \leq K^2 M^{u+v-2} v e^{-\beta(t_1 - s_u)} \tag{3.5}$$

alors

$$P(S_n \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2/2}{A_n + B_n^{1/3} t^{5/3}}\right), \tag{3.6}$$

où $A_n \geq \sigma_n^2$ et $B_n = \left(\frac{16nK^2}{9A_n(1-e^{-\beta})} \vee 1\right) \frac{2(K \vee M)}{1-e^{-\beta}}$

Remarque 3.2 **1.** L'inégalité (3.6) ressemble à l'inégalité de Bernstein dans le cas iid.

2. Les auteurs ont montré que asymptotiquement $A_n = O(n)$ et $B_n = o(1)$.

3. Dans le cas où σ_n^2 est très petite, il est préférable de prendre $A_n \geq \sigma_n^2$ puisque elle apparaît dans le dénominateur de la constante B_n

ainsi de (3.5) σ_n^2 est majoré par :

$$\sigma_n^2 \leq \frac{2nK^2}{1-e^{-\beta}} \tag{3.7}$$

d'où, prenons $A_n = \dfrac{2nK^2}{1-e^{-\beta}}$, de (3.6) nous obtenons :

$$P\left(S_n \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{C_1 n + C_2 t^{5/3}}\right) \tag{3.8}$$

où $C_1 = \dfrac{4K^2}{1-e^{-\beta}}$ et $C_2 = 2\left(\dfrac{K \vee M}{1-e^{-\beta}}\right)^{1/3}$

l'inégalité (3.20) est plus de type Hoeffding.

4. Cette inégalité à été utilisé dans **Douge**(2007,[8]) pour montrer la convergence uniforme presque sûr de l'estimateur à noyau.

Preuve :

la preuve du théorème est basée sur le résultat 3.1 de Bentkus and Rudzkis (1980,[2]) : Dans une première étape pour obtenir les estimateurs de la fonction génératrice des cumulants de S_n, nous cherchons les estimateurs de leurs moments centrées.

Lemme 3.1 Supposons que les hypothèses du théorème sont satisfaites. Alors, pour $1 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k \leq n, k \geq 2$ et $i \in \{1, \ldots, k-1\}$

$$|\bar{E}\left(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}\right)| \leq 2^{k-1} K^2 M^{k-2} e^{-\beta(t_{i+1}-t_i)}$$

preuve du lemme : pour $1 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k, k \in \mathbb{N}$, nous définissons la notation abrégée $Y_k = X_{t_k}$ et, pour $1 \leq j < k, Y_j = X_{t_j}\overline{X_{t_{j+1}}\ldots\overline{X_{t_{k-1}}\overline{X_{t_k}}}}$.
pour $1 \leq j < i < k$, où

$$\begin{aligned} Y_j &= X_{t_j} Y_{j+1} - X_{t_j} E\left(Y_{j+1}\right) \\ &= \ldots = X_{t_j} \ldots X_{t_i} Y_{i+1} - \sum_{l=j}^{i} X_{t_j} \ldots X_{t_l} E\left(Y_{l+1}\right) \\ &= X_{t_j} \ldots X_{t_i} \overline{Y_{i+1}} - \sum_{l=j}^{i-1} X_{t_j} \ldots X_{t_l} E\left(Y_{l+1}\right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Comme $EX_{t_k} = 0$, pour le cas particulier où $i = k-1$, l'equation (3.9) devient

$$Y_j = X_{t_j} \ldots X_{t_k} - \sum_{l=j}^{k-1} X_{t_j} ... X_{t_l} E\left(Y_{l+1}\right) \tag{3.10}$$

Sans faire usage de l'hypothèse de dépendance faible, on obtient, pour $3 \leq j < k$:

$$\begin{aligned} E|Y_j| &= E|X_{t_j}\overline{Y_{j+1}}| \leq ME|\overline{Y_{j+1}}| \leq 2MY_{j+1} \\ &\leq \ldots \leq (2M)^{k-l} E|X_{t_k}| \leq 2^{k-j} M^{k-j+1} \end{aligned} \tag{3.11}$$

ainsi, en remplaçant (3.10), nous obtenons :

$$\begin{aligned} C_{j,i} &= |cov\left(X_{t_j} ... X_{t_i}, Y_{i+1}\right)| \\ &\leq |cov\left(X_{t_j} ... X_{t_i}, X_{t_{i+1}} \ldots X_{t_k}\right)| + \sum_{l=i+1}^{k-1} |cov\left(X_{t_j} ... X_{t_i}, X_{t_{i+1}} \ldots X_{t_l}\right) E\left(Y_{l+1}\right)| \\ &\leq K^2 M^{k-j-1}(k-i)e^{-\beta(t_{i+1}-t_i)} + \sum_{l=i+1}^{k-1} k^2 M^{l-j-1}(l-i)e^{-\beta(t_{i+1}-t_i)} 2^{k-l-1} M^{k-1} \\ &= K^2 M^{k-j-1} \left((k-i) + \sum_{l=i+1}^{k-1} (l-i) 2^{k-l-1}\right) e^{-\beta^{t_{i+1}-t_i}} \\ &\leq K^2 M^{k-j-1} 2^{k-i} e^{-\beta(t_{i+1}-t_i)} \end{aligned} \tag{3.12}$$

La dernière inégalité proviens du fait que :

$$\begin{aligned} (k-i) + \sum_{l=i+1}^{k-1} (l-i) 2^{k-l-1} &= \sum_{j=1}^{k-i-1} j 2^{k-i-1-j} + (k-i) \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-l'} \\ &\leq 2^{k-i-2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{1-j}\right) \\ &= 2^{k-i} \end{aligned}$$

D'autre part, on obtient à partir de (3.9) que

$$\left|E\left(Y_j\right)\right| \leq C_{j,i} + \sum_{l=j}^{i-1} \left|E\left(X_{t_j} ... X_{t_l}\right)\right| . |E\left(Y_{l+1}\right)|$$

Par conséquent, on obtient de manière récursive que

$$
\begin{aligned}
|\bar{E}\left(X_{t_1}...X_{t_k}\right)| &= |E\left(Y_1\right)| \\
&\leq C_{1,i} + \sum_{l=1}^{i-1} M^l \left|E\left(Y_{l+1}\right)\right| \\
&\leq ... \leq C_{1,i} + \sum_{1\leq l_1\leq i-1} M^{l_1} C_{l_1+1,i} + \sum_{1\leq l_1\leq l_2\leq i-1} M^{l_2} C_{l_2+1,i} \\
&+ ... + \sum_{1\leq l_1\leq ...<l_{i-1}\leq i-1} M^{i-1} C_{i,i}
\end{aligned}
$$

De (3.12) on obtient maintenant que

$$
\begin{aligned}
|\bar{E}\left(X_{t_l}...X_{t_k}\right)| &\leq K^2 M^{k-2} 2^{k-i} e^{-\beta(t_{i+1}-t_i)} \sum_{l=0}^{i-1} \binom{i-1}{l} \\
&= K^2 M^{k-2} 2^{k-l} e^{-\beta(t_{i+1}-t_i)}
\end{aligned}
$$

■

Les équations (3.2), (3.3) et le résultat du lemme 3.1 peuvent maintenant être utilisées pour obtenir des estimateurs pour les cumulants d' S_n.

Lemme 3.2 Supposons que les hypothèses du théorème sont satisfaites, alors pour $k \geq 3$

$$
|\Gamma_k\left(S_n\right)| \leq nk!((k-1)!)^2 K^2 (K \vee M)^{k-2} \left(\frac{2}{1-e^{-\beta}}\right)^{k-1}
$$

.

Preuve :
De (3.2) on obtient que

$$
|\Gamma_k\left(S_n\right)| H \leq k! \sum_{1\leq t_1,...,t_k\leq n} |\Gamma_k\left(X_{t_1}+...+X_{t_k}\right)| \tag{3.13}
$$

Selon (3.3) et le lemme 3.1, nous avons pour $1 \leq t_1, ..., t_k \leq n$,que

$$
\begin{aligned}
|\Gamma_k\left(X_{t_1}+...+X_{t_k}\right)| &\leq \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{\bigcup_{p=1}^{\nu} I_p = I} N_\nu\left(I_1,...,I_\nu\right) \prod_{p=1}^{\nu} \left|\bar{E} X_{I_p}\right| \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{\bigcup_{p=1}^{j} I_p = I} N_j\left(I_1,...,I_\nu\right) \prod_{p=1}^{\nu} 2^{k_p-1} K^2 M^{k_p-2} \min_{1<j\leq k_p} \exp\left(-\beta(t_{i_j(p)} - t_{i_{j-1}(p)})\right)
\end{aligned}
$$

Noter que nous avons, pour une partition connexe,

$$\max_{1<i\leq j}\max_{1<i\leq k_p}\left\{t_{i_j(p)}-t_{i_{j-1}(p)}\right\}\geq\max_{1<i\leq k}\{t_i-t_{i-1}\}.$$

$N_\nu(I_1,...,I_\nu)=0$ si $\{I_1,...,I_\nu\}$ n'est pas relié on obtient donc, en même temps que (3.4), que

$$\begin{aligned}|\Gamma(X_{t_1}+...+X_{t_k})| &\leq \sum_{\nu=1}^{k}\sum_{\bigcup_{p=1}^{\nu}I_p=I}N_\nu(I_1,...,I_\nu)\,2^{k-1}K^2(K\vee M)^{k-2}\min_{1<i\leq k}\exp(-\beta(t_i-t_{i-1}))\\ &\leq (k-1)!2^{k-1}K^2(K\vee M)^{k-2}\min_{1<i\leq k}\exp(-\beta(t_i-t_{i-1}))\end{aligned}$$

Cela implique que

$$\sum_{1\leq t_1\leq...\leq t_k\leq n}|\Gamma(X_{t_1},...,X_{t_k})|\leq$$

$$n(k-1)!2^{k-1}K^2(K\vee M)^{k-2}\sum_{s_2,...,s_k=0}^{\infty}\min_{2<i\leq k}e^{(-\beta s_i)} \quad (3.14)$$

Comme $\sharp\{(s_2,...,s_k):0\leq s_i\leq s,\max\{s_2,...,s_k\}=s\}\leq(k-1)(s+1)^{k-2}$ et

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^{k-2}e^{-\beta s} &\leq \sum_{s=0}^{\infty}(s+1)...(s+k-2)e^{-\beta s}\\ &= \frac{d^{k-2}}{dp^{k-2}}\left(\frac{1}{1-p}\right)\bigg|_{p=e^{-\beta}}\\ &= (k-2)!\frac{1}{(1-e^{-\beta})^{k-1}}\end{aligned}$$

On obtient que

$$\sum_{1\leq t_1\leq...\leq t_k\leq n}\Gamma(X_{t_1},...,X_{t_k})\leq n((k-1)!)^2 2^{k-1}K^2(K\vee M)^{k-2}\frac{1}{(1-e^{-\beta})^{k-1}}$$

Combiner avec (3.14), cela nous amène au lemme.
Preuve du théorème : du lemme 3.2, nous obtenons, pour $k\geq 3$, que

$$|\Gamma_k(S_n)|\leq\left(\frac{k!}{2}\right)^3\frac{16nK^2}{9(1-e^{-\beta})}\left(\frac{2(K\vee M)}{1-e^{-\beta}}\right)^{k-2}.$$

ce qui implique que

$$|\Gamma_k(S_n)| \leq \left(\frac{k!}{2}\right)^3 A_n B_n^{k-2}.$$

qui est valable $\forall k \geq 2$
Ainsi le théorème est établi en remplaçant les différents variables dans(3.1).

