N° d'ordre : 07/2016-D/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

Faculté de Mathématiques

THESE

Présentée pour l'obtention du **grade** de **DOCTEUR EN SCIENCES**

En : **MATHEMATIQUES**

Spécialité : **Analyse : Systèmes dynamiques**

Par : M'HAMED MESSAOUD Khaled

Sujet

Classe d'équations différentielles du premier ordre et de degré quatre à points critiques fixes

Soutenue publiquement, le 30/05/2016 devant le jury composé de :

M. R. BEBBOUCHI	Professeur, à l'USTHB / FMT	Président
M. A. KESSI	Professeur, à l'USTHB / FMT	Directeur de thèse
M. K. BETINA	Professeur, à l'USTHB / FMT	Examinateur
M. B. HEBRI	Professeur, à l'USTHB / FMT	Examinateur
M. A. MAKHLOUF	Professeur, à l'U. ANNABA	Examinateur
M. T. MOUSSAOUI	Professeur, à l'ENS KOUBA	Examinateur

Dédicace

À

Mes

Parents

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur Arezki KESSI qui est l'origine de ce travail. Merci à vous, Monsieur Kessi, pour votre disponibilité et pour les idées tellement fertiles que vous m'avez données. Ce résultat est le prix d'une rigueur professionnelle exemplaire.

Je remercie aussi Monsieur Rachid BEBBOUCHI Professeur à l'USTHB, pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Je remercie vivement Monsieur Kamel BETINA Professeur à l'USTHB, Monsieur Belkhaled HEBRI, Professeur à l'USTHB, Monsieur Amar MAKHLOUF, Professeur à l'université Badji Mokhtar Annaba et Toufik MOUSSAOUI, Professeur à l'ENS de Kouba, qui ont accepté de faire partie du jury.

À Monsieur Abdelouahab MAHMOUDI : Le soutien constant que vous m'avez apporté tout au long de ma thèse m'a profondément touché et motivé d'avantage.

À Monsieur Toufik LAADJ : Vous avez été l'artisan très précieux de tout l'environnement informatique, nous avons été très touchés de votre totale disponibilité.

À Monsieur Ameur ABDELLATIF : Vous nous avez enrichi de vos conseils de votre précieuse expérience en analyse numérique.

À Mademoiselle Malika AMIR : Pour sa générosité intellectuelle et son aide informatique.

Je tiens à remercie aussi Monsieur Rabah-Hacene BELLOUT, Ammar IDRIS BEY, Djamel CHAABANE, Abdelhamid AINOUZ, ainsi toutes les personnes qui, de près ou de loin, m'ont aidé à réaliser ce travail.

Pour finir, mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et en particulier à mes parents et TOUBAL SGHIR Khaled.

Classe d'équations différentielles du premier ordre et de degré quatre à points critiques fixes

Résumé

L'équation différentielle d'ordre un et de degré quatre:

$$(w')^4 + P(z,w)\,(w')^3 + Q(z,w)\,(w')^2 + R(z,w)w' + S(z,w) = 0 \tag{1}$$

où P, Q, R et S sont des fonctions polynômiales en w et à coefficients holomorphes en z, s'introduit tout naturellement dans la théorie des fonctions Fuchsiennes. Elle joue un rôle important dans différentes branches de mathématiques et de physique.

Dans cette thèse, on se propose de donner des conditions suffisantes pour que les solutions de l'équation (1) soient à points singuliers critiques fixes. Ainsi on a trouvé quatre types d'équations de la forme (1) à points singuliers critiques fixes.

Mots-clés : *Équations différentielles complexes, points singuliers critiques, propriété de Painlevé, Théorème de Fuchs.*

Terminologie: Les équations différentielles dont les intégrales sont à points singuliers critiques fixes sont appelées par un abus de langage **équations différentielles à points singuliers critiques fixes** ou **équations différentielles vérifiant la propriété de Painlevé** ou **équations stables suivant une expression de Florent Bureau.**

" Les mathématiques constituent un continent solidement agencé, dont tous les pays sont bien reliés les uns aux autres, l'oeuvre de Paul Painlevé est une île originale et splendide dans l'océan voisin".

H. Poincaré

Portrait de Paul Painlevé en 1929

(1863-1933)

Table des matières

Table des matières **v**

Introduction **1**

1 Préliminaires **5**

1.1 Fonctions Uniformes - Fonctions Multiformes 5

1.2 Uniformisation-Coupures 7

1.2.1 Uniformisation de la "fonction" $\sqrt{z}$ 7

1.2.2 Uniformisation de la "fonction" $\log(z)$ 9

1.3 Théorème des fonctions implicites dans le cas complexe 9

1.3.1 Lemme de Puiseux 10

2 Classification des singularités **11**

2.1 Points singuliers 11

2.2 Classification des points singuliers 12

2.2.1 Points singuliers non-critiques 12

2.2.2 Points singuliers critiques 14

3 Équations différentielles à points singuliers critiques fixes **16**

3.1 Équations différentielles 16

3.2 Équations différentielles dans le domaine complexe 17

3.3 Équations différentielles à points singuliers fixes 18

3.3.1 Points singuliers fixes et mobiles 18
3.4 Importance des équations différentielles à points singuliers critiques fixes . 21
3.5 Exemples classiques d'équations différentielles à points singuliers critiques fixes 22
3.5.1 Équations différentielles linéaires 22
3.5.2 Équation de Ricatti 23
3.6 Classe d'équations différentielles du premier ordre et de degré n à points critiques fixes 24
3.6.1 Théorème de Fuchs 25
3.6.2 Théorème de Painlevé 26
3.7 Classe d'équations différentielles du second ordre à points singuliers critiques fixes 28
3.8 Condition de Painlevé 29
3.8.1 Équations de Painlevé 29

4 Classe d'équations différentielles du premier ordre et de degré quatre à points critiques fixes **32**
4.1 Position du problème 32
4.2 Analyse du problème et changement de variable 33
4.3 Résolution du problème 34

Conclusion **47**

Bibliographie **48**

Introduction

”*Ce sont les singularités de l'intégrale qui compliquent l'étude des équations différentielles et limitent la convergence des développements.*”

Briot et Bouquet

Les points singuliers d'une fonction complexe se répartissent en deux grandes classes: les points critiques et les points non critiques.

Les points singuliers non critiques sont familiers en analyse complexe et sont soit des points singuliers apparents; soit des pôles ou des points singuliers essentiels.

Les points singuliers critiques dans le champ complexe sont des points singuliers tels que l'on ne retrouve pas la même valeur de $f(z)$ après un tour complet ($z = 0$ est un point singulier critique pour$f(z) = \ln z$ et $g(z) = \sqrt{z}$).

Une fois fondée par Cauchy, la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe va fournir le cadre de la plupart des études sur les équations différentielles pendant la seconde moitié du dix-neuvième siècle. L'attention se concentra rapidement sur les points singuliers des solutions des équations différentielles.

Etant donnée une équation différentielle quelconque dans le champ complexe, les points singuliers de son intégrale sont :

Les uns fixes (indépendants des constantes d'intégration).

Les autres mobiles (variables avec les constantes d'intégration).

La remarque précédente peut être justifiée par les deux exemples suivants:

L'équation différentielle : $\dfrac{dy}{dz} = -y^2$ dont l'intégrale générale est $y(z) = \dfrac{1}{z - C}$ admet $z = C$ comme pôle simple non critique mobile.

L'équation différentielle $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{1}{2zy}$ admet pour intégrale générale $y(z) = \sqrt{(\log z) + C}$, elle a deux points singuliers critiques: l'un fixe qui est $z = 0$ et l'autre mobile $z = e^{-C}$.

Contrairement à ce qui se passe pour les équations différentielles linéaires, les points singuliers critiques peuvent varier avec la solution, on dit qu'ils sont alors mobiles. L'intégrale générale ne peut être uniformisée.

Devant cette complexité des cas possibles, les recherches se sont orientés vers la détermination des classes d'équations les plus simples, celles pour lesquelles il n'y a que des points singuliers critiques fixes.

Les équations différentielles à points singuliers critiques fixes ont une importance capitale dans l'utilisation des fonctions d'une variable complexe car si une solution d'une équation différentielle est à points singuliers critiques fixes, on peut l'uniformiser ce qui nécessite une coupure dans le plan complexe pour se ramener à des fonctions au sens propre du terme. On est ainsi amené à élargir la classe des équations différentielles d'intégrale générale uniforme et à étudier celles dont l'intégrale n'a que de points singuliers critiques fixes, autrement dit, vérifiant la propriété de Painlevé.

Les premiers exemples connus d'équations différentielles à points singuliers critiques fixes sont les équations linéaires et les équations de Ricatti.

D'où vient l'équation différentielle (1)?

Considérons l'équation différentielle non linéaire d'ordre un et de degré n :

$$A_0(z,\ w)\,[w'(z)]^n + A_1(z,\ w)\,[w'(z)]^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(z,\ w)\,w'(z) + A_n(z,\ w) = 0, \quad (2)$$

où $A_k\ (k = 0, \ldots n)$ sont des fonctions polynômiales en w et à coefficients holomorphes en z.

Historiquement, en 1884 dans sa thèse le mathématicien allemand Lazarus Fuchs [8] a donné des conditions nécessaires et suffisantes implicites pour que les solutions de l'équation (2) soient à points singuliers critiques fixes, mais il est très difficile de les appliquer.

En 1972, Kolesnikova N.S. et Lukahevich N.A. [16] firent les premiers à traiter explicitement le cas $n = 2$;

$$\left(w^{'}\right)^{2} + P\left(z,w\right)w^{'} + Q\left(z,w\right) = 0, \tag{3}$$

où P et Q sont des fonctions polynômiales en w et à coefficients holomorphes en z.

Ils ont donné des conditions suffisantes explicites pour que les solutions de l'équation différentielle (3) soient à points singuliers critiques fixes.

En 2001, A. Kessi et K. M'hamed-Messaoud [15] ont traité le cas $n = 3$

$$(w')^{3} + P(z,w)\,(w')^{2} + Q(z,w)w' + R(z,w) = 0, \tag{4}$$

où P,Q et R sont des fonctions polynômiales en w et à coefficients holomorphes en z.

Ils ont donné des conditions suffisantes explicites sur les coefficients pour que les solutions de l'équation (4) soient à points singuliers critiques fixes.

De nombreux problèmes de Géométrie conduisant également à notre équation différentielle, par exemple, la recherche des lignes de courbure d'une surface.

On se propose donc de donner dans cette thèse des conditions suffisantes pour que les solutions de l'équation différentielle d'ordre un et de degré quatre, voir [17] :

$$(w')^{4} + P(z,w)\,(w')^{3} + Q(z,w)\,(w')^{2} + R(z,w)w' + S(z,w) = 0,$$

où P,Q, R et S sont des fonctions polynômiales en w et à coefficients holomorphes en z, soient à points singuliers critiques fixes.

Plan de la présente thèse :

Le chapitre 1 est consacré aux fonctions uniformes et multiformes dont la connaissance est indispensable pour se promener dans la théorie sans danger et surtout avec profit.

Le chapitre 2 reprend toutes les notions de l'étude des singularités isolées, pour lesquelles on a une classification simple.

Le chapitre 3 est consacré aux équations différentielles à points singuliers critiques fixes. On donne quelques exemples classiques d'équations différentielles à points singuliers critiques fixes, le théorème de Fuchs-Painlevé qui établit des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une classe d'équations différentielles du premier ordre et de degré n soit à points singuliers critiques fixes et on termine par les équations différentielles d'ordre deux à points singuliers critiques fixes.

Le chapitre 4 est consacré à la résolution du problème: "Classe d'équations différentielles du premier ordre et de degré quatre à points singuliers critiques fixes".

En **conclusion** nous explicitons quelques équations d'ordre un et de degré quatre à points singuliers critiques fixes et nous donnons quelques perspectives qui peuvent être développées à court terme.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Fonctions Uniformes - Fonctions Multiformes

Définition 1.1. *Si une valeur de w correspond à chaque valeur de z, nous dirons que $w = f(z)$ est une fonction* ***uniforme*** *de z ou que $f(z)$ est uniforme. Si plusieurs valeurs de w correspondent à chaque valeur de z, nous dirons que $w = f(z)$ est une fonction multiforme.*

Notons enfin que les deux mots "Fonction multiforme" constituent en fait un mot composé et que Multiforme n'est pas un adjectif que l'on peut accoler au substantif Fonction (à la différence de continu, holomorphe,...) car une "Fonction Multiforme" n'est pas à proprement parler une fonction, c'est en fait une correspondance.

