N° d'ordre : 03 /2015- M/MT


REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumédiène

Faculté de Mathématiques


**MÉMOIRE**

Présenté pour obtenir le diplôme de MAGISTER

En MATHEMATIQUES

Spécialité: **Analyse et approximation des équations aux dérivées partielles**


Par: **BENHADJ MUSTAPHA Nassima**


**THÈME**

# ETUDE ET APPROXIMATION D'UN PROBLEME DE CONTACT UNILATERAL AVEC ADHESION

**Soutenu publiquement, le 08/11/2015, devant le jury composé de:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mr. Rachid BEBBOUCHI | Proffesseur, | à l'U.S.T.H.B | Président |
| Mr. Arezki TOUZALINE | Proffesseur, | à l'U.S.T.H.B | Directeur de mémoire. |
| Mr. Amor KESSAB | Proffesseur, | à l'U.S.T.H.B | Examinateur |
| Mr. Ammar KHEMMOUDJ | Maître de Conférences, | à l'U.S.T.H.B | Examinateur. |

# *Remerciements*

*Je remercie Dieu tout puissant, de m'avoir octroyée l'opportunité de faire des études supérieures en mathématiques, et de m'avoir donnée la force et la patience de continuer mes études et de faire ce mémoire.*

*Je tiens à exprimer mes remerciements les plus profonds à Monsieur* ***Arezki Touzaline****,* ***Proffesseur à l'U.S.T.H.B*** *pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissante pour la confiance qu'il m'a accordé, et surtout surtout sa disponibilité.*

*Puis je tiens à remercier vivement Monsieur* ***Rachid Bebbouchi****,* ***Proffesseur à l'U.S.T.H.B*** *pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.*

*Mes remerciements vont également à Monsieur* ***Amor Kessab Proffesseur à l'U.S.T.H.B****, et Monsieur* ***Ammar Khemmoudj, Maître de conférence à l'U.S.T.H.B****. qui ont accepté de faire partie de mon jury.*

# Table des matières

# Introduction

Les problèmes de contact avec ou sans frottement entre corps déformables ou entre un corps et une fondation sont abondants en industrie et dans la vie de tous les jours. Le simple contact entre une roue de voiture et une route, le piston et la chemise, les frottements entre plaques tectoniques sont des exemples parmi bien d'autres. Du fait de l'importance du phénomène, des études considérables ont été consacrées à ce sujet important qu'est la mécanique de contact. La littérature concerne la modélisation, l'analyse mathématique ainsi que l'approximation numérique des problèmes.

Le premier essai, concernant l'étude des inéquations variationnelles et leurs applications pour l'étude mathématique des problèmes de contact, a été fait dans [8]. L'étude numérique des problèmes de contact avec conditions de Signorini a été étudiée par plusieurs auteurs, voir [1, 2, 3, 13, 16] où [16] représente jusqu'à présent une exellente référence pour l'étude fonctionnelle et numérique des problèmes de contact élastique.

Le contact adhésif est un phénomène d'interface qui accompagne le contact, ceci a lieu quand la colle est ajoutée pour réduire ou ralentir le mouvement des surfaces, M. Frémond propose une théorie moderne du contact avec adhésion, issue de la mécanique des milieux continus. Cette théorie se base sur les conditions de contact unilatéral de Hertz-Signorini-Moreau : elle utilise une variable interne $\beta$ qui mesure localement "l'intensité de l'adhésion"; cette variable est régie par une loi d'évolution selon [10, 11] où le champ d'adhésion satisfait les restrictions $0 \leq \beta \leq 1$. Quand $\beta = 1$ en un point de la surface de contact, l'adhésion est complète et toutes les liaisons sont actives. Quand $\beta = 0$ toutes les liaisons sont inactives, coupées et il n' y a pas d'adhésion. Quand $0 < \beta < 1$ l'adhésion est partielle. Le but de ce mémoire est de poursuivre l'étude faite pour des problèmes de contact dans les références [6, 7, 9, 12, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24] où des modèles de processus dynamique ou quasi-statique de contact adhésif sans frottement entre un corps déformable et une fondation ont été analysés et simulés.

L'objectif est alors de proposer une contribution à l'étude d'un problème aux limites en mécanique de contact. En effet nous considérons une loi de comportement linéaire ou non linéaire pour des matériaux élastiques; les conditions de contact sont de type unilatéral avec des conditions de Signorini et compliance normale où l'adhésion est prise en compte. Le problème est étudié selon l'ordre général suivant: nous commençons par le problème mécanique de départ et, après avoir précisé les hypothèses sur les données, nous présentons une formulation variationnelle du problème mécanique pour laquelle nous démontrons, l'existence et l'unicité de la solution. Par ailleurs, nous étudions l'approximation du problème variationnel par la méthode des éléments finis conformes et par la méthode de pénalisation.

Cette thèse est composée de quatre chapitres. Afin d'en faciliter la lecture, nous les avons rendu indépendants en rappelant brièvement les outils nécessaires à leur compréhension.

*Le premier chapitre* introduit des notations générales de mécanique ainsi que les notations nécessaires à la compréhension de ce travail. On rappelle les différentes équations et conditions aux limites concernant le champ des déplacements et le champ des contraintes. On poursuit avec la formulation du problème mécanique qui sera traité, ainsi que des rappels sur les lemmes de Gronwall, les inéquations variationnelles et les équations d'évolution.

*Dans le second chapitre* on s'intéresse à l'étude d'un problème aux limites qui décrit l'évolution quasi-statique d'un corps élastique soumis à des forces surfaciques et des forces volumiques, en contact sans frottement. Le contact est décrit à l'aide des conditions de Signorini et compliance normale avec adhésion. Nous présentons la formulation variationnelle du problème et nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution. La démonstration est basée sur des résultats concernant les inéquations variationnelles dépendant du temps avec des opérateurs fortement monotones suivis par un argument de point fixe similaire à celui utilisé dans [20].

*Le troisième chapitre* est consacré à l'approximation numérique du problème variationnel. On fait une discrétisation en temps et en espace (discrétisation totale). A chaque pas de temps on écrit le problème discret qui admet une solution unique. A la fin en ajoutant quelques hypothèses de régularité sur le déplacement, le déplacement normal et le tenseur des contraintes, on arrive à établir une estimation d'erreur. Les techniques de cette partie s'inspirent du livre [20] qui constitue actuellement la meilleure référence pour l'étude des problèmes de contact adhésif.

*Dans le quatrième chapitre* on étudie l'approximation du problème continu par la méthode de pénalisation. On montre que le problème de contact élastique pénalisé avec adhésion et contraintes unilatérales admet une solution unique qui converge vers la solution du problème continu quand le paramètre de pénalisation tend vers 0.

# *Notations*

Si $\Omega$ *est* un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, on note par:

| | |
|---|---|
| $\Gamma$ | la frontiére de $\Omega$ supposée régulière. |
| $\Gamma_i (i = \overline{1,3})$ | une partie mesurable de la frontiére $\Gamma$. |
| $mes\mathit{\Gamma}_1$ | la mesure de lebesgue $(d-1)$ de $\Gamma_1$. |
| $\upsilon_\nu, \upsilon_\tau$ | les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel $\upsilon$. |
| $\sigma_\nu, \sigma_\tau$ | les composantes normales et tangentielles du champ tensoriel $\sigma$. |
| $\operatorname{div}\sigma$ | la divergence de $\sigma$. |
| $C^1(\overline{\Omega})$ | l'espace des fonctions réelles continues différentiables sur $\overline{\Omega}$. |
| $H$ | l'espace $L^2(\Omega)^d$. |
| $Q$ | l'espace $L^2(\Omega)^{d\times d}$. |
| $H_1$ | l'espace $H^1(\Omega)^d = \{u \in L^2(\Omega) / \partial_i u \in L^2(\Omega), i = 1, 2, 3\}$ |
| $Q_1$ | l'espace $\{\sigma \in Q \backslash \operatorname{div}\sigma = (\sigma_{ij,j}) \in H\}$. |
| $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ | l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$sur $\Gamma$. |
| $\gamma : C^1\left(\overline{\Omega}\right)^d \rightarrow L^2(\Omega)^d$ | l'application trace pour les fonctions vectorielles. |
| $H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ | |
| $H_\tau$ | l'espace $\{\xi \in H_\Gamma; \, \xi_\nu = 0 \ p.p. \text{ sur } \Gamma\}$. |

Si $[0, T]$ est un interval de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$ , on note par:

| | |
|---|---|
| $C(0,T;H)$ | l'espace des fonctions continues sur $[0.T]$ dans $H$. |
| $\|\cdot\|_{C(0,T;H)}$ | la norme de $C(0,T;H)$. |
| $L^p(0,T;H)$ | l'espace des fonctions $f$ fortement mesurables de $(0,T)$ dans $H$ telles que $\int_0^T \|f(t)\|_H^p \, dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$. |
| $\|\cdot\|_{L^p(0,T;H)}$ | la norme de $L^P(0,T;H)$. |
| $W^{k,p}(0,T;H)$ | l'espace de Sobolev des paramètres $k$ et $p$. |
| $\|\cdot\|_{W^{k,p}(0,T;H)}$ | la norme de $W^{k,p}(0,T;H)$. |

Pour une fonction $u$,on note par:

| | |
|---|---|
| $\dot{u}, \ddot{u}$ | la dérivée première et seconde de $u$ par rapport au temps. |
| $\varepsilon$ | le tenseur de déformation linéarisé. |
| $\partial_i u$ | la dérivée partielle de $u$ par rapport à l'$i$ éme composante $x_i$. |

Autres notations:

| | |
|---|---|
| $S^d$ | l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d$. |
| $c$ | une constante générique strictement positive. |
| $p.p$ | presqe partout. |

# Chapitre 1

# Formulation du Problème élastique-Préliminaires

Ce chapitre est constitué de deux parties; la première partie est consacrée à la formulation des problèmes aux limites où on fait des rappels sur le tenseur des contraintes, tenseur des déformations, la loi de comportement du matériau élastique, l'équation de mouvement et d'équilibre puis les conditions aux limites de contact. On présente aussi les modèles généraux des problèmes de contact adhésif d'un corps déformable et une fondation.

Dans la deuxième partie on introduit les espaces fonctionnels, notamment de type Sobolev associés aux opérateurs de divergence et de déformation, les lemmes de Gronwall. On rappelle aussi les résultats abstraits standards d'existence et d'unicité concernant les inéquations variationnelles elliptiques.

## 1.1 Formulation des problèmes aux limites

### 1.1.1 Contraintes, déformations et loi de comportement

On considère un corps déformable occupant un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , $d = (2, 3)$ ayant une frontière $\Gamma$ supposée assez régulière. L'objet du problème, du point de vue mécanique est l'étude de l'évolution du corps matériel due à l'application des forces extèrieures sur l'interieur du corps et sur sa frontière. Cette évolution est décrite par l'équation de mouvement:

$$\rho \ddot{u} = \operatorname{div} \sigma + \varphi_0 \text{ dans } \Omega \times (0, T)\,, \tag{1.1.1}$$

où les inconnus du problème sont:
Le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$.
Le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \to S^d$.
Et les données du problème sont:
La densité de masse $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$.
$\varphi_0 : \Omega \to \mathbb{R}^d$ est la densité des forces volumiques.
On désigne par $\operatorname{div} \sigma$ la divergence du champ des contraintes $\sigma$.
Le processus d'évolution modèlisé par l'équation (1.1.1) s'appelle processus dynamique. Dans le cas où le champ des vitesses $\dot{u}$ varie trés lentement par rapport au temps, le terme $\sigma\ddot{u}$ devient négligeable, il s'agit alors d'un processus quasi-statique et dans ce cas l'équation (1.1.1) s'écrit :

$$\operatorname{div} \sigma + \varphi_0 = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T)\,. \tag{1.1.2}$$

La nouvelle équation (1.1.2) s'appelle équation d'équilbre.
Lorsque le corps est soumis à des tractions exterieurs et des forces de volumes, il se déforme, c'est à dire que chaque point à l'interieur du corps, se trouvera à une position différente aprés déformation, dans ce cas on a besoin du tenseur des déformations :

$$\varepsilon\,(u) = (\varepsilon_{ij}\,(u)),$$

$$\text{où } \varepsilon_{ij}\,(u) = \frac{1}{2}\,(u_{i,j} + u_{j,i})\,, u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

On adopte la convention de l'indice muet, il est clair que $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, donc il s'agit d'un tenseur symétrique. Les équations (1.1.1) et (1.1.2) ne sont pas suffisantes elles seules pour décrire les mouvements des milieux continus.
En effet, elles doivent étre complètées par d'autres relations qui caractérisent chaque matériau, il s'agit de la loi de comportement qu'on va introduire dans la prochaine section.

### 1.1.2 Loi de comportement

La loi de comportement est la relation entre le tenseur des contraintes $\sigma$ et le tenseur des déformations, cette relation nous permet de caractériser et de prévoir le comportement mécanique du matériau.
Pour les matériaux élastiques, la loi de comportement est de la forme

$$\sigma = F(\varepsilon) \tag{1.1.3}$$

où $F$ est une fonction donnée.

### 1.1.3 Condition aux limites de contact

Soit un corps matériel occupant un domaine borné $\Omega$ de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$, de frontière $\partial\Omega = \Gamma$ régulière constituée de trois parties mesurables disjointes tel que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.Soit $\nu$ le vecteur normal exterieur unitaire sortant à $\Gamma$. On considère les conditions aux limites suivantes:

$$u = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \tag{1.1.4}$$

$$\sigma\nu = \varphi_2 \qquad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T). \tag{1.1.5}$$

La condition (1.1.4) est appelée *condition aux limites de déplacement*. Elle signifie que le champ des déplacements est imposé sur la partie $\Gamma_1$ de la frontière $\Gamma$, et le solide est encastré en $\Gamma_1$ dans une structure fixe, dans l'intervalle de temps $(0, T)$.
La condition (1.1.5) est appelée *condition aux limitex de traction*. Elle signifie que le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu = (\sigma_{ij}\nu_j)$, $i, j = 1, .., d$ est imposé sur la partie $\Gamma_2$ de la frontière, dans l'intervalle de temps $(0, T)$, $\varphi_2$ représente la densité des forces appliquées sur la surface. Enfin, nous supposons que le corps se trouve en contact avec une fondation le long de $\Gamma_3$. Le contact est sans frottement avec adhésion. Par conséquent, nous allons imposer sur $\Gamma_3 \times (0, T)$ des conditions aux limites de contact sans frottement avec adhésion. Ces conditions font intervenir la composante normale du déplacement $u$ et la composante normale et tangentielle du vecteur contrainte de Cauchy $\sigma\nu$ qu'on verra ci-dessous.

### 1.1.4 Condition de contact de type Signorini avec adhésion

Cette condition modélise le contact avec une fondation rigide, elle est donnée par les relations suivantes :

$$u_\nu \leq 0\ ,\quad \sigma_\nu - c_\nu R_\nu\left(u_\nu\right)\beta^2 \leq 0, (\sigma_\nu - c_\nu R_\nu\left(u_\nu\right)\beta^2)u_\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0,T)\,. \tag{1.1.6}$$

Ici $u_\nu$ et $\sigma_\nu$ représentent respectivement la composante normale du champ des déplacements et du champ des contraintes; $c_\nu$ est un coefficient d'adhésion et $R_\nu$ est un opérateur de troncature défini ci-dessous :

$$R_\nu\left(s\right) = \begin{cases} L & si \quad s \leq -L \\ -s & si \quad -L \leq s \leq 0 \\ 0 & si \quad s \geq 0 \end{cases} \tag{1.1.7}$$

où $L > 0$ est la longueur caractéristique de la liasion d'adhésion. En choisissant dans (1.1.7) $L$ assez large, on peut supposer que $R_\nu\left(u_\nu\right) = +u_\nu$ (voir [20]) d'où les conditions de contact:

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu - c_\nu u_\nu \beta^2 \leq 0, \;\; (\sigma_\nu - c_\nu u_\nu \beta^2)u_\nu = 0 \tag{1.1.8}$$

On déduit de (1.1.8) qu'il n'y a pas d'interpénétration entre le corps et la fondation puisque $u_\nu \leq 0$.

Durant le processus quand le champ d'adhésion est nul (1.1.8) devient:

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0 \;\; sur \quad \Gamma_3 \times (0,T)$$

qui sont les conditions de contact classique de Signorini, sans adhésion.