∎

3.4 Inégalité de Doukhan et Neumann (2007)

Cette inégalité généralise celle de Kallabis et Neumann.

Théorème 3.3 Soit $X_1,...,X_n$ des variables aléatoires réelles de moyenne nulle définient sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Soit $\Psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ une des fonctions définient comme suite :

a. $\Psi(u,v) = 2v$
b. $\Psi(u,v) = u+v$
c. $\Psi(u,v) = uv$
d. $\Psi(u,v) = \alpha(u+v)+(1-\alpha)uv, \forall\alpha \in (0,1)$

On suppose qu'il existe des constantes :
$K,M,L_1,L_2 < \infty$,
et
$\mu,\nu \geq 0$,
$(\rho(n))_{n\geq 0}$ une suite de coefficient non décroissante.
$\forall(s_1,s_2,...,s_u)$, $(t_1,t_2,...,t_v)$ avec $1 \leq s_1 \leq ... \leq s_u \leq t_1 \leq ... \leq t_v \leq n$ l'inégalité suivante est établie :

$$|cov(X_{s_1}...X_{s_u},X_{t_1}...X_{t_v})| \leq K^2 M^{u+v+2}((u+v)!)^{\nu}\Psi(u,v)\rho(t_1-s_u) \tag{3.15}$$

où

$$\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^k\rho(s) \leq L_1 L_2^k (k!)^{\mu}, \forall k \geq 0 \tag{3.16}$$

et

$$E|X_t|^k \leq M^k (k!)^{\nu}, k \geq 0 \tag{3.17}$$

Alors $\forall t \geq 0$,

$$P(S_n \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2/2}{A_n + B_n^{1/(\mu+\nu+2)} t^{(\mu+\nu+3)/(\mu+\nu+2)}}\right) \tag{3.18}$$

où $A_n \geq \sigma_n^2$ et $B_n = 2(K\vee M)L_2\left(\frac{2^{4+\mu+\nu}nK^2L_1}{A_n}\vee 1\right)$

Remarque 3.3 **1.** L'inégalité (3.18) ressemble à l'inégalité de Bernstein dans le cas iid.
2. Les auteurs ont montré que asymptotiquement $A_n = O(n)$ et $B_n = o(1)$.

3. Dans le cas où σ_n^2 est très petit, il est préférable de prendre $A_n \geq \sigma_n^2$
ainsi de (3.15) et (3.16) σ_n^2 est majoré par :

$$\sigma_n^2 \leq 2^{1+\nu} n K^2 \Psi(1,1) L_1 \tag{3.19}$$

d'où, prenons $A_n = 2^{1+\nu} n \Psi(1,1) L_1$, nous obtenons :

$$P(S_n \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{C_1 n + C_2 t^{(2\mu+2\nu+3)/(\mu+\nu+2)}}\right) \tag{3.20}$$

où $C_1 = 2^{2+\nu} K^2 \Psi(1,1) L_1$ et $C_2 = 2B^{1/(\mu+\nu+2)}$ avec $B_n = 2(K \vee M) L_2 \left(\dfrac{2^{3+\mu}}{\Psi(1,1)}\right)$

l'inégalité (3.20) est plus tôt de type Hoeffding.
4. Cette inégalité à été utilisé pour la première fois dans **Ferrani et al. 2013** (à paraître).

Preuve : la preuve du théorème est basée sur le résultat 3.1 de Bentkus and Rudzkis (1980,[2]) :
Dans une première étape pour obtenir les estimateurs de la fonction génératrice des cumulants de S_n, nous cherchons les estimateurs de leurs moments centrées.

Lemme 3.3 Supposons que les hypothèses du théorème sont satisfaites. Alors, pour $1 \leq t_1 \leq ... \leq t_k, k \geq 2$ et $i \in 1, ..., k-1$

$$|\bar{E}(X_{t_1} + ... + X_{t_k})| \leq 2^{k-1} K^2 M^{k-2} \rho(t_{i+1} - t_i)$$

preuve du lemme : pour $1 \leq t_1 \leq ... \leq t_k, k \in \mathbb{N}$, nous définissons la notation abrégée $Y_k = X_{t_k}$ et, pour $1 \leq ... \leq t_k < k, Y_j = \overline{X_{t_j} X_{t_{j+1}} \ldots \overline{\overline{X_{t_{k-1}} \overline{X_{t_k}}}}}$.
pour $1 \leq j < i < k$, où

$$\begin{aligned} Y_j &= X_{t_j} Y_{j+1} - X_{t_j} E\left(Y_{j+1}\right) \\ &= \ldots = X_{t_j} \ldots X_{t_i} Y_{i+1} - \sum_{l=j}^{i} X_{t_j} \ldots X_{t_l} E\left(Y_{l+1}\right) \\ &= X_{t_j} \ldots X_{t_i} \overline{Y_{i+1}} - \sum_{l=j}^{i-1} X_{t_j} \ldots X_{t_l} E\left(Y_{l+1}\right) \end{aligned} \tag{3.21}$$

Comme $EX_{t_k} = 0$, pour le cas particulier où $i = k-1$ l'équation (3.21) devient

$$Y_j = X_{t_j} \dots X_{t_k} - \sum_{l=j}^{k-2} X_{t_j} \dots X_{t_l} E\left(Y_{l+1}\right) \tag{3.22}$$

Sans faire usage de l'hypothèse de dépendance faible, on obtient,

$$E|Y_j| \leq 2^{k-j}((k-j+1)!)M^{k-j+1} \tag{3.23}$$

ainsi, en remplaçant (3.22), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
C_{j,i} &= |cov\left(X_{t_j} \dots X_{t_i}, Y_{i+1}\right)| \\
&\leq |cov\left(X_{t_j} \dots X_{t_i}, X_{t_{i+1}} \dots X_{t_k}\right)| + \sum_{l=i+1}^{k-2} |cov\left(X_{t_j} \dots X_{t_i}, X_{t_{i+1}} \dots X_{t_l}\right) E\left(Y_{l+1}\right)| \\
&\leq k^2 M^{k-j-1}\left((k-j+1)!\right)^{\nu} \Psi(i-j+1, k-i)\rho(t_{i+1}-t_i) \\
&+ \sum_{l=i+1}^{k-2} k^2 M^{l-j-1}\left((k-j+1)!\right)^{\nu} \Psi(i-j+1, l-i)\rho(t_{i+1}-t_i) 2^{k-l-1} M^{k-l}\left((k-l)!\right)^{\nu} \\
&\leq k^2 M^{k-j-1}\left((k-j+1)!\right)^{\nu} \\
&\times \left\{\Psi(i-j+1, k-i) + \sum_{l=i+1}^{k-2} \Psi(i-j+1, l-i) 2^{k-l-1}\right\} \rho(t_{i+1}-t_i)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Nous estimons le terme entre accolades, et cela dans les quatre cas (a)-(d)

(a) Si $\Psi(u,v) = 2v$, alors

$$\left\{\Psi(i-j+1, k-i) + \textstyle\sum_{l=i+1}^{k-2} \Psi(i-j+1, l-i) 2^{k-l-1}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= 2(k-i) + 2\sum_{l=i+1}^{k-2} (l-i) 2^{k-l-1} \\
&\leq 2^{k-i-1} \sum_{l'=1}^{\infty} l' 2^{1-l'} = 2^{k-i-1} \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1-p}\right)\Big|_{p=1/2} \\
&= 2^{k-i+1} =: \lambda_{j,i}^{(a)}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

(b) Si $\Psi(u,v) = u + v$, alors

$$
\begin{aligned}
&\left\{\Psi(i-j+1,k-i)+\sum_{l=i+1}^{k-2}\Psi(i-j+1,l-i)2^{k-l-1}\right\} \\
=\ & (k-j+1)+\sum_{l=i+1}^{k-2}(l-j+1)2^{k-l-1} \\
=\ & (k-j+1)\sum_{l=1}^{\infty}2^{-l}+\sum_{l=i+1}^{k-2}(l-j+1)2^{k-l-1} \\
\leq\ & \sum_{l'=k-j+1}^{\infty}l'2^{-l'+(k-j)}+\sum_{l'=i-j+2}^{k-j-1}l'2^{-l'+(k-j)} \\
\leq\ & 2^{k-i-1}\sum_{l'=i-j+2}^{\infty}l'2^{1-l'} \\
=\ & (i-j+3)2^{k-i-1}=:\lambda_{j,i}^{(b)} \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

La dernier équation donne :

$$
\begin{aligned}
\sum_{l'=i-j+2}^{\infty}l'2^{1-l'} &= \frac{d}{dp}\left(\sum_{l'=i-j+2}^{\infty}p^{l'}\right)\Bigg|_{p=1/2} \\
&= \frac{d}{dp}\left(\frac{p^{i-j+2}}{1-P}\right)\Bigg|_{p=1/2} \\
&= (i-j+3)2^{j-i}
\end{aligned}
$$

(c) Si $\Psi(u,v)=uv$, par (3.25) nous avons :

$$
\begin{aligned}
&\left\{\Psi(i-j+1,k-i)+\sum_{l=i+1}^{k-2}\Psi(i-j+1,l-i)2^{k-l-1}\right\} \\
=\ & (i-j+1)+\left((k-i)+\sum_{l=i+1}^{k-2}(l-i)2^{k-l-1}\right) \\
\leq\ & (i-j+1)2^{k-i}=:\lambda_{j,i}^{(c)} \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

(d) Si $\Psi(u,v)=\alpha(u+v)+(1-\alpha)uv$, par (3.26) et (3.27) nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
&\left\{\Psi(i-j+1,k-i)+\textstyle\sum_{l=i+1}^{k-2}\Psi(i-j+1,l-i)2^{k-l-1}\right\} \\
&\qquad \leq \alpha\lambda_{j,i}^{(b)}+(1-\alpha)\lambda_{j,i}^{(c)}=:\lambda_{j,i}^{(d)} \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Donc nous obtenons à partir de (3.21) que :

$$\left|E\left[Y_j\right]\right| \leq C_{j,i} + \sum_{l=j}^{i-1} \left|E\left(X_{t_i}...X_{t_l}\right)\right|.\left|E\left(Y_{l+1}\right)\right|$$

Par conséquent, on obtient de manière récursive que

$$\begin{aligned}
\left|\bar{E}\left(X_{t_1}...X_{t_k}\right)\right| &= \left|E\left[Y_1\right]\right| \\
&\leq C_{1,i} + \sum_{l=1}^{i-1} (l!)^{\nu} M^{l} \left|E\left[Y_{l+1}\right]\right| \\
&\leq ... \leq C_{1,i} + \sum_{1\leq l_1 \leq i-1} (l_1!)^{\nu} M^{l_1} C_{l_1+1,i} + \sum_{1\leq l_1<l_2\leq i-1} (l_2!)^{\nu} M^{l_2} C_{l_2+1,i} \\
+...+ & \sum_{1\leq l_1<...<l_{i-1}\leq i-1} ((i-1)!)^{\nu} M^{i-1} C_{i,i} \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

