

N° d'ordre : 05/2015-M/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté de Mathématiques



MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Statistiques Mathématiques et Probabilités

Par : Leila-Mabrouka ZEGHIDI

Thème

Etude des Files d'attente avec Catastrophe

Soutenu publiquement, le 05/11/2015, devant le jury composé de :

M^{me} K.DJABALLAH Maître de Conférence/A à l'U.S.T.H.B Présidente
M^{me} H.SAGGOU Maître de Conférence/A à l'U.S.T.H.B Directrice de mémoire
M^{me} D.SEDDIKI-Merad Maître de Conférence/A à l'U.S.T.H.B Examinatrice

Table des matières

Table des matières	1
<i>Résumé</i>	1
<i>Introduction générale</i>	1
<i>Chapitre 1 : Processus aléatoires</i>	4
1 Introduction et Généralités	4
1.1 Définitions	5
1.1.1 Processus de comptage :	6
1.1.2 Processus de Poisson :	7
1.1.3 Processus de Wiener ou mouvement brownien :	7
1.2 Compléments sur la transformée de Laplace	8
1.3 Propriété de la loi exponentielle :	11
1.3.1 Définition	12
1.3.2 Absence de mémoire	13
2 Processus de Markov	16
2.1 Processus de Markov	16
2.1.1 Définitions	16
2.1.2 Equations de Kolmogorov	18
2.1.3 Comportement asymptotique	21
3 Les files d'attente	23
3.1 Les files d'attente simple	23
3.2 Les caractéristiques du système de files d'attente	24

3.2.1	La population	24
3.2.2	Le processus d'arrivée	24
3.2.3	Le processus de service	25
3.2.4	Le nombre de serveurs	25
3.2.5	La capacité de la file	26
3.2.6	La discipline de la file	26
3.3	Notation de classe de clients	28
3.4	La formule de Little	28
3.4.1	Files d'attente Markovienne caractérisées par un processus de naissance et de mort	29
3.4.2	Processus de naissance et de mort général	30
3.5	La file $M/M/1$:	32
3.5.1	Propriétés de base	32
4	Étude de la file $M/G/1$ par la méthode de la variable supplémen- taire	33
4.1	Introduction	
4.2	Notation :	33
4.3	Équation de Chapman-Kolmogorov en régime transitoire :	34
4.4	Équation de chapman-kolmogorov en régime stationnaire :	34
4.5	Fonction génératrice :	35
4.5.1	fonction génératrice du nombre de clients dans la file d'attente : 35	
4.5.2	fonctoin génératrice du nombre de clients dans le système : . .	39
4.6	calcul des performances de la files $M/G/1$:	40
4.6.1	temps moyen d'attente dans le système \bar{W} :	40
4.6.2	nombre moyen de clients dans la file \bar{L}_q :	41
	Chapitre 2 : File $M^{[x]}/G/1$	42

1	Equations de Chapman-Kolmogorov	44
2	Solution stationnaire du modèle	45
2.1	théorème	45
2.2	théorème	48
3	Nombre moyen de clients et le temps moyen dans la file d'attente	49
4	Conclusion	50
	<i>Chapitre 3 : File $M^{[x]}/G/1$ avec vacances</i>	51
1	Notation et modèle mathématique	51
2	Distribution stationnaire des états des système	53
3	Les équations de Chapmane-Kolmogorov	54
3.1	l'équation où l'écoulé égal a zéro ($x = 0$) est	56
4	Solution stationnaire du modèle	56
4.1	théorème	56
4.2	théorème	60
5	Calcule des performances	61
5.1	Nombre moyen de clients dans la file d'attente	61
5.2	Temps moyen d'attente dans la file d'attente	62
6	Cas particulier	62
7	Conclusion	63
	<i>Chapitre 3 : File $M^{[X]}/G/1$ avec panne et réparation</i>	64
1	Notations et modèle mathématique	64

2	Équations de Chapman-Kolmogorov	66
2.1	Solution stationnaire du modèle	68
2.2	théorème	70
3	Calcul de nombre moyen de clients et le temps moyen dans la file d'attente	72
4	Cas particulier	73
4.1	Pas des pannes ni réparations	73
5	Conclusion	73
 <i>Chapitre 5 : File $M^{[X]}/G/1$ avec vacances, panne et réparation</i>		75
1	Notations et modèle mathématique	75
2	Conditions de stabilité	77
2.1	Distribution stationnaire des États du système	78
2.2	Solution stationnaire du modèle	79
2.2.1	Théorème : Si $\rho < 1$ alors	80
3	calcul de performances du modèle	85
3.1	Nombre moyen de clients dans la file d'attente	85
3.2	le temps moyen d'attente dans la file d'attente	86
4	Cas particulier	86
4.1	Pas des panne ni réparation	86
4.2	Pas des vacances	86
4.3	Pas des vacances et pas des pannes ni réparations	87
5	Conclusion	87

<i>hapitre 6 : File d'attente $M/M^{[Y]}/1$ avec vacance multipleet catastrophe</i>	88
1 Notation et modèle mathématique	88
1.1 Description du modèle	90
1.2 Les équation de Chapman-Kolmogorov :	90
2 Évaluation des probabilités stationnaire des états du système	90
2.1 Condition de stabilité	94
3 Performances du système étudié	94
3.1 Nombre moyen de clients dans le système L_s	94
3.2 Nombre moyen de clients dans la file L_q	94
4 Conclusion	94
 <i>hapitre 7 : Applications numériques</i>	 95
1 Application au cas de la file $M^{[X]}/G/1$ avec vacances,pannes et réparation	95
1.1 Les différentes caractéristiques de la file en fonction de α et p	95
2 Application au cas de la file $M/M^{[Y]}/1$ avec vacances et Catastrophe	101
2.1 Les différentes caractéristiques de la file en fonction de k :	101
 <i>Conclusion générale</i>	 106
 <i>Référence</i>	 107
Références	107

Résumé

Dans ce travail, on s'intéressera plus précisément à l'étude des files d'attente à serveur non fiable et vacances. Ce type de modèle trouve son application dans les systèmes de production, stok, système de communication réseaux, ect. . . .

Nous calculons explicitement les fonctions génératrices partielles des états du système en régime stationnaire dans le cas où les arrivées sont groupées, serveur non fiable et vacance.

Par ailleurs, nous avons étudié la file $M/M^{[Y]}/1$ avec catastrophe, nous avons retrouvé explicitement les probabilités d'états de ce système

Mots-clés : File d'attente $M^{[X]}/G/1$, vacance du serveur, panne, réparation, File d'attente $M/M^{[Y]}/1$, vacance multiple, catastrophe , méthode de la variable supplémentaire, Fonction génératrice, Transformée de Laplace.

Introduction générale

La recherche d'une gestion optimale des phénomènes d'attente est un des vastes domaines de la recherche opérationnelle.

La théorie des files d'attente née en 1917 des travaux du savant danois Erlang sur la gestion des réseaux téléphoniques s'attache à modéliser et à analyser des situations en apparences très diverses : attente des clients au guichet, attente des bateaux pour l'accostage, gestion des avions lors de l'atterrissage et le décollage, ou bien encore gestion du stockage des informations et programmes informatiques avant leur exécution.

Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine.

Nous les rencontrons dans les domaines d'activité les plus divers. Les exemples les plus courants de la vie de tous les jours sont les caisses des supermarchés, les établissements des restaurations rapides, les billetteries des aéroports, les cinémas, les bureaux de poste, les banques.

Toutefois, lorsqu'on parle d'attente, nous pensons souvent à des personnes.

Or, les clients en attente sont aussi des commandes en attente de traitement, des camions en attente de chargement ou de déchargement, des machines en attente de réparation, des programmes d'ordinateur qui attendent d'être exécutés, des avions qui attendent l'autorisation de décoller, des bateaux qui attendent les remorqueurs pour accoster, les voitures aux panneaux d'arrêt, les patients dans les salles d'urgence, etc.

Il est devenu inconcevable de construire un système quelconque (que ce soit un

système informatique, un réseau de communication, un système de production ou un système de la vie quotidienne) sans avoir auparavant fait l'analyse des performances.

La pression des enjeux économiques est telle actuellement que l'on ne peut aboutir à un système sous-dimensionné et que l'on doit éviter au maximum le surdimensionnement.

Construire un système adapté respectant le plus possible les objectifs du cahier des charges est une démarche qui passe obligatoirement par une étape de modélisation et d'analyse des performances.

En plus des modélisations analytiques, les simulations sur calculateurs permettront des évaluations relativement précises, mais demandant parfois des temps de calcul qui peuvent être importants si l'on veut reproduire correctement les phénomènes aléatoires et avoir atteint un régime permanent.

Une condition nécessaire pour dimensionner un centre de service est qu'il soit capable d'absorber le débit moyen de clients prévu, condition très facile à vérifier par de simples calculs de débits moyens.

Mais, même avec un système correctement dimensionné, le caractère aléatoire des arrivées et des temps de service rend les attentes impossibles à éviter complètement.

La théorie mathématique des files d'attente étant assez complexe, La théorie des files d'attente s'attache à modéliser et à analyser de nombreuses situations en apparence très diverses, mais qui relèvent néanmoins toutes du schéma descriptif général suivant. Des clients arrivent à intervalles aléatoires dans un système. Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude des files d'attente avec vacances, panne et catastrophes.

Les files d'attente à un seul serveur et service groupé ont plusieurs applications dans le transport, système de production...

les files d'attente avec service groupé ont été étudiés par plusieurs auteurs Bailey, Jaiswal, Neuts, Fakino, Briere et Chaudhry ; Grassmann et Chaudhry ; Kambo et Chaudhry ; Chaudhry et Templeton.

Dans ce mémoire nous allons aussi étudié, les files d'attente avec catastrophe. Une catastrophe en générale consiste un événement soudain par exemple un virus qui pertube gravement le fonctionnement d'un système.

La notion de catastrophes arrivant au hasard, menant à annulation de tous les clients dans le système.

Les catastrophes peuvent arriver de l'extérieur du système ou d'une autre station-service. Dans les systèmes informatiques, si un travail est infecté, ce travail transmet un virus à d'autres processeurs.

Les fichiers (dossiers) Infectés dans des disquettes négligées, par exemple, peuvent aussi arriver aux processeurs selon un certain processus aléatoire. D'où l'étude des systèmes de files d'attente avec catastrophe.

Les réseaux informatiques infectés par un virus peuvent être aussi modélisés par des réseaux des files d'attente avec catastrophe. Les files d'attente avec vacances ont été largement étudiées par beaucoup de chercheurs.

Le premier chapitre de ce travail est un aperçu sur les processus aléatoire.

Le deuxième, le troisième, le quatrième chapitre sont des cas particuliers du cinquième chapitre; on a effectué l'étude détaillée du régime stationnaire d'une file d'attente arrivées groupées, serveur non fiable avec vacances; ceci permet de modéliser les phénomènes de pannes avec réparations. On utilise la technique de la variable supplémentaire pour calculer les performances de la file étudiée.

Le sixième chapitre est l'étude de la file d'attente avec service groupé avec vacances et catastrophe

Enfin la dernière partie de ce mémoire est réservée pour l'application numérique.

Chapitre

1

Processus aléatoires

1 Introduction et Généralités

Les processus aléatoires décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps. Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique (par exemple le ferromagnétisme, les transitions de phases, etc), en biologie (évolution, génétique et génétique des populations), médecine (croissance de tumeurs, épidémie), et bien entendu les sciences de l'ingénieur.

Dans ce dernier domaine, les applications principales sont pour l'administration des réseaux, de l'internet, des télécommunications et bien entendu dans les domaines économique et financier. L'étude des processus aléatoires s'insère dans la théorie des probabilités dont elle constitue l'un des objectifs les plus profonds. Elle soulève des problèmes mathématiques intéressants et souvent très difficiles.

Ce chapitre présente quelques aspects des processus aléatoires utiles à l'ingénieur mathématicien du fait de leur fréquence d'occurrence dans les applications : processus de renouvellement, processus de Markov, mouvement brownien et intégrale stochastique.

1.1 Définitions

On appelle processus aléatoire à temps continu une famille $\{X_t; t \in T\}$ de variables aléatoires indicées par un paramètre réel positif.

L'ensemble T représente un intervalle de temps, et le plus souvent la demi-droite \mathbb{R}_+ .

Les variables sont définies sur un même espace probabilisé.

Dans ce chapitre, nous étudierons des processus à valeurs entières ou réelles.

Nous identifierons parfois, de manière abusive et lorsque les ambiguïtés seront impossibles, processus et variables en notant (X_t) ou $\{X_t\}$ pour désigner le processus.

Pour une éventualité du hasard ω fixée, l'application qui à t associe la valeur $X_t(\omega)$ s'appelle une trajectoire du processus.

Les trajectoires constituent généralement les observations concrètes que l'on peut faire d'un processus.

Par exemple, les journaux publient chaque jour les trajectoires des valeurs boursières.

Un processus est à valeurs entières si $X_t \in \mathbb{N}$, pour tout $t \geq 0$.

Les exemples de processus à valeurs entières sont les processus de Poisson, les processus de renouvellement liés au comptage d'événements survenus au hasard, par exemple les processus liés à l'état d'une file d'attente. Dans les files d'attente, la variable X_t représente en général le nombre de clients dans un système. Ce nombre peut accroître ou décroître en fonction des durées et des stratégies de service. Les processus de branchement décrivant la taille d'une population sont aussi des exemples importants.

Un processus est à valeurs réelles si $X_t \in \mathbb{R}$, pour tout $t \geq 0$.

Les exemples de tels processus sont les mouvements browniens décrivant par exemple les cours des marchés financiers, les processus de Poisson composés ou les capitaux de sociétés (e.g., compagnies d'assurance).

La loi d'un processus aléatoire est caractérisé par la donnée des lois fini-dimensionnelles.

Nous considérons en particulier des processus à accroissements indépendants. Un accroissement du processus est tout simplement une variable aléatoire $\Delta_{s,t}$ égale à $\Delta_{s,t} = X_t - X_s$, $t > s$, où s, t sont quelconques.

Définition :

Un processus à accroissements indépendants est à accroissements stationnaires si la loi de l'accroissement $(X_{t+s} - X_t)$ ne dépend pas de t , pour tout $t \geq 0$.

Quelques exemples de processus

Parmi les plus élémentaires des processus, nous trouvons les processus de comptage qui seront étudiés par la suite.

1.1.1 Processus de comptage :

Un processus aléatoire $\{N_t; t \geq 0\}$ à valeurs entières est un processus de comptage si

$$i) N_0 = 0;$$

$$ii) \forall s \leq t, N_s \leq N_t.$$

Commentaires : Les trajectoires d'un tel processus sont donc des fonctions en escalier dont les marches sont de taille aléatoire. Les processus de comptage peuvent modéliser de nombreux phénomènes. Si l'on s'intéresse au nombre d'accès de clients à un serveur durant une période $(0, T)$, on observe en fait un processus de comptage sur cet intervalle de temps. De même, le nombre de particules détectées par un capteur ou le nombre de buts marqués lors d'un match de football peuvent être modélisés par des processus de comptage. Nous connaissons déjà un processus de comptage important : le processus de Poisson.

1.1.2 Processus de Poisson :

Un processus aléatoire $\{N_t; t \geq 0\}$ à valeurs entières est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si

- i) (N_t) est un processus de comptage à accroissements indépendants et stationnaires ;
- ii) la variable N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt

$$\forall n \geq 0, \quad P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

le processus de Wiener ou mouvement brownien est le plus célèbre des processus à valeurs réelles. Sa découverte est due à l'observation du biologiste Brown, intéressé par les fluctuations aléatoires d'un grain de pollen dans un liquide.

Le premier à avoir formalisé les propriétés du mouvement brownien n'est autre que A. Einstein dans un article fondamental écrit en 1905. Ce processus possède de nombreuses propriétés mathématiques : accroissements indépendants et stationnaires, processus gaussien, martingale, processus de Markov, équation de la diffusion. Cela explique que l'on puisse l'étudier très en détails. Il intervient dans la modélisation de nombreux phénomènes comme une conséquence du théorème de tendance vers la loi normale. Les exemples importants sont en physique et en finance.

1.1.3 Processus de Wiener ou mouvement brownien :

Un processus aléatoire $\{W_t; t \geq 0\}$ à valeurs réelles est un processus de Wiener ou mouvement brownien standard si

- i) (W_t) est un processus à valeurs réelles à accroissements indépendants et stationnaires ;
- ii) la variable W_t suit la loi normale de moyenne nulle et de variance t .

Une classe de processus très importante en pratique et contenant les deux exemples précédents est celle des processus de Markov. Pour ces processus, l'évolution future

de la variable étudiée conditionnellement à son passé jusqu'à l'instant présent ne dépend que de son état à l'instant présent. Nous étudierons en particulier les processus de Markov à valeurs entières, temporisation naturelle des chaînes de Markov à temps discret.

1.2 Compléments sur la transformée de Laplace

La transformée de Laplace est un outil analytique fréquemment utilisé dans l'étude des variables aléatoires et des processus aléatoires. Nous trouverons de nombreuses opportunités d'application de cet outil dans la suite de ce texte. En particulier, il sera intéressant de l'utiliser lors de l'étude des processus de renouvellement, pour résoudre certaines équations fonctionnelles ou équations différentielles. Dans ce paragraphe, nous définissons la transformée de Laplace de certaines fonctions de \mathbb{R}_+ et nous montrons à travers quelques exemples l'intérêt technique de cet outil.

Définition :

Une fonction continue f de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} est d'ordre exponentiel s'il existe $\alpha > 0, t_0 > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout $t > t_0$,

$$|f(t)| < Me^{\alpha t}$$

$$\forall s > \alpha, Lf(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Commentaires : La transformée de Laplace d'une fonction d'ordre exponentiel est bien définie.

En effet, pour tout $s > \alpha$,

$$\begin{aligned} |Lf(s)| &\leq \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-st} dt \\ |Lf(s)| &\leq \int_0^{t_0} |f(t)| e^{-st} dt + M \int_{t_0}^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt \\ |Lf(s)| &\leq M_0 - M \frac{1}{s-\alpha} (1 - e^{-(s-\alpha)t_0}) < \infty \end{aligned}$$

Une propriété importante de l'opérateur de Laplace est qu'il détermine presque partout la fonction qu'il transforme.

Théorème

Soient f et g deux fonctions d'ordre exponentiel identique.

Supposons que

$$\forall s > 0, Lf(s) = Lg(s) \text{ alors } f = g \text{ presque par tout.}$$

Exemple Transformée de Laplace d'une constante.

Cherchons à calculer $L1(s)$ pour tout $s > 0$ (la constante 1 est évidemment une fonction d'ordre exponentiel).

$$\forall s > 0, L1(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

Exemple Transformée de Laplace de l'exponentielle.

Soit $a \in \mathbb{R}$ Cherchons à calculer $Le^{at}(s)$.

$$\forall s > a, Le^{at}(s) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \frac{1}{s-a}$$

Nous énonçons maintenant une propriété fondamentale de la transformée de Laplace. Elle transforme un produit de convolution en un produit de fonctions.

Proposition : Soient f, g deux fonctions d'ordre exponentiel identique et α

la constante correspondante. La transformée de Laplace du produit de convolution $f * g$ défini par

$$\forall t > 0, f * g(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx.$$

est égale à

$$\forall s > \alpha, Lf * g(s) = Lf(s)Lg(s)$$

Démonstration : Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la transformée de Laplace du produit de convolution est bien définie pour $s > \alpha$. Effectuons le calcul

$$Lf * g(s) = \int_0^\infty \int_0^t f(t-x)g(x)e^{-st} dx dt$$

en posant $u = t - x$ et $v = x$. Nous obtenons

$$Lf * g(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(u)g(v)e^{-s(u+v)} dudv.$$

Finalement, d'après le théorème de Fubini

$$Lf * g(s) = Lf(s)Lg(s).$$

Proposition : Soit f une fonction d'ordre exponentiel dérivable et dont la dérivée est continue.

Alors

$$\forall s > \alpha : Lf'(s) = sLf(s) - f(0)$$

Démonstration : Nous avons

$$Lf'(s) = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt$$

Une intégration par parties (réalisée comme il se doit sur un intervalle borné) conduit au résultat suivant

$$Lf'(s) = -f(0) + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Transformée de Laplace d'une variable aléatoire positive :

Pour une variable réelle positive X admettant une densité, la transformée de Laplace est une notion voisine de la fonction caractéristique. Il s'agit en fait de la transformée de la densité

$$\forall s \in \mathbb{R}_+, L_X(s) = E[e^{-sX}] = \int_0^{\infty} e^{-sx} f_X(x) dx$$

Cette fonction est à valeurs réelles donc plus facile à manipuler sur le plan théorique que la fonction caractéristique. Notons que les calculs à effectuer sont identiques dans les deux cas.