### 1.1.5 Condition de contact avec contraintes unilatérales, compliance normale et adhésion

Dans ce cas, la fondation est déformable, la contrainte normale $\sigma_\nu$ satisfait la condition dite de compliance normale avec adhésion c'est à dire:

$$u_\nu \leq g\ ,\quad \sigma_\nu + p\left(u_\nu\right) - c_\nu R_\nu\left(u_\nu\right)\beta^2 \leq 0, (\sigma_\nu + p\left(u_\nu\right) - c_\nu R_\nu\left(u_\nu\right)\beta^2)\left(u_\nu - g\right) = 0 \tag{1.1.9}$$

$p$ est la fonction de compliance normale, elle est supposée positive ou nulle.

$g$ est la valeur maximale de la pénétration.

Quand $u_\nu < 0$, il y a séparation entre le corps élastique et la fondation, et la réaction de la fondation est nulle $\sigma_\nu = 0$.

Quand $0 \leq u_\nu < g$ $(R_\nu = 0)$, on aura $-\sigma_\nu = p(u_\nu)$ et ce qui signifie que la réaction de la fondation est déterminée de manière unique en fonction du déplacement normal et $\sigma_\nu \leq 0$.

Lorsque $u_\nu = g$, $-\sigma_\nu \geq p(g)$ et $\sigma_\nu$ n'est pas déterminée de manière unique.

Et si $g > 0$ et $p = 0$ la condition (1.1.9) devient la condition de Signorini avec adhésion avec saut.

Si $g = 0$ la condition (1.1.9) combinée avec l'hypothèse (2.1.16) (on le trouvera dans le chapitre (2)) devient la condition de contact de Signorini avec adhésion:

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu - c_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \leq 0, (\sigma_\nu - c_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu))u_\nu = 0$$

**Evolution du champ d'adhésion:**

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme :

$$\begin{aligned} &\dot{\beta} = -\left(c_\nu \beta \left(R_\nu(u_\nu)\right)^2 - \epsilon_a\right)_+ \text{ sur } \quad \Gamma_3 \times \ (0, T), \\ &\beta(0) = \beta_0 \text{ sur } \Gamma_3. \end{aligned}$$

Ici $\epsilon_a$, $c_\nu$ sont des coefficients d'adhésion et $r_+ = \max\{0, r\}$ pour $r \in \mathbb{R}$. Remarquons ici que $\dot{\beta} \leqslant 0$, une fois que le décollement se produit, l'adhésion ne peut pas se rétablir, voir [17]. Par ailleurs, pendant le processus quasi statique on a: $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ *p.p.* sur $\Gamma_3$, car $0 \leqslant \beta_0 \leqslant 1$ *p.p.* sur $\Gamma_3$, voir [20].

## 1.2 Préliménaires

Afin de faciliter la lecture de ce travail, il nous a paru utile de rappeler dès maintenant, quelques éléments fonctionnels; les espaces fonctionnels utilisés en mécanique des milieux continus, et leurs principales propriétés comme le théorème de la trace, les lemmes de Growall, les résultats sont donnés sans preuves, pour plus de détail voir [20, 21].

### 1.2.1 Espaces fonctionnels

**Espaces fonctionnels à valeurs dans $\mathbb{R}$**

Soit un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de frontière notée $\Gamma$. Un multi indice est une collection de $d$ entiers non négatifs, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$. On note $|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i$. Si une fonction réelle $\upsilon$ définie sur $\Omega$ est n fois différentiable, alors pour tout $|\alpha| < d$,

$$D^\alpha \upsilon(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \upsilon(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 .... \partial^{\alpha_d} x_d}$$

$D^\alpha$ étant la derivée partielle de $\upsilon$ d'ordre $\alpha$ .

**Les espaces $L^P$**

1. On rappelle que $L^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions intégrables sur $\Omega$, dans lequel on identifie deux fonctions qui coincident presque partout; $L^1(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme définie par: $\|\upsilon\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |\upsilon(x)| \, dx$ .

2. Sur $\Omega$, on introduit l'espace $L^p(\Omega)$ égal à l'espace des (classes de) fonctions pour $1 \leq p < \infty$ défini par

$$L^P(\Omega) = \left\{ \upsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } |\upsilon|^p \in L^1(\Omega) \right\}$$

qui est un espace de Banach muni de la norme

$$\|\upsilon\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_\Omega |\upsilon(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

3. On introduit aussi pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ qui est aussi un espace de Banach pour la norme:

$$\|\upsilon\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess \, |\upsilon(x)| \, .$$

**La convergence forte** Si $0 \leq p \leq \infty$, on dit que $\upsilon_n$ converge fortement vers $\upsilon$ dans $L^p(\Omega)$ si $\upsilon_n$, $\upsilon \in L^p(\Omega)$ et si

$$\lim_{n\to\infty} \|\upsilon_n - \upsilon\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Si $0 \leq p \leq \infty$ et si $\upsilon_n \to \upsilon$ fortement dans $L^p(\Omega)$, alors $\|\upsilon_n\|_{L^p(\Omega)} \to \|\upsilon\|_{L^p}$ dans $\mathbb{R}$.

**Espace de Sobolev** On appelle l'espace de Sobolev d'ordre $m$ sur $L^P(\Omega)$ et on le note $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{\upsilon;\ D^\alpha \upsilon \in L^p(\Omega),\ \text{pour}\ |\alpha| \leq m\}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme:

$$\|\upsilon\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \ (\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha \upsilon\|^p_{L^p})^{\frac{1}{p}}.$$

le cas $p = 2$ est fondamental, pour simplifier l'écriture, on posera $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(\upsilon, \omega)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha \upsilon, D^\alpha \omega)_{L^2(\Omega)}.$$

**Théorème de trace** Si $\Gamma$ est de classe $C^1$ alors l'application $\upsilon \to \upsilon_{|\Gamma}$ définie sur $(C^1(\overline{\Omega}))^d$ à valeurs dans $(L^2(\Gamma))^d$ s'étend à une application $\gamma$ continue de $H_1$ dans $L^2(\Gamma)^d$ où:

$$L^2(\Gamma) = \{\text{f; f mesurable et de carré sommable sur } \Gamma \text{ pour la mesure sur } \Gamma\}.$$

Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \to L^2(\Gamma)^d$ n'est pas surjective. L'image de $H_1$ par cette application est le sous espace de $L^2(\Gamma)^d$ noté $H_\Gamma$ qui est un espace de Hilbert, l'application trace: $\upsilon \to \gamma\upsilon$ est linéaire continue et surjective de $H_1$ dans $H_\Gamma$. Aussi pour une partie $\Delta \subset \Gamma$ mesurable on définit $H^{\frac{1}{2}}(\Delta)^d$ par $H^{\frac{1}{2}}(\Delta)^d = \{\mu \in H_\Gamma;\ \mu = 0 \text{ sur } \Gamma/\Delta\}$ et on rappelle que $H_\Gamma$ est dense dans $L^2(\Delta)^d$. On définit pour tout $\xi \in H_\Gamma$ les composantes *normale et tangentielle* respectivement par:

$$\xi_\nu = \xi.\nu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),\ \ \xi_\tau = \xi - \xi_\nu \nu \in H_\tau.$$

où $H_\tau$ est le sous-espace fermé de $H_\Gamma$ défini par

$$H_\tau = \{\xi \in H_\Gamma;\ \xi_\nu = 0\ p.p. \text{ sur } \Gamma\}.$$

On peut prouver de plus que l'application $\xi \to (\xi_\nu, \xi_\tau)$ est un isomorphisme de $H_\Gamma$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H_\tau$.
Dans la suite on utilisera la notation $\upsilon$ au lieu de $\gamma\upsilon$ désignant la trace de $\upsilon$ sur $\Gamma$.

**Espaces des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ou dans $\mathbb{R}^{d\times d}$ et leurs propriétés**

Dans cette partie, on va étendre les définitions et les propriétés précédentes aux cas des espaces à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et celles à valeurs dans $\mathbb{R}^{d\times d}$.
Soit $\Omega$ un ouvert dans $\mathbb{R}^d$.
Nous désignons par $S^d$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, 3)$ " $\cdot$ " et $|.|$ représentent le produit scalaire et la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^d$et $S^d$ respectivement. Ainsi,

$$\begin{aligned} &\sigma \cdot \tau = \sigma_{ij}\tau_{ij} \quad \forall \sigma, \tau \in S^d && |\tau| = (\tau, \tau)^{\frac{1}{2}} \ , \forall \tau \in S^d \\ &u \cdot \upsilon = u_i \upsilon_i \quad \forall u, \upsilon \in \mathbb{R}^d && |\upsilon| = (\upsilon, \upsilon)^{\frac{1}{2}} , \forall \upsilon \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Dans tous ce

manuscrit nous utilisons la convention de l'indice muet. En outre, l'indice aprés une virgule dénote la dérivée par rapport à la composante correspondante de la variable spatiale $x$. Dans toute la suite, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine borné avec une frontière de Lipschitz notée $\Gamma$. Pour le champ des déplacements et le champ des contraintes nous utilisons les espaces fonctionnels suivants:

$$\begin{aligned} &H = \left\{ u = (u_i) / u_i \in L^2(\Omega) \, , \ i = \overline{1, d} \ \right\}, \\ &H_1 = \left\{ u = (u_i) / u_i \in H^1(\Omega) \, , \ i = \overline{1, d} \ \right\}, \\ &Q = \{ \sigma = (\sigma ij) / \ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \} \, , \\ &Q_1 = \left\{ \sigma \in Q / \operatorname{div} \sigma = (\sigma_{ij,j}) \in (L^2(\Omega))^d \right\}. \end{aligned}$$

$H, Q, H_1$,et $Q_1$ sont des espaces de *Hilbert*, munis des produits scalaires donnés respectivement par:

$$
\begin{aligned}
(u,v)_H &= \int u_i v_i dx \\
(\sigma,\tau)_Q &= \int \sigma_{ij}\tau_{ij} dx \\
(u,v)_{H_1} &= (u,v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q \\
(\sigma,\tau)_{Q_1} &= (\sigma,\tau)_Q + (\operatorname{div}\sigma, \operatorname{div}\tau)_H
\end{aligned}
$$

où $\varepsilon$, div sont les opérateurs de déformation et de divergence, définis par:

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)),\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),\ \operatorname{div}\sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

les normes sur les espaces $H$, $H_1$, $Q$ et $Q_1$ sont respectivement notées par $\|.\|_H, \|.\|_{H_1}, \|.\|_Q$ et $\|.\|_{Q_1}$. Puisque la frontiére $\Gamma$ est lipshitzienne, le vecteur normal exterieur $\nu$ est défini *p.p.* Pour tout champ de vecteur $v \in H_1$ nous utilisons la notation $v_\nu$ et $v_\tau$ les composantes normale et tangentielle de $v$ sur la frontière données par:

$$v_\nu = v \cdot \nu\ ,\quad v_\tau = v - v_\nu \nu.$$

Nous définissons de façon analogue les composantes normale est tangentielle d'un champ régulier $\sigma \in Q_1$ par les formules:

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu).\nu\ , \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu.$$

Rappelons aussi la formule de Green ci-dessous:

$$(\sigma, \varepsilon(v))_Q + (\operatorname{div}\sigma, v) = \int_\Gamma \sigma\nu.v da\ \forall v \in H_1, \tag{1.2.1}$$

où $da$ représente l'élément de mesure de surface. Tout au long du mémoire $\Gamma$ est subdivisée en trois parties mesurables disjointes $\Gamma_1, \Gamma_2$ et $\Gamma_3$, tel que mes$(\Gamma_1) > 0$. Nous aurons constamment besoin de l'espace des déplacements admissibles $V$ défini par:

$$V = \{v \in H_1, v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$$

**Proposition 1.1 (l'inégalité de Korn)** *Si mes$(\Gamma_1) > 0$ alors il existe une constante $c_\Omega > 0$ dépendant seulement de $\Omega$ et $\Gamma_1$ telle que:*

$$\|\varepsilon(v)\|_Q \geq c_\Omega \|v\|_{H_1} \quad \forall v \in V.$$

Une preuve de cette inégalité peut être trouvée dans [7] .

Considèrons maintenant dans $V$ le produit scalaire:

$$(u,v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q \quad \forall u,v \in V$$

et la norme associée $\|v\|_V$, i.e.

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_Q \qquad \forall v \in V.$$

De l'inégalité de Korn on déduit que $\|.\|_V$est une norme sur $V$ équivalente à la norme canonique $\|.\|_{H_1}$ et ainsi $(V, \|.\|_V)$ est un espace de Hilbert réel. En outre, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant uniquement de $\Omega$ et $\Gamma_1$ telle que:

$$\|v\|_{L^2(\Omega)^d} \leq c_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V. \tag{1.2.2}$$

**Espaces de fonctions à valeurs vectorielles** $W^{k,p}(0,T;X)$. Pour l'étude des problèmes d'évolution, on aura besoin des espaces de fonctions à valeurs vectorieles $W^{1,p}(0,T;X)$ , ici $X$ désigne un espace de Hilbert et $T$ un réel positif. On rappelle les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel. On note que $C([0,T];X)$, est l'espace des fonctions continues $u : [0,T] \to X$, qui est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{C([0,T];X)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X .$$

On note aussi par $C^1([0,T];X)$ l'espace des fonctions continues $u : [0,T] \to X$ tel que la dérivée $\dot{u}$ existe et est continue sur $[0,T]$ . $C^1([0,T];X)$ est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\|u\|_{C^1([0,T];X)} = \|u\|_{C([0,T];X)} + \|\dot{u}\|_{C([0,T];X)} .$$

Pour $p \in [0,\infty]$, l'espace de Lebesgue $L^p(0,T;X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $v : (0,T) \to X$ mesurables, telles que l'application $t \to \|v(t)\|_X$ appartient à $L^p(0,T)$. On sait que c'est un espace de Banach pour la norme:

$$\|v\|_{L^p\ (0,T;X)} = \left( \int_0^T \|v(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{si} \;\; 1 \leq p < \infty,$$

$$\sup_{t\in[0,T]} ess \left\| v \right\|_X = \left\| v \right\|_{L^\infty\ (0,T;X)} = \inf \left\{ c > 0;\ \left\| v\left(x\right) \right\|_X \leq c\ \ p.p.\ t \in (0,T) \right\} \text{ si } \ p = \infty.$$

En particulier l'espace $L^2(0,T;X)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u,v)_{L^p(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X \, dt.$$

Par ailleurs, l'espace $W^{k,p}(0,T;X)$ est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\sum_{0\leq j\leq k} \sup_{t\in[0,T]} ess \left\| D^{(j)} v \right\|_X$$

En particulier pour $k = 0$, on a

$$W^{k,p}(0,T;X) = L^\infty(0,T;X).$$

Pour $k = 1$, l'espace $W^{1,\infty}(0,T;X)$ est défini par:

$$W^{1,\infty}(0,T;X) = \left\{ u : [0,T] \to X;\ u \in L^\infty(0,T;X) \ \text{ et } \dot{u}\ \in L^\infty(0,T;X) \right\}$$

On le munit de la norme:

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)} = \|u\|_{L^\infty(0,T;X)} + \|\dot{u}\|_{L^\infty(0,T;X)}.$$

**Lemmes de type Gronwall**

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration et d'estimation d'erreur, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

**Lemme 1.2.** *Soit* $m, \eta \in C([0,T];\mathbb{R})$ *telles que* $m(t) \geq 0$ *et* $n(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in [0,T]$ *et soit* $a \geq 0$ *. Si* $\Psi \in C([0,T];\mathbb{R})$ *est une fonction telle que:*

$$\Psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)\, ds + \int_0^t \eta(s)\, \Psi(s)\ \ ds \qquad \forall t \in [0,T],$$

$$\textit{alors} \qquad \Psi(t) \leq \left( a + \int_0^t m(s)\, ds \right) \exp\left( \int_0^t \eta(s)\, ds \ \right) \qquad \forall t \in [0,T].$$

Pour le cas particulier $m = 0$, ce lemme devient:

**Corollaire 1.3.** *Soit $\eta \in C([0,T;\mathbb{R}])$ tel que $\eta(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$.* Si $\Psi \in C([0,T];\mathbb{R})$ *est une fonction telle que:*

$$\Psi(t) \leq a + \int_0^t \eta(s)\Psi(s)\,ds \qquad \forall t \in [0,T]$$

*alors*

$$\Psi(t) \leq a \cdot \exp\left(\int_0^t \eta(s)\,ds\right) \qquad \forall t \in [0,T].$$

**Lemme 1.4.** *Soit $T > 0$ donné et pour un nomdre $N$ positif nous définissons $k = T/N$. Supposons que $\{g_n\}_{n=1}^{N}$et $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ soient deux suites de nombres non négatifs vérifiant:*

$$e_n \leq c_1 g_n + c_1 \sum_{j=1}^{n-1} k e_j, \qquad n = 1, ....., N.$$

*où $c_1$ est une constante positive indépendante de $N$ et $k$, alors il existe une constante positive $c$ indépendante de $N$ et $k$, telle que:*

$$e_n \leq c(g_n + \sum_{j=i}^{n-1} k g_j), \qquad n = 1, ....., N.$$

*De plus, il existe une constante positive $c_2$ telle que*

$$\max_{1 \leq n \leq N} e_n \leq c_2 \max_{1 \leq n \leq N} g_n.$$

*Et si, on suppose*

$$e_n \leq c g_n + c \sum_{j=1}^{n} k e_j, \qquad n = 1, ....., N.$$

*alors on conclut pour $k$ suffisamment petit:*

$$e_n \leq c\ (g_n + \sum_{j=1}^{n} k g_j), \qquad n = 1, ...., N,$$

*et il existe une constante positive $c_3$ telle que*

$$\max_{1 \leq n \leq N} e_n \leq c_3 \max_{1 \leq n \leq N} g_n.$$

Pour la preuve du lemme 1.4, voir [5] .

