N° 04/2015-M/MT

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTE DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse et approximation des équations aux dérivées partielles

Par : KEHALI Salima

THEME

SOLUTIONS D'UNE EQUATION PARABOLIQUE HYPER-DISSIPATVE DANS DES ESPACES DE PSEUDO-MESURES

Soutenu publiquement, le 15/11/2015 devant le jury composé de:

M.	R. BEBBOUCHI	Professeur	à L.U.S.T.H.B	Président.
M.	A. KESSAB	Professeur	à L.U.S.T.H.B	Directeur de Mémoire.
M.	A. TOUZALINE	Professeur	à L.U.S.T.H.B	Examinateur.
M.	A. KHEMMOUDJ	Maitre de conférences	à L.U.S.T.H.B	Examinateur.

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement, à DIEU le tout puissant de m'avoir donné courage et patience durant toutes ces années d'études.

Je suis heureux d'exprimer à Monsieur le Professeur Amor KESSAB, ma gratitude pour la confiance qu'il m'a accordée. Je le remercie d'avoir accepté la direction de ce travail ainsi que pour sa disponibilité et pour ses conseils très éclairés.

J'adresse mes sincères remerciements et ma grande reconnaissance à Monsieur le professeur Rachid BEBBOUCHI, qui a accepté de participer à mon jury et de présider le Jury de soutenance.

Mes remerciements et mon grand respect s'adressent également à Mon- sieur Ammar KHEMMOUDJ, Maître de conférence, qui a eu l'amabilité d'accepter de faire partie de mon jury et d'avoir examiné mon travail.

Je tiens à remercier, Monsieur le professeur Arezki TOUZALINE , pour m'avoir honoré par sa participation au jury et pour avoir accepté d'examiner ce travail .

Je souhaite également remercier tous les enseignants de la faculté de Mathématiques à l'USTHB ayant assurés mes années d'études.

Aussi, je remercie tous mes collègues de la faculté de Mathématiques à L' USTHB pour le soutien moral qu'ils m'ont apporté.

Enfin, je ne saurais jamais suffisant remercier mon père et ma mère, mes frères et mes sœurs, que je porte toujours avec moi dans ma pensée.

Sans leurs confiances immenses en moi, sans leurs aides et leurs amours, je n'aurais pas pu aller au bout de mes projets.

KEHALI Salima

Résumé

On étudie le problème de Cauchy pour une équation parabolique hyper-dissipative dans des espaces de pseudo-mesures.

On montre l'existence, l'unicité et la stabilité asymptotique des solutions pour des Données assez petites dans des espaces de pseudo-mesures.

Mots-clés : EDP, Equation parabolique,pseudo-mesures

Table des matières

0.1 Introduction

Dans ce mémoire, nous étudions le problème de Cauchy pour une équation parabolique hyper-dissipative dans des espaces de pseudo-mesures.On suivra essentillement [2] et [9].
Nous considérons l'espace des pseudo-mesures appropriés pour étudier l'équation parabolique non linéare qui peut admettre des solutions singulières.
Le problème considéré est de la forme :

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\frac{\rho}{2}} u = \nu u^{\alpha}, & t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n \\ u_0(x) = u(0,x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$\nu \in \mathbb{R}$ est une constante ;α est un nombre entier , $\alpha \geq 2$ et $\rho \geq 2$.
Ce mémoire se divise en trois chapitres.
Dans un premier chapitre, nous nous attachons à faire quelques rappels sur le cadre fonctionnel utilisé dans la suite de ce travail.
Le chapitre 2 est consacré à l'étude de l'existence, de l'unicité et de la stabilité des solutions mild globales en temps ainsi qu'au comportement asymptotique des solutions.
Le résultat d'existence de solutions mild est énoncé dans le théorème 2.2.1 .
Plus précisément,nous chercherons une solution des équations paraboliques hyper-dissipatives sous la forme:

$$u = S(t)u_0 + B(u, u, ...u)(t)$$

où $u_0(x)$ est la condition initiale, $S(t) = e^{-t(\Delta)^{\rho/2}}$ est le semi-groupe de la chaleur,
où

$$B(u_1, ...u_\alpha)(t) = \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} u_1(\tau)u_2(\tau).....u_\alpha(\tau)d\tau$$

Cette solution est appelée *solution mild.*
Nous montrerons la continuité de l'opérateur bilinéaire $B(u, u, ...u)$ dans l'espace $Y_\sigma^{a,b}(\mathbb{R}^+); i, e$
$B(u_1, ...u_\alpha) \leq$

$$K \left\| u_1; C_\sigma([0;\ \infty), PM^b(\mathbb{R}^n) \right\| \left\| u_1; C_w([0;\ \infty), PM^a(\mathbb{R}^n) \right\| \times ... \times \left\| u_\alpha; C_w([0;\ \infty), PM^a(\mathbb{R}^n) \right\|$$

où

$\|u; PM^a(\mathbb{R}^n)\ \| := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} ess \, |\xi|^a \, |\hat{u}(\xi)|$

$\left\|u; C_\sigma([0;\ \infty), PM^b(\mathbb{R}^n)\right\| = \sup_{t\ >0} t^\sigma \left\|u(t);\ \ PM^b(\mathbb{R}^n)\right\|$

Nous étudions dans le chapitre 2 le comportement asymptotique des solutions de l'équation parabolique hyper-dissipative.

On observera, dans le chapitre 3,que les espaces PM^a sont munis d'une norme invariante par les dilatations normalisées $u(x) \to \lambda^{\frac{\rho}{\alpha-1}} u(\lambda x)$,$\lambda > 0$ .Cette propriété permet d'entrevoir l'existence de solutions auto-similaires pour les équations hyper-dissipatives,c'est-à-dire des solutions $u(t,x)$ telles que $u(t,x) = \lambda^{\frac{\rho}{\alpha-1}} u(\lambda^\rho t, \lambda x)$, pour tout $\lambda > 0$.

Chapitre 1

Rappels de quelques résultats fondamentaux

1.1 Quelques outils d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Définition et propriétés élémentaires des espaces $\mathbf{L}^p$

(*voir* [14]).

Définition 1.1.1. — Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p < \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$; on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } (\mathbb{C}); f \text{ mesurable et } \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx < \infty \right\} \qquad (1.1.1)$$

On note

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right]^{1/p} \qquad (1.1.2)$$

Définition 1.1.2 Si $p = \infty$, on note $L^\infty(\Omega)$ l'espase des fonctions mesurables essentiellement bornées sur Ω :

$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f$ mesurable et il existe une constante C telle que $|f(x)| \leqslant C$ *p.p.* sur $\Omega\}$.

On note:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \inf \{c > 0, |f(x)| \leqslant c \text{ } p.p. \text{ sur } \Omega\} = \sup_{\Omega} ess \, |f| \, . \qquad (1.1.3)$$

Remarque 1.1.1 :si $f \in L^{\infty}$ ona :

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^{\infty}} \text{ p.p sur } \Omega$$

En effet il existe une suite C_n telle que $C_n \to \|f\|_{L^{\infty}}$grâce à la définition de la *borne* $inf\acute{e}rieure$:

Soit E est un ensemble de $\mathbb{R}$.et $A \subset E$:

$a \in A$ est un *minorant* de A : $\forall\, x \in A, a \leq x.$

$\alpha = infA \Leftrightarrow \alpha$ minorant de A et $\forall\epsilon$,$\exists c \in A : c \leq \epsilon + \alpha$

Rappelons que:

$$\|f\|_{\infty} = \inf \{c/ |f| \leqslant c \;\; presque\ partout\}$$

De cette définition on tire deux choses:

1/$\lambda \{|f| > 0\}$ $(mesure\ de\ l'ensemble\ |f| > c) = 0$

2/Par définition de $I'Inf$ (caractérisation de $l'Inf$) :

$\forall\varepsilon > 0, \exists\ c_0 \in \{c/ |f| \leqslant c \;\; presque\ partout\}$ tq: $c_0 \leq \|f\|_{\infty} + \varepsilon$

donc:

$$c_0 - \varepsilon \leq \|f\|_{\infty} \Rightarrow |f| \leq c_0 \leq \varepsilon + \|f\|_{\infty}$$

Il s'en suit que :$\forall n > 0$, $|f| \leq \|f\|_{\infty} + \frac{1}{n}$($\frac{1}{n}$ joue le role de ε)

On pose alors: $F_n = \left\{f\ /\ \ |f| \leq \|f\|_{\infty} + \frac{1}{n}\right\}$

Grace à 1/ : $\lambda(\complement_E^{F_n}) = 0$ et l'on remarque:

$\{|f| > \|f\|_{\infty}\} = \underset{n}{\cup}(\complement_E^{F_n}) = \complement_E(\overset{n}{\cap}F_n)$, la sous additivité de λ donne alors:

$\lambda \{|f| > \|f\|_{\infty}\} \leq \sum\limits_{n}\lambda(\complement_E^{F_n}) = 0$

Ce resultat dit simplement : $|f| \leq \|f\|_{\infty}\ p.p.$

Théorème 1.1.1 *(Inégalité de Hölder).* — Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$ Alors $f.g \in L^1$ et

$$\int |fg| \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^p(\Omega)} \qquad (1.1.4)$$

Preuve. La conclusion est évidente si $p = 1$ et si $p = \infty$. Supposons donc $1 < p < \infty$. Rappelons *l'inégalité de Young.*

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \qquad \forall a \geqslant 0, \quad \forall b \geqslant 0. \tag{1.1.5}$$

la demonstration de l'inégalité est évidente : la fonction ln étant *concave* sur $]0,\infty[$

Ona

$$\ln(\tfrac{1}{p}a^p + \tfrac{1}{q}b^q) \geqslant \tfrac{1}{p}\ln a^p + \tfrac{1}{q}\ln b^q = \ln ab.$$

Donc

$$|f(x)|\,|g(x)| \leqslant \tfrac{1}{p}\,|f(x)|^p + \tfrac{1}{q}\,|g(x)|^q \qquad p.p.x \in \Omega.$$

Il en résulte que $fg \in L^1$ et que

$$\int |fg| \leqslant \frac{1}{p}\,\|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{q}\,\|g\|^q_{L^p(\Omega)} \tag{1.1.6}$$

Remplaçant f par λf $(\lambda > 0)$ il vient

$$\int |fg| \leqslant \frac{\lambda^{p-1}}{p}\,\|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{\lambda q}\,\|g\|^q_{L^p(\Omega)}\,. \tag{1.1.7}$$

On choisit $\lambda = \|f\|^{-1}_{L^p}\cdot\|g\|^{q/p}_{L^q}$ (de manière à minimiser le membre de droite dans(1.1.7)

On obtient alors (1.1.3)

Remarque1.1.2 :La concavité de la fonction logarithme népérien permet d'écrire, pour tous réels strictement positifs a et b,

$$\ln ab = \tfrac{1}{p}\ln a^p + \tfrac{1}{q}\ln b^q \leq \ln(\tfrac{1}{p}a^p + \tfrac{1}{q}b^q)$$
$$ab \leq \tfrac{1}{p}a^p + \tfrac{1}{q}b^q$$

Remarque1.1.3 Il convient de retenir une conséquence trés utile de *l'inégalité de Hölder*:

Soient $f_1, f_2, .., f_k$ des fonctions telles que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leqslant i \leqslant k$ avec
$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + .. + \frac{1}{p_k} \leqslant 1.$
Alors le produit $f = f_1 f_2 ... f_k$ appartient à $L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_p \leqslant \|f_1\|_{p_1} ... \|f_k\|_{p_k} \tag{1.1.8}$$

. En particulier si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, alors $f \in L^r(\Omega)$ pour tout $p \leqslant r \leqslant q$ et l'on a I'inégalité d'interpolation

$$\|f\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|f\|_{L^q}^{1-\alpha} \text{ } où \text{ } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1); \tag{1.1.9}$$

En effet: $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$

$$1 = \frac{\alpha r}{p} + \frac{r(1-\alpha)}{q}$$

$$1 = \underbrace{\frac{1}{\frac{\alpha r}{p}}}_{\text{rôle de } p} + \underbrace{\frac{1}{\frac{r(1-\alpha)}{q}}}_{\text{rôle de } q}$$

On utilise alors: (1.1.4)

Théorème 1.1.2 L^p est un espace vectoriel et $\|\|_{L^p}$ est un norme pout tout $1 \leq p \leq \infty$.

Preuve les cas $p = 1$ et $p = \infty$ sont évidents (utiliser la remarque 1.1.1).

Supposons que $1 < p < \infty$ et soient $f, g \in L^p$, par recurrence ona

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \tag{1.1.10}$$

Par conséquent $f + g \in L^p$.D'autre part ona

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)}^p = \int |f+g|^{p-1} |f+g| \quad \leq \int |f+g|^{p-1} |f| + \int |f+g|^{p-1} |g| \tag{1.1.11}$$

Or $|f+g|^{p-1} \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et grâce á l'ntégalité de *Hölder* on obtient

En effet $|f+g|^{p-1} \in L^q \Rightarrow \left(|f+g|^{p-1}\right)^q < \infty$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{p}{q} = p \Leftrightarrow p + q = pq$

$$\Leftrightarrow p = pq - q = q(p-1)$$

$|f+g|^{(p-1)q} = |f+g|^p$

Donc

$$\|f+g\|_{L^p}^p \leq \|f+g\|_{L^p}^{p-1} \|f\|_{L^p} + \|f+g\|_{L^p}^{p-1} \|g\|_{L^p} \tag{1.1.12}$$

i.e

$$\|f+g\|_{L^p}^p \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)} \tag{1.1.13}$$

C'est **I'inégalité de Minkowski:**

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, f , g :$\Omega \to \mathbb{R}$ mesurable ,et $p \in [1, \infty[$; alors

$$\left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$$

Convolution et régularisation :

Théorème 1.1.3 Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$.