A ce stade, nous ferons la distinction entre les quatre cas (a)-(d) pour (3.29),(3.24) et (3.25)-(3.28) nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left|\bar{E}\left(X_{t_1}...X_{t_k}\right)\right| \leq K^2 (k!)^{\nu} M^{k-2} \rho(t_{i+1}-t_i) \\
&\times \left\{ \lambda_{1,i}^{(\delta)} + \sum_{1\leq l_1\leq i-1} \lambda_{l_1+1,i}^{(\delta)} + \sum_{1\leq l_1<l_2\leq i-1} \lambda_{l_2+1,i}^{(\delta)} \right. \\
&\qquad \left. + \cdots + \sum_{1\leq l_1<...<l_{i-1}\leq i-1} \lambda_{l_{i-1}+1,i}^{(\delta)} \right\} \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}
\eta = &\left\{ \lambda_{1,i}^{(\delta)} + \sum_{1\leq l_1\leq i-1} \lambda_{l_1+1,i}^{(\delta)} + \sum_{1\leq l_1<l_2\leq i-1} \lambda_{l_2+1,i}^{(\delta)} \right. \\
&\qquad \left. + \cdots + \sum_{1\leq l_1<...<l_{i-1}\leq i-1} \lambda_{l_{i-1}+1,i}^{\delta} \right\} \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Maintenant il s'agira de trouver un estimateur de η , et cela pour les quatre cas (a)-(d)

(a) Si $\Psi(u,v) = 2v$, alors

$$\eta = 2^{k-i+1} \sum_{l=0}^{i-1} \binom{i-1}{l} = 2^k \qquad (3.32)$$

(c) si $\Psi(u,v) = uv$, alors

$$\eta = \left\{ \lambda_{1,i}^{(c)} + \sum_{1 \le l_1 \le i-1} \lambda_{l_1+1,i}^{(c)} + \sum_{1 \le l_1 < l_2 \le i-1} \lambda_{l_2+1,i}^{(c)} + \cdots + \sum_{1 \le l_1 < \ldots < l_{i-1} \le i-1} \lambda_{l_{i-1}+1,i}^{(c)} \right\}$$

$$= 2^{k-i} \left\{ i + \sum_{1 \le l_1 \le i-1} (i-l) + \sum_{1 \le l_1 < l_2 \le i-1} (i-l_2) + \cdots + \sum_{1 \le l_1 < \ldots < l_{i-1} \le i-1} (i-l_{i-1}) \right\}.$$

Comme

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \le l_1 < \ldots < l_m \le i-1} (i-l_m) &= i \binom{i-1}{m} - \sum_{l=m}^{i-1} l \binom{l-1}{m-1} \\
&= (m+1) \binom{i}{m+1} - m \binom{i}{m+1} \\
&= \binom{i}{m+1}
\end{aligned}$$

Il a devient que

$$\eta = 2^{k-i} \left(i + \sum_{m=1}^{i-1} \binom{i}{m+1} \right) = 2^{k-i} \sum_{m=1}^{i-1} \binom{i}{m} < 2^k. \tag{3.33}$$

(b) Si $\Psi(u,v) = u+v$, alors nous obtenons d'une manière analogue à (3.33)

$$\begin{aligned}
\eta &= 2^{k-i-1}((i+2) + \sum_{1 \le l_1 \le i-1} (i-l_1+2) + \sum_{1 \le l_1 < l_2 \le i-1} (i-l_2+2) \\
&+ \cdots + \sum_{1 \le l_1 < \ldots < l_{i-1} \le i-1} (i-l_{i-1}+2)) \\
&< 2^{k-i-1} \left(\sum_{m=1}^{i-1} \binom{i}{m} + 2 \sum_{m=0}^{i-1} \binom{i-1}{m} \right) \\
&< 2^k
\end{aligned} \tag{3.34}$$

(d) Si $\Psi(u,v) = \alpha(u+v) + (1-\alpha)uv$, alors
nous obtenons a partir de : $\lambda_{j,i}^{(d)} = \alpha \lambda_{j,i}^{(c)} + (1-\alpha) \lambda_{j,i}^{(b)}$, (3.34) et (3.33)que

$$\eta < 2^k \tag{3.35}$$

L'assertion du lemme résulte alors du (3.30) et (3.32) - (3.35).

Les équations (3.2) et (3.3) et le résultat du lemme 3.3 peuvent maintenant être utilisés pour calculer les estimateurs des cumulants de S_n.

Lemme 3.4 Supposons que les hypothèses du lemme 3.3 sont satisfaites, alors pour $k \ge 2$

$$|\Gamma_k(S_n)| \le n(k!)^{2+v} 2^k K^2 (K \vee M)^{k-2} \sum_{s=0}^{n-1} (s+1)^{k-2} \rho(s)$$

.

Preuve du lemme 3.4
De (3.2) on obtient que

$$|\Gamma_k(S_n)| \leq k! \sum_{1\leq t_1,\dots,t_k\leq n} |\Gamma_k(X_{t_1},\dots,X_{t_k})| \tag{3.36}$$

Selon (3.3) et le lemme 3.3, nous avons, pour $1 \leq t_1,\dots,t_k \leq n$,que

$$\begin{aligned}
|\Gamma_k(X_{t_1},\dots,X_{t_k})| &\leq \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{\bigcup_{p=1}^{\nu} I_p = I} N_\nu(I_1,\dots,I_j) \prod_{p=1}^{\nu} \left|\bar{E}(X_{I_p})\right| \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{\bigcup_{p=1}^{j} I_p = I} N_\nu(I_1,\dots,I_\nu) \prod_{p=1}^{\nu} 2^{k_p}(k_p!)^\nu K^2 M^{k_p-2} \min_{1<j\leq k_p} \rho(t_{i_j(p)} - t_{i_{j-1}(p)})
\end{aligned}$$

Notons que nous avons, pour une partition connexe,

$$\max_{1<p\leq\nu} \max_{1<j\leq k_p} \left\{t_{i_j(p)} - t_{i_{j-1}(p)}\right\} \geq \max_{1<i\leq k} \{t_i - t_{i-1}\}.$$

Comme $N_\nu(I_1,\dots,I_\nu) = 0$ si $I_1,\dots,I_\nu$ n'est pas connexe, on obtient donc, en même temps que (3.3), que

$$\begin{aligned}
|\Gamma(X_{t_1}+\dots+X_{t_k})| &\leq \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{\bigcup_{p=1}^{\nu} I_p = I} N_\nu(I_1,\dots,I_\nu)(k!)^\nu 2^k K^2 (K\vee M)^{k-2} \min_{1<i\leq k} \rho(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq (k-1)! 2^k (k!)^\nu K^2 (K\vee M)^{k-2} \min_{1<i\leq k} \rho(t_i - t_{i-1})
\end{aligned}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leq t_1,\dots,t_k\leq n} |\Gamma(X_{t_1},\dots,X_{t_k})| \\
&\qquad \leq n(k-1)! 2^k K^2 (k!)^\nu (K\vee M)^{k-2} \sum_{s_2,\dots,s_k=0}^{\infty} \min_{1<i\leq k} \rho(s_i)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Puisque $\sharp\{(s_2,\dots,s_k) : 0 \leq s_i \leq s, \max\{s_2,\dots,s_k\} = s\} \leq (k-1)(s+1)^{k-2}$, nous obtenons que :

$$\sum_{s_2,\dots,s_k=0}^{\infty} \min_{2<i\leq k} \rho(s_i) \leq (k-1) \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^{k-2} \rho(s)$$

On remplace le résultat obtenu dans (3.36) et (3.37) cela nous amène au lemme.

∎

Preuve du théorème : du lemme 3.4, nous obtenons, pour $k \geq 3$, que

$$
\begin{aligned}
|\Gamma_k(S_n)| &\leq n(k!)^{2+\mu+\nu}2^k L_1((K\vee M)L_2)^{k-2} \\
&\leq \left(\frac{k!}{2}\right)^{2+\mu+\nu} 2^{4+\mu+\nu} nK^2 L_1(2(K\vee M)L_2)^{k-2}
\end{aligned}
$$

Ce qui implique que

$$
|\Gamma_k(S_n)| \leq \left(\frac{k!}{2}\right)^{2+\mu+\nu} A_n B_n^{k-2}, \forall k \geq 2
$$

qui est valable $\forall k \geq 2$

Ainsi le théorème est établi en remplaçant les différents variables dans(3.1).

■

Chapitre 4

Simulations

Dans cette partie, il s'agira de simuler la borne la plus utilisée, celle de Bernstein

Une des hypothèses imposées aux variables aléatoires est le fait qu'elles sont centrée ainsi nous appliquons cette inégalité à l'estimateur à noyau centré de la densité, les calcules sont fait pour différents noyaux, tailles d'échantillon et de distributions de probabilité, aussi des ajustement de densités de probabilité par la méthode du noyau sont données a titre introductif, avant de procéder au simulation rappelons qu'est ce que l'estimateur à noyau de la densité.

En effet Considérons un échantillon de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$, indépendantes et identiquement distribuées, de densité de probabilité f.
Soit K (un noyau) : une application réelle intégrable telle que $\int_{\mathbb{R}} K(u)du = 1$.
Soit h_n (la fenêtre) : une suite de nombre réel vérifiant $h_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et $nh_n \geq 1$
L'estimateur de f par la méthode du noyau de *Parzen-Rosenblatt* , noté $\widehat{f_n}(x)$ est défini par :

$$\widehat{f_n}(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)$$

On a
$\int_{\mathbb{R}} K(u)du = 1$ et si $K > 0$ alors $\widehat{f_n}(x)$ est une densité.
Le paramètre h est un paramètre de lissage : plus h_n est grand, plus l'estimateur est régulier

Exemple de noyaux

$$
\begin{aligned}
&\textit{Rosenblatt} \quad K(u) = \frac{1}{2} 1_{[-1,1]}(u) \\
&\textit{Triangulaire} \quad K(u) = (1 - \mid u \mid) 1_{[-1,1]}(u) \\
&\textit{Epanechnikov} \quad K(u) = \frac{3}{4}(1 - u^2) 1_{[-1,1]}(u) \\
&\textit{Biweight} \quad K(u) = \frac{15}{16}(1 - u^2)^2 1_{[-1,1]}(u) \\
&\textit{Gaussien} \quad K(u) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp\left(-u^2/2\right) \\
&\textit{Cosinus} \quad k(u) = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{u\pi}{2}\right) 1_{[-1,1]}(u).
\end{aligned}
$$

La simulation de ces noyaux avec MATLAB R2008a donne :