Exemples

(a) **"Fonction"** $\sqrt{z}$

On appelle racine carrée d'un nombre complexe $z = \rho \exp(i\ \theta)$ tout nombre $Z = \sqrt{z}$, tel que $z = Z^2$, l'argument θ étant défini à $2k\pi$ prés peut s'écrire $\theta_0 + 2k\pi$ ce qui conduit à dire qu'il existe deux valeurs de $\sqrt{z}$ à savoir ;

$$Z_1 = \rho^{\frac{1}{2}} \exp\left(i\ \frac{\theta_0}{2}\right) \quad \text{et} \quad Z_2 = \rho^{\frac{1}{2}} \exp\left(i\ \left(\frac{\theta_0}{2} + \pi\right)\right) = -Z_1$$

car $\exp(i\ \pi) = -1$.

Si donc nous considérons z comme une variable, en toute rigueur nous n'avons pas le droit d'appeler fonction, la correspondance qui à tout z fait correspondre $Z = \sqrt{z}$.

En effet, une fonction fait correspondre à tout z un nombre Z unique (On dit que la fonction est uniforme). Or ici, z ayant deux racines carrées bien distinctes, c'est pourquoi il faudrait écrire ("fonction" $\sqrt{z}$), le terme fonction étant impropre.

Dans un cas comme celui-ci ($\sqrt{z}$ pouvant prendre deux valeurs bien distinctes), on dit que"fonction" $\sqrt{z}$ a deux déterminations ou branches. On dit encore pour bien insister sur l'utilisation impropre du mot fonction, que $\sqrt{z}$ est une "fonction" multiforme et en général on écrit fonction multiforme (sans " ").

(b) **"Fonction" logarithme.**

On sait que si x est réel positif , il n'existe qu'un seul réel X tel que $e^X = x$. On dit que X est le logarithme népérien de x et l'on écrit $X = \log(x)$. La généralisation du logarithme au cas des nombres complexes nous amène donc naturellement à considérer le problème suivant: Etant donné un complexe z, existe-t-il un complexe Z (ou plusieurs) solution de $e^{\,Z} = z$. Pour résoudre cette équation, écrivons z sous la forme $z = \rho e^{i\,\theta} (\rho > 0,\ \theta$ défini à $2k\ \pi$ près) et posons $Z = X + iY$.

L'équation $e^{\,Z} = z$ impose: $e^X = \rho$,

c'est à dire:

$$X = \log(\rho) = \log(|\ z\ |) \ \text{ et } Y = \theta + 2n\pi (n \in \mathbb{Z}).$$

Il y a donc une infinité de solutions car tous les nombres Z de la forme:

$$Z = \log(\rho) + i(\theta + 2n\pi)$$

conviennent, puisque θ est lui-même défini modulo 2π. Contrairement à ce que l'on fait pour les réels positifs, nous ne pouvons pas dire :

On appelle logarithme de z le nombre Z tel que $e^Z = z$, puisque cette égalité ne permet pas d'associer un seul complexe Z à tout complexe z (elle ne définit pas une application de

$\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$). Tout $z \neq 0$, a donc une infinité de logarithmes complexes, on dit encore que la "fonction" logarithme a plusieurs déterminations, ou que c'est une fonction multiforme.

La définition du logarithme complexe comportait des difficultés et des contradictions qui ont donné lieu à une mémorable controverse épistolaire entre Leibniz et J. Bernoulli dans les années (1712-1713). Leonhard Euler, dans un mémoire de 1749, montre que toutes les contradictions de la définition du logarithme viennent du fait qu'il faut attribuer une infinité de valeurs à l'expression $\log z$ si on la définit comme solution de $\exp Z = z$ [7].

1.2 Uniformisation-Coupures

L'utilisation des fonctions multiformes est en général difficile. C'est pourquoi en cherche à les uniformiser afin de se ramener à des fonctions.

1.2.1 Uniformisation de la "fonction" $\sqrt{z}$

Nous allons voir maintenant comment rendre la "fonction" $\sqrt{z}$ uniforme. Le problème vient de ce que, lorsque z décrit un circuit entourant l'origine (point de branchement), $\sqrt{z}$ change de détermination. Si par contre z décrit un circuit n'entourant pas l'origine, la détermination de $\sqrt{z}$ choisie reprend la même valeur lorsque z revient au point de départ.

Si donc nous empêchons z de décrire un circuit entourant l'origine, la détermination de $\sqrt{z}$ choisie rend $\sqrt{z}$ uniforme, ceci sera réalisé au moyen d'une coupure. Si nous interdisons à z de franchir une demi droite issue du point de branchement O, son argument ne pourra varier lorsque z, après avoir décrit un circuit, reviendra en son point de départ. On dit qu'on a effectué une coupure. Nous avons parlé d'une demi droite issue de O , mais une coupure peut être obtenue par toute autre courbe.

Surface de Riemann : Dans certains cas, on souhaite ne pas faire une distinction entre les deux déterminations de $\sqrt{z}$. On remplace alors le plan muni de sa coupure par un ensemble de deux plans infiniment voisins reliés, comme l'indique la figure 1, le long de la coupure. L'Impossibilité de franchir la coupure est remplacée par l'obligation, si on souhaite la franchir, de passer par le plan supérieur au plan inférieur ou inversement.

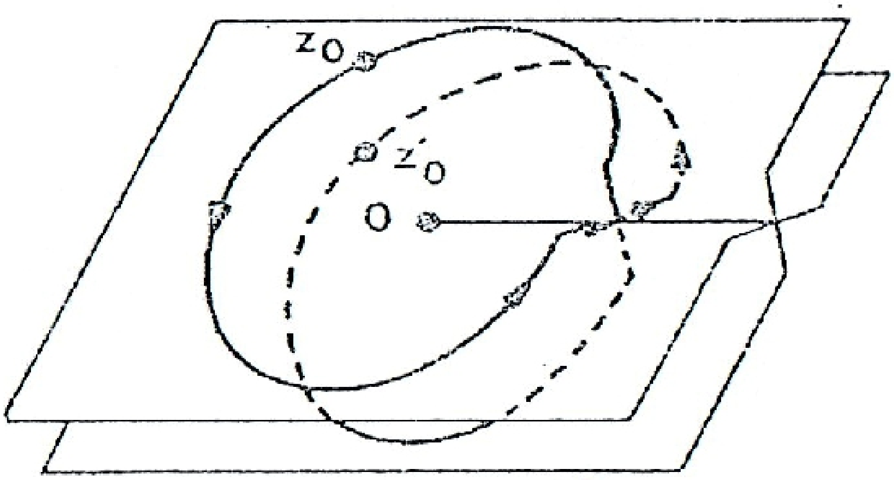

Figure 1 : Surface de Riemann

On admet alors que z ne revient au point de départ z_0 qu'après avoir entouré deux fois l'origine. Son argument ayant augmenté de 4π, $\sqrt{z}$ reprend la même valeur, l'autre détermination de z est alors attribuée à un point z_0 homologue de z sur le plan ne contenant pas z_0.

La surface que nous avons déterminée est appelée surface de Riemann à deux feuillets (si nous avions étudié $\sqrt[3]{z}$ qui a trois déterminations, nous aurions une surface de Riemann à trois feuilles c'est-à-dire composée de trois plans infiniment voisins).

La fonction $\sqrt{z}$ est multiforme dans le plan complexe et uniforme sur la surface de Riemann que nous venons de lui attribuer et on a ainsi éliminé l'indétermination.

Notons qu'en général nous écrirons (nous l'avons déjà fait) la fonction $\sqrt{z}$ en supposant qu'il s'agit d'une détermination choisie au départ et rendue uniforme au moyen d'une coupure judicieuse.

Dans le plan coupé,$\sqrt{z}$ est holomorphe et on a:

$$\frac{d}{dz}\left(\sqrt{z}\right)=\frac{1}{2\sqrt{z}},\qquad z\neq 0$$

1.2.2 Uniformisation de la "fonction" $\log(z)$

La “fonction” $\log(z)$ est multiforme et a une infinité de déterminations.

Il existe des domaines Ω du plan complexe à l'intérieur desquels on peut définir une vraie fonction holomorphe notée $\log(z)$ et méritant l'appellation de fonction logarithme en ce sens qu'elle vérifie $e^{\log(z)}=z$.

Pratiquement on adopte généralement comme domaine Ω de définition du logarithme le plan complexe privé d'une ligne partant de 0 et allant à l'infini .Une telle ligne s'appelle une coupure(branch-cut,en anglais) et 0 point commun à toutes les coupures possibles, est dit point de branchement (branch-point) .

Le logarithme est uniquement défini dans le plan coupé. Quel que soit la coupure choisie, “la fonction” $\log(z)$ est holomorphe dans le plan coupé et on a :

$$\frac{d}{dz}\left(\log\left(z\right)\right)=\frac{1}{z},\quad z\neq 0.$$

1.3 Théorème des fonctions implicites dans le cas complexe

Théorème 1.1. *Soit*

$$f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$$
$$(z,\omega)\mapsto f\left(z,\omega\right)$$

une fonction holomorphe au voisinage d'un point (z_0,ω_0) *telle que :*

i) $f\left(z_0,\omega_0\right)=0,$

ii) $\dfrac{\partial f}{\partial \omega}\left(z_0,\omega_0\right)\neq 0.$

Alors, il existe dans $\mathbb{C}$ *un voisinage* U *de* z_0 *et une application* $g : U \to \mathbb{C}$ *analytique telle que :*

1) $g(z_0) = \omega_0$,

2) $(z, \omega) \in \mathcal{V}(z_0, \omega_0)$ *et* $f(z, \omega) = 0 \Leftrightarrow z \in U$ *et* $\omega = g(z)$.

Pour la démonstration de ce théorème (Voir [11]).

1.3.1 Lemme de Puiseux

Lemme 1.1. (Lemme de Puisseux) *Soit*

$$z = a_k \omega^k + a_{k+1} \omega^{k+1} + ..., \ (a_k \neq 0)$$

convergente pour $|\omega| < \delta$.

Alors il existe $\lambda > 0$ *tel que*

$$\omega = b_1 z^{\frac{1}{k}} + b_2 z^{\frac{2}{k}} + ...$$

convergente pour $\left| z^{\frac{1}{k}} \right| < \lambda$.

Pour la démonstration de ce lemme (Voir [11]).

Chapitre 2

Classification des singularités

" *Les fonctions, comme les êtres vivants sont caractérisées par leurs singularités.*"

Paul Montel

Ce sont les singularités qui influent sur le développement des fonctions et en arrêtent la convergence.

2.1 Points singuliers

Définition 2.1. *Soit* D *un domaine de* $\mathbb{C}$ *et* $f(z)$ *une fonction holomorphe dans* D *sauf peut être en un certain nombre de points. Un point* $z_0 \in \mathbb{C}$ *est dit point singulier pour* $f(z)$ *si* $f(z)$ *n'est pas holomorphe en* z_0*. On dit que* z_0 *est un point singulier isolé, si on peut trouver un nombre* r *positif non nul tel que* z_0 *soit le seul point singulier de* $f(z)$ *à l'intérieur du disque de centre* z_0 *et de rayon* r*.*

Exemple : $z = 0$ est un point singulier isolé pour f définie par :

$$f(z) = \begin{cases} z & \text{si} \quad z \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad z = 0, \end{cases}$$

il est de même si $f(z) = \dfrac{1}{z}$ pour $z \neq 0$.

2.2 Classification des points singuliers

Les points singuliers se répartissent en deux grandes classes; **les points critiques** et **les points non critiques**.

2.2.1 Points singuliers non-critiques

Soit z_0 un point singulier **isolé** de f. Considérons son développement de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n \, (z - z_0)^n$$

dans le disque épointé $0 < |z - z_0| < R$, $(R > 0)$.

On voit qu'il y a trois cas possibles:

1$^{\text{er}}$ **cas**- Tous les coefficients a_n d'indices négatifs sont nuls

Si on définit f au point z_0 par $f(z_0) = a_0$, le prolongement de f devient holomorphe dans le disque $|z - z_0| < R.$, z_0 est appelé point singulier **non-critique apparent**. Pour qu'on soit dans ce cas, il faut et il suffit que f soit bornée au voisinage de z_0.

2$^{\text{ème}}$ **cas**- Les coefficients a_n d'indices négatifs sont tous nuls sauf un nombre fini.

On peut alors écrire pour tout $z \in \Delta - \{z_0\}$:

$$f(z) = \frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \, (z - z_0)^n$$

où p désigne le plus grand entier tel que $a_{-n} \neq 0$. On dit alors que f présente au point z_0 un **pôle** d'ordre p, si $p = 1$ le pôle est dit simple.