On pose:

$$(f*g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy. \tag{1.1.14}$$

Alors $f*g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $f*g = g*f$ *et* :

$$\|f*g\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p(\Omega)^b}. \tag{1.1.15}$$

Théorème de la convergence dominée de Lebesgue: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de *fonctions mesurables* sur un *espace mesuré* $(E, \mathcal{A}, \mu)$, à valeurs réelles ou complexes, telle que :

- la suite de fonctions $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur E vers une fonction f ;
- il existe une fonction intégrable g telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E\ : |f(x)| \leq g(x)$$

Alors f est intégrable et

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu \to 0$$

En particulier :

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

1.1.2 Distributions:

(voir [14])

- Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^m$, on pose

$$|\alpha| = \alpha_1 + ...\alpha_m \ , \qquad \alpha! = \alpha_1!............\alpha_n!$$

- Si $\beta \leq \alpha$ (c'est à dire $\beta_j \leq \alpha_j$ pour $j = 1, ..., m$), on note :

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!}$$

- Pour $x = (x_1.........x_m\ ) \in \mathbb{R}^m$, on note :

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}...............x_m^{\alpha_m} \quad ,\partial_j \text{ ou } \partial_{x_j} = \tfrac{\partial}{\partial x_j} \quad , \qquad \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}..........\partial_m^{\alpha_m}$$

Quelques formules classiques:

Formules du binôme et de Leibnitz :pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ et f, g de classe $\mathcal{C}^{|\alpha|}$ sur $\mathbb{R}^n$

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}x^{\alpha-\beta}y^\beta \ , \partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^{\alpha-\beta}f\partial^\beta y$$

Formules de Taylor:pour $f \in C^{m+1}(\Omega)$ et $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^n$,segment $[a\ ,\ b]$ de $\mathbb{R}^n$

$$f(b) = \sum_{|\alpha|\leq m}\frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!}(b-a)^\alpha + R_m, \text{ avec reste intégral}$$

$$R_m = \sum_{|\alpha|=m+1}\tfrac{(b-a)^\alpha}{\alpha!}\int_0^1(1-t)^m\partial^\alpha f(a+t(b-a))dt$$

Formules de Parseval-Plancherel:

Soient f et g deux fonctions de $L^2(\mathbb{R}^n)$.alors:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi$$

Fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact:

Définition 1.3.1 Soit ϕ une fonction continue à valeurs complexes définie sur $\mathbb{R}^n$. Le support de la fonction ϕ est noté $supp(\phi)$,est l'adhérence des $x \in \mathbb{R}^n$

$$supp(\phi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \ \setminus \phi(x) \neq 0\}}$$

L'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.L'espace de ces fonctions est noté $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

Exemple 1:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{(1-x^2}\right) & \text{pour} \quad |x| \geq 1/a, \\ 0 & \text{pour} \quad |x| < 1/a, \end{cases}$$

Espace des fonctions test:

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. L'espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}^n$, indéfiniment dérivables et à support compact muni de la topologie que l'on définira plus loin.

Exemple 2

$$\begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \notin [a,b] \\ \exp(\frac{1}{(x-a)(x-b)}) & \text{pour } x \in]a,b[\end{cases}$$

est une fonction de $\mathcal{D}$ de support $[a,b]$

Topologie de $\mathcal{D}$

Définition 1.3.3**:** une suite $(\varphi_n)_{n>0}$ de fonctions de $\mathcal{D}$ converge vers une fonction φ lorsque n tend vers l'infini si:

1) il existe un ensemble borné B (independant de n) de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $n > 0$, $supp(\varphi_n) \subset B$

2) pour tout entier $k \geq 0$, la suite des dérivées $(\varphi_n^{(k)})_n$ converge unifomément sur $\mathbb{R}^n$ vers $\varphi^{(k)}$.

Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

Une distribution T sur un Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,

continue au sens suivant:

pour tout compact $K \subset \Omega$, il exist $C > 0$ et $C_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ telle que

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), supp\ \phi \subset K \Rightarrow |\langle T \ \ , \phi\rangle| \leq C_K \max_{|\alpha|\leq p_K} \ \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

Lorsque p_K peut être choisi indépendemment de K, on dit que T est une distribution d'ordre $\leq p$ dans Ω .

- Ordre de T =le plus petit entier $p \geq 0$ telle que T soit d'ordre $\leq p$
- **Notation** : $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace vectoriel des disributions sur Ω

Autrement dit

$$T \in \mathcal{D}'(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \varphi \mapsto \langle T, \varphi\rangle \text{ est linéaire de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } \mathbb{R} \\ \bullet\ \text{Si } \varphi_j \longrightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega) \text{ alors } \left\langle T, \varphi_j\right\rangle \to 0 \text{ dans } \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.1.16}$$

Notation:

Si T est une distribution et φ une fonction test de $\mathcal{D}(\Omega)$, on note $T\ (\varphi)=< T\ ,\varphi >$

Exemple1:toute fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, définit une distribution sur Ω en posant

$$\langle\ T_f \ \ , \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \tag{1.1.17}$$

La distribution T_f est d'ordre 0

Exemple2: La masse de Dirac en $x_0 \in \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, définie par

$$\langle \delta_{x_0},\ \varphi\rangle = \varphi(x_0)$$

Exemple3: distributions positives

Definition: Une distriution T $\in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dite positive $(T \geq 0)$ si on a

$$\langle\ T \ \ , \varphi\rangle \geq 0 \ \text{ pour tout } \ \varphi \ \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \text{ telle que. } \varphi \geq 0 \ \text{ sur } \ \Omega$$

La masse de Dirac δ_{x_0} est une distribution positive sur $\mathbb{R}^n$

Exemple4:

la fonction $x \to \frac{1}{x}$ n'appartient pas á $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.Mais définit la distribution valeur principal $\frac{1}{x}$ noteé $vp\frac{1}{x}$ par la formule:

$$\left\langle vp\tfrac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int\limits_{|x|>\epsilon} \tfrac{\varphi(x)}{x} dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \tfrac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x} dx$$

qui est une distribution d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$.

Suites convergentes dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

Une suite (T_n) de distributions sur Ω converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $-$on écrira

$$T_n \to T \quad - \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \ si \ \langle T_n \ , \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \quad \text{pour} \quad \text{tout} \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

Dérivation des distributions

Soinet Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $T \in D'(\Omega)$;sa dérivée partielle par rapport à la variable x_i est, par définition, la distribution:

$$\langle \partial_{x_i} T \ , \varphi \rangle \quad = - \langle T \ , \partial_{x_i} \varphi \rangle \ , \qquad i = 1, ..., n$$

De même, on a pour tout multi-indice α

$$\langle \mathcal{D}^\alpha T, \varphi \rangle \quad = (-1)^{|\alpha|} \langle T \ , \mathcal{D}^\alpha T \rangle$$

La classe de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$

Définition 1.4.1 **.** *(L'espace $S(\mathbb{R}^n)$)* — On note $S(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées.

Autrement dit, une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ appartient à $S(\mathbb{R}^n)$ si

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \right| < \infty \quad pour \ tous \ \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \Leftrightarrow \lim_{|x| \to +\infty} \left| x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \right| = 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$$

Evidemment, $S(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{C}$).

Exemple 1 *(Quelques fonctions de S)* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$.

Toutes les fonctions de la forme:

$$\varphi(x) = P(x)e^{-a|x|^2}.$$

avec $a > 0$ et P fonction polynôme appartiennent à la classe de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$.

En revanche, aucune fraction rationnelle (autre que la fonction nulle) n'appartient à la classe de Schwartz.

La topologie de l'espace $S(\mathbb{R}^n)$ n'est pas définie par une norme, mais par une famille dénombrable de semi- normes, définies comme suit : pour toute fonction $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$\mathcal{N}_p(\varphi) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant p} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \right|, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Grâce à la famille de semi- normes $\mathcal{N}_p$, on peut définir ce qu'est une suite convergente dans $S(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.4.2. *(Suites convergentes dans $S(\mathbb{R}^n)$)* — Une suite $(\varphi_m)_m$ de fonctions de $S(\mathbb{R}^n)$ converge vers une fonction $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ dans l'espace $S(\mathbb{R}^n)$ si

$$\mathcal{N}_p(\varphi_m - \varphi) \longrightarrow 0 \text{ pour tout } p \geqslant 0 \text{ lorsque } m \longrightarrow \infty.$$

Proposition 1.4.1 *(Densité de l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $S(\mathbb{R}^n)$)* — $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace de $S(\mathbb{R}^n)$ partout dense dans $S(\mathbb{R}^n)$.

C'est à dire que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, tout $\varepsilon > 0$ et pour toute fonction $u \in S(\mathbb{R}^n)$ il existe une suite $\{\varphi_m,\ m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que:

$$\lim_{m \to \infty} (\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta (\varphi_m) - x^\alpha \partial^\beta u \right|) = 0.$$

Corollaire 1.4.1 *(Densité de $S(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$).* — Soit $p \in [1, \infty[$, Toute fonction de $L^p(\mathbb{R}^n)$ est limite au sens de la norme L^p d'une suite de fonctions appartenant à $S(\mathbb{R}^n)$.

.

Définition 1.4.3 *(Transformation de Fourier dans S)* — A toute fonction $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, on associe sa transformation de Fourier $\mathcal{F}\varphi$ (ou encore $\widehat{\varphi}$) : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$\xi \mapsto \mathcal{F}\varphi(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x}\varphi(x)dx = \hat{\varphi}(\xi) \tag{1.1.18}$$

pour tout $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ étant $x.\xi$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ défini par : $x.\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\xi_i$
L'application linéaire $\mathcal{F}$ est définie pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, puisque, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\left|e^{-i\xi.x}\varphi(x)\right| = |\varphi(x)| \quad et \quad |\mathcal{F}\varphi(\xi)| \leq \int |\varphi(x)|\, dx = \|\varphi\|_{L^1} < \infty$$

Théorème 1.4.1 *(Formule d'inversion de Fourier sur $S(\mathbb{R}^n)$)* — La transformation de Fourier est un isomorphisme de l'espace $S(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même.
L'inverse de cet isomorphisme est donné par la formule

$$\mathcal{F}^{-1}\psi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\psi(\xi)\frac{d\xi}{(2\pi)^n},\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1.19}$$

Enfin, les isomorphismes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ sont continus sur $S(\mathbb{R}^n)$

1.1.3 Les distributions tempérées

Définition 1.5.1 *(L'espace $S'(\mathbb{R}^n)$ des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$)* Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur $S(\mathbb{R}^n)$, c'est- à-dire une forme linéaire T sur $S(\mathbb{R}^n)$ telle qu'il existe un entier $p \geqslant 0$ et $C > 0$ pour lesquels

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C\mathcal{N}_p(\varphi) \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

L'ensemble des distributions tempérées est un espace vectoriel, que l'on note $S'(\mathbb{R}^n)$. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$, toute distribution tempérée $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ définit par restriction une forme linéaire

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle .$$

Cette forme linéaire est évidemment une distribution puisque, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans un compact K de $\mathbb{R}^n$, ona:

$$\mathcal{N}_p(\varphi) \leqslant C_K . \sup_{|\alpha| \leq p} |\partial^\alpha \varphi(x)| \ , C_K = constante \ qui \ depend \ de \ K$$

Par conséquent

$$S'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

autrement dit , $T \in S'(\mathbb{R}^n)$, si et seulement si la suite $\{T\varphi_m, \ m \in \mathbb{N}\}$ converge vers $T(\varphi)$ pour toute suite $\{\varphi_m, \ m \in \mathbb{N}\} \subset S(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

Exemple *(Quelques distributions, tempérées ou non)*

Toute distribution à support compact est tempérée $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$.

Toute fonction appartenant à l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$ définit une distribution tempérée

$$L^p(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n) \ \text{ pour tout } p \ \text{ tel que } 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Toute fonction continue à croissance polynômiale définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n$. La distribution sur $\mathbb{R}$:

$$T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_k$$

est tempérée si la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est à croissance polynômiale, c'est- à-dire s'il existe un entier $p \geqslant 0$ telle que:

$$a_k = O(|k|^p) \ lorsque \, |k| \to \infty.$$

En revanche, les distributions définies par les fonctions

$$x \mapsto e^x \quad , \quad x \mapsto \sinh x \ \text{ ou } \cosh x.$$

ne sont pas des distributions tempérées.

Définition . *(Convergence dans $S'(\mathbb{R}^n)$)* — On dit qu'une suite $(T_n)_n$ de distributions tempérées converge vers $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ si

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \ \ lorsque\ n \to \infty\ pour\ tout\ \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Définition . *(Transformation de Fourier d'une distribution tempérée)*

On remarquera d'abord que : $\varphi \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \widehat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$.

A toute distribution tempérée $T \in S'(\mathbb{R}^n)$, on associe sa transformée de Fourier $\mathcal{F}T$ qui est la distribution tempérée définie par:

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle \ \text{ pour toute fonction } \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

On désigne par$\langle f, g \rangle$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, i.e.

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx,$$

et également le produit de dualité entre $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (espace des distributions sur Ω), et $g \in \mathcal{D}(\Omega)$ (espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω et à support compact dans Ω).

Espaces de $H^s(\mathbb{R}^n)$ — Dans le cas particulier où $\Omega = \mathbb{R}^n$, on peut redéfinir $H^m(\Omega)$ par la transformation de fourier.Si v est une fonction continue à support compact, sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(v)$ est définie par:

$$\hat{v}(\xi) = \mathcal{F}(v)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix.\xi)\, v(x)dx, \text{ où } \ \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \text{ et } \ x.\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i.\xi_i$$

On définit alors $H^m(\mathbb{R}^n)$ par :

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n);\ (1 + |\xi|^2)^{m/2}\hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

Il est alors naturel de poser la définition suivante :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n);\ (1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$|v|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left|(1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{v}\right|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

1.1.4 Espace de Sobolev $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$

(*voir* [11], [14] *et* [15])

Définition 1.2.1

On appelle espace de Sobolev d'ordre m sur $L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty, m \in \mathbb{N}$ que l'on note $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace défini par:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v\backslash \ \ v \in L^p(\Omega), \mathcal{D}^\alpha v \in L^p, |\alpha| \leq m\} \tag{1.1.20}$$

muni de la norme

$$|v|_{\mathrm{w}^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha v|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \; ; 1 \leq p < \infty \tag{1.1.21}$$

Lorsque $\quad p = +\infty$

$$|v|_{\mathrm{w}^{m,\infty}(\Omega)} = \max |D^\alpha v|_{L^\infty(\Omega)} \, ; p = \infty \tag{1.1.22}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, la dérivée est prise au sens des distributions

1. La fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ est notée $W_0^{m,p}(\Omega)$

Le cas "p = 2"est fondamental, pour simplifier l'écriture, on posera

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) \tag{1.1.23}$$

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega)/D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m \right\} \tag{1.1.24}$$

muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, |u|^2_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int |D^\alpha u|^2 \, dx \tag{1.1.25}$$

C'est un espace de Hilbert.