### 1.2.2 Compléments divers

Dans cette section on présente les résultats d'existence et d'unicité concernant les équations variationnelles elliptiques, les équations d'évolution et les équations différentielles ordinaires dans les espaces de Hilbert. Nous commençons cette section par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. A cette fin, on considère $X$ un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(.,.)_X$ et de la norme associée $\|.\|_H$ et soit $A : X \to X$ un opérateur non linéaire; l'opérateur $A$ est dit:

$(a)$ fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \ \geq m \|u \ - v\|_X^2 \qquad \forall u, v \ \in X,$$

$(b)$ de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que:

$$\|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X \qquad\qquad \forall u, v \in X \ .$$

**Inéquations variationnelles elliptiques** La modélisation mathématique pour des classes de problèmes différents en mécanique des milieux continus est liée aux inéquations variationnelles elliptiques. Cette méthode permet à la fois l'obtention des résultats théoriques et la mise au point des méthodes numériques efficaces. Dans cette section on va présenter des résultats d'existence et d'unicité de la solution de certains problèmes variationnels.
Soit $X$ un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(.,.)_X$ et la norme associe $\|.\|_X$ . Soit maintenant, $A : X \to X$ un opérateur lipschitzien et fortement monotone, la fonctionnelle $j : X \to ]-\infty, +\infty]$ et soit $f \in X$. On considère le problème suivant::
**Problème 1.** Trouver $u \in X$ tel que

$$(Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X. \tag{1.2.3}$$

Ce problème, est appelé *inéquation variationnelle elliptique* de second espèce sur $X$. En ce qui concerne ce problème on a le résultat d'existence et d'unicité suivant:

**Théorème 1.5.** *Soit $X$ un espace de Hilbert et soit $A : X \to X$ un opérateur de Lipschitz et fortement monotone et, $j$ une fonctionnelle convexe, propre et semi-continue inférieurement, alors l'inéquation variationnelle elliptique* (1.2.3) *admet une solution unique.*

Soit maintenant une forme bilineaire $j : X \times X \to \mathbb{R}$ et $f \in X$. On considère le problème suivant:

**Problème 2.** Trouver $u$ tel que:

$$(Au, v-u)_X + j(u,v) - j(u,u) \geq (f, v-u)_X \ \forall v \in X \ .$$

A la différence du probléme 1, on remarque la présence d'une fonctionnelle qui dépend de la solution $u$, ce qui complique la résolution de ce genre de probléme. La résolution de ce type d'inéquations variationnelles a été étudiée dans [4].

On finit cette section par le résultat suivant (voir [20]):

**Théorème 1.6.** *Soit $(H, \|.\|_H)$ est un espace de Banach réel et $T > 0$, soit $F(t,.) : H \to H$ un opérateur défini p.p. sur $(0,T)$, qui satisfait les propriétés suivantes:*

*Il existe $L_F > 0$ tel que $\|F(t,x) - F(t,y)\|_H \leq L_F \|x-y\|_H \ \forall x, y \in H, p.p.\ t \in (0,T)$,*
*Il existe $p \geq 1$ tel que $t \to F(t,x) \in L^p(0,T;H) \ \forall x \in H$.*

*Alors, pour tout $x_0 \in H$, il existe une fonction unique $x \in W^{1.p}(0,T;H)$ telle que*:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)) \ \ p.p.\ t \in (0,T), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Pour des détails sur ce théorème, on peut renvoyer le lecteur par exemple à [23, page 60].
Enfin, par ailleurs on rappelle qu'une solution régulière est une solution ayant le degré de régularité nécessaire pour que toutes les opérations de dérivation soient permises.

# Chapitre 2

# Problème de contact unilatéral sans frottement avec compliance normale et adhésion.

Dans ce chapitre, on considère un problème de contact quasi-statique entre un corps élastique et une fondation déformable. Le contact est modélisé à l'aide des conditions de Signorini sans frottement avec compliance normale et adhésion.

## 2.1 Formulation du problème mécanique

Nous considérons un corps élastique qui à l'instant $t = 0$ occupe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, supposé borné, de frontière $\Gamma$ assez régulière, constituée de trois parties $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ ouvertes et disjointes telles que $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$ et que $mes\ (\Gamma_1) > 0$. Ce corps est encastré en $\Gamma_1$, soumis à une densité de forces volumiques $\varphi_0$ dans $\Omega$, à des forces surfaciques de densité $\varphi_2$ sur $\Gamma_2$ et en contact avec une fondation déformable le long de $\Gamma_3$. De plus le contact avec cette fondation, est supposé unilatéral sans frottement avec compliance normale et adhésion (voir figure ci-dessous). Cela revient à étudier le problème mécanique $P_1$ ci-dessous.

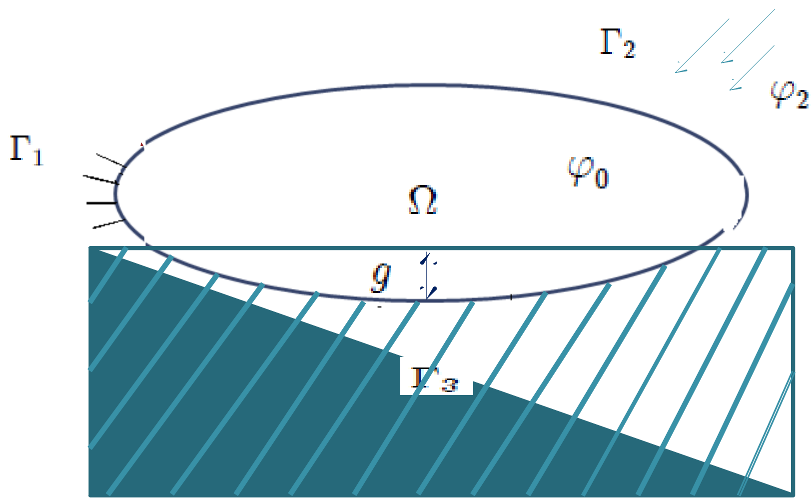


Fig. Contact entre un corps élastique et une fondation.

**Problème** $P_1$. Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$et un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0,T] \to \mathbb{R}$, tels que:

$$\operatorname{div} \sigma (u) = -\varphi_0 \text{ dans } \Omega \times (0,T), \tag{2.1.1}$$

$$\sigma (u) = F\varepsilon(u) \text{ dans } \Omega \times (0,T), \tag{2.1.2}$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0,T), \tag{2.1.3}$$

$$\sigma\nu = \varphi_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0,T), \tag{2.1.4}$$

$$\left.\begin{array}{r} u_\nu \le g, \quad \sigma_\nu + p(u_\nu) - c_\nu R_\nu(u_\nu)\beta^2 \le 0, \\ \left(\sigma_\nu + p(u_\nu) - c_\nu R_\nu(u_\nu)\beta^2\right)(u_\nu - g) \quad = 0 \end{array}\right\} \text{ sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{2.1.5}$$

$$\sigma_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{2.1.6}$$

$$\dot{\beta} = -(c_\nu \beta (R_\nu(u_\nu))^2 - \epsilon_a)_+ \text{ sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{2.1.7}$$

$$\beta(0) = \beta_0 \text{ sur } \Gamma_3. \tag{2.1.8}$$

**Brève explication du sens physique des équations et inéquations** (2.1.1) – (2.1.8). (2.1.1) est l'équation d'équilibre; (2.1.2) est la loi de comportement; (2.1.3) et (2.1.4) sont les conditions aux limites de déplacement-traction; (2.1.5) représente la condition de contact unilatéral avec compliance normale et adhésion où $g \ge 0$ est la valeur maximale de la pénétration; (2.1.6) est la condition sans frottement; (2.1.7) est l'équation différentielle d'évolution d'adhésion où $\epsilon_a$ et $c_\nu$ sont des coefficients d'adhésion; $r_+ = \max\{0, r\}$, $r \in \mathbb{R}$. Notons que dans ce modèle il y a décollement, l'adhésion ne peut pas se rétablir, car $\dot{\beta} \leq 0$, voir [17], les travaux de Nassar et de Shillor. Enfin, dans (2.1.8) $\beta_0$ représente la condition initiale du champ d'adhésion.

Nous désignons par $S^d$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, 3)$ " $\cdot$ " et $|.|$ représentent le produit scalaire et la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $S^d$ respectivement. Ainsi,

$$u \cdot \upsilon = u_i \upsilon_i \qquad |\upsilon| = (\upsilon, \upsilon)^{\frac{1}{2}}, \forall u, \upsilon \in \mathbb{R}^d,$$
$$\sigma \cdot \tau = \sigma_{ij} \tau_{ij} \qquad |\tau| = (\tau, \tau)^{\frac{1}{2}}, \forall \sigma, \tau \in S^d.$$

$u = (u_i)$ est le champ de déplacements..

Le tenseur des déformations est défini par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \; \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$\sigma = (\sigma_{ij})$ est le tenseur des contraintes. $\operatorname{div} \sigma = (\sigma_{ij,j})$ est la divergence $\sigma$.

Maintenant pour procéder à la formulation variationnelle on a besoin des espaces fonctionnels suivants:

$$\begin{aligned}
H &= \left\{u = (u_i) / u_i \in L^2(\Omega), \; i = \overline{1, d}\right\}, \\
H_1 &= \left\{u = (u_i) / u_i \in L^2(\Omega), \varepsilon(u) \in L^2(\Omega), \; i = \overline{1, d}\right\}, \\
Q &= \left\{\sigma \in (\sigma_{ji}) / \sigma_{ji} = \sigma_{ij} \in L^2(\Omega), i, j = \overline{1, d}\right\}, \\
Q_1 &= \left\{\sigma \in Q / \operatorname{div} \sigma = (\sigma_{ij,j}) \in L^2(\Omega)^d, i, j = \overline{1, d}\right\}.
\end{aligned}$$

$H, Q, H_1$, et $Q_1$ sont des espaces de $Hilbert$, munis des produits scalaires donnés respectivement par:

$$\begin{aligned}
(u, \upsilon)_H &= \int u_i \upsilon_i dx, \\
(\sigma, \tau)_Q &= \int \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \\
(u, \upsilon)_{H_1} &= (u, \upsilon)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(\upsilon))_Q, \\
(\sigma, \tau)_{Q_1} &= (\sigma, \tau)_Q + (\operatorname{div} \sigma, \operatorname{div} \tau)_H.
\end{aligned}$$

Les normes sur les espaces $H$, $H_1$, $Q$ et $Q_1$ sont notées par $\|.\|_H$, $\|.\|_{H_1}$, $\|.\|_Q$ et $\|.\|_{Q_1}$, respectivement. Puisque la frontière $\Gamma$ est assez régulière, le vecteur normal exterieur $\nu$ est défini *p.p.* Pour tout champ de vecteur $\upsilon \in H_1$, nous utilisons la notation $\upsilon_\nu$ et $\upsilon_\tau$ pour les composantes normale et tangentielle de $\upsilon$ sur la frontière $\Gamma$ données par

$$\upsilon_\nu = \upsilon \cdot \nu \ , \quad \upsilon_\tau = \upsilon - \upsilon_\nu \nu.$$

Nous définissons de façon analogue les composantes normale et tangentielle d'un champ régulier $\sigma \in Q_1$ par les formules

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu) .\nu \ , \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu.$$

Nous aurons constamment besoin de l'espace des déplacements admissibles $V$ défini par

$$V = \{\upsilon \in H_1, \upsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1\},$$

qu'on munit du produit scalaire

$$(u, \upsilon)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(\upsilon))_Q \quad \forall u, \nu \in V,$$

et de la norme associée $\|.\|_V$ i.e.

$$\|\upsilon\|_V = \|\varepsilon(\upsilon)\|_Q \quad \forall \upsilon \in V.$$

De l'inégalité de Korn, on déduit que $\|.\|_V$ est une norme sur $V$ équivalente à la norme canonique $\|.\|_{H_1}$ et ainsi $(V, \|.\|_V)$ est un espace de Hilbert réel. En vertu d'un théorème de trace de Sobolev:
il esiste $c_0 > 0$ dépendant de $\Omega$, $\Gamma_1$ et $\Gamma_3$ tel que:

$$\|\upsilon\|_{(L^2(\Gamma_3))^d} \leq c_0 \|\upsilon\|_V \qquad \forall \upsilon \in V. \tag{2.1.9}$$

On définit aussi le convexe $K$ des déplacements admissibles par:

$$K = \{\upsilon \in V \ : \upsilon_\nu \leq g \ \ p.p. \text{ sur } \Gamma_3\}.$$

Les coefficients $c_\nu$ et $\epsilon_a$ sont supposés satisfaire les conditions:

$$c_\nu \in L^\infty(\Gamma_3)\,; \ c_\nu \geq 0 \ p.p. \text{ sur } \Gamma_3, \tag{2.1.10}$$

$$\epsilon_a \in L^2(\Gamma_3)\,;\ \epsilon_a \geq 0 \ p.p. \text{ sur } \Gamma_3. \tag{2.1.11}$$

On suppose que les forces volumiques $\varphi_0$ et les tractions surfaciques $\varphi_2$ satisfont

$$\varphi_0 \in W^{1,\infty}(0,T;H)\,, \quad \varphi_2 \in W^{1,\infty}\left(0,T;(L^2(\Gamma_2))^d\right). \tag{2.1.12}$$

D'aprés le théorème de représentation de Riesz-Frêchet, il existe $f \in V$ tel que:

$$(f(t),\upsilon)_V = \int_\Omega \varphi_0(t).\upsilon dx + \int_{\Gamma_2} \varphi_2(t).\upsilon da, \tag{2.1.13}$$

où $da$ est l'élément de mesure de surface.

