N° 02/2015-M/MT

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTE DE MATHEMATIQUES

جامعة هواري بومدين للعلوم والتكنولوجيا

U S T H B

MEMOIRE présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse et approximation des équations aux dérivées partielles

Par : ACHOUR Khaled

THEME

EXISTENCE LOCALE ET UNICITE POUR UNE EQUATION D 'ONDE SEMI-LINEAIRE ACCRETIVE

Soutenu publiquement, le 08 /11/2015 devant le jury composé de:

M.	R. BEBBOUCHI	Professeur	à L.U.S.T.H.B	Président.
M.	A. KESSAB	Professeur	à L.U.S.T.H.B	Directeur de Mémoire.
M.	A. TOUZALINE	Professeur	à L.U.S.T.H.B	Examinateur.
M.	A. KHEMMOUDJ	Maitre de conférences	à L.U.S.T.H.B	Examinateur.

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement, à **DIEU** *le tout puissant de m'avoir donné courage et patience durant toutes ces années d'études.*

Je suis heureux d'exprimer à Monsieur le Professeur **Amor KESSAB**, *ma gratitude pour la confiance qu'il m'a accordé. Je le remercie d'avoir accepté la direction de ce travail ainsi que pour sa disponibilité et pour ses conseils très éclairés.*

J'adresse mes sincères remerciements et ma grande reconnaissance à Monsieur le professeur **Rachid BEBBOUCHI**, *qui a accepté de participer à mon jury et de présider le Jury de soutenance.*

Mes remerciements et mon grand respect s'adressent également à Monsieur **Ammar KHEMMOUDJ**, *Maître de conférence, qui a eu l'amabilité d'accepter de faire partie de mon jury et d'avoir examiné mon travail.*

Je tiens à remercier, Monsieur le professeur **Arezki TOUZALINE** *, pour m'avoir honoré par sa participation au jury et pour avoir accepté d'examiner ce travail .*

Je souhaite également remercier tous les enseignants de la faculté de Mathématiques à l'USTHB ayant assurés mes années d'études.

Aussi, je remercie tous mes collègues de la faculté de Mathématiques à l'USTHB pour le soutien moral qu'ils m'ont apporté.

Enfin, je ne saurais jamais suffisant remercier ***mon père*** *et* ***ma mère, mes frères*** *et* ***mes soeurs****, que je porte toujours avec moi dans ma pensée. Sans leurs confiances immenses en moi, sans leurs aides et leurs amours, je n'aurais pas pu aller au bout de mes projets.*

ACHOUR khaled

Dédicaces

A ma chère mère,
la personne qui a beaucoup sacrifié pour moi sans elle je n'aurais eu la volonté d'atteindre ce niveau ;

A qui j'ai appris le sens la persistance et l'ambition. A qui reste toujours la source du don infini. A qui m'a éduqué l'amour du travail et la patience pour obtenir le voeux, à mon cher père que Dieu le tout puissant prolonge son age.

A tous mes frères : Lazhar, Mohammed, Ali, Adnane. A toutes mes soeurs.

A mes collègues et tous mes amis.

. . . je dédie ce modeste travail

Table des matières

0.1 Notations

Notations generales

E'	espace dualde E
$\langle , \rangle$	produit scalaire dans la dualité E', E
$B(x_0, r) = \{x; \|x - x_0\| < r\}$	boule ouverte, centrée en x_0 de rayon r
$B_E = \{x \in E; \|x\| < 1\}$	boule unité
φ^*	fonction conjuguée de φ
$\mathcal{L}(E, F)$	espace des opérateurs linéaires continus de E dans F
$D(A)$	domaine de l'opérateur A
$G(A)$	graphe de l'opérateur A
$N(A)$	noyau de l'opérateur A
$R(A)$	image de l'opérateur A
$\sigma(E, E')$	topologie faible définie sur E
$\sigma(E', E)$	topologie faible $*$ définie sur E'
$\rightharpoonup$	convergence faible
$S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(Z)$	Semi-groupes
$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x}\varphi(x)dx$	transformation de Fourier
j	injection canonique de E dans E''
p'	exposant conjugué de p ,c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
$p.p$	presque partout
$\|A\|$	mesure (de Lebesgue) de l'ensemble A
$Supp\ f$	support de la fonction f
$f * g$	produit de convolution
$\|\ \|$	norme Hilbertienne
$j_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$	résolvante de l'opérateur A
$A_\lambda = Aj_\lambda$	régularisée Yosida de l'opérateur A
$D^\alpha u$	$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1}.\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial_N^{\alpha_N}} u, \quad \|\alpha\| = \sum\limits_{=1}^{N} \alpha_i$
$\frac{\partial u}{\partial \eta}$	dérivée normale extérieure
$\Delta u = \sum\limits_{=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	Laplacien de u

Espaces fonctionnels

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	ouvert
$\partial\Omega = \Gamma$	frontière de Ω
$L^p(\Omega)$	$\left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \int\limits_{\Omega} \lvert f(x)\rvert^p \, dx < \infty \right\}$
$L^\infty(\Omega)$	$\left\{ \begin{array}{c} f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et il existe une constante } C \text{ telle que} \\ \lvert f(x)\rvert \leqslant C \;\; p.p. \text{ sur } \Omega \end{array} \right\}$
$\mathcal{C}_c(\Omega)$	fonctions continues à support compact dans Ω
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	fonctions k fois continûment différentiables sur Ω (k entier $\geqslant 0$)
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	$\bigcap\limits_{k \geqslant 0} \mathcal{C}^k(\Omega)$
$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$	$\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}_c(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$
$W^{1,p}, W_0^{1,p}, W^{m,p}$	
H^1, H_0^1, H^m	les espaces de Sobolev
$\mathcal{D}(\Omega)$	l'espaces de base
$\mathcal{D}'(\Omega)$	l'espace des distributions
$\mathcal{S}(\Omega)$	la classe de Schwartz
$\mathcal{S}'(\Omega)$	les distributions tempérées
$\dot{B}^\rho_{r,s}$	$\left\{ u; \left\lVert u; \dot{B}^\rho_{r,s} \right\rVert = \left\lVert 2^{\rho_j} \varphi_j * u; l_j^s(L_x^r) \right\rVert < \infty \right\}$ les espases de Besov
$\dot{F}^\rho_{r,s}$	$\left\{ u; \left\lVert u; \dot{F}^\rho_{r,s} \right\rVert = \left\lVert 2^{\rho_j} \varphi_j * u; L_x^r(l_j^s) \right\rVert < \infty \right\}$ les espases de Triebel-Lizorkin

0.2 Introduction

Ce travail, comprend quelques problèmes aux limites pour des équations aux dérivées partielles semi-linéaires du deuxième ordre et un problème dynamique de la diffusion.

La première catégorie des problèmes aux limites, modélisent les petites vibrations, par exemple, d'une corde, d'une membrane élastique et de manière générale la propagation d'une onde (acoustique, électromagnétique, etc) dans un milieu élastique homogène $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ces phénomènes sont modélisés mathématiquement par l'équation des ondes linéaires ou non-linéaires suivant le cas, avec des conditions aux limites et initiales. En pratique, la partie non-linéaire définit les changements des perturbations du phénomène.

Le dernier problème, est celui de la diffusion et est du type parabolique. Ce genre de problèmes interviennent dans plusieurs applications, comme la théorie de la chaleur, la diffusion des gaz, etc.

Dans le premier chapitre, on a introduit un rappel sur l'analyse fonctionnelle, dans le deuxième, le troisième et le quatrième chapitres, on a considéré d'abord, le modèle mathématique

général des ondes perturbées, composée d'une équation différentielle semi-linéaire du second ordre et de type hyperbolique, dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ borné et de frontière Γ régulière avec :

- une condition aux limites de Dirichlet $u = 0$ sur Γ,

- des conditions initiales : déplacement initial $u_0(x)$ et la vitesse initiale $u_1(x)$.

On commence dans le deuxième chapitre par l'étude de l'existence locale et de l'unicité des solutions pour une équation d'onde semi- linéaire accrétive $u_{tt} - \Delta u = u_t \left|u_t\right|^{p-1}$,pour $p > 1$. $x \in \mathbb{R}^n; t > 0$.

On utilise pour cela essentiellement le théorème de Hille-Yosida.

Dans le troisième et le quatrième chapitres , on introduit un exemple et un contre - exemple d'équation hyperbolique non linéaire $u'' - \Delta u + \left|u'\right|^{\rho} u' = f$, dans Q, $\rho > 0$. On démontre alors l'existence et l'unicité des solutions par la méthode (de Faedo-Galerkin).

Chapitre 1

Rappels de quelques résultats fondamentaux

Partie I

Préliminaires

1.1 Définition et propriétés élémentaires de la topologie faible $\sigma(E,E')$

Soit E un espace de Banach et soit $f \in E'$. On désigne par $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) =< f, x >$. Lorsque f décrit E', on obtient une famille $(\varphi_f)_{f\in E'}$ d'applications de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1. La topologie faible $\sigma(E,E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$.

Proposition 1.1.1 [(1)] *La topologie faible $\sigma(E,E')$ est séparée.*

Proposition 1.1.2 *Soit $x_0 \in E$; on obtient une base de voisinages de x_0 pour la topologie $\sigma(E,E')$ en considérant tous les ensembles de la forme:*

$$V = \{x \in E;\ \ |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon \ \ \forall i \in I\}$$

où I est fini, $f_i \in E'$ et $\varepsilon > 0$.

DEMONSTRATION. - Il est clair que $V = \underset{i\in I}{\cap}\varphi_{f_i}^{-1}(]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[)$ avec $a_i = \langle f_i, x_0\rangle$ est un ouvert pour la topologie $\sigma(E,E')$ et contient x_0. Inversement soit U un voisinage de x_0 pour $\sigma(E,E')$. On sait *([1, p.34])* qu'il existe un voisinage W de x_0, $W \subset U$ de la forme:

$W = \underset{i\in I}{\cap}\varphi_{f_i}^{-1}(w_i)$, I fini, et w_i voisinage (dans $\mathbb{R}$) de $\langle f_i, x_0\rangle = a_i$. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[\subset w_i$ pour chaque $i \in I$. Par suite $x_0 \in V \subset W \subset U$.

Proposition 1.1.3 [(2)]— *Soit (x_n) une suite de E. On a:*

(i) $[x_n \rightharpoonup x \textit{ pour } \sigma(E,E')] \Leftrightarrow [\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle\ \forall f \in E']$

(ii) *Si $x_n \to x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E,E')$*

(iii) *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E,E')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$.*

(iv) *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E,E')$ et si $f_n \to f$ fortement dans E' (i.e. $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$), alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.*

(1)**preuve .** (voir [1,p.35])
(2)**preuve .** (voir [1,p.36])

REMARQUE 1.— Lorsque E est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie usuelle coïncident. En particulier une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.

REMARQUE 2.

— Lorsque E est de dimension infinie la topologie faible $\sigma(E, E')$ n'est pas métrisable .

— Lorsque E est de dimension infinie il existe en géneral des suites qui convergent faiblement mais qui ne convergent pas fortement.

Définition 2. — Une fonction $\varphi : E \to]-\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inferieurement (s.c.i.) si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $[\varphi \leqslant \lambda] = \{x \in E; \varphi(x) \leqslant \lambda\}$ est fermé

Définition 3. — Une fonction $\varphi : E \to]-\infty, +\infty]$ est dite convexe si $\varphi(tx+(1-t)y) \leqslant t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \quad \forall x, y \in E, \ \forall t \in]0, 1[$.

Proposition 1.1.4 — *les convexes fortement fermés sont faiblement fermés.*

DEMONSTRATION. — Si $C \subset E$ est convexe fermé, soient $U = E \backslash C$ et $x_0 \in U$. D'après *le théorème de Hahn-Banach* il existe $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle f; x_0 \rangle < \alpha < \langle f; y \rangle$$

pour tout $y \in C$. Alors $\{x \in E; \langle f, x \rangle < \alpha\}$ est un ouvert faible inclus dans$U$ et contenant x_0. Ceci montre que U est faiblement ouvert, et donc que C est faiblemen fermé.

- **Corollaire .1.1.1** — Soit $\varphi : E \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe, s.c.i. (pour la topologie forte). Alors, φ est s.c.i. pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. En particulier si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$, alors

$$\varphi(x) \leqslant \liminf \varphi(x_n).$$

REMARQUE 3 . — On retrouve en particulier que si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$ alors $\|x\| \leqslant \lim \inf \|x_n\|$. En effet la fonction $\varphi(x) = \|x\|$ est convexe et continue pour la topologie forte, donc a fortiori φ est s.c.i. pour la topologie forte — et par consequent φ est s.c.i. pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Définition 4. — Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E'' *(voir § III.4 [1])*. On dit que E est reflexif si $J(E) = E''$.

Lorsque E est reflexif on identifie implicitement E et E'' (a l'aide.de l'isomorphisme J).

* La topologie faible est intéressante lorsqu'on connaît bien E'. C'est le cas par exemple pour $L^p(\Omega)$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue et $p \in [1; +\infty[$, dont le dual topologique s'identie avec $L^{p'}$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (voir le tableau [(1)]) via le théorème de représentation de Riesz *([1, p. 61])* : pour tout $f \in (L^p(\Omega))'$ il existe un unique $v \in L^{p'}(\Omega)$ tel que, quel que soit $u \in L^p(\Omega)$,

$$\langle f, u \rangle = \int_\Omega vu. \tag{1.1.1}$$

Le théorème qui suit montre qu'elle est plus intéressante si E est réflexif, c'est à dire isomorphe à son bi-dual E'' (par l'injection canonique $x \mapsto Jx^{(2)} : f \longmapsto \langle f, x \rangle$).

Théorème 1.1. *(Kakutani).* La boule fermée unité est faiblement compacte si et seulement si l'espace est réflexif.

DEMONSTRATION. — Supposons d'abord que E est reflexif. Alors $J(B_E) = B_{E''}$ .D'autre part *(theorême III.15[1])* $B_{E''}$ est compact pour la topologie $\sigma(E, E'')$. Il suffit donc de verifier que J^{-1} est continu de E'' muni de $\sigma(E'', E')$ a valeurs dans E muni de $\sigma(E, E')$. Il reste à prouver *(cf. proposition III.2 [1])* que pour tout $f \in E'$ fixé l'application $\xi \mapsto \langle f, J^{-1}\xi \rangle$ est continue sur E'' muni de $\sigma(E'', E')$. Or $\langle f, J^{-1}\xi \rangle = \langle \xi, f \rangle$ et l'application $\xi \mapsto \langle \xi, f \rangle$ est bien continue sur E'' muni de $\sigma(E'', E')$.

1.2 la topologie faible $*\ \sigma(E', E)$

Etant donné un espace de Banach E et son dual topologique E', on peut bien entendu définir la topologie faible sur E'. On va en fait définir une topologie encore moins fine (strictement si E n'est pas réflexif).

[(1)] **TAB. Espaces $L^p(\Omega)$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue**

espace	réflexif	séparable	espace dual
L^1	*non*	*oui*	L^∞
$L^p, 1 < p < \infty$	*oui*	*oui*	$L^{p'}, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
L^∞	*non*	*non*	$\supsetneq L^1$

[(2)] Surtout ne pas confondre avec l'application de dualité, $F : E \to E'$, introduite à la remarque I.2 [1], qui est en général non linéaire (sauf cas Hilbertien).

Définition 5. — La topologie faible $*$ désignée aussi par $\sigma(E', E)$ est la topologie la moins fine sur E' rendant continues toutes les applications $\varphi_x : E' \to \mathbb{R} : f \mapsto \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle$ Pour chaque $x \in E$.

Comme $E \subset E''$, il est clair que la topologie $\sigma(E', E)$ est moins fine que la topologie $\sigma(E', E'')$. Autrement dit la topologie $\sigma(E', E)$ possède moins d'ouverts (resp. fermés) que la topologie $\sigma(E', E'')$ [qui à son tour possède moins d'ouverts (resp. fermés) que la topologie forte].

Proposition 1.2.1 — *La topologie faible $*$ $\sigma(E', E)$ est separée. (Ceci résulte quasiment directement des définitions) .*

DEMONSTRATION. — Si f_1 et f_2 sont deux éléments distincts de E', il existe $x \in E$ tel que $\langle f_1, x\rangle < \langle f_2, x\rangle$. En choisissant un nombre réel $\alpha \in]\langle f_1, x\rangle\ , \langle f_2, x\rangle[$, on peut prendre $O_1 = \{f \in E'; \langle f, x\rangle < \alpha\}$ et $O_2 = \{f \in E'; \langle f, x\rangle > \alpha\}$ comme ouverts faibles $*$ séparant f_1 et f_2.

Proposition 1.2.2 $\forall f_0 \in E'$, *une base de voisinages faibles $*$ de f_0 est formée par les ouverts faibles $*$ de la forme*

$$\{f \in E'; |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon \quad \forall i \in I\},$$

où $\varepsilon > 0$, I est fini et $x_i \in E$.

N otation. — Etant donnée une suite (f_n) de E' on désigne par $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ la convergence de f_n vers f pour la topologie faible $*$ $\sigma(E', E)$. Afin d'éviter les confusions on précisera souvent

«$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $\sigma(E', E)$ », «$f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E', E'')$ » et «$f_n \to f$ fortement ».

Proposition 1.2.3 [(1)]— *Soit (f_n) une suite de E'. Ona*

(i) $[f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E', E)] \Leftrightarrow [\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle\ \forall x \in E]$

(ii) *Si $f_n \to f$ fortement, alors $f_n \rightharpoonup f$ faiblement pour $\sigma(E', E'')$.*

Si $f_n \rightharpoonup f$ faiblement pour $\sigma(E', E'')$ alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $\sigma(E', E)$.

(1) la même démonstration de la proposition 1.1.3

(iii) *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E', E)$*, alors* $\|f_n\|$ *est bornée et* $\|f\| \leqslant \liminf \|f_n\|$.

(iv) *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E', E)$ *et si* $x_n \to x$ *fortement dans E (i.e.* $\|x_n - x\|_E \to 0$*), alors* $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

(v) Si f_n bornée dans E', alors il existe une sous-suite extraite $\{f_{n_k}\}$ qui converge pour la topologie $\sigma(E', E)$. C'est à dire : $\langle f_{n_k}, x \rangle \to \langle f, x \rangle$, $\forall x \in E$.

REMARQUE 4. — On verra dans la suite *(théorème VI.5 [1])* que la boule unité fermée d'un espace normé de dimension infinie n'est jamais compacte pour la topologie forte.

1.3 Métrisabilité et séparabilité

La notion de compacité définie par la propriété de *Borel-Lebesgue (définition [3 ,p.1])* est équivalente a la propriété de *Bolzano-Weierstrass* (selon laquelle toute suite bornée admet une sous-suite convergente) seulement dans les espaces métriques. Or l'espace E' muni de la topologie faible $*$ n'est pas métrisable si E est de dimension infinie. Cependant, la boule fermée unité de E' est métrisable si E est séparable (c'est- à-dire admet une famille dénombrable dense): il suffit *(voir [1, p. 48-49])* de définir la distance d par:

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \left| \langle f - g, x_n \rangle \right|.$$

où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille dénombrable dense dans la boule fermée unité de E.

- **Corollaire 1.3.1.** — Si E est séparable, toute suite bornée dans E' admet une sous-suite faible $*$ convergente.

Ceci s'applique par exemple à $E = L^1$: toute suite bornée dans L^∞ admet une sous-suite faible $*$ convergente.

- **Corollaire 1.3.2.** — Si E est réflexif, toute suite bornée dans E' admet une sous-suite faiblement convergente.

Partie II

Les espaces fonctionnels

1.4 Définition et propriétés élémentaires des espaces L^p.

Définition 6. — Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p < \infty$ et Ω un ensemble au sens de lebesgue de $\mathbb{R}^n$; on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

on note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right]^{1/p}. \tag{1.4.1}$$

Définition 7. — Si $p = \infty$, on note $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur Ω ; on pose:

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et il existe une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leqslant C \ \ p.p. \text{ sur } \Omega \}.$$

on note

$$\|f\|_\infty = \inf \{ C > 0, |f(x)| \leqslant C \ \ p.p. \text{ sur } \Omega \} = \sup_\Omega ess\, |f|. \tag{1.4.2}$$

REMARQUE 5.[1] — Si $f \in L^\infty$ on a

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty} \ p.p. \text{ sur } \Omega.$$

Notation. — Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$; on désigne par p' l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Théorème 1.4.1. *(Inégalité de Hölder).* — Soient $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Alors $f.g \in L^1$ et

[1] **preuve .** (voir [1,p.56])

$$\int |fg| \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} . \tag{1.4.3}$$

DEMONSTRATION. — La conclusion est évidente si $p = 1$ et si $p = \infty$. Supposons donc que $1 < p < \infty$. Rappelons *l'inégalité de Young*[1].

$$ab \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'} \qquad \forall a \geqslant 0, \quad \forall b \geqslant 0. \tag{1.4.4}$$

la demonstration de l'inégalité est évidente : la fonction log étant concave sur $]0, +\infty[$ on a

$$\log(\tfrac{1}{p} a^p + \tfrac{1}{p'} b^{p'}) \geqslant \tfrac{1}{p} \log a^p + \tfrac{1}{p'} \log b^{p'} = \log ab.$$

Donc

$$|f(x)| \, |g(x)| \leqslant \tfrac{1}{p} |f(x)|^p + \tfrac{1}{p'} |g(x)|^{p'} \qquad p.p. x \in \Omega.$$

Il en résulte que $fg \in L^1$ et que

$$\int |fg| \leqslant \frac{1}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{p'} \|g\|_{L^{p'}}^{p'} \tag{1.4.5}$$

Remplaçant f par λf $(\lambda > 0)$ il vient

$$\int |fg| \leqslant \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda p'} \|g\|_{L^{p'}}^{p'} . \tag{1.4.6}$$

On choisit $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1} + \|g\|_{L^{p'}}^{p'/p}$ (de manière à minimiser le membre de droite dans *(1.4.4)*). On obtient alors *(1.4.1)*.