2. La fermeture de $\mathcal{D}$ (Ω) dans $H^m(\Omega)$ est note $H_0^m(\Omega)$.

$$H_0^m(\Omega) \ est \ un \ sous - espace \ \ fermé \ de \ \ H^m(\Omega). \tag{1.1.26}$$

$H_0^m(\Omega)$est un espace de Hilbert pour la structure induite par celle de $H^m(\Omega)$

3.On definit l'espace $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ par

$$W_{loc}^{1,p}(\Omega) \ = \{u \in L_{loc}^p(\Omega)/\forall i \ 1 \leq i \leq n, \partial u/\partial x_i \in \ L_{loc}^p(\Omega)\} \tag{1.1.27}$$

avec

$$L_{loc}^p(\Omega) = \{u \in L^p(K) \ \text{ pour tout compact } K \subset \Omega \ \} \tag{1.1.28}$$

en particulier,

$$L_{loc}^1(\Omega) = \left\{ u \text{ mesurable/ } \int_K |u(x)| \, dx < \infty, \forall \ K \subset\subset \Omega \right\} \tag{1.1.29}$$

Remarque 1.2.1 $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^m(\Omega)$, Alors toute forme linéaire continue sur $H_0^m(\Omega)$ s'identifie à une distribution sur Ω.

Si l'on désigne par H^{-m}l'espace dual de H_0^m alors:

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \ ((= H^0) \hookrightarrow H^{-m}) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

on peut identifier le dual $H^{-1}(\Omega)$ de $H_0^1(\Omega)$ à un sous espace de distributions sur Ω .

1.2 Rappel sur les semi-groupes

1.2.1 Semi-groupes

(voir [7] et [8])

Soit H un espace de Hilbert, on désigne par $L(H)$ l'ensemble des applications linéaires continues de H dans H.

Définition 1.2.2 Un semi-groupe d'operateur continu (fortement) sur H est une fonction

$$T: \ \mathbb{R}^+ \to L(H)$$

$$t \quad \mapsto T(t)$$

qui vérifie les propriétés suivantes:

$\bullet T(t) = I_t$

$\bullet T(t+s) = T(t)T(s)$ pour tout $s, t \geq 0$

$\bullet \lim\limits_{t \to 0^+} T(t)z = z$ pour tout $z \in H$

On dit que $\{T(t),\ t \geq 0\}$ est un semi-groupe de classe $\mathcal{C}^0$,ou un $\mathcal{C}^0$ semi-groupe.

Théorème du point fixe:

Soit K sous espace fermé non vide d'un espace de Banach$(X, \|.\|_X)$

supposons que $\Lambda\ : K \to K$ est un contraction c'est à dire:

$$\exists \ \alpha \in]0,1[\ (0 < \alpha < 1) telle\ que \, \|\Lambda u - \Lambda v\| \leq \alpha \, \|u - v\| \quad ; \forall u, v \in K$$

Alors il existe un unique element $u \in X$ telque $\Lambda u = u$ (u est un point fixe de X)

1.2.2 Principe de Duhamel :

(voir Annexe)

Soit $P(x,t) = u_t + (-\Delta)^{\rho/2} u, x \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0, \infty[$. On considère le problème de cauchy suivant:

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\rho/2} u = \nu u^\alpha & \text{dans } t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \quad u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

La solution du problème homogène est définie par:

$S(t)u_0 = G(t) * u_0,$

où $S(t)$ est le semi-groupe de la chaleur défini par la convolution avec la fonction de Green $G(x,t) = t^{-\frac{3}{2}} \, e^{(-\frac{|x|^2}{4t})}$.

Posons $S(t) = e^{-t(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}}$; $F(x,t) = \nu u^\alpha$

Ona

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{t.(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} \, u(x,t)\right] = (-\Delta)^{\frac{\rho}{2}} e^{t.(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} \, u(x,t) + e^{t.(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} \, \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$$

$$= e^{t.(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} \left\{ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + (-\Delta)^{\frac{\rho}{2}} u(x,t) \right\}$$
$$= e^{t.(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} \nu u^{\alpha}$$

$$= e^{t.(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} \ F(x,t)$$

En integrant entre 0 et t, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left\{ e^{\tau.(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} u(x,\tau) \right\} d\tau = \int_0^t e^{\tau.(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} F(x,\tau) d\tau$$

c'est-à-dire :
$e^{t.(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} u(x,t) - u(x,0) = \int_0^t e^{\tau.(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} F(x,\tau) d\tau$
En multipliant par $e^{-t(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}}$:

$e^{-t(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} \times e^{t.(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} u(x,t) - e^{-t(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} u(x,0) = e^{-t(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} \int_0^t e^{\tau.(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} F(x,\tau) d\tau$

$$u(x,t) = e^{-t(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} u(x,0) + \int_0^t e^{(\tau - t).(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} F(x,\tau) d\tau$$

d'où
$u(x,t) = e^{-t(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} u_0(x) + \int_0^t e^{(\tau - t)(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} F(x,t) d\tau \qquad 0 < t < \infty$
et $S(t)$ est le semi-groupe $S(t) = e^{-t(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}}$

$$u(x,t) = S(t) u_0(x) + \int_0^t S(\tau - t) F(x,\tau) d\tau$$

(*voir Annexe A*)

Exemple: Considérons l'équation différentielle ordinaire :

$$\dot{y} - Ay = g(t) \text{ avec le condition initiale } y(0) = x \tag{1.2.1}$$

$solution_{génearale} = solution_{homogène} + solution_{partic\text{ulière}}$

Integrons l'equation différentielle homogène correspondante:

$$\dot{y} - Ay = 0$$

En séparant les variables, on obtient

$$y(t) = ce^{At}$$

Ona $y(0) = x$ alors $c = x$ donc la solution homogène est :

$$y(t) = xe^{At}$$

On pose $S(x, t) = y(t)$ donc $S(x, t) = xe^{At}$

La solution particuliére s'obtient par la variation de la constante $x = x(t)$ et qui est donnée par l'expression

$$y(t) = x(t)e^{At} \tag{1.2.2}$$

Portant cette égalite dans l'équation précédente,on trouve:

$\dot{x}(t)e^{At} + Ax(t)e^{At} - Ax(t)e^{At} = g(t)$

Ona donc:

$$\dot{x}(t)e^{At} = g(t)$$

On obtient la relation:

$$\dot{x}(t) = e^{-At}g(t) \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = e^{-At}g(t)$$

d'où

$$x(t) = \int_0^t e^{-As}g(s)ds$$

alors (1.2.2) $\Leftrightarrow y(t) = e^{At}\int_0^t e^{-As}g(s)ds = \int_0^t e^{(t-s)A}g(s)ds$

$$y(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}g(s)ds = \int_0^t S(g(s), t - s)ds$$

Donc,la solution générale de l'équation différentielle est donnée par

$$y(t) = S(x,t) + \int_0^t S(g(s), t-s)ds$$

avec $S(x,t) = xe^{At}$, $S(g(s), t-s) = g(s)e^{A(t-s)}$

1.3 L'espace des pseudo-mesures PM^a

Pour cette partie , on renvoit à [2] et [9].

On dit que u est une fonction homogène de degré m si

$$\forall\, |\xi| > 0 \ , \lambda > 0 \ : u(\lambda x) = \lambda^m u(\xi)$$

$\boldsymbol{Pseudo - mesures\ sur}$ $\mathbb{R}^n$

Soit $a > 0$, on definit l'espace des pseudo-mesures PM^a par:

$$PM^a(\mathbb{R}^n) := \{v \in S'(\mathbb{R}^n) : \hat{v} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) et \, \|v; PM^a\| < \infty\} \tag{1.3.1}$$

Avec la norme

$$\|v; PM^a(\mathbb{R}^n)\ \| : \ = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} ess \, |\xi|^a \, |\hat{v}(\xi)| \tag{1.3.2}$$

où $\hat{v}$ désigne la transformée de Fourier de v.On pose $PM = PM^0$

Exemple: $f(x) = e^{-x^2}$

$\boldsymbol{D\acute{e}f\,inition}$ **1.3.2**

Pour $a \geq 0$ et $\sigma > 0$,on définit l'espace $C_\sigma([0, \infty); PM^a(\mathbb{R}^n))$ par

$$C_\sigma([0,\infty);PM^a(\mathbb{R}^n)) := \{v(t) : v \in PM^a et\, \|v; C_\sigma([0,\infty);PM^a(\mathbb{R}^n))\| < \infty\} \qquad (1.3.3)$$

avec la norme

$$\|v; C_\sigma([0,\infty);PM^a(\mathbb{R}^n))\| := \sup_{t>0} t^\sigma \|v(t);\ PM^a(\mathbb{R}^n)\| \qquad (1.3.4)$$

***Definition*1.3.3**

Pour $a \geq 0$, $b \geq 0$ et $\sigma > 0$ on définit:

$$Y_\sigma^{a,b}(\mathbb{R}^n) := C_w([0,\infty), PM^a(\mathbb{R}^n)) \cap C_\sigma([0,\infty), PM^b(\mathbb{R}^n)) \qquad (1.3.5)$$

Où $C_w([0,\infty), PM^a, (\mathbb{R}^n))$ désigne l'espace des distributions de PM^a, à valeurs réelles ou complexes , faiblement continues par rapport au temp t .
Pour $2 < b < 3$ et $\sigma = \frac{b}{2} - 1$ nous écrivons $Y^b(\mathbb{R}^n) = Y_\sigma^{2,b}(\mathbb{R}^n)$.
Plus présisément:

$$Y^b(\mathbb{R}^n) = C_w([0,\infty), PM^2, (\mathbb{R}^n)) \qquad (1.3.6)$$

Remarque 1.3.1 Soit $f \in S'(\mathbb{R}^n) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$;On note $f_\lambda(x) = f\ (\lambda x)$,alors

$$\hat{f}_\lambda(\xi) = \lambda^{-n}\hat{f}(\lambda^{-1}\xi)$$

Pour tout $\lambda > 0$, on a la propriété suivante :

$$\|f(\lambda.)\|_{PM^a} = \lambda^{a-n}\|f\|_{PM^a}$$

En particulier, la norme dans l'espace PM^a dans le cas $a = n - \dfrac{\rho}{\alpha - 1}$

$$\|f(\lambda.)\|_{PM^a} = \lambda^{-\frac{\rho}{\alpha-1}}\|f\|_{PM^a}$$

Chapitre 2

Existence et unicité pour le problème de Cauchy

2.1 Introduction et résultat principal

2.1.1 Position du problème

(voir [2] , [6] et [9])

On considère le problème de Cauchy hyper-dissipatife dans l'espace des pseudo-mesures $Y_\sigma^{a,b}(\mathbb{R}^+)$, avec $\sigma = (b-a)/\rho$, $\quad a = n - \frac{\rho}{\alpha-1} \quad , \quad \max\left(2, \frac{(\alpha-1)n}{\alpha}\right) \leq \rho < b < n$

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\frac{\rho}{2}} u = \nu u^\alpha, & t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n \\ u_0(x) = u(0,x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.1.1}$$

$\nu \in \mathbb{R}$ est une constante ;α est un nombre entier , $\alpha \geq 2$, $\rho \geq 2$ *et* $\sigma > 0$.

On peut faire le rapprochement avec le problème cité dans [4].

2.1.2 Résultat principal

On a le résultat suivant, d'existence, d'unicité et de stabilité pour le système (2.1.1)

Proposition 2.1.2

(**voir** [**2**])

Soit X un espace de Banach et $B: \ X \times X \times ...... \to X$ une forme α-linéaire $(\alpha \in \mathbb{N})$continue:

$$\|B(u_{1,}u_2, ...u_\alpha)\|_X \leq K \|u_1\|_X \|u_2\|_X .... \|u_\alpha\|_X \ ; \ u_1, u_2, ..., u_\alpha \in X$$

K est une constante positive , $\varepsilon > 0$;$\alpha(2\varepsilon)^{\alpha-1} < 1$, et $y \in X$, avec$\|y\|_X \leq \varepsilon$
L'equation:

$$u = y + B(u, u..............u)$$

admet une solution unique dans X telle que $\|u\|_X \leq 2\varepsilon$ .De plus la solution u dépend continûment de y dans le sens suivant : si$\|y\|_X \leq \varepsilon$, $v = y_1 + B(v, v, ...v)$ *et* $\|v\|_X \leq 2\varepsilon$ alors :

$$\|u - v\| \leq \frac{1}{1-\alpha(2\varepsilon)^{\alpha-1}K} \|y - y_1\|_X$$

Preuve:
On pose:

$$E = \{u, u \in X, \quad \|u\|_X \leq 2\varepsilon\} \tag{2.1.2}$$

et

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

On considère une fonction τ definie par:

$$\tau(u) = y + B(u, u, ...u) \tag{2.1.3}$$

Comme $\|y\|_X \leq \varepsilon$ ona, pour $u \in E$:

$$\|\tau u\| = \|y + B(u, u, ..., u)\|_X$$

$$\leq \|y\|_X + \|B(u,u,u......u)\|_X$$

$$\leq \|y\|_X \quad +K \underbrace{\|u\|_X \times .... \times \|u\|_X}_{\alpha\ fois}$$

$$\leq \|y\|_X + K\,\|u\|_X^{\alpha}$$

$$\leq \varepsilon \qquad + K(2\varepsilon)^{\alpha}$$

$$\leq \varepsilon \qquad + K(2\varepsilon)^{\alpha}$$

$$\leq \varepsilon + 2(2\varepsilon)^{\alpha-1}K\varepsilon$$

$$\leq 2\varepsilon$$

Donc $\tau u \in E$

Calculons $\|\tau u - \tau v\|_X$:

$$\|\tau u - \tau v\|_X = \|y + B(u,u,.........,u) - y - B(v,v,.........,v)\|_X$$

$$= \|B(u,u,.........,u) - B(v,v,.........,v)\|_X$$

Ona alors:

$$\left.\begin{array}{r} \|B(u,u,.........,u) - B(v,v,.........,v)\|_X \ \leq \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \|B(u,u-v,u...,u)\|_X + \|B(v,v,u-v,...,u)\|_X + ... \\ + \|B(v,v,v,....,u-v,u)\|_X + \|B(v,v,v....,v,u-v)\|_X \end{array}\right\} ....(*)$$

l'hypothèse donne

$$\|B(u_1,u_2,.......,u_\alpha)\|_X \leq K\,\|u_1\|_X\,\|u_2\|_X\,..........\,\|u_\alpha\|_X$$

$$\|B(u,u-v,u...,u)\|_X \leq \ K \underbrace{\|v\|_X\,\|u-v\|_X\,\|v\|_X\,..........\,\|v\|_X}_{\alpha\ fois}$$

$$\|B(u-v,v,...,v)\|_X \ \leq \ K \underbrace{\|u\|_X\,\|u-v\|_X\,\|u\|_X\,..........\,\|u\|_X}_{\alpha\ fois}$$