On suppose que l'opérateur d'élasticité $F$ vérifie les conditions suivantes:

$$\begin{cases} (a)\ \ F:\Omega\times S^d \to S^d; \\ (b)\ \ \text{il existe } M>0 \text{ tel que:} \\ \qquad |F(x,\varepsilon_1)-F(x,\varepsilon_2)| \leq M\,|\varepsilon_1-\varepsilon_2| \ \ \forall\varepsilon_1,\,\varepsilon_2\in S^d,\ p.p.\ x\in\Omega; \\ (c)\ \ \text{il existe } m>0 \text{ tel que:} \\ \quad (F(x,\varepsilon_1)-F(x,\varepsilon_2)).(\varepsilon_1-\varepsilon_2) \geq m\,|\varepsilon_1-\varepsilon_2|^2 \ \ \forall\varepsilon_1,\,\varepsilon_2\in S^d,\ p.p.\ x\in\Omega; \\ (d)\ \text{l'application: } x\to F(x,\varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon_2\in S^d, \\ (e)\ \ F(x,0)=0\ p.p.\ x\in\Omega. \end{cases} \tag{2.1.14}$$

On définit la fonctionnelle $j : L^2(\Gamma_3)\times V\times V \to \mathbb{R}$ par:

$$j(\beta,u,\upsilon) = \int_{\Gamma_3} (p(u_\nu) - c_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu))\upsilon_\nu da \ \ \forall(\beta,u,\upsilon)\in L^2(\Gamma_3)\times V\times V. \tag{2.1.15}$$

Nous supposons que la fonction de compliance normale $p : \Gamma_3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ satisfait:

$$\begin{cases} (a)\ \ \text{il existe } L_p>0 \text{ tel que:} \\ |p(x,r_1)-p(x,r_2)| \leq L_p\,|r_1-r_2| \ \ \ \forall r_1,r_2\in\mathbb{R},\ \ p.p.\ x\in\Omega. \\ (b)\ \ (p(x,r_1)-p(x,r_2))(r_1-r_2)\geq 0 \ \ \ \forall\ r_1,r_2\in\mathbb{R},\ \ p.p.\ \ x\in\Omega. \\ (c)\ \ \text{l'application: } x\to p(x,r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r\in\mathbb{R}. \\ (d)\ \ \ \ p(x,r)=0 \ \ \forall r\leq 0,\ \ p.p.\ x\in\Gamma_3. \end{cases} \tag{2.1.16}$$

Pour $p \in [1, \infty]$, on utilise la norme standard de $L^p(0, T; V)$ .Nous utilisons aussi l'espace de Sobolev $W^{1,\infty}(0, T; V)$ muni de la norme:

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(0,T;V)} = \|u\|_{L^\infty(0,T;X)} + \|\dot{u}\|_{L^\infty(0,T;X)}.$$

pour chaque espace de Banach $(Y, \|.\|_Y)$ et $T > 0$ on utilise la notation $C([0, T]; Y)$ pour l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ à $Y$. On a besoin aussi d'introduire l'ensemble des champs d'adhésion suivant

$$\mathcal{B} = \left\{\theta : [0, T] \to L^2(\Gamma_3) \,/\, 0 \leq \theta \leq 1, \forall t \in [0, T], \, p.p. \;\; sur \;\, \Gamma_3\right\}.$$

On suppose que le champ d'adhésion initial vérifie

$$\beta_0 \in L^2(\Gamma_3); \;\; 0 \leq \beta \leq 1 \;\; p.p. \text{ sur } \Gamma_3. \tag{2.1.17}$$

Finalement dans tout le reste du mémoire, on désigne par $c$ une constante positive qui ne dépend pas de $t$, et qui peut changer de valeur lors du passage d'une ligne à une autre.

## 2.2 Formulation variationnelle du problème

Pour établir une formulation variationnelle du problème mécanique $P_1$, nous avons besoin d'établir d'abord le lemme suivant:

**Lemme 2.1.** *Si la fonction $(u, \beta)$ est une solution régulière $C^1$ du problème mécanique $P_1$ alors :*

$$\begin{cases} u(t) \in K, \;\; (F\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v - u(t)))_Q + j(\beta(t), u(t), v - u(t)) \\ \geq (f(t), v - u(t)) \quad \forall v \in K, \;\; t \in [0, T]. \end{cases}$$

**Démonstration.** Soit $v \in V$ et $t \in (0, T)$. En utilisant (1.1.10), on déduit:

$$(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t))_Q + (\operatorname{div}\sigma(t), v - u(t))_H = \int_\Gamma \sigma v(t) . (v - u(t)) \, da \quad \forall v \in H_1.$$

On utilise la condition (2.1.11) et (2.1.14) pour obtenir

$$\begin{aligned}
(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_Q &= (\varphi_0(t), v - u(t))_H + \int_\Gamma \sigma\nu(t).(v - u(t))\, da \\
&= (\varphi_0(t), v - u(t))_H + \int_{\Gamma_2} \varphi_2(t).(v - u(t))\, da \\
&+ \int_{\Gamma 3} \sigma\nu(t).(v_\nu - u_\nu(t))\, da
\end{aligned}$$

Grâce à (1.1.13) et (2.1.16) on a:

$$(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t))_Q = (f(t), v - u(t))_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t).(v_\nu - u_\nu(t))\, da,$$

d'où

$$(F\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v - u(t)))_Q = (f(t), v - u(t))_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t).(v_\nu - u_\nu(t))\, da. \tag{2.1.18}$$

Maintenant, en tenant compte des conditions de contact unilatéral (2.1.5) on a:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t)(v_\nu - u_\nu(t))\, da &= \int_{\Gamma_3} \left(\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) - c_\nu R_\nu(u_\nu)\beta^2(t)\right)(v_\nu - u_\nu(t))\, da \\
&- \int_{\Gamma_3} \left(p(u_\nu) - c_\nu R_\nu(u_\nu)\beta^2\right)(v_\nu - u_\nu(t))\, da,
\end{aligned}$$

comme

$$\int_{\Gamma_3} \left(\sigma_\nu(t) + p(u_\nu)(t) - c_\nu R_\nu(u_\nu(t))\beta^2(t)\right)(v_\nu - u_\nu(t))\, da \geq 0.$$

On en déduit

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t)(v_\nu - u_\nu(t))\, da \geq -\int_{\Gamma_3} \left(p(u_\nu(t)) - c_\nu R_\nu(u_\nu(t))\beta^2\right)(v_\nu - u_\nu(t))\, da.$$

D'où d'aprés (2.1.5) et (2.1.15) on a:

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t)(v_\nu - u_\nu(t))\, da \geq j(\beta(t), u(t), u(t)) - j(\beta(t), u(t), v).$$

Portons cette inégalité dans (2.1.18), on obtient l'inéquation variationnelle:

$$(F\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v - u(t)))_Q + \ j(\beta(t), u(t), v) - j(\beta(t), u(t), u(t)) \geq (f, v - u(t))_V.$$

Nous pouvons maintenant énoncer la formulation variationnelle suivante, du problème mécanique $P_1$ en termes de déplacement et champ d'adhésion.■

**Problème $P_2$.** Touver un champ des déplacements $u : [0,T] \to V$, et un champ d'adhésion $\beta : [0,T] \to L^2(\Gamma_3)$ tels que*:*

$$\begin{aligned} u(t) \in K,\ & (F\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v - u(t)))_Q + j(\beta(t), u(t), v - u(t)) \\ & \geq (f(t), v - u(t))_V \qquad \forall v \in K,\ t \in [0,T]\,, \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

$$\dot{\beta}(t) = -(c_\nu \beta(t) (R_\nu(u_\nu(t)))^2 - \epsilon_a)_+ \ p.p.\ t \ \in (0,T)\,, \tag{2.1.20}$$

$$\beta(0) = \beta_0\ . \tag{2.1.21}$$

Réciproquement, on peut vérifier par un calcul formel que si $(u, \beta)$ est une solution régulière du problème $P_2$, alors $u$, $\beta$ vérifient les équations et les conditions aux limites du problème $P_1$. Pour cela, on a le lemme suivant:

**Lemme 2.2.** *Si $(u, \beta)$ est une solution régulière de classe $(C^1)$ du problème $P_2$, alors $(u, \beta)$ vérifie les équations et les conditions aux limites du problème $P_1$.*

**Démonstration.** Soit $t \in (0,T)$ et $(u, \beta)$ une solution régulière du problème $P_2$, il suffit de montrer que $(u, \beta)$ satisfait les conditions (2.1.1)–(2.1.8).

En effet, soit $w \in (D(\Omega))^d$ et choisissons $v = u(t) \pm w$ dans l'inégalité (2.1.19), on aura

$$(F\varepsilon(u(t)), \varepsilon(w))_Q = \ j(\beta(t), u(t), w) + (f(t), w)_V.$$

En utilisant la formule de Green et (2.1.13) et (2.1.15) on obtient:

$$\int_\Omega (\operatorname{div} \sigma(t) + \varphi_0(t)).w da = 0,$$

et donc on déduit $\operatorname{div} \sigma(t) = -\varphi_0(t)$ au sens des distributions, comme $\varphi_0(t) \in H$ alors on a $\operatorname{div} \sigma(t) + \varphi_0(t) = 0$ *p.p.* sur $\Omega$.

En utilisant ensuite (2.1.18) et en appliquant encore la formule de Green, on a:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \sigma\nu(t).(v - u(t))da - (\operatorname{div} \sigma(t), v - u(t))_H + \ j(\beta(t), u(t), v) \\ - j(\beta(t), u(t), u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_V \qquad \forall v \in V. \end{aligned}$$

En posant alors $\upsilon = u(t) \pm w$, où $w \in H_1$ tel que $w = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$, après simplification on aboutit à la relation suivante:

$$\int_{\Gamma_2} (\sigma\nu\,(t) - \varphi_2\,(t)).wda = 0 \quad \forall w \in (H^{\frac{1}{2}}\,(\Gamma_2))^d.$$

Comme $(H^{\frac{1}{2}}\,(\Gamma_2))^d$ est dense dans $(L^2\,(\Gamma_2))^d$ on déduit

$$\int_{\Gamma_2} (\sigma\nu\,(t) - \varphi_2\,(t)).wda = 0 \quad \forall w \in (L^2\,(\Gamma_2))^d,$$

d'où

$$\sigma\nu\,(t) - \varphi_2\,(t) = 0 \quad p.p. \text{ sur } \quad \Gamma_3.$$

Soit $w \in V$ une fonction arbitraire, choisissons $\upsilon = u\,(t) + w$ tel que $w_\nu \leq 0$ sur $\Gamma_3$ et $w_\tau = 0$ sur $\Gamma_3$, après quelques calculs on a:

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu\,(t) \; + p\,(u_\nu\,(t)) - c_\nu \beta^2\,(t)\,R_\nu(u_\nu\,(t)))w_\nu da \geq 0\ .$$

Comme $w_\nu \leq 0$ sur $\Gamma_3$, alors on déduit

$$\sigma_\nu\,(t) + p\,(u_\nu\,(t)) - c_\nu \beta^2\,(t)\,R_\nu(u_\nu\,(t)) \;\leq 0 \; p.p. \text{ sur } \Gamma_3,$$

et puisque $u \in K$ donc $u_\nu\,(t) \leq g$.

D'autre part, appliquons la formule de Green et les deux premiers résultats obtenus dans cette démonstation, on aura

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu\,(t) + p\,(u_\nu\,(t)) - c_\nu \beta^2\,(t)\,R_\nu(u_\nu\,(t)))\,(\upsilon_\nu - u_\nu\,(t))\,da \geq 0 \qquad \forall \upsilon \in K.$$

Choisisons maintenant $\upsilon_\upsilon = g$ puis $\upsilon_\nu = 2u_\nu\,(t) - g$ dans l'inéquation précédente, on obtient

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu\,(t) + p\,(u_\nu\,(t)) - c_\nu \beta^2\,(t)\,R_\nu(u_\nu\,(t)))(u_\nu\,(t) - g)da = 0,$$

et donc puisque $(\sigma_\nu\,(t) + p\,(u_\nu\,(t)) - c_\nu \beta^2\,(t)\,R_\nu(u_\nu\,(t)))(u_\nu\,(t) - g) \geq 0$ sur $\Gamma_3$ on déduit

$$(\sigma_\nu\,(t) + p\,(u_\nu\,(t)) - c_\nu \beta^2\,(t)\,R_\nu(u_\nu\,(t)))(u_\nu\,(t) - g) = 0 \; p.p. \text{ sur } \Gamma_3.$$

Soit alors $w \in H_1$ une fonction arbitraire telle que $w_\nu = 0$ sur $\Gamma_3$ et qui est nulle sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, et soit $v = u(t) \pm w$, on trouve alors:

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t).wda = 0 \qquad \forall w \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2))^d,$$

et donc par densité

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t).wda = 0 \qquad \forall w \in (L^2(\Gamma_2))^d\ ,$$

d'où on déduit $\sigma_\tau(t) = 0$ *p.p.* sur $\Gamma_3$.■

## 2.3 Résultat d'existence et d'unicité

**Théorème 2.3.** *Sous les hypothèses* (2.1.10), (2.1.11), (2.1.12), (2.1.13), (2.1.14), (2.1.16) *et* (2.1.17), *le problème* $P_2$ *admet une solution faible unique* $(u, \beta)$ *ayant la régularité:*

$$u \in W^{1,\infty}(0, T, V), \tag{2.2.1}$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{B}. \tag{2.2.2}$$

La démonstration du théorème se fera en plusieurs étapes. Dans un premier temps, on omet le "$t$" dans la notation et on commence par établir des propriétés de la fonctionnelle $j$ pour simplifier la démonstration.
On a:

$$\begin{aligned} j(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) &= -\int_{\Gamma_3} (p(u_{1\nu}) - p(u_{2\nu}))(u_{1\nu} - u_{2\nu})\ da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} (c_\nu \beta_1^2 R_\nu(u_1)(u_{1\nu} - u_{2\nu}) \\ &\quad - c_\nu \beta_2^2 R_\nu(u_2)(u_{1\nu} - u_{2\nu}))\ da. \end{aligned}$$

En utilisant (2.1.16) $(b)$, on a

$$j(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq \int_{\Gamma_3} (c_\nu \beta_1^2 R_\nu(u_1)(u_{1\nu} - u_{2\nu}) - c_\nu \beta_2^2 R_\nu(u_2)(u_{1\nu} - u_{2\nu}))da,$$

on ajoute et on retranche $c_\nu \beta_1^2 R_\nu(u_2)\ (u_{1\nu} - u_{2\nu})$, on aura:

$$\begin{aligned} j(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq & \int_{\Gamma_3} c_\nu \beta_1^2 (R_\nu(u_1) - R_\nu(u_2))(u_{1\nu} - u_{2\nu})\, da \\ & + \int_{\Gamma_3} c_\nu (\beta_1^2 - \beta_2^2) R_\nu(u_2)(u_{1\nu} - u_{2\nu})\ da \end{aligned}$$

puisque $\beta_1, \beta_2 \in [0, 1]$ et $(R_\nu(u_{1\nu}) - R_\nu(u_{2\nu}))(u_{1\nu} - u_{2\nu}) \leq 0$ $p.p.$ sur $\Gamma_3$, et $|R_\nu(u_2)| \leq L$, (voir [20]), on a

$$|j(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j(\beta_2, u_2, u_1 - u_2)| \leq c \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2| \, |u_{1\nu} - u_{2\nu}|\ da.$$

Grâce à (2.1.9):

$$|j(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j(\beta_2, u_2, u_1 - u_2)| \ \leq c \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Gamma_3)}. \tag{2.2.3}$$

En utilisant aussi les mêmes arguments, les propriétés de $R_\nu$, (2.1.16) et (2.1.9), on a:

$$|j(\beta, u_1, \upsilon) - j(\beta, u_2, \upsilon)| \leq c \|u_1 - u_2\|_V \|\upsilon\|_V. \tag{2.2.4}$$

Posons $\beta = \beta_1 = \beta_2$ dans (2.2.4), nous obtenons:

$$j(\beta, u_1, u_2 - u_1) + j(\beta, u_2, u_1 - u_2) \leq 0, \tag{2..2.5}$$

puis, choisissons $u_1 = \upsilon$ et $u_2 = 0$ dans (2.2.5), et puisque $j$ est linéaire par rapport au deuxième argument on a:

$$j(\beta, \upsilon, \upsilon) \geq 0. \tag{2.2.6}$$

Dans la deuxième étape, on introduit le sous-ensemble fermé $\mathcal{Z}$ de l'espace de Banach $C\left([0,T];L^2\left(\Gamma_3\right)\right)$ défini par

$$\mathcal{Z}=\left\{\theta\in C([0,T];L^2\left(\Gamma_3\right))/\theta\left(t\right)\in\mathcal{B}\ \forall t\in\left[0,T\right],\ \theta\left(0\right)=\beta_0\right\} \tag{2.2.7}$$

où $\mathcal{Z}$ est muni de la norme:

$$\|\theta\|_\alpha=\max_{t\in[0,T]}\left[\exp\left(-\alpha t\right)\|\theta\left(t\right)\|_{L^2(\Gamma_3)}\right]\text{ pour tout }\theta\in C\left([0,T];L^2\left(\Gamma_3\right)\right),\text{ où }\alpha>0.$$

Puis pour $\beta\in\mathcal{Z}$ considérons le problème auxilaire ci-dessous.