1.3 Propriété de la loi exponentielle :

la loi exponentielle

Lorsque l'on désire établir un modèle mathématique d'un phénomène réel, il est souvent nécessaire de faire de nombreuses hypothèses simplificatrices afin d'analyser le modèle de manière calculatoire. Une hypothèse simplificatrice souvent émise en pratique est que les phénomènes aléatoires étudiés possèdent une certaine indépendance du passé, ou absence de mémoire. Dans ce cas, la loi de certaines variables aléatoires sera une loi exponentielle. Cette hypothèse simplificatrice se justifie du fait de la simplicité de calcul lié à cette loi mais aussi du fait qu'elle constitue souvent

une bonne approximation du phénomène réel. Par exemple, la loi exponentielle est la loi de la durée de vie d'un matériel qui ne s'use pas au cours du temps. Un tel matériel possède un taux de destruction (taux de panne) constant dans le temps. Cette propriété d'absence de mémoire sera mise en forme dans le premier paragraphe. La loi exponentielle sera la seule loi qui possèdera une telle propriété.

1.3.1 Définition

Une variable aléatoire réelle X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Sa fonction de répartition est alors donnée par

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = \begin{cases} 1 - \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

La transformée de Laplace de la loi exponentielle est

$$\forall s \geq 0, L(s) = E(e^{-sX}) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

Les moments de la variable X s'obtiennent par différenciations successives de la transformée de Laplace

$$E(X) = L'(0) = \frac{1}{\lambda}$$

et

$$E(X^2) = L''(0) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Des deux équations précédentes, on déduit aisément

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

1.3.2 Absence de mémoire

Définition 1 : Une variable aléatoire X est dite sans mémoire (ou sans usure) si

$$\forall s \geq 0, P(X > t + s / X > t) = P(X > s). \quad (1.1)$$

Si X est la durée de vie d'un matériel quelconque, l'équation 1.1 s'interprète de la manière suivante. Sachant le matériel en état de bon fonctionnement au temps t , la loi de probabilité de sa durée de vie future est la même que celle de sa durée de vie initiale.

Proposition 1 : Une variable aléatoire de loi exponentielle est sans mémoire.

Démonstration : La condition d'absence de mémoire 1.1 se formule de la manière suivante

$$\frac{P(X > t + s; X > t)}{P(X > t)} = P(X > s)$$

soit

$$P(X > t + s) = P(X > t)P(X > s) \quad (1.2)$$

La condition 1.2 est évidemment satisfaite par la loi exponentielle.

Proposition 2 : Une variable aléatoire sans mémoire suit la loi exponentielle .

Démonstration : Soit X une variable possédant la propriété 1.1. On note

$$G(x) = P(X > x).$$

Nous venons d'observer que la fonction G était solution de l'équation fonction-

nelle

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, g(x+y) = g(x)g(y)$$

Un résultat d'analyse très classique garantit que les solutions continues (à droite) de cette équation sont de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) = e^{-\lambda x}$$

Ainsi, nous devons avoir

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle se traduit sur une grandeur appelée taux de panne ou taux de hasard.

Définition 2 : Soit X une variable aléatoire réelle de densité f et de fonction de répartition F . On appelle taux de hasard la fonction définie par

$$\forall t \geq 0, r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad (1.3)$$

Cette grandeur s'interprète de la manière suivante. Supposons qu'un matériel de durée de vie X soit en état de bon fonctionnement au temps $t > 0$. On désire calculer la probabilité d'une panne dans l'intervalle de temps $(t, t + dt)$. Cette probabilité est égale à

$$P(X \in (t, t + dt) / X > t). \text{ si } X : \text{"la durée de vie"}$$

Or

$$\begin{aligned}
 P(X \in (t, t + dt) / X > t) &= \frac{P(x \in (t, t + dt); X > t)}{P(X > t)} \\
 P(X \in (t, t + dt) / X > t) &= \frac{P(x \in (t, t + dt))}{P(X > t)} \\
 P(X \in (t, t + dt) / X > t) &\simeq \frac{f(t)dt}{1 - F(t)} = r(t)dt
 \end{aligned}$$

La fonction $r(t)$ représente le taux. Pour la loi exponentielle, ce taux se doit d'être constant par absence d'usure. On vérifie bien

$$\forall t \geq 0, r(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

Proposition 3 : Soit X une variable aléatoire positive admettant une densité f . Le taux de hasard de X caractérise la loi de cette variable.

Démonstration : Notons que l'équation 1.3 se formule de manière équivalente

$$\forall t \geq 0, r(t) = \frac{F'(t)}{1 - F(t)}$$

En intégrant des deux cotés, on obtient

$$\ln(1 - F(t)) = - \int_0^t r(s)ds + k$$

soit

$$1 - F(t) = e^k \exp \left\{ - \int_0^t r(s)ds \right\}$$

En prenant $t = 0$, on obtient, puisque $F(0) = 0$,

$$F(t) = 1 - \exp \left\{ - \int_0^t r(s)ds \right\}.$$

2 Processus de Markov

2.1 Processus de Markov

Les processus aléatoires que l'on considère dans ce chapitre ont un large champ d'application dans la modélisation de systèmes réels. Ce sont des processus en temps continu analogues aux chaînes de Markov.

Ils se caractérisent par la propriété de mémoire à court terme suivante. Connaissant l'état du processus au temps présent, la prédiction de l'état futur se fait indépendamment du passé du processus.

Un exemple de processus de Markov en temps continu a déjà été rencontré. Il s'agit du processus de Poisson. Si l'on pose pour état au temps t le nombre total d'arrivées à cet instant, le processus de Poisson est un processus de Markov à valeurs dans \mathbb{N} et qui n'effectue des sauts que de l'état n vers l'état $(n + 1)$, $n \geq 0$.

Un tel processus s'appelle un processus de naissance pure. Plus généralement, un modèle dont les durées inter-transitions sont de loi exponentielle et qui effectue des transitions entre les états n et $(n + 1)$ ou $(n - 1)$ uniquement est appelé processus de naissance et de mort. On trouve des processus de naissance et de mort dans l'étude de populations biologiques par exemple, mais aussi lors de l'étude de files d'attente. Dans ce cas, le processus de naissance et de mort modélise la longueur de la file d'attente.

2.1.1 Définitions

Soit $\{X_t; t \geq 0\}$ un processus aléatoire à valeurs entières.

Définition 1 : On dit que le processus $\{X_t; t \geq 0\}$ est un processus de Markov si, pour tout $s, t \geq 0; i, j \in \mathbb{N}$ et $x_u \in \mathbb{N}$, $0 \leq u < s$,

$$P(X_{t+s} = j / X_s = i, X_u = x_u, \forall 0 \leq u < s) = P(X_{t+s} = j / X_s = i).$$

En d'autres termes, un processus de Markov est un processus ayant la propriété

suivante. La loi conditionnelle de la variable future X_{t+s} sachant l'état présent X_s et toute l'histoire du processus jusqu'au temps s ne dépend que du présent et est indépendante du passé.

Si, de plus, $P_{ij}(s, t) = P(X_{t+s} = j | X_s = i)$ ne dépend pas de s , le processus $\{X_t; t \geq 0\}$ est dit homogène. Tous les processus de Markov considérés dans ce chapitre seront homogènes. Supposons qu'un processus de Markov homogène $\{X_t; t \geq 0\}$ se trouvait en i au temps $t = 0$ et qu'il n'ait pas quitté cet état durant l'intervalle de temps $[0, t]$.

Cherchons à caractériser la loi conditionnelle de la variable aléatoire T_i égale à la durée de séjour dans l'état i .

Soit $s, t \geq 0$

$P(T_i > t + s | T_i > t) = P(T_i > t + s | X_t = i)$ par la propriété de Markov,
 $P(T_i > t + s | T_i > t) = P(T_i > s)$ par homogénéité.

Ainsi, la variable T_i possède la propriété d'absence de mémoire qui caractérise la loi exponentielle. Le paramètre de cette loi dépend de l'état i . On note ce paramètre i .

Cette propriété d'absence de mémoire suggère une manière intuitive de construire un processus de Markov homogène quelconque.

1) Pour tout i dans \mathbb{N} , le temps de séjour dans l'état i (avant d'effectuer une transition vers un état $j \neq i$) est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre i .

2) Lorsque le processus "quitte" l'état i , il choisit d'aller en $j \neq i$ avec la probabilité p_{ij} . Les probabilités de transition vérifient donc

$$p_{ij} \geq 0; \sum_{i \neq j} p_{ij} = 1.$$

3) Toutes les durées de séjour sont indépendantes entre elles, et indépendantes des états de la chaîne.

Commentaires : En d'autres termes, un processus de Markov est un processus

aléatoire qui effectue des transitions d'état en état suivant une chaîne de Markov (la chaîne incluse de probabilités de transition p_{ij} et tel que le temps passé dans chaque état avant de visiter un autre est de loi exponentielle. Si les temps de séjour n'étaient pas des variables indépendantes, alors la prédiction de la valeur future du processus devrait tenir compte des temps passés dans chaque état. Ceci est en contradiction avec la propriété de Markov.

2.1.2 Equations de Kolmogorov

Soit $\{X_t; t \geq 0\}$ un processus de Markov à valeurs entières. Pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on pose

$$\forall i \neq j, \lambda_{ij} = p_{ij}\mu_i.$$

La vitesse avec laquelle le processus quitte de l'état i est μ_i et la probabilité avec laquelle il entre dans l'état j est p_{ij} . Ainsi, on peut interpréter λ_{ij} comme le taux avec lequel le processus partant de l'état i entre en état j . Bien entendu

$$v_i = \sum_{i \neq j} p_{ij}\mu_i = \sum_{i \neq j} \lambda_{ij}$$

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} p_{ij} = 1 \quad ; \quad p_{ii} + \sum_{i \neq j} p_{ij} = 1.$$

et

$$\forall i \neq j, p_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\mu_i}$$

Ainsi, la donnée de la famille $\{\lambda_{ij}; i \neq j\}$ détermine complètement le processus en question. Posons, pour tout $i, j \in \mathbb{N}$ et $s, t \geq 0$, $P_{ij}(t) = P(X_{t+s} = j | X_s = i)$.

Il s'agit de la probabilité conditionnelle pour que le processus en l'état i au temps s se trouve en l'état j au temps $t+s$. Par homogénéité, cette grandeur ne dépend pas

de s . La proposition suivante justifie la dénomination de taux de transition appliquée aux λ_{ij} .

Proposition 1 : Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $h > 0$; $1 - P_{ii}(h) = \mu_i h + o(h)$;

$P_{ij}(h) = \lambda_{ij} h + o(h)$ lorsque $j \neq i$.

Démonstration. Nous avons, pour tout $j \neq i$, $h > 0$

$P(X_h = j | X_0 = i) = P(T_i < h) p_{ij} + o(h)$, où $o(h) = P(T_i \geq h)$

$P(X_h = j | X_0 = i) = p_{ij} \mu_i h + o(h) + o(h)$

$P(X_h = j | X_0 = i) = \lambda_{ij} h + o(h)$.

La première assertion est évidente. Elle traduit simplement le fait que

$$\sum_j P_{ij}(h) = 1$$

La proposition suivante établit une propriété de semigroupe pour les probabilités de transition analogue à celle démontrée auparavant pour les chaînes de Markov.

Proposition 2 : Propriété de semigroupe.

$$\forall s, t \geq 0, \quad P_{ij}(t+s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_{ik}(t) P_{kj}(s)$$

Démonstration : Conditionner aux valeurs de X_t et appliquer la propriété de Markov.

Définition 2 Générateur infinitésimal.

On appelle générateur infinitésimal la matrice dont le terme général est λ_{ij} pour $i \neq j$ et $-\mu_i$ pour le terme diagonal d'ordre i . Cette matrice est notée

$$A = \begin{pmatrix} -\mu_0 & \lambda_{01} & \lambda_{02} & \dots & \dots \\ \lambda_{10} & -\mu_1 & \lambda_{12} & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \end{pmatrix}$$

Notons $p(t)$ la loi de la variable aléatoire X_t

$$\forall i \in \mathbb{N}, p_i(t) = P(X_t = i)$$

La loi $p(t)$ peut se calculer comme la solution d'un système différentiel linéaire. Les équations de ce système sont appelées équations de Kolmogorov.

Démonstration. Soit $h > 0$. D'après la formule des probabilités totales, nous avons

$$\forall j \in \mathbb{N}, P(X_{t+h} = j) = \sum_i P(X_{t+h} = j / X_t = i) p_i(t)$$

D'après la propriété d'homogénéité, nous avons

$$\forall j \in \mathbb{N}, P(X_{t+h} = j / X_t = i) = P(X_h = j / X_0 = i)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p_j(t+h) &= \sum_i P(X_h = j / X_0 = i) p_i(t) \\ &= \sum_i p_i(t) \lambda_{ij} h + p_j(t) (1 - \mu_j h) + o(h) \end{aligned}$$

d'après la proposition 1. Nous avons donc

$$\frac{p_j(t+h) - p_j(t)}{h} = \sum_i p_i(t) \lambda_{ij} - \mu_j p_j + \frac{o(h)}{h}$$

Le résultat suit lorsque $h \rightarrow 0$. on trouve

$$p'_j(t)$$

Processus de Poisson

Le processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est un processus de Markov. En effet, nous avons, pour tout $i \geq 0$

$$\lambda_i = \lambda \text{ et } p_{i,i+1} = 1$$

Dans cette section, nous justifions l'aspect intuitif du processus de Poisson en obtenant la loi de Poisson à partir des équations infinitésimales. La référence à la définition de processus de Markov ne sera pas directement utilisée dans ce qui suit.

Définition 3 Le processus de comptage $\{N_t; t > 0\}$ est un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$, si

- i) le processus est à accroissements indépendants et stationnaires ;
- ii) $P(N_h = 1) = \lambda h + o(h)$;
- iii) $P(N_h \geq 2) = o(h)$.

Commentaires. Un argument heuristique permet de bien comprendre pourquoi la loi de Poisson intervient de manière naturelle. Considérons l'intervalle de temps $(0, t)$ que nous subdivisons en n sous intervalles de longueur égale à $\frac{t}{n}$. La probabilité pour qu'une occurrence survienne dans $(kt/n, (k+1)t/n)$ est approximativement égale à t/n . Puisque les occurrences sont indépendantes, le nombre N_t d'occurrences dans $(0, t)$ "suit" la loi binomiale $B(n, t/n)$. L'approximation binomiale-Poisson montre que l'on peut considérer que N_t suit la loi de Poisson de paramètre $n\lambda t/n = \lambda t$.

2.1.3 Comportement asymptotique

Nous cherchons à caractériser le comportement asymptotique d'un processus de Markov homogène $\{X_t; t \geq 0\}$ dont l'espace d'état est égal à \mathbb{N} . Supposons que la variable X_t converge en loi vers une loi π et supposons que l'inversion des signes \sum et \lim soit licite. On obtient, par les équations de Kolmogorov

$$\sum_j n_j \lambda_{ij} - \mu_i \pi_i = 0$$

soit

$$\pi A = 0$$

avec

$$\sum_i \pi_i = 1$$

Par analogie avec les chaînes de Markov, nous cherchons des conditions sous lesquelles ce système admet une solution unique. Pour simplifier la discussion, nous nous limitons

à des ensembles d'état finis. L'existence d'une solution au système

$$\pi A = 0$$

est garantie par le fait que 0 est toujours valeur propre de A . Un vecteur propre associé à la valeur propre 0 est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'unicité d'une solution stationnaire est, comme pour les chaînes, liée à une notion de connexité du diagramme de transition du processus $\{X_t; t \geq 0\}$.

Définition 4 Le processus $\{X_t; t \geq 0\}$ est dit irréductible si

$$\forall i, j \quad ; \exists k_1, k_2, \dots, k_n \text{ tel que } \lambda_{ik_1} > 0 \text{ et } \dots \text{ et } \lambda_{ik_n} > 0$$

L'interprétation est la même que pour les chaînes. Le problème de la périodicité ne se pose pas puisque les temps de transition sont aléatoires. On admet le résultat suivant

Théorème 3 Si le processus $\{X_t; t \geq 0\}$ est irréductible, alors la variable X_t converge en loi quand $t \rightarrow \infty$ vers la loi π solution de

$$\pi A = 0$$

indépendamment de la loi de la condition initiale X_0 .

3 Les files d'attente

Nous abordons dans ce chapitre le formalisme des files d'attente dans sa généralité. La théorie des files d'attente est une technique de la recherche opérationnelle qui permet de modéliser un système admettant un phénomène d'attente, de calculer ses performances et de déterminer ses caractéristiques. Nous parlons de phénomène d'attente chaque fois que certaines unités appelées "clients" se présentent d'une manière aléatoire à des stations afin de recevoir un service dont la durée est généralement aléatoire.

3.1 Les files d'attente simple

Une file d'attente simple ou station est un système constitué d'un ou plusieurs serveurs et d'un espace d'attente. Les clients arrivent de l'extérieur, patientent éventuellement dans la file d'attente pour recevoir un service, puis quittent la station. Afin, de spécifier complètement une file simple, nous devons caractériser le processus d'arrivée des clients, le temps de service ainsi que la discipline de service de la file d'attente.

Type de système	Serveurs	Clients
Cabinet médical	Médecins	malades
Faculté	Filières	étudiants
Atelier de maintenance	Réparateurs	machines en pannes
Aéroport	Piste d'atterrissage	Avions
Réseaux téléphoniques	Cables	informations
Quelques exemples de domaines d'application		

3.2 Les caractéristiques du système de files d'attente

3.2.1 La population

Dans la théorie des files d'attente, nous appelons population la source de clients potentiels. Il y a deux situations possibles. Dans le premier cas, la population est infinie, c'est-à-dire que le nombre potentiel de clients est infiniment grand en tout temps. C'est le cas des clients des supermarchés, des banques, des restaurants, des cinémas, des centres d'appels, etc. De plus, les clients proviennent de toutes les régions possibles. Dans la deuxième situation, la population est finie, ce qui signifie que le nombre de clients potentiels est limité. Un bon exemple est le nombre de machines, d'avions, etc, en réparation dans le centre de maintenance d'une entreprise.

3.2.2 Le processus d'arrivée

Le processus d'arrivée spécifie les instants auxquels les clients arrivent dans le système. Dans la théorie classique des files d'attente, nous faisons le plus souvent l'hypothèse que les clients arrivent de manière isolée et indépendamment les uns des autres. Sous ces hypothèses les intervalles de temps entre deux arrivées successives forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d).

Soit $\{N(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ un processus de poisson d'intensité λ alors : Le temps T qui s'écoule entre deux arrivées consécutives obéit à une loi exponentielle de paramètre λ et de moyenne $1/\lambda$, autrement

$$P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

3.2.3 Le processus de service

La deuxième composante d'un système de files d'attente est la quantité de service (le temps de service nécessaire au traitement) demandée par un client.

Dans la majorité des cas, nous supposons que la population des clients est homogène, ce qui entraîne que les services demandés sont identiquement distribués, ou ont une distribution commune dite distribution de service.

La distribution du processus de service revient alors à spécifier la loi de probabilités de ces variables aléatoires. Les symboles utilisés pour décrire les processus de service sont les mêmes que ceux introduits ci-dessous pour le processus d'arrivée.

En pratique, nous rencontrons la distribution exponentielle qui est la plus simple à manipuler mathématiquement. Une propriété assez importante de cette distribution est l'absence de mémoire, qui pourrait-être caractérisée par le fait que le temps résiduel d'un service est indépendant du temps déjà écoulé de ce service.

3.2.4 Le nombre de serveurs

Le nombre de serveurs correspond au nombre maximal de clients pouvant être traités simultanément.

Au niveau de la station nous trouvons soit les serveurs qui sont tous identiques où les serveur opèrent selon la même procédure, en particulier les temps de services sont indépendants d'un serveur à l'autre et distribués selon une même loi de probabilités.

3.2.5 La capacité de la file

La capacité d'accueil d'une file correspond au nombre maximal de clients pouvant être présents dans le système à un instant quelconque. Elle est égale à la somme du nombre de serveurs et du nombre de places d'attente disponibles. Si la capacité de la file est finie et elle vient d'atteindre son maximum, un client qui arrive dans le système est refoulé et doit quitter le système sans avoir été servi.

3.2.6 La discipline de la file

La discipline de la file, ou discipline de service est la règle déterminant l'ordre dans lequel les clients vont accéder au serveur. Les disciplines de service classique, ainsi que leurs acronymes sont :

***FIFO** : acronyme de l'anglais " first in first out", soit "premier arrivé, premier servi".

c'est la discipline de service employée le plus souvent et c'est celle qui sera admise par défaut.

***LIFO** : acronyme de l'anglais "last in first out", soit "dernier arrivé premier servi", cette discipline correspond au cas où les clients en attente forment une pile, le dernier arrivé étant au-dessus de la pile et donc le prochain à être servi.

***SIRO** : acronyme de l'anglais "service in random order", cette discipline correspond aux situations où le prochain client servi est choisi au hasard parmi tous ceux en attente.