On a alors :

$(*) \Leftrightarrow K\|u\|_X \|u-v\|_X \|u\|_X \dots \|u\|_X + K\|u\|_X \|v\|_X \|u-v\| \dots \|u\|_X + \dots + K\|u-v\|_X \|v\|_X \dots \|v\|_X$

$\leq K\|u-v\|_X \|u\|_X^{\alpha-1} + K\|u\|_X \|u-v\|_X \|u\|_X^{\alpha-2} \|v\|_X + \dots + K\|u\|_X \|u-v\|_X \|u\|_X^{\alpha-\alpha} \|v\|_X$

$\leq K\|u-v\|_X (2\varepsilon)^{\alpha-1} + K\|u-v\|_X (2\varepsilon)^{\alpha-2}(2\varepsilon) + K\|u-v\|_X (2\varepsilon)^{\alpha-3}(2\varepsilon)^2 + \dots +$
$+K\|u-v\|_X (2\varepsilon)^{\alpha-\alpha}(2\varepsilon)^{\alpha-1}$

$\leq K\|u-v\|_X (2\varepsilon)^{\alpha-1} + K\|u-v\|_X + K\|u-v\|_X (2\varepsilon)^{\alpha-1} + \dots + K\|u-v\|_X (2\varepsilon)^0(2\varepsilon)^{\alpha-1}$

$\leq \alpha.K\|u-v\|_X (2\varepsilon)^{\alpha-1}$

et comme $\alpha(2\varepsilon)^{\alpha-1}K < 1$

τ est un contraction. D'aprés le theorème du point fixe l'équation

$u = y + B(u, u, \dots\dots u)$ admet une solution unique

Reste à montrer que la solution dépend continûment de y. On va montrer plus précisement que:

$$\|u-v\| \leq \frac{1}{1-\alpha(2\varepsilon)^{\alpha-1}K} \|y-y_1\|_X$$

En effet on a :

$u - v = y - y_1 + B(u, u-v, \dots u) + B(v, v, u-v \dots u) + \dots + B(u-v, \dots v, v)$

$\|u-v\|_X \leq \|y-y_1\| + \|B(u, u-v, \dots u)\|_X + \dots + \|B(u-v, \dots v, v)\|_X$

D'après l'hypothèse $\|B(u_1, u_2, \dots u_\alpha)\|_X \leq K\|u_1\|_X \|u_2\|_X \dots \|u_\alpha\|_X$

Donc $\|u-v\|_X \leq \|y-y_1\|_X + (K\|u-v\|_X \|u\|_X^{\alpha-1} + \dots + K\|u-v\|_X \|u\|_X^0 \|v\|^{\alpha-1})$

On a $\|u\|_X \leq 2\varepsilon$ et $\|v\|_X \leq 2\varepsilon$

$$\leq \|y-y_1\|_X + \underbrace{\left[K\|u-v\|_X (2\varepsilon)^{\alpha-1} + (2\varepsilon)^{\alpha-2}(2\varepsilon) + \dots + (2\varepsilon)^0(2\varepsilon)^{\alpha-1}\right]}_{\alpha\ fois}$$

$\|u-v\|_X \leq \|y-y_1\|_X + [K\|u-v\|_X (2\varepsilon)^{\alpha-1}]$

$\|u-v\|_X - [K\|u-v\|_X (2\varepsilon)^{\alpha-1}] \leq \|y-y_1\|_X$

$\|u-v\|_X (1-K\alpha(2\alpha)^{\alpha-1}) \leq \|y-y_1\|_X$

Donc:

$$\|u-v\|_X \leq \frac{1}{1-\alpha(2\varepsilon)^{\alpha-1}K}\|y-y_1\|_X$$

Défnition 2.1.1 (voir [1] , [2] , [7] , [8] et [9])

La solution du probleme (2.1.1) est appelée une solution *mild* si elle satisfait l'équation intégrale:

$$u(t,x) = e^{t(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}}u_0(x) + \nu\int_0^t \exp^{(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}(\tau-t)} u^\alpha(\tau)d\tau \qquad 0<t<\infty \tag{2.1.4}$$

(*voir Annexe*)

Rappelons que :

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}u(x)dx$$

Par intégration par parties on a :

$$\frac{\hat{\partial u}}{\partial x_j}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx = \quad i\xi_j\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}u(x)dx = i\xi_j\hat{u}(\xi), \qquad j=1,.....,n$$

On derive une seconde fois et alors :

$$\widehat{\Delta u(\xi)} = \sum_{j=1}^n \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}}(\xi) = i^2\sum_{j=1}^n \xi_j^2\hat{u}(\xi) = -\left|\xi^2\right|\hat{u}(\xi)$$

Par passage à la transformée de Fourier dans le problème(2.1.1) :

$$\begin{cases} \hat{u}_t + \mathcal{F}(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}u = \quad \nu\widehat{u^\alpha} \\ \hat{u}_0(\xi) = \hat{u}(0,\xi) \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Posons $\quad S(t) = e^{-t|\xi|^\rho}, S(t)$ est un semi-groupe

Solution de l'équation homogène de (2.1.5) :

$$\begin{cases} \hat{u}_t + \mathcal{F}((-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}u) = & 0 \\ \hat{u}_0(\xi) = \hat{u}(0,\xi) \end{cases} \tag{2.1.6}$$

$$\hat{u}_t + \mathcal{F}(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}u = 0$$

De manière generale $\mathcal{F}(D^{\alpha}u) = (i)^{|\alpha|}\left|\xi\right|^{|\alpha|}\hat{u}$, $|\alpha|$ ordre de dérivation

$(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}$ est d'ordre dérivation ρ donc : $(\mathcal{F}(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}u) = \left|\xi\right|^{\rho}u(\xi)$

$\hat{u}_t = \left|\xi\right|^{\rho}u(\xi) \Rightarrow \frac{\hat{u}_t}{\hat{u}} = \left|\xi\right|^{\rho}$

$$\Rightarrow \hat{u}(t,\xi) = C\ e^{-t|\xi|^{\rho}}$$
$$\Rightarrow \hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^{\rho}}\hat{u}(0,\xi)$$

$\hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^{\rho}}\hat{u}(0,\xi) = S(t)\hat{u}(0,\xi),\ \ S(t) = e^{-t|\xi|^{\rho}}$

(b) **Soit** u **solution de l'équation complète** (2.1.5) :

Posons

$$g(\tau) = S(t-\tau).\hat{u}(\tau)........(**)$$

Donc $\quad \acute{g}(\tau) = (S(t-\tau))\acute{}.\hat{u}(\tau) + S(t-\tau).\hat{u}_{\tau}(\tau)$

or

$$(S(t-\tau))\acute{} = -\left|\xi\right|^{\rho}.S(t-\tau)$$

$\Rightarrow \acute{g}(\tau) = \left|\xi\right|^{\rho}.S(t-\tau) + S(t-\tau)\left\{\nu\widehat{u^{\alpha}} - \left|\xi\right|^{\rho}u(\tau)\right\}$

$$\acute{g}(\tau) = S(t-\tau).\nu\widehat{u^{\alpha}}$$

En integrant entre 0 et t :et $\int_0^t \acute{g}(\tau)d\tau = \nu\int_0^t S(t-\tau)\widehat{u^{\alpha}}d\tau$

et $\int_0^t \acute{g}(\tau)d\tau = g(t) - g(0)$,on obtient $(S(0) = I\ )$

$(**) \Leftrightarrow \hat{u}(t) - S(t)\hat{u}_0 = \nu\int_0^t S(t-\tau)\widehat{u^{\alpha}}d\tau$

$$\hat{u}(t) = S(t)\hat{u}_0 + \nu\int_0^t S(t-\tau)\widehat{u^{\alpha}}d\tau$$

Donc la solution de (2.1.5) est:

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^\rho}\hat{u}_0 + \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho}\widehat{u^\alpha}(\tau,\xi)d\tau$$

Dans la suite nous allons appliquer la proposition (2.1.2) à l'équation intégrale (2.1.4) dans $Y_\sigma^{a,b}$qui peut être écrite sous la forme d'operateur : $u = S(t) + B(u, ...u)$ avec $S(t) = e^{-t(\Delta)^{\rho/2}}$ le semi-groupe de la chaleur et

$$B(u_1, ...u_\alpha) = \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}}\ u_1(\tau)u_2(\tau).....u_\alpha(\tau)d\tau \tag{2.1.7}$$

2.1.3 Existence et unicité d'une solution "mild" globale en temps

Pour cette partie , on pourra consulter [2] , [3] , [4] et [5] mais aussi [10] , [11] , [12] et [13] pour des résultats techniques liés aux résultats qui vont suivre.

Lemme 2.2.1 (voir [2] , [3] , [4] et [5])
Soit $u_0(x) \in PM^a(\mathbb{R}^n)$ alors $S(t) = e^{-t(\Delta)^{\rho/2}} \in C_w([0,\infty), PM^a(\mathbb{R}^n))$

Preuve. On démontre dans une première étape que $S(t) \in L^\infty([0,\infty), PM^a)$ et la continuité faible de $S(t)u_0$ dans une seconde étape

1) Par définition de la norme de PM^a, il vient que:

$$\|S(t)u_0\|_{PM^a} = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess\, |\xi|^a \left|\widehat{S(t)u_0}\right|$$
$$\|S(t)u_0\|_{PM^a} = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess\, |\xi|^a \left|e^{-t|\xi|^\rho}\hat{u}_0(\xi)\right|$$
$$\le \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess\, |\xi|^a |\hat{u}_0(\xi)| = \|u_0\|_{PM^a} \quad ,\forall\ \ t\in[0,\infty[$$

Donc $S(t)u_0 \in L^\infty([0,\infty), PM^a)$

Prouvons maintenant la continuité faible par rapport à t, et d'après les propriétés des semi-groupes, il suffit de la faire pour $t = 0$ seulement.

Soit $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$|\langle S(t)u_0(x) - u_0(x),\ \varphi(x)\rangle| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} (e^{(-\Delta)^{\rho/2}} u_0(x) - u_0(x))\varphi(x)dx \right|$$

par la formule de *Plancherel* $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi$,on obtient :

$$|\langle S(t)u_0(x) - u_0(x),\ \varphi(x)\rangle| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} (e^{(-t|\xi|^\rho)} - 1)\hat{u}_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi \right|$$

$$= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{\frac{a}{\rho}} |\xi|^a \frac{(e^{(-t|\xi|^\rho)} - 1)}{(t|\xi|^\rho)^{\frac{a}{\rho}}} \hat{u}_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi \right|$$

$$= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{\frac{a}{\rho}} \frac{(e^{(-t|\xi|^\rho)} - 1)}{(t|\xi|^\rho)^{\frac{a}{\rho}}} \xi^a \hat{u}_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi \right|$$

$$\leq t^{\frac{a}{\rho}} \|u_0\|_{PM^a} \times \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(e^{(-t|\xi|^\rho)} - 1)}{(t|\xi|^\rho)^{\frac{a}{\rho}}} \times \hat{\varphi}(\xi)d\xi \right|$$

Donc:

$$\leq t^{\frac{a}{\rho}} \|u_0\|_{PM^a} \times \left\| \frac{(e^{(-t|\xi|^\rho)} - 1)}{(t|\xi|^\rho)^{\frac{a}{\rho}}} \right\|_{L^\infty} \times \|\hat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \tag{2.1.8}$$

$$\leq t^{\frac{a}{\rho}} \|u_0\|_{PM^a} \times \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess \left| \frac{(e^{(-t|\xi|^\rho)} - 1)}{(t|\xi|^\rho)^{\frac{a}{\rho}}} \right| \times \|\hat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0 \ lorsque\ t \searrow 0$$

et $\left| \frac{(e^{(-t|\xi|^\rho)}-1)}{(t|\xi|^\rho)^{\frac{a}{\rho}}} \right| < C$ car: $\rho < n$

$\frac{\rho}{\alpha-1} < n \Rightarrow \rho < n(\alpha - 1)$

Alors : $\max(2, \frac{(\alpha-1)n}{\alpha}) \leq \rho \leq n(\alpha - 1)$

Lemme 2.2.2 Soit $u_0(x) \in PM^a(\mathbb{R}^n)$ alors $S(.)u_0 \in C_\sigma([0, \infty), PM^b(\mathbb{R}^n))$ où $\sigma = b - a/\rho$

Preuve: Par définition de la norme dans l'espace $C_\sigma([0, \infty),\ PM^b(\mathbb{R}^n))$

il s'en suite que:

$$\left\| S(t)u_0;\ C_\sigma([0,\ \infty),\ PM^b(\mathbb{R}^n))\right\| = \sup_{t>0} t^\sigma \left\| S(t)u_0;\ PM^b(\mathbb{R}^n)\right\|$$

$$= \sup_{t>0} t^{(b-a)/\rho} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess(|\xi|^b \left| e^{-t|\xi|^\rho} \hat{u}_0(\xi)\right|)$$

$$= \sup_{t>0} t^{(b-a)/\rho} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess(|\xi|^{b-a}\, e^{-t|\xi|^\rho}\, |\xi|^a\, |\hat{u}_0(\xi)|$$

$$\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} (t\,|\xi|^\rho)^{b-a/\rho} e^{-t|\xi|^\rho} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess\, |\xi|^a\, |\hat{u}_0(\xi)|$$

$$\leq \|u_0\|_{PM^a} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} (t\,|\xi|^\rho)^{b-a/\rho} e^{-t|\xi|^\rho}$$

$$\leq C\, \|u_0\|_{PM^a}$$

$$< \infty$$

$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} (t\,|\xi|^\rho)^{b-a/\rho} e^{-t|\xi|^\rho} \leq C$ car $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} (t\,|\xi|^\rho) e^{-t|\xi|^\rho} = e^{-1} < 1$
Alors $S(.)u_0 \in C_\sigma([0,\ \infty), PM^b(\mathbb{R}^n))$

Corollaire 2.2.1 Soit $u_0(x) \in PM^a(\mathbb{R}^n)$ alors $S(.)u_0 \in Y_\sigma^{a,b}(\mathbb{R}^+)$

Lemme 2.2.3 (voir [2]) et [9]) La forme multi-linéaire $B(u_1, u_2, ...u_\alpha)$, définie dans (2.1.7) est

continue sur l'espace $Y_\sigma^{a,b}(\mathbb{R}^+)$ .Il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $u_1, u_2, ...u_\alpha \in Y_\sigma^{a,b}(\mathbb{R}^+)$ on ait:

$$\left\| B(u_1, u_2, ..u_\alpha); Y^{a,b}\right\| \leq K \left\| u_1; C_\sigma([0;\ \infty), PM^b(\mathbb{R}^n)\right\| \| u_1; C_w([0;\ \infty), PM^a(\mathbb{R}^n)\| \quad (2.1.9)$$

$$\times ... \times \|u_\alpha; C_w([0;\ \infty), PM^a(\mathbb{R}^n)\|$$

Preuve.