**Problème** $P_{1\beta}$. Trouver un champ des déplacements $u_\beta:[0,T]\to V$ tel que:

$$\begin{aligned} u_\beta\left(t\right)\in K,\ & (F\varepsilon(u_\beta(t)),\varepsilon(v-u_\beta(t)))_Q+j(\beta(t),u_\beta(t),v-u_\beta(t)) \\ & \geq(f(t),v-u_\beta(t))_V\qquad\forall v\in K,\ t\in\left[0,T\right]. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

On a le lemme suivant:

**Lemme 2.4.** *Le problème $P_{1\beta}$ admet une solution unique qui satisfait*

$$u_\beta\in C\left([0,T];V\right). \tag{2.2.9}$$

**Démonstration.** Soit $t\in[0,T]$ et l'opérateur $A_t:V\to V$ défini par

$$(A_tu,v)_V=(F\varepsilon(u),\varepsilon(v))_Q+j(\beta\left(t\right),u,v)\quad\forall u,v\in V.$$

Les hypothèses $(2.1.14)$, $(2.1.16)$, $(2.1.9)$,$(2.2.4)$ et $(2.2.6)$ entrainent que l'opérateur $A_t$ est de Lipschitz et fortement monotone. En effet, en utilisant $(2.1.9)$, $(2.1.14)\,(b)$ et $(2.2.4)$, on a

$$|(A_tu-A_tv,w)_V|\leq(M+c)\,c_0^2\,\|u-v\|_V\,\|w\|_V\quad\forall(u,v,w)\in V\times V\times V.$$

Aussi, en utilisant $(2.14)\,(c)$ et $(2.2.6)$, on a

$$(A_tu-A_tv,u-v)_V\geq m\,\|u-v\|_V^2\quad\forall u,v\in V.$$

Puisque $K$ est un sous-ensemble convexe fermé, non vide de $V$, il résulte d'après des résultats standards sur les inéquations variationnelles elliptiques ([4]), qu'il existe un élément unique $u_\beta\left(t\right):u_\beta\in K$ qui satisfait $(2.2.8)$.

Soit alors $t_1, t_2 \in [0,T]$, $u_\beta(t_i)$, $i = 1,2$ vérifie l'inéquation

$$\begin{aligned}(F\varepsilon(u_\beta(t_i)), \varepsilon(\upsilon - u_\beta(t_i)))_Q + j(\beta(t_i), u_\beta(t_i), \upsilon - u_\beta(t_i)) \\ \geq (f(t_i), \upsilon - u_\beta(t_i))_V.\end{aligned}$$

Par la suite posons $u_\beta(t_i) = u_i$, $\beta(t_i) = \beta_i$, $f(t_i) = f_i$, on prend $\upsilon = u_2$ dans l'inéquation vérifiée par $u_1$ puis $\upsilon = u_1$ dans l'inéquation vérifiée par $u_2$ et on additionne les inéquations obtenues; nous trouvons aprés quelques calculs:

$$\begin{aligned}(F\varepsilon(u_1) - F\varepsilon(u_2), \varepsilon(u_1 - u_2))_V \quad &\leq \quad (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_V + \\ &\qquad j\left(\beta, u_1, u_2 - u_1\right) - j\left(\beta, u_2, u_1 - u_2\right)\end{aligned}$$

De l'inégalité précédente, de (2.1.14) $(c)$ et de (2.2.4) on obtient

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq c(\|f_1 - f_2\|_V + \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)}). \tag{2.2.10}$$

On voit alors que (2.2.10) et la régularité des fonctions $f$ et $\beta$ impliquent

$$u_\beta \in C\left([0,T]\,; V\right),$$

d'où la preuve.■

Dans la troisième étape, on utilise la fonction $u_\beta$ du lemme précédent et considérons le problème suivant.

**Problème** $P_{2\beta}$. Trouver le champ d'adhésion $\chi_\beta : [0,T] \to L^2\left(\Gamma_3\right)$ tel que:

$$\dot{\chi}_\beta\left(t\right) = -(c_\nu \chi_\beta\ \left(t\right)\left(R_\nu(u_{\beta\nu}\left(t\right))\right)^2 - \epsilon_a)_+ \ p.p.\ t \in \left(0,T\right), \tag{2.2.11}$$

$$\chi_\beta\left(0\right) = \beta_0. \tag{2.2.12}$$

On a le lemme suivant:

**Lemme 2.5.** *Le problème* $P_{2\beta}$ *admet une solution unique* $\chi_\beta \in W^{1,\infty}\left(0,T; L^2\left(\Gamma_3\right)\right) \cap \mathcal{B}$.

**Démonstration.** Considérons l'application $F_\beta : [0,T] \times L^2\left(\Gamma_3\right) \to L^2\left(\Gamma_3\right)$ définie par:

$$F_\beta\left(t,\theta\right) = -\left(c_\nu \theta R_\nu^2\left(u_{\beta\nu}\left(t\right)\right) - \epsilon_a\right)_+$$

pour tout $t \in [0,T]$ et $\theta \in L^2(\Gamma_3)$. D'aprés les propriétés de l'opérateur $R_\nu$ il résulte que la fonction $F_\beta$ est lipschitzienne et continue par rapport au deuxième argument, et cela uniformément en temps. D'ailleurs, pour n'importe quel $\theta \in L^2(\Gamma_3)$, l'application $t \to F_\beta(t,\theta)$ appartient à $L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_3))$. En utilisant le théorème 1.6, nous pouvons dire qu'il existe une fonction unique $\chi_\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))$ qui satisfait (2.2.11), (2.2.12) . Et d'après (2.2.11), (2.2.12) et que $0 \leq \beta_0 \leq 1$, on obtient $\chi_\beta \in \mathcal{B}$ pour tout $t \in [0,T]$, voir [20]. En effet, de (2.2.11) et (2.2.12) on obtient que $\chi_\beta(x,t) \leq \beta_0(x)$ et c'est pourquoi l'hypothèse (2.1.17) montre que $\chi_\beta(x,t) \leq 1$ pour $t > 0$, *p.p.* $x \in \Gamma_3$. D'autre part, si $\chi_\beta(x,t_0) = 0$ à l'instant $t_0$, alors il s'en suit de (2.2.11) que $\dot{\chi}_\beta(x,t) = 0$ pour tout $t > t_0$ et ainsi $\chi_\beta(x,t) = 0$ pour tout $t > t_0$, *p.p.* $x \in \Gamma_3$. Nous déduisons que $0 \leq \chi_\beta(x,t) \leq 1$ pour tout $t \in [0,T]$, *p.p.* $x \in \Gamma_3$. Ce qui achève la preuve du lemme précédent.■

D'autre part, il résulte du lemme 2.5 que pour tout $\beta \in \mathcal{Z}$, la solution $\chi_\beta$ du problème $P_{2\beta}$ appartient à $\mathcal{Z}$. Donc on peut considérer l'opérateur $\Lambda : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ défini par:

$$\Lambda\beta = \chi_\beta. \tag{2.2.13}$$

On a alors le lemme ci-dessous.

**Lemme 2.6.** *Il existe un élément unique $\beta^* \in \mathcal{Z}$ tel que*:

$$\Lambda\beta^* = \beta^*.$$

**Démonstration.** Soit donc $\beta_i\,(i = 1,2)$ deux fonctions dans $\mathcal{Z}$ et notons par $u_i$, $\chi_i$ les fonctions obtenues dans les lemmes 2.4 et 2.5 respectivement, pour $\beta = \beta_i, i = 1,2$.

Nous utilisons les arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (2.2.10) pour déduire que:

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq c\,\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \tag{2.2.14}$$

Ce qui implique:

$$\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V\, ds \leq c\int_0^t \|\beta_1(s) - \beta(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}\ ds. \tag{2.2.15}$$

D'autre part, on a

$$\chi_i(t) = \beta_0 - \int_0^t (c_\nu \chi_i\ (s)\,[R_\nu(u_{i\nu}(s))]^2 - \epsilon_a)_+ ds,$$

et donc

$$|\chi_1(t) - \chi_2(t)| \leq \quad c\int_0^t \left|\chi_1(s)\,(R_\nu(u_{1\nu}(s)))^2 - \chi_2(s)\,(R_\nu(u_{2\nu}(s)))^2\right| ds.$$

D'où:

$$\begin{aligned}&\|\chi_1(t) - \chi_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}\\ &\leq c\int_0^t \|\chi_1(s)\,(R_\nu(u_{1\nu}(s)))^2 - \chi_2(s)\,(R_\nu(u_{2\nu}(s)))^2\|_{L^2(\Gamma_3)}\, ds.\end{aligned}$$

Utilisons la définition de $R_\nu$ et écrivons $\chi_1 = \chi_1 + \chi_2 - \chi_2$, $|R_\nu(u_{i\nu})| \leq L$, $i = 1, 2$, et $|R_\nu(u_{1\nu}) - R_\nu(u_{2\nu}| \leq |u_{1\nu} - u_{2\nu}|$, on obtient

$$\begin{aligned}&\|\chi_1(t) - \chi_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq\\ &c\left(\int_0^t \|\chi_1(s) - \chi_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}\, ds + \int_0^t \|u_{1\nu}(s) - u_{2\nu}(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}\, ds\right).\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Gronwall, il s'en suit que

$$\|\chi_1(t) - \chi_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c\int_0^t \|u_{1\nu}(s) - u_{2\nu}(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}\, ds.$$

En utilisant (2.1.9) , on obtient l'inégalité suivante

$$\|\chi_1(t) - \chi_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}\, ds, \tag{2.2.16}$$

et grâce à (2.2.13) et (2.2.16), on aboutit à l'inégalité

$$\|\Lambda\beta_1(t) - \Lambda\beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V\, ds. \tag{2.2.17}$$

Combinons maintenant (2.2.15) et (2.2.17), on obtient

$$\left\|\Lambda\beta_1(t)-\Lambda\beta_2(t)\right\|_{L^2(\Gamma_3)}\leq\ c\int_0^t\left\|\beta_1(s)-\beta_2(s)\right\|_{L^2(\Gamma_3)}ds.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\int_0^t\left\|\beta_1(s)-\beta_2(s)\right\|_{L^2(\Gamma_3)}ds&=\int_0^t\exp(\alpha s)\exp(-\alpha s)\left\|\beta_1(s)-\beta_2(s)\right\|_{L^2(\Gamma_3)}ds\\&\leq\frac{\exp(\alpha t)}{\alpha}\left\|\beta_1-\beta_2\right\|_\alpha.\end{aligned}$$

D'où

$$\exp(-\alpha t)\left\|\Lambda\beta_1(t)-\Lambda\beta_2(t)\right\|_{L^2(\Gamma_3)}\leq\ \frac{c}{\alpha}\left\|\beta_1(t)-\beta_2(t)\right\|_\alpha\ \ \forall t\in[0,T].$$

On obtient à la fin

$$\left\|\Lambda\beta_1-\Lambda\beta_2\right\|_\alpha\leq\ \frac{c}{\alpha}\left\|\beta_1-\beta_2\right\|_\alpha.$$

Cette inégalité montre que pour $\alpha>c$, $\Lambda$ est une contraction donc elle admet un point fixe $\beta^*$.■

Dans la quatrième étape, nous avons tous les ingrédients pour prouver le théorème 2.3.

**Démonstration du théorème 2.3.** Soit $\beta^*\in\mathcal{Z}$ un point fixe de $\Lambda$ c'est-à-dire: $\Lambda\beta^*=\beta^*$ et soit $u^*$ la solution du problème $P_{1\beta}$ pour $\beta=\beta^*$ c'est-à-dire $u^*=u_{\beta^*}$. On utilise les arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (2.2.10) pour obtenir

$$\left\|u^*(t_1)-u^*(t_2)\right\|_V\leq c\left(\left\|\beta^*(t_1)-\beta^*(t_1)\right\|_{L^2(\Gamma_3)}+\left\|f(t_1)-f(t_2)\right\|_V\right)\quad\forall t_1,t_2\in[0,T]\tag{2.2.18}$$

Le lemme 2.6 montre que $\beta^*\in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))$ et aussi (2.2.18) implique que $u^*\in W^{1,\infty}(0,T;V)$. Nous concluons par (2.2.8), (2.2.11) et (2.2.12) que $(u^*,\beta^*)$ est une solution du problème $P_2$. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur $\Lambda$ donné (2.2.13). En effet, soit $(u,\beta)$ une solution du problème $P_2$. On a vu déja $\beta\in\mathcal{Z}$, de plus, il s'en suit de (2.2.8) que $u$ est une solution du problème $P_{1\beta}$. Du lemme 2.5 ce problème a solution unique $u_\beta$, d'où $u=u_\beta$. On remplace $u$ par $u_\beta$ dans (2.2.8) et on utilise la condition initiale (2.1.21) pour voir que $\beta$ est une solution du problème $P_{2\beta}$. Comme d'aprés le lemme 2.5, ce problème a une solution unique $\chi_\beta$, nous en déduisons

$$\beta = \chi_\beta. \tag{2.2.19}$$

Maintenant, on utilise (2.2.19) pour voir que $\Lambda\beta = \beta$, i.e. $\beta$ est un point fixe de l'opérateur $\Lambda$. En utilisant le lemme 2.6, on obtient alors:

$$\beta = \beta^*$$

On conclut donc que le problème $P_2$ admet une solution unique.■

# Chapitre 3

# Approximation numérique du problème variationnel $P_2$

Dans cette section, on étudie l'approximation du problème $P_2$ en introduisant une méthode d'éléments finis pour approcher la solution en établissant une estimation d'erreur.

Pour simplfier on suppose que $\Omega$ est un domaine polygonal de l'espace $\mathbb{R}^2$ et pour tout paramètre $h > 0$, on considère une partition $\mathcal{T}^h$ de $\Omega$ en triangles de taille maximale $h$,i.e. $\overline{\Omega} = \overset{N_h}{\underset{e=1}{\cup}} \Omega_e$. La triangulation $\mathcal{T}^h$ est supposée régulière. Pour chaque élément $\Omega_e \in \mathcal{T}^h$, $P_1(\Omega_e)$ désigne l'ensemble des polynômes de degré total inférieur ou égal à 1 sur $\Omega_e$. Nous utilisons les espaces de dimension finie $V^h \subset V$, $\mathcal{B}^h \subset L^2(\Gamma_3)$ qui sont alors définis par:

$$\begin{aligned}
V^h &= \left\{ v^h \in \left[C\left(\overline{\Omega}\right)\right]^d : v^h/\Omega_e \in \left[P_1(\Omega_e)\right]^d,\ \Omega_e \in \mathcal{T}^h,\ v^h = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\}, \\
\mathcal{B}^h &= \left\{ \beta^h \in L^2(\Gamma_3) : \beta^h_\gamma \in \mathbb{R}\ \forall \gamma \in \mathcal{T}^h_{\Gamma_3} \right\},
\end{aligned}$$

où $\mathcal{T}^h_{\Gamma_3}$ est une partition induite par la triangulation $\mathcal{T}^h$ (voir [20], page 55). Soit aussi $\mathcal{P}_{\mathcal{B}^h} : L^2(\Gamma_3) \to \mathcal{B}^h$ l'opérateur de projection orthogonale sur $\mathcal{B}^h$. On définit par $K^h$ l'ensemble convexe discret des déplacements admissibles suivants:

$$K^h = K \cap V^h.$$

On rappelle la notation matricielle :

$$u^h = \sum_{i=1}^{N} u^i \alpha^i, \beta^h = \sum_{i=1}^{N} \beta^i \xi^i.$$

où $\alpha^i, \xi^i$ sont les fonctions de bases constantes par morceaux, prenant la valeur 1 au noeud $i$ et 0 aux autres. Les $u^i$ et $\beta^i$ sont respectivement les valeurs au noeud $i$ des fonctions $u^h$ et $\beta^h$. Avec cette construction des espaces $V^h$ et $\beta^h$ les fonctions $u^h \in V^h$ $\left(\text{resp } \beta^h \in B^h\right)$ sont caractérisés par leurs valeurs aux sommets de la triangularisation (voir [17]). Par ailleurs, pour discrétiser la variable temporelle, on considere une subdivision équidistance de l'intervalle $[0,T]$ telle que $0 = t_0 < t_1 < .... < t_N = T$ où le pas de temps $k = T/N$ . Pour une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nous utilisons la notation $\delta w_n$, pour la différence divisée i.e $\delta w_n = w_n - w_{n-1}/k$. De même, la valeur de la fonction continue $\phi(t)$ au point $t_n$ est notée par $\phi_n = \phi(t_n)$. Nous utilisons un schema d'Euler implicite, la discrétisation totale du problème $P_2$ est définie comme suit:

**Problème** $P_2^{hk}$. Trouver le champ de déplacements discret $u^{hk} = \left(u_n^{hk}\right)_{n=1}^N \subset K^h$ et le champ d'adhésion $\beta^{hk} = \left(\beta_n^{hk}\right)_{n=1}^N \subset \mathcal{B}^h$ tels que $\beta^{hk} = \beta_0^h$ et pour tout $n = 1, ...N$.

$$\begin{aligned}\left(F\varepsilon\left(u_n^{hk}\right), \varepsilon\left(v^h - u_n^{hk}\right)\right)_Q + j\left(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, v^h - u_n^{hk}\right)\\ \geq \left(f_n, v^h - u_n^{hk}\right) \quad \forall v^h \in K^h.\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\delta\beta_n^{hk} = -\mathcal{P}_{B^h}(c_\nu \beta_{n-1}^{hk}(R_\nu(u_{(n-1)\nu}^{hk}))^2 - \epsilon_a)_+ \tag{3.2}$$

où $\beta_0^h$ est une approximation appopriée de la condition initiale $\beta_0$. Les mêmes arguments utilisés dans la démonstration du théorème 2.3.1 montrent que le problème $P_2^{hk}$ admet une solution unique.