3$^{\text{ème}}$ **cas-** Il existe une infinité d'entiers négatifs tels que $a_n \neq 0$.

On dit alors que z_0 est un point singulier non critique **essentiel** de f.

Exemples

a) Le point $z = 0$ est un pôle double pour $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$; on obtient la série de Laurent à partir de la série de Taylor de $\cos z$: $\dfrac{\cos z}{z^2} = \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{z^2}{4!} - \dfrac{z^4}{6!} + ...$

b) Le point $z = 0$ est un point singulier non critique apparent pour $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, car d'après le développement en série de Taylor de $\sin z$: $\dfrac{\sin z}{z} = 1 - \dfrac{z^2}{3!} + \dfrac{z^4}{5!} - ...$

c) Le point $z = 0$ est un point singulier non critique essentiel pour $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$,car pour $z \neq 0$, $\exp(\frac{1}{z}) = 1 + \frac{1}{z} + ... + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n$.

Remarque 2.1. *On peut reconnaître la nature d'une singularité non critique isolée sans utiliser la série de Laurent. On utilise pour cela les résultats suivants qui mériteraient d'être établis avec soin.*

• Si la fonction $f(z)$ n'est pas définie en $z = a$, mais la limite de $f(z)$ lorsque z tend vers a est est un nombre fini, alors $z = a$ est appelé singularité non critique apparente**.** Dans ce cas la fonction $f(z)$ est prolongeable en $z = a$ et peut être développée en série de Taylor au voisinage de ce point.

• Si la fonction $f(z)$ n'est pas définie en $z = a$, mais $\lim\limits_{z \longrightarrow a} |f(z)| = +\infty$, alors a est un pôle, si cette limite n'existe pas alors a est une singularité non critique essentielle.

L'étude des points singuliers non critiques essentiels conduit à quelques résultats inattendus. On démontre notamment (théorème de Picard) que si a est un tel point pour f, alors dans tout disque pointé de centre a, la fonction f prend toutes les valeurs complexes, sauf peut-être une ! Par exemple, $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$ prend toutes les valeurs sauf zéro dans tout disque pointé de centre 0.

Il faut aussi retenir l'existence de points singuliers non critiques non isolés. C'est le cas de $z = 0$ pour la fonction $f(z) = \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)}$ dont le dénominateur s'annule pour tous les points de l'axe réel d'abscisse $x_n = \dfrac{1}{n\ \pi}$ (n entier).

Quand n tend vers l'infini, ces points s'accumulent vers $z = 0$ qui est lui-même un point singulier non critique.

Remarque 2.2. *Notons encore que tous les points singuliers critiques ne font pas partie nécessairement des singularités discutées ci-dessus car nous nous étions limités aux fonctions uniformes.*

2.2.2 Points singuliers critiques

Définitions et exemples

Définition 2.2. *Un point isolé $z = z_0$ est appelé point singulier critique de la fonction multiforme f, si l'on ne retrouve pas la même valeur de $f(z)$ après un tour complet de z autour de z_0.*

A titre d'exemple nous considérons les "fonctions" multiformes $\log z$ et $\sqrt{z}$. Si l'on fait décrire à z un contour fermé autour de l'origine à partir, par exemple, du point $z_0 = 1$, on constate lorsque l'on revient à $z_0 = 1$, un changement de signe pour la fonction multiforme $\sqrt{z}$ et une différence de $2\pi i$ pour la fonction multiforme $\log z$.

Le point $z = 0$ est donc un point critique des deux "fonctions" considérées. Les points singuliers critiques sont aussi appelés points de *branchement* ou points de *ramification* et se répartissent en deux catégories: les algébriques et les non algébriques.

a) Points singuliers critiques algébriques

Définition 2.3. *Un point isolé $z = z_0$ est appelé point singulier critique algébrique de la fonction multiforme $w = f(z)$ si w est solution de l'équation algébrique:*

$$P_0(z)\, w^n + P_1(z)\, w^{n-1} + \cdots + P_{n-1}(z)\, w + P_n(z) = 0, \tag{2.2.1}$$

où $P_0 \neq 0,\ P_1, \ldots, P_n$ sont des polynômes en z et n est un entier positif ($w = f(z)$ est appelée une fonction algébrique de z).

Exemple

$f(z) = \sqrt{z}$ est une "fonction" multiforme dont l'origine est un point critique algébrique.

En effet, $w = \sqrt{z}$ est solution de l'équation $w^2 - z = 0$.

b) Points singuliers critiques non algébriques (transcendants ou essentiels)

Définition 2.4. *Un point $z = z_0$ est appelé point singulier critique non algébrique de la fonction multiforme $w = f(z)$ si w ne peut être considérée comme solution d'une équation algébrique du type* (2.2.1) *, ($w = f(z)$ est alors appelée fonction transcendante).*

Les fonctions trigonométriques et hyperboliques ainsi que leurs inverses, la fonction logarithme, la fonction exponentielle sont des exemples de fonctions transcendantes. Il y a deux types de points singuliers critiques non algébriques :

i - Point transcendant, si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe (qu'elle soit finie ou infinie).

ii - Point essentiel, si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ n'existe pas.

Exemples

i- $z = 0$ est un point critique transcendant pour $f(z) = \log(z)$.

ii- $z = 1$ est un point critique essentiel pour $f(z) = \sin(\log(z-1))$.

Chapitre 3

Équations différentielles à points singuliers critiques fixes

‹‹Mais l'importance de cette classe d'équations (à points singuliers critiques fixes) apparaît mieux encore si on observe que la plupart des transcendantes auxiliaires, dont le rôle est si considérable (fonction exponentielle, elliptique, fuchsienne.........etc); intègrent des équations différentielles algébriques très simples. Les équations différentielles apparaissent donc comme la source des transcendantes uniformes les plus remarquables, susceptible notamment de contribuer à l'intégration d'autres équations différentielles dont l'intégrale n'est plus uniforme.››

Painlevé

3.1 Équations différentielles

On connaît assez précisément la date de naissance des équations différentielles, elles apparaissent pour la première fois en 1687, exprimées dans un langage géométrique dans l'ouvrage de Sir Isaac Newton: philosophine naturalis mathematica. Les équations différentielles s'étaient présentées dès le début du calcul infinitésimal, soit à propos de la détermination de courbes vérifiant certaines propriétés différentielles, soit comme traductions mathématiques de problèmes de mécanique, d'astronomie ou de physique.

Les équations différentielles sont le principal instrument utilisé par les scientifiques pour formuler des modèles mathématiques de situations réelles. Elles jouent donc un rôle tout à fait central dans l'utilisation de la puissance des mathématiques pour décrire le monde qui nous entoure.

Le grand problème qui s'était posé depuis le début est l'intégration des équations différentielles; les premiers efforts avaient pour but de représenter l'intégrale à l'aide des fonctions élémentaires connues. Quand on eut compris que cela était en général impossible, il fallut bien étudier les propriétés des courbes intégrales sur l'équation différentielle elle même. C'est ici qu'intervient une notion entièrement nouvelle pour l'époque, celle de notion de fonction analytique, dont l'introduction constitue un très grand progrès des mathématiques, éclairant d'une lumière nouvelle et inattendue la notion de fonction. Cauchy et Weierstrass, chacun de son côté, non seulement créèrent cette théorie, mais l'appliquèrent aux équations différentielles. Painlevé aborde l'étude globale des solutions dans le champ complexe, se rapprochant ainsi de Poincaré, qui, le premier, avait fait une étude globale des courbes intégrales des équations différentielles dans le champ réel.

3.2 Équations différentielles dans le domaine complexe

Le début du XIX siècle est caractérisé tout d'abord par un retour à la rigueur, notamment dans l'emploi des séries, où sous l'influence de Gauss surtout d'Abel et de Cauchy, il est assez rapidement admis qu'une série n'a de sens que lorsque on a prouvé sa convergence.

Après la création par Cauchy de la théorie des fonctions holomorphes, les analystes du XIX^e siècle entreprirent l'étude des points singuliers fixes dans le domaine complexe des solutions des équations différentielles analytiques.

Les premières études de ce genre commencent avec Briot et Bouquet vers 1850. En 1856, Briot et Bouquet [1], déterminaient toutes les équations différentielles du premier ordre, indépendante de z :

$$f\left(\frac{dy}{dz}, y\right) = 0$$

dont l'intégrale générale est à points singuliers critiques fixes. Les fonctions ainsi définies se confondent avec les fonctions elliptiques et leurs dégénérescence. Elles sont poursuivies par Picard [24] et Poincaré [25], et surtout par Painlevé et ces élèves qui ont obtenu vers 1900 des résultats les plus profonds. Pour les équations du premier ordre

$$y' = \frac{g\,(y,z)}{h\,(y,z)}, \tag{3.2.1}$$

où g et h sont des polynômes en y sans facteur commun, à coefficients holomorphes en z, Briot et Bouquet admettent qu'il ne peut exister de point mobile z_1 tel qu'une solution ne tende vers aucune limite lorsque z tend vers z_1 le long d'un chemin quelconque; ce point fut plus tard démontré rigoureusement par Painlevé qui a montré que les seules équations de (3.2.1) n'ayant pas de points critiques mobiles sont les équations de Riccati

$$y' = p_0\,(z) + p_1\,(z)\,y + p_2\,(z)\,y^2$$

à coefficients holomorphes en z [23].

Painlevé a déterminé ensuite explicitement toutes les équations différentielles du second ordre et de type :

$$y'' = R\,(z, y, y'),$$

où R est rationnelle en y, y' et à coefficients holomorphes en z, dont l'intégrale générale est à points singuliers critiques fixes.

3.3 Équations différentielles à points singuliers fixes

3.3.1 Points singuliers fixes et mobiles

On appelle points singuliers d'une équation différentielle par un abus de langage les points singuliers de ses solutions. On distingue deux types de points singuliers:

- Les points singuliers fixes (indépendants des constantes d'intégration) .

- Les points singuliers mobiles (variables avec les constantes d'intégration).

Exemples(1) [14]

1- L'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dz} = -2\frac{y}{z}$$

dont l'intégrale générale est :

$$y\left(z\right) = \frac{C}{z^2}$$

admet un pôle double fixe non critique qui est $z = 0$.

2- L'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dz} = -y^2$$

dont l'intégrale générale est :

$$y\left(z\right) = \frac{1}{z - C}$$

admet $z = C$ comme pôle simple non critique mobile.

3- Le point $z = 1$ est un point singulier non critique fixe de l'équation différentielle.:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{y}{\left(z - 1\right)^2}$$

car sa solution générale est:

$$y\left(z\right) = Ce^{\frac{-1}{z-1}}$$

4- Le point $z = C$ est un point singulier non critique essentiel mobile de l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dz} = -y\ \log^2\left(y\right)$$

car sa solution générale est :

$$y\left(z\right) = e^{\frac{1}{z-C}}$$

(1) Les exemples sont donnés suffisamment nombreux pour illustrer la panoplie des cas pouvant se présenter.

5- L'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2}\frac{y}{z}$$

dont l'intégrale générale est :

$$y(z) = C\sqrt{z}$$

admet un point critique algébrique fixe $z = 0$.

6- L'équation différentielle:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2y}$$

dont l'intégrale générale est:

$$y(z) = \sqrt{z - C}$$

admet un point critique algébrique mobile $z = C$.

7- L'équation différentielle:

$$z\frac{dy}{dz} = 1$$

dont l'intégrale générale est:

$$y(z) = (\log z) + C$$

.admet un point critique transcendant fixe: $z = 0$.

8- L'équation différentielle:

$$\frac{dy}{dz} + e^y = 0$$

dont l'intégrale générale est:

$$y(z) = \log\left(\frac{1}{z - C}\right)$$

admet un point critique transcendant mobile: $z = C$.

9- L'équation différentielle:

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{y^2}{z}$$

dont l'intégrale générale est:

$$y(z) = \frac{1}{(\log z) + C}$$

admet le point critique transcendant fixe $z = 0$ et le pôle mobile $z = e^{-C}$

10- L'équation différentielle

$$\frac{dy}{dz} = \mu \frac{y}{z} \quad , \mu \in \mathbb{R}^*$$

dont l'intégrale générale est:

$$y(z) = C\, z^{\mu}$$

admet:

- Un pôle d'ordre μ fixe, qui est $z = 0$ si μ est un entier négatif.
- Un point critique algébrique fixe z=0 si μ est un nombre rationnel.
- Un point critique transcendant $z = 0$ si μ est un nombre irrationnel.
- La fonction y est holomorphe en $z = 0$ si μ est un entier positif.