La forme bilinéaire B est définie par:

$$B(u_1, u_2, ...u_\alpha) = \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}}\ u_1(\tau)u_2(\tau).....u_\alpha(\tau)d\tau$$

Démontrons tout d'abord la continuité faible de $B(u_1, u_2, ...u_\alpha)$

Soit $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$,ona

$$\langle B(u, u, ...u)(t), \varphi\rangle = \left\langle \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} u(\tau) \times u(\tau) \times ..... \times u(\tau)d\tau, \varphi \right\rangle$$

$$= \left\langle \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} (u(\tau))^\alpha d\tau, \varphi \right\rangle$$

$$= \int_0^t \left\langle \nu e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} (u(\tau))^\alpha, \varphi \right\rangle d\tau$$

En calculant $\quad B(u, u, ...u)(t) - B(u, u, ...u)(t')\quad$ avec $\ t' < t\ $ on trouve

$$\left|\left\langle B(u, u, ...u)(t) - B(u, u, ...u)(t'), \varphi\right\rangle\right| =$$

$$\left|\int_0^t \left\langle \nu e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} (u(\tau))^\alpha, \varphi \right\rangle d\tau - \int_0^{t'} \left\langle \nu e^{-(\acute{t}-\tau)(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} (u(\tau))^\alpha, \varphi \right\rangle d\tau\right|$$

Par la formule de $Plancherel - Pars$eval:

$$= \left|\int_0^t \langle \nu e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho} (\widehat{u}(\tau))^\alpha, \hat{\varphi}(\xi)\rangle\, d\tau - \int_0^{t'} \left\langle \nu e^{-(\acute{t}-\tau)|\xi|^\rho} (\hat{u}(\tau))^\alpha, \hat{\varphi}(\xi) \right\rangle d\tau\right|$$

$$\leq \left|\int_0^{\acute{t}} \left\langle \nu(e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho} - e^{-(\acute{t}-\tau)|\xi|^\rho} \hat{u}(\tau)^\alpha), \hat{\varphi}(\xi) \right\rangle d\tau\right| +$$

$$+ \left|\int_{\acute{t}}^t \left\langle \nu e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho} (\hat{u}(\tau))^\alpha, \hat{\varphi}(\xi) \right\rangle d\tau\right|$$

$$\leq \int_0^t \left\langle \nu e^{-(t-\acute{t})(|\xi|^\rho - 1)}\ e^{-(t'-t)|\xi|^\rho} (\hat{u}(\tau))^\alpha, \hat{\varphi}(\xi) \right\rangle d\tau$$

$$+ \left\langle \int_{\acute{t}}^t \nu e^{-(t-\tau)}\ |\xi|^\rho\ (\hat{u}(\tau))^\alpha, \hat{\varphi}(\xi) \right\rangle d\tau$$

Comme $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ et $u \in PM^a$,on obtient
$\int_0^{t'} \left\langle \nu(e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho} - e^{-(t'-\tau)|\xi|^\rho})\hat{u}(\tau)^\alpha, \hat{\varphi}(\xi) \right\rangle d\tau \to 0$

lorsque t tend vers t'.

D'autre part :

$$\left\langle e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho}(\hat{u}(\tau))^\alpha, \hat{\varphi}(\xi) \right\rangle \leq \|u\|_{PM^a}^\alpha \|\varphi\|_{L^1}$$

L'application du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, montre que la quantité

$$\int_0^{t'} \left\langle \nu(e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho} - e^{-(t'-\tau)|\xi|^\rho})\hat{u}(\tau)^\alpha, \hat{\varphi}(\xi) \right\rangle d\tau + \int_{t'}^{t} \left\langle \nu e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho}(\hat{u}(\tau))^\alpha, \hat{\varphi}(\xi) \right\rangle d\tau$$

tend vers 0 lorsque t tend vers t', d'où la continuité faible de $B(u_1, u_2, ...u_\alpha)$ dans l'espace $Y_\sigma^{a,b}(\mathbb{R}^+)$

Reste à montrer que

$$\left\| B(u_1, u_2, ...u_\alpha); Y^{a,b} \right\| \leq K \|u_1; C_\sigma\| \|u_1; C_w\| \times ..... \times \|u_\alpha; C_w\|$$

$$\| B(u_1, u_2, ...u_\alpha)\|_{PM^a} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} ess\, |\xi|^a \, \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho} \hat{u}_1(\tau, \xi)\hat{u}_2(\tau)......\hat{u}_\alpha(\tau) d\tau$$

En utilisant des propriétés élémentaires de la transformation de Fourier et de la convolution nous obtenons :

$$\left| \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho} u_1(\tau, \widehat{\xi)..u_\alpha}(\tau, \xi) \right| \leq \left| \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho} \hat{u}_1(\tau, \xi) * \hat{u}_2(\tau, \xi) * ...... * \hat{u}_\alpha(\tau, \xi) d\tau \right|$$

On pose

$$W(t) = \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho} \hat{u}_1(\tau, \xi) * \hat{u}_2(\tau, \xi) * ...... * \hat{u}_\alpha(\tau, \xi) d\tau \tag{2.1.10}$$

$$|\hat{u}_1(\tau, \xi) * \hat{u}_2(\tau, \xi) * ...... * \hat{u}_\alpha(\tau, \xi)| \leq |(\hat{u}_1(\tau, \xi) * \hat{u}_2(\tau, \xi) * ....\hat{u}_{\alpha-1}(\tau, \xi)) * \hat{u}_\alpha(\tau, \xi)|$$

$$\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{u}_1 * \hat{u}_2 * .... * u_{\alpha-1})(\eta)\hat{u}_\alpha(\xi - \eta) d\eta \right|$$

$$\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (\hat{u}_1 * \hat{u}_2 * ....u_{\alpha-2})(\omega)\hat{u}_{\alpha-1}(\eta - \omega) d\omega \; \hat{u}_\alpha(\xi - \eta) d\eta \right|$$

$$\leq \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} ......\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|(\eta-\omega|^b}{|(\eta-\omega|^b} \hat{u}_1(\eta-\omega) \frac{|\omega|^a}{|\omega|^a} \hat{u}_2(\omega) d\omega .... \frac{|\xi-\eta|^a}{|\xi-\eta|^a} \hat{u}_\alpha(\xi-\eta) d\eta \right|$$

$$\leq \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} ......\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|(\eta-\omega|^b} \frac{1}{|\omega|^a} ..... \frac{1}{|\xi-\eta|^a} d\omega ... d\eta \right| \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess \, |(\eta-\omega|^b \, \hat{u}_1(\eta-\omega) ...... \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess \, |(\eta-\omega|^a \, \hat{u}_\alpha(\xi-\eta)$$

$$\leq \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} ......\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|(\eta-\omega|^b} \frac{1}{|\omega|^a} ..... \frac{1}{|\xi-\eta|^a} d\omega ... d\eta \right| \left\| u_1;\ PM^b \right\| \left\| u_2;\ PM^a \right\| .... \left\| u_\alpha;\ PM^a \right\|$$

$$\leq |\xi|^{-b} * |\xi|^{-a} * .... * |\xi|^{-a} \left\| u_1;\ PM^b \right\| \left\| u_2;\ PM^a \right\| .... \left\| u_\alpha;\ PM^a \right\|$$

$$\leq |\xi|^{\rho-b} \left\| u_1;\ PM^b \right\| \left\| u_2;\ PM^a \right\| .... \left\| u_\alpha;\ PM^a \right\| \tag{2.1.11}$$

$(voir\ Annexe\ B)$

$\|W(t);\ C_\sigma\| = \sup_{t>0} t^{\frac{b-a}{\rho}} \left\| W(t); PM^b \right\|$

$$\leq |\nu| \sup_{t>0} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess \int\limits_0^t |\xi|^{\rho-b} |\xi|^b e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho} \tau^{\frac{a-b}{\rho}} \ \tau^{\frac{b-a}{\rho}} d\tau \ t^{\frac{b-a}{\rho}} \left\| u_1; PM^b \right\| \left\| u_2; PM^a \right\| ... \left\| u_\alpha;\ PM^a \right\|$$

En échangement τ par $t\tau$

$$\leq |\nu| \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess \int\limits_0^1 t\, |\xi|^{\rho-b} |\xi|^b e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho} \tau^{\frac{a-b}{\rho}} d\tau \sup_{t>0} \ \tau^{\frac{b-a}{\rho}} \left\| u_1; PM^b \right\| \sup_{t>0} \left\| u_2; PM^a \right\| ... \sup_{t>0} \left\| u_\alpha;\ PM^a \right\|$$

$$\leq |\nu| \sup_{t>0} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess \int\limits_0^{1/2} t\, |\xi|^{\rho} e^{-t(1-\tau)|\xi|^\rho} \tau^{\frac{a-b}{\rho}} d\tau \left\| u_1;\ C_\sigma \right\| \left\| u_2; C_w \right\| .... \left\| u_\alpha;\ C_w \right\| + \tag{2.1.12}$$

$$+\left|\nu\right|\sup_{t>0}\ \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess\int\limits_{1/2}^{1} t\left|\xi\right|^{\rho} e^{-t(1-\tau)\left|\xi\right|^{\rho}}(1/2)^{\frac{a-b}{\rho}}d\tau\left\|u_1;\ C_\sigma\right\|\left\|u_2;C_w\ \right\|.........\left\|u_\alpha;\ C_w\right\|$$

$$\leq C\left\|u_1;\ C_\sigma\right\|\left\|u_2;C_w\ \right\|.........\left\|u_\alpha;\ C_w\right\|$$

et

$$\left\|W(t);\ C_w\right\| = \sup_{t>0}\left\|W(t);\ PM^a\right\|$$

$$\leq\left|\nu\right|\sup_{t>0}\ \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess\int_0^t\left|\xi\right|^{\rho} e^{-(t-\tau)\left|\xi\right|^{\rho}}\left|\hat{u}_1(\tau,\xi)*\hat{u}_2(\tau,\xi)*...*\hat{u}_\alpha(\tau,\xi)\right|d\tau$$

$$\leq\left|\nu\right|\sup_{t>0}\ \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess\int_0^t\left|\xi\right|^{a} e^{-(t-\tau)\left|\xi\right|^{\rho}}\left|\left|\xi\right|^{\rho-b}\hat{u}_1(\tau,\xi)*\hat{u}_2(\tau,\xi)*...*\hat{u}_\alpha(\tau,\xi)\right|d\tau$$

$$\leq\left|\nu\right|\sup_{t>0}\ \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess\int_0^t\left|\xi\right|^{a} e^{-(t-\tau)\left|\xi\right|^{\rho}}\left|\xi\right|^{\rho-b}\left\|u_1;\ PM^b\right\|\left\|u_2;\ PM^a\right\|...\left\|u_\alpha;\ PM^a\right\|$$

$$\leq\left|\nu\right|\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess\int_0^t\left|\xi\right|^{a+\rho-b} e^{-(t-\tau)\left|\xi\right|^{\rho}}\tau^{\frac{a-b}{\rho}}\ d\tau\ \sup_{t>0}\ \tau^{\frac{b-a}{\rho}}\left\|u_1;PM^b\ \right\|\sup_{t>0}\ \left\|u_2;PM^a\right\|...\sup_{t>0}\ \left\|u_\alpha;\ PM^a\right\|$$

En effectuant le changement de variable $s=\tau-t$

$$\leq\left|\nu\right|\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess\int_0^t\left(s\left|\xi\right|^{\rho}\right)^{\frac{a+\rho-b}{\rho}} e^{-s\left|\xi\right|^{\rho}}s^{\frac{b-a}{\rho}-1}(t-s)^{\frac{a-b}{\rho}}ds\left\|u_1;\ C_\sigma\right\|\left\|u_2;C_w\ \right\|.........\left\|u_\alpha;\ C_w\right\| \tag{2.1.13}$$

$$\leq C\int\limits_0^1 s^{\frac{b-a}{\rho}-1}(1-s)^{\frac{a-b}{\rho}}ds\left\|u_1;\ C_\sigma\right\|\left\|u_2;C_w\ \right\|.........\left\|u_\alpha;\ C_w\right\|$$

$$\leq C\left\|u_1;\ C_\sigma\right\|\left\|u_2;\ C_w\right\|.........\left\|u_\alpha;\ C_w\right\|$$

Combinant (2.1.12) et (2.1.13) on obtient (2.1.9)

De la **proposition 2.1.2** du **Corollaire 2.2.1** et du **Lemme 2.2.3**, le résultat suivant sur l'existence et l'unicité de solution globale en temps du système (**2.1.1**)