- **Corollaire 1.4.1.** *(Inégalité de Hölder généralisée).* — soient $f_1, f_2, .., f_k$ des fonctions telles que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leqslant i \leqslant k$ avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + .. + \frac{1}{p_k} \leqslant 1$.

[1] Que l'on utilisera aussi parfois sous la forme $ab \leqslant \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^{p'}$ avec $C_\varepsilon = \varepsilon^{-\frac{1}{p-1}}$.

Alors le produit $f = f_1 f_2 ... f_k$ appartient à $L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_p \leqslant \|f_1\|_{p_1} ... \|f_k\|_{p_k} . \tag{1.4.7}$$

En particulier si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, alors $f \in L^r(\Omega)$ pour tout $p \leqslant r \leqslant q$ et l'on a I'inégalité d'interpolation

$$\|f\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|f\|_{L^q}^{1-\alpha} \text{ } où \text{ } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1); \tag{1.4.8}$$

Théorème 1.4.2.(1) L^p est un espace vectoriel et $\|.\|_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Théorème 14.3.(1) *(Riesz-Fischer).* — L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Théorème 14.4. *(Premiere inegalite de Clarkson).* — Soit $2 \leqslant p \leqslant \infty$; on a

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leqslant \frac{1}{2}(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p) \quad \forall f, g \in L^p. \tag{1.4.9}$$

DEMONSTRATION. — Bien entendu, il suffit de montrer que

$$\left|\tfrac{a+b}{2}\right|^p + \left|\tfrac{a-b}{2}\right|^p \leqslant \tfrac{1}{2}(|a|^p + |b|^p) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

on a

$$\alpha^p + \beta^p \leqslant (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2} \qquad \forall \alpha, \beta \geqslant 0$$

(se ramener au cas où $\beta = 1$ et noter que la fonction $(x^2+1)^{p/2} - x^p - 1$ est croissante sur $[0, \infty[$). prenant $\alpha = \left|\frac{a+b}{2}\right|$ et $\beta = \left|\frac{a-b}{2}\right|$ il vient

$$\left|\tfrac{a+b}{2}\right|^p + \left|\tfrac{a-b}{2}\right|^p \leqslant (\left|\tfrac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\tfrac{a-b}{2}\right|^2)^{p/2} = (\tfrac{a^2}{2} + \tfrac{b^2}{2})^{p/2} \leqslant \tfrac{1}{2}|a|^p + \tfrac{1}{2}|b|^p .$$

Théorème 1.4.5. *(Théorème de représentation de Riesz).* — Soit $1 < p < \infty$ et soit $\varphi \in (L^p)'$. Alors it existe $u \in L^{p'}$ unique tel que

$$< \varphi, f > = \int uf \quad \forall f \in L^p. \tag{1.4.10}$$

de plus on a

(1)**preuve .** (voir [1,p.57])

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'} . \tag{1.4.11}$$

Théorème 1.4.6 *(Densité).* — L'espace $\mathcal{C}_0(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

lemme de gronwall

soient $\phi \in L^\infty(0,T)$, $\phi(t) \geqslant 0$, $p.p.\ t \in [0,T]$, et $\mu \in L^1(0,T)$, $\mu(t) \geqslant 0$, $p.p.\ t \in [0,T]$.

on suppose

$$\phi(t) \leqslant \int_0^t \mu(s)\phi(s)ds + C,\ p.p.\ t \in [0,T],\ \ (C = constante).$$

Alors

$$\phi(t) \leqslant C \exp(\int_0^t \mu(s)ds), p.p.t \in [0,T]. \tag{1.4.12}$$

- **Convolution et régularisation**

Théorème 1.4.7.[(1)] — Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$.

On pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy. \tag{1.4.13}$$

Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|f * g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p} . \tag{1.4.14}$$

1.5 Notions de base sur les distributions

Rappels et notations

Soient Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ et une application $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ (*ou* $\mathbb{C}^n$) définie par $f(x) = (f_1(x_1, ..., x_N), ..., f_n(x_1, ..., x_N))$.

(1) **preuve .** (voir [1,p.67])

Rappelons que l'application f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur Ω — ce que l'on note $f \in \mathcal{C}^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ — si toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à p des fonctions $f_1, ..., f_n$ sont continues sur Ω. L'espace $\mathcal{C}^p(\Omega, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^p(\Omega, \mathbb{C})$ selon le contexte est noté $\mathcal{C}^p(\Omega)$.

Lemme 2 *(Schwarz)* Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$. Si $\phi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ alors, pour tous $k < l = 1, ..., N$, on a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_l \partial x_k} \ sur\ \Omega.$$

$f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, alors $\partial_k f(x)$ ou $\partial_{x_k} f(x)$ désigne la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$.
pour tout $k = 1, ..., N$, ainsi que

$$\nabla f(x) \text{ ou } \nabla_x f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_N} f(x) \end{pmatrix}.$$

Passons au cas des dérivées partielles d'ordre supérieur.

On nomme "multi-indice" tout élément $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$. A tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ on associe sa longueur $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N$.

Pour chaque multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on note les dérivées partielles itérées d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω comme suit :

$$\partial^\alpha f(x) \text{ ou } \partial_x^\alpha f(x) \text{ désigne } \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_l^{\alpha_1} ... \partial x_N^{\alpha_N}}(x).$$

c'est- à-dire que

$$\partial^\alpha f(x) \text{ ou } \partial_x^\alpha f(x) = \partial_{x_l}^{\alpha_1} ... \partial_{x_N}^{\alpha_N} f(x).$$

Par analogie, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on note $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_N^{\alpha_N}$.

Notons encore, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^N$, $\beta \leqslant \alpha$ si seulement si $\beta_k \leqslant \alpha_k$ pour $k = 1, ..., N$.

On posera alors $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!}$ où $\alpha! = \alpha_1! ... \alpha_N!$.

Avec ces notations, on peut écrire trés simplement

(a) la formule du binôme :

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} y^\beta; \tag{1.5.1}$$

(b) la formule du multinôme :

$$(x_1 + ... + x_N)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha; \tag{1.5.2}$$

(c) la formule de Leibnitz : pour $f, g \in \mathcal{C}^p(\Omega)$ et $|\alpha| \leqslant p$

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta g. \tag{1.5.3}$$

1.5.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact

Définition 8.— Soit une fonction continue ϕ définie sur un espace topologique X et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le support de la fonction ϕ est

$$supp(\phi) = \overline{\{x \in X \ \setminus \phi(x) \neq 0\}} \ .$$

Exemple 1

Considérons la fonction $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $E(x) = e^{1/x}$ si $x < 0$ et $E(x) = 0$ si $x \geqslant 0$.

Il est clair que E est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$; d'autre part, on montre que

$$E^{(n)}(x) = P_n(\tfrac{1}{x})e^{1/x} \text{ pour tout } x < 0,$$

où P_n est la suite de polynômes définis par la relation de récurrence

$P_0(X) = 1$, $P_{n+1}(X) = -X^2(P_n'(X) + P_n(X)); n \geqslant 0.$

On en déduit que $E^{(n)}(x) \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow 0^-$ pour tout $n \geqslant 0$ et donc que $E \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. D'autre part, le support de E est $\mathbb{R}_-$.

A partir de la fonction E, on construit très simplement une fonction F de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et à support dans un segment $[a, b]$, où $a < b$ sont deux réels quelconques : il suffit de poser

$$F(x) = E(a-x)E(x-b) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

c'est- à-dire

$$\begin{aligned} F(x) &= e^{-\frac{b-a}{(b-x)(x-a)}} \quad \text{si } x \in]a,b[, \\ F(x) &= 0 \qquad\qquad \text{si } x \in]-\infty, a] \cup [b, +\infty[. \end{aligned}$$

Il est clair que $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que $supp(F) = [a,b]$.

- **L'espace de base $\mathcal{D}(\Omega)$**

On appelle espace de fonctions d'essai et que l'on note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions φ définies et indéfiniment dérivables et à support compact dans Ω. autrement dit,

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\text{espace des fonctions } \mathcal{C}^\infty \text{ à support compact } \subset \Omega\}.$$

On désigne par $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ l'espace des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

REMARQUE 6.—

$$supp(\varphi\psi) \subset supp\varphi \cap supp\psi, \text{ pour tout } \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Définition 9._(Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$)_ — On dit qu'une suite $\{\varphi_n, n \in N\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge vers une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, s'il existe un compact K contenu dans Ω tel que :

i) $supp(\varphi_n) \subset K, \ \forall n \in N$

ii) $\partial^\alpha(\varphi_n)$ converge uniformément vers $\partial^\alpha\varphi, \ \forall\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

Proposition 1.5.1 [(1)] *$\forall p \geqslant 1$, l'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

1.5.2 Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 10. *(Notion et Caractérisation de distribution)* — Soient $N \geqslant 1$ entier et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Une distribution T sur Ω est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ à valeurs réelles (ou complexes) vérifiant la propriété de continuité suivante :

pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\mathcal{C}_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ avec $supp(\varphi) \subset K$,

[(1)] **Preuve .[6,p.148]**

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C \max_{|\alpha| \leqslant p} \sup_{x \in K} |\partial^{\alpha} \varphi(x)| .$$

Autrement dit

$$T \in \mathcal{D}'(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle \text{ est linéaire de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } \mathbb{R} \\ \bullet\ \text{Si } \varphi_j \longrightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega) \text{ alors } \left\langle T, \varphi_j \right\rangle \to 0 \text{ dans } \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.5.4}$$

On note toujours $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) des distributions sur Ω (à valeurs respectivement réelles ou complexes).

On dira, que deux distributions T_1 et T_2 sur Ω sont égales si elles le sont en tant qu'applications de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

REMARQUE 7.— Toute foncion f de $L^2(\Omega)$ engendre une distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega$ définie par

$$T_f(\varphi) = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx,\ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exemple 1 *(Masse de Dirac)* A tout point $x_0 \in \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^N$, on associe la forme linéaire définie par

$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Evidemment, pour tout compact $K \subset \Omega$ et toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ à support dans K, on a

$$|\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle| \leqslant \sup_{x \in K} |\varphi(x)| .$$

Donc δ_{x_0} est une distribution d'ordre 0 sur Ω.

Exemple 2 A tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, on associe la forme linéaire définie par

$\left\langle \delta_{x_0}^{(m)}, \varphi \right\rangle = (-1)^m \varphi^{(m)}(x_0),\ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

A nouveau, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$ et toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ à support dans K, on a

$$\left| \left\langle \delta_{x_0}^{(m)}, \varphi \right\rangle \right| \leqslant \sup_{x \in K} \left| \varphi^{(m)}(x) \right| . \int_0^{\infty} \tfrac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

et on vérifie que $\delta_{x_0}^{(m)}$ est une distribution d'ordre m sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1.5.2 *(Continuité séquentielle des distributions) Soient Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors, pour toute suite $(\varphi_n)_{n \geqslant 1}$ des fonctions test appartenant à $\mathcal{D}(\Omega)$ et telle que*

$\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ lorsque $n \longrightarrow \infty$,

on a

$$\langle T, \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

Définition 11. *(Distributions positives)* — Soient Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ et T une distribution sur Ω . On dit que T est une distribution positive, ce que l'on note $T \geqslant 0$, si

$\langle T, \varphi \rangle \geqslant 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi \geqslant 0$ sur Ω.

Définition 12. *(Suite convergente de distributions)* — Soient $N \geqslant 1$ entier et Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, ainsi que $(T_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de distributions sur Ω . On dit que

$$T_n \longrightarrow T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty,$$

si, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

Exemple 1 *(Dipôle de moment μ)* Dans le cas $N = 1$ et $\Omega = \mathbb{R}$, on pose

$$T_n = \mu \tfrac{n}{2}(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n}), \ \ n \geqslant 1.$$

Nous avons $\frac{1}{\Delta t}(\delta_{t+\Delta t} - \delta_t) \longrightarrow -\delta_t^{(1)}$

Alors on vérifie sans peine que

$$T_n \longrightarrow -\mu\delta_0^{(1)} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

(pour plus information ,voir [5, p.67]).

Exemple 2 Dans $\mathbb{R}$, on considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ définie par

$$T_n : x \mapsto \frac{1_{[1/n,+\infty[}(|x|)}{x};$$

Alors, on vérifie à nouveau sans aucune difficulté que

$$T_n \longrightarrow vp\ \frac{1}{x} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

REMARQUE 8.— On peut identifier $L^2(\Omega)$ à son dual et comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, on a les inclusions suivantes

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

Définition 13. *(Dérivation des distributions)* — Soient $N \geqslant 1$ entier, Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour tout $j = 1, ..., N$, on définit la distribution $\partial_{x_j} T$ par la formule

$$\left\langle \partial_{x_j} T, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \partial_{x_j} \varphi \right\rangle, \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Evidemment, cette notion de dérivation coïncide avec la notion habituelle pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 1.5.3 *(Dérivation classique et dans $\mathcal{D}'$) — Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$.Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$*

$$\partial_{x_j} T_f = T_{\partial_{x_j} f}\ , \ \ j = 1, ..., N.$$

Exemple 1 *(Dérivée de la fonction de Heaviside)* — Notons H la fonction de Heaviside définie par

$$H(x) = 1_{\mathbb{R}_+}(x), \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$H' = \delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Définition 14. *(Dérivées d'ordre supérieur dans $\mathcal{D}'$)* — Soient un entier $N \geqslant 1$, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour tout multi-indice $\alpha \in N^N$, on pose

$$\langle \partial_x^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial_x^\alpha \varphi \rangle, \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exemple 1 *(Dérivées de la masse de Dirac)* — Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on a

$$\partial_x^m \delta_{x_0} = \delta_{x_0}^{(m)}.$$

où $\delta_{x_0}^{(m)}$ est la distribution d'ordre m définie ci-dessus par la formule

$$\left\langle \delta_{x_0}^{(m)}, \varphi \right\rangle = (-1)^m \langle \delta_{x_0}, \partial_x^m \varphi \rangle = (-1)^m \varphi^{(m)}(x_0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Définition 15. *(Continuité dans $\mathcal{D}'(\Omega)$)* — On dit qu'une forme linéaire $A : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ est continue si pour toute suite de distributions $\{T_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ l'implication suivante est vérifié

$$T_n \text{ converge dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ vers } T \Longrightarrow A(T_n) \text{ converge dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ vers } A(T).$$

Proposition 1.5.4 *(Continuité de la dérivation dans $\mathcal{D}'(\Omega)$)— Soient Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$une suite de distributions sur Ω. Supposons que*

$$T_n \longrightarrow T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

Alors, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}$, la suite des dérivées multiples

$$\partial_x^\alpha T_n \longrightarrow \partial_x^\alpha T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

DEMONSTRATION. — En effet, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\langle \partial_x^\alpha T_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_n, \partial_x^\alpha \varphi \rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial_x^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial_x^\alpha T, \varphi \rangle \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty. \blacksquare$$

1.5.3 La classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Définition 16. *(L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)* — On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées.

Autrement dit, une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \right| < \infty \quad \text{pour tous } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{C}$).

Exemple 1 *(Quelques fonctions de $\mathcal{S}$)* — $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Toutes les fonctions de la forme

$$\varphi(x) = P(x)e^{-a|x|^2}.$$

avec $a > 0$ et P fonction polynôme appartiennent à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

En revanche, aucune fraction rationnelle (autre que la fonction nulle) n'appartient à la classe de Schwartz.

La topologie de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas définie par une norme, mais par une famille dénombrable de normes, définies comme suit : pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$\mathcal{N}_p(\varphi) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant p} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \right|, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Grâce à la famille de normes $\mathcal{N}_p$, on peut définir ce qu'est une suite convergente dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 17. *(Suites convergentes dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)* — Une suite $(\varphi_m)_{m \geqslant 1}$ de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge vers une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si

$$\mathcal{N}_p(\varphi_m - \varphi) \longrightarrow 0 \;\text{ pour tout } p \geqslant 0 \;\text{ lorsque } m \longrightarrow \infty.$$

Proposition 1.5.5 [(1)] *(Densité de l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) — $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est sous-espace de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ partout dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

C'est à dire que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, tout $\varepsilon > 0$ et pour toute fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ il existe une suite $\{\varphi_m,\ m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\lim_{m \to \infty} (\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta (\varphi_m) - x^\alpha \partial^\beta u \right|) = 0.$$

- **Corollaire 1.5.1.** *(Densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$).* — Pour tout $p \in [1, \infty[$, toute fonction de $L^p(\mathbb{R}^n)$ est limite au sens de la norme L^p d'une suite de fonctions appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

DEMONSTRATION. — C'est évident puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et que, d'après *la proposition 1.5.1* , l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leqslant p < \infty$. ■

[(1)] **Preuve:** voir [6, p.7] ■

1.5.4 Les distributions tempérées

Définition 18. *(L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$)* — Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, c'est- à-dire une forme linéaire T sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle qu'il existe un entier $p \geqslant 0$ et $C > 0$ pour lesquels

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C\mathcal{N}_p(\varphi) \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

L'ensemble des distributions tempérées est un C-espace vectoriel, que l'on note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, toute distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ définit par restriction une forme linéaire

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle \, .$$

Cette forme linéaire est évidemment une distribution puisque, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans un compact K de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\mathcal{N}_p(\varphi) \leqslant A_K^p (p+1)^{2n} \max_{|\alpha| \leqslant p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| \text{ avec } A_K = \max_{x \in K}(1+|x|).$$

Par conséquent

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Exemple 1 *(Quelques distributions, tempérées ou non)*

Toute distribution à support compact est tempérée $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Toute fonction appartenant à l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$ définit une distribution tempérée

$$L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ pour tout } p \text{ tel que } 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Toute fonction continue à croissance polynômiale définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.5.1. — *(Caractérisation des distributions de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$)* — Toute distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est de la forme

$$T = \partial_x^\alpha ((1+|x|^2)^m f) \text{ au sens des distributions}$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, où m est un entier naturel, et où f est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 19. *(Convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$)* — On dit qu'une suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de distributions tempérées converge vers $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \text{ lorsque } n \to \infty \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Définition 20. *(Transformation de Fourier sur $\mathcal{S}$)* — A toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on associe sa transformation de Fourier

$\mathcal{F}\varphi$ (ou encore $\widehat{\varphi}$) : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$\xi \mapsto \mathcal{F}\varphi(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x}\varphi(x)dx \tag{1.5.5}$$

pour tout $x.\xi \in \mathbb{R}^n$ par $x.\xi$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ défini par : $x.\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\xi_i$.

L'application linéaire $\mathcal{F}$ est définie pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, puisque, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left|e^{-i\xi.x}\varphi(x)\right| = |\varphi(x)| \, .$$

Théorème 1.5.2. — *(Formule d'inversion de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)* — La transformation de Fourier est un isomorphisme de C-espaces vectoriels de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même. L'inverse de cet isomorphisme est donné par la formule

$$\mathcal{F}^{-1}\psi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\psi(\xi)\frac{d\xi}{(2\pi)^n}, \; x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5.6}$$

Enfin, les isomorphismes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ sont continus sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 21. *(Transformation de Fourier d'une distribution tempérée)* —

On remarquera d'abord que : $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

A toute distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on associe sa transformée de Fourier $\mathcal{F}T$ qui est la distribution tempérée définie par

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle \text{ pour toute fonction } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

On désigne par$\langle f,g\rangle$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, i.e.

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx, \tag{1.5.7}$$

et également le produit de dualité entre $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (espace des distributions sur Ω), et $g \in \mathcal{D}(\Omega)$ (espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω et à support compact dans Ω).

Proposition 1.5.6 *(Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$ et opérations) — Soit une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Alors*

(a) pour tout $k = 1, ..., n$, on a $\mathcal{F}(\partial_{x_k} T) = i\xi_k \mathcal{F}T$;
(b) pour tout $k = 1, ..., n$, on a $\mathcal{F}(x_k T) = i\partial_{\xi_k} \mathcal{F}T$;
(c) pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, en notant $\tau_a : x \mapsto x + a$, on a $\mathcal{F}(T \circ \tau_a) = e^{ia.\xi}\mathcal{F}T$;
(d) pour tout $a \in \mathbb{R}^n$,on a $\mathcal{F}(e^{-ia.x}\mathcal{F}T) = (\mathcal{F}T) \circ \tau_a$;
(e) pour tout $k = 1, ..., n$, on a $\mathcal{F}(\partial^\alpha_{x_k} T) = (i\xi_k)^{|\alpha|}\mathcal{F}T$;
(f) pour $T_1, T_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ alors $\mathcal{F}^{-1}(T_1T_2) = \mathcal{F}^{-1}T_1 * \mathcal{F}^{-1}T_2$.