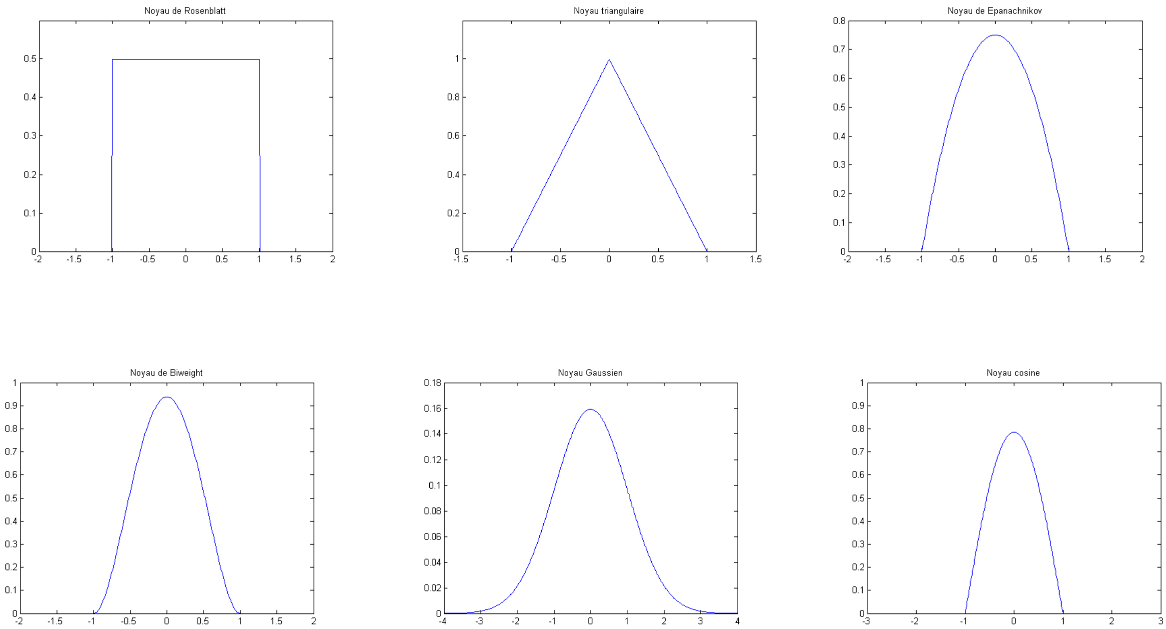


FIGURE 4.1 – Représentation de noyaux

4.1 Ajustement de densités de probabilité par la méthode du noyau

L'estimateur à noyau de la densité dépend de deux paramètres la fenêtre h et le noyau K. Le noyau K établit l'aspect du voisinage au point x et h contrôle la taille de ce voisinage, donc h est le paramètre prédominant pour réaliser de bon ajustement de densités de probabilité. La méthode graphique est l'une de méthode pour choisir ce paramètre, elle consiste a donner des valeurs à h petites valeurs, grandes et intermédiaires, le paramètre h retenu est celui qui donne l'allure la plus acceptable. pour voir cela nous allons réaliser les simulations suivantes :

Générer 1000 réalisations de loi :

– Normale centrée réduite, $X \sim N(0,1)$

– Log-Normale, $X \sim Log - N(0,1)$

Calculer l'estimateur à noyau $\widehat{f_n}(x)$ pour chacune de ces réalisations :
En choisissant K :

– Le Noyau Gaussien

– Le Noyau d'Epanechnikov

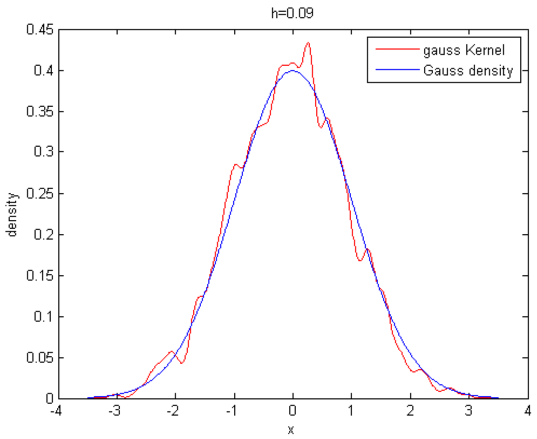
– Le Noyau Triangulaire

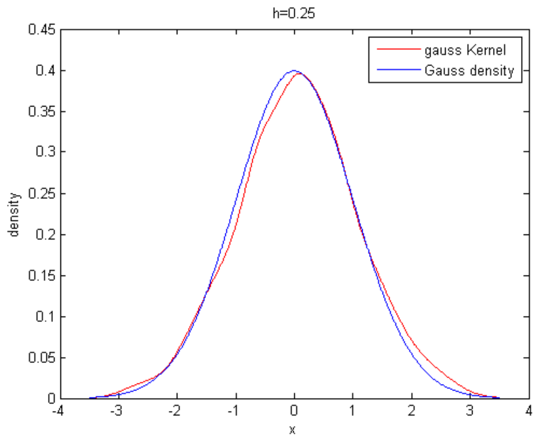
– Le Noyau de Biweight

En prenant pour valeur de la fenêtre :
$h = 0.09$, $h = 0.25$, $h = 0.37$, $h = 0.5$

Comparer les différentes estimations à la vraie densité.

1. X est de loi normale centrée réduite :





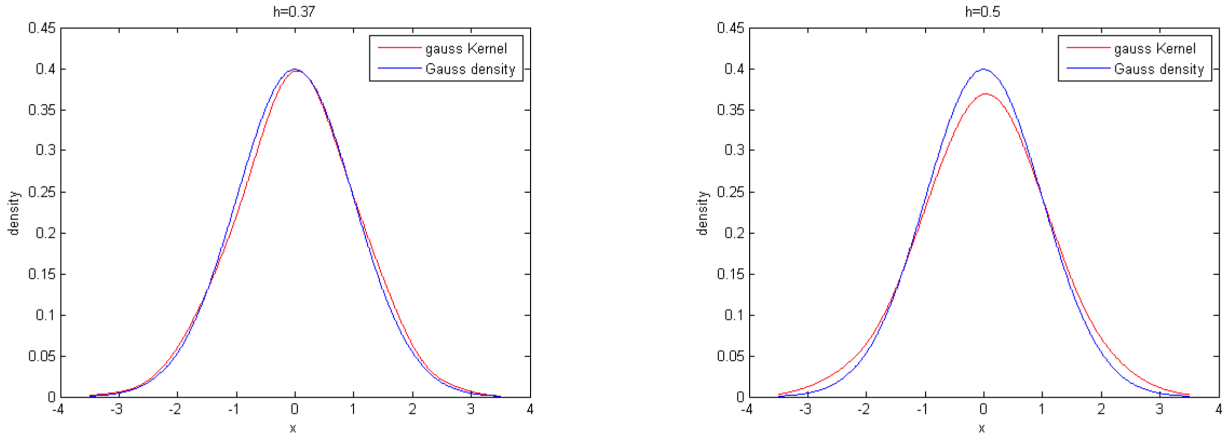


FIGURE 4.2 – Comparaison, en fonction de la langueur h de la fenêtre, de la densité de la loi gaussienne $N(0,1)$, et de la densité estimé par le noyau Gaussien

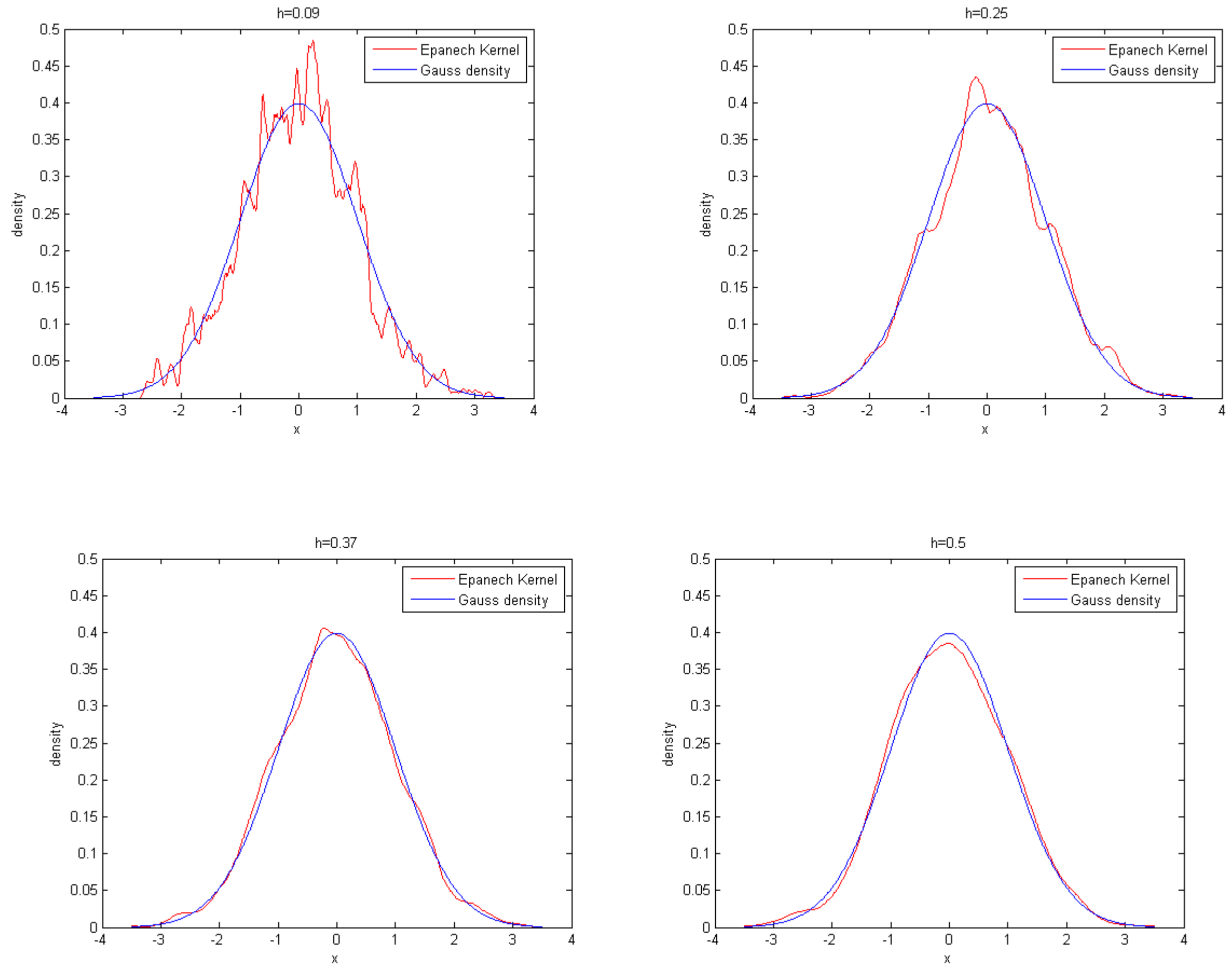


FIGURE 4.3 – Comparaison, en fonction de la langueur h de la fenêtre, de la densité de la loi gaussienne $N(0,1)$, et de la densité estimé par le noyau d'Epanechnicov