Notre intérêt dans cette partie est de trouver une estimation d'erreur de$\left\|u_n - u_n^{hk}\right\|_V$ et $\left\|\beta_n - \beta_n^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)}$.

Nous avons le théorème suivant.

**Théorème 3.1.** *Soit $(u,\beta)$ et $\left(u_n^{hk}, \beta_n^{hk}\right)$ les solutions respectives du problème $P_2$ et $P_2^{hk}$. Supposons les hypothèses du théorème 2.3 satisfaites et que $\sigma = F(\varepsilon)$, $\beta$ et $\beta_0$ ont la régularité:*

$$\sigma \in C([0,T]; H^1(\Omega)^{d\times d}) \cap W^{1,1}(0,T;Q), \tag{3.3}$$

$$\beta \in W^{2,1}(0,T; L^2(\Gamma_3)) \cap C^1([0,T]; H^1(\Gamma_3)), \tag{3.4}$$

$$\beta_0 \in H^1(\Gamma_3). \tag{3.5}$$

*Alors il existe une constante positive c indépendante de h et k telle que l'estimation d'erreur suivante est vraie pour tout* $\upsilon^h = \left(\upsilon_j^h\right)_{j=1}^N \subset K^h$.

$$\begin{aligned}&\max_{1\leq n\leq N}\left\{\left\|u_n - u_n^{hk}\right\|_V^2 + \left\|\beta_n - \beta_n^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)}^2\right\}\\ &\quad\leq c(\max_{1\leq n\leq N}\inf_{\upsilon^h\in K^h}(\left\|\upsilon^h - u_n\right\|_V^2 + \left\|u_{n\nu} - \upsilon_\nu^h\right\|_{L^2(\Gamma_3)}) + c\left(h^2 + k^2\right).\end{aligned} \tag{3.6}$$

**Démonstration.** Premièrement, une estimation d'erreur sur le champ des déplacements.

On écrit l'inéquation variationnelle (2.1.19) au temps $t = t_n$ pour $\upsilon = u_n^{hk} \in K^h$. On obtient

$$\begin{aligned}&\left(F\varepsilon\left(u_n\right), \varepsilon\left(u_n - u_n^{hk}\right)\right)_Q + j\left(\beta_n, u_n, u_n - u_n^{hk}\right)\\ &\qquad\leq \left(f_n, u_n - u_n^{hk}\right)_V .\end{aligned} \tag{3.7}$$

aprés quelques calculs algébriques, nous aurons:

$$\begin{cases}\left(F\varepsilon\left(u_n^{hk}\right), \varepsilon\left(u_n^{hk} - u_n\right)\right)_Q + j\left(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, u_n^{hk} - u_n\right)\\ \leq \left(F\varepsilon\left(u_n^{hk}\right), \varepsilon\left(\upsilon^h - u_n\right)\right)_Q + j\left(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, \upsilon^h - u_n\right)\\ + \left(f_n, u_n^{hk} - \upsilon^h\right)_V . \qquad \forall\ \upsilon_h \in K_h.\end{cases} \tag{3.8}$$

additionons (3.7) et (3.8) on a:

$$\begin{cases}\left(F\varepsilon\left(u_n\right) - F\varepsilon\left(u_n^{hk}\right), \varepsilon\left(u_n - u_n^{hk}\right)\right)_Q + j\left(\beta_n, u_n, u_n - u_n^{hk}\right)\\ -j\left(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, u_n - u_n^{hk}\right)\\ \leq \left(F\varepsilon\left(u_n^{hk}\right), \varepsilon\left(\upsilon^h - u_n\right)\right)_Q + j\left(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, \upsilon^h - u_n\right)\\ - \left(f_n, \upsilon^h - u_n\right)_V . \qquad \forall\ \upsilon_h \in K_h.\end{cases} \tag{3.9}$$

et on déduit de (3.9) l'inégalité suivante:

$$\begin{cases}\left(F\varepsilon\left(u_n\right) - F\varepsilon\left(u_n^{hk}\right), \varepsilon\left(u_n - u_n^{hk}\right)\right)_Q + j\left(\beta_n, u_n, u_n - u_n^{hk}\right)\\ -j\left(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, u_n - u_n^{hk}\right).\\ \leq \left(F\varepsilon\left(u_n^{hk}\right) - F\varepsilon\left(u_n\right), \varepsilon\left(\upsilon^h - u_n\right)\right)_Q + j\left(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, \upsilon^h - u_n\right)\\ -j\left(\beta_n, u_n, \upsilon^h - u_n\right) + L_n\left(\upsilon^h\right). \qquad \forall\ \upsilon_h \in K_h.\end{cases} \tag{3.10}$$

où

$$L_n\left(\upsilon^h\right) = \left(F\varepsilon\left(u_n\right), \varepsilon\left(\upsilon^h - u_n\right)\right)_Q + j\left(\beta_n, u_n, \upsilon^h - u_n\right) - \left(f_n, \upsilon^h - u_n\right)_V .$$

Notons $\sigma = F\varepsilon\left(u_n\right)$ et utilisons la formule de Green:

$$L_n\left(\upsilon^h\right) = \int\limits_{\Gamma_3} \left(\sigma_{n\nu} + p\left(u_{n\nu}\right) - c_\nu \beta^2 R_\nu(u_{n\nu})\right)\left(\upsilon_\nu^h - u_{n\nu}\right) da.$$

En prenant en considération (3.3) et (2.1.16), on déduit l'estimation:

$$\left|L_n\left(\upsilon^h\right)\right| \leq c\left\|\upsilon_\nu^h - u_{n\nu}\right\|_{L^2(\Gamma_3)}$$

et, on utilise encore (2.1.16) on a:

$$\begin{aligned}
&j\left(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, u_n - u_n^{hk}\right) - j\left(\beta_n, u_n, u_n - u_n^{hk}\right) \\
&\leq c'(\left\|u_n - u_n^{hk}\right\|_V + \left\|\beta_n - \beta_n^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)})\left\|u_n^{hk} - u_n\right\|_V,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&j\left(\beta_n^{hk}, u_n^{hk}, \upsilon^h - u_n\right) - j\left(\beta_n, u_n, \upsilon^h - u_n\right) \\
&\leq c'(\left\|u_n - u_n^{hk}\right\|_V + \left\|\beta_n - \beta_n^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)})\left\|\upsilon^h - u_n\right\|_V.
\end{aligned}$$

Par suite, en utilisant (3.10) et l'inégalité de Young

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{4\delta}b^2 \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R},\ \delta > 0,$$

(2.1.14) et quelques calculs, nous mènent à

$$\left\|u_n - u_n^{hk}\right\|_V^2 \leq c\left(\left\|\beta_n - \beta_n^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + \left\|\upsilon^h - u_n\right\|_V^2 + \left\|u_{n\nu} - \upsilon_\nu^h\right\|_{L^2(\Gamma_3)}\right)\ \forall \upsilon^h \in K^h. \quad (3.11)$$

et d'aprés [20 page 62], et (3.5) on a:

$$\left\|\beta_0 - \beta_0^h\right\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq ch.$$

Maintenant on a besoin de la proposition suivante dont la preuve se trouve dans les pages 62, 63 de la référence [20] .■

**Proposition 3.2.** *Sous les hypothèses* (3.3), (3.4) *et* (3.5), *on a l'estimation suivante:*

$$\left\|\beta_n - \beta_n^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq ck(\sum_{j=1}^n \left\|u_j - u_j^{hk}\right\|_V^2 + \left\|\beta_n - \beta_n^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)}^2) + c\left(h^2 + k^2\right) \qquad (3.12)$$

Avant de commencer la preuve de la proposition 3.2, on doit faire la remarque suivante.

**Remarque 1.** On a: $\delta\beta_j - \dot{\beta}_j = \frac{1}{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\dot{\beta}_j(s) - \beta(t_j))ds = \frac{1}{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\int_{t_j}^{s}\ddot{\beta}(\tau)\,d\tau)ds$. Ceci implique

$$\left\|\delta\beta_j - \dot{\beta}_j\right\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \left\|\ddot{\beta}\right\|_{L^1(t_{j-1},t_j;L^2(\Gamma_3))}. \tag{3.13}$$

**Lemme 3.3.** *Posons $r_n^{hk} = R_\nu^2\left(u_{n,\nu}^{hk}\right)$, alors la régularité de $u$ implique:*

$$\left\|r_j - r_{j-1}^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c\left\|u_{j-1} - u_{j-1}^{hk}\right\|_V + ck. \tag{3.14}$$

**Démonstration.** On a

$$r_j - r_{j-1}^{hk} = \left(R_\nu\left(u_{j,\nu}\right) + R\nu\left(u_{j-1,\nu}^{hk}\right)\right)\left(R_\nu\left(u_{j,\nu}\right) - R_\nu\left(u_{j-1,\nu}^{hk}\right)\right),$$

en utlisant ensuite la propriété: $|R_\nu(s)| \leq L$, et pour $a, b \in \mathbb{R}$, $|R_\nu(a) - R_\nu(b)| \leq |a-b|$, on a

$$\left|r_j - r_{j-1}^{hk}\right| \leq 2L\left|R\left(u_{j,\nu}\right) - R\left(u_{j-1,\nu}^{hk}\right)\right| \leq 2L\left|u_{j,\nu} - u_{j-1,\nu}^{hk}\right|.$$

D'où on obtient les estimations suivantes:

$$\begin{aligned}
\left\|r_j - r_{j-1}^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c\left\|u_j - u_{j-1}^{hk}\right\|_V, \\
\left\|r_j - r_{j-1}^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c(\left\|u_j - u_{j-1}\right\|_V + \left\|u_{j-1} - u_{j-1}^{hk}\right\|_V), \\
\left\|r_j - r_{j-1}^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c(k + \left\|u_{j-1} - u_{j-1}^{hk}\right\|_V).
\end{aligned}$$

d'où (3.14) .■

Ajoutant la remarque suivante

**Remarque 2.** Les termes$\left(c_\nu\beta_{n-1}^{hk}r_{(n-1)}^{hk} - \epsilon_a\right)_+$ et $\mathcal{P}_{B^h}(c_\nu\beta_{n-1}^{hk}r_{(n-1)}^{hk} - \epsilon_a)_+$ sont positifs. Et de [20, page 64] on déduit que $\beta_n^{hk}$ est décroissante quand $n$ croit. En outre, pour chaque $x \in \Gamma_3$, si pour certains $j$, $\beta_j^{hk}(x) \leq 0$ alors on peut dire $\beta_n^{hk}(x) = \beta_j^{hk}(x)$ pour $n \geq j$. D'où $\left\{\left\|\beta_n^{hk}\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\right\}_{n=1}^N$est uniformement bornée, de même pour $\left\{\left\|r_n^{hk}\right\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\right\}_{n=1}^N$.

**Démonstration de la proposition 3.2.** Soit $I : L^2(\Gamma_3) \to L^2(\Gamma_3)$ l'opérateur d'identité, on a $\delta\beta_j = \frac{\beta(t_j)-\beta(t_{j-1})}{k}$, $\beta_j = \beta(t_j)$ et $\beta_0^{hk} = \beta_0^h$ donc:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}k\delta\left(\beta_j - \beta_j^{hk}\right) &= k\delta\left(\beta_1 - \beta_1^{hk}\right) + .... + k\delta\left(\beta_n - \beta_n^{hk}\right) \\
&= k\delta\beta_1 - k\delta\beta_1^{hk} + .... + k\delta\beta_n - k\delta\beta_n^{hk} \\
&= \left[(\beta_1 - \beta_0) - (\beta_1^{hk} - \beta_0^{hk})\right] + .... + \left[(\beta_n - \beta_{n-1}) - (\beta_n^{hk} - \beta_{n-1}^{hk})\right] \\
&= \beta_0^h - \beta_0 + \beta_n - \beta_n^{hk},
\end{aligned}$$

d'où

$$\beta_n - \beta_n^{hk} = \beta_0 - \beta_0^h + \sum_{j=1}^{n} k\delta\left(\beta_j - \beta_j^{hk}\right). \tag{3.15}$$

Maintenant, on a besoin de borner le terme $\left\|\delta\left(\beta_j - \beta_j^{hk}\right)\right\|_{L^2(\Gamma_3)}$.
En effet, on peut écrire

$$\delta\left(\beta_j - \beta_j^{hk}\right) = \delta\beta_j - \dot{\beta}_j + \left(I - \mathcal{P}_{B^h}\right)\dot{\beta}_j + \mathcal{P}_{B^h}\beta_j - \delta\beta_j^{hk},$$

où $I : L^2(\Gamma_3) \to L^2(\Gamma_3)$ est l'opérateur d'identité. Donc on obtient l'estimation suivante en norme $L^2(\Gamma_3)$

$$\left\|\delta\left(\beta_j - \beta_j^{hk}\right)\right\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \left\|\delta\beta_j - \dot{\beta}_j\right\|_{L^2(\Gamma_3)} + \left\|\left(I - \mathcal{P}_{B^h}\right)\dot{\beta}_j\right\|_{L^2(\Gamma_3)} + \left\|\mathcal{P}_{B^h}\beta_j - \delta\beta_j^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)},$$

et, en utilisant (2.1.7) et (3.2), on obtient:

$$\left\|\mathcal{P}_{B^h}\beta_j - \delta\beta_j^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \left\|c_\nu(\beta_j r_j - \beta_{j-1}^{hk} r_{j-1}^{hk})\right\|_{L^2(\Gamma_3)}.$$

Ensuite, on ajoute et on soustrait $\beta_{j-1}^{hk} r_j$ de $\beta_j r_j - \beta_{j-1}^{hk} r_{j-1}^{hk}$ pour déduire

$$\left\|(\beta_j r_j - \beta_{j-1}^{hk} r_{j-1}^{hk})\right\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \left\|(\beta_j - \beta_{j-1}^{hk}) r_j - \beta_{j-1}^{hk}(r_j - r_{j-1}^{hk})\right\|_{L^2(\Gamma_3)},$$

et d'aprés la remarque 2, on obtient:

$$\begin{aligned}
\left\|(\beta_j r_j - \beta_{j-1}^{hk} r_{j-1}^{hk})\right\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c\left(\left\|(\beta_j - \beta_{j-1}^{hk})\right\|_{L^2(\Gamma_3)} + \left\|(r_j - r_{j-1}^{hk})\right\|_{L^2(\Gamma_3)}\right) \\
&\leq c\left(\begin{array}{c} \left\|(\beta_j - \beta_{j-1})\right\|_{L^2(\Gamma_3)} + \left\|\beta_{j-1} - \beta_{j-1}^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ + \left\|(r_j - r_{j-1}^{hk})\right\|_{L^2(\Gamma_3)} \end{array}\right).
\end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned}
\left\|\delta\left(\beta_j - \beta_j^{hk}\right)\right\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq\ & \left\|\delta\beta_j - \dot{\beta}_j\right\|_{L^2(\Gamma_3)} + \left\|\left(I - \mathcal{P}_{B^h}\right)\dot{\beta}_j\right\|_{L^2(\Gamma_3)} \\
& + c\left(\left\|\beta_j - \beta_{j-1}\right\|_{L^2(\Gamma_3)} + \left\|\beta_{j-1} - \beta_{j-1}^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)} + \left\|(r_j - r_{j-1}^{hk})\right\|_{L^2(\Gamma_3)}\right).
\end{aligned}$$

Et donc (3.15) devient:

$$\begin{aligned}
\left\|\beta_n - \beta_n^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq\ & \left\|\beta_0 - \beta_0^h\right\|_{L^2(\Gamma_3)} + \sum_{j=1}^{n} k((\left\|\delta\beta_j - \dot{\beta}_j\right\|_{L^2(\Gamma_3)} + \left\|\left(I - \mathcal{P}_{B^h}\right)\dot{\beta}_j\right\|_{L^2(\Gamma_3)}) \\
& + c(\left\|\beta_j - \beta_{j-1}\right\|_{L^2(\Gamma_3)} + \left\|\beta_{j-1} - \beta_{j-1}^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)} + \left\|(r_j - r_{j-1}^{hk})\right\|_{L^2(\Gamma_3)})).
\end{aligned}$$