1.6 Les espaces de Sobolev

Définition 22. *(Espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$)* — Soient Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, un entier $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty]$. L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega); \partial^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ pour } |\alpha| \leqslant k\}.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \|\partial^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_\Omega |\partial^\alpha f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}. \tag{1.6.1}$$

Evidemment $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

On vérifie sans peine que les espaces $W^{k,p}(\Omega)$ munis de la norme ainsi définie sont des espaces de Banach — c'est une conséquence facile du fait que $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_{L^p(\Omega)}$ est complet, du fait qu'une suite de fonctions convergeant dans $L^p(\Omega)$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers la même limite, et enfin de la continuité de la dérivation dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Un cas particulier très important de ces espaces de Sobolev est celui où $p = 2$.On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega).$$

Par rapport aux espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, les espaces $H^k(\Omega)$ possèdent une propriété supplémentaire fort agréable : ce sont des espaces de Hilbert, pour le produit scalaire

$$(f, g)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} (\partial^\alpha f, \partial^\alpha g)_{L^2(\Omega)}. \tag{1.6.2}$$

où on rappelle que

$$(\phi, \psi)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \overline{\phi(x)} \psi(x) dx. \tag{1.6.3}$$

et la norme associée à ce produit scalaire

$$\|f\|_{H^k(\Omega)} = (f, f)^{1/2}_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|\partial^\alpha f\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_\Omega |\partial^\alpha f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}. \tag{1.6.4}$$

Lemme 3 Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; il y a équivalence entre

(1) $f \in H^k(\mathbb{R}^n)$;

(2) pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leqslant k$, on a

$$\xi^\alpha \mathcal{F} f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

D'après *le théorème de Plancherel* et *la Proposition 1.5.8 (a)*

$$(f,g)_{H^k(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{|\alpha|\leqslant k}(\xi^\alpha \mathcal{F}f, \xi^\alpha \mathcal{F}g)_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

de sorte que

$$(f,f)_{H^k(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\xi^{2\alpha}\right)|\mathcal{F}f(\xi)|^2\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^k\,|\mathcal{F}f(\xi)|^2\,d\xi.$$

Définition 23. *(Espaces de $H^s(\mathbb{R}^n)$)* — Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on définit

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n);\ (1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}$$

et on pose

$$(f,g)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s\overline{\mathcal{F}f(\xi)}\mathcal{F}g(\xi)d\xi. \tag{1.6.5}$$

L'espace vectoriel $H^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert pour la forme sesquilinéaire $(\ ,\ )_{H^s(\mathbb{R}^n)}$. Dans toute la suite, on note $\|.\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ la norme hermitienne .

Proposition 1.6.1 [(1)] *(Echelle des espaces $H^s(\mathbb{R}^n)$) — Soient $s,t \in \mathbb{R}$.*

(a) Si $s < t$, alors $H^t(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$ et cette inclusion définit une application linéaire continue, car

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{H^t(\mathbb{R}^n)}, f \in H^t(\mathbb{R}^n);$$

(b) Pour tout $s > 0$, on a

$$H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \subset H^{-s}(\mathbb{R}^n)$$

et ces deux inclusions sont continues ;

(c) pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ est un sous-espace dense de } H^s(\mathbb{R}^n).$$

[(1)] **Preuve:** voir [5, p.186]

(d) l'application linéaire

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto L_f \in H^s(\mathbb{R}^n)';$$

où L_f est la forme linéaire définie par

$$L_f(\phi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\mathcal{F}f(\xi)} \mathcal{F}\phi(\xi) d\xi,$$

est un isomorphisme (anti-linéaire) isométrique entre $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ et le dual topologique[(1)] $H^s(\mathbb{R}^n)'$ de l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Les espaces $H^s(\mathbb{R}^n)$ ont beau avoir sur les espaces $\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$ le grand avantage d'être des espaces de Hilbert, on ne peut pas se passer complétement de ces derniers, et il est donc souhaitable de pouvoir comparer les espaces de Sobolev aux espaces $\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$, qui sont des objets plus familiers.

$\triangleright$ On introduit ensuite :

$H_0^1(\Omega) =$ adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$

$=$ sous-espace de $H^1(\Omega)$ des fonctions "nulles" sur $\Gamma = \partial\Omega$.

Puisque (par définition) $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on peut identifier le dual $H^{-1}(\Omega)$ de $H_0^1(\Omega)$ à un espace de distributions sur Ω :

$$\begin{cases} H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))', \\ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

$$\textit{Généralement } H^{m+1}(\Omega) \hookrightarrow H^m(\Omega) \hookrightarrow H^{m-1}(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow H^0(\Omega).\ m \geqslant 2 \tag{1.6.6}$$

Les injections précédentes sont continues. (de toute façon sont compacts).

1/ Si $m \geqslant m'$, $H^m(\Omega)$ est contenu, avec injection continue, dans $H^{m'}(\Omega)$.

2/ $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire $(.,.)_m$ est un espace de Hilbert .

REMARQUE 9.— On a pour $\varphi \in H_0^2(\Omega)$, $\Delta\varphi \in L^2(\Omega)$ et pour Γ assez régulière

$$\|\varphi(t)\|_{H_0^2(\Omega)} \leqslant C \|\Delta\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)} . \tag{1.6.7}$$

(1) Le dual topologique d'un espace vectoriel normé E est le sous-espace du dual E^* de E, généralement noté E', des formes linéaires continues sur E.

Théorème 1.6.1. — *(Formule de Green)* — Pour tout $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ on a

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma. \tag{1.6.8}$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ est la dérivée normale de u à Γ dirigée viers l'extérieur.

$\gg$ De façon générale, X étant un espace de Banach,

▶ On désigne par $L^p(0,T;X)$, $1 \leqslant p < \infty$.l'espace des classes de fonctions $t \mapsto f(t)$ de $]0,T[\to X$ qui sont mesurables à valeurs dans X et telles que

$$\left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} = \|f\|_{L^p(0,T;X)} < \infty; \tag{1.6.9}$$

si $p = \infty$, on remplace la norme précédente par

$$\sup_{t \in]0,T[} ess \, \|f(t)\|_X = \|f\|_{L^\infty(0,T;X)} < \infty. \tag{1.6.10}$$

L'espace normé $L^p(0,T;X)$ est complet. *(Voir [8])*

▶ On définit $L^q(0,T;L^p(\Omega_t))$ comme étant l'espace des fonctions $w \in L^q(0,T;L^p(\Omega_t))$ telles que $w(x,t) = 0$ *p.p.* dans $\Omega \diagdown \Omega_t$, où $1 \leqslant q < \infty$, muni de la norme

$$\|w\|_{L^q(0,T;L^p(\Omega_t))} = \left(\int_0^T \|w(t,x)\|_{L^p(\Omega_t)}^q \, dt \right)^{1/q}. \tag{1.6.11}$$

Si $q = \infty$

$$\|w\|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega_t))} = \sup_{t \in]0,T[} ess \, \|w(t,x)\|_{L^p(\Omega_t)}. \tag{1.6.12}$$

On définit de la même façon les espaces $L^q(0,T;H_0^1(\Omega_t))$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

REMARQUE 10.— Soit (X,Y)un couple d'espaces de Banach avec $X \hookrightarrow Y$ (injection continue).

Alors, on a:

$$L^p(]a,b[;X) \hookrightarrow L^p(]a,b[;Y), \qquad 1 \leqslant q \leqslant \infty,$$

et

$$\mathcal{D}'(]a,b[;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(]a,b[;Y).$$

REMARQUE 11.— Les espaces $L^2(\Omega_t)$, (resp. $H_0^1(\Omega_t)$) s'identifient à des sous-espaces fermés de $L^2(\Omega)$, (resp. $H_0^1(\Omega)$), pour tout $t \in]0,T[$.

Théorème 1.6.2. — Soit $w : \Omega\times]0,T[\to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, alors

$w(x,t) = 0$ *p.p* dans $\Omega\diagdown\Omega_t$ et pour tout $t \in]0,T[$ si et seulement si $w = 0$ dans $\Omega\times]0,T[\diagdown Q$.

Théorème 1.6.3. — Si v est une fonction de $H_0^1(\Omega_t)$ (resp. $L^2(\Omega_t)$), alors la fonction $\tilde{v}$ prolongement de v par 0 sur $\Omega\diagdown\Omega_t$ appartient à $H_0^1(\Omega)$ (resp. $L^2(\Omega)$).

On désigne par $\mathcal{D}'(0,T;X)$ l'espace de distributions sur $]0,T[$ à valeurs dans X, defini par

$$\mathcal{D}'(0,T;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(]0T[);X).$$

Si $f \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, sa dérivée première au sens des distributions est définie par

$$\left\langle \tfrac{df}{dt}, \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \tfrac{d\varphi}{dt} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0T[).$$

On introduira quelques lemmes qu'on utilisera ultérieurement.

Théorème 1.6.4. *(Inégalité de Sobolev -Poincaré)* — Si $2 \leqslant q \leqslant \frac{2n}{n-2}$, alors

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C(\Omega,q) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.6.13}$$

Lemme 4 — Si $f \in L^p(0,T;X)$ et $\frac{df}{dt} \in L^p(0,T;X)$ (au sens des distributions) ($1 \leqslant p \leqslant \infty$), alors $f \in \mathcal{C}(0,T;X)$.

Lemme 5 — Soit $U =]0T[\times\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, g_\mu, g$ des fonctions de $L^q(0,T;L^q(\Omega))$, $1 < q < \infty$ telles que

$$\|g_\mu\|_{L^q(0,T;L^q(\Omega))} \leqslant C, \ \ \forall \mu \in \mathbb{N}.$$

et

$$g_\mu \to g \ \ p.p \ \ \text{dans } U.$$

Alors $g_\mu \rightharpoonup g$ dans L^q (faiblement).

Théorème 1.6.5. *(Théorème de trace)* — Soient $n \geqslant 2$ et $s > 1/2$. Alors l'application linéaire

$$\gamma : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$$

définie par

$$\gamma(f)(x_1, ..., x_{n-1}) = f(x_1, ..., x_{n-1}, 0)$$

se prolonge en une application linéaire continue

$$\gamma : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

L'application linéaire γ est appelée habituellement "trace sur l'hyperplan d'équation $x_n = 0$".

Comme nous l'avons expliqué ci-dessus, il serait impropre d'appeler $\gamma(f)$ la restriction de f à l'hyperplan d'équation $x_n = 0$. Plus exactement, γ est l'unique application linéaire de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ coïncidant avec la restriction à l'hyperplan d'équation $x_n = 0$ sur la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,qui est un sous-espace dense de $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Partie III

Rappels sur les opérateurs et les semi-groupes

1.7 Opérateurs : définitions et premières propriétés

1.7.1 Opérateurs non-bornés

Soient E et F deux espaces de Banach. Notons $|.|$ la norme dont ils sont munis. Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$.

Définition 24. Un opérateur linéaire A de E dans F est une application linéaire A définie sur un sous-espace vectoriel $D(A)$ de E appelé domaine de A défini par

$D(A) = \{u; Au \in F\}$. Ainsi, $A : D(A) \subset E \to F$.

On dit que A est borné s'il existe $C \geqslant 0$ telle que :

$$\forall u \in D(A), |Au|_F \leqslant C\,|u|_E\,.$$

On dit sinon que A est non borné.

On dit que A est coercif s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$(A(u), u) \geqslant \alpha\,|u|_E^p\,,\ \forall u \in E, 1 < p < \infty, ou\ bien\ \frac{(A(u), u)}{|u|_E} \to +\infty\ si\ \ |u|_E \to +\infty.$$

On dit que A est monotone de E dans F s'il vérifie :

$$\forall u, v \in E : (A(u) - A(v), u - v)_{F,E} \geqslant 0.$$

On dit que A est pseudo monotone si :

a) A est borné,

b) lorsque $u_j \to u$ dans E faible et $\lim\limits_{j\to\infty} \sup(A(u_j), u - v) \leqslant 0$, alors

$$\lim_{j\to\infty} \inf(A(u_j), u - v) \geqslant (A(u), u - v),\ \forall v \in E.$$

Définition 25. Le graphe de A est le sous-espace vectoriel de $E \times F$ noté $G(A)$ défini par :

$$G(A) = \{(x, Ax);\ x \in D(A)\}\,.$$

On appelle noyau de A le sous-espace de E noté $N(A)$ défini par :

$$N(A) = \{x \in D(A);\ Ax = 0\}$$

et image de A le sous-espace de F noté $R(A)$ défini par :

$$R(A) = A(D(A)).$$

Un opérateur est dit fermé si $G(A)$ est fermé dans $E \times F$. De plus, si A est un opérateur fermé, alors $N(A)$ est fermé.

1.7.2 Opérateurs m-accrétifs

Définition 26. On appelle opérateur dissipatif un opérateur A dans E tel que :

$$\forall u \in D(A), \forall \lambda > 0, \left|u - \lambda Au\right|_E \geqslant \left|u\right|_E .$$

- Si, de plus, $R(I - \lambda A) = F$, c'est-à-dire :

$$\forall f \in F, \exists u \in D(A);\ u - \lambda Au = f,$$

l'opérateur est dit dissipatif.

Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire noté $(\cdot,\cdot)$. Notons $\mathcal{L}(H)$ l'espace des applications linéaires continues de H dans H, muni de la norme :

$$\|T\| = \sup\left\{|Tx|\,;\ x \in H, |x| \leqslant 1\right\}.$$

On a en particulier :

Si $A : D(A) \subset H \to H$ est un opérateur linéaire non-borné,

∘ A est monotone si $(-A)$ est dissipatif, c'est-à-dire :

$$\forall v \in D(A),\ (Av, v) \geqslant 0.$$

∘ A est dit maximal monotone si $(-A)$ est m-dissipatif.

- On appelle opérateur m-accrétif un opérateur linéaire non-borné tel que :

1 . $\overline{D(A)} = E$,

2 . l'opérateur $(-A)$ est m-dissipatif.

Dans le cas où E est un Banach réflexif : si pour tout $\lambda > 0, (I + \lambda A)$ est inversible, d'inverse continu, tel que $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant 1$, alors $\overline{D(A)} = E$. (Pour montrer qu'un opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ est m-accrétif dans un espace de Banach réflexif, il nous suffira donc de montrer la deuxième propriété de la définition de m-accrétif).

Définition 27. $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non-borné à domaine dense. Il existe un unique opérateur $A^* : D(A^*) \subset F' \to E'$ appelé adjoint de A qui vérifie :

$$\forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*), (v, Au)_{F' \times F} = (A^* v, u)_{E' \times E}$$

où $D(A^*) = \{v \in F'; \exists C \geqslant 0; |(v, Au)| \leqslant C\, |u|_E\,,\ \forall u \in D(A)\}$.

Définition 28. L'opérateur A est dit symétrique si :

$$\forall u, v \in D(A), (Au, v) = (u, Av).$$

L'opérateur A est dit autoadjoint si $A^* = A$, c'est-à-dire :

1. $D(A^*) = D(A)$,

2. pour tout $u \in D(A), A^* u = Au$.

Propriétés

Proposition 1.7.1 *Soit A un opérateur maximal monotone,$A : D(A) \subset H \to H$. Alors :*

1. $D(A)$ est dense dans$H$;

2. $G(A)$ est fermé dans $H \times H$;

3. pour tout $\lambda > 0, (I + \lambda A)$ est bijectif de $D(A)$ sur H, $(I + \lambda A)^{-1}$ est un opérateur non-borné et $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant 1$.

1.7.3 Exemples d'opérateurs m-accrétifs

Dans cette section, Ω désigne un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ.

L'opérateur des ondes dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

Pour étudier l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \Delta z = f \quad \text{dans} \quad Q = \Omega \times (0, T), \\ \quad z = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma = \Gamma \times (0, T), \quad z(x, 0) = z_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = z_1 \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{p_1}$$

avec $(z_0, z_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(Q)$, nous transformons l'équation en une équation d'évolution du premier ordre. Posons $y = (z, \frac{dz}{dt})$, *l'équation* (p_1) peut être écrite sous la forme

$$\frac{dy}{dt} = Ay + F,\ y(0) = y_0,$$

avec

$$Ay = A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \Delta y_1 \end{pmatrix},\quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix},\quad et\ \ y_0 = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

Posons $Y = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Le domaine de A dans Y est $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$. $(A, D(A))$ est m-dissipatif dans Y.

L'opérateur des ondes dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$

Pour étudier *l'équation* (p_1) quand $(z_0, z_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ et $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, nous posons $\hat{Y} = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$,

$$\hat{A}y = \hat{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \Delta y_1 \end{pmatrix},$$

et $D(\hat{A}) = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Montrer que $(\hat{A}, D(\hat{A}))$ est m-dissipatif dans $\hat{Y}$.

1.7.4 Opérateurs compacts

Définition 29. On appelle opérateur compact de E dans F tout élément $T \in \mathcal{L}(E, F)$, pour lequel l'image de la boule unité fermée de E est une partie relativement compacte de F.

- Si, $R(I - \lambda T) = F$ alors, l'opérateur est dit m-accretif.

1.8 Semi-groupes

Soit Z un espace de Hilbert, on désigne par $\mathcal{L}(Z)$ l'ensemble des applications linéaires continues de Z dans Z.

Définition 31. Un semi-groupe continu (fortement) sur Z est une fonction

$$S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(Z)$$
$$t \longmapsto S(t),$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1) $S(0) = I_Z$.

2) $S(t+s) = S(t) \circ S(s)$ pour tout $s, t \geqslant 0$.

3) $\lim\limits_{t\to 0^+} S(t)z = z$ pour tout $z \in Z$.

On dit que $\{S(t),\ t \geqslant 0\}$ est un semi-groupe de classe $\mathcal{C}^0$, ou un $\mathcal{C}^0$.semi-groupe.

Principe de Duhamel

.

Soit $P(x;t) = u_t - \Delta u$ un opérateur différentiel, $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0, \infty[$. On considère le problème de cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F(x,t) \ \text{ dans } \ \mathbb{R}^n \times [0, \infty[, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

La solution du problème homogène est sous la forme

$S(t)u_0 = G(t) * u_0$,

où $S(t)$ est le semi-groupe de la chaleur défini par la convolution avec la fonction de Green

On a

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial t}[\exp(-t\Delta)u(x,t)] &= -\Delta \exp(-t\Delta)u(x,t) + \exp(-t\Delta)\tfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} \\ &= \exp(-t\Delta)(\tfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u)(x,t) \\ &= \exp(-t\Delta)F(x,t). \end{aligned}$$

En integrant entre 0 et t, on trouve

$$\int_0^t \tfrac{\partial}{\partial \tau}(\exp(-\tau\Delta)u(x,\tau))d\tau = \int_0^t \exp(-\tau\Delta)F(x,\tau))d\tau,$$

c'est-à-dire :

$$\exp(-t\Delta)u(x,t) = u_0(x) + \int_0^t \exp(-\tau\Delta)F(x,\tau))d\tau,$$

d'où

$$u(x,t) = \exp(t\Delta)u_0(x) + \int_0^t \exp((t-\tau)\Delta)F(x,\tau))d\tau.$$

Si $S(t)$ est le semi-groupe de la chaleur $S(t) = e^{t\Delta}$

$$u(x,t) = S(t)u_0(x) + \int_0^t S(t-\tau)F(x,\tau)d\tau,$$

et comme $S(t)u_0 = G(t) * u_0$, il s'ensuit que la solution du problème initial est donnée par

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y)G(x-y,t)dy + \int_0^t (\int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t-\tau)F(y,\tau)dy)d\tau.$$

Partie IV

Le théorème de Hille-Yosida

1.9 Introduction

On s'intéresse à la résolution du problème d'évolution :

$$(P)\begin{cases}\frac{du}{dt}+Au=0, \text{ sur } [0,+\infty[\\ u(0)=u_0\end{cases}$$

où A est un opérateur défini sur un espace E.

Nous allons d'abord étudier le cas où l'espace E est un espace de Hilbert et l'opérateur A un opérateur maximal monotone, puis nous affaiblirons les hypothèses et nous essaierons de mettre en évidence les remèdes nous permettant de conclure.

1.10 Cas d'un espace de Hilbert et d'un opérateur maximal monotone

On se place dans le cas où $E = H$ est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire noté $(\cdot,\cdot)$.

On définit $J_\lambda f$ la solution de l'équation $u + \lambda Au = f$, $\lambda > 0$. Pour tout $f \in H$, l'opérateur $J_\lambda = (Id + \lambda A)^{-1}$ est appelé la résolvante de A;

l'opérateur $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(Id - J_\lambda)$ est appelé la regularisée Yosida de A.

Donc $J_\lambda \in \mathcal{L}(E)$ et $\|J_\lambda\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant 1$.

De plus, les opérateurs A sont (linéaires) bornés, nous pouvons donc utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz pour résoudre le problème de Cauchy approché :

$$(P_\lambda)\begin{cases}\frac{du}{dt}+A_\lambda u=0, \text{ sur } [0,+\infty[\\ u(0)=u_0 \in D(A).\end{cases}$$

En effet :

$$\forall \lambda > 0,\ A_\lambda = \tfrac{1}{\lambda}(I - J_\lambda) \Rightarrow \|A_\lambda\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \tfrac{2}{\lambda}.$$

D'où, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $\lambda > 0$, il existe $u_\lambda \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[; H)$ unique solution du problème (P_λ).

Nous allons montrer que les solutions u_λ de (P_λ) convergent vers une solution de (P).

Avant cela, rappelons quelques résultats techniques sur les opérateurs A_λ .

Lemmes préliminaires

Soit A un opérateur monotone. Alors :

1. $A_\lambda v = A(J_\lambda v), \forall v \in H, \forall \lambda > 0,$
2. $A_\lambda v = J_\lambda A v, \forall v \in D(A), \forall \lambda > 0,$
3. $|A_\lambda v| \leqslant |Av|, \forall v \in D(A), \forall \lambda > 0,$
4. $\lim\limits_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v, \forall v \in H,$
5. $\lim\limits_{\lambda \to 0} A_\lambda v = Av, \forall v \in D(A),$
6. $(A_\lambda v, v) \geqslant 0, \forall v \in H, \forall \lambda > 0,$
7. $|A_\lambda v| \leqslant \frac{1}{\lambda}|v|, \forall v \in H, \forall \lambda > 0.$
8. $\forall \lambda, \mu > 0,\ J_\lambda, J_\mu, A_\lambda, A_\mu$ commutent.