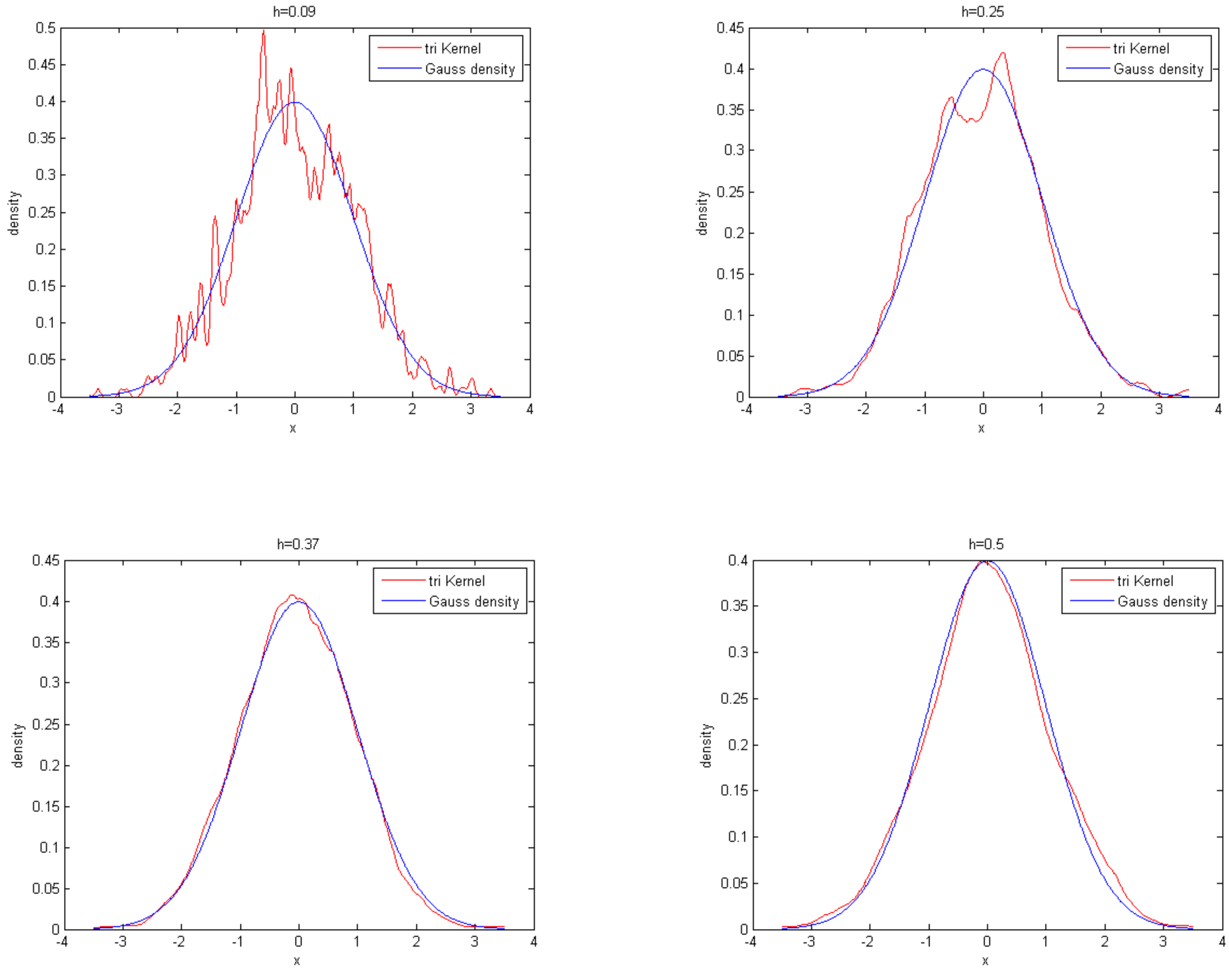
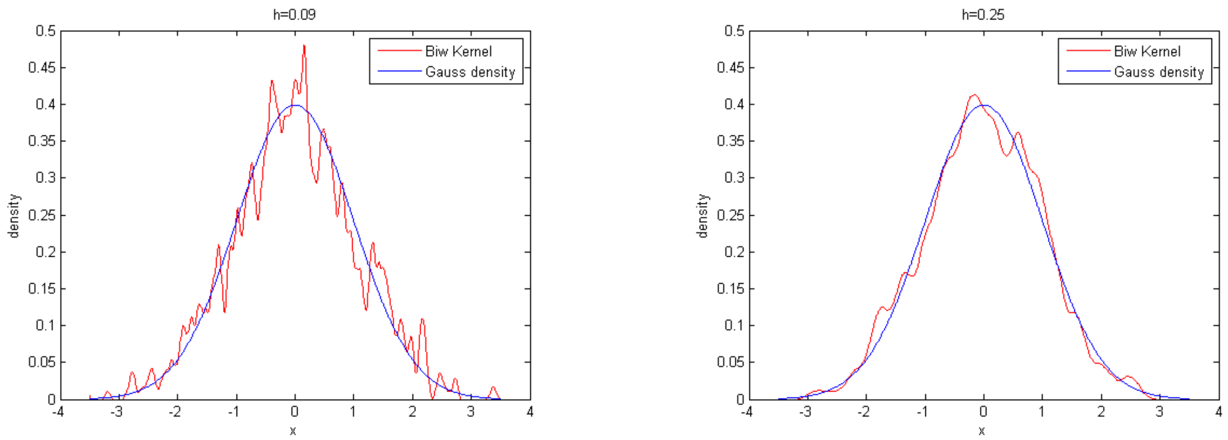


FIGURE 4.4 – Comparaison, en fonction de la langueur h de la fenêtre, de la densité de la loi gaussienne $N(0,1)$, et de la densité estimé par le noyau triangulaire



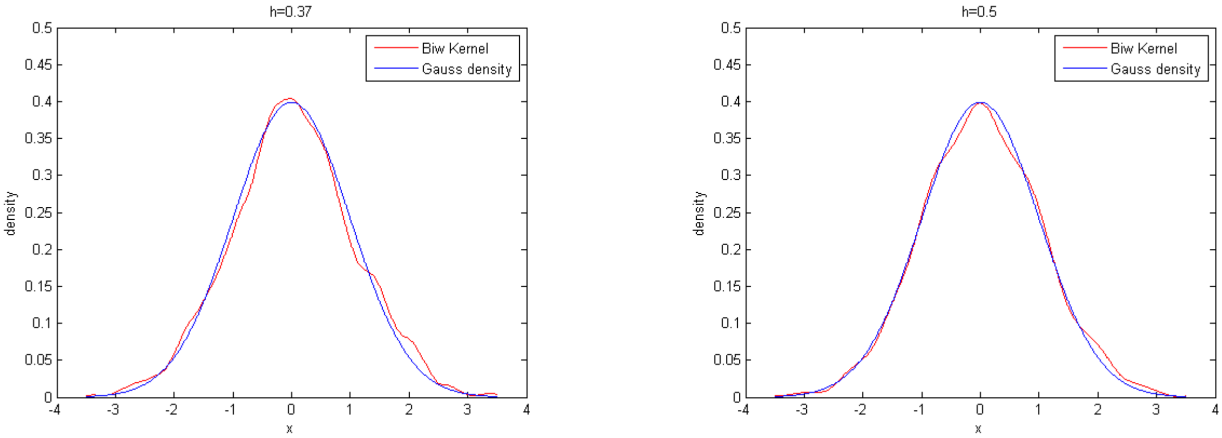


FIGURE 4.5 – Comparaison, en fonction de la langueur h de la fenêtre, de la densité de la loi gaussienne $N(0,1)$, et de la densité estimé par le noyau de Biweight

2. X est de loi Log Normale :

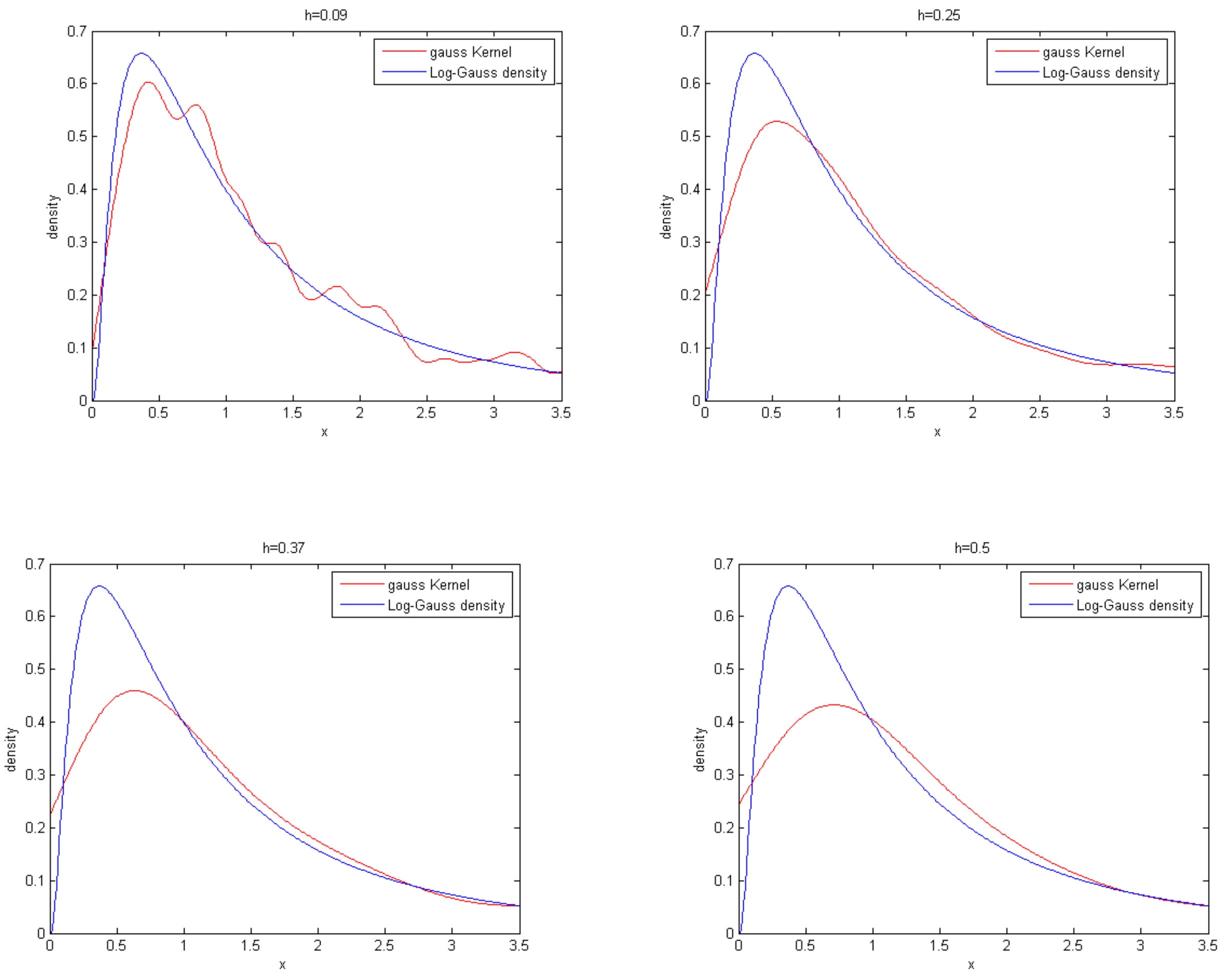


FIGURE 4.6 – Comparaison, en fonction de la langueur h de la fenêtre, de la densité de la loi Log Normale $(0,1)$, et de la densité estimé par le noyau de Biweight