Posons

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} k \left( \left\| \delta\beta_j - \dot{\beta}_j \right\|_{L^2(\Gamma_3)} + \left\| (I - \mathcal{P}_{B^h}) \dot{\beta}_j \right\|_{L^2(\Gamma_3)} + c \left\| \beta_j - \beta_{j-1} \right\|_{L^2(\Gamma_3)} \right),$$

la régularité de $\beta$ implique les estimations

$$\begin{aligned} \max_{1\leq n\leq N} \left\| \beta_n - \beta_{n-1} \right\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq ck, \\ \max_{0\leq n\leq N} \left\| \dot{\beta}_n - \mathcal{P}_{B^h} \dot{\beta}_n \right\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq ch. \end{aligned} \tag{3.16}$$

(3.13) (Remarque 2) et (3.16) donnent

$$A_n \leq c\,(h+k)\,. \tag{3.17}$$

En utilisant(3.14) et (3.16) , on a

$$\left\| \beta_n - \beta_n^{hk} \right\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \left\| \beta_0 - \beta_0^{h} \right\|_{L^2(\Gamma_3)} + c \sum_{j=1}^{n} k (\left\| \beta_{j-1} - \beta_{j-1}^{hk} \right\|_{L^2(\Gamma_3)} + k + \left\| u_{j-1} - u_{j-1}^{hk} \right\|_V) + c\,(h+k)$$

A la fin, en notant $u(0) = u_0$, et puisque $\left\| u_0 - u_0^h \right\|_V \leq ch$, on aura

$$\left\| \beta_n - \beta_n^{hk} \right\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \sum_{j=1}^{n} k (\left\| \beta_j - \beta_j^{hk} \right\|_{L^2(\Gamma_3)} + \left\| u_j - u_j^{hk} \right\|_V) + c\,(h+k)\,. \tag{3.18}$$

A ce niveau, rappelons en général l'inégalité de Cauchy Shwartz

$$\left( \sum_{i=1}^{n} k g_i \right)^2 = \left( \sum_{i=1}^{n} \sqrt{k}\sqrt{k} g_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^{n} \sqrt{k}^2 \right) \left( \sum_{i=1}^{n} k g_i^2 \right),$$

et donc

$$\left( \sum_{i=1}^{n} k g_i \right)^2 \leq c \left( \sum_{i=1}^{n} k g_i^2 \right). \tag{3.19}$$

Rappelons aussi l'inégalité de Young

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{4\delta} b^2 \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R}, \delta > 0.$$

De l'inégalité de Young et de (3.19), on obtient l'inégalité

$$\left( a + \sum_{i=1}^{n} k g_i \right)^2 \leq c \left( a^2 + \sum_{i=1}^{n} k g_i^2 \right).$$

D'aprés cette dernière inégalité

$$\left\|\beta_n-\beta_n^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq c\sum_{j=1}^{n} k\left(\left\|\beta_j-\beta_j^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)}+\left\|u_j-u_j^{hk}\right\|_V\right)^2+(c(h+k))^2 .$$

En appliquant l'inégalité de Young une deuxième fois, on aura

$$\left\|\beta_n-\beta_n^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq c\sum_{j=1}^{n} k(\left\|\beta_j-\beta_j^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)}^2+\left\|u_j-u_j^{hk}\right\|_V^2)+c\left(h^2+k^2\right).$$

Ainsi on obtient l'estimation (3.12) et la proposition est démontrée.■

Finalement pour terminer la preuve du théorème 3.1, on somme les deux inégalités (3.11) et (3.12) pour obtenir

$$\begin{aligned}\left\|u_n-u_n^{hk}\right\|_V^2+\left\|\beta_n-\beta_n^{hk}\right\|_V^2 &\leq ck(\sum_{j=1}^{n}\left\|u_j-u_j^{hk}\right\|_V^2+\left\|\beta_j-\beta_j^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)}^2)\\ &+c(\left\|\upsilon^h-u_n\right\|_V^2+\left\|u_{nv}-\upsilon_v^h\right\|_{L^2(\Gamma_3)})+c\left(h^2+k^2\right).\end{aligned} \tag{3.20}$$

De (3.20), on déduit en utilisant le lemme 1.4 (Gronwall discret) que

$$\begin{aligned}&\max_{1\leq n\leq N}\left\{\left\|u_n-u_n^{hk}\right\|_V^2+\left\|\beta_n-\beta_n^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)}^2\right\}\\ &\leq c\max_{1\leq n\leq N}(\left\|\upsilon^h-u_n\right\|_V^2+\left\|u_{nv}-\upsilon_v^h\right\|_{L^2(\Gamma_3)})+c\left(h^2+k^2\right)\quad \forall \upsilon^h\in K^h.\end{aligned}$$

D'où enfin

$$\begin{aligned}&\max_{1\leq n\leq N}\left\{\left\|u_n-u_n^{hk}\right\|_V^2+\left\|\beta_n-\beta_n^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)}^2\right\}\\ &\leq c(\max_{1\leq n\leq N}\inf_{\upsilon^h\in K^h}(\left\|\upsilon^h-u_n\right\|_V^2+\left\|u_{n\nu}-\upsilon_\nu^h\right\|_{L^2(\Gamma_3)})+c\left(h^2+k^2\right).\end{aligned}$$

**Corollaire 3.4.** *Supposons les hypothèses du théorème 2.3 et du théorème 3.1 satisfaites et que*

$$u\in C\left([0,T];\left(H^2(\Omega)\right)^d\right)\quad \textit{et } u_\nu\in C\left([0,T];\left(H^2(\Gamma_3)\right)^d\right).$$

*Alors il existe une constante $c>0$ indépendante de $h$ et $k$ telle que:*

$$\max_{1\leq n\leq N}\left\{\left\|u_n-u_n^{hk}\right\|_V+\left\|\beta_n-\beta_n^{hk}\right\|_{L^2(\Gamma_3)}\right\}\leq c(h+k). \tag{3.21}$$

**Démonstartion.** En utilisant les résultats standards d'estimation d'erreur (voir [5]), puisque $u_n \in (H^2(\Omega))^d$ et $u_{n\nu} \in (H^2(\Gamma_3))^d$, on a

$$
\begin{aligned}
&\|u_n - \pi_h u_n\|_V \leq ch \|u\|_{(H^2(\Omega))^d}, \\
&\|u_{nv} - \pi_h u_{n\nu}\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq ch^2 \|u_{nv}\|_{(H^2(\Gamma_3))^d}.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

D'où de (3.22) on déduit les estimations d'erreur

$$
\begin{aligned}
&\max_{1\leq n\leq N} \inf_{v^h\in K^h} \left\|v^h - u_n\right\|_V \leq ch \|u\|_{C\left([0,T];(H^2(\Omega))^d\right)}, \\
&\max_{1\leq n\leq N} \inf_{v^h\in K^h} \left\|v_\nu^h - u_{n\nu}\right\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq ch^2 \|u_\nu\|_{C\left([0,T];(H^2(\Gamma_3))^d\right)}.
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Finalement, de (3.23), nous obtenons l'estimation d'erreur (3.21).■

# Chapitre 4

# Problème de contact quasi-statique pénalisé avec adhésion et contraintes unilatérales

Dans ce chapitre on considère un problème de contact sans frottement avec compliance normale et adhésion où la pénétration est infinie. La condition de contact (2.1.5) est remplacée par la condition de contact

$$-\sigma_{\delta\nu} = \frac{1}{\delta}\left(u_\nu - g\right)_+ + p\left(u_\nu\right) - c_\nu \beta^2 R_\nu\left(u_\nu\right) \text{ on } \Gamma_3 \times (0,T),$$

$\delta > 0$ est un paramètre de pénalisation et $\dfrac{1}{\delta}$ est interprété comme le coefficient de raideur de la fondation. On obtient un nouveau problème $P_{1\delta}$ énoncé ci-dessous, dit problème de contact quasi-statique pénalisé avec adhésion et contraintes unilatérales.

**Problème** $P_{1\delta}$. Trouvez un champ des déplacements $u_\delta : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ et un champ d'adhésion $\beta_\delta : \Gamma_3 \times [0,T] \to [0,1]$ tels que:

$$\operatorname{div} \sigma\left(u_\delta\right) = -\varphi_0 \text{ dans } \Omega \times (0,T),$$

$$\sigma\left(u_\delta\right) = F\varepsilon(u_\delta) \text{ dans } \Omega \times (0,T),$$

$$u_\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0,T),$$

$$\sigma\left(u_\delta\right)\nu = \varphi_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0,T),$$

$$-\sigma_{\delta\nu} = \frac{1}{\delta}\left(u_{\delta\nu} - g\right)_+ + p\left(u_{\delta\nu}\right) - c_\nu \beta_\delta^2 R_\nu\left(u_{\delta\nu}\right) \text{ sur } \Gamma_3 \times (0,T),$$

$$\sigma_{\delta\tau} = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \times (0,T),$$

$$\dot{\beta}_\delta = -(c_\nu \beta_\delta (R_\nu(u_{\delta\nu}))^2 - \epsilon_a)_+ \text{ sur } \Gamma_3 \times (0,T),$$

$$\beta_\delta(0) = \beta_0 \text{ sur } \Gamma_3.$$

Quand $\delta$ est petit, la réaction de la fondation à la pénétration est importante; aussi quand $\delta$ est grand alors la réaction de la fondation à la pénétration est faible. On étudie le comportement de la solution quand $\delta \to 0$ et on montre qu'on obtient à la limite la solution du problème de contact sans frottement avec compliance normale et pénétration finie. Pour cela, on définit la fonctionnelle $j_\delta : L^2(\Gamma_3) \times V \times V \to \mathbb{R}$ par

$$j_\delta(\beta, u, v) = \int_{\Gamma_3} \left(\frac{1}{\delta}\left(u_\nu - g\right)_+ + p\left(u_\nu\right) - c_\nu \beta^2 R_\nu\left(u_\nu\right)\right) v_\nu da$$

$$\forall (\beta, u, v) \in L^2(\Gamma_3) \times V \times V.$$

Avec ces notations, la formulation variationnelle du problème pénalisé est la suivante.

**Problème** $P_{2\delta}$. Trouver $u_\delta : [0,T] \to V$ et $\beta_\delta : [0,T] \to [0,1]$ tels que*:*

$$\left(F\varepsilon\left(u_\delta(t)\right), \varepsilon(v)\right)_Q + j_\delta\left(\beta_\delta(t), u_\delta(t), v\right) = \left(f(t), v\right)_V \qquad (4.1)$$

$$\forall v \in V,\ t \in [0,T],$$

$$\dot{\beta}_\delta(t) = -\left[\beta_\delta(t)\left(c_\nu (R_\nu\left(u_{\delta\nu}(t)\right))^2\right) - \varepsilon_a\right]_+ \ p.p.\ t \in (0,T), \qquad (4.2)$$

$$\beta_\delta(0) = \beta_0. \qquad (4.3)$$

On a le théorème suivant.

**Théorème 4.1.** *Le problème $P_{2\delta}$ a une solution unique qui satisfait*

$$u_\delta \in C([0,T];V),\ \beta_\delta \in W^{1,\infty}\left(0,T; L^2(\Gamma_3)\right) \cap \mathcal{B}.$$

**Démonstration.** La démonstration du théorème 4.1 est semblable à la démonstration du théorème 2.3 et est faite en plusieurs étapes.

(i) Pour tout $\beta \in \mathcal{Z}$, on considère le problème ci-dessous.

**Problème** $P_{1\delta}$. *Trouvez* $u_\delta : [0,T] \to V$ *tel que*:

$$\begin{gathered}\left(F\varepsilon\left(u_\delta\left(t\right)\right), \varepsilon\left(v\right)\right)_Q + j_\delta\left(\beta\left(t\right), u_\delta\left(t\right), v\right) = \left(f\left(t\right), v\right)_V \\ \forall v \in V,\ t \in \left[0,T\right].\end{gathered} \tag{4.4}$$

On a le lemme suivant.

**Lemme 4.2.** *Le problème* $P_{1\delta}$ *a une solution unique* $u_\delta \in C\left(\left[0,T\right];V\right)$.

**Démonstration.** Pour chaque $t \in [0,T]$, on définit l'opérateur $A_t : V \to V$ par

$$\left(A_t u, v\right)_V = \left(F\varepsilon\left(u\right), \varepsilon\left(v\right)\right)_Q + j_\delta\left(\beta\left(t\right), u_\delta\left(t\right), v\right) \ \ \forall u,v \in V.$$

On utilise (2.1.14), (2.1.16), (2.2.4), (2.2.6) et que pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\left(a_+ - b_+\right)\left(a - b\right) \geq \left(a_+ - b_+\right)^2$ pour voir que $A_t$ est fortement monotone et de Lipschitz. Alors l'équation (4.4) a une unique solution $u_\delta\left(t\right) \in V$. Par ailleurs, avec les mêmes hypothèses on procède comme au lemme 2.4 du chapitre 2 pour montrer que $u_\delta \in C\left(\left[0,T\right];V\right)$.
(ii) Il existe un unique $\beta_\delta$ (déja vu au chapitre 2) tel que:

$$\beta_\delta \in W^{1,\infty}\left(0,T; L^2\left(\Gamma_3\right)\right) \cap \mathcal{Z}, \tag{4.5}$$

$$\dot{\beta}_\delta\left(t\right) = -\left[\beta_\delta\left(t\right)\left(c_\nu\left(R_\nu\left(u_{\delta\nu}\left(t\right)\right)\right)^2\right) - \varepsilon_a\right]_+ \ p.p.t \in \left(0,T\right), \tag{4.6}$$

$$\beta_\delta\left(0\right) = \beta_0. \tag{4.7}$$

(iii) Soit $\beta_\delta$ défini dans (ii) et notons encore par $u_\delta$ la fonction obtenue dans (i) pour $\beta = \beta_\delta$. Alors, en utlisant (4.4), (4.6) et (4.7), il est facile de voir que $\left(u_\delta, \beta_\delta\right)$ est une solution du problème $P_{2\delta}$ et satisfait

$$\left(u_\delta, \beta_\delta\right) \in C\left(\left[0,T\right];V\right) \times W^{1,\infty}\left(0,T; L^2\left(\Gamma_3\right)\right) \cap \mathcal{B}.$$

Maintenant on étudie la convergence de la solution $\left(u_\delta, \beta_\delta\right)$ quand $\delta \to 0$. On a le théorème ci-dessous.

**Théorème 4.3.** *Supposons que les hypothèses* (2.1.12), (2.1.14), (2.1.16) *et* (2.1.17) *sont vérifiées. Alors on a les convergences suivantes:*

$$\lim_{\delta \to 0} \left\|u_\delta\left(t\right) - u\left(t\right)\right\|_V = 0, \textit{ pour tout } t \in \left[0,T\right], \tag{4.8}$$

$$\lim_{\delta\to 0} \|\beta_\delta(t) - \beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} = 0, \text{ pour tout } t \in [0,T]. \tag{4.9}$$

La démonstration est faite en plusieurs étapes. Dans une première étape on montre le lemme suivant.

**Lemme 4.4.** *Pour chaque $t \in [0,T]$, il existe $\bar{u}(t) \in K$ et une sous-suite notée encore $(u_\delta(t))$ tels que*

$$u_\delta(t) \to \bar{u}(t) \text{ faiblement dans } V. \tag{4.10}$$

**Démonstration.** Soit $t \in [0,T]$. Prenons $v = u_\delta(t)$ dans (4.1), on a

$$(F\varepsilon(u_\delta(t)), \varepsilon(u_\delta(t)))_Q + j_\delta(\beta_\delta(t), u_\delta(t), u_\delta(t)) = (f(t), u_\delta(t))_V. \tag{4.11}$$

Puisque $j_\delta(\beta_\delta(t), u_\delta(t), u_\delta(t)) \geq 0$, on déduit de (4.11) que

$$(F\varepsilon(u_\delta(t)), \varepsilon(u_\delta(t)))_Q \leq (f(t), u_\delta(t))_V.$$

En utlilisant (2.1.14) $(c)$, cette inégalité implique

$$\|u_\delta(t)\|_V \leq \|f(t)\|_V / m.$$

Donc, en tenant compte de la régularité $f \in C([0,T]; V)$, il existe un élément $\bar{u}(t) \in V$ et une sous-suite notée encore $u_\delta(t)$ telle que

$$u_\delta(t) \to \bar{u}(t) \text{ faiblement dans } V.$$

Par ailleurs, de (4.11) on déduit l'inégalité

$$\int_{\Gamma_3} \left(\frac{u_{\delta\nu}(t) - g}{\delta}\right)_+ (u_{\delta\nu}(t) - g)\, da \leq (f(t), u_\delta(t))_V,$$

qui implique que

$$\left\|(u_{\delta\nu}(t) - g)_+\right\|^2_{L^2(\Gamma_3)} \leq \delta \|f(t)\|^2_V \ /m.$$

Cette dernière inégalité et (4.10) donnent

$$\left\|(\bar{u}_\nu(t) - g)_+\right\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \liminf_{\delta\to 0} \left\|(u_{\delta\nu}(t) - g)_+\right\|_{L^2(\Gamma_3)} = 0. \tag{4.12}$$

Enfin de (4.12) on déduit que $(\bar{u}_\nu(t) - g)_+ = 0$, c'est à dire $\bar{u}_\nu(t) \leq g$ *p.p.* sur $\Gamma_3$, ce qui montre que $\bar{u}(t) \in K$.■

Le lemme 4.4 nous conduit à poser le problème suivant.