Théorème 1.10.1.[1] *(Hille-Yosida)* — Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H.

Alors pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^1([0,\infty[; H) \cap \mathcal{C}([0,\infty[; D(A))$ unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

De plus, on a :

$$|u(t)| \leqslant u_0 \text{ et } \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leqslant |Au_0| \text{ pour tout } t \geqslant 0.$$

1.11 Cas auto adjoint

Dans le cas où A est un opérateur maximal monotone autoadjoint, on peut affaiblir l'hypothèse $u_0 \in D(A)$.

Théorème 1.11.1. Soit A un opérateur maximal monotone, auto adjoint. Alors pour tout $u_0 \in H$, il existe une unique fonction

$$u \in \mathcal{C}([0,+\infty[; H) \cap \mathcal{C}^1(]0,+\infty[; H) \cap \mathcal{C}(]0,+\infty[; D(A))$$

telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, \text{ sur }]0,+\infty[\\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

[1] **Preuve:** voir [9, p.28] ■

1.12 Cas d'un espace de Banach quelconque

Nous étendons maintenant le théorème de Hille-Yosida dans le cas d'un espace de Banach quelconque. Nous introduisons pour cela la notion de semi-groupe de contraction qui va se reveler être l'outil essentiel de la démonstration. Commençons par donner la définition d'un semi-groupe de contractions comme précédemment.

Définition 32. On appelle semi-groupe de contractions une famille à un paramètre $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ d'opérateurs linéaires continus sur E espace de Banach telle que :

1. $\|S(t)\| = 1$ pour tout $t \geqslant 0$.

2. $S(0) = Id$.

3. $S(t+s) = S(t) \circ S(s)$ pour tous $t, s \geqslant 0$.

4. Pour tout $u_0 \in E, S(t)u_0 \in \mathcal{C}([0, +\infty[)$.

L'opérateur $u_0 \in E \mapsto S(t)u_0 = u(t)$ a un effet régularisant sur la donnée initiale.

REMARQUE 13.— Sur $E = \mathbb{R}^n$, l'opérateur A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $S(t) = e^{tA}$ définit un semi-groupe. L'exponentielle d'une matrice est définie par une série entière donc on peut écrire $S(t)$ comme suit :

$$S(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Théorème 1.12.1. *(Hille-Yosida)* — Soit E un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur linéaire m-accrétif

1. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[; E) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[; D(A))$ telle que :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, \text{ sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.12.1}$$

De plus on a :

$$\text{pour tout } \ t \geqslant 0, \|u(t)\| \leqslant \|u_0\| \ \text{ et } \ \left\|\frac{du}{dt}(t)\right\| = \|Au(t)\| \leqslant \|Au_0\|.$$

2. Si $u(t)$ est la solution de *(1.12.1)* , alors l'application

$$D(A) \xrightarrow{S(t)} D(A)$$
$$u_0 \longmapsto u(t)$$

vérifie :

(i) $S(t)$ est une application linéaire continue de norme inférieure ou égale à 1 pour tout $t \geqslant 0$.

(ii) $S(t)$ se prolonge à E tout entier.

(iii) $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ définit un semi-groupe sur E.

(iv) L'application :

$$[0, +\infty[\to E$$
$$t \mapsto S(t)u_0$$

est continue sur $[0, +\infty[$.

Dans la démonstration du théorème nous serons amenés à considérer à nouveau le problème (P_λ) :

$$(P_\lambda) \begin{cases} \frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0, \text{ sur } [0, +\infty[\\ u_\lambda(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.12.2}$$

u_λ désigne la solution du problème approché et A_λ désigne la régularisée de Yosida de A.

Pour $u_0 \in E$, comme $A_\lambda \in \mathcal{L}(E)$, le problème ci dessus possède une unique solution d'après le théorème de *Cauchy-Lipschitz*. Notons S_λ le semi-groupe associé à u_λ , $u_\lambda(t) = S_\lambda(t)u_0$.

Voici maintenant deux lemmes préliminaires à la démonstration du théorème :

Lemme 6[(1)] — Les opérateurs A_λ et $S_\mu(t)$ commutent.

Lemme 7[(1)] — Soit $u_0 \in E$ et $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur linéaire et m-accrétif. Alors si u_λ est solution du problème approché *(1.12.2)* on a :

1. $\|u_\lambda(t)\| \leqslant \|u_0\|$ et donc $\|S_\lambda(t)\| \leqslant 1, \quad \forall t \geqslant 0$

2. $\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| \leqslant t \|A_\lambda u_0 - A_\mu u_0\|, \quad \forall t \geqslant 0, \ \forall \lambda, \mu \geqslant 0.$

Nous pouvons maintenant enfin passer à la preuve du théorème de Hille-Yosida.

(1) **Preuve:** voir [9, p.36] ■

Démonstration de Hille-Yosida.

***Etape*1 :** On considère le problème approché (P_λ). On a déjà vu que d'après Cauchy-Lipschitz il admettait une et une seule solution u_λ. On considère dans la suite S_λ le semi-groupe associé à cette solution.

***Etape*2 :** Soit $u_0 \in D(A)$, le but de cette partie est de démontrer que u_λ converge uniformément sur $[0,T]$ vers une fonction $u \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,E)$. Ceci est immédiat car *(le lemme 7)* entraîne que la suite (u_λ) est de Cauchy dans E qui est complet, donc $u_\lambda(t) \to u$ dans E uniformément par rapport à $t \in [0,T]$.

***Etape*3 :** Le premier point du *(lemme 7)* entraîne par passage à la limite que $\|u(t)\| \leqslant \|u_0\|$ .De plus l'application :

$$\begin{aligned} D(A) &\to E \\ u_0 &\mapsto S(t)u_0 = u(t) \end{aligned}$$

est linéaire en tant que limite simple des applications $u_0 \to u_\lambda(t)$ qui sont linéaires. De plus $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant 1$, et $D(A)$ est dense dans E puisque A est m-accrétif donc

on peut prolonger ce semi-groupe par densité et continuité à E tout entier, de sorte que $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant 1$.

***Etape*4 :** Soit $u_0 \in E$. Montrons que si $u(t) = S(t)u_0$ alors en fait u est limite uniforme des u_λ par rapport à $t \in [0,T]$, ce qui donnera que $u \in \mathcal{C}([0,T],E)$. On utilise le fait que $D(A)$ est dense dans E donc :

$$\forall u_0 \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists y_0 \in D(A), \|y_0 - u_0\| \leqslant \varepsilon.$$

On cherche donc à majorer $\|S_\lambda(t)u_0 - S(t)u_0\|$

$$\begin{aligned} \|S_\lambda(t)u_0 - S(t)u_0\| &\leqslant \|S_\lambda(t)u_0 - S_\lambda(t)y_0\| + \|S_\lambda(t)y_0 - S(t)y_0\| + \|S(t)y_0 - S(t)u_0\| \\ &\leqslant \|S_\lambda(t)\| \|u_0 - y_0\| + \|S_\lambda(t)y_0 - S(t)y_0\| + \|S(t)\| \|u_0 - y_0\| \\ &\leqslant 1 \times \varepsilon + \varepsilon + 1 \times \varepsilon \end{aligned}$$

On peut rendre petit le terme du milieu car $y_0 \in D(A)$ et d'après *l'étape* 2 on a convergence dans ce cas là de u_λ vers u. Donc finalement :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t \in [0,T], \exists \lambda_0, \forall \lambda < \lambda_0, \|u_\lambda(t) - u(t)\| \leqslant 3\varepsilon$$

On conclut que $u(t) \in \mathcal{C}([0,T];E)$ car c'est une limite uniforme d'une suite de fonctions continues.

***Etape*5 :** On montre maintenant que pour tout $u_0 \in D(A)$ on a $u \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[;E) \cap \mathcal{C}([0,+\infty[;D(A))$. Soit donc $u_0 \in D(A)$. Par définition de u_λ qui est $\mathcal{C}^1$, on a :

$$u_\lambda(t) = u_0 + \int_0^t -A_\lambda u_\lambda(s)ds = u_0 - \int_0^t A_\lambda S_\lambda(s)u_0 ds.$$

D'après *(le lemme 6)* , u_λ et $S_\lambda(t)$ commutent pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $t \geqslant 0$, d'où :

$$u_\lambda(t) = u_0 - \int_0^t S_\lambda(s)A_\lambda u_0 ds.$$

Passons à la limite quand λ tend vers 0, on a $u_\lambda(t) \to u(t)$ dans E uniformément par rapport à $t \in [0,T]$ d'après *l'étape* 2. On a aussi :

$$\int_0^t S_\lambda(s)A_\lambda u_0 ds \to \int_0^t S(s)Au_0 ds.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \|S_\lambda(s)A_\lambda u_0 - S(s)Au_0\| &\leqslant \|S_\lambda(s)(A_\lambda u_0 - Au_0)\| + \|(S_\lambda(s) - S(s))Au_0\| \\ &\leqslant \|A_\lambda u_0 - Au_0\| + \|(S_\lambda(s) - S(s))Au_0\|. \end{aligned}$$

Or $A_\lambda u_0 \to Au_0 \ \ \forall u_0 \in D(A)$ et d'après *la quatrième étape* on a $(S_\lambda(s) - S(s))(Au_0) \to 0$ uniformément car $Au_0 \in E$ donc :

$$\|S_\lambda(s)A_\lambda u_0 - S(s)Au_0\| \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} 0$$

et la convergence est uniforme en $t \in [0,T]$ donc on a convergence des intégrales sans problème. Donc à la limite on obtient :

$$u(t) = u_0 + \int_0^t S(s)Au_0 ds.$$

D'après *la quatrième étape* on a que $S(s)Au_0 \in \mathcal{C}([0,T];E)$ d'où $\int_0^T S(s)Au_0 ds$ est une fonction $\mathcal{C}^1([0,T];E)$. et par conséquent $u \in \mathcal{C}^1([0,T];E)$. De plus :

$$\frac{du}{dt}(t) = S(t)Au_0(t) \qquad \forall t \geqslant 0.$$

Ceci reste vrai si $S(t)A = AS(t)$ sur $D(A)$, on a $\forall\lambda > 0, \forall t \geqslant 0$ que $A_\lambda S_\lambda(t)u_0 = A(J_\lambda S_\lambda(t)u_0)$ et

$$\begin{aligned}\|J_\lambda S_\lambda(t)u_0 - S(t)u_0\| &\leqslant \|J_\lambda(S_\lambda(t)u_0 - S(t)u_0)\| + \|J_\lambda S(t)u_0 - S(t)u_0\| \\ &\leqslant \|S_\lambda(t)u_0 - S(t)u_0\| + \|J_\lambda S(t)u_0 - S(t)u_0\|\end{aligned}$$

car $\|J_\lambda\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant 1$.

– $S_\lambda(t)u_0 \to S(t)u_0$ uniformément sur $[0, T]$

– $J_\lambda S_\lambda(t)u_0 \to S(t)u_0$.

On a alors :

$$(J_\lambda S_\lambda(t)u_0, A(J_\lambda S_\lambda(t)u_0)) \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} (S(t)u_0, S(t)Au_0).$$

Le graphe de A étant fermé, ceci implique que $S(t)u_0 \in D(A)$ pour tout $t \geqslant 0$ et $A_\lambda S_\lambda(t)u_0 \to AS(t)u_0$, par unicité de la limite on a $AS(t)u_0 = S(t)Au_0$ et donc on en déduit que $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[; D(A))$ pour tout $u_0 \in D(A)$, donc :

$$\tfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0 \quad \forall t \geqslant 0.$$

***Etape6* :** On montre enfin que $\{S(t), t \geqslant 0\}$ est un semi-groupe. Soit $u_0 \in E$ et $u_{0,n} \in D(A)$ tels que $u_{0,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_0$, il vient :

$$\begin{aligned}\|S_\lambda(t)u_0 - S(t)u_0\| &\leqslant \|S_\lambda(t)u_0 - S_\lambda(t)u_{0,n}\| + \|S_\lambda(t)u_{0,n} - S(t)u_{0,n}\| + \|S(t)u_{0,n} - S(t)u_0\| \\ &\leqslant 2\,\|u_{0,n} - u_0\| + \|S_\lambda(t)u_{0,n} - S(t)u_{0,n}\| \longrightarrow 0\end{aligned}$$

Donc $S_\lambda(t)u_0 \to S(t)u_0$ uniformément sur $[0, T]$ pour tout $T > 0$ quand $\lambda \to 0$. De plus $S_\lambda(t) \circ S_\lambda(s) = S_\lambda(s) \circ S_\lambda(t)$ pour tous $\lambda, t, s \geqslant 0$, d'où :

$$\begin{aligned}\|S(t)S(s)u_0 - S(t+s)u_0\| &\leqslant \|S(t)S(s)u_0 - S(t)S_\lambda(s)u_0\| + \|S(t)S_\lambda(s)u_0 - S_\lambda(t)S_\lambda(s)u_0\| \\ &\quad + \|S_\lambda(t+s) - S(t+s)u_0\| \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Donc $\{S(t), t \geqslant 0\}$ est un semi-groupe de contractions.

Etape7* : *Unicité : Soit u une solution de *(1.12.1)* et soit $T > 0$. Posons $v(t) = S(T-t)u(t)$, $t \in [0, T]$, alors $v \in \mathcal{C}([0, T]; D(A)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; E)$ et :

$$v'(t) = -AS(T-t)u(t) + S(T-t)u'(t) = S(T-t)(u'(t) - Au(t)) = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Donc $v(T) = v(0)$ c'est-à-dire que $u(T) = S(T)u_0$. ■

1.13 Application du théorème de Hille-Yosida

l'équation de la chaleur

Grâce au théorème de Hille-Yosida on peut maintenant montrer un résultat d'existence et d'unicité pour l'équation de la chaleur (équation parabolique). On note toujours Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $Q = \Omega \times]0, +\infty[$, on considère l'équation :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \ \text{ sur } Q \\ u(0) = u_0 \in D(A). \end{cases} \tag{1.13.1}$$

On a donc une variable de temps et une variable d'espace, pour se ramener à la théorie de Hille-Yosida on considère $u(x,t)$ comme une fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans un espace de Hilbert H qui dépend seulement de x. Ainsi $u(t)$ désigne un élément de H. L'équation de la chaleur modélise la distribution de la température u dans le domaine Ω. Cette équation et ses variantes interviennent dans les phénomènes de diffusion. On prend $H = L^2(\Omega)$ et $D(A)$ est le domaine du laplacien qui rappelons le est :

$$D(A) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega) \right\}.$$

On a

$$Au = -\Delta u$$

et on a déjà vu que A était maximal monotone. Donc en appliquant le théorème de Hille-Yosida on obtient le résultat suivant :

Théorème 19. Si $u_0 \in D(A)$, alors il existe un unique $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[; D(A)) \cap \mathcal{C}1([0,T], L^2(\Omega))$ tel que *(1.13.1)*.

Si on suppose seulement que $u_0 \in L^2(\Omega)$ on a tout de même un résultat d'existence et d'unicité car le laplacien est auto-adjoint. Il existe donc un unique $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}(]0, +\infty[; D(A))$ et $u \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[; L^2(\Omega))$.

Chapitre 2

Etude de l'équation d'onde semi-linéaire accrétive

2.1 Position du probleme:

Nous étudions l'équation d'ondes semi-linéaire :

$u_{tt} - \Delta u = au_t \left|u_t\right|^{p-1} + bu \left|u\right|^{q-1}$

où a, b, p et q sont des nombres reels, $p, q \geqslant 1$. Quand $a \leqslant 0$ et $b = 0$ alors la limite du terme $au_t \left|u_t\right|^{p-1}$ assure l'existence globale en temps pour des données arbitraire *(voir, par exemple, [21] et [22])*.

Quand $a \leqslant 0$, $b > 0$ et $p > q$ ou quand $a \leqslant 0$, $b > 0$ et $p = 1$ alors on peut citer, *par exemple ([23] et [24]*), qui donnent l'existence des solutions globales sous la condition d'énergie négative.

Le premier à considérer le cas $a > 0$ était *(voir [25])* (avec $b = 0$ dans un domaine borné), qui construit une solution pour des données initiales arbitraires .*(Voir également le [26])* et la références là-dedans pour la même équation sur un domaine borné.

Dans ce paragraphe, on considère le cas $a = 1$ et $b = 0$, c'est à dire: l'équation d'ondes semi-linéaire accrétive :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = u_t \left|u_t\right|^{p-1}, & x \in \mathbb{R}^n; t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.1.1}$$

On s'interesse à l'existence et l'unicité locale dans l'espace de phase $H^\mu \times H^{\mu-1}(\mathbb{R}^n)$ de la solution d'équation d'ondes semi- linéaire $u_{tt} - \Delta u = u_t |u_t|^{p-1}$, $p > 1$.

Dans ce qui suit on va chercher dans $Y^\mu = H^\mu \times H^{\mu-1}(\mathbb{R}^n)$ des conditions sur p et l'ordre μ de sorte que nous ayons existence locale.

Où H^μ est l'espace de *Sobolev* homogène d'ordre μ défini par

$$H^\mu(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'; (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} u \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

si $u \notin \mathbb{N}$, et par

$$H^\mu(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n); (-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} u \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

si $u \in \mathbb{N}$, et $(-\Delta)^{\frac{\mu}{2}}$ est le laplacien fractionnaire défini par

$$(-\Delta)^{\frac{\mu}{2}} u(x) := \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^\mu \mathcal{F}(u)(\xi))(x)$$

pour tout $u \in D((-\Delta)^{\frac{\mu}{2}}) = H^\mu(\mathbb{R}^n)$. $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ sont la transformée de Fourier et son inverse respectivement.

2.2 Résultats préliminaires:

Dans cette section nous employons les notations utilisées dans *[13]*. Pour $x \in X$, X espace vectoriel normé; notons par $\|x; X\|$ la norme de x, et pour tout $(x, y) \in X \times Y$, de façon naturelle : $\|(x, y); X \times Y\| = \|x; X\| + \|y; Y\|$. Finalement , pour $q \in [1, +\infty)$ on définit la norme:

$$\|f; L^q(0, T, X)\|^q := \int_0^T \|f(t); X\|^q \, dt \tag{2.2.1}$$

avec celle utilisée pour $q = +\infty$.

Considérons l'équation d'ondes non homogène dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, \\ \quad u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \end{cases} \tag{2.2.2}$$

On définit l'opérateur $\sigma := (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ par

$$\sigma u(x) = (-\Delta)^{\frac{1}{2}} u(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi| \, \mathcal{F}(u)(\xi))(x).$$

La solution de(*2.2.2*) en peut s'écrire : $u = \theta + \omega$, où θ est la solution d'équation homogène et ω est la solution de l'équation non homogène avec les mêmes données initiales.

Si l'on cnsidère l'équation d'onde homogene

$$\begin{cases} \theta_{tt} - \Delta\theta = 0, \\ \quad \theta(0,x) = u_0(x), \quad \theta_t(0,x) = u_1(x), \end{cases} \tag{2.2.3}$$

On applique la transformation de Fourier sur x à *(2.2.3)*, posons $\vartheta(t,\xi) = \mathcal{F}(\theta(t,x))(\xi)$
Alors

$$\begin{cases} \vartheta_{tt} + |\xi|^2 \vartheta = 0, \\ \vartheta(0,\xi) = \mathcal{F}(u_0(x))(\xi), \quad \vartheta_t(0,\xi) = \mathcal{F}(u_1(x))(\xi), \end{cases}$$

La solution d'équation ici sous la forme

$$\vartheta(t,\xi) = \vartheta(0,\xi)\cos(t\,|\xi|) + \vartheta_t(0,\xi)\frac{\sin(t\,|\xi|)}{|\xi|}$$

Maintenant, on applique la transformation inverse de Fourier
Alors

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\vartheta(t,\xi)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\cos(t\,|\xi|)\mathcal{F}(u_0(x))(\xi)\right) + \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin(t\,|\xi|)}{|\xi|}\mathcal{F}(u_1(x))(\xi)\right)$$

Posons alors:

$$K(t)g := \sigma^{-1}\sin\sigma t := \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin(t\,|\xi|)}{|\xi|}\mathcal{F}g(\xi)\right)$$

$$\dot{K}(t)g := \cos\sigma t := \mathcal{F}^{-1}\left(\cos(t\,|\xi|)\mathcal{F}g(\xi)\right),$$

On s'écrit alors:

$$\theta(t,x) = \dot{K}(t)u_0 + K(t)u_1$$

Dérivons en t, il vient:

$$\theta_t(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(-\left|\xi\right|^2 \frac{\sin(t\left|\xi\right|)}{\left|\xi\right|}\mathcal{F}(u_0(x))(\xi)\right) + \mathcal{F}^{-1}\left(\cos(t\left|\xi\right|)\mathcal{F}(u_1(x))(\xi)\right)$$

Alors

$$\theta_t(t,x) = \Delta K(t)u_0 + \dot{K}(t)u_1$$

On note: $H(t)U_0 = (\theta(t)\ ,\theta_t(t))$ où $H(t) = \begin{pmatrix} \dot{K}(t) & K(t) \\ \Delta K(t) & \dot{K}(t) \end{pmatrix}$ et $U_0 := (u_0, u_1)$.