Théorème 2.2.1 Supposons que $u_0(x) \in PM^a(\mathbb{R}^a)$ et $\|u_0; PM^a\| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Alors le problème de Cauchy (2.1.1) a une seule solution globlale en temps $u \in Y_\sigma^{a\ ,\ b}(\mathbb{R}^+)$, de plus:

$$\left\|u(t,x); Y_\sigma^{a\ ,b}\right\| \leq 2\varepsilon \tag{2.1.14}$$

2.1.4 Comportement asymptotique des solutions:

Une fois acquise l'existence et l'unicité d'une solution globale en temps, on peut s'intéresser à son comportement asymptotique lorsque t tend vers l'infini.
On a le résultat suivant sur la stabilité asymptotique des solutions du système (2.1.1) :

Théorème 2.3.1: ([2] et [9]) Supposons u et v solutions de (2.1.1) correspondant aux données initiales $u_0(x), v_0(x) \in PM^a(\mathbb{R}^n)$,respectivement. Supposons l'hypothèse du théorème (2.2.1) réaliseé.Alors:

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t,\ .) - v(t,\ .); PM^a\| = 0 \tag{2.1.15}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{t\to\infty} \|S(t)(u_0 - v_0); PM^a\| = 0 \tag{2.1.16}$$

Preuve: Supposons que

$$\lim_{t\to\infty} \|S(t)(u_0 - v_0); PM^a\| = 0$$

Nous allons montrer que :

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t,\quad .) - v(t,\quad .); PM^a\| = 0$$

Remarquons d'abord que d'après le théorème (2.2.1) , ona

$$\sup_{t>0} \|u(t,x); PM^a\| \leq 2\varepsilon, \qquad \sup_{t>0} \|v(t,x); PM^a\| \leq 2\varepsilon \tag{2.1.17}$$

La différence entre $u(t)$ et $v(t)$ donne

$u(t) = S(t)u_0 + B(u,u,.......u) \quad , v(t) = S(t)u_0 + B(v,v,.......v)$

Alors :

$u(t) - v(t) = S(t)(u_0 - v_0) + [B(u,u,.......u) - B(v,v,.......v)\ ]$

$$\begin{aligned}B(u,u,.......u) - B(v,v,.......v) = B(u,u-v,.....u) + B(v,v,u-v......u) + ... + .\\ +B(u-v,......v,v)\end{aligned}$$

On a:

$$\begin{cases} B(u,u-v,.....u) = \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} u(\tau)(u-v)(\tau)........u(\tau)u(\tau)d\tau \\ B(v,v,u-v......u) = \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} v(\tau)v(\tau)(u-v)(\tau).......u(\tau)d\tau \\ \\ \\ B(u-v,......v,v) = \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}} (u-v)(\tau)v(\tau)v(\tau)........v(\tau)d\tau \end{cases}$$

$$\|u(t) - v(t)\|_{PM^a} \leq \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{PM^a} + \|B(u,u,.......u) - B(v,v,.......v)\|_{PM^a}$$

$$\begin{aligned}&\|B(u,u,...,u) - B(v,v,...v)\|_{PM^a} \leq \\ &\qquad \|B(u,u-v,...u)\|_{PM^a} + \|B(v,v,u-v...u)\|_{PM^a} + ... \|B(u-v,...v,v)\|_{PM^a}\end{aligned}$$

On a

$$\begin{cases} \| B(u,u-v,...u)\|_{PM^a} = \sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess\,|\xi|^a\,\nu\int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho}\hat{u}(\tau,\xi)\widehat{(u-v)}(\tau,\xi)..............\hat{u}(\tau,\xi)d\tau \\ \| B(v,v,u-v......v)\|_{PM^a} = \sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess\,|\xi|^a\,\nu\int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho}\hat{v}(\tau,\xi)\hat{v}(\tau)\widehat{(u-v)}(\tau,\xi).......\hat{u}(\tau,\xi)d\tau \\ \\ \\ \| B(u-v,..........,v,v)\|_{PM^a} = \sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess\,|\xi|^a\,\nu\int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho}\widehat{(u-v)}(\tau,\xi)\hat{v}(\tau,\xi).........\hat{v}(\tau,\xi)d\tau \end{cases}$$

Donc

$$\|B(u,u,...,u)-B(v,v,...v)\|_{PM^a} \leq$$

$$\|B(u,u-v,...v)\|_{PM^a}+\|B(u,v,u-v...u)\|_{PM^a}+...+\|B(u-v,...v,v)\|_{PM^a}$$

$$\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess\,|\xi|^a\,\nu\int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho}\hat{u}(\tau,\xi)\widehat{(u-v)}(\tau,\xi)...\hat{u}(\tau,\xi)d\tau+$$

$$+\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess\,|\xi|^a\,\nu\int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho}\hat{v}(\tau,\xi)\hat{v}(\tau,\xi)\widehat{(u-v)}(\tau,\xi)...\hat{u}(\tau,\xi)d\tau+....$$

$$+\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess\,|\xi|^a\,\nu\int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho}\widehat{(u-v)}(\tau,\xi)\hat{v}(\tau,\xi)...\hat{v}(\tau,\xi)d\tau$$

Alors:

$$\|u(t)-v(t)\|_{PM^a} \leq \|S(t)(u_0-v_0)\|_{PM^a}+\|B(u,u,.......u)-B(v,v,.......v)\|_{PM^a}$$

$$\leq \|S(t)(u_0-v_0)\|_{PM^a}+\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess\,|\xi|^a\,\nu\int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho}\hat{u}(\tau,\xi)\widehat{(u-v)}(\tau,\xi)...\hat{u}(\tau,\xi)d\tau$$

$$+\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess\,|\xi|^a\,\nu\int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho}\hat{v}(\tau,\xi)\hat{v}(\tau,\xi)\widehat{(u-v)}(\tau,\xi)..\hat{u}(\tau,\xi)d\tau+$$

$$+\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} ess\,|\xi|^a\,\nu\int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho}\widehat{(u-v)}(\tau,\xi)\hat{v}(\tau)..\hat{v}(\tau,\xi)d\tau$$

$$\|u(t)-v(t)\|_{PM^a} \leq \|S(t)(u_0-v_0)\|_{PM^a}+\mathbf{G} \tag{2.1.18}$$

où $\mathbf{G}$ est donneé par :

$\mathbf{G} = \underset{\xi\in\mathbb{R}^n}{\sup ess} \left|\xi\right|^a \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho} \hat{u}(\tau,\xi)\widehat{(u-v)}(\tau,\xi)..\hat{u}(\tau,\xi)d\tau+$

$\underset{\xi\in\mathbb{R}^n}{\sup ess} \left|\xi\right|^a \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho} \hat{v}(\tau,\xi)\hat{v}(\tau)\widehat{(u-v)}(\tau,\xi)..\hat{u}(\tau)d\tau+.... + \underset{\xi\in\mathbb{R}^n}{\sup ess} \left|\xi\right|^a \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho} \widehat{(u-v)}(\tau,\xi)\hat{v}($

de l'estimation de convolution (2.1.11), s'ensuit que:

$$\mathbf{G} \leq \underset{\xi\in\mathbb{R}^n}{\sup ess} \left|\xi\right|^a \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho} \left|\xi\right|^{\rho-b} \left\|(u-v);\ PM^a\right\| \left\|u;\ PM^a\right\| .... \left\|u;\ PM^a\right\| d\tau \tag{2.1.19}$$

$$+ \underset{\xi\in\mathbb{R}^n}{\sup ess} \left|\xi\right|^a \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho} \left|\xi\right|^{\rho-b} \left\|v;\ PM^a\right\| \left\|(u-v);\ PM^a\right\| .... \left\|u;\ PM^a\right\| d\tau+.....$$

$$+ \underset{\xi\in\mathbb{R}^n}{\sup ess} \left|\xi\right|^a \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho} \left|\xi\right|^{\rho-b} \left\|v;\ PM^a\right\| \left\|v;\ PM^a\right\| .... \left\|(u-v);\ PM^b\right\| d\tau$$

$$\mathbf{G} \leq \underset{\xi\in\mathbb{R}^n}{\sup ess} \left|\xi\right|^{\rho-b+a} \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho} \left\|(u-v);\ PM^a\right\| [\left\|v;\ PM^b\right\| .... \left\|v;\ PM^a\right\| d\tau+$$

$$+ \left\|v;\ PM^b\right\| \left\|(u-v);\ PM^a\right\| .... \left\|u;\ PM^a\right\| d\tau + \left\|v;\ PM^b\right\| .... \left\|v;\ PM^a\right\| d\tau]$$

$$\mathbf{G} \leq \underset{\xi\in\mathbb{R}^n}{\sup ess} \left|\xi\right|^{\rho-b+a} \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho} \left\|(u-v);\ PM^a\right\| [\tau^{\frac{a-b}{\rho}} \tau^{\frac{b-a}{\rho}} \left\|v;\ PM^b\right\| .... \left\|v;\ PM^a\right\| d\tau+$$

$$+\tau^{\frac{a-b}{\rho}} \tau^{\frac{b-a}{\rho}} \left\|v;\ PM^b\right\| \left\|(u-v);\ PM^a\right\| .... \left\|u;\ PM^a\right\| d\tau+\tau^{\frac{a-b}{\rho}} \tau^{\frac{b-a}{\rho}} \left\|v;\ PM^b\right\| .... \left\|v;\ PM^a\right\| d\tau]$$

$$\mathbf{G} \leq \underset{\xi\in\mathbb{R}^n}{\sup ess} \left|\xi\right|^{\rho-b+a} \nu \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^\rho} \left\|u(\tau)-v(\tau);\ PM^a\right\| [\tau^{\frac{a-b}{\rho}} \left\|v;\ C_\sigma\right\| .... \left\|v;\ PM^a\right\| d\tau+$$

$$+\tau^{\frac{a-b}{\rho}}\left\|v;\ C_{\sigma}\right\|\left\|u(\tau)-v(\tau);\ PM^{a}\right\|....\left\|u;\ PM^{a}\right\|d\tau+\tau^{\frac{a-b}{\rho}}\left\|v;\ C_{\sigma}\right\|....\left\|v;\ PM^{a}\right\|d\tau]$$

D'apres le theoréme(**2.2.1**) :

$$\mathbf{G}\leq\sup_{\xi\in\mathbb{R}^{n}}ess\left|\xi\right|^{\rho-b+a}\nu\int_{0}^{t}e^{-(t-\tau)|\xi|^{\rho}}\tau^{\frac{a-b}{\rho}}\left\|u(\tau)-v(\tau);\ PM^{a}\right\|[(2\varepsilon)^{\alpha-1}+(2\varepsilon)^{\alpha-1}+...+(2\varepsilon)^{\alpha-1}]d\tau$$

$$\mathbf{G}\leq\alpha(2\varepsilon)^{\alpha-1}\nu\sup_{\xi\in\mathbb{R}^{n}}ess\left|\xi\right|^{\rho-b+a}\int_{0}^{t}e^{-(t-\tau)|\xi|^{\rho}}\tau^{\frac{a-b}{\rho}}\left\|u(\tau)-v(\tau);PM^{a}\right\|d\tau$$

$$\leq\alpha(2\varepsilon)^{\alpha-1}\nu\sup_{\xi\in\mathbb{R}^{n}}ess\int_{0}^{t}e^{-(t-\tau)|\xi|^{\rho}}\left((t-\tau)\left|\xi\right|^{\rho}\right)^{\frac{\rho-b+a}{\rho}}(t-\tau)^{\frac{b-a-\rho}{\rho}}\tau^{\frac{a-b}{\rho}}\left\|u(\tau)-v(\tau);PM^{a}\right\|d\tau \tag{2.1.20}$$

En échangement τ par $t\tau$:

$$\leq\alpha(2\varepsilon)^{\alpha-1}\nu\sup_{\xi\in\mathbb{R}^{n}}ess\int_{0}^{t}e^{-t(1-\tau)|\xi|^{\rho}}\left(t(1-\tau)\left|\xi\right|^{\rho}\right)^{\frac{\rho-b+a}{\rho}}(t(1-\tau)^{\frac{b-a-\rho}{\rho}})\tau^{\frac{a-b}{\rho}}\left\|u(\tau)-v(\tau);PM^{a}\right\|d\tau$$

$$\leq\alpha(2\varepsilon)^{\alpha-1}C\int_{0}^{1}(1-\tau)^{\frac{b-a}{\rho}-1}\tau^{\frac{a-b}{\rho}}\left\|u(t\tau)-v(t\tau);PM^{a}\right\|d\tau$$

Car $\sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}^{n}}\left(t(1-\tau)\left|\xi\right|^{\rho}\right)^{\frac{\rho-b+a}{\rho}}e^{-t(1-\tau)|\xi|^{\rho}}\leq C$
$\forall t>0$:

Posons maintenant:

$$A=\overline{\lim_{t\to\infty}}\left\|u(t)-v(t);PM^{a}\right\|\triangleq\lim_{k\in\mathbb{N},\ k\to\infty}\sup_{t\geq k}\left\|u(t)-v(t);PM^{a}\right\|$$

Nous voulons prouver que $A=0$

Ona:

$$\sup_{t\geq k}\int_0^1 (1-\tau)^{\frac{b-a}{\rho}-1}\tau^{-\frac{b-a}{\rho}}\left\|u(t\tau)-v(t\tau);PM^a\right\|d\tau \leq \int_0^1 (1-\tau)^{\frac{b-a}{\rho}-1}\tau^{\frac{a-b}{\rho}}\sup_{t\geq k}\left\|u(t\tau)-v(t\tau);PM^a\right\|d\tau$$

l'application du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, donne:

$$\int_0^1 (1-\tau)^{\frac{b-a}{\rho}-1}\tau^{\frac{a-b}{\rho}}\left\|u(t\tau)-v(t\tau);PM^a\right\|d\tau \leq \int_0^1 (1-\tau)^{\frac{b-a}{\rho}-1}\tau^{\frac{a-b}{\rho}}\lim\sup_{t\geq k}\left\|u(t\tau)-v(t\tau);PM^a\right\|d\tau$$

$$\leq A \int_0^1 (1-\tau)^{\frac{b-a}{\rho}-1}\tau^{\frac{a-b}{\rho}}$$

$$\leq A.K$$

Finalement, en passant à la limite:

$$\lim_{t\to\infty}\sup\left\|u(t)-v(t)\right\|_{PM^a} \leq$$

$$\lim_{t\to\infty}\left\|S(t)(u_0-v_0)\right\|_{PM^a}+\alpha(2\varepsilon)^{\alpha-1}C\lim_{t\to\infty}\sup\int_0^t (1-\tau)^{\frac{b-a}{\rho}-1}\tau^{\frac{a-b}{\rho}}\left\|u(t\tau)-v(t\tau);PM^a\right\|d\tau$$

$$A \leq \alpha(2\varepsilon)^{\alpha-1}CKA$$

et puisque ε est suffisamment petit:

$$A = \lim_{t\to\infty}\sup\left\|u(t)-v(t);PM^a\right\| = 0$$

et donc :

$$A = \lim_{t\to\infty}\left\|u(t)-v(t);PM^a\right\| = 0$$

Nous prouvons (2.1.16)