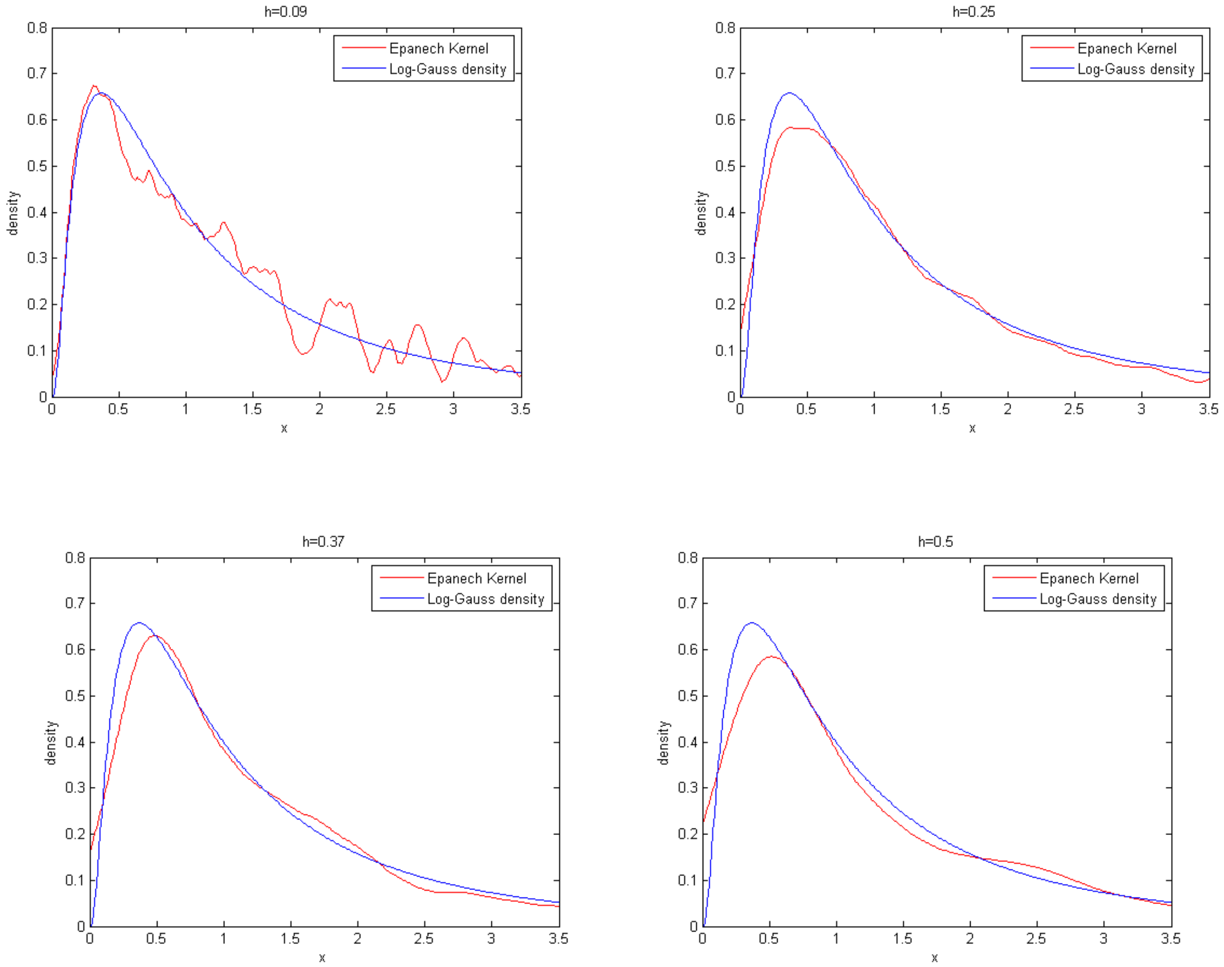
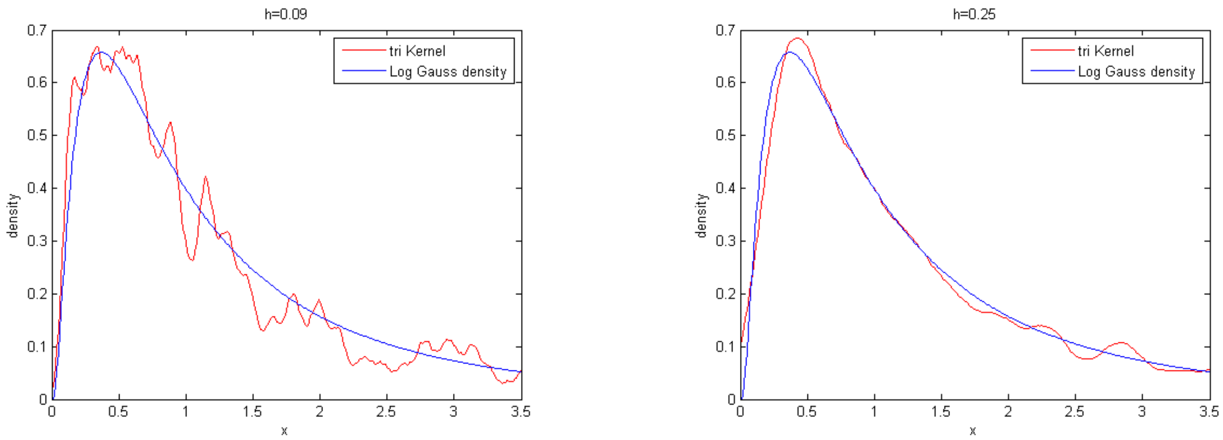


FIGURE 4.7 – Comparaison, en fonction de la langueur h de la fenêtre, de la densité de la loi Log Normale $(0,1)$, et de la densité estimé par le noyau d'Epanechnicov



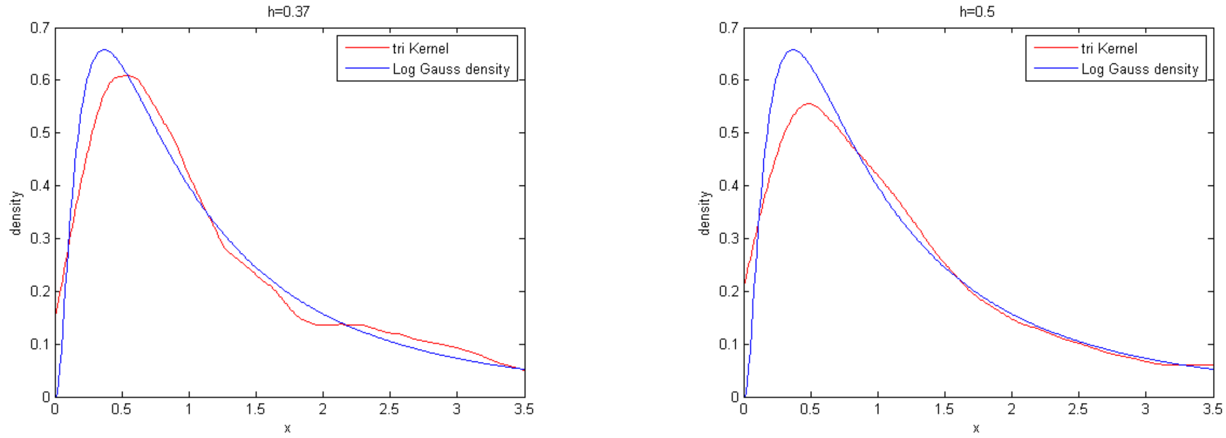


FIGURE 4.8 – Comparaison, en fonction de la langueur h de la fenêtre, de la densité de la loi Log Normale $(0,1)$, et de la densité estimé par le noyau Triangulaire

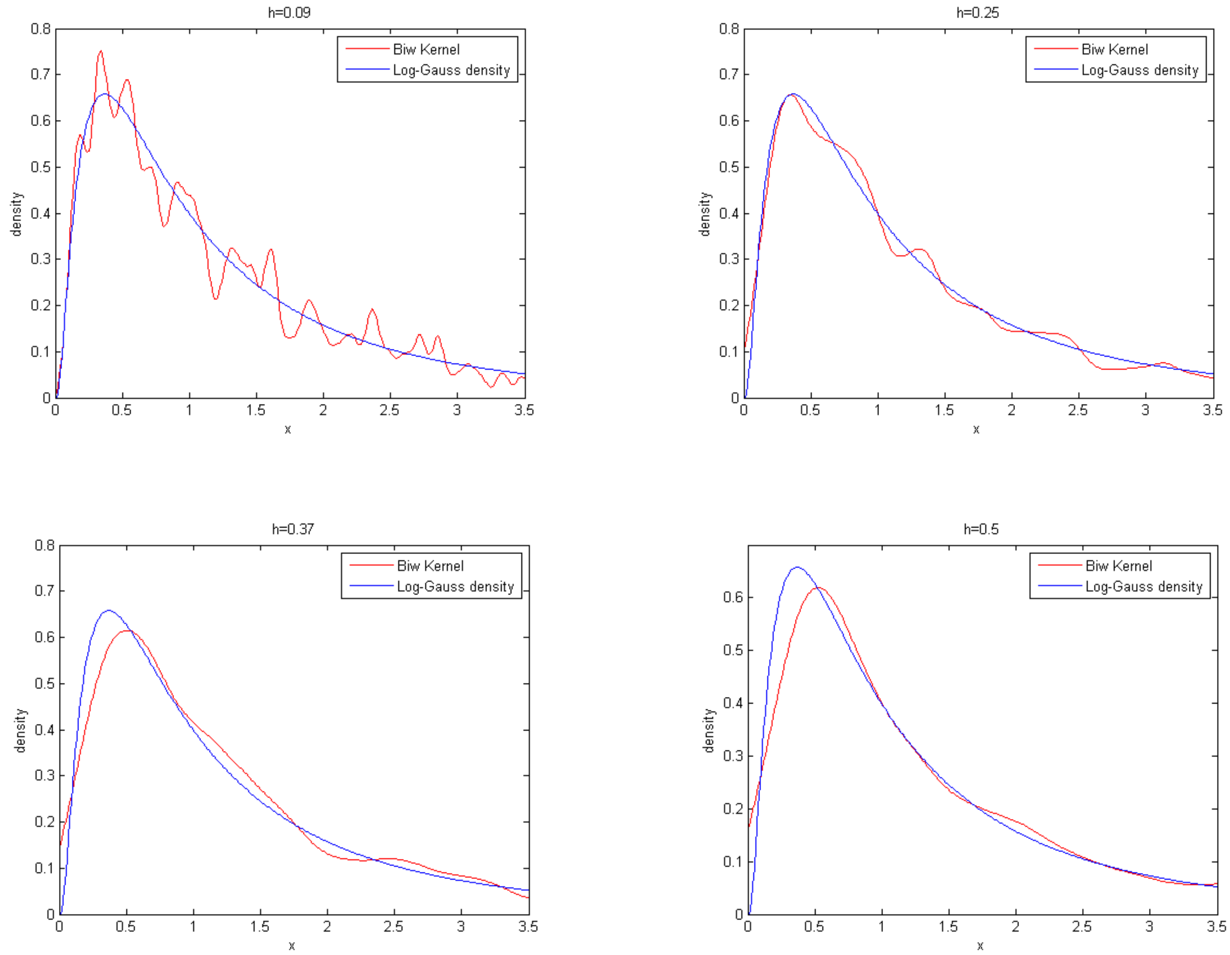


FIGURE 4.9 – Comparaison, en fonction de la langueur h de la fenêtre, de la densité de la loi Log Normale $(0,1)$, et de la densité estimé par le noyau de Biweight

Nous constatons que les densités estimées de loi normale centrée réduite et log normale sont d'autant plus lisses que la fenêtre est grande. En effet lorsque cette dernière est petite $h = 0.09$, dans chaque intervalle il y a peu d'observations permettant au noyau de lisser l'estimation des densités, les courbes sont sous-lissées. l'allure acceptable est réalisée pour $h = 0.37$ et cela quelque soit le choix du noyau.