Certains modèles de files d'attente font usage de discipline plus complexe reposant sur les priorités de traitement. Ces dernières apparaissent souvent lorsque plusieurs types de clients cherchent à accéder au service. Dans un tel cas, il peut être nécessaire d'associer à chaque classe de clients une priorité de traitement, les clients appartenant à une classe de grande priorité étant servis avant ceux appartenant à une classe de priorité inférieure. Un tel système peut également accepter la préemption d'un service, c'est-à-dire l'interruption du service d'un client au profit

d'un autre (pour cause de priorité supérieure, par exemple). Si un tel mode de fonctionnement est autorisé, le service interrompu peut être simplement terminé plus tard (preemptive resume) ou, alors, être recommencé depuis le début, le travail déjà effectué étant perdu (preemptive repeat).

Notation de Kendall

La notation suivante, introduite par Kendall, permet de ramener la description textuelle des différents éléments constituant une file d'attente simple à une formule symbolique. Dans sa version étendue, un modèle est spécifié par une suite de six symboles :

$$A/B/m/K/L/Z$$

La signification de chacun de ces symboles est :

- * A : distribution d'inter-arrivées
- * B : distribution de service
- * m : nombre de serveurs
- * K : capacité de la file
- * L : population des usagers
- * Z : discipline de service

La liste qui suit résume les lois de probabilités les plus couramment rencontrées pour A et B ainsi que les symboles associés.

La lettre M désigne la loi exponentielle (abréviation de Markovian ou Memoryless). Un processus d'arrivée de type M n'est rien d'autre qu'un processus de poisson et les intervalles de temps entre deux arrivées successives de clients sont des variables aléatoires i.i.d. exponentielles.

La lettre D correspond à une loi dégénérée (constante). Dans un tel processus les arrivées de clients sont régulièrement espacées dans le temps.

Le symbole E_k désigne un processus où les intervalles de temps entre deux arrivées successives sont des variables aléatoires i.i.d. Suivant une loi d'Erlang d'ordre k (somme de k variables exponentielles i.i.d.)

La lettre G est utilisée lorsqu'aucune hypothèse particulière n'est faite sur le processus d'arrivée, ce dernier étant alors un processus de renouvellement quelconque

3.3 Notation de classe de clients

Une file d'attente peut être parcourue par différentes classes de clients. Ces différentes classes se distingueront par :

- des processus d'arrivée différents.
- des temps de service différents.
- un ordonnancement dans la file d'attente en fonction de leur classe.

3.4 La formule de Little

La formule de Little est l'un des résultats les plus beaux et les plus utiles de la théorie des files d'attente. De part sa grande simplicité et sa généralité ce théorème possède une multitude d'applications. D'une certaine manière il peut être perçu dans la théorie des files d'attente de la loi d'Ohm en électricité ou de la loi de Hook en élasticité.

Comme la plupart des résultats présentés dans ce chapitre, la formule de Little n'est valable que pour des systèmes stables.

théorème Soit un système en régime stationnaire, alors

$$\begin{aligned}\bar{N} &= \lambda_{eff}\bar{S} \text{ et } \bar{Q} = \lambda_{eff}\bar{W} \\ \lambda_{eff} &= \lambda(1 - P_{refus})\end{aligned}$$

Avec :

1. \bar{N} est le nombre moyen de clients dans le système.
2. \bar{Q} est le nombre moyen de clients dans la file d'attente.

3. λ_{eff} est le taux moyen d'arrivée des clients potentiels dans le système.
4. \bar{S} est le temps moyen de séjour d'un client dans le système.
5. P_{refus} est la probabilité de refuser un client qui arrive à la file.

3.4.1 Files d'attente Markovienne caractérisées par un processus de naissance et de mort

Pour étudier un phénomène d'attente nous le rapportons généralement à un système décrit par un processus stochastique, les fondements de la théorie de files d'attente ont été développés par A.K.ERLANG dès les deux premières décennies du siècle précédent, c'est à dire bien avant les années trente quand FELLER introduisait le concept de "processus de naissance et de mort".

Un processus de naissance et de mort caractérise une file d'attente de la façon suivante : une naissance est l'arrivée d'un client dans le système, une mort correspond à une sortie ou à la fin du service d'un client.

Définition Une file d'attente est dite Markovienne si les processus d'arrivées et de service sont des processus sans mémoire.

$X(t)$: Nombre de clients dans le système a l'instant t (y compris ceux en cours de service).

T_n : L'instant d'arrivée du $n^{ième}$ client.

$T_0 = 0$.

$A_n = T_n - T_{n-1}$ est appelée la $n^{ième}$ interarrivées, avec $A_1 = T_1 - T_0 = T_1$

X_n : le temps de service réclamé par le $n^{ième}$ client.

W_n : Le temps d'attente du $n^{ième}$ client.

$W_n + X_n = V_n$: Le temps de séjour du $n^{ième}$ client dans le système.

Hypothèse :

1- Nous supposons que les deux familles $(A_n)_{n \geq 1}$; $(X_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes, constituées chacune de variables aléatoire de parente A et X

2- Nous supposons que la discipline du service est PAPS (premier arrivée, premier servi), que

la capacité du système est infinie, dans ce cas on omet les lettres K et L dans la notation de Kendall, par conséquent les files considérées seront représentées par $A/B/m$.

3.4.2 Processus de naissance et de mort général

Processus de naissance et de mort est caractérisé par un nombre n d'entités qui évolue de la façon suivante :

- les arrivées et les départs des entités obéissent à des lois exponentielles de taux respectifs λ_n et μ_n .

-la probabilité pour que deux événements se produisent dans un intervalle de temps infinitésimal h est négligeable (hypothèse de régularité : deux événements ne peuvent pas se produire en même temps).

-Il y a transition vers un état voisin, soit par l'arrivée d'un client (naissance), soit par le départ d'un client (mort).

si $\pi_n(t)$ est la probabilité pour qu'il y ait n clients dans le système à l'instant t , les équations de Chapman Kolmogorov en régime transitoire s' écrivent :

$$\begin{aligned} \pi'_0(t) &= -\lambda_0\pi_0(t) + \mu_1\pi_0(t) & \text{si } n = 0 \\ \pi'_n(t) &= -(\lambda_n + \mu_n)\pi_n(t) + \mu_{n+1}\pi_{n+1}(t) + \lambda_{n-1}\pi_{n-1}(t) & \text{si } n \geq 1 \end{aligned}$$

Il est pratiquement impossible de calculer l'expression générale de $\pi_n(t)$, si ce

n'est par simulation à partir des valeurs $\pi_n(0)$ qui caractérisent l'état initial du système.

Toutefois, si l'on suppose qu'un régime permanent parvient à s'établir, les probabilités deviennent indépendantes du temps.

$$\pi_n = \pi_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$$

Avec

$$\pi_0 = \frac{1}{1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}$$

$$\text{Où } \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \text{ converge}$$

Le processus de Poisson est un cas particulier du processus de naissance et de mort pour lequel $\mu_n = 0$ et $\lambda_n = Cte = \lambda$.

Les équations différentielles s'écrivent alors :

$$\pi'_0(t) = -\lambda\pi_0(t) \quad \text{si } n = 0$$

$$\pi'_n(t) = -\lambda\pi_n(t) + \lambda\pi_{n-1}(t) \quad \text{si } n \geq 1$$

Donc la solution est

$$\pi_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Remarque :

Les files d'attentes markoviennes sont celles pour lesquelles les inter arrivées et les durées de service sont exponentielles. Leur notation de Kendall sera de la forme $M/M/ \dots$ (M comme markovien...)

3.5 La file $M/M/1$:

3.5.1 Propriétés de base

Les clients arrivent dans la file selon un processus de Poisson de paramètre λ , $\lambda > 0$;

Le temps de service est une loi exponentielle de paramètre μ , $\mu > 0$;

Il y a un seul serveur et la file a une capacité illimitée.

Cette file est un cas particulier du processus de naissance et de mort, dans lequel les probabilités de naissance et de décès sont constantes.

En appliquant les résultats précédemment obtenus on trouve que $\varphi_i = \left[\frac{\lambda}{\mu} \right]^i$, ce qui implique que la distribution stationnaire existe si et seulement si $\mu > \lambda$ et qu'alors le nombre de clients dans le système est distribué selon une loi géométrique de raison $\varphi = \left[\frac{\lambda}{\mu} \right]$:

$$\pi_k = \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \right) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k$$

Le théorème ergodique permet alors de calculer la fraction de temps pendant laquelle le serveur est, en moyenne, occupé,

$$1 - \pi_0 = \frac{\lambda}{\mu}$$

On peut également calculer la loi du temps passé par un client dans la file :

Proposition : En régime stationnaire, le temps passé par un client dans la file (attente + service) est distribué selon une loi exponentielle de paramètre $\mu - \lambda$

Démonstration : lorsqu'un client arrive dans la file et que n clients sont présents, il devra attendre pour sortir de la file un temps de loi d'Erlang de paramètres $(n + 1, \mu)$:

En effet, les n personnes présentes doivent être servies, puis il sera servi ; de plus, du fait de la propriété d'absence de mémoire d'une variable exponentielle, pour le client arrivant, le temps restant pour terminer le service de la personne en cours est une variable exponentielle de paramètre μ .

4 Étude de la file M/G/1 par la méthode de la variable supplémentaire

4.1 Introduction

Le processus des arrivées est un processus de Poisson de taux λ , la distribution du temps de service est non markovienne de loi générale de fonction de répartition $B(x)$ et de densité de probabilité $b(x)$ avec $B(x) = P(S \leq x)$; la discipline de la file est FCFS.

4.2 Notation :

$X(t)$: le temps écoulé dans le service .

$p_n(x) = p(n, x)$: la probabilité de trouver n client dans le système et le client en cours de service a fait un service de durée x .(en régime stationnaire)

$N(t)$:le nombre de client dans le système à l'instant t .

$p(t, x)dx = P(N(t) = n, x < S < x + dx); n \geq 1$

$p_0(t)$:la probabilité qu'à l'instant t le système est vide.

$\mu(x) = \frac{b(x)}{1-B(x)}$ avec $B(v) = 1 - e^{-\int_0^v \mu(x)dx}$ et $b(v) = \mu(v)e^{-\int_0^v \mu(x)dx}$

4.3 Équation de Chapman-Kolmogorov en régime transitoire :

pour $n = 0$ on a

$$p_0'(t) = \frac{\partial}{\partial t} p_n(t) = -\lambda p_0(t) + \int_0^{\infty} p_1(t, x) \mu(x) dx. \quad (4.1)$$

pour $n \geq 1$ on a

$$\frac{\partial}{\partial t} p_n(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} p_n(t, x) = -(\lambda + \mu(x)) p_n(t, x) + (\lambda) p_{n-1}(t, x). \quad (4.2)$$

pour $x = 0$ on trouve

$$p_n(t, 0) = \int_0^{\infty} p_{n+1}(t, x) \mu(x) dx. \text{ pour } n \geq 1 \quad (4.3)$$

$$p_1(t, 0) = \lambda p_0(t) + \int_0^{\infty} p_2(t, x) \mu(x) dx. \text{ pour } n = 1 \quad (4.4)$$

4.4 Équation de chapman-kolmogorov en régime stationnaire :

$$\lambda p_0 = \int_0^{\infty} p_1(x) \mu(x) dx. \text{ pour } n = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_n(x) = -(\lambda + \mu(x)) p_n(x) + (\lambda) p_{n-1}(x). \text{ pour } n \geq 1 \quad (4.6)$$

$$p_1(0) = \lambda p_0 + \int_0^{\infty} p_2(x) \mu(x) dx. \text{ pour } n = 1 \quad (4.7)$$

$$p_n(0) = \int_0^{\infty} p_{n+1}(x) \mu(x) dx. \text{ pour } n \geq 1 \quad (4.8)$$

4.5 Fonction génératrice :

4.5.1 fonction génératrice du nombre de clients dans la file d'attente :

on définit les fonctions génératrices suivantes :

$$Q(t, x, z) = \sum_{n \geq 0} p_n(t, x) z^n.$$

$$Q(x, z) = \sum_{n \geq 0} p_n(x) z^n.$$

determination de $Q(x, z)$:

de l'équation 4.6 on a :

$$\sum_{n \geq 1} z^n \frac{\partial}{\partial t} p_n(t, x) + \sum_{n \geq 1} z^n \frac{\partial}{\partial x} p_n(t, x) = \sum_{n \geq 1} z^n (-(\lambda + \mu(x))) p_n(t, x) + \sum_{n \geq 1} z^n (\lambda) p_{n-1}(t, x). \text{ pour } n \geq 1 \quad (4.9)$$

après calcul on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(t, x, z) + \frac{\partial}{\partial x} Q(t, x, z) = (\lambda z - \lambda - \mu(x)) Q(t, x, z). \quad (4.10)$$

on a aussi

$$Q(t, 0, z) = \sum_{n \geq 1} p_n(t, 0) z^n \quad (4.11)$$

$$Q(t, 0, z) = p_1(t, 0) z + \sum_{n \geq 2} p_n(t, 0) z^n \quad (4.12)$$

$$Q(t, 0, z) = (\lambda p_0(t) + \int_0^\infty p_2(t, x)\mu(x)dx)z + \sum_{n>1} \int_0^\infty z^n p_{n+1}(t, x)\mu(x)dx. \quad (4.13)$$

$$Q(t, 0, z) = \lambda z p_0(t) + \frac{1}{z} \sum_{n>0} \int_0^\infty z^{n+1} p_{n+1}(t, x)\mu(x)dx. \quad (4.14)$$

$$Q(t, 0, z) = \lambda z p_0(t) + \frac{1}{z} \int_0^\infty Q(t, x, z)\mu(x)dx - \frac{1}{z} \int_0^\infty z p_1(t, x)\mu(x)dx. \quad (4.15)$$

$$Q(t, 0, z) = \lambda z p_0(t) + \frac{1}{z} \int_0^\infty Q(t, x, z)\mu(x)dx - (p_0'(t) + \lambda p_0(t)). \quad (4.16)$$

on trouve :

$$zQ(t, 0, z) = \lambda z p_0(t)(z - 1) + \int_0^\infty Q(t, x, z)\mu(x)dx \quad (4.17)$$

donc on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(t, x, z) + \frac{\partial}{\partial x} Q(t, x, z) = (\lambda z - \lambda - \mu(x))Q(t, x, z). \quad (4.18)$$

$$zQ(t, 0, z) = \lambda z p_0(t)(z - 1) + \int_0^\infty Q(t, x, z)\mu(x)dx. \quad (4.19)$$

en régime stationnaire

$$\frac{\partial}{\partial x}Q(x, z) = (\lambda z - \lambda - \mu(x))Q(x, z). \quad (4.20)$$

$$zQ(0, z) = \lambda z p_0(z - 1) + \int_0^\infty Q(x, z)\mu(x)dx. \quad (4.21)$$

on trouve

$$Q(x, z) = Q(0, z)e^{-\lambda(1-z)x}(1 - B(x)) \quad (4.22)$$

Déterminons $Q(0, z)$:

$$zQ(0, z) = \lambda z(z - 1)p_0 + \int_0^\infty Q(0, z)e^{-\lambda(1-z)x}dB(x). \quad (4.23)$$

$$zQ(0, z) = \lambda z(z - 1)p_0 + Q(0, z)\overline{B}(\lambda(1 - z)). \quad (4.24)$$

on trouve :

$$Q(0, z) = \frac{\lambda z(z - 1)}{z - \overline{B}(\lambda(1 - z))}p_0 \quad (4.25)$$

En remplaçant l'équation 4.25 dans l'équation 4.24 on trouve

$$Q(x, z) = \frac{\lambda z(z - 1)}{z - \overline{B}(\lambda(1 - z))}e^{-\lambda(1-z)x}(1 - B(x))p_0. \quad (4.26)$$

déterminons la fonction génératrice $Q(z)$:

$$Q(z) = \int_0^\infty Q(x, z)dx$$

$$Q(z) = Q(0, z) \int_0^\infty e^{-\lambda(1-z)x} (1 - B(x)) dx.$$

$$Q(z) = Q(0, z) \frac{1 - \bar{B}(\lambda(1-z))}{\lambda(1-z)}$$

.

en remplaçant 4.25 par son expression on trouve :

$$Q(z) = \frac{(1 - \bar{B}(\lambda(1-z)))z}{\bar{B}(\lambda(1-z)) - z} p_0 \quad (4.27)$$

détermination de p_0

$$1) \quad P(z) = \sum_{n \geq 0} z^n p_n$$

$$2) \quad P(1) = \sum_{n \geq 0} p_n = p_0 + \sum_{n \geq 1} p_n = 1$$

$$3) \quad Q(z) = \sum_{n \geq 1} z^n p_n$$

$$4) \quad Q(1) = \sum_{n \geq 1} p_n$$

$$5) \quad P(1) = p_0 + Q(1) = 1$$

$$p_0 + Q(1) = 1 \implies p_0 = 1 - Q(1)$$

et

$$\lim_{z \rightarrow 1} Q(z) = Q(1).$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} Q(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - \bar{B}(\lambda(1-z)))z}{\bar{B}(\lambda(1-z)) - z} p_0 = \frac{(1 - \bar{B}(\lambda(0)))}{\bar{B}(0) - 1} = \frac{0}{0}$$

On a une forme d'indétermination, on utilise la formule de l'hôpital :

$$\begin{aligned} \frac{Q(z)}{z} &= \frac{(1 - \bar{B}(\lambda(1-z)))}{\bar{B}(\lambda(1-z)) - z} p_0 = \frac{N}{D} \implies Q(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{N'}{D'} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - \bar{B}(\lambda(1-z)))p_0'}{(\bar{B}(\lambda(1-z)) - z)'} \\ Q(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\lambda \bar{B}'(\lambda(1-z))p_0}{-\lambda \bar{B}'(\lambda(1-z)) - 1} = \frac{\lambda \bar{B}'(0)p_0}{-\lambda \bar{B}'(0) - 1} = \frac{\lambda \bar{B}'(0)p_0}{-\lambda \bar{B}'(0) - 1} \end{aligned}$$

$$Q(1) = \frac{-p_0 \rho}{\rho - 1} \quad (4.28)$$

on remplace dans 4.28, on trouve :

$$p_0 = 1 - \rho$$

donc 4.27 s'écrit comme suit :

$$Q(z) = \frac{(1 - \bar{B}(\lambda(1-z)))z}{\bar{B}(\lambda(1-z)) - z} (1 - \rho) \quad (4.29)$$

4.5.2 fonction génératrice du nombre de clients dans le système :

on définit la fonction génératrice

$$P(z) = \sum_{n \geq 0} z^n p_n \quad (4.30)$$

on a :

$$P(z) = \sum_{n \geq 0} z^n p_n = p_0 + \sum_{n \geq 1} z^n p_n = p_0 + Q(z) \quad (4.31)$$

$$P(z) = p_0 + \frac{(1 - \bar{B}(\lambda(1 - z)))z}{\bar{B}(\lambda(1 - z)) - z} p_0 \quad (4.32)$$

$$P(z) = \left[\frac{\bar{B}(\lambda(1 - z))(1 - z)}{\bar{B}(\lambda(1 - z)) - z} \right] p_0 \quad (4.33)$$

on trouve la fonction génératrice du nombre de clients dans le système :

$$P(z) = \left[\frac{(1 - \rho)(\lambda(1 - z))(1 - z)}{\bar{B}(\lambda(1 - z)) - z} \right] \quad (4.34)$$

4.6 calcul des performances de la files M/G/1 :

Pour calculer les performances de cette file on utilise la formule de mean value approach :

$$E(w) = E(L_q)E(S) + \rho E(R) \quad (4.35)$$

4.6.1 temps moyen d'attente dans le système \bar{W} :

En utilisant la formule de little on a :

$$E(L_q) = \lambda E(W) \quad (4.36)$$

on remplace 4.36 dans 4.35 :

$$E(W)(1 - \lambda E(S)) = \rho E(R)$$

$$E(W)(1 - \rho) = \rho E(R)$$

$$E(W) = \frac{\rho}{1 - \rho} E(R) \quad (4.37)$$

or , on a :

$$E(R) = \frac{E(S^2)}{2E(S)} \quad (4.38)$$

on remplace dans 4.37

$$\bar{W} = E(W) = \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{E(S^2)}{2E(S)} \quad (4.39)$$

4.6.2 nombre moyen de clients dans la file \bar{L}_q :

$$L_q = \lambda E(W) = \lambda \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{E(S^2)}{2E(S)} \quad (4.40)$$

Chapitre

2

File $M^{[x]}/G/1$

Dans ce chapitre nous étudions un système de files d'attente où le service des clients est assuré par un seul serveur.

Les clients arrivent par groupes, ces arrivées de groupe de clients suivent une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

La taille X des groupes est une variable aléatoire discrète qui est égale à i avec la probabilité c_i et de fonction génératrice $C(z)$; la taille moyenne des groupes $E(X) = c'(1)$

1- Le temps de service S suit une loi générale de fonction de répartition $B(x)$, de densité $b(x)$ et de transformé de Laplace Stieljes $\bar{B}(s)$.