Supposons maintenant que:

$$\lim_{t\to\infty}\left\|u(t,\quad .)-v(t,\quad .);PM^a\right\| = 0$$

Montrons que :

$$\lim_{t\to\infty} \|S(t)(u_0 - v_0); PM^a\| = 0$$

Preuve. En calculant $u(t) - v(t)$; on trouve

$u(t) - v(t) = S(t)(u_0 - v_0) + [B(u, u, ...u) - B(v, v, ...v)\ ]$
d'où

$S(t)(u_0 - v_0) = u(t) - v(t) - [B(u, u, ...u) - B(v, v, ...v)\ ]$

En prenant la norme dans PM^a , on obtient :
$\|S(t)(u_0 - v_0)\|_{PM^a} \leq \|u(t) - v(t)\|_{PM^a} + \|B(u, u, ...u) - B(v, v, ...v)\|_{PM^a}$

Le meme argument qu'en (2.1.18) donne :

$$\|s(t)(u_0 - v_0(x); PM^a\| \leq \|\|u(t) - v(t)\|_{PM^a}\| + G \qquad (2.1.21)$$

Où G est le même que dans (2.1.18) puisque:

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - v(t); PM^a\| = 0$$

et , par hypothèse

$$\sup_{t>0} \|u(t); PM^a\| < \infty, \sup_{t>0} \|v(t); PM^a\| \leq \infty$$

Il résulte de (2.1.19) et (2.1.21) et prenant la limite lorsque $t \to \infty$, on obtient :

$$\lim_{t\to\infty} \|S(t)(u_0 - v_0); PM^a\| = 0\ .$$

Chapitre 3

Solution auto-similaire des équations aux dériveés partielles

3.1 Solution pseudo-mesure auto-similaire

Pour cette partie on peut consulter [1] , [2] , [3] et [9])

Définition On dira que $u(x;t)$ est une solution auto-similaire des équations hyper-dissipative si, pour tout $\lambda > 0$

$$u(t,x) = \lambda^{\frac{\rho}{\alpha-1}} u(\lambda^{\rho} t, \lambda x)$$

Ainsi, si u est une solution auto-similaire du système hyper-dissipatif, alors pour tout $\lambda > 0$;

$$u_0(\lambda x) = \lambda^{-\frac{\rho}{\alpha-1}} u_0(x)$$

où : $u_0(\lambda x) = u(0, \lambda x)$

Nous donnons ici deux exemples déquations admettant des solutions auto-similaires :
Solution auto-similaire des equations aux dériveés partielles:
Pour les équations aux dériveés partielles lineaires, il existe differéntes techniques pour réduire l'equation aux dérivées partielles à des équation differentielles ordinaires (ou au moins une EDP dans un plus petit nombre de variables independantes).

Ces techniques sont beaucoup moins fréquentes dans le traitment des équations aux dériveés partielles non lineaires.
Cependant il existe des méthodes pour déterminer les solutions dépendantes uniquement d'un certain ensemble de variables plutôt que de s'appuyer sur toutes les variables independantes.
Nous allons expliquer, dans ce qui suit, cette technique.
Considérons l'équation de la chaleur:

$$\partial_t(x,t) - \lambda \partial_{xx} u(x,t) = 0 \tag{3.1.1}$$

et introduisons la transformation:(dilation)

$$z = \varepsilon^a x \qquad ; s = \varepsilon^b t \qquad , \nu(z,s) = \varepsilon^c u(\varepsilon^{-a} z, \varepsilon^{-b} s) \tag{3.1.2}$$

Alors:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \varepsilon^{-c} \partial_s \nu(z,s).s^{'}(t) = \varepsilon^{-c} \partial_s \nu(z,s).\varepsilon^b = \varepsilon^{b-c} \partial_s \nu(z,s) \\ \partial_{xx} u(x,t) &= \varepsilon^{-c} \partial_{zz} \nu(z,s).z^{'}(t).\varepsilon^a = \varepsilon^{-2a-c} \partial_{zz} \nu(z,s) \end{aligned}$$

En remplaçant dans (3.2.1) :

$$\epsilon^{b-c} \partial_s \nu(z,s) - \lambda \varepsilon^{-2a-c} \partial_{zz} \nu(z,s) = 0$$

Si :$b - c = 2a - c$ (c'est à dire :$b = 2a$),alors
l'équation (3.1.1) est invariante par cette transformation . Si $u(x,t)$ est solution l'équation de la chaleur dans les variable(x,t), alors $\nu(z,s)$ donnée par (3.1.2), est une solution de l'équation de la chaleur dans les variables z, s.
Notons que:

$$v s^{-c/b} = (\varepsilon^c u)(\varepsilon^b t)^{-c/b} = u t^{-c/b}$$

et

$$\frac{z}{s^{a/b}} = \frac{\varepsilon^a x}{(\varepsilon^b t)^{a/b}} = \frac{x}{t^{a/b}}$$

Ceci suggère de chercher une solution de (3.1.1) sous la forme:

$$u = t^{c/b} y(\xi) \quad pour \;\; \xi = \frac{x}{t^{a/b}} \;\; = \frac{x}{\sqrt{t}} \qquad\qquad b = 2a \tag{3.1.3}$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \tfrac{c}{2a} t^{c/2a-1} y(\xi) + t^{c/2a} y\prime(\xi)\partial_t \xi \\ &= \tfrac{c}{2a} t^{c/2a-1} y(\xi) + t^{c/2a} y\prime(\xi) \left(-\tfrac{1}{2}\tfrac{x}{\sqrt{t^3}}\right) \\ &= t^{c/2a-1}\left(y(\xi) - \tfrac{\xi}{2} y'(\xi)\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \partial_x u &= t^{c/2a} y'(\xi)\partial_x \xi = t^{c/2a-1/2} y'(\xi) \\ \partial_{xx} u &= t^{c/2a-1/2} y''(\xi)\partial_x \xi = t^{c/2a-1} y''(\xi) \end{aligned}$$

:

$$t^{c/2a-1}\left[\lambda y''(\xi) - \frac{c}{2a} y(\xi) + \frac{\xi}{2} y\prime(\xi)\right] = 0 \tag{3.1.4}$$

l'equations aux direvées partielles à été réduite à une équation differentielle ordinaire (3.1.1) qui est satisfaite pour : $x > 0; t > 0$. Si de plus :

$$u(x,0) = 0 \quad ; x > 0$$

$$u(x,t) \to 0, x \to \infty$$

$$\partial_x u(x,t) = Q, t > 0$$

Puisque $y(\xi) = t^{c/2a} u(x,t)$ et $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$, il s'ensuit que :

$$\xi \to 0 \; si \quad x \to \infty, ou \quad t \to 0$$

et

$$\xi = 0 \quad si \;\; x = o$$

Maintenant

$$\partial_x u(0,t) = t^{(c/2a)-1/2} y'(0)$$

ne peut être egale à la constante Q que si $c = a$.

Le problème aux limites pour $u(x,t)$ est reduit au probléme suivant en $y(\xi)$:

$$\lambda y''(\xi) - \frac{1}{2} y(\xi) + \frac{\xi}{2} y'(\xi) = 0, y'(0) = Q \;,\; y(\xi) \to 0 \;\; lorsque \; \xi \to 0 \tag{3.1.5}$$

Si $u(0,x) = u_0$ alors $u(0,t) = t^{c/2a} y(0)$ qui est constante si et seulement si $c = 0$.

Le probleme aux limite initial pour $u(x,t)$ devient

$$\lambda y''(\xi) + \frac{\xi}{2} y'(\xi) = 0, \; y(0) = u_0 \qquad\qquad y(\xi) \to 0 \quad lorsque \; \xi \to \infty \tag{3.1.6}$$

On obtient après intégration: :

$$y'(\xi) = c_1 e^{-\xi^2/4D} \tag{3.1.7}$$

et

$y(\xi) = c_1 \int_0^{\xi} e^{-\lambda^2/4D} d\lambda + c_2$

$y(\xi) = c_3 \,\mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{4D}}\right) + c_2 \qquad$ avec $\quad \mathrm{erf}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\eta^2} d\eta$

On a

$$\begin{cases} y(0) = C_2 \\ y(\infty) = C_3 + C_2 \end{cases} \Rightarrow y(0) = C_2 = -C_3$$

Donc

$$y(\xi) = y(0) - y(0)\,\mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{4D}}\right)$$

$$t^{c/b}y(\xi) = t^{c/b}y(0) - t^{c/b}y(0)\,\mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{4D}}\right)$$

$$u(x,t) = u_0 - u_0\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \qquad (\xi = \frac{x}{\sqrt{t}})$$

$$= u_0(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)) = u_0\,\mathrm{erf}\,c\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)$$

La solution de l'équation (3.1.5) est donnée par:

$$y(\xi) = C_1\xi + C_2\ \left[2\sqrt{\pi D}e^{-\xi^{2/4D}} + \pi\xi\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4D}}\right)\right]$$

De plus

$$\acute{y}(\xi)\ = C_1 + C_2\left[\pi\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4D}}\right)\right]$$

Les conditions auxiliaires sont satisfaites et

$$y(\xi) = Q\xi + \frac{Q}{\pi}\ \left[2\sqrt{\pi D}e^{-\xi^{2/4D}} + \pi\xi\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4D}}\right)\right]$$

$$= Q\xi\,\mathrm{erf}\,c\left(\frac{\xi}{\sqrt{4D}}\right) - 2Q\sqrt{\frac{D}{\pi}}e^{-\xi^{2/4D}}$$

Bien entendu, ce problème peut être est résolu par des méthodes intégrales directes.

Considerons maintenant l'exemple suivant :

$$\begin{aligned}
\partial_t u(x,t) - \partial_x\left[u\partial_x u(x,t)\right] &= 0, \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\
u(x,0) &= \delta(x) \\
u(x,0) &\to 0 \quad as \qquad |x| \to 0
\end{aligned}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = 1, \quad for \quad t > 0 \tag{3.1.8}$$

La transformation (3.1.2) donne:

$$\varepsilon^{b-c}\partial_s v - \varepsilon^{2a}\partial_{zz}(\frac{1}{2}\varepsilon^{-2c}v^2) = 0$$

L'équation est invariante par cette transformation si $b - c = 2(a - c)$, c'est à dire $c = 2a - b$

Alors si nous posons:

$$u(x,t) = t^{(2a-b)/b}y(\xi), \xi = \frac{x}{t^{a/b}}$$

La condition (3.1.8) devient:

$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = t^{2(a/b)-1}\int_{\mathbb{R}} y\left(\frac{x}{t^{a/b}}\right)t^{a/b}d\xi = t^{3(a/b)-1}\int_{\mathbb{R}} y(\xi)d\xi = 1$

Cette condition est réalisée pout tout $t > 0$ si $3a/b = 1$, c'est à dire $3a = b$ et

$$u(x,t)dx = t^{-1/3}y(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt[3]{t}}$$

On a alors :

$\partial_t u = -\frac{1}{3}t^{-4/3}y(\xi) + \frac{1}{3}t^{-1/3}y'(\xi)\partial_t\xi = -\frac{1}{3}t^{-4/3}\left[y(\xi) + \xi y'(\xi)\right]$

$\partial_{xx}(\frac{1}{2}u^2) = \frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{2}t^{-2/3}y^2\right)(\partial_x\xi)^2 = \frac{1}{2}t^{-2/3}(2yy''(\xi) + 2y')t^{-2/3}$

et

$-\frac{1}{3}t^{-4/3}\left[y(\xi) + \xi y'(\xi)\right] - \frac{1}{2}t^{-4/3}(2yy''(\xi) + 2y') = 0$

C'est à dire

$$yy''(\xi) + y' + \frac{1}{3}\left[y(\xi) + \xi y'(\xi)\right] = 0$$

où

$$3(y(\xi)y'(\xi))' + (\xi y(\xi))' = 0$$

Alors

$$3y(\xi)y'(\xi) + \xi y(\xi) = C_0$$

Si nous voulons que la solution soit une fonction paire de ξ,nous imposons les conditions: $y'(0) = 0$ alors $C_0 = 0$, $3y'(\xi) + \xi = 0$, alors $y(\xi) = -\frac{1}{6}\xi^2 + C_1$

Cette solution peut se mettre sous la forme :

$$y(\xi) = \frac{1}{6}(A^2 - \xi^2)$$

L'équation de Burger: (voir par exemple [14])

Nous allons examiner l'effet de la transformation (3.1.2) de l'équation de Burger

$$\partial_t u(x,t) + u(x,t)\partial_x u(x,t)) = 0.$$

Sous la transformation(3.1.2), cela devient

$$\varepsilon^{b-a}\partial_s v(z,s) + \varepsilon^{a-2c} v(z,s)\partial_z v(z,s) = 0$$

L'équation est invariante si $c = a - b$,alors nous cherchons une solution de la forme (3.1.3)

$$u = t^{a/b-1}y(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{t^{a/b}}$$

Où , en posant $a/b - 1 = m$ (m considéré comme paramètre)

$$u = t^m y(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{t^{m+1}}$$

Alors

$$\begin{aligned}\partial_t u &= m t^{m-1} y(\xi) + t^m y'(\xi)\left(-(m+1)\tfrac{x}{t^{m+2}}\right)\\ &= t^{m-1}\left[m y(\xi) - (m+1)\xi y'(\xi)\right]\end{aligned}$$

$\partial_x u = t^m y'(\xi)(t^{-m-1})$

et $\partial_t u + u\partial_x u = t^{m-1}\left[m y(\xi) - (m+1)\xi y'(\xi) + y(\xi) y'(\xi)\right] = 0$

Pour $m = 0$ on a

$$y(\xi)y'(\xi) - \xi y'(\xi) = 0, \quad \textit{oú} \quad y(\xi) = \xi$$

$$u(x,t) = \frac{x}{t}$$

Un dernier exemple plus intéressant est fourni par l'équation KDV

$$\partial_t u + 6u\partial_x u + \partial_{xxx} u = 0$$

Qui est transformée par (3.1.2) on a

$$\varepsilon^{b-c}\partial_s v + 6\varepsilon a - 6\varepsilon^{a-2c} v\partial_z u + \varepsilon^{3a-c}\partial_{zzz} v = 0$$

Pour invariance, doit avoir:

$$b - c = a - 2c = 3a - c,$$

ou'

$$c = a - b, \quad 3a = b;$$

C'est à dire

$a = \frac{b}{3}$ et $c = -\frac{2}{3}b$, b =est un paramètre libre.