3.4 Importance des équations différentielles à points singuliers critiques fixes

Les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme méritent une attention spéciale: si l'intégrale est uniforme, il sera toujours possible de la définir et de la suivre dans tout son domaine d'existence à l'aide d'un développement unique.

La recherche de fonctions nouvelles uniformes définies par des équations différentielles, complexes irréductibles aux fonctions connues est un problème très ancien qui se trouve posé en fait depuis les travaux d'Abel et Jacobi sur l'équation elliptique:

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = \left(1 - y^2\right)\left(1 - k^2 y^2\right).$$

(C'est l'étude de cette équation qui a engendré la théorie des fonctions elliptiques et, par extension, celle des fonctions uniformes). Cette dernière théorie une fois fondée, on cherchait à construire des fonctions nouvelles uniformes qui ne s'exprimaient pas à l'aide des fonctions élémentaires provenant d'équations différentielles. On est conduit donc à rechercher d'abord des équations différentielles dont les intégrales sont à points singuliers critiques fixes, on sait depuis l'importance intrinsèque de ces équations où l'intégrale générale peut être uniformisée, ce qui nécessite une coupure dans le plan complexe. Les équations différentielles à points singuliers critiques fixes apparaissent donc comme la source des fonctions usuelles qui continuent à jouer un rôle important dans les différentes branches de l'analyse et qui se présentent dans les théories les plus diverses, par exemple la théorie générale des singularités en géométrie analytique.

3.5 Exemples classiques d'équations différentielles à points singuliers critiques fixes

3.5.1 Équations différentielles linéaires

Le cas le plus simple et aussi le plus important dans les application est celui des équations linéaires.

Définition 3.1. *On appelle équation différentielle linéaire complexe d'ordre n une équation de la forme:*

$$\frac{d^n y}{dz^n} + P_1(z)\frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(z)\, y + P_n(z) = 0, \tag{3.5.1}$$

où les coefficients P_i $(i = 1, ..., n)$ sont analytiques.

Proposition 3.1. *Les seules singularités possibles pour les solutions de l'équation* (3.5.1) *sont les points singuliers des coefficients P_i.*

Preuve. La démonstration de la proposition se trouve dans [12]. ■

Conséquence: L'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire (3.5.1) est sans points singuliers critiques mobiles, par conséquent elle est à points singuliers critiques fixes.

Remarque 3.1. *Ce résultat fondamental fut publié pour la première fois par Fuchs en 1865, mais était connu de Riemann depuis 1857[7].*

3.5.2 Équation de Ricatti

Définition: On appelle équation de Ricatti une équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$\frac{dy}{dz} = P_2(z)\, y^2 + P_1(z)\; y + P_0(z)\,, \tag{3.5.2}$$

où les coefficients P_2, P_1 et P_0 sont des fonctions analytiques en z.

Proposition 3.2. *L'intégrale générale de l'équation de Ricatti* (3.5.2) *est à points singuliers critiques fixes (les seules singularités mobiles sont des pôles).*

Preuve. Si $P_2 = 0$, l'équation (3.5.2) se réduit à une équation différentielle linéaire du premier ordre qui n'admet pas de points singuliers critiques mobiles.

Si $P_2 \neq 0$, posons dans (3.5.2) :

$$y = -\frac{u'}{P_2(z)\, u}.$$

Alors l'équation de Ricatti devient:

$$-\frac{u''}{P_2(z)\, u} + \frac{1}{P_2(z)}\left(\frac{u'}{u}\right)^2 + \frac{P_2'(z)\, u'}{\left(P_2(z)\right)^2 u} = P_2(z)\left(\frac{u'}{P_2(z)\, u}\right)^2 - \frac{P_1(z)\, u'}{P_2(z)\, u} + P_0(z)\,,$$

et se réduit donc à l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre suivante :

$$P_2(z)\frac{d^2u}{dz^2} - \left(P_2'(z) + P_2(z)\, P_1(z)\right)\frac{du}{dz} + P_2^2(z)\, P_0(z)\, u = 0,$$

dont la solution générale:

$$U(z) = C_1 U_1(z) + C_2 U_2(z)$$

est sans points critiques mobiles, où U_1 et U_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation linéaire homogène du second ordre.

Par conséquent, la solution générale de l'équation de Ricatti:

$$y(z) = -\frac{C_1 U_1'(z) + C_2 U_2'(z)}{P_2(z)\left[C_1 U_1(z) + C_2 U_2(z)\right]}$$

est sans points critiques mobiles. ■

Conséquence: Toute équation de Ricatti est linéarisable et les seuls points singuliers mobiles de son intégrale générale sont des pôles.

Exemple : Soit l'équation de Ricatti

$$\frac{dy}{dz} = y^2 - 2zy + z^2 + 1,$$

son intégrale générale est

$$y(z) = z - \frac{1}{z - C}$$

et $z = C$ est un pôle simple mobile.

3.6 Classe d'équations différentielles du premier ordre et de degré n à points critiques fixes

Considérons l'équation différentielle du premier ordre et de degré n :

$$A_0(z,\ w)\left[w'(z)\right]^n + A_1(z,\ w)\left[w'(z)\right]^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(z,\ w)\, w'(z) + A_n(z,\ w) = 0, \quad (3.6.1)$$

où A_k $(k = 0, \ldots n)$ sont des fonctions polynômiales en w et à coefficients holomorphes en z.

C'est Fuchs [8], qui a le premier attiré l'attention sur cette classe d'équations du premier ordre sans points critiques algébriques mobiles et il a donné les conditions nécessaires et suffisantes implicite pour qu'elle jouisse de cette propriété. Il a même ajouté (à tort, comme nous le verrons) que sa méthode s'étendait d'elle même aux équations d'ordre plus élevé.

Henri Poincaré [25], a repris la question de Fuchs pour les équations d'ordre supérieur à un, et la conclusion inattendue de ses recherches est que la réponse de Fuchs était erronée et il a montré que la classe d'équation (3.6.1) est fort limitée, c'est à dire que les équations à points singuliers critiques fixes se ramènent à des équations déjà étudiées (équations de Ricatti, équations linéaires) ou peuvent être intégré par des calculs purement algébriques. Les équations différentielles d'intégrale générale à points singuliers critiques fixes d'ordre supérieur peuvent donc définir des fonctions nouvelles.

L'extension des recherches de Fuchs et de Poincaré a donné lieu à des travaux importants dus essentiellement à Emile Picard [24] et Paul Painlevé. Ce dernier a montré, que les pôles et les points critiques algébriques de l'intégrale générale de l'équation (3.6.1) sont les seules singularités mobiles. Cette propriété caractéristique du premier ordre, qui n'est nullement évidente et qui exige une démonstration assez compliquée, a été longtemps admise implicitement, ou plutôt on est resté longtemps sans prévoir l'existence des points singuliers critiques transcendants ou essentiels mobiles qui constituent une des plus grande difficultés qui se présentent dans la théorie des équations différentielles.

Le théorème de Painlevé [23] ne s'étend pas aux équations d'ordre supérieur au premier c'est à dire que les points singuliers critiques algébriques et les singuliers essentiels non critiques de l'intégrale générale peuvent être mobiles.

Cette différence capitale entre le premier ordre et les ordres supérieurs a poussé Fuchs à réparer son erreur. Il n'était donc pas fondé à croire qu'on pouvait leur appliquer telle quelle sa méthode.

3.6.1 Théorème de Fuchs

Théorème 3.3. ([8]) *Soit l'équation différentielle d'ordre un et de degré n :*

$$\begin{aligned} f\left(z,w,\frac{dw}{dz}\right) &= A_0\left(z,w\right)\left[w'\left(z\right)\right]^n + A_1\left(z,w\right)\left[w'\left(z\right)\right]^{n-1} + \cdots \\ &\quad + A_{n-1}\left(z,w\right)w'\left(z\right) + A_n\left(z,w\right) = 0, \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

où $A_k\left(z,w\right)\ \left(k=0,\dots n\right)$ sont des fonctions polynômiales en w et à coefficients holomorphes en z.

Pour que l'intégrale générale de l'équation (3.6.2) *n'ait pas de points singuliers critiques algébriques mobiles ,il faut et il suffit que les quatre conditions suivantes soient vérifiées*

1-$A_0(z,w)$ *est indépendant de* w.

2 *Le degré de* $A_k(z,w)$ *polynomiale en* w *ne doit pas dépasser* $2k$.

3 *Les racines en* w *du résultant*[(1)] $D(z,w)$ *du système*

$$\begin{cases} f(z,w,w') = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial w'}(z,w,w') = 0 \end{cases}$$

doivent être solutions de l'équation (3.6.2) .

4 *Si* w' *se développe sous la forme*:

$$w' = s_0 + b_k(w-w_0)^{\frac{k}{n}} + b_{k+1}(w-w_0)^{\frac{k+1}{n}} + \cdots$$

où w_0 *est un zéro de* $D(z,w)$, s_0 *et* b_k *des fonctions analytiques en* z.

Alors k *doit vérifier l'inégalité :*

$$k \geq n-1.$$

3.6.2 Théorème de Painlevé

Théorème 3.4. ([20]) *Les pôles et les points critiques algébriques de l'intégrale de l'équation différentielle du premier ordre et de degré* n (3.6.2) *sont les seules singularités mobiles.*

Remarque 3.2. *Les conditions de Fuchs sont nécessaires et suffisantes pour que l'équation* (3.6.2) *n'ait pas de points singuliers critiques algébriques mobiles, mais d'après le théorème de Painlevé les seuls points singuliers mobiles sont les pôles et les points critiques algébriques, donc on peut conclure que les conditions de Fuchs sont nécessaires et suffisantes pour que l'équation* (3.6.2) *n'ait pas de points singuliers critiques mobiles (c'est à dire à points singuliers critiques fixes)*

(1) Le résultant $D(w,z)$ s'obtient en éliminant la variable w' entre les deux équations du système

Remarque 3.3. *Le théorème de Painlevé ne s'étend pas aux équations d'ordre supérieur au premier.*

Ainsi pour une équation différentielle:

$$f\left(z, w, \frac{dw}{dz}, \frac{d^2w}{dz^2}\right) = 0,$$

les singularités transcendantes ou essentielles (critiques ou non) seront en générale mobiles. Il suffira de prendre comme exemple l'équation [12]:

$$\left[\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 - w\frac{d^2w}{dz^2}\right]^2 + 4w\left(\frac{dw}{dz}\right)^3 = 0$$

dont l'intégrale générale est

$$w = K\, e^{\frac{1}{z-c}}$$

et où les singularités essentielles non critiques dépendent de c, ou bien l'équation

$$w'' = \frac{w'^2\,(2w-1)}{w^2+1}$$

qui a pour intégrale générale:

$$w = \tan\left(\ln\left(Az - B\right)\right)$$

et $z_1 = \frac{B}{A}$ est un point singulier transcendant essentiel, de sorte que lorsque z tend vers z_1 le long d'un chemin, $w\,(z)$ ne tend en général vers aucune limite.

Remarque 3.4. *D'après le théorème de Painlevé, il n'y a dans ce cas aucune difficulté à reconnaître sur l'équation différentielle* (3.6.2) *si les points singuliers critiques sont fixes, il suffit de s'assurer, qu'un point arbitraire du plan ne peut pas être un point critique algébrique pour son intégrale générale. Il en est tout autrement pour les équations d'ordre supérieur car l'intégrale générale peut avoir des singularités critiques mobiles non algébriques et des singularités non critiques essentielles mobiles.*

3.7 Classe d'équations différentielles du second ordre à points singuliers critiques fixes

C'est Emile Picard qui, le premier a abordé la théorie des équations du second ordre à points critiques fixes. Entre les années 1880-1895, il a consacré à cette théorie plusieurs mémoires du plus haut intérêt. Mais les efforts de l'illustre géomètre, aussi bien que les efforts de tous ceux qui sont heurtés à sa suite, se sont heurtés à une difficulté qui ne se présente pas dans le cas du premier ordre, à savoir l'existence de singularités essentielles mobiles des intégrales.

En 1906, Painlevé [22] a constitué une méthode pour former une classe d'équations différentielles du second ordre dont les intégrales sont à points singuliers critiques fixes. Il a appliqué cette méthode aux équations de type:

$$y'' = R\left(z, y, y'\right), \tag{3.7.1}$$

où R est rationnelle en y, y' et à coefficients holomorphes en z . L'idée de son ingénieuse méthode est de transformer, au moyen de changements de variable et de fonction dépendant analytiquement d'un paramètre α (par exemple $z = z_0 + \alpha^{n+1}Z$, $y = y_0 + \alpha^{n+1}Y$) l'équation (3.7.1) en une équation

$$Y'' = R\left(Z, Y, Y', \alpha\right) \tag{3.7.2}$$

dépendant de α, de telle façon que pour une valeur particulière de α (par exemple $\alpha = 0$) l'équation puisse être intégrée explicitement.