Soit les moments d'ordre k $\beta_k = (-1)^k$,

Les durées entre deux arrivées consécutives des groupes, la taille des groupes ainsi que les durées de service sont supposées mutuellement indépendantes.

2- On supposera que la discipline FIFO.

On applique la méthode des variables supplémentaires pour le temps de service écoulé car il y'a deux type de variables supplémentaires l'une est le temps de service écoulé et l'autre est de temps de service restant.

Lorsqu'on utilise le temps de service écoulé comme variable supplémentaire, les conditions à la limite et la fonction densité du hasard sont nécessaires.

dans ce chapitre, on utilise cette technique pour étudier la file $M^{[X]}/G/1$ et pour écrire les équations de Chapman-Kolmogorov ainsi que les fonctions génératrices du modèle.

3- Le taux conditionnels d'achèvement

$$\mu(x) = \frac{g(x)}{1 - G(x)} \quad (0.41)$$

L'état du système à l'instant t peut être décrit par le processus de Markov :

$$\{N(t), t \geq 0\} = \{J(t), X(t), \xi(t), t \geq 0\}$$

$J(t)$ représente l'état du serveur à l'instant t , $\{0, 1\}$ suivant le serveur est libre, occupé respectivement si $J(t) = 1$ alors ξ_1 représente le temps de service écoulé de client en service.

$X(t)$ correspond au nombre de clients dans la file d'attente à l'instant t .

Distribution stationnaire des états du système, dans cette section nous étudions la distribution stationnaire des états du système pour le processus $\{N(t), t \geq 0\}$, nous définissons.

$$p_n(x, t) dx = P\{J(t) = 1, X(t) = n, x < \xi(t) < x + dx\} \text{ pour } n \geq 1$$

$$Q(t) = P\{J(t) = 0, X(t) = 0\}. \text{ pour } n = 0.$$

4- nous obtenons les probabilités limites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t, x) = P_n(x); \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty P_n(t, x) dx = P_n. \quad (0.42)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = Q. \quad (0.43)$$

La condition de normalisation est

$$Q + \sum_{n \geq 0} \int_0^{\infty} P_n(x) dx = 1 \quad (0.44)$$

1 Equations de Chapman-Kolmogorov

En utilisant la technique de la variable supplémentaire, les équations de Chapman-Kolmogorov du modèle en régime transitoire et en régime stationnaire peuvent être écrites comme suit :

Pour $n = 0$ on a les équations :

en régime transitoire on a :

$$\frac{\partial P_0(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_0(t, x)}{\partial x} = [1 - (\lambda + \mu(x))]P_0(t, x) \quad ; \quad n = 0$$

et en régime stationnaire

$$\frac{\partial P_0(x)}{\partial x} = -(\lambda + \mu(x))P_0(x) \quad ; \quad n = 0 \quad (1.1)$$

Pour $n \geq 1$ on a les équations suivantes :

en régime transitoire on a :

$$\frac{\partial P_n(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_n(t, x)}{\partial x} = [1 - (\lambda + \mu(x))]P_n(t, x) + \sum_{i=1}^n \lambda c_i P_{n-i}(t, x) \quad ; \quad n \geq 1$$

et en régime stationnaire

$$\frac{\partial P_n(x)}{\partial x} = -(\lambda + \mu(x))P_n(x) + \sum_{i=1}^n \lambda c_i P_{n-i}(x) \quad ; \quad n \geq 1 \quad (1.2)$$

en régime transitoir on a :

$$\frac{\partial Q(t)}{\partial t} = -\lambda Q(t) + \int_0^\infty P_0(x)\mu(x)dx$$

en régime stationnaire on a

$$\lambda Q = \int_0^\infty P_0(x)\mu(x)dx \quad (1.3)$$

$$P_n(0) = \int_0^\infty P_{n+1}(x)\mu(x)dx + \lambda c_{n+1}Q \text{ pour } n \geq 0 \quad (1.4)$$

2 Solution stationnaire du modèle

Dans cette section nous obtenons la solution stationnaire pour les équations différentielles ; le théorème suivant décrit la distribution des états du système en équilibre, en terme de fonctions génératrices.

2.1 théorème

si $\lambda E(I)E(S) < 1$ alors :

$$W_q(z) = P_q(z) = \frac{(\bar{G}[\lambda - \lambda C(z)] - 1)}{z - \bar{G}[\lambda - \lambda C(z)]} Q \quad (2.1)$$

où

$$Q = 1 - \rho \quad (2.2)$$

notons que

$$\rho = \lambda E(I)E(S). \quad (2.3)$$

Preuve

nous définissons les fonctions génératrices partielles suivantes :

$$P_q(x, z) = \sum_{n \geq 0} z^n P_n(x) \quad ; \quad P_q(z) = \sum_{n \geq 0} z^n P_n \quad ; \quad (2.4)$$

$$P_q(z, 0) = \sum_{n \geq 0} z^n P_n(0) ; \quad C(z) = \sum_{n \geq 1} z^n c_n \quad .$$

on multiplie 1.2 par z^n , nous sommoms sur n de 1 à ∞

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{n \geq 1} P_n(x) z^n + P_0(x) z^0 - P_0(x) z^0 \right] &= -(\lambda + \mu(x)) \left[\sum_{n \geq 1} P_n(x) z^n + (P_0(x) z^0 - P_0(x) z^0) \right] \\ &+ \sum_{i=1}^n \lambda c_i \sum_{n=i}^{\infty} P_{n-i}(x) z^{n-i+i} . \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} P_q(x, z) - \frac{\partial}{\partial x} P_0(x) = -(\lambda + \mu(x)) [P_q(x, z) - P_0(x)] + \lambda \sum_{i \geq 1} c_i z^i P_q(z, x).$$

$$\frac{\partial}{\partial x} P_q(x, z) + (\lambda - \lambda C(z) + \mu(x)) P_q(z, x) = 0 \quad (2.5)$$

après calcule nous trouvons

$$\frac{\partial}{\partial x} P_q(x, z) = -(\lambda - \lambda C(z) + \mu(x)) P_q(z, x)$$

$$P_q(x, z) = P_q(0, z) e^{-(\lambda - \lambda C(z))x} (1 - G(x)). \quad (2.6)$$

on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} P_q(x, z) dx &= P_q(0, z) \left(\frac{1 - \bar{G}(\lambda - \lambda C(z))}{\lambda - \lambda C(z)} \right) \\ \int_0^{\infty} P_q(x, z) dx &= P_q(z) \end{aligned}$$

donc

$$P_q(z) = P_q(0, z) \left(\frac{1 - \overline{G}(\lambda - \lambda C(z))}{\lambda - \lambda C(z)} \right) \quad (2.7)$$

calcul de $P_q(0, z)$:

on multiplie l'équation 1.4 par z^{n+1} et on somme sur n de 0 à ∞

$$\sum_{n \geq 0} P_n(0) z^{n+1} = \int_0^{\infty} \sum_{n \geq 0} P_{n+1}(x) z^{n+1} \mu(x) dx + \lambda Q \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n+1 \geq 1}} c_{n+1} z^{n+1} \quad (2.8)$$

on trouve

$$\begin{aligned} zP_q(0, z) &= \int_0^{\infty} (P_q(x, z) - P_0(x)) \mu(x) dx + \lambda QC(z) \\ zP_q(0, z) &= \int_0^{\infty} P_q(x, z) \mu(x) dx + \lambda QC(z) - \lambda Q \end{aligned} \quad (2.9)$$

avec

$$\int_0^{\infty} P_0(x) \mu(x) dx = \lambda Q$$

d'autre part on multiplie l'équation 2.6 par $\mu(x)$ et en intégrant de 0 à ∞

$$\int_0^{\infty} P_q(x, z) \mu(x) dx = \int_0^{\infty} P_q(0, z) e^{-(\lambda - \lambda C(z))x} e^{-\int_0^x \mu(s) ds} \mu(x) dx. \quad (2.10)$$

on trouve que

$$\int_0^{\infty} P_q(x, z) \mu(x) dx = P_q(0, z) \overline{G}(\lambda - \lambda C(z)) \quad (2.11)$$

où

$$\overline{G}(\lambda - \lambda C(z)) = \int_0^\infty e^{-(\lambda - \lambda C(z))x} dG(x)$$

En utilise l'équation 2.11 et l'équation 2.9 on trouve

$$P_q(0, z) = \frac{-(\lambda - \lambda C(z))Q}{z - \overline{G}(\lambda - \lambda C(z))} \quad (2.12)$$

l'équation 2.12 et l'équation 2.7 donne

$$P_q(z) = \frac{-(\lambda - \lambda C(z))Q}{z - \overline{G}(\lambda - \lambda C(z))} \left(\frac{1 - \overline{G}(\lambda - \lambda C(z))}{\lambda - \lambda C(z)} \right)$$

donc

$$P_q(z) = \frac{(\overline{G}(\lambda - \lambda C(z)) - 1)Q}{z - \overline{G}(\lambda - \lambda C(z))} \quad (2.13)$$

2.2 théorème

si $\lambda E(I)E(S) < 1$. La fonction génératrice du nombre de client dans la file d'attente est

$$W_q(z) = \frac{(\overline{G}(\lambda - \lambda C(z)) - 1)}{z - \overline{G}(\lambda - \lambda C(z))} Q \quad (2.14)$$

où

$$Q = 1 - \lambda E(I)E(S)$$

Preuve

La fonction génératrice $W_q(z)$ est donnée par

$$W_q(z) = P_q(z)$$

où Q est déterminée par la condition de normalisation qui est donnée par

$$W_q(1) + Q = 1$$

après calcul nous avons

$$W_q(1) = \frac{\lambda E(I)E(S)}{1 - [\lambda E(I)E(S)]} Q \quad (2.15)$$

d'après la condition de normalisation nous obtenons

$$Q + W_q(1) = 1 \quad (2.16)$$

$$Q + \frac{\lambda E(I)E(S)}{1 - [\lambda E(I)E(S)]} Q = 1$$

avec $\rho < 1$ est la condition de stabilité où $\rho = \lambda E(I)E(S)$.

3 Nombre moyen de clients et le temps moyen dans la file d'attente

on note Lq le nombre moyen de clients dans la file d'attente tel que

$$Lq = \left. \frac{d}{dz} W_q(z) \right]_{z=1}$$

on a

$$W_q(z) = \frac{N(z)}{D(z)} Q$$

$$Lq = \left[\frac{N'(z)D(z) - D'(z)N(z)}{(D(z))^2} \right] Q \Big|_{z=1} = \frac{0}{0} \quad (3.1)$$

est la forme indéterminée on applique la formule de l'hôpital on trouve

$$Lq = \left[\frac{N''(1)D'(1) - D''(1)N'(1)}{2(D'(1))^2} \right] Q \quad (3.2)$$

avec

$$\begin{aligned} N'(1) &= \lambda E(I)E(S). \\ N''(1) &= \lambda(E(I))^2 E(S^2) + \lambda E(I(I-1))E(S). \\ D'(1) &= 1 - \lambda E(I)E(S). \\ D''(1) &= -(\lambda(E(I))^2 E(S^2) - \lambda E(I(I-1))E(S)). \end{aligned}$$

avec

$$C'''(1) = E(I(I-1)) \text{ et } \overline{G''}(0) = E(S^2)$$

on note W_q le temps moyen d'attente dans la file d'attente où

$$W_q = \frac{Lq}{\lambda E(I)} \quad (3.3)$$

4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la file d'attente $M^{[X]}/G/1$. En donnant les équations décrivant l'évolution du système, la fonction génératrice du nombre de clients dans la file d'attente et le temps moyen dans la file d'attente sous la forme explicite et ceci dans le but de calculer les performances du modèle étudié.

Chapitre

3

File d'attente $M^{[x]}/G/1$ avec vacances

Nous abordons dans ce chapitre une classe très importante de files d'attente appelée "modèle de files d'attente avec vacances", où les clients arrivent en groupe au système de l'extérieur selon un processus de Poisson et sont servis selon l'ordre de leur arrivée (discipline FIFO).

Nous nous intéressons au cas où le serveur décide de prendre la vacance à chaque fin de service.

Le serveur sert tous les clients qui arrivent au système avec des temps de service indépendants, identiquement distribués de loi générale.

Cependant à la fin de chaque service, le serveur peut prendre des vacances avec une probabilité p , ou peut rester dans le système et servir la prochaine arrivée avec une probabilité $1 - p$.

On suppose que le serveur prend une seule vacance et que la durée de celle-ci est de distribution générale.

1 Notation et modèle mathématique

Nous considérons une seule file d'attente avec vacance du serveur. Les hypothèses suivantes décrivent le modèle mathématique :

- i. La capacité de la file : est infinie.

ii. Processus des arrivées des clients :

Les clients arrivent en groupe suivant un processus de Poisson de taux λ ; si le client trouve le serveur libre à son arrivée, il occupe le serveur et quitte le système après achèvement du service, autrement il attend le retour du serveur de la vacance.

iii. Processus de service :

Le serveur est sujet à des vacances non exhaustives, c'est à dire le serveur décide de prendre la vacance à chaque fin de service avec une probabilité p .

Soit S la durée de service. Les durées de services successives sont indépendantes de fonction de répartition commune $G(x)$, de densité $g(x)$, de transformée de Laplace $\bar{G}(s)$ et possédant les deux premiers moments $E(S)$ et $E(S^2)$.

iv. Processus de vacances :

Soit V la durée de vacances. Les durées de vacances sont supposées être mutuellement indépendantes de fonction de répartition commune $B(x)$, de densité $b(x)$, de transformée de Laplace $\bar{B}(s)$ et possédant les deux premiers moments $E(V)$ et $E(V^2)$.

v. Les taux conditionnels d'achèvement pour le service et la vacance sont respectivement

$$\mu(x) = \frac{g(x)}{1 - G(x)} \quad (1.1)$$

et

$$\gamma(x) = \frac{b(x)}{1 - B(x)} \quad (1.2)$$

on suppose que le flux des arrivées des clients, le temps de service, la durée de vacances, sont mutuellement indépendants.

L'état du système à l'instant t peut être décrit par le processus de Markov

$$\{N(t); t \geq 0\} = \{Y(t); X(t); \xi_1(t); \xi_2(t); t \geq 0\}$$

$X(t)$: représente le nombre de clients dans la file à l'instant t .

$Y(t)$: représente l'état du serveur à l'instant t .

Si $Y(t) = 1$; alors $\xi_1(t)$ représente le temps de service écoulé du client en service.

Si $Y(t) = 2$; alors $\xi_2(t)$ représente le temps de vacance écoulé.

Pour le processus $\{N(t); t \geq 0\}$; on définit les probabilités suivantes :

$$P_n(x; t)dx = P(Y(t) = 1; X(t) = n; x < \xi_1(t) < x + dx); n \geq 1$$

$$V_n(x; t)dx = P(Y(t) = 2; X(t) = n; x < \xi_2(t) < x + dx); n \geq 0$$

$$Q(t) = P(Y(t) = 0; X(t) = 0)$$

2 Distribution stationnaire des états des système

$P_n(t, x)$: probabilité qu'à l'instant t , on a n clients dans la file d'attente ($n \geq 0$) et un client en service avec un écoulé de temps x .

$V_n(t, x)$: probabilité qu'à l'instant t , on a n clients dans le système et le serveur est en vacances avec un écoulé de temps x .

$Q(t)$: probabilité qu'à l'instant t , on a aucun clients dans le système

. nous obtenons les probabilités limites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t, x) = P_n(x); \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} P_n(t, x)dx = P_n \quad . \quad (2.1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_n(t, x) = V_n(x); \lim_{t \rightarrow \infty} V_n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} V_n(t, x)dx = V_n$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = Q. \quad (2.2)$$

La condition de normalisation est

$$Q + \sum_{n \geq 0} \int_0^{\infty} P_n(x) dx + \sum_{n \geq 0} \int_0^{\infty} V_n(x) = 1 \quad (2.3)$$

3 Les équations de Chapman-Kolmogorov

Dans cette section ,nous donnons les équations d'état du système en régime stationnaire.

Équations Chapman-Kolmogorov pour $P_n(t)$

Pour $n = 0$ on a les équations :

en régime transitoire on a :

$$\frac{\partial P_0(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_0(t, x)}{\partial x} = -(\lambda + \mu(x))P_0(t, x) \quad ; \quad n = 0$$

et en régime stationnaire

$$\frac{\partial P_0(x)}{\partial x} = -(\lambda + \mu(x))P_0(x) \quad ; \quad n = 0 \quad (3.1)$$

Pour $n \geq 1$ on a les équations suivantes :

en régime transitoire on a :

$$\frac{\partial P_n(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_n(t, x)}{\partial x} = -(\lambda + \mu(x))P_n(t, x) + \sum_{i=1}^n \lambda c_i P_{n-i}(t, x) \quad ; \quad n > 0$$

et en régime stationnaire

$$\frac{\partial P_n(x)}{\partial x} = -(\lambda + \mu(x))P_n(x) + \sum_{i=1}^n \lambda c_i P_{n-i}(x) \quad ; \quad n > 0 \quad (3.2)$$

L'équation Chapman-Kolmogorov pour $V_n(t)$

Pour $n = 0$ on a les équations :

en régime transitoire on a :

$$\frac{\partial V_0(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V_0(t, x)}{\partial x} = -(\lambda + \gamma(x))V_0(t, x) \quad ; \quad n = 0$$

et en régime stationnaire

$$\frac{\partial V_0(x)}{\partial x} = -(\lambda + \gamma(x))V_0(x) \quad ; \quad n = 0 \quad (3.3)$$

Pour $n \geq 1$ on a les équations suivantes :

en régime transitoire on a :

$$\frac{\partial V_n(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V_n(t, x)}{\partial x} = -(\lambda + \gamma(x))V_n(t, x) + \sum_{i=1}^n \lambda c_i V_{n-i}(t, x) \quad ; \quad n > 0$$

et en régime stationnaire

$$\frac{\partial V_n(x)}{\partial x} = -(\lambda + \gamma(x))V_n(x) + \sum_{i=1}^n \lambda c_i V_{n-i}(x) \quad ; \quad n > 0$$

l' équation Chapman-Kolmogorov pour $Q(t)$

en régime transitoir on a :

$$\frac{\partial Q(t)}{\partial t} = -\lambda Q(t) + (1-p) \int_0^\infty P_0(x) \mu(x) dx + \int_0^\infty V_0(x) \gamma(x) dx$$

en régime stationnaire on a

$$\lambda Q = (1-p) \int_0^\infty P_0(x) \mu(x) dx + \int_0^\infty V_0(x) \gamma(x) dx \quad (3.4)$$

3.1 l'équation où l'écoulé égal a zéro ($x = 0$) est

$$P_n(0) = (1-p) \int_0^\infty P_{n+1}(x)\mu(x)dx + \int_0^\infty V_{n+1}(x)\gamma(x)dx + \lambda c_{n+1}Q \text{ pour } n \geq 0 \quad (3.5)$$

$$V_n(0) = p \int_0^\infty P_n(x)\mu(x)dx \text{ pour } n \geq 0 \quad (3.6)$$

4 Solution stationnaire du modèle

dans cette section, on obtient la solution stationnaire pour les équation différentielles ;

le théorème suivant décrit la distribution des états du système en équilibre, en terme de fonction génératrice.