Si l'on cnsidère maintenant

$$\begin{cases} \omega_{tt} - \Delta\omega = f, \\ \omega(0,x) = \omega_t(0,x) = 0. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Nous écrivons *(2.2.4)* par

$$\begin{cases} U_t - AU = F, \\ U(0,x) = U_0(x). \end{cases}$$

Où

$U = \binom{\omega}{\omega_t}, A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}, F = \binom{0}{f}$

Selon *le principe de Duhamel,* alors

$$\dot{H}(t)U_0(t) + H(t)\dot{U}_0(t) - AH(t)U_0(t) = F$$

Où

$AH(t) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{K}(t) & K(t) \\ \Delta K(t) & \dot{K}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta K(t) & \dot{K}(t) \\ \Delta \dot{K}(t) & \Delta K(t) \end{pmatrix} = \dot{H}(t)$

Alors

$$H(t)\dot{U}_0(t) = F$$

Multipliant par $H(-t)$, on en déduit

$$\dot{U}_0(t) = H(-t)F$$

En integrant entre 0 et t, on trouve

$$U_0(t) = \int_0^t H(-s)F(s)ds$$

c'est-à-dire

$$H(t)U_0(t) = H(t)\int_0^t H(-s)F(s)ds = \int_0^t H(t-s)F(s)ds.$$

D'où

$$U(t) = H(t)U_0 + \int_0^t H(t-s)F(s)ds.$$

Avec les données initiales nulles la solution de *(2.2.4)* peut être écrite, pour $t \geqslant 0$ par:

$$\omega(t) = \int_0^t K(t-s)f(s)ds = K * f(t) \quad et \quad \omega_t(t) = \int_0^t \dot{K}(t-s)f(s)ds = \dot{K} * f(t).$$

La donnée initiale U_0 est prise dans l'espace de phase Y^μ pour $\mu \in \mathbb{R}$.

2.3 Existence et unicité

Proposition 2.3.1 *Soient* ρ_1 , ρ_2 , μ $\in \mathbb{R}$ *et* $2 \leqslant q_1$, q_2 , $r_1, r_2 \leqslant \infty$ *tels que la condition suivante soit satisfaite:*

$$\rho_1 + \delta(r_1) - \frac{1}{q_1} = \mu = 1 - (\rho_2 + \delta(r_2) - \frac{1}{q_2}). \tag{2.3.1}$$

$$0 \leqslant \frac{2}{q_i} \leqslant \min(\gamma(r_i), 1) \quad \text{pour } i = 1, 2 \tag{2.3.2}$$

$$(\frac{2}{q_i}, \gamma(r_i)) \neq (1,1) \quad \text{pour } i = 1,2 \tag{2.3.3}$$

Alors

$$\|H(.)U_0; L^{q_1}(\mathbb{R}, Y^{\rho_1})\| \leqslant C\,\|U_0; Y^{\mu}\|\,. \tag{2.3.4}$$

et pour tout intervalle $I = [0,T), T \leqslant \infty$:

$$\|(\omega(.), \omega_t(.)); L^{q_1}(I, Y^{\rho_1})\| \leqslant C\,\left\|f; L^{\overline{q_2}}(I, H^{-\rho_2})\right\|. \tag{2.3.5}$$

Les constantes C peuvent varier d'une inégalité à l'autre et sont indépendantes de l'intervalle I .

Preuve.

► Avant d'aller à la preuve de la proposition, nous donnons un certain nombre de notations, de définitions et de remarques préliminaires.

On pose
$\beta(r) \equiv \frac{n+1}{2}\alpha(r), \quad \gamma(r) \equiv (n-1)\alpha(r), \quad \delta(r) \equiv n\alpha(r), \qquad$ avec $\alpha(r) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{r})$.

L'utilisation des décompositions dyadiques de *Paley-Littlewood* est inévitable dans le problème actuel. Elles sont définies dans la manière standard suivante. Soit $\hat{\psi} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $0 \leqslant \hat{\psi} \leqslant 1$, $\hat{\psi}(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leqslant 1$ et $\hat{\psi}(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geqslant 2$. Nous définissons $\hat{\varphi}_0(\xi) = \hat{\psi}(\xi) - \hat{\psi}(2\xi)$ et pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\hat{\varphi}_j(\xi) = \hat{\varphi}_0(2^{-j}\xi)$, de sorte que:

$$Supp\hat{\varphi}_j \subset \left\{\xi : 2^{j-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+1}\right\}$$

et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}_j(\xi) = 1$$

Nous définissons également le $\tilde{\varphi}_j = \varphi_{j-1} + \varphi_j + \varphi_{j+1}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Puis de $\hat{\varphi}_j = \widehat{\tilde{\varphi}}_j \hat{\varphi}_j$

$$\varphi_j * u = \tilde{\varphi}_j * \varphi_j * u \tag{2.3.6}$$

pour toute distribution temperée u.

Nous donnons maintenant les définitions et les faits de base. À chaque distribution tempérée u nous associons une suite de C^∞ fonctions $\varphi_j * u$, considérées comme une fonction de deux variables j et x. L'espace homogène $B^\rho_{r,s}$ de *Besov*, est alors défini pour n'importe quel $\rho \in \mathbb{R}$ et $1 \leqslant r,\ s \leqslant \infty$ par

$$\dot{B}^\rho_{r,s} = \left\{ u; \left\| u; \dot{B}^\rho_{r,s} \right\| = \left\| 2^{\rho j} \varphi_j * u; l^s_j(L^r_x) \right\| < \infty \right\} \tag{2.3.7}$$

De même, l'espace homogène $F^\rho_{r,s}$ de *Triebel-Lizorkin*, est défini (pour $r < \infty$) par

$$\dot{F}^\rho_{r,s} = \left\{ u; \left\| u; \dot{F}^\rho_{r,s} \right\| = \left\| 2^{\rho j} \varphi_j * u; L^r_x(l^s_j) \right\| < \infty \right\} \tag{2.3.8}$$

avec L^r_x et l^s_j normes prises dans l'ordre opposé .Par *l'inégalité de Minkowski*

$l^s_j(L^r_x) \subset L^r_x(l^s_j) \Longrightarrow \dot{B}^\rho_{r,s} \subset \dot{F}^\rho_{r,s}$ pour $r \geqslant s$

$l^s_j(L^r_x) \supset L^r_x(l^s_j) \Longrightarrow \dot{B}^\rho_{r,s} \supset \dot{F}^\rho_{r,s}$ pour $r \leqslant s$.

La comparaison avec les espaces homogènes H^ρ_r de Sobolev est donnée par la théorie de *Paley-Littlewood*, précisement par les espaces de Hilbert evalués, version du théorème de *Mikhlin-Hörmander* qui implique que

$$H^\rho_r = \dot{F}^\rho_{r,2}$$

pour tout $\rho \in \mathbb{R}$ et $1 < r < \infty$, rapportant de ce fait les inclusions

$$\dot{B}^\rho_{r,2} \subset H^\rho_r \quad \textit{pour } 2 \leqslant r < \infty, \quad \dot{B}^\rho_{r,2} \supset H^\rho_r \quad \textit{pour } 1 < r \leqslant 2 \tag{2.3.9}$$

REMARQUE 14. La région permise pour les paramètres est mieux décrite dans le plan des variables $(1/q, 1/r)$. Pour $n \geqslant 4$, la région permise est un quadrilatère $ABCD$ avec des sommets $A = (0, 1/2), B = (1/2, (n-3)/2(n-1)), C = (1/2, 0)$ et $D = (0, 0)$ correspondant à $(q = \infty, r = 2), (q = 2, \gamma(r) = 1), (q = 2, r = \infty)$ et $(q = \infty, r = \infty)$ respectivement.

Pour $n = 3$, il est réduit au triangle ACD et pour $n = 2$ au triangle plus petit AC_2D où $C_2 = (1/4, 0)$ correspond à $(q = 4, r = \infty)$. Le cas limité $q = 2$ n'a lieu que pour $n \geqslant 4$. *Voir*

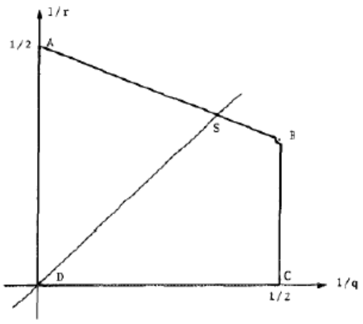

FIG. 1. Le cas $n \geq 4$

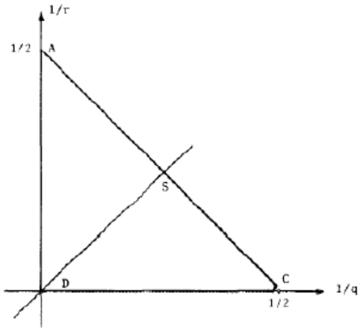

FIG. 2.Le cas $n=3$

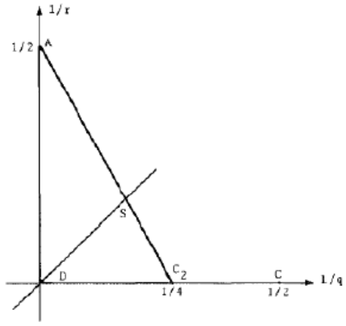

FIG. 3.Le cas $n=2$

Les Figures.1, 2, et 3. La frontière du quadrilatère est entièrement permise sauf le seul point B pour $n \geqslant 3$ (ce point coïncide avec C pour $n = 3$) qui est exclu par *(2.3.3)*.

REMARQUE 15. nous pouvons fixer arbitrairement le $\mu = 0$ sans limiter la généralité. Il sera donc suffisant de prouver les inégalités

$$\left\| U(.)u; L^{q_1}(\mathbb{R}, \dot{B}^{\rho_1}_{r_1}) \right\| \leqslant C \left\| u \right\|_2 \tag{2.3.10}$$

$$\left\| U * f; L^{q_1}(I, \dot{B}^{\rho_1}_{r_1}) \right\| \leqslant C \left\| f; L^{\bar{q}_2}(I, \dot{B}^{-\rho_2}_{r_2}) \right\| \tag{2.3.11}$$

pour $I \subseteq \mathbb{R}$

$$\left\| U_R * f; L^{q_1}(I, \dot{B}^{\rho_1}_{r_1}) \right\| \leqslant C \left\| f; L^{\bar{q}_2}(I, \dot{B}^{-\rho_2}_{r_2}) \right\| \tag{2.3.12}$$

pour $I = [0, T) \subset \mathbb{R}^+$, dans les conditions *(2.3.2)*, *(2.3.3)*, et

$$\rho_i + \delta(r_i) - \frac{1}{q_i} = 0 \quad \textit{pour } i = 1, 2 \tag{2.3.13}$$

Le passage de *(2.3.1)* à *(2.3.13)* est dû au changement de K à U de *(2.3.5)* à *(2.3.11)*, *(2.3.12)*.

REMARQUE 16.

Si $q_1 > 2$, la borne supérieure donnée par $\gamma(r_1) = \frac{2}{q_1}$, est autorisée, et il est donc suffisant de considérer ce cas spécial, où en outre $\rho_1 = \mu - \beta(r_1)$ dans *(2.3.4)*, *(2.3.5)*, et $\rho_1 = -\beta(r_1)$ dans *(2.3.10)*, *(2.3.11)*, *(2.3.12)*.

Si $q_1 = 2$, la borne supérieure se produit au point interdit B, et aucune réduction n'est autorisée..

D'une manière semblable, les normes dans le côté droit de *(2.3.5)* ou *(2.3.11), (2.3.12)* diminuent avec ρ_2 ou d'une manière équivalente avec $\frac{1}{r_2}$ pour q_2 et μ fixes, et il est encore suffisant pour prouver les inégalités pour les plus grandes valeurs permises de ρ_2 ou de $\frac{1}{r_2}$.

Si $q_2 > 2$, la borne supérieure $\gamma(r_2) = \frac{2}{q_2}$ est autorisée et il est suffisant de considérer ce cas où en outre $\rho_2 = 1 - \mu - \beta(r_2)$ dedans *(2.3.5)* et $\rho_2 = -\beta(r_2)$ dedans *(2.3.11), (2.3.12)*.

Si $q_2 = 2$, aucune réduction ne se produit.

REMARQUE 17. la condition $\frac{2}{q} \leqslant \gamma(r)$ est équivalente à la condition $\rho \leqslant 1 - \beta(r)$ dans ce cas. D'autre part, avec $L(t) = U(t)$ coïncide avec les cas de limitation $\rho_1 = -\beta(r_1)$, $\rho_2 = -\beta(r_2)$ de *(2.3.12)*

Preuve de proposition 2.3.1. Nous commençons par l'estimation suivante:

$$\sup_x \left| \int_{\mathbb{R}^n} \exp(it|\xi| + ix\xi)\hat{\varphi}_0(\xi)d\xi \right| \leqslant \min\left\{ \|\hat{\varphi}_0\|_1, C_0 |t|^{-(n-1)/2} \right\}, \tag{2.3.14}$$

la partie non triviale dont est une évaluation de phase stationnaire *([13], sec. 7.7)*. Graduation ξ par 2^{-j} et x, t par 2^j, nous obtenons

$$\sup_x \left| \int_{\mathbb{R}^n} \exp(it|\xi| + ix\xi)\hat{\varphi}_j(\xi)d\xi \right| \leqslant \min\left\{ \|\hat{\varphi}_0\|_1 2^{nj}, C_0 |t|^{-(n-1)/2} 2^{j(n+1)/2} \right\}, \tag{2.3.15}$$

ce qui signifie cela

$$\left\| U(t)\varphi_j \right\|_\infty \leqslant C \min\left\{ 2^{nj}, |t|^{-(n-1)/2} 2^{j(n+1)/2} \right\}. \tag{2.3.16}$$

Maintenant soit f une fonction suffisamment régulière (ou distribution) pour la variable de l'espace. Nous estimons

$$\left\| \varphi_j * U(t)f \right\|_\infty = \left\| \varphi_j * U(t)\tilde{\varphi}_j * f \right\|_\infty \leqslant \left\| U(t)\varphi_j \right\|_\infty \left\| \tilde{\varphi}_j * f \right\|_1$$

par *(2.3.6)* et l' inégalité de young , et par conséquent par *(2.3.16)*

$$... \leqslant C \min\left\{ 2^{nj}, |t|^{-(n-1)/2} 2^{j(n+1)/2} \right\} \left\| \tilde{\varphi}_j * f \right\|_1 \tag{2.3.17}$$

Par interpolation entre *(2.3.17)* et l'unitarité de $U(t)$ en L^2, nous obtenons

$$\left\|\varphi_j * U(t)f\right\|_r \leqslant C \min\left\{2^{2j\delta(r)}, |t|^{-\gamma(r)}\, 2^{2j\beta(r)}\right\} \left\|\tilde{\varphi}_j * f\right\|_{\bar{r}} \tag{2.3.18}$$

pour $2 \leqslant r \leqslant \infty$. Dorénavant, nous considérons séparément le cas $q > 2$ et le cas limité $q = 2$.

• Le cas $q > 2$ *([14], lemme 2.3)*. On multiplie *(2.3.18)* par $2^{-j\beta(r)}$ et on prend la norme dans l_j^2, obtenant de ce fait

$$\left\|U(t)f; \dot{B}_r^{-\beta(r)}\right\| \leqslant C\, |t|^{-\gamma(r)} \left\|f; \dot{B}_{\bar{r}}^{\beta(r)}\right\| \tag{2.3.19}$$

où nous avons injecté le premier terme dans le minimum et avons employé la définition de $\tilde{\varphi}_j$, et la définition *(2.3.7)*.

Maintenant, soit f dépendant également du temps et récrivant *(2.3.19)* par:

$$\left\|U(t-t')f(t'); \dot{B}_r^{-\beta(r)}\right\| \leqslant C\, |t-t'|^{-\gamma(r)} \left\|f(t'); \dot{B}_{\bar{r}}^{\beta(r)}\right\| \tag{2.3.20}$$

Soit $0 \leqslant \frac{2}{q} = \gamma(r) < 1$ et a soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle. Intégrant au-dessus de t', prenant la norme de L^q en temps et appliquant l'inégalité *Hardy-Littlewood-Sobolev ([13], P. 117)*, nous obtenons

$$\left\|U_R *_t f; L^q(I, \dot{B}_r^{-\beta(r)})\right\| \leqslant C \left\|f; L^{\bar{q}}(I, \dot{B}_{\bar{r}}^{\beta(r)})\right\| \tag{2.3.21}$$

où $U_{(R)}$ représente soit U, soit U_R. Maintenant *(2.3.21)* sans et avec retardement est le cas diagonal ($q_1 = q_2, r_1 = r_2$) du cas de limitation $\frac{2}{q_i} = \gamma(r_i)$, ou d'une manière equivalente $\rho_i = -\beta(r_i)$ de *(2.3.11) et (2.3.12)* respectivement. La fin de la preuve procède maintenant par des arguments abstraits de dualité.

Dans le cas non retardé, pour l'opérateur A défini par

$$Af = \int_I U(-t)f(t)dt.$$

$$\|Af\| \leqslant a\, \|f; X\|\,,\ 0 \leqslant a < \infty,\ f \in \mathcal{D};$$

avec $X = L^{\bar{q}}(B, \dot{B}_{\bar{r}}^{\beta(r)})$, à savoir

$$\left\| U(.)u; L^q(\mathbb{R}, \dot{B}_r^{-\beta(r)}) \right\| \leqslant C \left\| u \right\|_2 \tag{2.3.22}$$

où nous avons pris $I = \mathbb{R}$, et qui hormis un changement de notation est le cas de limitation $\frac{2}{q} = \gamma(r)$ (d'une manière equivalente $\rho = -\beta(r)$) de *(2.3.10)*. avec $X = L^{\bar{q}_i}(I, \dot{B}_{\bar{r}_i}^{\beta(r_i)})$, *(2.3.21)* implique l'évaluation au loin diagonale

$$\left\| U * f; L^{q_1}(I, \dot{B}_{r_1}^{-\beta(r_1)}) \right\| \leqslant C \left\| f; L^{\bar{q}_2}(I, \dot{B}_{\bar{r}_2}^{\beta(r_2)}) \right\| \tag{2.3.23}$$

Procédant dans l'ordre inverse, nous aurions réécrit *(2.3.18)* sous la forme

$$\left\| \varphi_j * U(t-t')f(t') \right\|_r \leqslant C \min \left\{ 2^{2j\delta(r)}, |t-t'|^{-\gamma(r)} 2^{2j\beta(r)} \right\} \left\| \tilde{\varphi}_j * f(t') \right\|_{\bar{r}} \tag{2.3.24}$$

et obtenu de là

$$\left\| \varphi_j *_x U_{(R)} *_t f; L^q(I, L^r) \right\| \leqslant C 2^{2j\beta(r)} \left\| \tilde{\varphi}_j *_x f; L^{\bar{q}}(I.L^{\bar{r}}) \right\| \tag{2.3.25}$$

pour $0 \leqslant \frac{2}{q} = \gamma(r) \leqslant 1$, par laquelle *(2.3.21)* s'ensuit en prenant la norme dans L_j^2, et d'appliquer *l'inégalité de Minkowski.*

• Le cas $q = 2$, pour $n \geqslant 4$. Après la dernière remarque, nous prenons d'abord la norme dans le temps. Prenant la norme L_t^2 dans *(2.3.24)* avec $\gamma(r) > 1$ et appliquons l'inégalité de young en temps, nous obtenons

$$\left\| \varphi_j *_x U *_t f; L^2(I, L^r) \right\| \leqslant C \left\| \min \left(2^{2j\delta(r)}, |t|^{-\gamma(r)} 2^{2j\beta(r)} \right); L_t^1 \right\| \left\| \tilde{\varphi}_j *_x f; L^2(I, L^{\bar{r}}) \right\|$$

$$= C 2\gamma(r)(\gamma(r)-1)^{-1} 2^{(2\delta(r)-1)j} \left\| \tilde{\varphi}_j * f; L^2(I, L^{\bar{r}}) \right\| \tag{2.3.26}$$

par calcul explicite. En prenant la norme de l^2

$$\left\| U_{(R)} *_t f; L^2(I, \dot{B}_r^{-(\delta(r)-1/2)}) \right\| \leqslant C \left\| f; L^2(I, \dot{B}_{\bar{r}}^{\delta(r)-1/2}) \right\|, \tag{2.3.27}$$

qui est la forme diagonale de *(2.3.11)*, *(2.3.12)* dans le cas de limitation $q = 2$, et l'équivalent pour ce cas de *(2.3.21)* pour le cas en bloc $q > 2$. De là dessus, la preuve des

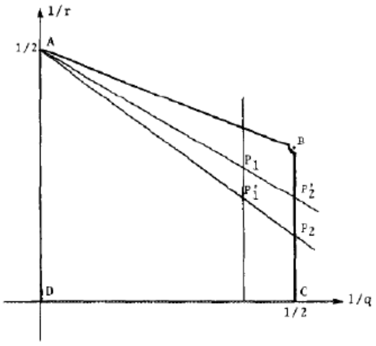

FIG. 4. évaluations retardées pour q_2=2

estimations restantes non retardés suit le même chemin abstrait que précédemment, utilisant *(2.3.21) et (2.3.27)* ensemble d'une manière appropriée, accomplissant de ce fait la preuve *(2.3.10) et (2.3.11)* pour tous les cas. Notons également que l'application des inégalités de Sobolev est déjà intégré dans *(2.3.27)*, à savoir *(2.3.27)* est d'autant plus forte que $\gamma(r)$ est plus petit. Cependant le point de limitation $\gamma(r) = 1$, à savoir le point B dans le diagramme de *FIG. 1.* est interdit, et l'ensemble tout entier *(2.3.27)* ne peut pas être déduit d'un seul point de limitation.