La méthode de Painlevé consiste à fournir d'abord des conditions nécessaires pour que l'intégrale générale de l'équation (3.7.1) soit à points singuliers critiques fixes et n'ait que des pôles mobiles.

3.8 Condition de Painlevé

Proposition 3.5. ([22]) *Soit l'équation différentielle :*

$$y'' = R\left(z, y, y'\right), \tag{3.8.1}$$

où R est rationnelle en y, y' et à coefficients holomorphes en z.

Pour que l'équation (3.8.1) *soit à points singuliers critiques fixes, il est nécessaire qu'elle s'écrive sous la forme:*

$$y'' = L(z, y)\, y'^2 + M(z, y)\, y' + N(z, y)\,,$$

où L, M et N sont des fonctions rationnelles en y et à coefficients holomorphes en z.

3.8.1 Équations de Painlevé

Painlevé et son élève Gambier finirent par obtenir cinquante types possibles d'équations [22], il s'agissait ensuite d'examiner si effectivement les intégrales de ces équations n'ont que des pôles mobiles . Dans l'énumération explicite de toutes ces équations, Painlevé avait laissé échapper un cas important. Bertrand Gambier [10], révisant les tableaux et utilisant la même méthode a comblé les lacunes que ces tableaux présentaient. Les résultats de l'énumération complète se résume ainsi: toutes les équations à points critiques fixes de la forme (3.8.1) sont intégrables par les fonctions classiques, rationnelles, exponentielles, logarithmiques, elliptiques, ou sont réductibles aux équations linéaires, ou bien enfin se ramènent à l'un des six types :

I) $\dfrac{d^2y}{dz^2} = 6y^2 + z.$

II) $\dfrac{d^2y}{dz^2} = 2y^3 + zy + \alpha.$

III) $\dfrac{d^2y}{dz^2} = \dfrac{1}{y}\left(\dfrac{dy}{dz}\right)^2 - \dfrac{1}{z}\dfrac{dy}{dz} + \dfrac{\alpha\, y^2 + \beta}{z} + \gamma\, y^3 + \dfrac{\delta}{y}.$

IV) $\dfrac{d^2y}{dz^2} = \dfrac{1}{2y}\left(\dfrac{dy}{dz}\right)^2 + \dfrac{3}{2}y^3 + 4\, zy^2 + 2\left(z^2 - \alpha\right) y + \dfrac{\beta}{y}.$

V) $$\frac{d^2y}{dz^2} = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 - \frac{1}{z}\left(\frac{dy}{dz}\right) + \frac{(y-1)^2}{z^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) +$$

$$\gamma\frac{y}{z} + \delta\frac{y\,(y+1)}{y-1}.$$

VI) $$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-z}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-y}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right)$$
$$+\frac{y\,(y-1)\,(y-z)}{z^2\,(z-1)^2}\left[\alpha + \frac{\beta z}{y^2} + \frac{\gamma\,(z-1)}{(y-1)^2} + \frac{\delta z\,(z-1)}{(y-z)^2}\right],$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes complexes.

Ces six équations étaient les premiers exemples connus d'équations différentielles d'ordre deux à points critiques fixes et n'ayant que des pôles mobiles qui ne sont réductibles par aucun moyen à des équations intégrables, définissant ainsi des fonctions uniformes nouvelles qui ne s'expriment pas à l'aide des fonctions élémentaires. Elles sont appelées *les transcendantes de Painlevé.*

Le type le plus simple et le plus élégant, familier à tout les mathématiciens est celui de l'équation:

$$y''(z) = 6\,y^2(z) + z$$

dont l'intégrale générale est une fonction méromorphe.

Portrait de Lazarus Immanuel Fuchs

(1833-1902)

Chapitre 4

Classe d'équations différentielles du premier ordre et de degré quatre à points critiques fixes

4.1 Position du problème

L'équation d'ordre un et de degré quatre :

$$(w')^4 + P(z,w)\,(w')^3 + Q(z,w)\,(w')^2 + R(z,w)w' + S(z,w) = 0, \tag{4.1.1}$$

où P,Q,R et S sont des fonctions polynômiales en w et à coefficients holomorphes en z s'introduit naturellement dans la théorie Fuchsienne. Elle joue un rôle important dans différentes branches de mathématiques et de physique.

Dans cette thèse, on se propose de donner des conditions suffisantes pour que les solutions de l'équation (4.1.1) soient à points singuliers critiques fixes.

4.2 Analyse du problème et changement de variable

Soit l'équation différentielle d'ordre un et de degré quatre:

$$\left(w^{'}(z)\right)^{4}+P(z,w)\left(w^{'}(z)\right)^{3}+Q(z,w)\left(w^{'}(z)\right)^{2}+R(z,w)\,w^{'}(z)+S(z,w)=0, \quad (4.2.1)$$

où $P,\ Q,\ R$ et S sont des fonctions polynômiales en w et à coefficient holomorphes en z.

D'après le théorème de Painlevé (3.4), les singularités essentielles non critiques et les singularités critiques non algébriques de l'intégrale de l'équation (4.2.1) sont fixes [20] (il ne reste que des pôles et des points singuliers critiques algébriques mobiles)

D'autre part, d'après le théorème de Fuchs (3.3), pour que l'intégrale de l'équation (4.2.1) admet comme points critiques algébriques fixes (il reste que des pôles mobiles), il est nécessaire que P, Q, R et S s'écrivent sous la forme:

$$\begin{cases} P(z,w)= & p_0(z)w^2+p_1(z)w+p_2(z), \\ Q(z,w)= & q_0(z)w^4+q_1(z)w^3+q_2(z)w^2+q_3(z)w+q_4(z), \\ R(z,w)= & r_0(z)w^6+r_1(z)w^5+r_2(z)w^4+r_3(z)w^3 \\ & +r_4(z)w^2+r_5(z)w+r_6(z), \\ S(z,w)= & s_0(z)w^8+s_1(z)w^7+s_2(z)w^6+s_3(z)w^5+s_4(z)w^4 \\ & +s_5(z)w^3+s_6(z)w^2+s_7(z)w+s_8(z), \end{cases} \quad (4.2.2)$$

où $p_i(i=0,1,2)$,$q_j(j=0,1,2,3,4)$,$r_k(k=0,1,2,3,4,5,6)$ et $s_l(l=0,1,2,3,4,5,6,7,8)$ sont des fonctions analytiques en z.

Posons dans $(4.2.1)$,

$$w(z)=\alpha(z)\,v(z).$$

Ce changement de variable, réduit p_1 à 0 ($p_1 = 0$) dans (4.2.2), on obtient alors:

$$\begin{cases} \left(w'(z)\right)^4 + P(z,w)\left(w'(z)\right)^3 + Q(z,w)\left(w'(z)\right)^2 + R(z,w)\,w'(z) + S(z,w) = 0 \\ P(z,w) = p_0(z)w^2 + p_2(z), \\ Q(z,w) = q_0(z)w^4 + q_1(z)w^3 + q_2(z)w^2 + q_3(z)w + q_4(z), \\ R(z,w) = r_0(z)w^6 + r_1(z)w^5 + r_2(z)w^4 + r_3(z)w^3 + r_4(z)w^2 + r_5(z)w + r_6(z), \\ S(z,w) = s_0(z)w^8 + s_1(z)w^7 + s_2(z)w^6 + s_3(z)w^5 + \\ s_4(z)w^4 + s_5(z)w^3 + s_6(z)w^2 + s_7(z)w + s_8(z), \end{cases} \quad (\mathbf{E})$$

où $p_i(i = 0, 1, 2)$, $q_j(j = 0, 1, 2, 3, 4)$, $r_k(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ et $s_l(l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ sont des fonctions analytiques en z.

Remarque 4.1. *L'équation différentielle* (4.2.1) *munie des conditions* (4.2.2) *est à points singuliers critiques fixes si et seulement si l'équation différentielle* (E) *est à points singuliers critiques fixes.*

4.3 Résolution du problème

Par dérivation des deux membres de l'équation (E) par rapport à z, on obtient:

$$\begin{gathered} \frac{\partial P}{\partial w}(w')^4 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial w}\right)(w')^3 + \left(\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial w}\right)(w')^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial w}\right)w' \\ + \frac{\partial S}{\partial z} + \left(4(w')^3 + 3(w')^2 P + 2w'Q + R\right)w'' = 0. \end{gathered} \tag{4.3.1}$$

Comme $4(w')^3 + 3(w')^2 P + 2w'Q + R$ n'est pas identiquement nulle (tous les coefficients ne sont pas nuls), l'équation (4.3.1) peut s'écrire:

$$\begin{aligned} w'' &= -\frac{\frac{\partial P}{\partial w}(w')^4 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial w}\right)(w')^3 + \left(\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial w}\right)(w')^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial w}\right)w' + \frac{\partial S}{\partial z}}{4(w')^3 + 3(w')^2 P + 2w'Q + R} \\ &= R(z, w, w') \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Comme le degré du numérateur de $R(z,w,w')$ en w' est quatre et le degré du dénominateur est trois, alors d'après la condition de Painlevé (voir proposition (3.5)), pour que w''soit à points singuliers critiques fixes, il est nécessaire que w'' s'écrit sous la forme:

$$w'' = R(z,w,w') = M(z,w)w' + N(z,w). \tag{4.3.3}$$

où M et N sont des fonctions polynômiales en w et à coefficients holomorphes en z.

En remplaçant l'expression $R(z,w,w')$ de (4.3.3) dans (4.3.2) et par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial w} + 4M = 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} + \dfrac{\partial Q}{\partial w} + 3PM + 4N = 0, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} + \dfrac{\partial R}{\partial w} + 3PN + 2QM = 0, \\ \dfrac{\partial R}{\partial z} + \dfrac{\partial S}{\partial w} + 2QN + RM = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial z} + RN = 0. \end{cases} \tag{4.3.4}$$

En tenant compte de P,Q, R et S de l'équation (E) et en tirant respectivement M de la première équation et N de la deuxième équation du système (4.3.4), on obtient :

$$\begin{cases} M = -\dfrac{1}{2}p_2 w, \\ N = -\dfrac{1}{4}\left(p_0' + q_1\right) + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{2}p_0p_2 - 2q_2\right)w \\ \qquad -\dfrac{1}{4}\left(p_2' + 3q_3\right)w^2 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{2}p_2^2 - 4q_4\right)w^3. \end{cases} \tag{4.3.5}$$

En substituant les expressions de M et N de (4.3.5) dans (4.3.4), on obtient le système (S) suivant :

$$(S1) \quad -\frac{3}{4}p_0\left(p_0' + q_1\right) + q_0' + r_1 = 0$$

$$(S2) \quad \frac{3}{4}p_0\left(\frac{3}{2}p_0p_2 - 2q_2\right) - p_2q_0 + q_1' + 2r_2 = 0$$

$$(S3) \quad -\frac{3}{4}p_0\left(p_2' + 3q_3\right) - \frac{3}{4}p_2\left(p_0' + q_1\right) - p_2q_1 + q_2' + 3r_3 = 0$$

$$(S4) \quad \frac{3}{4}p_0\left(\frac{3}{2}p_2^2 - 4q_4\right) + \frac{3}{4}p_2\left(\frac{3}{2}p_0p_2 - 2q_2\right) - p_2q_2 + q_3' + 4r_4 = 0$$

$$(S5) \quad -\frac{3}{4}p_2\left(p_2' + 3q_3\right) - p_2q_3 + q_4' + 5r_5 = 0$$

$$(S6) \quad \frac{3}{4}p_2\left(\frac{3}{2}p_2^2 - 4q_4\right) - p_2q_4 + 6r_6 = 0$$

$$(S7)\quad -\frac{1}{2}q_0\left(p_0'+q_1\right)+r_0'+s_1=0$$

$$(S8)\quad \tfrac{1}{2}q_0\left(\tfrac{3}{2}p_0p_2-2q_2\right)-\tfrac{1}{2}q_1\left(p_0'+q_1\right)-\tfrac{1}{2}p_2r_0+r_1'+2s_2=0$$

$$(S9)\quad -\tfrac{1}{2}q_0\left(p_2'+3q_3\right)+\tfrac{1}{2}q_1\left(\frac{3}{2}p_0p_2-2q_2\right)-\tfrac{1}{2}q_2\left(p_0'+q_1\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}p_2r_1+r_2'+3s_3=0$$

