Soit l'équation différentielle non linéaire du premier ordre et de degré trois :

$$\left\{\begin{array}{l} (w')^3 + (p_2 w^2 + p_1 w + p_0)(w')^2 + \\ (q_4 w^4 + q_3 w^3 + q_2 w^2 + q_1 w + q_0)\, w' + \\ + r_6 w^6 + r_5 w^5 + r_4 w^4 + r_3 w^3 + r_2 w^2 + r_1 w + r_0 = 0. \end{array}\right. \tag{2.23}$$

où $p_i\,(i = 0, ...2)\,, q_j (j = 0, ...4),\ r_k\,(k = 0, ...6)$ sont des fonctions analytiques en z.

I/ pour $p_2 \neq 0$, sous les conditions

$$\begin{cases} q_4 = \frac{1}{3}p_2^2 \\ q_3 = \frac{2}{3}p_1p_2 \\ q_2 = \frac{1}{3}p_1^2 + \frac{2}{3}p_0p_2 \\ q_1 = \frac{2}{3}p_0p_1 \\ q_0 = \frac{1}{3}p_0^2 + \beta \\ r_6 = \frac{1}{27}p_2^3 \\ r_5 = \frac{1}{9}p_1p_2^2 \\ r_4 = \frac{1}{9}p_2\left(p_1^2 + p_0p_2\right) \\ r_3 = \frac{1}{9}p_1\left(2p_0p_2 + \frac{1}{3}p_1^2\right) \\ r_2 = \frac{1}{9}p_0p_1^2 + \frac{1}{9}p_0^2p_2 + \frac{1}{3}\beta p_2 \\ r_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}p_0^2 + \beta\right)p_1 \\ r_0 = \frac{1}{27}p_0^3 + \frac{1}{3}\beta p_0 + \alpha \end{cases}$$

où $\alpha\,,\beta$ désignent des constantes arbitraires complexes.

L'équation (2.23) est équivalente à trois équations de Ricatti, par conséquent elle est à points critiques fixes.

II/ Sous les conditions

$$\begin{cases} 1)\ \dfrac{2}{9}p_1\left(p_1+p_1''-2p_1p_1'+p_1q_2+\dfrac{5}{2}q_2'\right)+\dfrac{2}{3}q_2\left(\dfrac{1}{3}p_1'-q_2\right)-\dfrac{1}{3}q_2''=0 \\ 2)\ p_1\left(\dfrac{2}{3}p_0'+\dfrac{1}{3}p_0''-\dfrac{4}{9}p_0'p_1+\dfrac{2}{9}p_1q_1+\dfrac{1}{2}q_1'-\dfrac{1}{3}q_2+\dfrac{1}{6}q_1\right)+ \\ p_0\left(-\dfrac{8}{9}p_1p_1'+\dfrac{1}{3}p_1''+\dfrac{2}{9}p_1q_2+\dfrac{2}{3}q_2'+\dfrac{1}{3}q_2\right)-\dfrac{1}{2}q_1''-\dfrac{2}{3}q_1q_2=0 \\ 3)\ r_0'+\dfrac{1}{3}q_0\left(\dfrac{2}{3}p_0p_1-q_1-p_0'\right)=0 \end{cases}$$

Où p_0, p_1, q_1, q_2 et r_0 sont des fonctions analytiques en z.

Si l'équation (2.3) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} (w')^3+(p_1w+p_0)(w')^2+(q_2w^2+q_1w+q_0)\,w'+ \\ \left[\dfrac{1}{9}p_1\left(-\dfrac{4}{3}p_1^2+2p_1'+5q_2\right)-\dfrac{1}{3}q_2'\right]w^3+ \\ \left[\dfrac{1}{3}p_0\left(-\dfrac{4}{3}p_1^2+p_1'+\dfrac{2}{3}q_2\right)+p_1\left(\dfrac{1}{2}q_1+\dfrac{1}{3}p_0'\right)-\dfrac{1}{2}q_1'\right](w)^2+ \\ \left[\dfrac{2}{3}p_0\left(p_0'+q_1-\dfrac{2}{3}p_1q_0\right)+\dfrac{1}{3}p_1q_0-q_0'\right]w+r_0=0 \end{cases}$$

elle se ramène par dérivation à l'équation différentielle linéaire du second ordre:

$$w''=-\frac{1}{3}p_1w'+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}p_1^2-2q_2-p_1'\right)w+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}p_0p_1-q_1-p_0'\right)$$

par conséquent elle est à points critiques fixes.

III/ Si l'équation (2.3) s'écrit sous la forme

$$(w')^3+\frac{3}{2}w^2(w')^2+\frac{1}{2}w^6+c=0 \qquad (c \text{ constante arbitraire complexe})$$

elle se ramène par dérivation à la dixième équation de Painlevé:

$$w''=-ww'+w^3.$$

III/ Si l'équation (2.3) s'écrit sous la forme : $(w')^3 + \frac{3}{2}w^2(w')^2 + \frac{1}{2}w^6 + c = 0$ (c constante arbitraire complexe), elle se ramène par dérivation à la dixième équation de Painlevé: $w'' = -ww' + w^3$.

Par conséquent elle est à points critiques fixes.

IV/ Pour p_0, tels que $-\frac{1}{18}p_0$ est solution de l'équation $y'' = 6y^2 + \frac{1}{2}$.

Si l'équation (2.3) s'écrit sous la forme:

$$\left\{\begin{array}{l} (w')^3 + \left(\frac{3}{2}w^2 + p_0\right)(w')^2 + (p_0'w - p_0'')\,w' + \\ \frac{1}{2}w^6 + p_0w^4 + p_0'w^3 + \left(-\frac{2}{3}p_0^2 - p_0''\right)w^2 + \\ \left(p_0''' + \frac{4}{3}p_0'p_0\right)w - \frac{1}{3}(p_0')^2 + c = 0 \end{array}\right.$$

elle se ramène par dérivation à la dixième équation de Painlevé bis

$$w'' = -ww' + w^3 + \frac{2}{3}p_0 - \frac{2}{3}p_0'.$$

Par conséquent elle est à points critiques fixes.

La méthode que nous venons de suivre n'est pas limitée aux équations différentielles du premier ordre et de degré trois. D'après quelques rapides essais, il me paraît probable que le cas d'équations d'ordre un et de degré quatre pourra conduire à des résultats intéressants, mais je dois avouer que le courage m'a manqué pour entreprendre les énormes calculs qui nécessitera l'étude d'un système de vingt quatre équations.