Nous avons déjà prouvé le cas où les deux $q_i > 2, i = 1, 2$. Le cas au loin diagonal $q_1 = q_2 = 2$, $r_1 \neq r_2$ s'ensuit du cas diagonal $q_1 = q_2 = 2$, $r = \min(r_1, r_2)$ par les inégalités de Sobolev, comme déja expliquer. Les autres cas $(q_1 > 2, q_2 = 2)$ et $(q_1 = 2, q_2 > 2)$ se déduisent de l'argument d'interpolation abstrait de *(Corollaire 2.2 [15])*, excepté dans les doubles cas de limitation où soit $(\frac{2}{q_1} = \gamma(r_1) < 1, q_2 = 2)$ ou $(q_1 = 2, \frac{2}{q_2} = \gamma(r_2) < 1)$. En effet, soit $P_1 = (\frac{1}{q_1}, \frac{1}{r_1})$ et $P_2 = (\frac{1}{q_2}, \frac{1}{r_2})$ dans le diagramme de *(la remarque 14)* , et prendre $q_1 > 2$, $q_2 = 2$; pour la définition *(voir la FIG. 4)*. *(Le corollaire 2.2 [15])* tient compte de l'interpolation avec le point $A = (0, 1/2)$ correspondant à $X_0 = L^1(I, L^2)$. AP_1 intersecte BC à P_2', et AP_2 intersecte la ligne $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1}$ à P_1'. Maintenant le cas au loin diagonal (P_1, P_2) se déduit par les inégalités de Sobolev, comme expliqué dans *(la remarque 16)*, du cas au loin diagonal $(P_1 \vee P_1', P_2 \vee P_2')$, où $P_i \vee P_i'$ est P_i (resp. P_i') si $\frac{1}{r_i} \geqslant \frac{1}{r_i'}$ (resp.$\frac{1}{r_i} \leqslant \frac{1}{r_i'}$). Le cas au loin diagonal $(P_1 \vee P_1', P_2 \vee P_2')$ lui même s'ensuit du cas diagonal $P_2 \vee P_2'$ par *(corollaire 2.2 [15])* a condition que $P_2 \vee P_2'$ est autorisé, à savoir différent de B, c'est à dire si $P_1 \notin (AB)$. Le même argument s'applique au cas dual où $q_1 = 2$ et $q_2 > 2$, accomplissant de ce fait la preuve de l'évaluation retardée *(2.3.12)* excepté dans les deux cas de limitation où $(P_1, P_2) \in (A, B) \times (B, C] \cup (B, C] \times (A, B)$.

Le double cas de limitation retardé exige une preuve spéciale et bien délicate. Une telle preuve a été donnée dans *[16]* dans le codimension avec un cas secondaire où $\rho_1 + \rho_2 = 1$ et se prolonge d'une manière simple au cas général.■

Proposition 2.3.2 *Soient* $1 \leqslant n \leqslant 3,\ f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. *Alors:*

$$\left\| \dot{K}(t)f; L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \right\| \leqslant \max(1,t) \left\| f; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \right\|, \quad t > 0, \tag{2.3.28}$$

$$\| K(t)g; L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \| \leqslant t \, \| g; L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \| , \quad t > 0. \tag{2.3.29}$$

On aura besoin dans la suite d'une estimation de la norme H^{μ} d'une puissance d'une fonction.

Preuve.

Nous avons

$$K(t) = (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \sin\left[t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[|\xi|^{-1} \sin(t\,|\xi|)\right],$$

$$\dot{K}(t) = \cos\left[t(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\cos(t\,|\xi|)\right].$$

Où

$$\mathcal{F}\left[\alpha(\sigma)\right](\xi) = \alpha(\xi) = \begin{cases} \sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}}, & |\xi| > \frac{1}{2}; \\ i\sqrt{\frac{1}{4} - |\xi|^2}, & |\xi| \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Quand $n = 2$, la solution fondamentale $K(t)$ est donnée comme suivant *(voir [17,18])* :

$$k(t)g = \frac{1}{2\pi} \int \int\limits_{|x-y| \leqslant t} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} dy.$$

Ainsi

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-y|\leqslant t}\frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}dy\right| = \frac{t}{2\pi}\left|\int\limits_{\left|\frac{x}{t}-z\right|\leqslant 1}\frac{g(tz)}{\sqrt{1-\left|\frac{x}{t}-z\right|^2}}dz\right|$$

$$\leqslant \frac{t}{2\pi}\sup_{|x-y|\leqslant t}|g(y)| \int\limits_{\left|\frac{x}{t}-z\right|\leqslant 1}\frac{1\leqslant}{\sqrt{1-\left|\frac{x}{t}-z\right|^2}}dz$$

$$\leqslant t\,\|g\|_\infty \int\limits_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr = t\,\|g\|_\infty \qquad \blacksquare$$

• pour preuve d'autre cas suivons la même méthode et *(voir [19])*

Proposition 2.3.3 *Soient* $p \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, s > -\frac{n}{2}, s \neq \frac{n}{2}$ *en plus* $\nu(s,p) := \sup\{0, (\frac{n}{2} - s)(\frac{p-1}{p})\}$. *Alors, pour une fonction non négative* $f \in H^{s+\nu(s,p)}(\mathbb{R}^n)$, $f^p \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *et il existe une constante positive* C *tels que*

$$\|f^p; H^s(\mathbb{R}^n)\| \leqslant C\left\|f; H^{s+\nu(s,p)}(\mathbb{R}^n)\right\|^p. \tag{2.3.30}$$

Proposition 2.3.4 [1] *(Gagliardo-Nirenberg) — Soient* q, r *deux nombres réels tels que* $1 \leqslant q\ , r \leqslant \infty$, *et soient* j, m *des nombres entiers* $0 \leqslant j < m$. *En plus* $a \in [\frac{j}{m}, 1]$ *(* $a < 1$ *si* $m - j - \frac{n}{r}$ *est un nombre entier* $\geqslant 0$*) , et soit* p *donné par*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{q}.$$

Pour $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ telle que $D^\alpha f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ avec $|\alpha| = m$, alors : $D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $|\alpha| = j$. De plus: il existe une constante positive C telle que:

$$\sum_{|\alpha|=j}\|D^\alpha f\|_{L^p} \leqslant C\left(\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha f\|_{L^r}\right)^a \|f\|_{L^q}^{1-a}. \tag{2.3.31}$$

[1] **Preuve:** voir [20, Théorème 9.3] ■

Proposition 2.3.5 *Supposons que* $\mu \in (1,2) \cup \mathbb{N}^*$ *et* $p \in \mathbb{R} \cap (1,\infty) \cap [\mu - 1, \infty)$. *Pour une fonction non négative* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap H^{\mu-1}(\mathbb{R}^n)$, $f^p \in H^{\mu-1}(\mathbb{R}^n)$ *et il existe une constante positive* C *telle que:*

$$\|f^p\|_{H^{\mu-1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{p-1} \|f\|_{H^{\mu-1}(\mathbb{R}^n)} . \tag{2.3.32}$$

Preuve.

Premier cas : $\mu \in (1,2)$. Utilisant *le théorème de valeur moyenne* et la norme équivalente suivante de $\|.\|_{H^{\mu-1}}$ *(voir [12, page 214 de théorème 7.48])*, nous avons:

$$\|f^p\|_{H^{\mu-1}}^2 := \|f^p\|_{L^2}^2 + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(f^p(x) - f^p(y))^2}{|x-y|^{n+2\mu-2}} dxdy$$

$$= \|f^p\|_{L^2}^2 + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(pz^{p-1}(f(x) - f(y)))^2}{|x-y|^{n+2\mu-2}} dxdy$$

$$\leqslant p^2 \left\|f^{p-1}\right\|_{L^\infty}^2 \left[\|f\|_{L^2}^2 + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(f(x) - f(y))^2}{|x-y|^{n+2\mu-2}} dxdy \right]$$

$$\leqslant p^2 \|f\|_{L^\infty}^{2(p-1)} \|f\|_{H^{\mu-1}}^2 , \qquad (\mathbf{D'après\ Hölder}).$$

où

min $(f(x), f(y)) < z <$ max $(f(x), f(y))$ pour chaque $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Deuxième cas : $\mu \in \mathbb{N}^*$. nous avons

$$\|f^p\|_{H^{\mu-1}} := \left(\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant \mu-1} \|D^\alpha f^p\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{2.3.33}$$

Où

$$D^\alpha(f^p) = \sum_{|\beta_1|+\ldots+|\beta_m|=m} C^m_{|\beta_1|,\ldots,|\beta_m|} f^{p-m} D^{\beta_1} f \ldots D^{\beta_m} f,$$

On conclue que:

$$\|D^\alpha f^p\|_{L^2} \leqslant C\|f\|_{L^\infty}^{p-m} \sum_{|\beta_1|+...+|\beta_m|=m} \left\|D^{\beta_1} f ... D^{\beta_m} f\right\|_{L^2}$$

$$\leqslant C\|f\|_{L^\infty}^{p-m} \sum_{|\beta_1|+...+|\beta_m|=|\alpha|} \left\|D^{\beta_1} f\right\|_{L^{\frac{2|\alpha|}{|\beta_1|}}} ... \left\|D^{\beta_m} f\right\|_{L^{\frac{2|\alpha|}{|\beta_m|}}},$$

- $\frac{|\beta_1|+...+|\beta_m|}{2|\alpha|} = \frac{1}{2}$.

grâce à l'inégalité de Hölder.En utilisant *la proposition 2.3.4*, nous obtenons

$$\|D^\alpha f^p\|_{L^2} \leqslant C\|f\|_{L^\infty}^{p-m} \sum_{|\beta_1|+...+|\beta_m|=m} \left[\sum_{|\beta|=|\alpha|} \left\|D^\beta f\right\|_{L^2}\right]^{\frac{|\beta_1|}{|\alpha|}} \|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{|\beta_1|}{|\alpha|}} ...$$

$$\left[\sum_{|\beta|=|\alpha|} \left\|D^\beta f\right\|_{L^2}\right]^{\frac{|\beta_m|}{|\alpha|}} \|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{|\beta_m|}{|\alpha|}} \leqslant C\|f\|_{L^\infty}^{p-1} \|D^\alpha f\|_{L^2}.$$

- $\|f\|_{L^\infty}^{1+...+1-\frac{|\beta_1|+...+|\beta_m|}{|\alpha|}} = \|f\|_{L^\infty}^{m-1}$.
- $\|f\|_{L^\infty}^{p-m} \|f\|_{L^\infty}^{m-1} = \|f\|_{L^\infty}^{p-1}$.

► La même chose pour $\left\|D^\beta f\right\|_{L^2}$.

Théorème 2.3.1. *(cas p nombre entier)* ; $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $\mu \in \mathbb{R} \cap [1,\infty)$ tels que:

$$\begin{cases} 1 < p < \infty, & \text{si } \mu \geqslant 1 + \frac{n}{2}, \\ 1 < p < \frac{n+4-2\mu}{n+2-2\mu}, & \text{si } 1 \leqslant \mu < 1 + \frac{n}{2}. \end{cases} \tag{2.3.34}$$

Pour $(u_0, u_1) \in Y^\mu$, il existe un temps maximal $T_{max} > 0$ et une unique solution $(u, u_t) \in \mathcal{C}^0([0, T_{max}); Y^\mu)$ du problème *(2.1.1)*. Si $T_{max} < \infty$, alors: $\|u(t)\|_{H^\mu} + \|u_t(t)\|_{H^{\mu-1}} \to \infty$ lorsque $t \to T_{max}$.

La dimension doit être plus petite ou égale à 3 .

Dans ce qui suit on note par: $Y^{2,\infty} := W^{2,\infty} \times W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que les données initiales (u_0, u_1) sont à support compact. Par la vitesse finie de la propagation, la solution (u, u_t) est également à support compact. Ceci nous permet d'employer *la proposition 2.3.1* sur les intervalles liés $[0,T]$ dans les espaces de Sobolev habituels à la place des espaces homogènes de Sobolev (puisque pour des distributions à supports compacts, les normes sont équivalentes, *voient [29]*).

Maintenant, nous écrivons *(2.1.1)* par

$$\begin{cases} U_t - AU = F(U), \\ U(0,x) = U_0(x) \in Y^{\mu} \end{cases} \tag{2.3.35}$$

où

$U = (u, u_t)$, $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{bmatrix}$ et $F(U) := \begin{bmatrix} 0 \\ u_t \left|u_t\right|^{p-1} \end{bmatrix}$.

Avec ces notations, existence locale pour *(2.1.1)* est équivalente à l'existence locale pour *(2.3.35)*, et c'est équivalent à l'équation intégrale suivante

$$\begin{cases} \text{Trouver } T > 0 \text{ et une solution unique,} \\ U = (u,v) \in \mathcal{C}^0\left([0,T]\,; Y^{\mu}\right) \text{ de } U(t) = H(t)U_0 + L(U)(t), \end{cases} \tag{2.3.36}$$

où

$H(t)U_0 = \begin{bmatrix} \dot{K}(t)u_0 + K(t)u_1 \\ \Delta K(t)u_0 + \dot{K}(t)u_1 \end{bmatrix}$ et $L(U)(t) = \begin{bmatrix} \left[K * v^p\right](t) \\ \left[\dot{K} * v^p\right](t) \end{bmatrix}$, où v^p dénote $v\left|v\right|^{p-1}$.

- F **lipschitzienne ?**

nous avons $U_t^p - V_t^p = P(U_t - V_t)$ où P est un polynôme homogène du degré $p-1$. Alors $\left|U_t^p - V_t^p\right| \leqslant M\left|U_t - V_t\right|; \quad M > 0$

Donc : $\left|F(U) - F(V)\right| \leqslant M\left|U - V\right|$.

Afin d'employer le théorème du point fixe.

Lemme 8. *(Théorème du point fixe de Banach).* Soit E un espace métrique complet, non vide. On note d la distance et on considère F une application de E dans lui-même.

On suppose F contractante, c'est-à-dire: il existe une constante positive k, strictement inférieure à 1, telle que : $d(F(x), F(y) \leqslant kd(x,y)$ pour tous $x, y \in E$.

Alors, il existe un unique point $a \in E$ tel que $F(a) = a$. De plus, ce point peut s'obtenir comme limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des itérées, définies par récurrence à partir d'un point quelconque x_0 de E selon $x_{n+1} = F(x_n)$. On a en outre :

$$\forall n \geqslant 1 : d(x_n, a) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x) \quad (\textit{méthode de Picard}).$$

Lemme 9. *(Gronwall).* Soient $T > 0$, $\psi \in L^1([0;T])$, $\psi \geqslant 0$ *pp* et $C_1, C_2 \geqslant 0$. Soit $\phi \in L^1([0;T]), \phi \geqslant 0$ *pp* telle que $\psi\phi \in L^1([0;T])$ et $\phi(t) \leqslant C_1 + C_2 \int_0^t \psi(s)\phi(s)ds$, *pp* $t \in [0;T]$. Alors:

$$\phi(t) \leqslant C_1 \exp\left(C_2 \int_0^t \psi(s)ds\right), ppt \in [0;T] .$$

Introduisons l'espace métrique suivant:

$$X := \{U = (u,v) \in L^q(0,T;Y^\rho) \ t.q \quad \|U - HU_0; L^q(0,T;Y^\rho\| \leqslant \lambda\}$$

où T et λ sont les constantes positives et ρ et q satisfont *(2.3.1)*.Ces constantes seront fixées plus tard.

Pour $\varphi, \psi \in X$, notons par:

$$\|\varphi; X\| := \|\varphi - HU_0; L^q(0,T;Y^\rho\| \tag{2.3.37}$$

(HU_0 dénote la fonction $t \mapsto H(t)U_0$) et la distance induite naturelle:

$$d(\varphi,\psi) := \|\varphi - \psi; L^q(0,T;Y^\rho\| . \tag{2.3.38}$$

Définir enfin l'application Φ sur X par $\Phi : U(t) \longmapsto H(t)U_0 + L(U)(t)$.

Existence

Première étape. L'application Φ envoie X sur X. Soit $U \in X$, par *la proposition 2.3.1*, on a:

$$\|\Phi(U); X\| \leqslant \|L(U); L^q(0,T;Y^\rho\| \leqslant C \left\|v^p; L^{\overline{q_2}}(0,T;H^{-\rho_2}\right\| \tag{2.3.39}$$

pour tous (q_2, ρ_2) satisfaisant *(2.3.1)*. Prenons: $q_2 := +\infty$, par conséquent $\rho_2 := 1 - \mu$. Alors:

$$\|\Phi(U); X\| \leqslant C \left\|v^p; L^1(0,T;H^{\mu-1})\right\| . \tag{2.3.40}$$

Par *la proposition 2.3.3*

$$\left\| v^p ; H^{\mu-1} \right\| \leqslant C \left\| v ; H^{\mu-1+\nu(\mu-1,p)} \right\|^p ,$$

ainsi

$$\| \Phi(U) ; X \| \leqslant C \left\| v ; L^p(0,T; H^{\mu-1+\nu(\mu-1,p)}) \right\|^p . \tag{2.3.41}$$

► Si $\mu \geqslant 1 + \frac{n}{2}$ puis $\nu(\mu-1,p) = 0$ et choix $\varepsilon = 1, q = \infty$ et $\rho = \mu$ et *(D'après Hölder),* alors *(2.3.41)* donne

$$\| \Phi(U) ; X \| \leqslant C \left\| v ; L^p(0,T; H^{\mu-1}) \right\|^p = C \int_0^T \left\| v ; H^{\mu-1} \right\|^p$$

$$\leqslant C \int_0^T 1. \sup_{t \in [0,T]} \left\| v ; H^{\mu-1} \right\|^p = CT \left\| v ; L^\infty(0,T; H^{\mu-1}) \right\|^p$$

$$\leqslant CT^\varepsilon \| U ; L^q(0,T; Y^\rho) \|^p . \tag{2.3.42}$$

► Si $\mu < 1 + \frac{n}{2}$, définissons: $\varepsilon := 1 - p\nu(\mu-1,p) = 1 - (p-1)(1 + \frac{n}{2} - \mu) \in (0,1)$ par *(2.3.34)*. Alors: $\mu + \nu(\mu-1,p) - \frac{1-\varepsilon}{p} = \mu$. En utilisant *l'inégalité de Hölder* nous avons

$$\left\| v ; L^p(0,T; H^{\mu-1+\nu(\mu-1,p)}) \right\|^p = \int_0^T \left\| v ; H^{\mu-1+\nu(\mu-1,p)} \right\|^p$$

$$\leqslant \left(\int_0^T 1^{\frac{1}{\varepsilon}} \right)^\varepsilon . \left(\int_0^T \left(\left\| v ; H^{\mu-1+\nu(\mu-1,p)} \right\|^p \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \right)^{1-\varepsilon} = T^\varepsilon . \left(\int_0^T \left\| v ; H^{\mu-1+\nu(\mu-1,p)} \right\|^{\frac{p}{1-\varepsilon}} \right)^{\left(\frac{1-\varepsilon}{p}\right)p}$$

$$\leqslant CT^\varepsilon \left\| v ; L^{\frac{p}{1-\varepsilon}}(0,T; H^{\mu-1+\nu(\mu-1,p)}) \right\|^p . \tag{2.3.43}$$

En choisissant $\rho = \mu + \nu(\mu-1,p)$ et $q = \frac{p}{1-\varepsilon}$, et en employant *la proposition 2.3.1*, l'inégalité *(2.3.41)* donne

$$\| \Phi(U) ; X \| \leqslant CT^\varepsilon \left\| v ; L^q(0,T; H^{\rho-1}) \right\|^p \leqslant CT^\varepsilon \| U ; L^q(0,T; Y^\rho) \|^p .$$

Nous voyons que dans les deux cas, on a:

$$\|\Phi(U); X\| \leqslant CT^{\varepsilon} \|U; L^q(0,T;Y^\rho)\|^p . \tag{2.3.44}$$

avec ρ et q satisfaisant *(2.3.1)* et D'après *(2.3.37)*. Ainsi nous avons

$$\|\Phi(U); X\| \leqslant CT^{\varepsilon} \|U; L^q(0,T;Y^\rho)\|^p \leqslant CT^{\varepsilon} \left[\|U; X\| + \|HU_0; L^q(0,T;Y^\rho)\|\right]^p , \tag{2.3.45}$$

Et comme ρ et q satisfont *(2.3.1)*, par *la proposition 2.3.1*, nous aurons:

$$\|\Phi(U); X\| \leqslant CT^{\varepsilon} \left[\|U; X\| + \|U_0; Y^\mu\|\right]^p .$$

Donc, X est stable par Φ si T et λ sont tels que:

$$CT^{\varepsilon} (\lambda + \|U_0; Y^\mu\|)^p \leqslant \lambda. \tag{2.3.46}$$

Deuxième étape . L'application Φ est une contraction sur X

Principalement, c'est la même idée. Soient $U(u.v), V(\tilde{u},\tilde{v}) \in X$. et D'après*(2.3.39)*.Alors:

$$d\left(\Phi(U), \Phi(V)\right) = \|L(U) - L(V); L^q(0,T;Y^\rho)\| \leqslant C \left\|v^p - \tilde{v}^p; L^{\overline{q_2}}(0,T;H^{-\rho_2})\right\| \tag{2.3.47}$$

pour ρ_2 et q_2 satisfaisant *(2.3.1)* . Prenons: $q_2 := +\infty$, nous obtenons $\rho_2 := 1 - \mu$ et donc:

$$d\left(\Phi(U), \Phi(V)\right) \leqslant C \left\|v^p - \tilde{v}^p; L^1(0,T;H^{\mu-1})\right\| .$$

Maintenant, nous écrivons $v^p - \tilde{v}^p = (v - \tilde{v})P(v,\tilde{v})$ où P est un polynôme homogène du degré $p-1$. Utilisant *la proposition 2.3.3* et la convexité de la fonction exponentielle, pour avoir :

$$\begin{aligned} d\left(\Phi(U), \Phi(V)\right) &\leqslant C \left\|v - \tilde{v}; L^p(0,T;H^{\mu-1+\nu(\mu-1,p)})\right\| \\ &\quad \times \left[\left\|v; L^p(0,T;H^{\mu-1+\nu(\mu-1,p)})\right\|^{p-1} + \left\|\tilde{v}; L^p(0,T;H^{\mu-1+\nu(\mu-1,p)})\right\|^{p-1}\right] . \end{aligned}$$

(pour l'inégalité précédente en utilisant *(2.3.41)* et *l'inégalité de Hölder*)

Par la même technique, et un calcul semblable que dans la première étape, nous obtenons

$$d\left(\Phi(U),\Phi(V)\right) \leqslant Cd(U,V)T^{\varepsilon}\left[\lambda + \|U_0;Y^{\mu}\|\right]^{p-1}.$$

En conclusion, Φ est une contraction sur X si le λ et le T satisfont

$$CT^{\varepsilon}\left[\lambda + \|U_0;Y^{\mu}\|\right]^{p-1} < 1. \tag{2.3.48}$$

Unicité

Soient U et V deux solutions généralisées de *(2.3.35)*. On a :

- $\forall t \geqslant 0, U(t) = H(t)U_0 + L(U)(t) = H(t)U_0 + H * F(U)(t).$

- $\forall t \geqslant 0, V(t) = H(t)V_0 + L(V)(t) = H(t)V_0 + H * F(V)(t).$

d'où, par différence :

$$\forall t \geqslant 0,\ U(t) - V(t) = H(t)(U_0 - V_0) + \int_0^t H(t-s)(F(U(s)) - F(V(s)))ds.$$

Alors

$$\forall t \geqslant 0,\ |U(t) - V(t)|_{Y^{\mu}} \leqslant |U_0 - V_0|_{Y^{\mu}} + M\int_0^t |U(s) - V(s)|_{Y^{\mu}}\, ds.$$

Car $\|H(t)\|_{\mathcal{L}(Y^{\mu})} \leqslant 1, \forall t \geqslant 0.$

Par le lemme de Gronwall, on obtient donc :

$$\forall t \geqslant 0,\ |U(t) - V(t)|_{Y^{\mu}} \leqslant |U_0 - V_0|_{Y^{\mu}} \exp\left(M\int_0^t ds\right) \leqslant |U_0 - V_0|_{Y^{\mu}} \exp\left(Mt\right).$$

Or, $U_0 = V_0$ si U et V sont solutions généralisées de *(2.3.35)*. Donc $U = V$.