$$(S10)\quad \tfrac{1}{2}q_0\left(\tfrac{3}{2}p_2^2-4q_4\right)-\tfrac{1}{2}q_1\left(p_2'+3q_3\right)+\tfrac{1}{2}q_2\left(\tfrac{3}{2}p_0p_2-2q_2\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}q_3\left(p_0'+q_1\right)-\tfrac{1}{2}p_2r_2+r_3'+4s_4=0$$

$$(S11)\quad \tfrac{1}{2}q_1\left(\tfrac{3}{2}p_2^2-4q_4\right)-\tfrac{1}{2}q_2\left(p_2'+3q_3\right)+\tfrac{1}{2}q_3\left(\tfrac{3}{2}p_0p_2-2q_2\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}q_4\left(p_0'+q_1\right)-\tfrac{1}{2}p_2r_3+r_4'+5s_5=0$$

$$(S12)\quad \tfrac{1}{2}q_2\left(\tfrac{3}{2}p_2^2-4q_4\right)-\tfrac{1}{2}q_3\left(p_2'+3q_3\right)+\tfrac{1}{2}q_4\left(\tfrac{3}{2}p_0p_2-2q_2\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}p_2r_4+r_5'+6s_6=0$$

$$(S13)\quad \tfrac{1}{2}q_3\left(\tfrac{3}{2}p_2^2-4q_4\right)-\tfrac{1}{2}q_4\left(p_2'+3q_3\right)-\tfrac{1}{2}p_2r_5+r_6'+7s_7=0$$

$$(S14)\quad \tfrac{1}{2}q_4\left(\tfrac{3}{2}p_2^2-4q_4\right)-\tfrac{1}{2}r_6p_2+8s_8=0$$

$$(S15)\quad \tfrac{1}{4}r_0\left(p_0'+q_1\right)-s_0'=0$$

$$(S16)\quad \tfrac{1}{4}r_0\left(\tfrac{3}{2}p_0p_2-2q_2\right)-\tfrac{1}{4}r_1\left(p_0'+q_1\right)+s_1'=0$$

$$(S17)\quad \tfrac{1}{4}r_0\left(p_2'+3q_3\right)-\tfrac{1}{4}r_1\left(\tfrac{3}{2}p_0p_2-2q_2\right)+\tfrac{1}{4}r_2\left(p_0'+q_1\right)-s_2'=0$$

$$(S18)\quad \tfrac{1}{4}r_0\left(\tfrac{3}{2}p_2^2-4q_4\right)-\tfrac{1}{4}r_1\left(p_2'+3q_3\right)+\tfrac{1}{4}r_2\left(\tfrac{3}{2}p_0p_2-2q_2\right)$$
$$-\tfrac{1}{4}r_3\left(p_0'+q_1\right)+s_3'=0$$

$$(S19)\quad \tfrac{1}{4}r_1\left(\tfrac{3}{2}p_2^2-4q_4\right)-\tfrac{1}{4}r_2\left(p_2'+3q_3\right)+\tfrac{1}{4}r_3\left(\tfrac{3}{2}p_0p_2-2q_2\right)$$
$$-\tfrac{1}{4}r_4\left(p_0'+q_1\right)+s_4'=0$$

$$(S20)\quad \tfrac{1}{4}r_2\left(\tfrac{3}{2}p_2^2-4q_4\right)-\tfrac{1}{4}r_3\left(p_2'+3q_3\right)+\tfrac{1}{4}r_4\left(\tfrac{3}{2}p_0p_2-2q_2\right)$$
$$-\tfrac{1}{4}r_5\left(p_0'+q_1\right)+s_5'=0$$

$$(S21)\quad \tfrac{1}{4}r_3\left(\tfrac{3}{2}p_2^2-4q_4\right)-\tfrac{1}{4}r_4\left(p_2'+3q_3\right)+\tfrac{1}{4}r_5\left(\tfrac{3}{2}p_0p_2-2q_2\right)$$
$$-\tfrac{1}{4}r_6\left(p_0'+q_1\right)+s_6'=0$$

$$(S22)\quad \tfrac{1}{4}r_4\left(\tfrac{3}{2}p_2^2-4q_4\right)-\tfrac{1}{4}r_5\left(p_2'+3q_3\right)+\tfrac{1}{4}r_6\left(\tfrac{3}{2}p_0p_2-2q_2\right)+s_7'=0$$

$$(S23)\quad \tfrac{1}{4}r_5\left(\tfrac{3}{2}p_2^2-4q_4\right)-\tfrac{1}{4}r_6\left(p_2'+3q_3\right)+s_8'=0$$

$$(S24)\quad \tfrac{1}{4}r_6\left(\tfrac{3}{2}p_2^2-4q_4\right)=0.$$

Remarque 4.2. *Les six premières équations du système* (S) *sont obtenues par identification de la troisième équation du système* $(4.3.4)$, *les équations* $(S_7) - (S_{14})$ *sont obtenues à partir de la quatrième équation de* $(4.3.4)$ *et les équations* $(S_{15}) - (S_{24})$ *du système* (S) *sont obtenues par identification de la cinquième équation du système* $(4.3.4)$.

Théorème 4.1. *Les conditions du système* (S) *formé des vingt quatre équations sont suffisantes pour que l'équation* (E) *soit à points singuliers critiques fixes.*

Preuve. Deux cas sont possibles: $r_6 \neq 0$ ou $r_6 = 0$

1^{er} cas $\mathbf{r_6 \neq 0}$:

On a deux sous cas: $p_2 \neq 0$ ou $p_2 = 0$

i) $\mathbf{p_2 \neq 0}$:

En résolvant successivement les équations:

$(S24), (S6), (S14), (S23), (S5), (S13), (S22), (S4), (S12), (S21), (S3), (S11), (S10), (S19), \ldots$.du système (S) formé des vingt quatre équations, on obtient:

$$\begin{cases} q_0 = \frac{3}{8}p_0^2,\ q_1 = 0,\ q_2 = \frac{3}{4}p_0p_2,\ q_3 = 0,\ q_4 = \frac{3}{8}p_2^2, r_0 = \frac{1}{16}p_0^3, \\ r_1 = 0,\ r_2 = \frac{3}{16}p_0^2p_2,\ r_3 = 0,\ r_4 = \frac{3}{16}p_0p_2^2,\ r_5 = 0,\ r_6 = \frac{1}{16}p_2^3, \\ s_0 = \frac{1}{256}p_0^4 - \alpha^4,\ s_1 = 0,\ s_2 = \frac{1}{64}p_0^3p_2,\ s_3 = 0,\ s_4 = \frac{3}{128}p_0^2p_2^2, \\ s_5 = 0, s_6 = \frac{1}{64}p_0p_2^3, s_7 = 0,\ s_8 = \frac{1}{256}p_2^4 \end{cases} \tag{4.3.6}$$

où $p_0,\ p_1,\ p_2$ sont des fonctions analytiques en z et α est une constante arbitraire complexe.

En substituant les conditions $(4.3.6)$ dans l'équation (E) on obtient:

$$\begin{gathered} (w')^4 + (p_0 + p_2w^2)(w')^3 + \left(\frac{3}{8}p_0^2 + \frac{3}{4}p_0p_2w^2 + \frac{3}{8}p_2^2w^4\right)(w')^2 + \\ \left(\frac{1}{16}p_0^3 + \frac{3}{16}p_0^2p_2w^2 + \frac{3}{16}p_0p_2^2w^4 + \frac{1}{16}p_2^3w^6\right)w' + \\ \left(\frac{1}{256}p_0^4 - \alpha^4\right) + \frac{1}{64}p_0^3p_2w^2 + \frac{3}{128}p_0^2p_2^2w^4 + \frac{1}{64}p_0p_2^3w^6 + \frac{1}{256}p_2^4w^8 = 0. \end{gathered} \tag{4.3.7}$$

L'équation $(4.3.7)$ peut s'écrire sous la forme:

$$\left[w' + \frac{1}{4}(p_0 + p_2w^2)\right]^4 = \alpha^4 \tag{4.3.8}$$

qui est équivalente aux quatre équations de Ricatti:

$$w' + \frac{1}{4}\left(p_0 + p_2 w^2\right) = c_i,\ \ i = 1,2,3,4 \tag{4.3.9}$$

où $c_i\ (i = 1,2,3,4)$, sont des constantes complexes et p_0, p_2 des fonctions analytiques en z. Comme les équations de Ricatti sont à points singuliers critiques fixes donc l'intégrale de l'équation (E) est à points singuliers critiques fixes.

ii) $\mathbf{p_2 = 0}$:

Les équations du système (S) formé des vingt quatre équations ne sont pas compatibles car l'équation (S_6) n'est pas satisfaite et l'on arrive à impossibilité.

$\mathbf{2^{ème}}$ cas $\mathbf{r_6 = 0}$:

Comme par dérivation des deux membres de l'équation (E), on a obtenu l'équation différentielle d'ordre deux:

$$\begin{cases} w'' = M(z,w)w' + N(z,w) \\ M = -\frac{1}{2}p_2 w, \\ N = -\frac{1}{4}\left(p_0' + q_1\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}p_0 p_2 - 2q_2\right) w \\ \qquad - \frac{1}{4}\left(p_2' + 3q_3\right) w^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}p_2^2 - 4q_4\right) w^3. \end{cases} \tag{E'}$$

Il en résulte donc deux autres cas: $r_6 = 0$ et $p_2 = 0$ ou $r_6 = 0$ et $p_2 \neq 0$.

Cas où $\mathbf{r_6 = 0}$ et $\mathbf{p_2 = 0}$:

En remplaçant $r_6 = 0$ et $p_2 = 0$ dans (E'), on obtient:

$$w'' = -\frac{1}{4}\left(p_0' + q_1\right) - \frac{1}{2}q_2 w - \frac{3}{4}q_3 w^2 - q_4 w^3. \tag{4.3.10}$$

i) $\mathbf{q_4 = 0}$ et $\mathbf{q_3 = 0}$:

L'équation (4.3.10) devient:

$$w'' = -\frac{1}{4}\left(p_0' + q_1\right) - \frac{1}{2}q_2 w \tag{4.3.11}$$

équation différentielle linéaire donc à points singuliers critiques fixes.

Comme par dérivation des deux membres de l'équation (E), on a obtenu l'équation différentielle linéaire (4.3.11) qui est à points singuliers critiques fixes, donc toute solution de (E) qui est une solution de (4.3.11) est à points singuliers critiques fixes, d'où l'équation (E) est à points singuliers critiques fixes. Déterminons la forme générale de l'équation (E) pour $\mathbf{r}_6 = \mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_4 = \mathbf{q}_3 = \mathbf{0}$.

En résolvant successivement les équations (S14), (S13), (S5), (S12), (S4), (S11) et (S3) du système (S) formé des vingt quatre équations, l'équation (E) s'écrit sous la forme:

$$\begin{aligned} &(w')^4 + p_0 (w')^3 + (q_0 + q_1 w + q_2 w^2)(w')^2 \\ &+ (r_0 + r_1 w + r_2 w^2 + r_3 w^3) w' + s_0 + s_1 w + s_2 w^2 + s_3 w^3 + s_4 w^4 = 0, \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

où

p_0, q_0, q_1, q_2, r_0, r_1, r_2, r_3, s_0, s_1, s_2, s_3 et s_4 sont des fonctions analytiques en z vérifiant le système:

$$\begin{cases} (C1) & -\frac{3}{4} p_0 (p_0' + q_1) + q_0' + r_1 = 0 \\ (C2) & -\frac{3}{2} p_0 q_2 + q_1' + 2r_2 = 0 \\ (C3) & -\frac{1}{2} q_0 (p_0' + q_1) + r_0' + s_1 = 0 \\ (C4) & -q_0 q_2 - \frac{1}{2} q_1 (p_0' + q_1) + r_1' + 2s_2 = 0 \\ (C5) & -q_1 q_2 - \frac{1}{2} q_2 (p_0' + q_1) + r_2' + 3s_3 = 0 \\ (C6) & -q_2^2 + r_3' + 4s_4 = 0 \\ (C7) & -\frac{1}{4} r_0 (p_0' + q_1) + s_0' = 0 \\ (C8) & -\frac{1}{2} r_0 q_2 - \frac{1}{4} r_1 (p_0' + q_1) + s_1' = 0 \\ (C9) & \frac{1}{2} r_1 q_2 + \frac{1}{4} r_2 (p_0' + q_1) - s_2' = 0 \\ (C10) & -\frac{1}{2} r_2 q_2 - \frac{1}{4} r_3 (p_0' + q_1) + s_3' = 0 \\ (C11) & -\frac{1}{2} r_3 q_2 + s_4' = 0 \\ (C12) & r_3 = -\frac{q_2'}{3}. \end{cases} \tag{4.3.13}$$

ii) $\mathbf{q_4 = 0}$ **et** $\mathbf{q_3 \neq 0}$:

En résolvant successivement les équations $(S14), (S13), (S5), (S12), (S21)$ du système (S) formé des vingt quatre équations, on obtient:

$$\begin{cases} q_0 = 0,\; q_1 = \beta_1, q_2 = 0, \\ q_3 = \beta_2 \neq 0,\; q_4 = 0 \\ r_0 = 0, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 0, \quad r_3 = 0, \quad r_4 = 0, \quad r_5 = 0, \\ s_8 = 0, \quad s_7 = 0, \quad s_6 = \dfrac{1}{4} q_3^2, \quad s_5 = \dfrac{1}{2} q_3 q_2 = 0, \\ s_4 = \dfrac{1}{2} q_1 q_3, \quad s_3 = 0, \quad s_2 = \dfrac{1}{4} q_1^2, \quad s_1 = 0, \\ s_0 = \gamma_1, \\ p_0 = \dfrac{4q_2'}{3q_3} = 0, p_2 = 0, \end{cases} \tag{4.3.14}$$

où β_1, β_2 et γ_1 des constantes complexes.