4.1 théorème

si $\rho < 1$ alors :

$$P_q(z) = \frac{(1 - \bar{G}(\lambda - \lambda C(z)))}{[(z - (1-p)\bar{G}(\lambda - \lambda C(z)) - p\bar{G}(\lambda - \lambda C(z))\bar{B}(\lambda - \lambda C(z))]}Q \quad (4.1)$$

$$V_q(z) = \frac{p(1 - \bar{B}(\lambda - \lambda C(z)))}{[(z - (1-p)\bar{G}(\lambda - \lambda C(z)) - p\bar{G}(\lambda - \lambda C(z))\bar{B}(\lambda - \lambda C(z))]}Q. \quad (4.2)$$

preuve :

nous notons les fonction génératrices suivantes :

$$\begin{aligned}
P_q(x, z) &= \sum_{n \geq 0} z^n P_n(x) \quad ; \quad P_q(z) = \sum_{n \geq 0} z^n P_n & (4.3) \\
V_q(x, z) &= \sum_{n \geq 0} z^n V_n(x) \quad ; \quad V_q(z) = \sum_{n \geq 0} z^n V_n \\
C(z) &= \sum_{n \geq 1} z^n c_n
\end{aligned}$$

calculons de $P_q(z)$

on multiplie 3.2 par z^n , nous sommions sur n de 0 à ∞

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{n \geq 1} P_n(x) z^n + P_0(x) z^0 - P_0(x) z^0 \right] &= -(\lambda + \mu(x)) \left[\sum_{n \geq 1} P_n(x) z^n + (P_0(x) z^0 - P_0(x) z^0) \right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \lambda c_i \sum_{n=i}^{\infty} P_{n-i}(x) z^{n-i+i} .
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} P_q(x, z) - \frac{\partial}{\partial x} P_0(x) = -(\lambda + \mu(x)) [P_q(x, z) - P_0(x)] + \lambda \sum_{i \geq 1} c_i z^i P_q(z, x) .$$

$$\frac{\partial}{\partial x} P_q(x, z) = -(\lambda + \mu(x)) [P_q(x, z)] + \lambda C(z) P_q(z, x) ; .$$

$$\frac{\partial}{\partial x} P_q(x, z) + (\lambda - \lambda C(z) + \mu(x)) P_q(z, x) = 0 \tag{4.4}$$

on intègre l'équation 4.4 de 0 à x par rapport a s :

après calcule nous obtenons

$$P_q(x, z) = P_q(0, z) e^{-(\lambda - \lambda C(z))x} (1 - G(x)). \tag{4.5}$$

on intègre 4.5 de 0 à ∞ par rapport a x

$$\int_0^{\infty} P_q(x, z) dx = \int_0^{\infty} P_q(0, z) e^{-(\lambda - \lambda C(z))x} e^{-\int_0^x \mu(s) ds} dx.$$

$$\int_0^{\infty} P_q(x, z) dx = P_q(0, z) \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - \lambda C(z))x} (1 - G(x)) dx$$

ce qui donne

$$P_q(z) = P_q(0, z) \frac{(1 - \bar{G}(\lambda - \lambda C(z)))}{\lambda - \lambda C(z)} \quad (4.6)$$

même chose pour calculer $V_q(z)$ on trouve

$$V_q(x, z) = V_q(0, z) e^{-(\lambda - \lambda C(z))x} (1 - B(x)).$$

$$V_q(z) = V_q(0, z) \frac{(1 - \bar{B}(\lambda - \lambda C(z)))}{\lambda - \lambda C(z)} \quad (4.7)$$

on multiplie l'équation 3.5 par z^{n+1} et on somme sur n de 0 à ∞

$$\sum_{n \geq 0} z^{n+1} P_n(0) = (1-p) \int_0^{\infty} \sum_{n \geq 0} z^{n+1} P_{n+1}(x) \mu(x) dx + \int_0^{\infty} \sum_{n \geq 0} z^{n+1} V_{n+1}(x) \gamma(x) dx + \lambda \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n+1 \geq 1}} z^{n+1} c_{n+1} Q \quad (4.8)$$

$$z P_q(0, z) = (1-p) \int_0^{\infty} (P_q(x, z) - P_0(x)) \mu(x) dx + \int_0^{\infty} (V_q(x, z) - V_0(x)) \gamma(x) dx + \lambda C(z) Q \quad \text{pour } n \geq 0 \quad (4.9)$$

$$zP_q(0, z) = (1-p) \int_0^\infty P_q(x, z)\mu(x)dx + \int_0^\infty V_q(x, z)\gamma(x)dx + \lambda C(z)Q \\ - \{(1-p) \int_0^\infty P_0(x)\mu(x)dx + \int_0^\infty V_0(x)\gamma(x)dx\}$$

donc

$$zP_q(0, z) = (1-p) \int_0^\infty P_q(x, z)\mu(x)dx + \int_0^\infty V_q(x, z)\gamma(x)dx + \lambda Q(C(z) - 1) \quad (4.10)$$

$$P_q(0, z) = \frac{(1-p) \int_0^\infty P_q(x, z)\mu(x)dx + \int_0^\infty V_q(x, z)\gamma(x)dx + \lambda Q(C(z) - 1)}{z} \quad (4.11)$$

où

$$\int_0^\infty P_q(x, z)\mu(x)dx = P_q(0, z)\overline{G}(\lambda - \lambda C(z)) \quad (4.12)$$

et

$$\int_0^\infty V_q(x, z)\gamma(x)dx = pP_q(0, z)\overline{G}(\lambda - \lambda C(z))\overline{B}(\lambda - \lambda C(z)) \quad (4.13)$$

on remplace 4.12 et 4.13 dans 4.11 on trouve

$$P_q(0, z) = \frac{(-\lambda + \lambda C(z))}{z - (1-p)\overline{G}(\lambda - \lambda C(z)) - p\overline{G}(\lambda - \lambda C(z))\overline{B}(\lambda - \lambda C(z))}Q \quad (4.14)$$

et de même

$$V_q(0, z) = pP_q(0, z)\overline{G}(\lambda - \lambda C(z)) \quad (4.15)$$

donc

$$V_q(0, z) = \frac{p\bar{G}(\lambda - \lambda C(z))(-\lambda + \lambda C(z))}{z - (1-p)\bar{G}(\lambda - \lambda C(z)) - p\bar{G}(\lambda - \lambda C(z))\bar{B}(\lambda - \lambda C(z))}Q \quad (4.16)$$

en remplace 4.14 dans 4.6 on trouve

$$P_q(z) = \frac{(1 - \bar{G}(\lambda - \lambda C(z)))}{[(1-p)\bar{G}(\lambda - \lambda C(z)) + p\bar{G}(\lambda - \lambda C(z))\bar{B}(\lambda - \lambda C(z))] - z}Q \quad (4.17)$$

en remplace 4.16 dans 4.7 on trouve

$$V_q(z) = \frac{p(1 - \bar{B}(\lambda - \lambda C(z))\bar{G}(\lambda - \lambda C(z)))}{[(1-p)\bar{G}(\lambda - \lambda C(z)) + p\bar{G}(\lambda - \lambda C(z))\bar{B}(\lambda - \lambda C(z))] - z}Q. \quad (4.18)$$

4.2 théorème

si $\rho < 1$ la fonction génératrice du nombre de clients dans la file d'attente est donnée par

$$W_q(z) = \frac{(\bar{G}(\lambda - \lambda C(z)) - 1)Q + p\bar{G}(\lambda - \lambda C(z))(\bar{B}(\lambda - \lambda C(z)) - 1)}{z - (1-p)\bar{G}(\lambda - \lambda C(z)) - p\bar{B}(\lambda - \lambda C(z))\bar{G}(\lambda - \lambda C(z))}Q \quad (4.19)$$

$$W_q(1) = \frac{\lambda E(I)E(S) + pE(V)}{1 - \lambda E(I)E(S) + pE(V)}Q \quad (4.20)$$

$$Q = 1 - \lambda E(I)(pE(V)E(S)) \quad (4.21)$$

$$\rho = \lambda E(I)(pE(V) + E(S)) \quad (4.22)$$

Preuve

on a la fonction génératrice $W_q(z)$ est

$$W_q(z) = P_q(z) + V_q(z)$$

avec la condition de normalisation qui est

$$W_q(1) + Q = 1$$

on remplace dans l'équation 4.19 $z = 1$, on trouve que $W_q(1) = \frac{0}{0}$ forme indéterminée, on applique la formule de l'hôpital pour enlever la forme indéterminée on a

$$W_q(1) = \frac{\lambda E(I)E(S) + pE(V)}{1 - \lambda E(I)E(S) + pE(V)} Q \quad (4.23)$$

$$Q > 0$$

$$1 - \lambda E(I)E(S) = Q$$

Notons $\rho = \lambda E(I)E(S)$ d'où la condition du système étudié si $\rho < 1$

avec $\rho < 1$ est la condition de stabilité.

5 Calcule des performances

5.1 Nombre moyen de clients dans la file d'attente

on note Lq le nombre moyen de clients dans la file d'attente tel que

$$Lq = \left. \frac{d}{dz} W_q(z) \right|_{z=1}$$

on a

$$W_q(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

est la forme indéterminée on applique la formule de l'hôpital on trouve

$$Lq = \frac{N''(1)D'(1) - D''(1)N'(1)}{2(D'(1))^2} \quad (5.1)$$

avec

$$\begin{aligned} N'(1) &= \lambda Q E(I)(E(S) + pE(V)). \\ N''(1) &= Q\{\lambda(E(I))^2\{E(S^2) + 2pE(S)E(V) + pE(V^2)\} + \\ &\quad \lambda Q E(I(I-1))\{E(S) + pE(V)\}\}. \\ D'(1) &= 1 - \lambda E(I)\{E(S) + pE(V)\}. \\ D''(1) &= -(\lambda(E(I))^2\{E(S^2) + 2pE(S)E(V) + pE(V^2)\} - \\ &\quad \lambda E(I(I-1))\{E(S) + pE(V)\}). \end{aligned}$$

avec

$$C''(1) = E(I(I-1)) \text{ et}$$

$$\overline{G''}(0) = E(S^2)$$

5.2 Temps moyen d'attente dans la file d'attente

on note W_q le temps moyen d'attente où

$$W_q = \frac{Lq}{\lambda E(I)} \quad (5.2)$$

6 Cas particulier

Lorsque le serveur ne prend pas des vacances, on pose $\gamma = 0$ et $p = 0$

on obtient :

$$W_q(z) = \frac{(\overline{G}(\lambda - \lambda C(z)) - 1)}{z - \overline{G}(\lambda - \lambda C(z))} Q \quad (6.1)$$

Et on retrouve les résultats du Chapitre 2.

7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié une file d'attente $M^{[X]}/G/1$ avec vacances. Nous avons donné les équations décrivant l'évolution du système, la fonction génératrice du nombre de client et le temps moyen de clients dans le système sous la forme explicite et ceci dans le but de calculer les performances du modèle étudié .

Pour valider les résultats théoriques, nous avons donné le cas particulier où le serveur ne prend pas de vacances.

Chapitre

4

File d'attente $M^{[X]}/G/1$ avec panne et réparation

Dans ce chapitre nous étudions la file $M^{[X]}/G/1$ avec pannes et réparation où le service est sujet à des pannes actives de loi de Poisson avec réparation de loi exponentielle. Une fois la réparation achevée, le serveur reprend le service immédiatement. Nous supposons la discipline de service FCFS. Le serveur sert tous les clients qui arrivent au système.

1 Notations et modèle mathématique

Le modèle décrit ci-dessus, est basé sur les hypothèses suivantes :

- i. La capacité de la file est infinie.
- ii. Processus des arrivées des clients

Les clients arrivent en groupe selon un processus de Poisson de taux λ

- iii. Processus de service

La distribution du temps de service est de loi générale de fonction de répartition $G(x)$ et de densité de probabilité $g(x)$, de transformée de Laplace $\bar{G}(x)$, possédant les deux premiers moments $E(S)$ et $E(S^2)$.

- iv. Processus de panne et processus de réparation :

Le serveur est sujet à des pannes après un temps aléatoire de loi exponentielle de taux α : Le client dont le service est interrompu devient en tête de la file, il n'y a pas de perte de clients. Lorsque le serveur tombe en panne il est immédiatement réparé et le temps requis pour la réparation est une variable aléatoire de loi exponentielle de taux β .

v. Les temps conditionnelles de complétion

pour le service est :

$$\mu(x) = \frac{g(x)}{1 - G(x)}$$

on suppose que le flux des arrivées des clients, le temps de service, la durée de vacances, le flux de pannes et la durée de réparation, sont mutuellement indépendants.

L'état du système à l'instant t peut être décrit par le processus de Markov

$$\{N(t); t \geq 0\} = \{Y(t); X(t); \xi(t); t \geq 0\}$$

$X(t)$: représente le nombre de clients dans la file d'attente à l'instant t .

$Y(t)$: représente l'état du serveur à l'instant t .

Si $Y(t) = 1$; alors $\xi(t)$ représente le temps de service écoulé du client en service.

Pour le processus $\{N(t); t \geq 0\}$; on définit les probabilités suivantes :

$$P_n(x; t) dx = P(Y(t) = 1; X(t) = n; x < \xi(t) < x + dx); n \geq 1$$

$$Q(t) = P(Y(t) = 0; X(t) = 0)$$

on a les notations suivantes :

$\cdot P_n(x, t)$: la probabilité qu'à l'instant t le serveur est actif (n'est pas en panne ni en vacances) et il y a n clients dans la file d'attente .

$\cdot R_n(t)$: la probabilité à l'instant t le serveur est en réparation et il y a n clients dans le système.

$\cdot Q_n(t)$: probabilité qu'à l'instant t le système est vide et le serveur est fiable.

En régime stationnaire on note

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t, x) = P_n(x) ; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty P_n(t, x) = P_n \quad (1.1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = Q \quad . \quad \lim_{t \rightarrow \infty} R_n(t) = R_n \quad (1.2)$$

La condition de normalisation est :

$$Q + \sum_{n \geq 0} \int_0^\infty P_n(t, x) + \sum_{n \geq 1} R_n = 1 \quad (1.3)$$

2 Équations de Chapman-Kolmogorov

Les équations de Chapman-Kolmogorov

Dans ce chapitre ,on écrit en premier les équations d'état du système en régime transitoire et stationnaire, en traitant les temps de service écoulé comme variable supplémentaires, par la technique de la variable supplémentaire, les équations de Chapman-Kolmogorov du modèle sous conditions du régime stationnaire et les probabilité limites, peuvent être écrite comme suit :

les équations Chapman-Kolmogorov pour $P_n(t, x)$

Pour $n = 0$ on a les équations :

en régime transitoire on a :

$$\frac{\partial P_0(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_0(t, x)}{\partial x} = -(\lambda + \mu(x) + \alpha)P_0(t, x) \quad ; \quad n = 0$$

et en régime stationnaire

$$\frac{\partial P_0(x)}{\partial x} = -(\lambda + \mu(x) + \alpha)P_0(x) \quad ; \quad n = 0 \quad (2.1)$$

Pour $n \geq 1$ on a les équations suivantes :

en régime transitoire on a :

$$\frac{\partial P_n(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_n(t, x)}{\partial x} = (\lambda + \mu(x) + \alpha)P_n(t, x) + \sum_{i=1}^n \lambda c_i P_{n-i}(t, x) \quad ; \quad n > 0$$

et en régime stationnaire

$$\frac{\partial P_n(x)}{\partial x} = -(\lambda + \mu(x) + \alpha)P_n(x) + \sum_{i=1}^n \lambda c_i P_{n-i}(x) \quad ; \quad n > 0 \quad (2.2)$$

l' équation Chapman-Kolmogorov pour $R_n(t)$

Pour $n \geq 1$ on a les équations suivantes :

en régime transitoire on a :

$$\frac{\partial R_n(t)}{\partial t} = -(\lambda + \beta)R_n(t) + \sum_{i=1}^n \lambda c_i R_{n-i}(t) + \alpha \int_0^\infty P_{n-1}(x) dx \quad ; \quad n > 0$$

et en régime stationnaire on a

$$(\lambda + \beta)R_n = \sum_{i=1}^n \lambda c_i R_{n-i} + \alpha \int_0^\infty P_{n-1}(x) dx \quad ; \quad n > 0 \quad (2.3)$$

l' équation Chapman-Kolmogorov pour $Q(t)$

en régime transitoire on a :

$$\frac{\partial Q(t)}{\partial t} = -\lambda Q(t) + \int_0^\infty P_0(x) \mu(x) dx.$$

en régime stationnaire on a

$$\lambda Q = \int_0^{\infty} P_0(x)\mu(x)dx. \quad (2.4)$$

$$P_n(0) = \int_0^{\infty} P_{n+1}(x)\mu(x)dx + \lambda c_{n+1}Q \text{ pour } n \geq 0 \quad (2.5)$$

2.1 Solution stationnaire du modèle

Dans cette partie, on obtient la solution stationnaire du modèle.

Le théorème suivant décrit la distribution des états du système en équilibre, en terme de fonctions génératrices.

Solution stationnaire du modèle

Théorème si $\rho < 1$

$$P_q(z) = \frac{\overline{G}(\lambda - \lambda C(z) + \alpha) - 1}{z - \overline{G}(\lambda - \lambda C(z) + \alpha)} Q \quad (2.6)$$

$$R_q(z) = \frac{z\alpha P_q(z, 0)(1 - \overline{G}(\lambda - \lambda C(z) + \alpha))}{(\lambda - \lambda C(z) + \alpha)(\lambda - \lambda C(z) + \beta)} \quad (2.7)$$

Preuve. Pour résoudre le système d'équations différentielles ci-dessus, on utilise les fonctions génératrices partielles suivantes :

$$\begin{aligned} P_q(z, x) &= \sum_{n \geq 0} z^n P_n(x) \quad ; \quad P_q(z) = \sum_{n \geq 0} z^n P_n \\ R_q(z) &= \sum_{n \geq 1} z^n R_n \quad ; \quad C(z) = \sum_{n \geq 1} z^n c_n . \end{aligned} \quad (2.8)$$

après calcul on trouve

$$\frac{\partial}{\partial x} P_q(z, x) - \frac{\partial}{\partial x} P_0(x) = -(\lambda + \mu(x) + \alpha)P_q(z, x) + (\lambda + \mu(x) + \alpha)P_0(x) + \lambda C(z)P_q(z, x) \quad (2.9a)$$

on remplace l'équation 2.1 dans l'équation ?? on trouve

$$\frac{\partial}{\partial x} P_q(z, x) = -(\lambda(1 - C(z)) + \mu(x) + \alpha) P_q(z, x) \quad (2.10)$$

pour calculé $P_q(z)$ on a comme suit

$$\frac{\partial}{\partial x} P_q(x, z) = -(\lambda - \lambda C(z) + \mu(x) + \alpha) P_q(x, z)$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x} P_q(x, z)}{P_q(x, z)} = -(\lambda - \lambda C(z) + \mu(x) + \alpha) \quad (2.11)$$

on intègre l'équation 2.11 de 0 à x par rapport a s :

on trouve

$$P_q(x, z) = P_q(0, z) e^{-(\lambda - \lambda C(z) + \alpha)x} e^{-\int_0^x \mu(s) ds}. \quad (2.12)$$

on intègre 2.12 de 0 à ∞ par rapport a x

$$\int_0^\infty P_q(x, z) dx = \int_0^\infty P_q(0, z) e^{-(\lambda - \lambda C(z) + \alpha)x} e^{-\int_0^x \mu(s) ds} dx.$$

$$\int_0^\infty P_q(x, z) dx = P_q(0, z) \int_0^\infty e^{-(\lambda - \lambda C(z) + \alpha)x} (1 - G(x)) dx$$

-

on trouve

$$\int_0^\infty P_q(x, z) dx = P_q(0, z) \left(\frac{1 - \bar{G}(\lambda - \lambda C(z) + \alpha)}{\lambda - \lambda C(z) + \alpha} \right) \quad (2.13)$$

donc

$$P_q(z) = P_q(0, z) \left(\frac{1 - \bar{G}(\lambda - \lambda C(z) + \alpha)}{\lambda - \lambda C(z) + \alpha} \right) \quad (2.14)$$

calcul de $P_q(0, z)$:

on multiplie l'équation 2.5 par z^{n+1} et on somme sur n de 0 à ∞

$$zP_q(0, z) = \int_0^\infty (P_q(x, z) - P_0(x))\mu(x)dx + \lambda QC(z)$$

$$zP_q(0, z) = \int_0^\infty P_q(x, z)\mu(x)dx + \lambda QC(z) - \lambda Q$$

d'autre par on multiplie l'équation 2.13 par $\mu(x)$ et en intégrant de 0 à ∞ on trouve

$$\int_0^\infty P_q(x, z)\mu(x)dx = P_q(0, z)\overline{G}(\lambda - \lambda C(z) + \alpha) \quad (2.15)$$

avec

$$\overline{G}(\lambda - \lambda C(z) + \alpha) = \int_0^\infty e^{-(\lambda - \lambda C(z) + \alpha)x} dG(x)$$

et

$$dG(x) = g(x) = \mu(x) e^{-\int_0^x \mu(s)ds}$$

$$P_q(z) = P_q(0, z) \left(\frac{1 - \overline{G}(\lambda - \lambda C(z) + \alpha)}{\lambda - \lambda C(z) + \alpha} \right) \quad (2.16)$$

donc

calcul de $R_n(z)$?

$$R_q(z) = \frac{\alpha z P_q(0, z) (1 - \overline{G}[\lambda - \lambda C(z) + \alpha])}{(\lambda - \lambda C(z) + \beta) + (\lambda - \lambda C(z) + \alpha)} \quad (2.17)$$

2.2 théorème

Si $\rho < 1$ où $\rho = \lambda E(I) \left(\frac{1}{\beta \overline{G}[\alpha]} + \frac{1}{\alpha \overline{G}[\alpha]} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right)$.