4.2 Simulation de la borne de Bernstein

Ce basant sur le théorème 1.2 du premier chapitre, qui dit pour rappel :
théorème 1.2 : Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées d'espérance nulle. Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
Supposons $\forall i$, il existe une constant $M > 0$ telle que

$$E|X_i|^q \leq q! M^{q-2} E X_i^2 < +\infty, \quad q = 3, 4, \ldots$$

(condition de Cramer)

Et posons

$$v_n^2 = \sum_{i=1}^{n} E X_i^2.$$

Alors $\forall t > 0$ on a :

$$P(|S_n| \geq t) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2(tM + 2v_n^2)}\right)$$

En général
Afin de représenter cette borne, l' estimateur S_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de se fait nous prenons S_n aléatoire de loi :

- Normale centrée réduite,

Comme les données sont indépendantes, la variance, noté v_n^2, de S_n sera n fois la variance de l'échantillon. la constante M quant à elle aura pour valeur le maximum des valeurs générées en valeur absolue. Pour 1 000 réalisations, nous obtenons l'allure suivante :

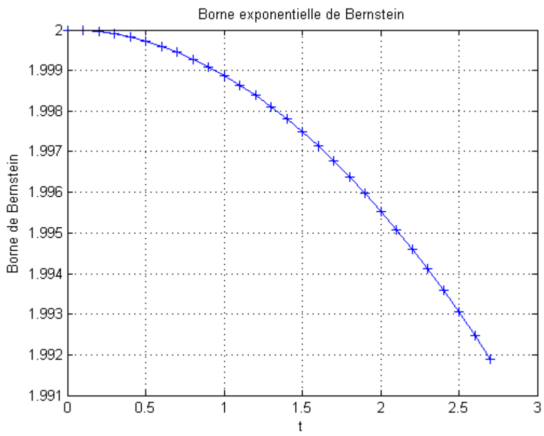


FIGURE 4.10 – Estimation de la borne de bernstein en utilisant la loi N(0,1), $n = 1000$

En particulier : dans un cadre d'estimation fonctionnelle
Dans cette situation, nous allons choisir pour estimateur S_n, l'estimateur à noyau de la densité. ici les donnés sont centrées donc il s'agira d'estimateur à noyau de la densité centré :

$S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$,

avec $Z_i = \frac{1}{nh_n} K\left(\frac{X_i - x}{h_n}\right) - E\left(\frac{1}{nh_n} K\left(\frac{X_i - x}{h_n}\right)\right)$ variable centrée

En choisissant **le noyau** K :

- Le Noyau Gaussien

- Le Noyau d'Epanechnikov

et **La fenêtre** h_n :
nous faisons le choix de la fenêtre de lissage :

$$h_n = c\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{5}}, \quad c = 1$$

Nous cherchons a voir comment réagit cette borne pour differentes tailles d'échantillion. Ainsi pour un t donné, et une constante M donnée simuler cette borne pour des tailles d'échantilion variables $n = 10, 20, 30..., 100$ de lois :

- Normale centrée réduite, $X \sim N(0,1)$

- Log Normale, $X \sim Log\ Normale(0,1)$

- Exponentielle de paramètre 1.5, $X \sim \exp(1.5)$.

Paramètres intervenants dans l'inégalité :

- La constante M
- La variance de S_n
- t

Détermination des paramètres :

La constante M
nous faisons le choix de la constante M : la borne des Z_i

$$|Z_i| = \left|\frac{1}{nh_n} K\left(\frac{X_i - x}{h_n}\right) - E\left(\frac{1}{nh_n} K\left(\frac{X_i - x}{h_n}\right)\right)\right|$$
$$< \frac{2}{nh_n} \|K\|_\infty$$

Calcul de la variance

Comme $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$

Nous avons :

$$Var(S_n) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)$$
$$= nVar(Z) \quad \text{car les} \quad Z_i \quad \text{sont iid}$$
$$= nE(Z^2) \quad \text{car les} \quad Z_i \quad \text{sont centrées}$$
$$= n\int \left[\frac{1}{nh_n}K\left(\frac{y-x}{h_n}\right)\right]^2 f_X(y)dy$$

On pose $\quad u = \dfrac{y-x}{h_n}$

$$Var(S_n) = \frac{1}{nh_n}\int \left(K^2(u)\right) f_X(uh+x)du$$

En utilisant le développement de Taylor de f au voisinage de x

$$f(uh+x) = f(x) + uhf^{'}(x) + o(h)$$

d'où

$$Var(S_n) = \frac{1}{nh_n} f(x) \int [K(u)]^2 du$$

La fenêtre h_n

nous faisons le choix de la fenêtre de lissage :

$$h = c\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{5}}, \quad c = 1$$

t

nous faisons le choix de t variable en fonction de la taille des échantillons (n) :

$$t = c\sqrt{\frac{\log n}{n \cdot h_n}}, \quad c = 1$$

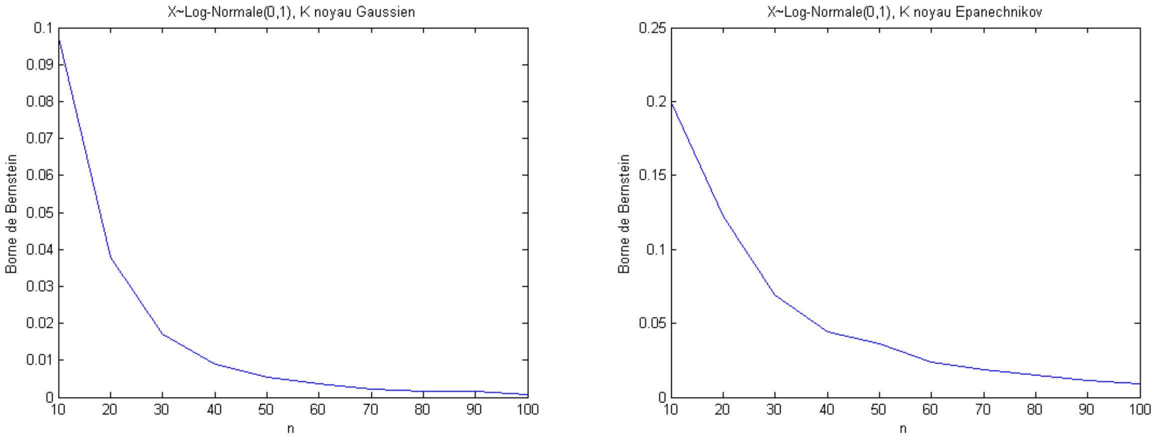


FIGURE 4.11 – Estimation de la borne de bernstein en utilisant la loi Log-N$(0,1)$, avec les noyaux Gaussien et Epanechnicov

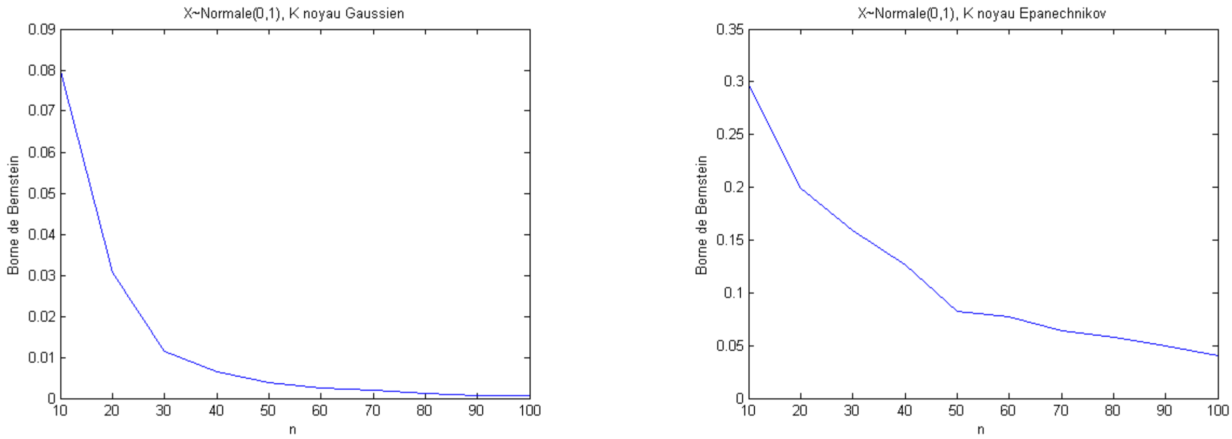
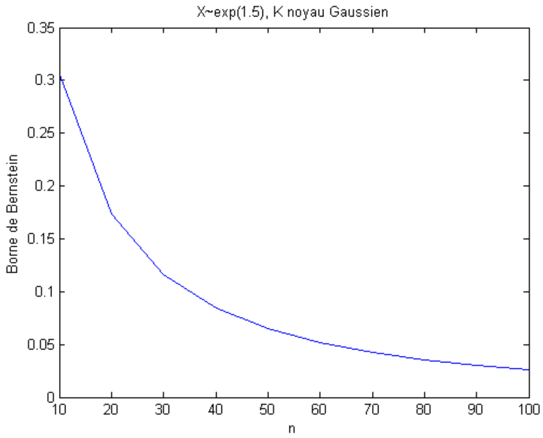


FIGURE 4.12 – Estimation de la borne de bernstein en utilisant la loi N$(0,1)$, avec les noyaux Gaussien et Epanechnicov



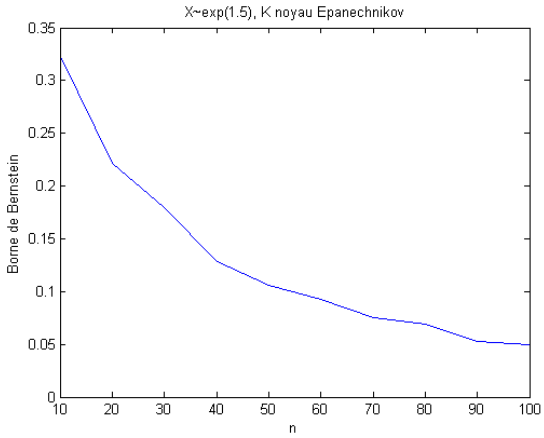


FIGURE 4.13 – Estimation de la borne de bernstein en utilisant la loi $\exp(1.5)$, avec les noyaux Gaussien et Epanechnicov

Le noyau Gaussien assure une meilleur décroissance de la borne de Bernstein que le noyau d'Epanechnikov et cela quelque soit la loi de probabilité des variables considérées. Nous pouvons remarquer que la borne de Bernstein décroît en fonction de (n), plus n est grand plus la borne est petite. Nous donnons plus de détail sur la décroissance de cette borne en prenant de grand taille d'échantillon

n	Loi Log-Normale		loi Normale		Loi Exponentielle	
	Noyau Gaussien	Noyau Epanechnikov	Noyau Gaussien	Noyau Epanechnikov	Noyau Gaussien	Noyau Epanechnikov
30	0.0269	0.2004	0.0271	0.2453	0.0233	0.3179
50	0.0079	0.1042	0.0080	0.1412	0.0063	0.2269
100	0.0011	0.3650	0.0012	0.0601	7.2878 e-4	0.1126
150	2.8774 e-4	0.0184	3.7093 e-4	0.0344	1.7128 e-4	0.0743
200	1.0460 e-4	0.0109	1.3771 e-4	0.0238	5.4927 e-5	0.0395
300	2.4081 e-5	0.0052	3.8311 e-5	0.0136	1.0924 e-5	0.0338
600	1.6133 e-6	0.0013	2.5906 e-6	0.0049	6.3779 e-7	0.0154
1000	2.1558 e-7	5.9161 e-4	4.5522 e-7	0.0014	9.5414 e-8	0.0093
3000	2.4500 e-9	1.1116 e-4	7.1732 e-9	2.8506 e-4	6.7287 e-9	0.0025
5000	3.2800 e-11	2.3771 e-5	1.3132 e-9	2.4956 e-4	3.4457 e-9	0.0010

TABLE 4.1 – Borne de Bernstein pour différentes taille d'échantillon (n), c = 1, $t = c\sqrt{\frac{\log n}{n \cdot h_n}}$

Nous pouvons remarquer que pour des tailles d'échantillons superieur à 1000 la borne de bernstein devient négligeable.