En tenant compte de (4.3.14), l'équation différentielle d'ordre deux (E') devient:

$$w'' = -\frac{q_1}{4} - \frac{3q_3}{4} w^2, \quad q_1 \in \mathbb{C} \text{ et } q_3 \in \mathbb{C}^*. \tag{4.3.15}$$

En posant $w = -\dfrac{8}{q_3} V$ dans $(4.3.15)$, on obtient:

$$V'' = 6V^2 + \frac{1}{32} q_1 q_3 = 6V^2 + K, \quad K = \frac{1}{32} q_1 q_3 \in \mathbb{C},$$

qui est une équation différentielle elliptique à points singuliers critiques fixes [22] (figurant parmi les cinquante équations de Painlevé du deuxième ordre à points singuliers critiques fixes), d'où l'équation (4.3.15) est à points singuliers critiques fixes. Comme par dérivation des deux membres de l'équation (E) , on a obtenu l'équation différentielle (4.3.15) qui est à points singuliers critiques fixes, donc toute solution de l'équation différentielle (E) qui est une solution de (4.3.15) est à points singuliers critiques fixes, d'où l'équation (E) s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} (w')^4 + (q_1 w + q_3 w^3)(w')^2 + s_0 + s_2 w^2 + s_4 w^4 + s_6 w^6 = 0, \\ q_1 = \beta_1 \ , \ q_3 = \beta_2 \neq 0 \ , \\ s_0 = \gamma_1 \ , \ s_2 = \dfrac{1}{4} q_1^2 \\ s_4 = \dfrac{1}{2} q_3 q_1, \ s_6 = \dfrac{1}{4} q_3^2 \\ \beta_2 \neq 0, \beta_1 \text{ et } \gamma_1 \text{ des constantes complexes} \end{cases} \tag{4.3.16}$$

qui est équivalente à:

$$\left((w')^2 + \frac{1}{2} \left(q_1 \omega + q_3 \omega^3 \right) \right)^2 = \gamma_1$$

est à points singuliers critiques fixes.

iii) $\mathbf{q_4 \neq 0}$:

En résolvant successivement (S12), (S13), (S14), (S23),... du système (S), on obtient:

$$\begin{cases} p_0 = 0, \ \ p_2 = 0 \\ q_0 = \alpha_2, \ \ q_1 = \beta_2, \ \ q_2 = \gamma_2, \ \ q_3 = 0, \ \ q_4 = \delta \neq 0, \\ r_0 = 0, \ \ r_1 = 0, \ \ r_2 = 0, \ \ r_3 = 0, \ \ r_4 = 0, \ \ r_5 = 0, \ \ r_6 = 0, \\ s_0 = L, \ \ s_1 = \dfrac{1}{2} q_0 q_1, \ \ s_2 = \dfrac{1}{2} q_0 q_2 + \dfrac{1}{4} q_1^2, \\ s_3 = \dfrac{1}{2} q_1 q_2, \ \ s_4 = \dfrac{1}{2} q_0 q_4 + \dfrac{1}{4} q_2^2, \\ s_5 = \dfrac{1}{2} q_1 q_4, \ \ s_6 = \dfrac{1}{2} q_2 q_4, \ \ s_7 = 0, \ \ s_8 = \dfrac{1}{4} q_4^2 \end{cases} \tag{4.3.17}$$

où $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ et L des constantes complexes.

En tenant compte des conditions $(4.3.17)$, l'équation différentielle d'ordre deux (E') devient;

$$w'' = -\frac{1}{4} q_1 w - \frac{1}{2} q_2 w - q_4 w^3 \tag{4.3.18}$$

En posant dans (4.3.18)

$$w(z) = i \left(\frac{2}{q_4} \right)^{\frac{1}{6}} V(\tau(z)), \qquad \tau(z) = -\left(\frac{q_4}{2} \right)^{\frac{1}{3}} z, \ \left(i^2 = -1 \right)$$

l'équation (4.3.18) devient;

$$\begin{aligned} V''_{\tau^2} &= 2V^3 - 2^{\frac{-1}{3}} q_2 q_4^{-\frac{2}{3}} V + i 2^{\frac{-3}{2}} q_1 q_4^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2V^3 + c_1 V + c_2, \qquad c_1, c_2 \ \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

qui est une équation elliptique à points critiques fixes [22] (figurant parmi les cinquante équations de Painlevé du deuxième ordre à points singuliers critiques fixes), d'où l'équation (4.3.18) est à points singuliers critiques fixes. Comme toute solution de l'équation (E) qui est une solution de (4.3.18) est à points singuliers critiques fixes, alors l'équation (E) s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} (w')^4 + (q_0 + q_1 w + q_2 w^2 + q_4 w^4)(w')^2 + s_0 + s_1 w + s_2 w^2 \\ s_0 + s_1 w + s_2 w^2 + s_3 w^3 + s_4 w^4 + s_5 w^5 + s_6 w^6 + s_8 w^8 = 0 \\ q_0 = \alpha_2, \;\; q_1 = \beta_2, \;\; q_2 = \gamma_2, \;\; q_4 = \delta \neq 0, \\ s_0 = L, \;\; s_1 = \dfrac{1}{2} q_0 q_1, \;\; s_2 = \dfrac{1}{2} q_0 q_1 + \dfrac{1}{4} q_1^2, \\ s_3 = \dfrac{1}{2} q_1 q_2, \;\; s_4 = \dfrac{1}{2} q_0 q_4 + \dfrac{1}{4} q_2^2, \\ s_5 = \dfrac{1}{2} q_1 q_4, \; s_6 = \dfrac{1}{2} q_2 q_4, \;\; s_8 = \dfrac{1}{4} q_4^2 \\ q_0, q_1, \;\; q_2, q_4 \text{ et } L \text{ des constantes complexes} \quad . \end{cases} \tag{4.3.20}$$

qui est équivalente à:

$$\begin{cases} \left(2(w')^2 + K_1 + q_1 w + q_2 w^2 + q_4 w^4\right)\left(2(w')^2 + K_2 + q_1 w + q_2 w^2 + q_4 w^4\right) = 0 \\ K_1 K_2 = 2 q_1 q_2 \\ q_0, q_1, \;\; q_2, q_4, K_1 \text{ et } K_2 \text{ des constantes complexes,} \end{cases} \tag{4.3.21}$$

est à points singuliers critiques fixes.

Cas où $\mathbf{r}_6 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{p}_2 \neq \mathbf{0}$:

En résolvant successivement (S14), (S23), (S5), (S13), (S22), (S4), (S12), (S21), (S3), (S11), (S20), (S2), (S10), (S19), (S9), (S18), (S8), (S15) du système (S) formé des vingt quatre équations on obtient:

$$\left\{\begin{array}{l}
p_0=\alpha_3,\ p_2=\beta_3\neq 0,\\
q_0=\dfrac{9}{32}p_0^2-\dfrac{3}{4}\dfrac{p_0''}{p_2},\quad q_1=\dfrac{3}{8}p_0',\quad q_2=\dfrac{9}{16}p_0p_2,\quad q_3=0,\quad q_4=\dfrac{9}{32}p_2^2,\\
r_0=-\dfrac{25}{16}\dfrac{p_0p_0''}{p_2}-4\dfrac{p_0''''}{p_2^2}-\dfrac{35}{32}\dfrac{(p_0')^2}{p_2},\ r_1=\dfrac{9}{16}p_0p_0'+\dfrac{9}{8}\dfrac{p_0'''}{p_2},\\
r_2=-\dfrac{9}{16}p_0'',r_3=\dfrac{9}{32}p_0'p_2,\ r_4=r_5=r_6=0,\\
s_0=-\dfrac{27}{(64)\,(64)}p_0^4-\gamma_3,\ s_1=\dfrac{99}{(64)\,(8)}p_0^2p_0'+\dfrac{207}{64}\dfrac{p_0'p_0''}{p_2}+\dfrac{25}{16}\dfrac{p_0p_0'''}{p_2}+4\dfrac{p_0'''''}{p_2^2},\\
s_2=-\dfrac{27}{(64)\,(16)}p_0^3p_2-\dfrac{77}{(64)\,(2)}p_0p_0''-\dfrac{109}{(64)\,(4)}p_0'^2-\dfrac{25}{16}\dfrac{p_0''''}{p_2},\\
s_3=\dfrac{51}{(64)\,(4)}p_2p_0p_0'+\dfrac{3}{8}p_0''',\quad s_4=-\dfrac{81}{(64)\,(32)}p_2^2p_0^2-\dfrac{27}{(64)\,(4)}p_2p_0'',\\
s_5=\dfrac{27}{(64)\,(8)}p_2^2p_0',\quad s_6=-\dfrac{27}{(64)\,(16)}p_2^3p_0,\quad s_7=0,\quad s_8=-\dfrac{27}{(64)\,(64)}p_2^4,
\end{array}\right. \tag{4.3.22}$$

où α_3, β_3 et γ_3 des constantes complexes.

En tenant compte des conditions (4.3.22), l'équation (E) s'écrit sous la forme:

$$\left\{\begin{array}{l}
(w')^4+(p_0+p_2w^2)(w')^3+\dfrac{9}{32}(p_0+p_2w^2)^2(w')^2-\dfrac{27}{(64)\,(64)}(p_0+p_2w^2)^4=\gamma_3\\
p_2\neq 0, p_0 \text{ et } \gamma_3 \text{ des constantes complexes,}
\end{array}\right. \tag{4.3.23}$$

qui peut se factoriser sous la forme:

$$\left(w'+\frac{3}{8}(p_0+p_2w^2)\right)^3\left(w'-\frac{1}{8}(p_0+p_2w^2)\right)=\gamma_3. \tag{4.3.24}$$

On peut avoir deux cas: $\gamma_3=0$ ou $\gamma_3\neq 0$.

- Si $\boldsymbol{\gamma}_3= \mathbf{0}$:

L'équation (4.3.24) conduit à:

$$\left(w'+\frac{3}{8}(p_0+p_2w^2)\right)^3=0 \qquad \text{ou} \qquad \left(w'-\frac{1}{8}(p_0+p_2w^2)\right)=0,$$

qui sont des équations de Ricatti à points singuliers critiques fixes, d'où l'équation (E) est à points singuliers critiques fixes.

- Si $\boldsymbol{\gamma_3 \neq 0}$:

Pour $\mathbf{r_6 = 0}$ **et** $\mathbf{p_2 \neq 0}$**,** appliquons le théorème de Fuchs (2.6.1) à l'équation (E) [8]. Il est clair que les deux premières conditions de Fuchs sont vérifiées.

En effet;

(i) $A_0(z,w) = 1$ est indépendant de w.

(ii) Le degré de $P(z,w) = A_1(z,w)$ en w est deux, le degré de $Q(z,w) = A_2(z,w)$ en w est quatre, le degré de $R(z,w) = A_3(z,w)$ en w est six et le degré du polynôme $S(z,w) = A_4(z,w)$ est huit, ainsi le degré de $A_k(z,w)$ polynômiale en w ne dépasse pas $2k$ pour $k \in \{1,2,3,4\}$.

Il reste à vérifier la troisième et la quatrième condition de Fuchs.

(iii) Vérifions d'abord la troisième condition.