En choisissant le λ et le T satisfaisant *(2.3.46) et (2.3.48)*, le théorème de point fixe et le lemme de Gronwall assurent l'existence et l'unicité.

Finalement, nous prouvons la continuité de la solution

Troisième étape. continuité de la solution.

Nous avons obtenu l'existence et l'unicité d'une solution $U = (u, u_t) \in X \subset L^q(0, T; Y^\rho)$ où le ρ et le q satisfont *(2.3.1)*. Montrons que $U \in L^{q'}(0, T; Y^{\rho'})$ pour tout ρ' et q' satisfaisant *(2.3.1)*. C'est un calcul semblable à *la première étape*.

En effet,

$\left\|U; L^{q'}(0, T; Y^{\rho'})\right\| \leqslant C \left\| |u_t|^p ; L^1(0, T; Y^{\mu-1})\right\| + \|U_0; Y^\mu\|$; ceci D'après *(2.3.4) et (2.3.40)*

maintenant selon *(2.3.44) et (2.3.45)* , alors:

$$\left\|U; L^{q'}(0, T; Y^{\rho'})\right\| \leqslant CT^\varepsilon \|U; L^q(0, T; Y^\rho)\|^p + \|U_0; Y^\mu\| < \infty.$$

• En particulier $U \in L^\infty(0, T; Y^\mu)$. Maintenant, en utilisant *(2.3.36)*, pour $0 \leqslant t_0 \leqslant t$, nous avons

$$\|U(t) - U(t_0); L^\infty(t_0, t; Y^\mu)\| \leqslant \|U(t) - H(t - t_0)U_0; L^\infty(t_0, t; Y^\mu)\|$$

$$+ \|U(t_0) - H(t - t_0)U_0; L^\infty(t_0, t; Y^\mu)\|$$

Comme dans la première étape

$$\|U(t) - H(t - t_0)U_0; L^\infty(t_0, t; Y^\mu)\| \leqslant C(t - t_0)^\varepsilon \|U(t); L^q(t_0, t; Y^\rho)\|^p \longrightarrow 0$$

et la continuité forte du $\mathcal{C}_0$- groupe H associé à l'équation d'ondes implique que:

$$\lim_{t \to t_0} \|H(t - t_0)U_0 - U_0; L^\infty(t_0, t; Y^\mu)\| = 0$$

Par conséquent , $U \in C^0([0, T] ; Y^\mu)$. ■

Théorème 2.3.2. *(cas p nombre reel)* Soient $1 \leqslant n \leqslant 3, \mu \in (1,2) \cup \mathbb{N}^*$ et $p \in (1,\infty) \cap [\mu-1,\infty)$. Alors pour chaque $(u_0,u_1) \in Y^\mu \cap Y^{2,\infty}$, il existe $T>0$ et une solution unique $(u,u_t) \in \mathcal{C}^0([0,T];(L^\infty \cap H^\mu) \times (L^\infty \cap H^{\mu-1})(\mathbb{R}^n))$ de *(2.1.1)*.

Preuve. En utilisant *la proposition 2.3.2*, la preuve est semblable à celle de **Théorème 2.3.1.** où nous employons *la proposition 2.3.5* au lieu de *la proposition 2.3.3.* ■

REMARQUE 18. Malheureusement, pour ce dernier théorème, nous ne prenons pas l'alternative maximale du temps. La raison est que l'utilisation du *théorème de point fixe*, pour $(u_0,u_1) \in Y^\mu \cap Y^{2,\infty}$, il existe une solution dans $\mathcal{C}([0,T]\,;Y^\mu \cap L^\infty)$. afin d'obtenir le temps maximal, nous devons procéder par l'itération : commencer l'itération avec $(u(T),u_t(T))$ comme les nouvelles données initiales et employer le théorème de point fixe encore.

Mais, $(u(T),u_t(T))$ n'est pas nécessairement dans $Y^\mu \cap Y^{2,\infty}$.

Chapitre 3

Un exemple et un contre -exemple d'équation hyperbolique non linéaire

On désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\Gamma = \partial\Omega$ sa frontière (assez-régulière) et par Q l'ouvert $\Omega\times]0, T[$, T fini. On désigne aussi par $\Sigma = \Gamma\times]0, T[$ la frontière latérale de Q.

3.1 Position du problème

Soient $\rho > 0$ et $u' = \frac{\partial u}{\partial t}, u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, on résout l'équation

$$u'' - \Delta u + |u'|^\rho\, u' = f, \text{ dans } Q, \tag{3.1.1}$$

avec les conditions aux limites et initiales

$$u = 0 \text{ sur } \Sigma, \tag{3.1.2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u'(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega. \tag{3.1.3}$$

3.2 Existence et unicité

3.2.1 Théorèmes d'existence

Théorème1(1) Soit E un espace de Banach réflexif de norme strictement convexe, ainsi que celle de son dual F. Soit L un opérateur linéaire de $D(L)$ sous espace dense de E , à valeurs dans F, L étant maximal monotone. Soit A un opérateur de $E \to F$, pseudo-monotone, coercif, donc :

$$\frac{(A(v),v)}{\|v\|} \to +\infty \ si \ \|v\| \to +\infty.$$

Alors,

$$\forall f \in F, \exists u \in D(L) \ \ tel \ que \ Lu + A(u) = f.$$

Théorème2(1) Soit E un espace de Banach réflexif de norme strictement convexe, ainsi que celle de son dual F. Soit L un opérateur linéaire de $D(L)$ sous espace dense de E , à valeurs dans F, L étant maximal monotone. Soit A un opérateur de $D(L)$, (et non E tout entier) $\to F$ vérifiant les hypothèses suivantes :

$$\left\{\begin{array}{c} si \ u_j \to u \ \ dans \ E \ faible, \\ u_j \in D(L), u \in D(L), Lu_j \to Lu \ dans \ F \ faible, \\ et \ \lim_{j\to\infty} \sup(A(u_j), u_j - u) \leqslant 0 \ alors \ \lim_{j\to\infty} \inf(A(u_j), u_j - v) \geqslant (A(u), u - v), \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} il \ existe \ une \ fonction \ \lambda \mapsto \psi(\lambda) \ de \ \lambda > 0 \to \mathbb{R}_+ \ bornée \ sur \ tout \ compact, \\ et \ il \ existe \ un \ nombre \ \theta, \ 0 \leqslant \theta < 1 \ tels \ que : \\ \|A(u)\|_* \leqslant \psi \|u\| + \theta \|Lu\|_*, \ \forall u \in D(L). \end{array}\right.$$

$$\forall f \in F, \exists u \in D(L) \ \ solutionde \ Lu + A(u) = f.$$

(1)**Preuve.** (voir J. L. lions [31]).■

3.2.2 Existence

Théorème 3.2.1 On suppose que Ω est un ouvert borné ,de frontière régulière. Soient f, u_0 et u_1 telles que:

$$f \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), f' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q), \tag{3.2.1}$$

$$u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \tag{3.2.2}$$

$$u_1 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{2(\rho+1)}(\Omega). \tag{3.2.3}$$

Il existe alors une fonction u ,solution de *(3.1.1) (3.1.2) (3.1.3)* , avec

$$u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \tag{3.2.4}$$

$$u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.2.5}$$

$$u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.2.6}$$

$$u' \in L^{\rho+2}(Q). \tag{3.2.7}$$

Preuve.

1° Solution approchée.

on va utiliser la méthode de *Faedo-Galerkin* avec une base spéciale. Soient w_j les fonctions propres de $-\Delta$ pour le problème de Dirichlet :

$$-\Delta w_j = \lambda_j w_j, j = 1, ..., w_j = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{3.2.8}$$

On suppose la frontière Γ de Ω assez régulière pour que

$$w_j \in H^2(\Omega) \text{ et } w_j \in L^{2(\rho+1)}(\Omega). \tag{3.2.9}$$

On choisit $u_{0m}, u_{1m} \in [w_1, ..., w_m]$ de façon que

$$u_{0m} \to u_0 \text{ dans } H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \tag{3.2.10}$$

$$u_{1m} \to u_1 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \cap L^{2(\rho+1)}(\Omega). \tag{3.2.11}$$

On définit alors $u_m(t)$ solution de

$$\begin{cases} (u_m''(t), w_j) + a(u_m(t), w_j) + (|u_m'(t)|^\rho \, u_m'(t), w_j) = (f(t), w_j), \\ 1 \leqslant j \leqslant m, \quad u_m(t) \in [w_1, ..., w_m], \end{cases} \tag{3.2.12}$$

$$\left(o\grave{u} \quad a(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx \right),$$

$$u_m(0) = u_{0m}, \qquad u_m'(0) = u_{1m}. \tag{3.2.13}$$

Le système *(3.2.12)* *(3.2.13)* admet une solution locale dans $[0, t_m]$.

Les estimations a priori qui suivent montreront que $t_m = T$.

2° Estimation a priori (I).

Si

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{n} g_{jm}(t) w_j,$$

on multiplie *(3.2.12)* par $g_{jm}'(t)$ et on somme en j ; il vient

$$(u_m''(t), u_m'(t)) + a(u_m(t), u_m'(t)) + (|u_m'(t)|^\rho \, u_m'(t), u_m'(t)) = (f(t), u_m'(t)) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u_m'(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2) + \int_\Omega |u_m'(t)|^{\rho+2} \, dx = (f(t), u_m'(t))^{(1)}$$

on intégrant entre $0, t$ on en déduit :

$$\frac{1}{2}(|u_m'(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2) + \int_0^t \int_\Omega |u_m'(x,\sigma)|^{\rho+2} \, dx d\sigma = \int_0^t (f(\sigma), u_m'(\sigma)) d\sigma + \frac{1}{2}(|u_{1m}|^2 + \|u_{0m}\|^2), \tag{3.2.14}$$

$^{(1)}$ $\|v\| = \sqrt{a(v,v)}$ (= norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à $\|v\|_{H^1(\Omega)}$).

D'après *(3.2.10) (3.2.11)* et l'inégalité de *Cauchy-Schwartz* et l'inégalité $ab \leqslant \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ on a :

$$\frac{1}{2}(|u_{1m}|^2 + \|u_{0m}\|^2) + \int_0^t (f(\sigma), u'_m(\sigma))d\sigma \leqslant C + \frac{1}{2}\int_0^t |f(\sigma)|^2 \, d\sigma + \frac{1}{2}\int_0^t |u'_m(\sigma)|^2 \, d\sigma$$

D'après *(3.2.1)* ,

$$\int_0^t |f(\sigma)|^2 \, d\sigma \leqslant cste. \tag{3.2.15}$$

On déduit donc, en particulier,

$$|u'_m(t)|^2 \leqslant C + \int_0^t |u'_m(\sigma)|^2 \, d\sigma, \tag{3.2.16}$$

d'où résulte que

$$|u'_m(t)| \leqslant cste \;\; (\text{indépendante de } m). \tag{3.2.17}$$

D'après *(3.2.15) (3.2.17)* on a :

$$|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 \leqslant C, \tag{3.2.18}$$

$$\int_Q |u'_m(t)|^{\rho+2} \, dxdt \leqslant C. \tag{3.2.19}$$

Cela suffit à montrer que $t_m = T \quad \forall m.$

3° Estimation a priori (II).

Grâce à *(3.2.8)* on peut remplacer dans *(3.2.12)* w_j par $-\Delta w_j$ et multipliant encore par $g'_{jm}(t)$ et sommant en j, on en déduit

$$a(u''_m(t), u'_m(t)) + (\Delta u_m(t), \Delta u'_m(t)) + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(|u'_m|^\rho \, u'_m)\frac{\partial u'_m}{\partial x_i} dx = a(f(t), u'_m(t)). \tag{3.2.20}$$

Le terme non bilinéaire de *(3.2.20)* vaut

$$(\rho+1)\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left(|u'_m|^{\frac{\rho}{2}}\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}\right)^2 dx = \frac{(\rho+1)}{(\frac{\rho}{2}+1)^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(|u'_m|^{\frac{\rho}{2}}\,u'_m)\right)^2 dx$$

et l'on déduit donc de *(3.2.20)* :

$$\frac{1}{2}(\|u'_m(t)\|^2+|\Delta u_m(t)|^2)+\frac{(\rho+1)}{(\frac{\rho}{2}+1)^2}\int_0^t\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(|u'_m|^{\frac{\rho}{2}}\,u'_m)\right)^2 dxd\sigma$$

$$=\frac{1}{2}(\|u_{1m}\|^2+|\Delta u_{0m}|^2)+\int_0^t a(f(\sigma),u'_m(\sigma))d\sigma. \tag{3.2.21}$$

Utilisant *(3.2.10)* *(3.2.11)* on en déduit :

$$u'_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.2.22}$$

$$u_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0,T;H^2(\Omega)),^{(1)} \tag{3.2.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(|u'_m|^{\frac{\rho}{2}}\,u'_m) \text{ demeure dans un borné de } L^2(Q), i=1,...,n. \tag{3.2.24}$$

4° Estimation a priori (III).

On déduit de *(3.2.12)* :

$$|u''_m(0)|^2=(\Delta u_{0m},u''_m(0))+(f(0),u''_m(0))-(|u_{1m}|^{\rho}\,u_{1m},u''_m(0)),$$

d'où

$$|u''_m(0)|\leqslant|\Delta u_{0m}|+|f(0)|+\left(\int_{\Omega}|u_{1m}|^{2(\rho+1)}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

et donc, grâce à *(3.2.10) (3.2.11)* :

(1) On utilise ici l'inégalité $|\Delta\varphi|\geqslant C\,\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}$ pour $\varphi\in H_0^1(\Omega),\Delta\varphi\in L^2(\Omega)$, valable, Γ étant assez régulière.

$$|u_m''(0)| \leqslant C. \tag{3.2.25}$$

Dérivons *(3.2.12)* en t ; il vient :

$$(u_m'''(t), w_j) + a(u_m'(t), w_j) + (\rho+1)(|u_m'(t)|^\rho \, u_m''(t), w_j) = (f'(t), w_j). \tag{3.2.26}$$

Multipliant par $g_{jm}''(t)$ et sommant en j , on en déduit :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u_m''(t)|^2 + \|u_m'(t)\|^2) + (\rho+1)\int_\Omega |u_m'(t)|^\rho \, u_m''(t)^2 dx = (f'(t), u_m''(t)). \tag{3.2.27}$$

Le terme non bilinéaire dans *(3.2.27)* vaut

$$\frac{(\rho+1)}{(\frac{\rho}{2}+1)^2}\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial t}(|u_m'(t)|^{\frac{\rho}{2}} \, u_m'(t))\right)^2 dx.$$

On déduit donc de *(3.2.27)* que

$$\frac{1}{2}(|u_m''(t)|^2 + \|u_m'(t)\|^2) + \frac{(\rho+1)}{(\frac{\rho}{2}+1)^2}\int_0^t\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial t}(|u_m'(t)|^{\frac{\rho}{2}} \, u_m'(t))\right)^2 dx d\sigma$$

$$= \frac{1}{2}(|u_m''(0)|^2 + \|u_{1m}\|^2) + \int_0^t (f'(\sigma), u_m''(\sigma)) d\sigma. \tag{3.2.28}$$

Grâce à *(3.2.25)* on en déduit donc encore une fois *(3.2.22)* et

$$u_m'' \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.2.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u_m'|^{\frac{\rho}{2}} \, u_m') \text{ demeure dans un borné de } L^2(Q). \tag{3.2.30}$$

5° Passage à la limite.

D'après *(3.2.18) (3.2.23)* on a :

u_m est borné dans $L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$ alors est borné dans $L^2(0,T;H^2(\Omega))$. Donc il existe une sous suite de u_m, u_μ telle que, comme $L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$ $\{resp.$ de $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\}$ est le dual de $L^1(0,T;H^2(\Omega)'+H^{-1}(\Omega))$ [(1)] $\{resp.$ de $L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))\}$.

Donc d'après *la proposition 1.2.3* (v) on a :

$\forall g \in L^1(0,T;H^2(\Omega)'+H^{-1}(\Omega))$:

$$\int_0^T (u_\mu(t), g(t)dt \underset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u(t), g(t)dt.$$

Qui implique

$$u_\mu \longrightarrow u \ faible \ dans \ L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \ et \ dans \ L^2(0,T;H^2(\Omega)),^{(2)} \tag{3.2.31}$$

Donc

$$\exists u'_\mu \longrightarrow u' \ dans \ D'(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$$

$$\Rightarrow u'_\mu \longrightarrow u' \ faible \ dans \ L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) et \ dans \ L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).^{(3)} \tag{3.2.32}$$

Alors en particulier u_m borné dans $H^1(Q)$ mais on sait que l'injection suivante est compact :

$$H^1(Q) \hookrightarrow L^2(Q). \tag{3.2.33}$$

Donc, on peut supposer que la suite u_μ extraite de u_m qui vérifie *(3.2.31) (3.2.32)* , donc u, u' existe et dans $L^2(Q)$ alors :

$$\begin{cases} u_\mu \longrightarrow u \ \text{ dans } L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \ \text{ fort (p.p)}, \\ u'_\mu \longrightarrow u' \ \text{ dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \ \text{ fort (p.p)}. \end{cases} \tag{3.2.34}$$

Etudier la convergence de $|u'_m|^\rho u'_m$:

(1) $H^2(\Omega)'+H^{-1}(\Omega)$ est muni de la structure de dual fort de $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$.

(2) « weak- star » ou « faible étoile »

(3) la limite «weak- star» de u'_μ est nécessairement u'.

$|u'_m|^\rho u'_m$ étant dans un borné de $L^\infty(0,T;L^{(\rho+2)'}(\Omega))$, donc on pose :

$$\left|u'_\mu\right|^\rho u'_\mu \longrightarrow \omega \text{ } dans \ \ L^\infty(0,T;L^{(\rho+2)'}(\Omega)), \tag{3.2.35}$$

Montrant que

$$\omega = |u'|^\rho u' \tag{3.2.36}$$

Pour cela on donne le lemme suivant :

Lemme 10 . Soit O un ouvert borné de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, g_μ et g des fonctions de $L^q(O)$, $1 < q < \infty$, telles que

$$\|g_\mu\|_{L^q(O)} \leqslant c, \ g_\mu \to g \ p.p. \ dans \ O$$

Alors

$$g_\mu \to g \ dans \ \ L^q \ \ faible.$$

Quand pose, $O = Q$ et $g_\mu = \left|u'_\mu\right|^\rho u'_\mu$, d'après *(3.2.34)*

$$u'_\mu \to u' \quad dans \ L^2(Q) \ \ (p.p).$$

Donc

$$g_\mu = \left|u'_\mu\right|^\rho u'_\mu \rightharpoonup |u'|^\rho u' = g \ \ (p.p) \ \ dans \ L^{(\rho+2)'}(Q).$$

Telle que $(\rho+2)' = \frac{\rho+2}{\rho+1} = q$ et d'aprés *(3.2.35)*

$$\left|u'_\mu\right|^\rho u'_\mu \rightharpoonup \omega \ \ dans \ L^{(\rho+2)/(\rho+1)}(Q).$$

Mais la limite est unique donc

$$g = |u'|^\rho u' = \omega.$$

D'après *(3.2.30)* et la même méthode on a :

$$\left|u'_\mu\right|^{\frac{\varrho}{2}} u'_\mu \rightharpoonup \chi \ \ dans \ \ H^1(Q).$$

On montre que cette solution vérifié l'équation des solutions approchées, donc quand pose $m = \mu$ et j fixe et qui $\mu > j$ alors :

$$(u''_\mu(t), w_j) + a(u_\mu(t), w_j) + (\left|u'_\mu(t)\right|^\rho u'_\mu(t), w_j) = (f(t), w_j) \tag{3.2.37}$$

D'après *(3.2.31)*

$$a(u_\mu, w_j) \rightharpoonup a(u, w_j) \ dans \ L^\infty(0,T).$$

$$(u'_\mu, w_j) \rightharpoonup (u', w_j) \ dans \ L^\infty(0,T) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(u'_\mu, w_j) = (u''_\mu, w_j) \rightarrow (u'', w_j) \ dans \ D'(0,T),$$

Et d'après *(3.2.35) (3.2.36)*

$$(\left|u'_\mu\right|^\rho u'_\mu, w_j) \rightharpoonup (\left|u'\right|^\rho u', w_j) \ \ dans \ L^\infty(0,T).$$

On déduit donc de *(3.2.37)* que

$$(u'', w_j) + a(u, w_j) + (\left|u'\right|^\rho u', w_j) = (f, w_j).$$

D'après la densité de la base $\{w_j\}$ dans l'espace séparable $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, on a :

$$(u'', v) + a(u, v) + (\left|u'\right|^\rho u', v) = (f, v), \ \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Alors la solution u satisfait *(3.1.1) (3.2.4) (3.2.5) (3.2.6)* et *(3.2.7)*.