Conclusion

De nos jours l'importance des inégalités exponentielles en probabilités et statistiques n'est plus à faire connaitre vue l'intérêt théorique et pratique qu'elles fournissent.

Dans ce travail, nous avons essayé de retracer l'évolution de certaines inégalités exponentielles en commençant par la source de motivation qui a inspiré de nombreux auteurs à considérer cette forme. Aussi, nous avons rappelé et justifié l'importance de certaines inégalités fréquemment privilégiées par les chercheurs dans le domaine de l'estimation fonctionnelle pour diverses structures de dépendances des variables aléatoires.

Ce travail nous a permit aussi de nous familiariser avec des techniques spécifiques permettant d'établir ses inégalités. Aussi dans un cadre d'estimation fonctionnelle nous avons pu simuler la borne la plus utilisée, celle de Bernstein pour différentes tailles d'échantillon.

Bibliographie

[acte, XXXX] ACTE, A. (XXXX). Titre de l'extrait de l'acte. *In* ACTES, R., éditeur : *Titre du livre des actes*, pages XX–XX. Editeur(s) actes.

[actes, XXXX] ACTES, R., éditeur (XXXX). *Titre actes*.

[article, 200X] ARTICLE, A. (200X). Titre article. *Journal article*, XX:XX–XX.

[article non publié, XXXX] article non PUBLIÉ, A. (XXXX). Titre article non publié. Remarque.

[livre, XXXXa] LIVRE, A. (XXXXa). *Titre du chapitre extrait du livre*, chapitre X, pages XX–XX.

[livre, XXXXb] LIVRE, A. (XXXXb). *Titre Livre*. Editeur, Adresse.

[livret, XXXX] LIVRET, A. (XXXX). Titre du livret.

[manuel, XXXX] MANUEL, A. (XXXX). *Titre du manuel*.

[master, XXXX] MASTER, A. (XXXX). Titre master. Mémoire de D.E.A., Laboratoire.

[rapport technique, XXXX] rapport TECHNIQUE, A. (XXXX). Titre rapport technique. Rapport technique, Institution rapport technique.

[These, XXXX] THESE, A. (XXXX). *Titre These*. Thèse de doctorat, Laboratoire, Adresse.

Bibliographie

[1] Bennett G. (1962). *Probability inequalities for sum of independent random variables.* J. Amer. Statis. Assoc. **57,**33-45.

[2] Bentkus R, Rudzkis R. (1980) *On exponential estimates of the distribution of random variables.* Lithuanian Math. J. **20**,15-30(in Russian). **57,**33-45.

[3] Bernstein S. N (1924). *Sur une modification de l'inégalité de Tchebichev,* Ann. Scl. Inst. Sav.Ukraine, Sect. Math. I.

[4] Bosq D. (1997). *Nonparametric Statistics for Stochastic Processes, Estimation and Prediction.* Springer Verlag.

[5] Bradley R. (1986). *Basic Properties of strong mixing conditions.* in E.Eberlein and M.S. Taqqu editors, Dependence in Probability and Statistics p.165-192. Birkhauser.

[6] Davydov YA. (1968). *Convergence of distributions generated by stationary stochastic Processes.* Theor. Probab. Appl.**13,**691-696.

[7] Dedecker j, Prieur C. (2004) *Coupling for τ-dépendent sequences and applications.* J. Theoret. Probab.**17**,861-885.

[8] Douge L (2007). *Vitesses de convergence dans la loi forte des grands nombres et dans l'estimation de la densité pour des variables aléatoires associées.* C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I, **344**, 515-518.

[9] Doukhan P (1994). *Mixing -Properties and Examples.* Lecture Notes in Statistics. Springer Verlag.

[10] Doukhan P et Louhichi S (1999). *A new weak dependence condition and applications to moment inequalities.* Stochastic Process. Appl, **84**, pp. 313-342.

[11] Doukhan P et Neumann M (2007). *Probability and moment inequalities for sums of weakly dependent random variables, with application.* Stochastic Processes and their Applications **117** 878-903.

[12] Esary J, Proschan F, Walkup D. (1967) *Association of random variables with applications.* Ann. Math. Statist. **38**, 1466-1476.

[13] Fortuin C , Kasteleyn P , Ginibre J(1971) *Correlation inequalities on some partially ordered sets.* Comm. Math. Phys. **22**, 89 ?103.

[14] Fuk D. Kh and Nagaev S. V (1971). *Probability inequalities for sums of independent random variables.* Th. Prob. Appl, **16**, p. 643-660.

[15] Julien Clement (2009). *Algorithmique Probabiliste pour Systèmes Distribués Émergents.* thèse doctorat, Université Paris-Sud XI.

[16] Jeremie M (2005). *Étude de l'Apprentissage Actif, Application à la Conduite d'Expériences.* thèse doctorat, Université Paris XI.

[17] Hainkel B (1989). *Rearrangements of sequences of random variables and exponential inequalities*, Probability and mathematical statistics, vol**19**, Fasc 2 (1989), p. 247-255.

[18] Hoeffding W.(1963). *Probability inequalities for sums of bounded random variables.* J. Amer. Statist. Assoc, **58,**13-30.

[19] Guessoum, Z. and Ould-Said, E. (2010) *Kernel regression uniform rate estimation for censored data under* α*-mixing condition.* Electronic Journal of Statistics Vol **4**, 117-132

[20] Giovanni P Murad S(2011). *Taqqu Wiener Chaos : Moments, Cumulants and Diagrams A survey with computer implementation.* Bocconi, Springer Series.

[21] Kallabis R and Neumann M (2006). *An exponential inequality under weak dependence*, Bernoulli **12**(2),333-350.

[22] Kolmogorov A (1929). *Uber das Gesetz des iterierten Logarithmus*, Math. Ann. (**101**),126-135.

[23] Ledoux (1996). *On Talagrand's deviation inequalities for product measures.* ESAIM probability and statistics, **1**,63-87.

[24] Lehman E(1966). *Some concept of dependance.* Annal of Mathematical Statistics. **37**. 1137-1153.

[25] Merlvède F, Peligrad M, Rio E(2009). *Bernstein inequality and moderate deviations under strong mixing conditions.* Institute of Mathematical Statistics Collections,Vol. **5** 273 ?292.

[26] Nagaev S V. (1965). *Some limit theorems for large deviations.* Theory Prob. Applications, **10** , pp. 214-235.

[27] Pollard, D. (1984). *Convergence of stochastic processes.* Springer-Verlag, Berlin.

[28] Pollard, D (1990). *Empirical Processes : Theory and Applications,* NFS-CBMS Regional Conference Series in Probability and Statistics, Institute of Math. Stat. And Am. Stat. Assoc. Vol. **2**.

[29] Peter E, Eckhard P (1995). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations (Second Edition).* Imperial College Press. ISBN 0-387-54062-8.

[30] Prohorov Y V (1959). *Some remarks on the strong law of large numbers,* Theor. Prob. Appl, **4**, p. 204-208.

[31] Rio E. (2000). *Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants.* in : SMAI, Mathématiques et Applications, vol **31**,*Springer Verlag.*

[32] Roussas G. (1996). *Exponential probability inequalities with some applications.* Statistics Probability and Game Theory, Vol **30.**

[33] Roussas G. Ioannides D (1999). *Exponential inequality for associated random variables.* Statistics end Probability Letters **42** 423-431.

[34] Roussas G. (2000). *Asymptotic normality of the kernel estimate of a probability density function under association.* Statistics end Probability Letters. Vol **50**,1-12.

[35] Rosenblatt M. (1956). *A central limit theorem and a strong mixing condition.* Proc. Nat. Ac. Sc. USA, **42,** 43-47.

[36] Sadki O. (2008). *Estimation de la fonction des quantiles dans le modèle de censure.* Thèse doctorat d'état, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene.

[37] Suquet Ch. (1994). *Introduction à l'association.* Pub. IRMA, Lille Vol. **34**-XIII.

[38] Talagrand. (1996). *New concentration inequalities in product spaces.* Invent. Math. 126 :503-563.

[39] Tatachak A. (2008). *Prévision non paramétrique dans les modèles de troncature via l'estimation du mode.* Thèse doctorat d'état, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene.

[40] Tran L.T. (2008). *The L 1 convergence of kernel density estimates under dependence.* The Canad. J. of Statist. 17,2,197-208.

[41] Saulis, L. and Statulevicius, V.A. (1991). Limit Theorems for Large Deviations. Dordrecht : Kluwer.

[42] Zhengyan L. Zhidong B (2009) *Probability Inequalities*, Science Press Beijing, Springer.

Glossaire

- $a \vee b$: $\max(a,b)$, le maximum de deux réels a et b
- $a \wedge b$: $\min(a,b)$ le minimum de deux réels a et b
- $p.s$: Abréviation de presque surement
- x_+ : Pour x réel, la quantité $\max(0,x)$
- $[x]$: Pour x réel, la partie entière de x
- α^{-1} : La fonction définie par $\alpha^{-1}(u) = \sum_{i \in \mathbf{N}} 1_{u < \alpha_i}$
- Q_X : Pour X variable aléatoire réelle, l'inverse de$t \longrightarrow P(|X| > t)$
- $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$: Plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$
- $\sigma(X)$: Tribu engendrée par la variable aléatoire X
- L^p : Pour $p \geq 1$, l'espace des variables aléatoires réelles X telles que $E(|X|^r) < \infty$
- L^∞ : L'espace des variables aléatoires bornées p.s.
- $\|X_i\|_p$: Pour $p \geq 1$, la norme usuelle sur l'espace L^p
- $\|X_i\|_\infty$: Pour X dans L^∞, la borne supérieur de X
- $\sharp E$: cardinal de E
- $\blacksquare$: fin de preuve