Montrons que les racines en w du résultant $D(z,w)$ du système:

$$\begin{cases} f(z,w,w') & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial w'}(z,w,w') & = & 0 \end{cases} \tag{4.3.25}$$

doivent être solutions de l'équation:

$$f(z,w,w') = \left(w' + \frac{3}{8}\left(p_0 + p_2 w^2\right)\right)^3 \left(w' - \frac{1}{8}\left(p_0 + p_2 w^2\right)\right) - \gamma_3 = 0. \tag{4.3.26}$$

où $p_2 \neq 0, p_0$ et γ_3 des constantes complexes.

Le résultant $D(z,w)$ s'obtient en éliminant la variable w' entre les deux équations du système (4.3.25) et qui s'écrit sous la forme:

$$D(z,w) = -\frac{27}{(64)^2}\left(p_0 + p_2 (w)^2\right)^4 - \gamma_3.$$

Soit w_0 une racine du résultant $D(z,w)$, montrons que w_0 est solution de l'équation (4.3.26).

Comme p_0 , p_2 et γ_3 sont des constantes complexes donc toute racine w_0 de $D(z,w)$ est constante, d'où $w_0' = 0$, par conséquent w_0 est racine de l'équation $(4.3.26)$. En effet, si w_0 est constante, l'équation (4.3.26) devient:

$$\left(\frac{3}{8}\left(p_0 + p_2 w_0^2\right)\right)^3 \left(\frac{1}{8}\left(p_0 + p_2 w_0^2\right)\right) - \gamma_3 = D(z,w_0) = 0. \tag{4.3.27}$$

Ainsi la troisième condition de Fuchs est satisfaite.

Il reste à vérifier la quatrième condition de Fuchs (3.6.1), c'est à-dire: Si w' est solution de l'équation (E) se développe sous la forme:

$$w' = s_0 + b_k (w - w_0)^{\frac{k}{n}} + b_{k+1} (w - w_0)^{\frac{k+1}{n}} + ...$$

où w_0 est un zéro de $D(z, w), s_0$ et b_k des fonctions analytiques en z, alors k doit vérifier l'inégalité $k \geqslant n - 1$.

Soit w_0 une racine du discriminant $D(z, w)$, en posant $w = w_0 + u$ dans l'équation:

$$\begin{cases} f(z, w, w') = \left(w' + \frac{3}{8}(p_0 + p_2 w^2)\right)^3 \left(w' - \frac{1}{8}(p_0 + p_2 w^2)\right) - \gamma_3 = 0. \\ p_2 \neq 0,\ p_0 \text{ et } \gamma_3 \text{ des constantes complexes.} \end{cases} \tag{4.3.28}$$

On obtient

$$F(u', u) = \left(u' + \frac{3}{8}\left(p_0 + p_2 (w_0 + u)^2\right)\right)^3 \left(u' - \frac{1}{8}\left(p_0 + p_2 (w_0 + u)^2\right)\right) - \gamma_3 = 0.$$

Comme $D(w_0, z) = 0$, on a :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(0,0) \neq 0,\ \frac{\partial F}{\partial u'}(0,0) = 0 \text{ et } F(0,0) = 0. \tag{4.3.29}$$

En tenant compte des conditions (4.3.29), d'après le théorème des fonctions implicites, il existe u analytique au voisinage de $u' = 0$ tels que

$$u = A_2 (u')^2 + A_3 (u')^3 + A_4 (u')^4 + ... \tag{4.3.30}$$

où A_k $(k \geq 2)$ sont des fonctions analytiques en z avec $A_2 \neq 0$, alors d'après le lemme de Puiseux u' s'écrit au voisinage de $u = 0$ sous la forme:

$$u' = B_1 u^{\frac{1}{2}} + B_2 u^{\frac{2}{2}} + B_3 u^{\frac{3}{2}} + ...$$

où B_k $(k \geq 1)$ sont des fonctions analytiques en z.

Comme $w = w_0 + u$, il en résulte que w' s'écrit au voisinage de w_0 sous la forme:

$$w' = B_1 (w - w_0)^{\frac{1}{2}} + B_2 (w - w_0)^{\frac{2}{2}} + B_3 (w - w_0)^{\frac{3}{2}} + ...$$

où B_k $(k \geq 1)$ sont des fonctions analytiques en z.

Ainsi la quatrième condition de Fuchs est vérifiée.

Les quatre conditions de Fuchs sont vérifiées, donc l'équation (E) est sans points singuliers critiques algébriques mobiles et comme d'après le théorème de Painlevé (3.4), l'équation (E) ne possède pas de points singuliers critiques essentiels mobiles, d'où l'équation (E) est à points singuliers critiques fixes. $\blacksquare$

Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse on a donné des conditions suffisantes pour que l'équation d'ordre un et de degré quatre:

$$\left(w^{'}(z)\right)^{4}+P(z,w)\left(w^{'}(z)\right)^{3}+Q(w,z)\left(w^{'}(z)\right)^{2}+R(z,w)\,w^{'}(z)+S(z,w)=0,$$

où P, Q, R et S sont des fonctions polynômiales en w et à coefficients holomorphes en z soit à points singuliers critiques fixes.

On a montré que les conditions du système (S) formé des vingt quatre équations sont des conditions suffisantes pour que notre équation soit à points singuliers critiques fixes. Ainsi on a trouvé quatre types d'équations:

$\mathbf{1}^{\grave{e}r}Type$

$$\begin{cases} \left((w')^2+\frac{1}{2}\left(q_1\omega+q_3\omega^3\right)\right)^2=\gamma_1 \\ q_1, q_3 \text{ et } \gamma_1 \text{ des constantes complexes.} \end{cases}$$

$\mathbf{2}^{\grave{e}me}Type$

$$\begin{cases} \left(2\left(w'\right)^2+K_1+q_1w+q_2w^2+q_4w^4\right)\left(2\left(w'\right)^2+K_2+q_1w+q_2w^2+q_4w^4\right)=0 \\ K_1K_2=2q_1q_2 \\ q_0, q_1,\ q_2, q_4, K_1 \text{ et } K_2 \text{ des constantes complexes.} \end{cases}$$

$\mathbf{3}^{\grave{e}me}Type$

$$\begin{cases} \left(w'+\frac{3}{8}\left(p_0+p_2w^2\right)\right)^3\left(w'-\frac{1}{8}\left(p_0+p_2w^2\right)\right)=\gamma_3 \\ p_2\neq 0, p_0 \text{ et } \gamma_3 \text{ des constantes complexes.} \end{cases}$$

$\mathbf{4}^{ème}Type$

$$\begin{cases} (w')^4 + p_0\,(w')^3 + (q_0 + q_1 w + q_2 w^2)\,(w')^2 + (r_0 + r_1 w + r_2 w^2 + r_3 w^3)\,w' \\ +s_0 + s_1 w + s_2 w^2 + s_3 w^3 + s_4 w^4 = 0 \end{cases}$$

où $p_0, q_0, q_1, q_2, r_0, r_1, r_2, r_3, s_0, s_1, s_2, s_3, s_4$ sont des fonctions analytiques en z vérifiant les conditions:

$$\begin{cases} (C1) & -\frac{3}{4}p_0\,(p_0' + q_1) + q_0' + r_1 = 0 \\ (C2) & -\frac{3}{2}p_0 q_2 + q_1' + 2r_2 = 0 \\ (C3) & -\frac{1}{2}q_0(p_0' + q_1) + r_0' + s_1 = 0 \\ (C4) & -q_0 q_2 - \frac{1}{2}q_1\,(p_0' + q_1) + r_1' + 2s_2 = 0 \\ (C5) & -q_1 q_2 - \frac{1}{2}q_2\,(p_0' + q_1) + r_2' + 3s_3 = 0 \\ (C6) & -q_2^2 + r_3' + 4s_4 = 0 \\ (C7) & -\frac{1}{4}r_0\,(p_0' + q_1) + s_0' = 0 \\ (C8) & -\frac{1}{2}r_0 q_2 - \frac{1}{4}r_1\,(p_0' + q_1) + s_1' = 0 \\ (C9) & \frac{1}{2}r_1 q_2 + \frac{1}{4}r_2\,(p_0' + q_1) - s_2' = 0 \\ (C10) & -\frac{1}{2}r_2 q_2 - \frac{1}{4}r_3\,(p_0' + q_1) + s_3' = 0 \\ (C11) & -\frac{1}{2}r_3 q_2 + s_4' = 0 \\ (C12) & r_3 = -\frac{q_2'}{3}. \end{cases}$$

Perspectives *La méthode que nous venons de suivre ne se limite pas uniquement aux équations différentielles du premier ordre et de degré quatre. D'après quelques calculs préliminaires, la méthode utilisée ici paraît appropriée pour s'appliquer au cas des équations du premiers ordre et de degré cinq et qui pourra conduire à des résultats intéressants qui nécessitera l'étude d'un système de trente six équations.*

Bibliographie

[1] CH. Briot et J.C. Bouquet, Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles. J.Ecole Poly. Tome 21, cahier 36 (1856).

[2] F.J. Bureau, Differential equations with fixed critical points, Annali di matematica pura ed applicata LXIV (1964) 229-364.

[3] R. Conte, Unification of PDE and ODE versions of Painlevé analysis into a single invariant version, Painlevé transcendants, their asymptotics and physical complications, 125-144, eds. D. Levi and P. Winternitz (Plenum, New York, 1992).

[4] R. Conte, The Painlevé property, one century later, CRM series in mathematical physics Springer-Verlag, New York 1999.

[5] R. Conte and M. Musette, A new method to test discrete Painlevé equations, phys. Lett.A.223 (1996).439-448.

[6] C.M. Cosgrove, Corrections and annotations to E.L. Ince, ordinary differential equations, chapter 14, on the classification of Painlevé differential equations, Stud. Appl. Math. (1993).

[7] J. Dieudonné, Abrégé d'histoire des Mathématiques. Hermann, editeurs des sciences et des arts. 1964.

[8] L. Fuchs, Űber Differential gleichungen deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen. S. Ber. Akad. Wiss. Berlin (Juin 1884), n32, 699-710.

[9] B. Gambier, Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, C.R. Acad. Sc. Paris 142 (1906) 266-269, 1403-1406, 1497-1500.

[10] B. Gambier, Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale est à points critiques fixes, C.R. Acad. Sc. Paris 143 (1906) 741-144 (1907) 827-830, 962-964.

[11] V.V. Golubev, Lekci po, Analiticheskoj tearii differentialnyx uravneniji, Moscou 1950, pp 48-50.

[12] E. Hille, Ordinary differential equations in the complex domain (J. Wiley and sons, New York, 1976).

[13] M. Hukahara, Sur les points singuliers fixes d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre (en japonais)sũgaku 7 (1955), 65-74.

[14] E.L. Ince, Ordinary differential equations (Longman, Green and co, London and New York, 1926). Reprinted (Dover, New York, 1956).

[15] A. Kessi et K. M'hamed Messaoud, First order equations without mobile critical points, Regular and Chaotic Dynamics, Vol.6, N° 1, (2001).

[16] N.S. Kolesnikova, and N.A. Lukashevich, *Sufficient conditions for the existence of solutions with stationary critical singular points for first order equations.* Differencial'nye Uravnenija, 1972, V8(10), 1753-1760.

[17] K. M'hamed Messaoud, A. Kessi et T. Laadj, On sufficient conditions for the existence of solutions for first order equations and fourth degree with the Painlevé property, Qualitative theory of dynamical systems, Springer-Verlag 2015.

[18] P. Painlevé, sur les ligne singulières. Thèse. Paris, Gauthier-Villars (1887).

[19] P. Painlevé, Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, (Leçons de Stockholm 1895).(Hermann Paris 1897.) Reprinted, oeuvres de Paul Painlevé, vol .I (Editions du CNRS, Paris,1913).

[20] P. Painlevé, Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, Bull. Soc. Math. France 28 (1900) 201-261.

[21] P. Painlevé, Sur les équations différentielles d'ordre quelconque à points critiques fixes, C.R. Acad. Sc. Paris 130 (1900) 201-261.

[22] P. Painlevé, Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes, C.R. Acad. Sc. Paris 143 (1906) 1111-1117.

[23] Oeuvres de Paul Painlevé, 3 volumes, Editions du CNRS, Paris 1973, 1974, 1976.

[24] Oeuvres de Emile Picard, 2 volumes, Editions du CNRS, Paris 1979.

[25] H. Poincaré, Sur un théorème de L. Fuchs. Acta Math. 7 (1185) 1-32.

[26] A. Ramani, B. Grammaticos and T. Bountis, The Painlevé property and singularity analysis of integrable and non integrable systems, Physics Reports 180 (1889). 159-245.

[27] M. Ven der Put, Differential equation in caracteristic p, Composition Math. 97 (1995) 227-251.