$$W_q(z) = P_q(z) + R_q(z) \quad (2.18)$$

Preuve

on a la fonction génératrice $W_q(z)$ est donné par

$$W_q(z) = P_q(z) + R_q(z)$$

avec la condition de normalisation qui est

$$W_q(1) + Q = 1$$

on remplace dans l'équation ?? $z = 1$, on trouve que $W_q(1) = \frac{0}{0}$ forme indéterminée, on applique la formule de l'hôpital pour enlever la forme indéterminée comme suit

$$W_q(1) = \frac{N'(1)}{D'(1)}Q$$

où

$$\begin{aligned} N'(1) &= \lambda E(I)Q\{(\alpha + \beta) + \overline{G}[\alpha](-\alpha - \beta)\} \quad ; \\ D'(1) &= -\lambda E(I)\{(\alpha + \beta) + \overline{G}[\alpha](\alpha\beta) + \lambda E(I)(\alpha + \beta)\} \end{aligned}$$

avec $C'(1) = E(I)$

alors

$$W_q(1) = \frac{\lambda E(I)Q\{(\alpha + \beta) + \overline{G}[\alpha](-\alpha - \beta)\}}{-\lambda E(I)\{(\alpha + \beta) + \overline{G}[\alpha](\alpha\beta) + \lambda E(I)(\alpha + \beta)\}}Q \quad (2.19)$$

on somme Q avec 2.19 on trouve

$$Q + W_q(1) = 1 \quad (2.20)$$

$$Q + \frac{\lambda E(I)Q\{(\alpha + \beta) + \overline{G}[\alpha](-\alpha - \beta)\}}{-\lambda E(I)\{(\alpha + \beta) + \overline{G}[\alpha](\alpha\beta) + \lambda E(I)(\alpha + \beta)\}}Q = 1$$

on trouve

$$Q = 1 - \lambda E(I) \left(\frac{1}{\beta \overline{G}[\alpha]} + \frac{1}{\alpha \overline{G}[\alpha]} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right); \quad (2.21)$$

$$\rho = \lambda E(I) \left(\frac{1}{\beta \overline{G}[\alpha]} + \frac{1}{\alpha \overline{G}[\alpha]} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right). \quad (2.22)$$

la file est stable si $\rho < 1$

3 Calcul de nombre moyen de clients et le temps moyen dans la file d'attente

on note Lq le nombre moyen de clients dans la file d'attente tel que

$$Lq = \frac{d}{dz} W_q(z) \Big|_{z=1}$$

on a

$$W_q(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$Lq = \frac{N'(z)D(z) - D'(z)N(z)}{(D(z))^2} \Big|_{z=1} = \frac{0}{0} \quad (3.1)$$

est la forme indéterminer on applique la formule de l'hopital on trouve

$$Lq = \frac{N''(1)D'(1) - D''(1)N'(1)}{2(D'(1))^2} \quad (3.2)$$

avec

$$N'(1) = \lambda E(I)Q\{(\alpha + \beta) + \overline{G}[\alpha](-\alpha - \beta)\} \quad .$$

$$\begin{aligned}
N''(1) &= 2Q\{\lambda(E(I))^2\{(\frac{\alpha}{\lambda E(I)} - 1) + \bar{G}(\alpha)(1 - \frac{\alpha}{\lambda E(I)}) + \bar{G}'(\alpha)(\alpha + \beta)\} \\
&\quad + \lambda QE(I(I-1))\{(\alpha + \beta) + \bar{G}(\alpha)(-\alpha - \beta)\}. \\
D'(1) &= -\lambda E(I)\{(\alpha + \beta) + \bar{G}[\alpha](\alpha\beta) + \lambda E(I)(\alpha + \beta)\}. \\
D''(1) &= 2(\lambda(E(I))^2\{1 - \frac{\alpha+\beta}{\lambda E(I)} - \bar{G}(\alpha) + \\
&\quad \bar{G}'(\alpha)(-\alpha - \beta - \frac{\alpha\beta}{\lambda E(I)})\} - \lambda E(I(I-1))\{(-\alpha - \beta) + \bar{G}(\alpha)(\alpha + \beta)\}).
\end{aligned}$$

avec

$$C(1) = 1; C'(1) = E(I) ; C''(1) = E(I(I-1))$$

on note W_q le temps moyen d'attente où

$$W_q = \frac{Lq}{\lambda E(I)} \quad (3.3)$$

4 Cas particulier

4.1 Pas des pannes ni réparations

Lorsque le serveur n'est pas sujet à des pannes et des réparation, on pose $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ on obtient :

$$W_q(z) = \frac{(\bar{G}(\lambda - \lambda C(z)) - 1)Q}{z - \bar{G}(\lambda - \lambda C(z))} \quad (4.1)$$

Et on retrouve les résultats du Chapitre 2.

5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la file d'attente $M^{[X]}/G/1$ avec panne et réparations. Nous avons donné les équations décrivant l'évolution du système, la fonction génératrice du nombre de client dans la file d'attente sous la forme explicite

et ceci dans le but de calculer les performances du modèle étudié. Pour valider les résultats théoriques, nous avons donné un cas particulier.

Chapitre

5

File d'attente $M^{[X]}/G/1$ avec vacances, panne et réparation

Dans ce chapitre, nous considérons une file $M^{[X]}/G/1$ où le serveur peut prendre des vacances avec une certaine probabilité. Les clients arrivent en groupe au système selon un processus de Poisson et la durée de service est de distribution .Le serveur sert tous les clients qui arrivent au système avec des temps de service indépendants, identiquement distribués de loi générale. Cependant, a la fin de chaque service, le serveur peut prendre des vacances avec une probabilité p , ou peut rester dans le système et servir la prochaine arrivée, avec une probabilité $1 - p$. et que la durée de est de distribution générale; Le système peut tombé en panne , les panne proviennent selon un processus de poisson et rentre immédiatement en réparation , la durée de réparation est de loi exponentielle.

1 Notations et modèle mathématique

Le modèle décrit ci-dessus, est basé sur les hypothèses suivantes :

- i. La capacité de la file est infnie.
- ii. Processus des arrivées des clients

Les clients arrivent en groupe selon un processus de Poisson de taux λ

- iii. Processus de service

La distribution du temps de service est de loi générale de fonction de répartition

$G(x)$ et de densité de probabilité $g(x)$, de transformée de Laplace $\bar{G}(x)$ et possédant les deux premiers moments $E(S)$ et $E(S^2)$.

iv. Processus de panne et processus de réparation

Le serveur est sujet à des pannes après un temps aléatoire de loi exponentielle de taux α , Le client dont le service est interrompu devient en tête de la file, il n'y a pas perte de clients. Lorsque le serveur tombe en panne il est immédiatement réparé et le temps requis pour la réparation est une variable aléatoire de loi exponentielle de taux β .

v. Processus de vacances :

Après chaque service, le serveur décide de prendre la vacance avec probabilité p ou de continuer à servir les clients avec probabilité $1 - p$. La durée des vacances est de distribution générale, de fonction de répartition $B(x)$, de densité de probabilité $b(x)$, de transformée de Laplace du temps de vacances est $\bar{B}(x)$ avec γ est le taux des vacances, et possédant les deux premiers moments $E(V)$ et $E(V^2)$.

vi. Les temps conditionnelles de complétion

pour le service et pour la vacance sont respectivement :

$$\mu(x) = \frac{g(x)}{1 - G(x)} \quad ; \quad g(s) = \mu(s) e^{-\int_0^s \mu(x) dx} \quad (1.1)$$

$$\gamma(x) = \frac{b(x)}{1 - B(x)} \quad ; \quad b(s) = \gamma(s) e^{-\int_0^s \gamma(x) dx} \quad (1.2)$$

on suppose que le flux des arrivées des clients, le temps de service, la durée de vacances, le flux de pannes et la durée de réparation, sont mutuellement indépendants.

L'état du système à l'instant t peut être décrit par le processus de Markov

$$\{N(t); t \geq 0\} = \{Y(t); X(t); \xi_1(t); \xi_2(t); t \geq 0\}$$

$X(t)$: représente le nombre de clients dans le système à l'instant t .

$Y(t)$: représente l'état du serveur à l'instant t .

Si $Y(t) = 1$; alors $\xi_1(t)$ représente le temps de service écoulé du clients en service.

Si $Y(t) = 2$; alors $\xi_2(t)$ représente le temps de vacance écoulé.

Pour le processus $\{N(t); t \geq 0\}$; on définit les probabilités suivantes :

$$P_n(x; t)dx = P(Y(t) = 1; X(t) = n; x < \xi_1(t) < x + dx); n \geq 1$$

$$V_n(x; t)dx = P(Y(t) = 2; X(t) = n; x < \xi_2(t) < x + dx); n \geq 0$$

$$Q(t) = P(Y(t) = 0; X(t) = 0)$$

on a les notation suivantes :

$\cdot P_n(x, t)$: la probabilité qu'à l'instant t le serveur est actif (n'est pas une panne ni en vacance) et il y a n clients dans la file .

$\cdot V_n(x, t)$: la probabilité qu'à l'instant t le serveur est en vacance et il y a n clients dans la file.

$\cdot R_n(t)$: la probabilité à l'instant t le serveur est en panne et le système est en réparation et il y a n clients dans la file.

$\cdot Q_n(t)$: probabilité qu'à l'instant t le système est vide est le serveur est fiable et en repos.

2 Conditions de stabilité

en régime stationnaire on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(x, t) = P_n(x) \quad ; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} P_n(x, t) dx = P_n; \quad (2.1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_n(x, t) = V_n(x) \quad ; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V_n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} V_n(x, t) dx = V_n; \quad (2.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_n(t) = R_n \quad ; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = Q \quad (2.3)$$

La condition de normalisation est :

$$Q + \sum_{n \geq 0} \int_0^{\infty} P_n(x) dx + \sum_{n \geq 0} \int_0^{\infty} V_n(x) dx + \sum_{n \geq 0} R_n = 1 \quad (2.4)$$

2.1 Distribution stationnaire des États du système

A l'aide de la méthode de la variable supplémentaire, le système des équations de Chapman-Kolmogorov du modèle sous les conditions de stabilité, sont données comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x} P_n(x) + (\lambda + \mu(x) + \alpha) P_n(x) = \lambda \sum_{i=1}^n c_i P_{n-i}(x) \quad \text{pour } n \geq 1 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} P_0(x) + (\lambda + \mu(x) + \alpha) P_0(x) = 0 \quad \text{pour } n = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} V_n(x) + (\lambda + \gamma(x)) V_n(x) = \lambda \sum_{i=1}^n c_i V_{n-i}(x) \quad \text{pour } n \geq 1 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} V_0(x) + (\lambda + \gamma(x)) V_0(x) = 0 \quad \text{pour } n = 0 \quad (2.8)$$

$$(\lambda + \beta) R_n = \lambda \sum_{i=1}^n c_i R_{n-i} + \alpha \int_0^{\infty} P_{n-1}(x) dx \quad \text{pour } n \geq 1 \quad (2.9)$$

$$(\lambda + \beta) R_n = \lambda \sum_{i=1}^n c_i R_{n-i} + \alpha \int_0^{\infty} P_{n-1}(x) dx \quad \text{pour } n \geq 1 \quad (2.10)$$

$$(\lambda + \beta)R_0 = 0 \quad \text{pour } n = 0 \quad (2.11)$$

$$\lambda Q = \beta R_0 + \int_0^\infty V_0(x)\gamma(x)dx + (1-p) \int_0^\infty P_0(x)\mu(x)dx \quad (2.12)$$

Ces équations sont résolues à l'aide des conditions suivantes (l'écoulé $x = 0$)

$$P_n(0) = (1-p) \int_0^\infty P_{n+1}(x)\mu(x)dx + \int_0^\infty V_{n+1}(x)\gamma(x)dx + \beta R_{n+1} + \lambda c_{n+1}Q \quad \text{pour } n \geq 0 \quad (2.13)$$

$$V_n(0) = p \int_0^\infty P_n(x)\mu(x)dx \quad \text{pour } n \geq 0 \quad (2.14)$$

2.2 Solution stationnaire du modèle

Dans cette partie, on obtient la solution stationnaire du modèle pour les équations différentielles, ci-dessus définies.

Le théorème suivant décrit la distribution des états du système en équilibre, en terme de fonctions génératrices.

2.2.1 Théorème : Si $\rho < 1$ alors

$$\begin{aligned}
P_q(z) &= \frac{f_2(z)(1 - \overline{G}[f_1(z)])\lambda(C(z) - 1)Q}{f_1(z)f_2(z)\{z - (1 - p)\overline{G}[f_1(z)] - p\overline{B}[\lambda - \lambda C(z)]\overline{G}[f_1(z)]\} - \alpha\beta z(1 - \overline{G}[f_1(z)])} \\
V_q(z) &= \frac{pf_1(z)f_2(z)\overline{G}[f_1(z)]\overline{B}[\lambda - \lambda C(z)] - 1)Q}{f_1(z)f_2(z)\{z - (1 - p)\overline{G}[f_1(z)] - p\overline{B}[\lambda - \lambda C(z)]\overline{G}[f_1(z)]\} - \alpha\beta z(1 - \overline{G}[f_1(z)])} \\
R_q(z) &= \frac{\alpha z(1 - \overline{G}[f_1(z)])\lambda(C(z) - 1)Q}{f_1(z)f_2(z)\{z - (1 - p)\overline{G}[f_1(z)] - p\overline{B}[\lambda - \lambda C(z)]\overline{G}[f_1(z)]\} - \alpha\beta z(1 - \overline{G}[f_1(z)])} \quad (2.15)
\end{aligned}$$

avec $f_1(z) = \lambda - \lambda C(z) + \alpha$ et $f_2(z) = \lambda - \lambda C(z) + \beta$

Preuve Pour résoudre le système d'équations différentielles ci-dessus, on utilise les fonctions génératrices partielles suivantes on définit les les fonction génératrice suivante :

$$\begin{aligned}
P_q(x, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(x); & P_q(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n; \\
V_q(x, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n V_n(x); & V_q(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n V_n; \\
R_q(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n R_n; & C(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n c_n. \quad (2.16)
\end{aligned}$$

On multiplier l'équation 2.5 par z^n et on somme de $n = 1$ a ∞ après on somme le résultat avec 2.6 et on applique les fonctions génératrices 2.16 on trouve

$$\frac{\partial}{\partial x} P_q(x, z) + (\lambda - \lambda C(z) + \mu(x) + \alpha)P_q(x, z) = 0 \quad (2.17)$$

même chose pour les équation 2.7 et 2.8, 2.9 et 2.10 et on applique les fonctions génératrices 2.16 on trouve

$$\frac{\partial}{\partial x} V_q(x, z) + (\lambda - \lambda C(z) + \gamma(x))V_q(x, z) = 0 \quad (2.18)$$

$$(\lambda - \lambda C(z) + \beta)R_q(z) = \alpha z \int_0^\infty P_q(x, z) dx \quad (2.19)$$

On multiplie l'équation 2.11 par z^{n+1} et on somme de $n = 0$ à ∞ nous obtenons le resultat suivant

$$\begin{aligned} zP_q(0, z) &= (1-p) \int_0^\infty P_q(x, z) \mu(x) dx + \int_0^\infty V_q(x, z) \gamma(x) dx + \beta R_q(z) + \\ &\lambda C(z)Q - ((1-p) \int_0^\infty P_0(x) \mu(x) dx + \int_0^\infty V_0(x) \gamma(x) dx + \beta R_0) \end{aligned} \quad (2.20)$$

on remplace

$$- ((1-p) \int_0^\infty P_0(x) \mu(x) dx + \int_0^\infty V_0(x) \gamma(x) dx + \beta R_0) \text{ par } - \lambda Q \quad (2.21)$$

on trouve

$$zP_q(0, z) = (1-p) \int_0^\infty P_q(x, z) \mu(x) dx + \int_0^\infty V_q(x, z) \gamma(x) dx + \beta R_q(z) + \lambda(C(z) - 1)Q \quad (2.22)$$

On multiplie l'équation 2.12 par z^n et on somme de $n = 0$ à ∞ et on applique les fonctions génératrices 2.16

on trouve

$$V_q(0, z) = p \int_0^\infty P_q(x, z) \mu(x) dx \quad (2.23)$$

on intègre de 0 à x l'équation 2.17 on trouve

$$P_q(x, z) = P_q(0, z)e^{-(\lambda - \lambda C(z) + \alpha)x - \int_0^x \mu(s) ds} \quad (2.24)$$

on a $P_q(0, z)$ de l'équation 2.22 et on intègre l'équation 2.24 de 0 à x on trouve

$$P_q(z) = P_q(0, z) \left[\frac{1 - \bar{G}[\lambda - \lambda C(z) + \alpha]}{\lambda - \lambda C(z) + \alpha} \right] \quad (2.25)$$

on multiplie l'équation 2.24 par $\mu(x)$ et on l'intègre de 0 à x on trouve

$$\int_0^\infty P_q(x, z) \mu(x) dx = P_q(0, z) \bar{G}[\lambda - \lambda C(z) + \alpha] \quad (2.26)$$

de l'équation 2.26 et 2.23 on trouve

$$V_q(0, z) = p P_q(0, z) \bar{G}[\lambda - \lambda C(z) + \alpha] \quad (2.27)$$

et on intègre l'équation 2.18 de 0 à x on a

$$V_q(x, z) = V_q(0, z) e^{-(\lambda - \lambda C(z))x - \int_0^x \gamma(s) ds} \quad (2.28)$$

on a $V_q(0, z)$ de l'équation 2.27 en la remplace dans 2.28 on trouve

$$V_q(z) = p P_q(0, z) \frac{\bar{G}[\lambda - \lambda C(z) + \alpha] (1 - \bar{B}[\lambda - \lambda C(z)])}{\lambda - \lambda C(z)} \quad (2.29)$$

on multiplie l'équation ?? par $\gamma(x)$ et on l'intègre de 0 à x on trouve

$$\int_0^{\infty} V_q(x, z) \gamma(x) dx = pP_q(0, z) \overline{G}[\lambda - \lambda C(z) + \alpha] \overline{B}[\lambda - \lambda C(z)] \quad (2.30)$$

de l'équation 2.19 on trouve

$$R_q(z) = \frac{\alpha z P_q(0, z) (1 - \overline{G}[\lambda - \lambda C(z) + \alpha])}{(\lambda - \lambda C(z) + \beta)(\lambda - \lambda C(z) + \alpha)} \quad (2.31)$$

on remplace les équations 2.26, 2.30 et 2.20 on trouve $P_q(0, z)$

$$P_q(0, z) = \frac{f_1(z) f_2(z) \lambda (C(z) - 1) Q}{f_1(z) f_2(z) \{z - (1 - p) \overline{G}[f_1(z)] - p \overline{B}[\lambda - \lambda C(z)] \overline{G}[f_1(z)]\} - \alpha \beta z (1 - \overline{G}[f_1(z)])} \quad (2.32)$$

où $f_1(z) = \lambda - \lambda C(z) + \alpha$ et $f_2(z) = \lambda - \lambda C(z) + \beta$

donc on trouve les fonctions 2.25, 2.29 et 2.30 qui sont :

$$P_q(z) = \frac{f_2(z) (1 - \overline{G}[f_1(z)]) \lambda (C(z) - 1) Q}{f_1(z) f_2(z) \{z - (1 - p) \overline{G}[f_1(z)] - p \overline{B}[\lambda - \lambda C(z)] \overline{G}[f_1(z)]\} - \alpha \beta z (1 - \overline{G}[f_1(z)])} \quad (2.33)$$

$$V_q(z) = \frac{p f_1(z) f_2(z) \overline{G}[f_1(z)] (\overline{B}[\lambda - \lambda C(z)] - 1) Q}{f_1(z) f_2(z) \{z - (1 - p) \overline{G}[f_1(z)] - p \overline{B}[\lambda - \lambda C(z)] \overline{G}[f_1(z)]\} - \alpha \beta z (1 - \overline{G}[f_1(z)])} \quad (2.34)$$

$$R_q(z) = \frac{\alpha z (1 - \overline{G}[f_1(z)]) \lambda (C(z) - 1) Q}{f_1(z) f_2(z) \{z - (1 - p) \overline{G}[f_1(z)] - p \overline{B}[\lambda - \lambda C(z)] \overline{G}[f_1(z)]\} - \alpha \beta z (1 - \overline{G}[f_1(z)])} \quad (2.35)$$

la fonction génératrice du nombre de client dans la file d'attente en régime stationnaire :

$$W_q(z) = P_q(z) + V_q(z) + R_q(z).$$

$$W_q(z) = \frac{f_2(z)(1 - \overline{G}[f_1(z)])\lambda(C(z) - 1)Q + pf_1(z)f_2(z)\overline{G}[f_1(z)](\overline{B}[\lambda - \lambda C(z)] - 1)Q}{f_1(z)f_2(z)\{z - (1 - p)\overline{G}[f_1(z)] - p\overline{B}[\lambda - \lambda C(z)]\overline{G}[f_1(z)]\} - \alpha\beta z(1 - \overline{G}[f_1(z)])} \quad (2.36)$$

$$\frac{\alpha z(1 - \overline{G}[f_1(z)])\lambda(C(z) - 1)Q}{f_1(z)f_2(z)\{z - (1 - p)\overline{G}[f_1(z)] - p\overline{B}[\lambda - \lambda C(z)]\overline{G}[f_1(z)]\} - \alpha\beta z(1 - \overline{G}[f_1(z)])} \quad (2.37)$$

pour $z = 1$ on a $W_q(z) = \frac{0}{0}$ on applique la formule de l'hopitale sur la formule 2.37 on trouve

$$W_q(1) = \frac{\lambda E(I)Q\{(\alpha + \beta)(1 - \overline{G}[\alpha]) + p\alpha\beta\overline{G}[\alpha]E[V]\}}{\alpha\beta\overline{G}[\alpha] - \lambda E(I)(\alpha + \beta)(1 - \overline{G}[\alpha]) - p\lambda\alpha\beta\overline{G}[\alpha]E(I)E[V]} \quad (2.38)$$

où

$$C(1) = 1, C'(1) = E(I)$$

et

$$\overline{B}[0] = 1, \overline{B}'[0] = -E(V);$$

donc on a

$$Q = 1 - \lambda E(I) \left(\frac{1}{\beta\overline{G}[\alpha]} + \frac{1}{\alpha\overline{G}[\alpha]} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} + pE(V) \right)$$