**Problème** $P_{\beta_\delta}$. Trouver $\beta_\delta : [0,T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que

$$\dot{\beta}_\delta(t) = -\left[\beta_\delta(t)\left(c_\nu(R_\nu(\bar{u}_{\delta\nu}(t))^2 - \varepsilon_a\right]_+ p.p.t \in (0,T),\right.$$

$$\beta_\delta(0) = \beta_0.$$

Comme au lemme 2.5 (chapitre 2), on a le résultat suivant.

**Lemme 4.5.** *Le probleme $P_{\beta_\delta}$ a une solution unique $\beta_\delta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{B}$.*

On a le résultat de convergence suivant.

**Lemme 4.6.** *Soit $\beta$ la solution du problème $P_\beta$, alors on a*

$$\lim_{\delta\to 0} \|\beta_\delta(t) - \beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} = 0, \text{ pour tout } t \in [0,T]. \tag{4.13}$$

**Démonstration.** En utilisant les propriétés de l'opérateur $R_\nu$ (voir [20]), on a

$$\begin{aligned} &\|\beta_\delta(t) - \beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\leq c\int_0^t \|u_{\delta\nu}(s) - \bar{u}_\nu(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}\, ds. \end{aligned} \tag{4.14}$$

De (4.10), on déduit que $u_{\delta\nu}(t) \to \bar{u}_\nu(t)$ fortement dans $L^2(\Gamma_3)$ quand $\delta \to 0$. Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} &\|u_{\delta\nu}(t) - \bar{u}_\nu(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\leq c_0\|u_\delta(t) - \bar{u}(t)\|_V \leq c_0\left(\frac{\|f(t)\|_V}{m} + \|\bar{u}(t)\|_V\right). \end{aligned}$$

Cette inégalité implique

$$\|u_{\delta\nu}(t) - \bar{u}_\nu(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c.$$

D'où en vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue on a

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^t \|u_{\delta\nu}(s) - \bar{u}_\nu(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}\, ds = 0. \tag{4.15}$$

Le résultat de convergence est maintenant une consequence de (4.14) et (4.15) .■

Enfin, il nous reste à prouver le lemme ci-dessous.

**Lemme 4.7.** *On a $\bar{u}(t) = u(t)$ pour tout $t \in [0,T]$.*

**Démonstration.** Soit $v \in K$ et prenons $v - u_\delta(t)$ dans (4.1), on a

$$(F\varepsilon(u_\delta(t)), \varepsilon(v - u_\delta(t)))_Q + j(\beta_\delta(t), u_\delta(t), v - u_\delta(t)) \\ \geq (f(t), v - u_\delta(t))_V \quad \forall v \in K. \tag{4.16}$$

Puisque on a

$$j_\delta(\beta_\delta(t), u_\delta(t), v - u_\delta(t))$$

$$= \int_{\Gamma_3} \left( \left( \frac{u_{\delta\nu}(t) - g}{\delta} \right)_+ + p(u_{\delta\nu}(t)) - c_\nu \beta_\delta^2 R_\nu(u_{\delta\nu}(t)) \right) (v_\nu - u_{\delta\nu}(t))\, da$$

$$\leq \int_{\Gamma_3} (p(u_{\delta\nu}(t)) - c_\nu \beta_\delta^2 R_\nu(u_{\delta\nu}(t))(v_\nu - u_{\delta\nu}(t))\, da,$$

alors en utilisant (2.1.15), (4.8), (4.9), les propriétés de $R_\nu$ (voir [20]) et l'injection compacte $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3) \hookrightarrow L^2(\Gamma_3)$, on a

$$\int_{\Gamma_3} \left(p(u_{\delta\nu}(t)) - c_\nu \beta_\delta^2 R_\nu(u_{\delta\nu}(t))\right)(v_\nu - u_{\delta\nu}(t))\, da \to j(\beta(t), \bar{u}(t), v - \bar{u}(t)),$$

quand $\delta \to 0$. Maintenant, on a besoin de montrer que

$$\liminf_{\delta \to 0} (F\varepsilon(u_\delta(t)), \varepsilon(v - u_\delta(t)))_Q \leq (F\varepsilon(\bar{u}(t)), \varepsilon(v - \bar{u}(t)))_Q \quad \forall v \in V. \tag{4.17}$$

En effet, posons $v = \bar{u}(t)$ dans (4.16), on a

$$(F\varepsilon(u_\delta(t)), \varepsilon(\bar{u}(t)) - u_\delta(t)))_Q \geq -j_\delta(\beta_\delta(t), u_\delta(t), \bar{u}(t) - u_\delta(t)) + (f(t), \bar{u}(t) - u_\delta(t))_V, \tag{4.18}$$

et, en utilisant la monotonie de $F$, on a aussi

$$(F\varepsilon(u_\delta(t)), \varepsilon(\bar{u}(t)) - u_\delta(t)))_Q \leq (F\varepsilon(\bar{u}(t)), \varepsilon(\bar{u}(t)) - u_\delta(t)))_Q. \tag{4.19}$$

En passant à la limite dans (4.18) on a

$$\liminf_{\delta \to 0} (F\varepsilon(u_\delta(t)), \varepsilon(\bar{u}(t)) - u_\delta(t)))_Q \geq 0,$$

et, en passant à la limite dans (4.19) on a

$$\limsup_{\delta \to 0} (F\varepsilon(u_\delta(t)), \varepsilon(\bar{u}(t)) - u_\delta(t)))_Q \leq 0,$$

d'où, on récupère

$$\lim_{\delta\to 0}\left(F\varepsilon\left(u_\delta\left(t\right)\right),\varepsilon\left(\bar{u}\left(t\right)\right)-u_\delta\left(t\right)\right)\right)_Q=0 \tag{4.20}$$

Soit alors $v\in V$ et $\theta\in(0,1)$. La monotonie de $F$ appliquée avec $u_\delta\left(t\right)$ et $w=\left(1-\theta\right)\bar{u}\left(t\right)+\theta v$ implique l'inégalité

$$\begin{aligned}&\left(F\varepsilon\left(u_\delta\left(t\right)\right),\varepsilon\left(\bar{u}\left(t\right)\right)-u_\delta\left(t\right)\right)\right)_Q+\theta\left(F\varepsilon\left(u_\delta\left(t\right)\right),\varepsilon\left(v-\bar{u}\left(t\right)\right)\right)_Q\\&\leq\left(F\varepsilon\left(w\right),\varepsilon\left(\bar{u}\left(t\right)\right)-u_\delta\left(t\right)\right)\right)_Q+\theta\left(F\varepsilon\left(w\right),\varepsilon\left(v\right)-\bar{u}\left(t\right)\right)\right)_Q\end{aligned} \tag{4.21}$$

En passant alors à la limite quand $\delta\to 0$ dans (4.21) et en simplifiant par $\theta$, on obtient

$$\liminf_{\delta\to 0}\left(F\varepsilon\left(u_\delta\left(t\right)\right),\varepsilon\left(v-\bar{u}\left(t\right)\right)\right)_Q\leq\left(F\varepsilon\left(w\right),\varepsilon\left(v\right)-\bar{u}\left(t\right)\right)\right)_Q.$$

De plus, puisque

$$\begin{aligned}\left(F\varepsilon\left(u_\delta\left(t\right)\right),\varepsilon\left(v-u_\delta\left(t\right)\right)\right)_Q&=\left(F\varepsilon\left(u_\delta\left(t\right)\right),\varepsilon\left(\bar{u}\left(t\right)\right)-u_\delta\left(t\right)\right)\right)_Q\\&\quad+\left(F\varepsilon\left(u_\delta\left(t\right)\right),\varepsilon\left(v-\bar{u}\left(t\right)\right)\right)_Q,\end{aligned}$$

on déduit alors de (4.20) et (4.21) que

$$\begin{aligned}\liminf_{\delta\to 0}\left(F\varepsilon\left(u_\delta\left(t\right)\right),\varepsilon\left(v-u_\delta\left(t\right)\right)\right)_Q&\leq\left(F\varepsilon\left(w\right),\varepsilon\left(v\right)-\bar{u}\left(t\right)\right)\right)_Q.\\&=\left(F\varepsilon\left(\left(1-\theta\right)\bar{u}\left(t\right)+\theta v\right),\varepsilon\left(v\right)-\bar{u}\left(t\right)\right)\right)\end{aligned} \tag{4.22}$$

En passant à la limite quand $\theta\to 0$ dans (4.22), on récupère l'inégalité (4.17).
Alors, en passant à la limite dans (4.16) quand $\delta\to 0$, on obtient

$$\begin{aligned}&\left(F\varepsilon(\bar{u}\left(t\right)),\varepsilon\left(v-\bar{u}\left(t\right)\right)\right)_Q+j\left(\beta\left(t\right),\bar{u}\left(t\right),v-\bar{u}\left(t\right)\right)\\&\geq\left(f\left(t\right),v-\bar{u}\left(t\right)\right)_V\quad\forall v\in K.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Maintenant, prenons $v=u\left(t\right)$ dans (4.23) et $v=\bar{u}\left(t\right)$ dans (2.1.19) et additionnons les inégalités obtenues, et en prenant en considération (2.1.14) $(b)$, on obtient:

$$m\left\|\bar{u}\left(t\right)-u\left(t\right)\right\|_V^2\leq j\left(\beta\left(t\right),\bar{u}\left(t\right),u\left(t\right)-\bar{u}\left(t\right)\right)+j\left(\beta\left(t\right),u\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)-u\left(t\right)\right)$$

De plus en utilisant (2.2.6), on aura:

$$m\left\|\bar{u}\left(t\right)-u\left(t\right)\right\|_V^2\leq 0$$

et alors on aboutit à l'égalité

$$\bar{u}\left(t\right)=u\left(t\right). \tag{4.24}$$

Maintenant on a tous les ingrédients pour démontrer le théoreme 4.6. En effet, de (4.24), on déduit immédiatement (4.10). Pour montrer (4.8), il suffit de remarquer qu'on a:

$$m\left\|u_\delta\left(t\right)-u\left(t\right)\right\|_V^2\leq\left(F\varepsilon(u_\delta\left(t\right)),\varepsilon\left(\left(u_\delta\left(t\right)\right)-u\left(t\right)\right)\right)_Q-\left(F\varepsilon(u\left(t\right)),\varepsilon\left(\left(u_\delta\left(t\right)\right)-u\left(t\right)\right)\right)_Q. \tag{4.25}$$

On utilise alors (4.10) et (4.20) pour passer à la limite dans (4.25) et déduire (4.8).■

**Remarque.** En notant $\sigma_\delta\left(t\right)=\sigma\ \left(u_\delta\left(t\right)\right)$, on a

$$\left\|\sigma_\delta\left(t\right)-\sigma\left(t\right)\right\|_Q=\left\|F\varepsilon(u_\delta\left(t\right))-F\varepsilon(u\left(t\right))\right\|_Q\leq M\left\|u_\delta\left(t\right))-u\left(t\right)\right\|_V.$$

En tenant compte de (4.8), cette inégalité montre que pour chaque $t\in[0,T]$, $\sigma_\delta\left(t\right)$ converge fortement dans $Q$ vers $\sigma\left(t\right)$.

# Conclusion et perspective

Dans ce mémoire on a fait l'étude fonctionnelle et numérique d'un problème de contact sans frottement entre un corps élastique et une fondation déformable . Le contact est modélisé par les conditions de Signorini et la compliance normale avec adhésion.Puis, on a étudié l'approximaion du problème continu par la méthode de pénalisation. Ce type de contact est apparu pour la première fois en 2008 dans [14].

Nous envisageons d'exploiter ce type de contact pour d'autres problèmes de contact élastique, viscoélastique ou viscoplastique.

# Bibliographie


[1] Z. Belhachmi and F. Ben Belgacem, *Quadratic Finite Element Approximation of The Signorini Problem*, Math. Comput. 72(241), 83-104(2003).

[2] F. Benbelgacem and Y. Renard, *Hybrid Finite Element Methods for The Signorini Problem*, Mathematics of Computation. 72(243), 1117-1145(2003).

[3] F. Benbelgacem, *Numerical simulation of some variational inequalities arisen from unilateral contact problems by the finite element mehods*, SIAM, J. Numer. Anal., Vol. 37, No. 4, 1198-1216, 2000.

[4] H. Brezis, *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité,* Annales Inst. Fourier, 18 (1968), 115-175.

[5] P.G. Ciarlet, *The finite element methods for elliptic problems*, North Holland, 1978.

[6] O. Chau, J. R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion*, *Journal of Computational and Applied Mathematics 159 (2003), 431-465.*

[7] O. Chau, M. Shillor and M. Sofonea, *Dynamic frictionless contact with adhesion*, *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) 55 (2004), 32-47.*

[8] G. Duvaut, J-L Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.

[9] J. R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, *Analysis and numerical simulations of a dynamic contact problem with adhesion*, Math. Comput. Modelling 37 (2003) 1317-1333.

[10] M. Frémond, Adhérence des solides, *J. Mécanique Théorique et Appliquée, 6,* 383-407 (1987).

[11] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support*, C. R. Acad. Sci. Paris, 295, série II, 913-916 (1982).

[12] Frémond, *"Non smooth Thermomechanics"*, Springer, Berlin 2002.

[13] G. Glowinski, J.L. Lions, and R. Tremolières, *Analyse numérique des inéquations variationnelles*, Tomes 1, 2, Dunod, Paris, 1976.

[14] J. Jarusěk and M. Sofonea, *On the solvability of dynamic elastic-visco-plastic contact problems*, Zeitschrift fur Angewandte Mathematik and Mechanik, ( ZAMM ), Vol.88, No.1, pp. 3-22, 2008.

[15] J. Jarusěk and M. Sofonea, *On the of dynamic elastic-visco-plastic contact problems with adhesion*, Annals of AOSR, Series on Mathematics and its applications 1, 2009, 191-214.

[16] N. Kikuchi and T. J. Oden, *Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods,* SIAM, Philadelphia, 1988.

[17] S.A. Nassar, T. Andrews, S. Kruk, and M. Shillor, *Modelling and Simulations of a bonded rod,* Math. Comput. Modelling, 42(2005), 553-572.

[18] J. Rojek and J. J. Telega, *Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopeadic biomechanics.* I: General developements, *J. Theor. Appl. Mech. 39* (2001), 655-677.

[19] M. Shillor, M. Sofonea, and J. J. Telega, *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact,* Lecture Notes Physics, vol.655, Springer, Berlin, 2004.

[20] M. Sofonea, W. Han, and M. Shillor, *Analysis and Approximation*

*of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics 276, Chapman & Hall / CRC Press, Boca Raton, Florida, 2006.

[21] M. Sofonea and T.V. Hoarau -Mantel, *Elastic frictionless contact problems with adhesion*, Adv. Math. Sci. Appl., 15(2005), No.1, 49-68.

[22] M. Sofonea, A. Matei, *An elastic contact problem with adhesion and normal compliance*, Journal of Applied Analysis, Vol.12, No.1 (2006), pp. 19-36.

[23] P. Suquet, *Plasticité et homogèneisation , Thèse de Doctorat d'Etat,* Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1982.

[24] A. Touzaline, *Frictionless contact problem with adhesion for nonlinear elastic materials,* Electronic Journal of Differential Equations, (EJDE), No. 174, pp. 1-13, 2007.