Reste à montrer que la solution u vérifié les conditions initiales *(3.1.3)* , $u(0) = u_0, u'(0) = u_1$.

D'après *(3.2.31) (3.2.32)* et *le lemme 4* on a :

Donc u_μ est continue sur $[0,T]$ alors continue en 0 donc :

$$u_{0\mu} = u_\mu(0) \to u(0) = u_0 \ \ dans\ H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Et encore

$$(u'_\mu, w_j) \rightharpoonup (u', w_j)\ dans\ L^\infty(0,T),$$

$$(u''_\mu, w_j) \rightharpoonup (u'', w_j)\ dans\ L^\infty(0,T).$$

D'après *le lemme 4*

$$(u'_\mu(0), w_j) \rightharpoonup (u', w_j)\ |_{t=0} = (u'(0), w_j),$$

et d'après *(3.2.13)*

$$(u'_\mu(0), w_j) \rightharpoonup (u_1, w_j).$$

On a

$$(u'(0), w_j) = (u_1, w_j), \forall j.$$

Alors

$$u'(0) = u_1.$$

D'où *(3.1.3)*. ■

3.2.3 Unicité

Lunicité est immédiate [(1)] ; si u et v sont deux solutions, alors $w = u - v$ vérifie

$$w'' - \Delta w + |u'|^\rho\, u' - |v'|^\rho\, v' = 0. \tag{3.2.38}$$

Prenant le produit scalaire des deux membres de *(3.2.38)* avec $w'(t)$, on obtient

[(1)] Et valable dans des conditions plus générales

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2) + \int_\Omega (\, |u'|^\rho \, u' - |v'|^\rho \, v')(u' - v')dx = 0. \tag{3.2.39}$$

où

$$\|\varphi\|^2 = \int_\Omega (\, \operatorname{grad} \varphi)^2 dx. \tag{3.2.40}$$

Mais — et c'est le premier exemple de monotonie que nous rencontrons —

$$\int_\Omega (\, |u'|^\rho \, u' - |v'|^\rho \, v')(u' - v')dx \geqslant 0 \tag{3.2.41}$$

de sorte que *(3.2.39)* donne

$$\frac{d}{dt}(|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2) \leqslant 0 \tag{3.2.42}$$

d'où $w = 0$. ■

Chapitre 4

Un autre exemple d'équation hyperbolique non linéaire

4.1 Position du problème

On reprend le problème posé au *Chapitre 3.* En changeant ρ en $p-2$, il s'agit de trouver une fonction u satisfaisant à

$$u'' - \Delta u + |u'|^{p-2}\, u' = f \quad dans \quad Q = \Omega \times]0, T[\,, \quad (1 < p < \infty), \tag{4.1.1}$$

$$u = 0 \; sur \;\; \Sigma, \tag{4.1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), u'(x,0) = u_1(x), x \in \Omega. \tag{4.1.3}$$

On démontre le résultat suivant:

Théorème 4.1.1 — On suppose que f, u_0, u_1 sont données avec

$$f \in L^2(Q) + L^{p'}(Q)^{(1)} \tag{4.1.4}$$

$$u_0 \in H_0^1(\Omega),\;\; u_1 \in L^2(\Omega). \tag{4.1.5}$$

---

(1) Comme d'ordinaire $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Evidemment, Ω étant supposé borné, (4.1.4) équivaut à $f \in L^{\inf(2,p')}(Q)$.

Il existe alors une fonction u et une seule telle que

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{4.1.6}$$

$$u' \in L^p(Q), \tag{4.1.7}$$

et les conditions *(4.1.1) (4.1.2) (4.1.3).*

REMARQUE 19.

1) La condition *(4.1.2)* est en fait entraînée par l'appartenance de u à $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$.

2) La condition *(4.1.7)* est évidemment inutile si $p < 2$.

3) Il résulte de *(4.1.1)* et de *(4.1.6) (4.1.7)* que

$$u'' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) + L^{p'}(Q), \tag{4.1.8}$$

de sorte que $u'(0)$ a un sens et la deuxième condition *(4.1.3)* a un sens.

REMARQUE 20.

Les hypothèses sur les données sont moins fortes que dans le *Théorème 3.2.1, Chapitre 3*, et (naturellement) la solution obtenue est plus faible. On observe encore une fois un exemple du phénomène général : la méthode de monotonie (lorsqu'elle s'applique !) permet de passer à la limite avec moins d'estimations a priori que la méthode de compacité et permet donc d'obtenir des solutions plus faibles avec moins d'hypothèses sur les données.

On va démontrer le *Théorème 4.1.1* dans les deux numéros suivants.

4.1.1 Démonstration de l'existence

Notations :

$$V = H_0^1(\Omega),\ H = L^2(\Omega),\ a(u,v) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx,$$

$$B(v) = |v|^{p-2}v,\ (f,g) = \int_\Omega fg dx,\ |f| = (f,f)^{\frac{1}{2}},\ \|v\| = a(v,v)^{\frac{1}{2}}.$$

1) On applique la méthode de Faedo-Galerkin avec une « base » $w_1 ... w_m ...$de l'espace $V \cap L^p(\Omega)$.

Soit donc $u_m(t) \in [w_1 ..., w_m]$ caractérisé (localement en t) par

$$(u_m'', w_j) + a(u_m, w_j) + (B(u_m'(t)), w_j) = (f(t), w_j), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{4.1.9}$$

$$u_m(0) = u_{0m} \in [w_1, ..., w_m], \quad u_{0m} \to u_0 \qquad \textit{dans } V, \tag{4.1.10}$$

$$u_m'(0) = u_{1m} \in [w_1, ..., w_m], \quad u_{1m} \to u_1 \qquad \textit{dans } H. \tag{4.1.11}$$

Les mêmes estimations a priori qu'au *n 3.2, Chapitre 3*, montrent que

$$\begin{cases} u_m & \text{demeure dans un borné de } L^\infty(0,T;V), \\ u_m' & \text{demeure dans un borné de } L^\infty(0,T;H) \cap L^p(Q). \end{cases} \tag{4.1.12}$$

On va voir que ces estimations, et la monotonie, suffisent pour passer à la limite.

2) D'après *(4.1.12)* on peut extraire une suite u_μ telle que

$$\begin{cases} u_\mu \to u & \text{dans } L^\infty(0,T;V) \text{ faible étoile }, \\ u_\mu' \to u' & \text{dans } L^\infty(0,T;H) \text{ faible étoile et dans } L^p(Q) \text{ faible }. \end{cases} \tag{4.1.13}$$

$$B(u_\mu') \to \chi \quad dans \quad L^{p'}(Q) \;\; faible. \tag{4.1.14}$$

D'après *(4.1.13)*, $u_\mu(0) \to u(0)$ dans H faible (en particulier) et donc $u(0) = u_0$. Appliquant *(4.1.9)* pour $m = \mu$ et j fixé, on voit que

$$(u'', w_j) + a(u, w_j) + (\chi, w_j) = (f, w_j), \quad \forall w_j$$

et par conséquent

$$(u'', v) + a(u, v) + (\chi, v) = (f, v), \quad \forall v \in V \cap L^p(\Omega),$$

et donc

$$u'' + Au + \chi = f, \quad (A = -\Delta). \tag{4.1.15}$$

On a donc *(4.1.8)*. Par ailleurs on a ainsi obtenu que

$$\frac{d}{dt}(u'_\mu, w_j) \to (f, w_j) - a(u, w_j) - (\chi, w_j) = \frac{d}{dt}(u', w_j)$$

dans $L^2(0,T) + L^{p'}(0,T)$ faible, donc

$$(u'_\mu, w_j) \mid_{t=0} = (u_{1\mu}, w_j) \to (u'(0), w_j)$$

et par conséquent

$$(u_1, w_j) \to (u'(0), w_j) \quad \forall j, \quad \textit{donc } u'(0) = u_1.$$

On aura donc démontré l'existence si l'on vérifie que

$$\chi = B(u'). \tag{4.1.16}$$

3) On vérifie plus loin le

Lemme 11[(1)] — Soit w une fonction satisfaisant à

$$w \in L^\infty(0,T;V), \ w' \in L^\infty(0,T;H) \cap L^p(0,T;L^p(\Omega)), \tag{4.1.17}$$

$$\begin{cases} \quad w'' + Aw = g, \quad g \in L^2(0,T;H) + L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega)), \\ w(0) = u_0, \qquad w'(0) = u_1. \end{cases} \tag{4.1.18}$$

Alors, pour presque tout $t \in [0,T]$, on a [(2)] :

$$a(w(t), w(t)) + |w'(t)|^2 \geqslant a(u_0, u_0) + |u_1|^2 + 2\int_0^t (g, w')d\sigma. \tag{4.1.19}$$

Nous allons en déduire que

$$\begin{cases} \liminf \int_0^t \big(B(u'_\mu) - B(\varphi), u'_\mu - \varphi\big)\, d\sigma \leqslant \int_0^t (\chi - B(\varphi), u' - \varphi) d\sigma \\ \forall t \qquad \text{non exceptionnel dans } \textit{(4.1.19)}, \qquad \forall \varphi \in L^p(Q). \end{cases} \tag{4.1.20}$$

En fait pour montrer *(4.1.20)* il suffit de vérifier que

(1) Vérification du **Lemme 11** (voir [31,p.225])

(2) Il y a égalité dans *(4.1.19)* si $u_0 = 0, u_1 = 0$.

$$\liminf \int_0^t \left(B(u'_\mu), u'_\mu\right) d\sigma \leqslant \int_0^t (\chi, u')d\sigma. \tag{4.1.21}$$

Or on déduit de *(4.1.9)* que

$$\frac{1}{2}a(u_\mu(t), u_\mu(t)) + \frac{1}{2}\left|u'_\mu(t)\right|^2 + \int_0^t \left(B(u'_\mu), u'_\mu\right) d\sigma$$

$$= \frac{1}{2}a(u_{0\mu}, u_{0\mu}) + \frac{1}{2}\left|u_{1\mu}\right|^2 + \int_0^t (f, u'_\mu)d\sigma \tag{4.1.22}$$

Mais pour t fixé on peut supposer (d'après *(4.1.12)* et après nouvelle extraction éventuelle de sous-suite) que

$$u_\mu(t) \to \psi_0 \quad dans \quad V \ faible, \quad u'_\mu(t) \to \psi_1 \quad dans \quad H \ faible.$$

On vérifie, par un raisonnement analogue à celui fait à la fin du 2), que

$$\psi_0 = u(t), \quad \psi_1 = u'(t).$$

On déduit alors de *(4.1.22)* que

$$\frac{1}{2}a(u(t), u(t)) + \frac{1}{2}\left|u'(t)\right|^2 + \liminf \int_0^t \left(B(u'_\mu), u'_\mu\right) d\sigma$$

$$\leqslant \frac{1}{2}a(u_0, u_0) + \frac{1}{2}\left|u_1\right|^2 + \int_0^t (f, u')d\sigma. \tag{4.1.23}$$

Mais d'après *(4.1.15)* on peut appliquer le *Lemme 11* à u en prenant $g = f - \chi$.

On déduit alors de*(4.1.23)* que

$$\liminf \int_0^t \left(B(u'_\mu), u'_\mu\right) d\sigma \leqslant \int_0^t (f, u')d\sigma + \int_0^t (\chi - f, u')d\sigma$$

d'où *(4.1.21)* et *(4.1.20)*.

D'après la monotonie de B , on a :

$$\int_0^t \big(B(u'_\mu) - B(\varphi), u'_\mu - \varphi\big)\, d\sigma \geqslant 0$$

et par conséquent *(4.1.20)* entraîne :

$$\int_0^t (\chi - B(\varphi), u' - \varphi)\, d\sigma \geqslant 0$$

$\forall t$ non exceptionnel dans *(4.1.19)* ; prenant $t = t_k \to T$, t_k non exceptionnel, on en déduit que

$$\int_0^T (\chi - B(\varphi), u' - \varphi)\, dt \geqslant 0 \qquad \forall \varphi \in L^p(Q) \tag{4.1.24}$$

d'où résulte *(4.1.16)* par le procédé habituel. ∎

4.1.2 Démonstration de l'unicité

Démontrons d'abord qu'il y a égalité dans *(4.1.19)* si $u_0 = 0, u_1 = 0$ i. e.

$$a(w(t), w(t)) + |w'(t)|^2 = 2\int_0^t (g, w')\, d\sigma. \tag{4.1.25}$$

Soient alors u_1 et u_2 deux solutions du problème. Posant $u_1 = u_2 = w$ on a :

$$w'' + Aw = -(B(u'_1) - B(u'_2)), \qquad w(0) = 0, \qquad w'(0) = 0;$$

l'égalité *(4.1.8)* donne alors :

$$a(w(t), w(t)) + |w'(t)|^2 = -2\int_0^t (B(u'_1) - B(u'_2), u'_1 - u'_2)\, d\sigma \leqslant 0$$

(par la monotonie de B) d'où $w = 0$. ∎

4.2 Un résultat de régularité

Dans le troisième et le quatrième chapitre, On a déjà introduit et utilisé l'espace de Sobolev (d'ordre 1et 2). Plus généralement, on étend le resultat à des espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ d'ordre quelconque m.

4.3 Conclusion

Dans ce mémoire on a montré l'existence locale et l'unicité des solutions pour une équation d'onde semi- linéaire accrétive avec des conditions initiales , en utilisant le théorème de Hille-Yosida. Nous avons donné un exemple et un contre -exemple d'équation hyperbolique non linéaire avec des conditions initiales et des condition aux limites de Dirichlet. On a démontré l'existence, l'unicité des solutions par la méthode (de Faedo-Galerkin).

Perspectives

Il serait souhaitable d'étudier

1 • Peut-on résoudre l'équation

$$u'' - \Delta u + |u'|^{\rho} u' = f$$

dans un ouvert non cylindrique (avec les conditions aux limites et initiales appropriées) ?

2 • A-t-on pour l'équation (par exemple)

$$u'' - \Delta u + (u')^3 = f$$

des résultats analogues à ceux indiqués brièvement à *la Remarque 21* relatifs à l'équation

$$u'' - \Delta u + (u)^3 = f \quad ?$$

3 • On sait résoudre, par exemple, l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, \qquad u\,|_{\Sigma} = 0, \qquad u(0) = u_0,$$

pour $f \in L^\rho(0,T;L^\sigma(\Omega)), \rho \neq \sigma$, en trouvant u dans les classes « optimales » ($u \in L^\rho(0,T;W^{2,\sigma}(\Omega))$). Peut-on obtenir des résultats analogues pour l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f, \quad u\mid_\Sigma = 0, \quad u(0) = u_0 \ ?$$

4 • Le même problème dans *la quatrième chapitre* avec $1 < p < 2$

et des conditions

$$u(x,0) = u(x,T), \quad u'(x.0) = u'(x.T), \quad x \in \Omega.$$

On donne $f \in L^{p'}(Q)$. Il existe alors une fonction u et une seule vérifiant

$$u = u + u_0, \quad u_0 \in H_0^1(\Omega) + W^{2,p'}(\Omega) \cap W_0^{1,p'}(\Omega),$$

$$u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

$$u' \in L^p(Q).$$

5 • Peut-on trouver des solutions fortes périodiques dans le problème précédent (avec des hypothèses supplémentaires sur f) ?

6 • A-t-on des solutions périodiques pour l'équation

$$u'' - \Delta u + |u|^{p-2}\, u = f \ ?$$

Bibliographie

[1] **Brezis, H.** Analyse fonctionnelle , Théorie et applications. Masson 1983.

[2] **Edwards, R. E.** Functional analysis , theory and applications. Holt-Rinehart and Winston, 1965.

[3] **Robert.A,John.F,** Sobolev spaces , The university of british columbia Vancouver.Canada ,2009.

[4] **Golse.F ,**Distributions, analyse de Fourier,équations aux dérivées partielles, 2012.

[5] **Vo-Khac khoan**, Distributions, analyse de Fourier operateurs aux dérivées partielles, tome 2, Libraire Vuibert, 1972

[6] **M.fabrizio and A.Morro**, Mathématical problems in linear Viscoelasticity, Philadelphia 1992.

[7] **Fanny .D, Federico.V,** Le théorème de Hille-Yosida et ses applications aux problèmes d'évolution semi-linéaires,2006.

[8] **Harikrishnan.P.K,** Some Properties of Accretive Operators in Linear 2-Normed Spaces,2011.

[9] **Weixi, Leijun, Linzhou and Eric**, Nonlinear evolution equations, 2004.

[10] **Robert A. Adams**. Sobolev spaces. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.

[11] **L. HORMANDER**, "The Analysis of Linear Partial Differential Operators, 1" Springer, Berlin, 1983.

[12] **J. GINIBRE AND G. VELO**, Conformal invariance and time decay for nonlinear wave equa-tions, II, Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. 47 (1987), 263-276.

[13] **J. Ginibre and G. Velo**. Generalized Strichartz inequalities for the wave equation. J. Funct. Anal., 133(1):50–68, 1995.

[14] **H. LINDBLAD AND C. D. SoGGE**, On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equations, preprint.

[15] **R. Courant, D. Hilbert**, Methods of Mathematical Physics, Vol. II, Wiley, New York, 1962.

[16] **T. Ogawa**, Well posedness and real analytic method for the nonlinear wave and dispersive equation, Rokko Lecture Note Series in Mathematics, Kobe University, to appear (in Japanese).

[17] **Kenji Nishihara**. Lp-Lq estimates of solutions to the damped wave equation in 3-dimensional space and their application. Math. Z., 244(3):631– 649, 2003.

[18] **Avner Friedman**. Partial differential equations of parabolic type. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.

[19] **A. Haraux and E. Zuazua**. Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems. Arch. Rational Mech. Anal., 100(2):191–206, 1988.

[20] **M. Kopackova**. Remarks on bounded solutions of a semilinear dissipative hyperbolic equation. Comment. Math. Univ. Carolin., 30(4):713–719, 1989.

[21] **Vladimir Georgiev and Grozdena Todorova**. Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms. J. Differential Equations, 109(2):295–308, 1994.

[22] **Salim A. Messaoudi**. Blow up and global existence in a nonlinear viscoelastic wave equation. Math. Nachr., 260:58–66, 2003.

[23] **A. Haraux**. Remarks on the wave equation with a nonlinear term with respect to the velocity. Portugal. Math., 49(4):447–454, 1992.

[24] **M.jazar, R.kiwan**, Blow-up results for some second-order hyperbolic inequalities with a nonlinear term with respect to the velocity , J.Math. Anal. Appl. 327(2007) 12-22.

[25] **Frank Merle and Hatem Zaag**. Determination of the blow-up rate for the semilinear wave equation. Amer. J. Math., 125(5):1147–1164, 2003.

[26] **Jalal Shatah and Michael Struwe**. Geometric wave equations. 2:viii+153, 1998.

[27] **Hans Triebel**. Theory of function spaces, volume 78 of Monographs in Mathematics. Birkh¨auser Verlag, Basel, 1983.

[28] **J.Lions et E.Magenes**. Problèmes aux limites non homogenes et applications , Volume 1 et 2.Paris (1968).

[29] **J.L. Lions**. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires. Dunod, Gauthier-Villars, Paris (1969).

[30] **Jean-Pierre RAYMOND.** Équations d'évolution, Université Paul Sabatier.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est l'étude de l'existence locale et de l'unicité des solutions d'une équation d'onde semi-linéaire accrétive .

Pour ce faire , on utilise deux techniques différentes .

La première s'appuie sur le théorème de Hille- Yosida et la seconde technique repose sur la méthode de F. Galerkin .

Mots-clés

Existence, unicité, onde, semi-linéaire, Sobolev.

Summary

The objective of this memory is the study of the local existence and the unicity of the solutions of an equation of accretive semi-linear wave.

With this intention, two different techniques are used.

The first is based on the theorem of Hille- Yosida and the second technique rests on the method of F. Galerkin .

Key words

Existence, unicity, wave, semi-linear, Sobolev.

الخلاصة

إن هدف هذه الأطروحة هو دراسة الوجودية المحلية والوحدانية لحلول معادلة موجة نصف خطية متبددة.

من أجل هذا الغرض استعملنا تقنيتان مختلفتان .

الأولى مستندة على نظرية Hille- Yosida والتقنية الثانية تستند على طريقة F. Galerkin .

الكلمات الدليلية

الوجودية , الوحدانية ,موجة , نصف خطية , سوبولاف