$Q > 0$ d'où la condition de stabilité est

$$\rho = \lambda E(I) \left(\frac{1}{\beta\overline{G}[\alpha]} + \frac{1}{\alpha\overline{G}[\alpha]} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} + pE(V) \right)$$

la file est stable si $\rho < 1$

3 calcul de performances du modèle

3.1 Nombre moyen de clients dans la file d'attente

on note Lq le nombre moyen de clients dans la file d'attente tel que

$$Lq = \frac{d}{dz} W_q(z) \Big|_{z=1}$$

on a

$$W_q(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$Lq = \frac{N'(z)D(z) - D'(z)N(z)}{(D(z))^2} \Big|_{z=1} = \frac{0}{0} \quad (3.1)$$

est la forme indéterminer on applique la formule de l'hôpital on trouve

$$Lq = \frac{N''(1)D'(1) - D''(1)N'(1)}{2(D'(1))^2} \quad (3.2)$$

avec

$$N'(1) = \lambda Q E(I) \{(\alpha + \beta) + \bar{G}(\alpha)(p\alpha\beta E(V) - \alpha - \beta)\}.$$

$$N''(1) =$$

$$2Q \{ \lambda (E(I))^2 \{ (\frac{\alpha}{\lambda E(I)} - 1) + \bar{G}(\alpha) (1 - \frac{\alpha}{\lambda E(I)} - p\alpha E(V) - p\beta E(V) + \frac{1}{2} p\alpha\beta E(V^2)) \} + \bar{G}'(\alpha) (\alpha + \beta - p\alpha\beta E(V)) \} + \lambda Q E(I(I-1)) \{ (\alpha + \beta) + \bar{G}(\alpha)(p\alpha\beta E(V) - \alpha - \beta) \}.$$

$$D'(1) = -\lambda E(I)(\alpha + \beta) + \bar{G}(\alpha) \{ \alpha\beta + \lambda E(I)(\alpha + \beta - p\alpha\beta E(V)) \}.$$

$$D''(1) = 2(\lambda (E(I))^2 \{ (1 - \frac{\alpha+\beta}{\lambda E(I)}) + \bar{G}(\alpha) (-1 + p\alpha E(V) + p\beta E(V) - \frac{1}{2} p\alpha\beta E(V^2)) \} + \bar{G}'(\alpha) (-\alpha - \beta - \frac{\alpha\beta}{\lambda E(I)} + p\alpha\beta E(V)) \} - \lambda E(I(I-1)) \{ (-\alpha - \beta) + \bar{G}(\alpha)(\alpha + \beta - p\alpha\beta E(V)) \}.$$

avec

$$C(1) = 1; C'(1) = E(I) ; C''(1) = E(I(I - 1))$$

et

$$\bar{B}(0) = 1; \bar{B}'(0) = E(S) ; \bar{B}''(0) = E(S^2)$$

3.2 le temps moyen d'attente dans la file d'attente

on note W_q le temps moyen d'attente où

$$W_q = \frac{Lq}{\lambda E(I)} \quad (3.3)$$

4 Cas particulier

4.1 Pas des panne ni réparation

Lorsque le serveur n'est pas sujet à des pannes et à des réparations, on pose $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ on obtient :

$$W_q(z) = \frac{(\bar{G}(\lambda - \lambda C(z)) - 1)Q + p\bar{G}(\lambda - \lambda C(z))(\bar{B}(\lambda - \lambda C(z)) - 1)Q}{z - (1 - p)\bar{G}(\lambda - \lambda C(z)) - p\bar{B}(\lambda - \lambda C(z))\bar{G}(\lambda - \lambda C(z))} \quad (4.1)$$

Et on retrouve les résultats du Chapitre 3.

4.2 Pas des vacances

Lorsque le serveur ne prend pas des vacances, on pose $\gamma = 0$

$$W_q(z) = \frac{((\lambda - \lambda C(z) + \beta) + \alpha z)(1 - \bar{G}(\lambda - \lambda C(z) + \alpha))\lambda(C(z) - 1)}{(\lambda - \lambda C(z) + \alpha)(\lambda - \lambda C(z) + \beta)(z - \bar{G}(\lambda - \lambda C(z) + \alpha) - \alpha\beta z(1 - \bar{G}(\lambda - \lambda C(z) + \alpha)))} Q \quad (4.2)$$

Et on retrouve les résultats du Chapitre 4.

4.3 Pas des vacances et pas des pannes ni réparations

Lorsque le serveur ne prend pas des vacances, n'est pas sujet à des pannes et des réparation, on pose $\gamma = 0$, $\alpha = 0$ et $\beta = 0$

on obtient :

$$W_q(z) = \frac{(\overline{G}(\lambda - \lambda C(z)) - 1)}{z - \overline{G}(\lambda - \lambda C(z))} Q \quad (4.3)$$

Et on retrouve les résultats du Chapitre 2.

5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié une file d'attente $M^{[X]}/G/1$ où le serveur est sujet à des pannes actives et vacances. Nous avons donné la fonction génératrice du nombre de clients dans le système sous la forme explicite et ceci dans le but de calculer les performances du modèle étudié. Afin de valider les résultats théoriques nous avons donné quelques applications.

Chapitre

6

File d'attente $M/M^{[Y]}/1$ avec vacance multiple et catastrophe

Dans ce chapitre nous analysons une file $M/M^{[Y]}/1$ avec des catastrophes et vacances multiples.

Le modèle est décrit dans la Section 2. Dans la Section 3, nous avons tiré le système des équations stables d'état et utilisant ces équations, La probabilité produisant des fonctions pour le nombre (numéro) de clients dans la file d'attente quand le serveur est occupé(animé) ou dans des vacances sont tiré et obtenu aussi des distributions de probabilité d'état stables.

La Section 4 traite la condition de stabilité du système. Dans la section 5, nous discutons le cas (la caisse) particulier.

Les solutions de formé des mesures de performance de système sont obtenues dans 6.

Une étude numérique est effectuée dans la Section 7 pour tester l'efficacité du système

1 Notation et modèle mathématique

Nous considérons une file d'attente à un seul serveur et service groupé par taille fixe et vacances multiples. Les hypothèses suivantes décrivent le modèle mathématique :

i. La capacité du système est infinie.

ii. Processus des arrivées des clients :

Les clients arrivent au système selon un processus de Poisson de taux λ

iii. Processus de service :

Les service se font par groupe de k clients (k fixé), le temps nécessaire pour effectuer un service pour k clients suit une loi exponentielle de paramètre μ .

iv. Processus de vacances :

Le serveur est sujet à des vacances multiples, autrement dit, le serveur décide de prendre la vacance de durée exponentielle de paramètre α ; à chaque fois que le système contient moins de k clients. Si le système est vide, le serveur part en vacance. Nous supposons qu'initialement le système contient k clients. Après la fin de service, s'il trouve un nombre de clients inférieur à k dans la file, le serveur part en vacances : Si le serveur trouve plus que k clients en attente, k clients seront sélectionnés pour être servi en groupe. Lorsque le serveur termine son service, et le système devient vide, il part en vacance multiple. Si lors de son retour des vacances, le serveur trouve moins que k clients dans la file, il quitte immédiatement le système et part pour une autre vacance et ainsi de

suite jusqu'à ce qu'il trouve k client ou plus dans la file d'attente.

v. Processus des catastrophes :

Les catastrophes arrivent au hasard selon un processus de Markov de paramètre ν .

Les catastrophes peuvent venir de l'extérieur du système, tous les clients qui sont dans le système sont complètement détruits ou perdus et le système devient vide.

vi. Les durées des inter-arrivées, les durées de service, les durées de vacances sont supposées être mutuellement indépendantes.

1.1 Description du modèle

Ce modèle est complètement résolu en construisant les fonctions génératrices et le nombre moyen de clients dans la file d'attente.

Soit $\{N(t), C(t)\}$ être un processus aléatoire où $N(t)$ est la variable aléatoire qui représente le nombre de clients dans la file d'attente au temps t et $C(t)$ être la variable aléatoire qui représente l'état du serveur à l'instant t .

Nous définissons :

$\cdot P_{n,1}(t)$: probabilité à l'instant t le serveur est occupé et n clients dans la file d'attente à l'instant t .

$\cdot P_{n,2}(t)$: probabilité à l'instant t le serveur est en vacances et n clients dans la file d'attente à l'instant t .

1.2 Les équation de Chapman-Kolmogorov :

Les équations de Chapman-Kolmogorov en régime transitoire sont :

$$P'_{0,1}(t) = -(\lambda + \nu + \mu)P_{0,1}(t) + \mu P_{k,1}(t) + \alpha P_{k,2}(t) \quad (1.1)$$

$$P'_{n,1}(t) = -(\lambda + \nu + \mu)P_{n,1}(t) + \mu P_{n+k,1}(t) + \alpha P_{n+k,2}(t) + \lambda P_{n-1,1}(t) \quad n = 1, 2, 3, \dots, k-1 \quad (1.2)$$

$$P'_{0,2}(t) = -(\lambda + \nu)P_{0,2}(t) + \mu P_{0,1}(t) + \nu \quad (1.3)$$

$$P'_{n,2}(t) = -(\lambda + \nu)P_{n,2}(t) + \lambda P_{n-1,2}(t) + \mu P_{n,1}(t) \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots, k-1 \quad (1.4)$$

$$P'_{n,2}(t) = -(\lambda + \nu + \alpha)P_{n,2}(t) + \lambda P_{n-1,2}(t) \quad n \geq k \quad (1.5)$$

2 Évaluation des probabilités stationnaire des états du système

Dans cette partie, on donne la fonction génératrice du nombre de clients dans la file lorsque le serveur est occupé ou en vacances.

En régime stationnaire, les équations précédentes deviennent :

$$(\lambda + \nu + \mu)P_{0,1} = \mu P_{k,1} + \alpha P_{k,2} \quad (2.1)$$

$$(\lambda + \mu + \nu)p_{n,1} = \lambda p_{n-1,1} + \mu p_{n+k,1} + \alpha p_{n+k,2} \text{ pour } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2)$$

$$(\lambda + \nu)p_{0,2} = \mu p_{0,1} + \nu \quad (2.3)$$

$$(\lambda + \nu)p_{n,2} = \lambda p_{n-1,2} + \mu p_{n,1} \text{ pour } n = 1, 2, 3, \dots, k-1 \quad (2.4)$$

$$(\lambda + \mu + \nu)p_{n,2} = \lambda p_{n-1,2} \text{ pour } n \geq k \quad (2.5)$$

Les fonctions génératrices de la distribution conjointes de l'état du serveur et du nombre de clients dans la file d'attente en régime stationnaire lorsque le serveur est occupé ou en vacances sont respectivement définies par

$$G(z) = \sum_{n \geq 0} z^n p_{n,1};$$

$$H(z) = \sum_{n \geq 0} z^n p_{n,2};$$

En utilisant les fonction génératrice partielles et les équations 2.1 et 2.2 on trouve

$$G(z)(\lambda z^{k+1} - (\lambda + \nu + \mu)z^k + \mu) + \alpha H(z) = \mu \sum_{n=0}^{k-1} z^n p_{n,1} + \alpha \sum_{n=0}^{k-1} z^n p_{n,2} \quad (2.6)$$

e la même manière en utilise les équations 2.3 et 2.4 et 2.5 on trouve

$$H(z)((1-z)\lambda + \nu + \alpha) - \nu = \mu \sum_{n=0}^{k-1} z^n p_{n,1} + \alpha \sum_{n=0}^{k-1} z^n p_{n,2} \quad (2.7)$$

$$H(z) = \frac{\mu \sum_{n=0}^{k-1} z^n p_{n,1} + \alpha \sum_{n=0}^{k-1} z^n p_{n,2} + \nu}{((1-z)\lambda + \nu + \alpha)} \quad (2.8)$$

l'équation 2.8 représente la fonction génératrice du nombre de clients dans la file lorsque le serveur est en vacance.

de les équation 2.6 et 2.8 on trouve

$$G(z) = \frac{(\mu \sum_{n=0}^{k-1} z^n p_{n,1} + \alpha \sum_{n=0}^{k-1} z^n p_{n,2} + \nu)((1-z)\lambda + \nu) - \nu}{((1-z)\lambda + \nu + \alpha)(\lambda z^{k+1} - (\lambda + \nu + \mu)z^k + \mu)} \quad (2.9)$$

La fonction génératrice $G(z)$ doit converger au moins à l'intérieur du cercle unitaire.

$$G(z) = \frac{A}{(\lambda(z - z_0))(\alpha + \nu + \lambda - \lambda z)} \quad (2.10)$$

avec

$$G(0) = \frac{A}{(-\lambda z_0)(\alpha + \nu + \lambda)} \quad (2.11)$$

où On a par définition, $G(0) = p_{0,1}$

$$A = P_{0,1}((-\lambda z_0)(\alpha + \nu + \lambda)) \quad (2.12)$$

$$G(z) = \frac{P_{0,1}(\lambda z_0)(\alpha + \nu + \lambda)}{(\lambda(z_0 - z))(\alpha + \nu + \lambda - \lambda z)} \quad (2.13)$$

En appliquant quelques transformations sur $G(z)$ on a

$$G(z) = \frac{P_{0,1} z_0 (\alpha + \nu + \lambda)}{(\alpha + \nu + \lambda - \lambda z)} \left[\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{z_0^{n+1}} - \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\lambda}{\alpha + \nu + \lambda} \right)^{n+1} z^n \right] \quad (2.14)$$

Par identiÖcation, on obtient

$$p_{n,1} = p_{0,1} s^n (1 + (r/s) + \dots + (r/s)^n) \text{ avec } n = 1, 2, 3, \dots \text{ et } r = 1/z_0; s = \lambda/(\lambda + \alpha + \nu) \quad (2.15)$$

En utilisant les équations 2.15, 2.3 et 2.4, et par récurrence pour $n = 1, 2, 3, \dots, k-1$, on obtient

$$p_{n,2} = (\mu/(\lambda+\mu))p_{0,1}(s^n(1+(r/s)+\dots+(r/s)^n)+(\lambda/(\lambda+\mu))(s^{n-1}(1+(r/s)+\dots+(r/s)^{n-1})$$

$$+ \dots + (\lambda/(\lambda+\mu))^n) + (\lambda/(\lambda+\mu))^n(\nu/(\lambda+\nu)) \text{ avec } n = 0, 1, 2, 3, \dots, k-1 \quad (2.16)$$

$$p_{n,2} = (\lambda/(\lambda+\alpha+\mu))^{n-k+1}p_{k-1,2} \text{ avec } n \geq k \quad (2.17)$$

on a la condition de normalisation

$$p_{0,1} + \sum_{n=1}^{\infty} p_{n,1} + \sum_{n=0}^{k-1} p_{n,2} + \sum_{n=k}^{\infty} p_{n,2} = 1 \quad (2.18)$$

on remplace 2.15,2.16et2.17 dans 2.18 on trouve

$$p_{0,1} = \frac{N}{D}$$

où

$$N = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} (\lambda/(\lambda+\mu))^n(\nu/(\lambda+\nu)) - (\lambda/(\lambda+\nu))^k(\nu/(\alpha+\nu)) \quad (2.19)$$

$$D = \frac{1}{(1-s)(1-r)} + (\mu/(\lambda+\mu))\left(\sum_{n=0}^{k-1} (s^n(1+(r/s)+\dots+(r/s)^n) + (\lambda/(\lambda+\nu))(s^{n-1}(1+(r/s)+\dots+(r/s)^{n-1}) + \dots + (\lambda/(\lambda+\nu))^n) + (\mu/(\lambda+\mu))(s^{k-1}(1+(r/s)+\dots+(r/s)^{k-1}) + \dots + (\mu/(\lambda+\mu))^{k-1})\right) \frac{\lambda}{\alpha+\nu} \quad (2.20)$$

2.1 Condition de stabilité

Le système sera stable si

$$\rho < 1 \text{ avec } \rho = \frac{\lambda}{k\mu}$$

3 Performances du système étudié

Dans cette partie, on va citer quelques mesures de performances importantes du modèle étudié.

3.1 Nombre moyen de clients dans le système L_s

$$L_s = \sum_{n \geq 0} (n+k)p_{n,1} + np_{n,2} \quad (3.1)$$

3.2 Nombre moyen de clients dans la file L_q

$$L_q = \sum_{n \geq 0} n(p_{n,1} + p_{n,2}) \quad (3.2)$$

4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons évalué les équations décrivant un système $M/M^{[Y]}/1$ à un serveur avec vacance multiple et service groupé. Nous avons calculé les probabilités stationnaires du système lorsque le serveur est occupé ou en vacances, et nous avons donné l'expression du nombre moyen de clients dans le système et dans la file.

Chapitre

7

Applications numériques

Dans le but d'une numérisation de nos résultats, on utilise le cas particulier de la file $M^{[X]}/G/1$ avec vacances Bernoulli où le temps des services et des vacances sont de distribution exponentielle. Les ré

sultats ont été obtenus à l'aide des logiciels Matlab et Excel

1 Application au cas de la file $M^{[X]}/G/1$ avec vacances, pannes et réparation

1.1 Les différentes caractéristiques de la file en fonction de α et p

On choisit les valeurs arbitraires suivantes :

$$\beta = 10; \gamma = 7; \lambda = 2; \mu = 5; E(I) = t; E(I(I-1)) = t^2 - t.$$

Les programmes sur MATLAB sont

pour $t = 1$ donc $E(I) = 1; E(I(I-1)) = 0.$

pour L_q est

function lq=kouka_nombre_moy_atte_graph

b=10; g=7; c=2; m=5;

```

k=1;
for p=.25 :.25 :.75
i=1;
  for a=1 :7
    Q=1-c*((m+a)/(b*m)+(m+a)/(a*m)-1/b-1/a+p/g);
    if Q<1
      n1=c*Q*(a+b+m/(m+a)*(p*a*b*1/g-a-b));
      n2=2*Q*c^2*(a/c-1+m/(m+a)*(1-a/c-p*a*1/g-p*b*1/g+p*a*b*1/(g^2))
-m/(m+a)^2*(a+b-p*a*b*1/g));
      d1=-c*(a+b)+m/(m+a)*(a*b+c*(a+b-p*a*b*1/g));
      d2=2*c^2*(1-(a+b)/c+m/(m+a)*(-1+p*a*1/g+p*b*1/g-a*b*p*1/(g^2))-
m/(m+a)^2*(-a-b-a*b/c+a*b*p*1/g));
      lq(i,k)=(d1*n2-n1*d2)/(2*d1^2);
      i=i+1;
    end
  end
end
k=k+1;
end
hold on
plot(lq(:,1));
plot(lq(:,2),'r');
plot(lq(:,3),'g');
  pour  $W_q$  est :
  uncton wq=kouka_temps_moy_atte_graph
  b=10; g=7; c=2; m=5;
  k=1;
  for p=.25 :.25 :.75
  i=1;

```

```

for a=1 :4
Q=1-c*((m+a)/(b*m)+(m+a)/(a*m)-1/b-1/a+p/g);
if Q<1
n1=c*Q*(a+b+m/(m+a)*(p*a*b*1/g-a-b));
n2=2*Q*c^2*(a/c-1+m/(m+a)*(1-a/c-p*a*1/g-p*b*1/g+p*a*b*1/(g^2))-m/(m+a)^2*(a+b-
p*a*b*1/g));
d1=-c*(a+b)+m/(m+a)*(a*b+c*(a+b-p*a*b*1/g));
d2=2*c^2*(1-(a+b)/c+m/(m+a)*(-1+p*a*1/g+p*b*1/g-a*b*p*1/(g^2))-m/(m+a)^2*(-
a-b-a*b/c+a*b*p*1/g));
lq=(d1*n2-n1*d2)/(2*d1^2);
wq(i,k)=lq/c;
i=i+1;
end
end
k=k+1;
end
hold on
plot(wq(:,1));
plot(wq(:,2),'r');
plot(wq(:,3),'m');

```

Le tableau suivant donne les valeurs des différents états du serveur : la proportion du temps où le serveur est en repôs, la charge du serveur, le nombre moyen de client dans la file, la probabilité de temps moyen de dans le système.