La recherche d'une solution de la forme
$u = (3t)^{-2/3}y(\xi)$ $\xi = \frac{x}{(3t)^{1/3}}$,
Conduit à:
$\partial_t u + 6u\partial_x u + \partial_{xxx}u = -(3t)^{5/3}\left[2y(\xi) + \xi y'(\xi) - 6y(\xi)y'(\xi) - y'''(\xi)\right] = 0$
C'est à dire $y'''(\xi) + \left[6y(\xi) + \xi\right] y'(\xi) - 2y(\xi) = 0.$
On obtient encore une fois une équation différentielle au lieu d'une EDP plus complexe.

Théorème 3.1.1 : Supposons que $u(x) \in PM^a(\mathbb{R}^n)$, $u_0(\lambda x) = \lambda^{-\frac{\rho}{\alpha-1}}\, u_0(x)$ et $\|u_0; PM^a\| \leq \varepsilon, \varepsilon$ suffisamment petit. Alors il existe une solution globale en temps vérifiant:

$$\left\|u(t,x); Y_\sigma^{a\ ,b}\right\| \leq 2\varepsilon \ et \ \ u(t,x) = \lambda^{\frac{\rho}{\alpha-1}}u(\lambda^\rho t, \lambda x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \ et \ \lambda > 0$$

Preuve:

Soit u une solution de l'équation hyper-dissipative :

$$Pu = u_t + (-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}u = \nu u^\alpha$$

Alors : $u_\lambda(t,x) = \lambda^{\frac{\rho}{\alpha-1}}u(\lambda^\rho t, \lambda x)$ est aussi une solution.
En effet : $(a)\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial t} = \lambda^{\frac{\rho\alpha}{\alpha-1}}u(\lambda^\rho t, \lambda x)$
$(b)(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}u_\lambda = \lambda^{\frac{\rho}{\alpha-1}}.\lambda^\rho((-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}(u(\lambda^\rho t, \lambda x))$

car $(-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}$est un opérateur différentiel d'ordre ρ. On a alors :

$$Pu_\lambda = \lambda^{\frac{\rho\alpha}{\alpha-1}}Pu(\lambda^\rho t, \lambda x)$$

Or : $Pu(\lambda^\rho t, \lambda x) = \lambda^{\frac{\rho\alpha}{\alpha-1}}\nu((\lambda^\rho t, \lambda x))^\alpha = \nu.\lambda^{\frac{\rho\alpha}{\alpha-1}}.u_\lambda^\alpha$
Ceci donne : $Pu_\lambda = \nu.u_\lambda^\alpha$

Remarque: Il est facile de vérifier que:

$\frac{P(x)}{|x|^{k+\frac{\rho}{\alpha-1}}}$, $|x|^{-\frac{\rho}{\alpha-1}}$ sont dans $PM^a(\mathbb{R}^n)$ et $PM^a(\mathbb{R}^n)$ est homogène de degrée $-\frac{\rho}{\alpha-1}$,où $P(x)$ est un polynôme harmonique

homogène de degrée k , k est un nombre entier.

3.2 Conclusion

Nous avons étudié le problème (2.1.1). Il admet une solution unique dans un espace pseudo-mesure convenable.

Posons: $P = u_t + (-\Delta)^{\frac{\rho}{2}}u$.Le problème $Pu = |u|\,.u^{\alpha}$ est encore ouvert.

On peut aussi se poser la question lorsque $|u|\,.u^{\alpha}$ est remplacé par $u^m, m \in \mathbb{N}$.

Annexe (A)

Soit le problème de *Cauchy* :

$$(*) \begin{cases} u_t + Au = f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

où A est le *genérateur* d'un C_0 semi groupe .

(ici $S = \textit{semi groupe}$, $S(t) = e^{-At}$,on verifie que $(S(t))_{t \geq 0}$est bien un C_0 semi groupe)

Resolution de $(*)$: (a) l'equation sans second membre :

$$(**) \begin{cases} u_t + Au = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

$(**) \Rightarrow u(t) = e^{-At}.u_0 = S(t).u_0$, $S(t) = e^{-At}$

(b) Soit u solution de $(*)$

Posons $g(\tau) = S(t-\tau).u(\tau)$

$\Rightarrow \acute{g}(\tau) = (S(t-\tau))\acute{}.u(\tau) + S(t-\tau).\acute{u}(\tau)$

or :$(S(t-\tau))\acute{} = -A.S(t-\tau)$

$\Rightarrow \acute{g}(\tau) = -A.S(t-\tau) + S(t-\tau)\{-Au(\tau) + f(\tau)\}$

$\acute{g}(\tau) = S(t-\tau)f(\tau)$

En integrant entre 0 et t : $\int_0^t \acute{g}(\tau)ds = \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau$

et $\int_0^t \acute{g}(\tau)d\tau = g(t) - g(0)$,on obtient $(S(0) = I)$

$u(t) - S(t)u_0 = \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau$

Appliquons ceci au probléme (2.1.1) : $A = (-\Delta)^{\rho/2}$ et $f(s) = \nu u^\alpha$

$u(t) = e^{-t(-\Delta)^{\rho/2}}u_0 + \nu\int_0^t e^{-(t-\tau)(-\Delta)^{\rho/2}}u^\alpha(\tau)d\tau$

Annexe (B)

1.Calcul de $|\xi|^{-2} * |\xi|^{-2}$

La fonction $f(x) = |x|^{-2} \notin L^1(\mathbb{R}^3)$ mais $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$.

En écrivant : $f = \P_B F + (1 - \P_B)f \in L^1 + L^2$, $\P_B$ étant l'indicatrice de la boule unité le calcul suivant est justifié.

Calculons la transformée de Fourier de f dans $\mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-ix\xi) f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-ix\xi)}{|x|^2} dx$$

En faisant un changement de variables en coordonnées polaires , $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ se transforme en (r, θ, φ) par $\begin{cases} x_1 = r \sin\theta \cos\varphi \\ x_{2=} r \sin\theta \sin\varphi \\ x_{3=} r \cos\theta \end{cases}$ avec $dx = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

d'où :

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_0^\infty \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^\pi \exp(-ir|\xi|\cos\theta) r^2 \sin\theta d\theta \right\} d\varphi dr$$

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = 2\pi \int_0^\infty \left\{ \int_0^\pi \exp(-ir|\xi|\cos\theta) \sin\theta d\theta \right\} dr$$

$$= (\mathcal{F}f)(\xi) = 2\pi \int_0^\infty \frac{-i}{r|\xi|} \left[\exp(-ir|\xi|\cos\theta\right]_0^\pi dr$$

$$= \frac{-2\pi i}{|\xi|} \int_0^\infty \frac{1}{r} \left[\exp ir|\xi| - \exp(-ir|\xi|\right] dr$$

$$= \frac{4\pi}{|\xi|} \int_0^\infty \frac{\sin(r|\xi|)}{r} dr = \frac{4\pi}{|\xi|} \int_0^\infty \frac{\sin(y)}{y} d\varphi = \frac{2\pi^2}{|\xi|}$$

Mais on sait que

$$\mathcal{F}\mathcal{F}f = (2\pi^3)\check{f}(x) \text{ avec } \check{f}(x) = f(-x),$$

et comme f est paire, il s'ensuit que $\mathcal{F}\mathcal{F}f = (2\pi^3)f(x)$.En utilisant la propriété

$$\mathcal{F}(f * f) = \mathcal{F}f.\mathcal{F}f$$

On obtient donc :

$$\mathcal{F}(\frac{1}{|x|^2} * \frac{1}{|x|^2}) = \frac{2\pi^2}{|\xi|}.\frac{2\pi^2}{|\xi|} = \frac{4\pi^4}{|\xi|^2},$$

En passant à la transformée de Fourier, on aura

$$\mathcal{F}\mathcal{F}(\frac{1}{|x|^2} * \frac{1}{|x|^2}) = 4\pi^2\mathcal{F}(\frac{1}{|\xi|^2})$$

ceci nous conduit à l'égalité suivante :

$$(2\pi)^3\frac{1}{|x|^2} * \frac{1}{|x|^2} = 4\pi^4\frac{2\pi^2}{|x|},$$

et finalement,

$$\frac{1}{|x|^2} * \frac{1}{|x|^2} = \pi^3\frac{1}{|x|}$$

2.**Remarque :**

Soient $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ .Posons :

(a) $\sigma_\lambda f(x) = f(\lambda x)$, $\lambda > 0$.

(b) $\langle \sigma_\lambda T, \varphi \rangle = \lambda^{-n} \left\langle T, \sigma_{\frac{1}{n}}\varphi \right\rangle$

Rappelons que T est une distribution homogène de degré $m \in \mathbb{C}$ si :

$$\sigma_\lambda T = \lambda^m T$$

Il s'en suit que si T est homogène de degré m :

$\langle \sigma_\lambda T, \varphi \rangle = \lambda^{-n} \left\langle T, \sigma_{\frac{1}{n}}\varphi \right\rangle = \langle \lambda^m T, \varphi \rangle \Leftrightarrow \langle T, \varphi \rangle = \lambda^{-n-m} \left\langle T, \sigma_{\frac{1}{n}}\varphi \right\rangle$.

On a alors : (*si* $\widehat{T} = \mathcal{F}T$)

$\left\langle \sigma_\lambda \widehat{T}, \varphi \right\rangle = \lambda^{-n} \left\langle \widehat{T}, \sigma_{\frac{1}{n}}\varphi \right\rangle = \lambda^{-n} \left\langle T, \widehat{\sigma_{\frac{1}{n}}\varphi} \right\rangle = \lambda^{-n} \langle T, \lambda^n \sigma_\lambda \widehat{\varphi} \rangle$

$= \langle T, \sigma_\lambda \widehat{\varphi} \rangle = \lambda^{-n} \left\langle \sigma_{\frac{1}{n}} T, \widehat{\varphi} \right\rangle = \lambda^{-n-m} \langle T, \widehat{\varphi} \rangle = \lambda^{-n-m} \left\langle \widehat{T}, \varphi \right\rangle.$

Ce qui signifie que si T est homogène de degré m alors $\widehat{T}$ est homogène de degré $-m-n$.

D'autre part on sait (facile) que si T est radiale alor sil en est de même de $\widehat{T}$.

Sachant ceci , on sait alors que : $\mathcal{F}(\frac{1}{|\xi|^2}) = \frac{C}{|\xi|}$ (C constante à préciser)

et plus généralement que si $0 < a < n$: $\mathcal{F}(\frac{1}{|\xi|^a}) = \frac{C_1}{|\xi|^{n-a}}$.

On peut alors s'inspirer de 1. pour calculer des expressions du type $\mathcal{F}(\frac{1}{|x|^a} * \frac{1}{|x|^a})$

et plus généralement du type $\mathcal{F}(\frac{1}{|x|^a} * \frac{1}{|x|^b})$.

Bibliographie

[1] **J.Aguirre, M.Escobedo.** and **E.Zuazua,**Self-similar solutions of a convection diffusion equation and related elliptic problems, Comm.Partial Differential Equation **15** **,**139-157(1990).

[2] **M. Cannone** and **G. Karch,** Smooth or singular solutions to the **Navier-Stokes** system, J. Differential Equations **197,** 247-274 (2004).

[3] **M. Escobedo** and **E .Zuazua,** Large time behavior for convection-diffusion equations in $\mathbb{R}^N$,**J.** Differential Equations **100,** 119-161 (1991).

[4] **H. Fujita,** On the blowing up of solutions of Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ .J.Fac. Sci.Univ. Tokyo Sect.IA Math **13,** 109-124 (1966)

[5] **T.Kato,** Solution of the **Navier-Stokes** equation in Morrey spaces, Bol. Soc. Bras. Mat. (N.S.) **22,** 127-155 (1992).

[6] **N. H. Kartz** and **N. Pavlovié,** A cheap Caffarelli-Kohn-Nirenberg for Navier-Stokes equations with hyper-dissipation, Geom.Funct. Anal. **12,** No 2, 355-379 (2002)

[7] **T.Li** and **Y.Chen,** Initial value problems for nonlinear heat equation, J. Partial Differential Equations **1,** 1-11 (1988)

[8] **C. X. Miao,Harmonic** Analysis and Applications to Partial Differential Equation,2nd edition (Science Press, Beijing 2004)

[9] **C Miao, B Yuan** Solutions to some nonlinear parabolic equations in pseudomeasure spaces , Mathematische Nachrichten, p171-186 , 2007 .

[10] **G. Ponce,** Global existence of small solutions to a class of nonlinear evolutions, Nonlinear Anal **9,** 399-418 (1985).

[11] **E. Stein** and **G. Weiss,** Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971).

[12] **S.Zheng,**Remark on time-global existence for nonlinear parabolic equations,Nonlinear Anal. **10,** 107-114(1986).

[13] **S.Zheng** and **Y.Chen,** Global existence for nonlinear parabolic equations ,Chin. Ann. Math. Ser. B 7, 57-73(1986).

[14] **Golse.F,** Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles, 2012.

[15] **Brezis, H.** Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson 1983.