α	p	Q	ρ	L_q	W_q
1	0.25	0.4885	0.5115	0.5592	0.2796
1	0.50	0.417	0.583	0.7724	0.3862
1	0.75	0.3456	0.6544	1.0738	0.5369
2	0.25	0.4486	0.5514	0.7515	0.3758
2	0.50	0.3772	0.6228	1.0237	0.5119
2	0.75	0.3057	0.6943	1.4228	0.7114
3	0.25	0.4086	0.5914	0.9818	0.4909
3	0.5	0.3371	0.6629	1.3348	0.6674
3	0.75	0.2657	0.7343	1.878	0.939
4	0.25	0.3687	0.6313	1.2613	0.6307
4	0.5	0.2972	0.7028	1.7288	0.8644
4	0.75	0.2258	0.7742	2.4927	1.2464

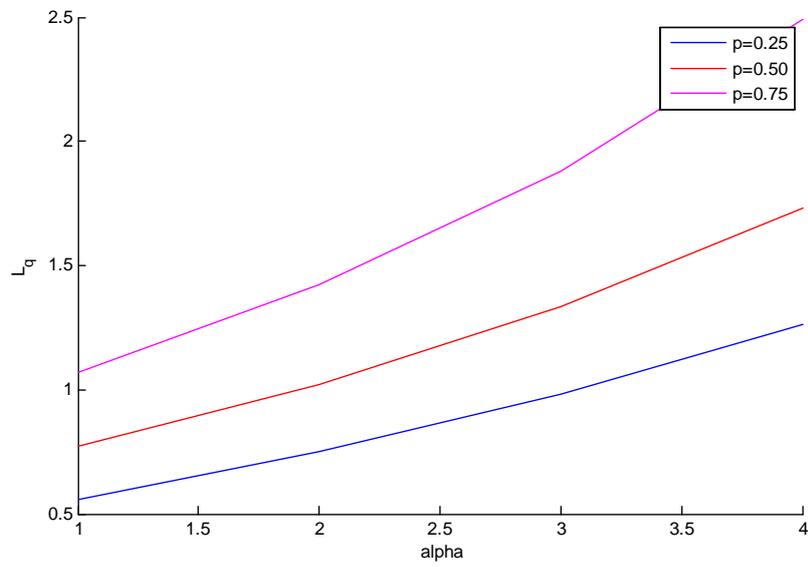


figure1 : variation de L_q en fonction de α .

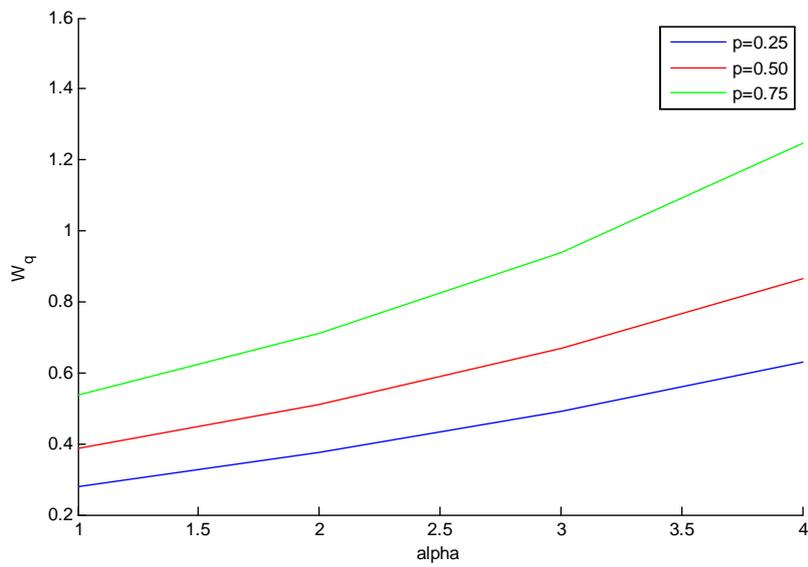


figure 2 : variation de W_q en fonction de α .

Interprétation des résultats :

La figure 1 explique bien le comportement de la file d'attente dès que le taux de panne et la probabilité de vacances augmente, car le serveur cesse de servir les clients arrivant au système.

de même, le temps d'attente des clients augmente, la figure 2 montre cette croissance.

2 Application au cas de la file $M/M^{[Y]}/1$ avec vacances et Catastrophe

2.1 Les différentes caractéristiques de la file en fonction de

k :

avec $\lambda = 2; \mu = 10; \nu = 1; \alpha = 5$

On a le programme suivant :

```

function [Pn1]=costa
lamda=2;
mu=10;
nu=1;
alpha=5;
z0=[5.6085 6.3770 6.4816 6.4972];
%z0=[2 2 3 4];
r=1./z0;
s=lamda/(lamda+alpha+nu);
for k=1 :4
SS=0;
for n=0 :k-1
SS=SS+(lamda/(lamda+nu))^n;
end
Nr(k)=1-nu/(lamda+nu)*SS-((nu/(alpha+nu))*(lamda/(lamda+nu))^k);
Nr(k)
SS1=0;
for n=0 :k-1
for j=0 :n

```

```

F=0
for i=0 :j
F=F+((r(k)/s)^i)
SS1=SS1+(s^j)*((lamda/(lamda+nu))^(n-j))*((r(k)/s)^i);
end
end
end
SS2=0;
for j=0 :k-1
for i=0 :j
SS2=SS2+(s^j*(lamda/(lamda+nu))^(k-1-j)*(r(k)/s)^i);
end
end
Dr(k)=1/((1-s)*(1-r(k)))+(mu/(lamda+nu))*(SS1+(lamda/(alpha+nu))*SS2);
Dr(k)
P01(k)=Nr(k)/Dr(k);
P01
end
S1=0
for l=1 :4
for j=0 :l
S1=S1+s^l*(r(k)/s)^j
end
P11=P01*S1
end
K=[1 :4];
plot(K,P01)
plot(K,P11)

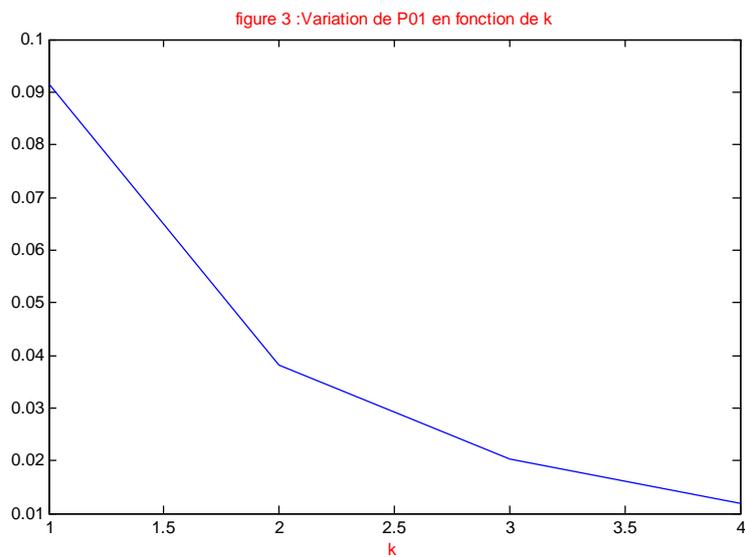
```

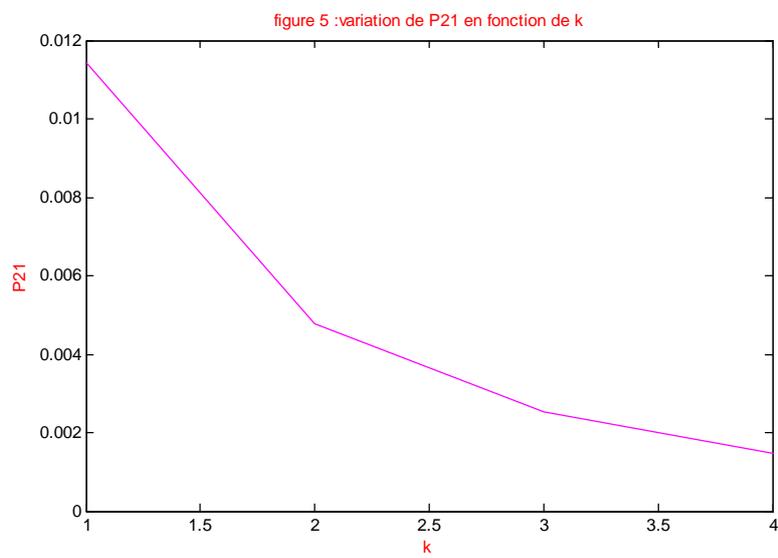
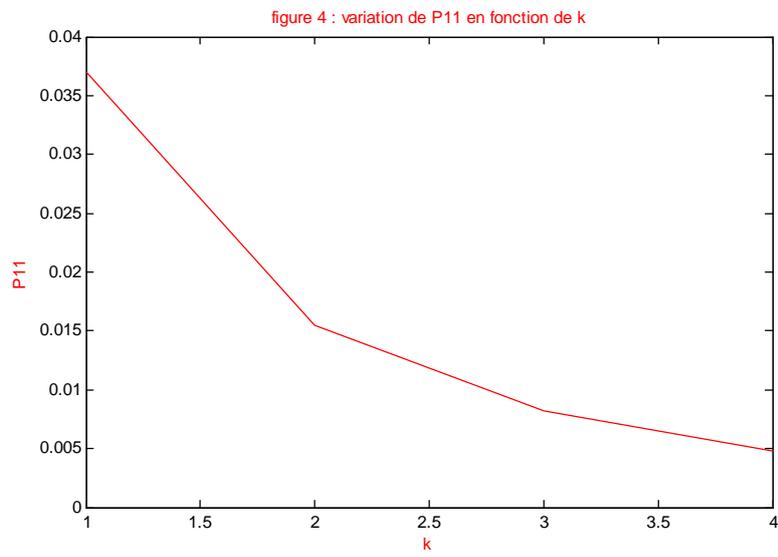
end

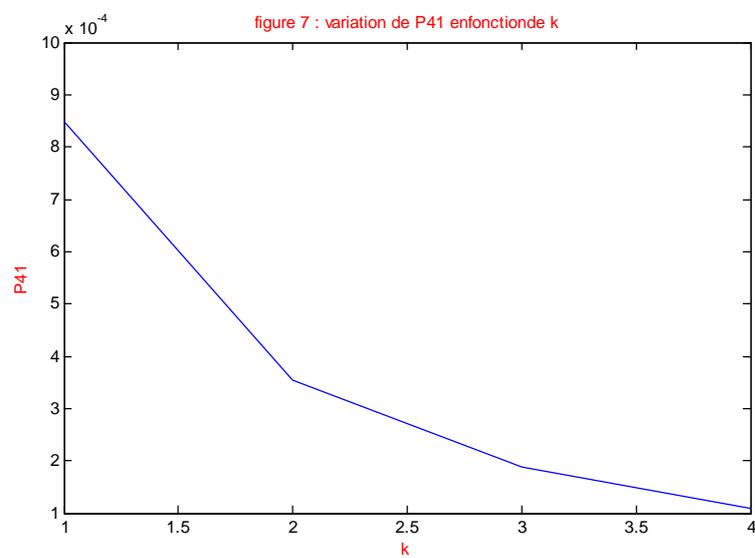
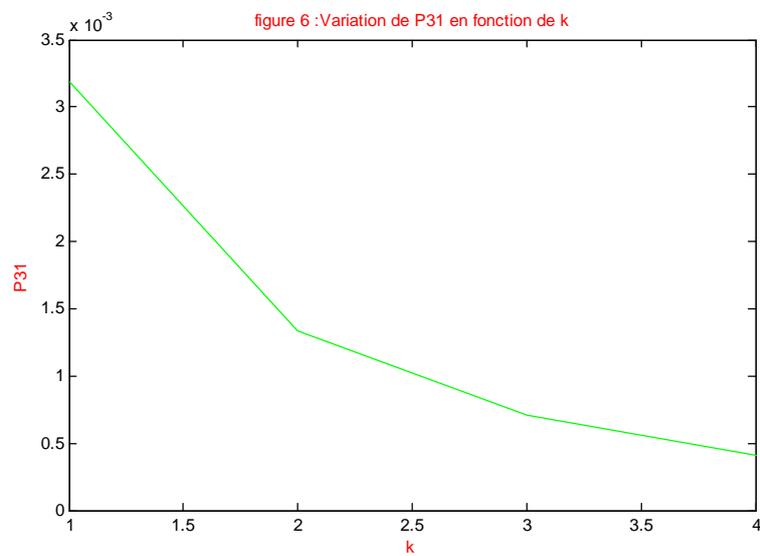
on a le tableau suivant :

K	P ₀₁	P ₁₁	P ₂₁	P ₃₁	P ₄₁
1	0.0916	0.0370	0.0114	0.0032	0.0008
2	0.0382	0.0154	0.0048	0.0013	0
3	0.0202	0.0082	0.0025	0.0007	0
4	0.0118	0.0048	0.0015	0.0004	0

On a les graphes suivants :







Interprétation des résultats :

D'après le graphe figure 3 nous remarquons à chaque fois que la taille du groupe de service augmente ,la probabilité que le service est occupé et la file est vide diminue.

D'après les graphes figures 4 et 5,6,7 nous remarquons à chaque fois que la taille du groupe de service augmente ,la probabilité que le service est occupé diminue.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons effectué une étude analytique complète du modèle $M^{[X]}/G/1$ avec serveur non fiable, réparation sans « delay », vacances multiples et non exhaustive et catastrophe.

En utilisant la méthode de la variable supplémentaire, nous avons obtenu la condition d'ergodicité et quelques mesures de performances.

Notons que pour le cas du modèle $M/M^{[Y]}/1$, nous avons retrouvé explicitement les probabilités stationnaire des états du système.

Pour illustrer les modèles étudiés, nous avons évalué numériquement les performances du modèles.

Références

- [1] Aissani, A. and Artalejo, J. R., On the single server retrial queue subject to breakdowns, *Queueing Systems*, Vol. 30, pp.309-321, 1998.
- [2] Ayyappan,G. and Devipriya,G. and Muthu G.S,A ;Analysis of Single Server Fixed Batch ServiceQueueing System under Multiple Vacation with Catastrophe,Vol.3, No.11, 2013.
- [3] Bailey, N.T.J., On queueing process with bulk service, *Journal of Royal Statistical Society series, B*16,80-97, (1954).
- [4] Borthakur, A. and Medhi, J., A queueing system with arrival and service in-batches of variable size, *Transportation Science.* 7, 85-99, (1973).
- [5] Briere, G. and Chaudhry, M.L., Computational analysis of single server bulk service queues, *M/GB/1, Advanced Applied Probability*, 21, 207-225, (1989).
- [6] Bunday, B. D., *An Introduction to Queueing Theory*, Oxford University Press, Oxford, England,1996.
- [7] Chae, K. C., Lee, H. W. and Ahn, C. W., An arrival time approach to M/G/1-type queues with generalized vacations, *Queueing Systems*, Vol. 38, pp.91-100,2001.
- [8] Chang, S. H. and Takine, T., Factorization and stochastic decomposition properties in bulk queues with generalized vacations, *Queueing Systems*, Vol. 50, pp.165-183, 2005.
- [9] Chaudhry, M.L. and Templeton, J.G.C., *A First Course in Bulk Queues*, Wiley, New York,(1983).[10] Choudhury, G. and Borthakur, A., The stochastic decomposition results of batch arrival Poisson queue with a grand vacation process, *Sankhya*, Vol. 62,pp.448-462, 2000.

- [10] Choudhury, G. and Madan, K. C., A two-stage batch arrival queueing system with a modified Bernoulli schedule vacation under N-policy, *Mathematical and Computer Modeling*, Vol. 42, pp.71-85, 2005.
- [11] Cohen, J.W., *The Single Server Queue*, 2nd edition, North-Holland, Amsterdam,(1980)
- [12] Dhas, A.H., *Markovian General Bulk Service Queueing Model*, Ph.D. thesis, Dept. of Math, PSG College of Tech, India.,(1989).
- [13] Doshi, B. T., A note on stochastic decomposition in a GI/G/1 queue with vacations or setup times, *Journal of Applied Probability*, Vol. 22, pp.419-428, 1985.
- [14] Doshi, B. T., *Queueing systems with vacations - A survey*, *Queueing Systems*, Vol. 1, pp.29-66, 1986.
- [15] Downton, F., *Waiting time in bulk service queues*, *Journal of Royal Statistical Society*. B17,256-261., (1955)
- [16] Dshalalow, J.H. and Yellen, J., *Bulk input queues with quorum and multiple vacations*, *Mathematical Problems in Engineering*, 2 :2, 95-106, (1996).
- [17] Fakinos, D., *The relation between limiting queue size distributions at arrival and departure epochs in a bulk queue*, *Stochastic Processes*. 37, 327-329, (1991).
- [18] Farzana A.M. and Kailash C.and Ken Darby-D.,*Batch Arrival Queueing System with Random Breakdowns and Bernoulli Schedule Server Vacations having General Vacation Time Distribution* 55-70,2009.
- [19] Federgruen, A. and So, K. C., *Optimal maintenance policies for single-server queueing systems subject to breakdowns*, *Operations Research*, Vol. 38, No. 2, pp.330-343, 1990.
- [20] Fuhrmann, S.W. and Cooper, R.B., *Stochastic decompositions in the M/G/1 queue with generalized vacations*, *Operations Research*, 33 :5, 1117-1129, (1985).

- [21] Grassmann, W.K. and Chaudhry M.L., A new method to solve steady state queueing equations, *Naval Res. Logist. Quart.*,29 :3 ,(1982).
- [22] Hur, S. and Ahn, S., Batch arrival queues with vacations and server setup, *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 29, pp.1164-1181, 2005.
- [23] Igaki, N., Exponential two server queue with N-Policy and general vacation, *Queueing System*, Vol. 10, pp.279-294, 1992.
- [24] Jaiswal, N.K., A bulk service queueing problem with variable capacity, *Journal of Royal Statistical Society*,B26, 143-148, (1964).
- [25] Jayawardene, A. K. and Kella, O., M/G/1 with altering renewal breakdowns, *Queueing Systems*, Vol. 22, pp.79-95, 1996.
- [26] Kambo, N.S. and Chaudhry, M.L., A single-server bulk-service queue with varying capacity and Erlang input, *INFOR*, 23 :2, 196-204, (1985).
- [27] Ke, J. C., Batch arrival queues under vacation policies with server breakdowns and startup/closedown times, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 31, No. 7, pp.1282-1292, 2007.
- [28] Ke, J. C., Operating characteristic analysis on the M[x]/G/1 system with a variant vacation policy and balking, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 31, No. 7, pp.1321-1337, 2007.
- [29] Kulkarni, V. G. and Choi, B. D., Retrial queues with server subject to breakdowns and repairs, *Queueing Systems*, Vol. 7, pp.191-209, 1990.
- [30] Lee, S.S., Lee, H.W. and Chae, K.C., Batch arrival queue with N-policy and single vacation, *Computer and Operations Research*, 22 :2, 173-189, (1994).
- [31] Lee, H.W., Lee, S.S., Park, J.O. and Chae, K.C., Analysis of MX/G/1 queue with N-policy and multiple vacations, *Journal of Applied Probability*, 31, 467-496, (1994).
- [32] Levy, Y. and Yechiali, U., Utilization of idle time in an M/G/1 queueing system, *Management Science*, Vol. 22, pp.202-211, 1975.

- [33] Madan, K. C. and Abu Al-Rub, A. Z., On a single server queue with optional phase type server vacations based on exhaustive deterministic service and a single vacation policy, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 149, pp.723-734, 2004.
- [34] Madan, K. C., Abu-Deyyeh, W. and Gharaibeh, M., On two parallel servers with random breakdowns, *Soochow Journal of Mathematics*, Vol. 29, No. 4, pp.413-423, 2003.
- [35] Madan, K. C., Abu-Dayyeh, W. and Saleh, M. F., An M/G/1 queue with second optional service and Bernoulli schedule server vacations, *Systems Science*, Vol. 28, No. 3, pp.51-62, 2002.
- [36] Medhi, J., Waiting time distribution in a Poisson queue with a general bulk service rule, *Mgmt. Sci.* 21 :7,777-782, (1975).
- [37] Miller, R.G., A contribution to the theory of bulk queues, *Journal of Royal Statistical Society*, B21, 320-337, (1959).
- [38] Neuts, M.F., A general class of bulk queues with Poisson input, *Ann. Math. Stat.* 38,757-770, (1967).
- [39] Nunez-Queija, R., Sojourn times in a processor sharing queue with service interruptions, *Queueing Systems*, Vol. 34, pp.351-386, 2000.
- [40] Powell, W.B., Waiting time distribution for bulk arrival, bulk service queues with vehicle holding and cancellation strategies, *Naval Res. Logist.* 34, 207-227, (1987).
- [41] Swokowski, E.W., Olinick, M. and Pence, D., *Calculus* (6th ed.). PWS Publishing Company, Boston.
- [42] Takagi, H., *Queueing Analysis : A Foundation of Performance Evaluation*, Vol. I, Vacation and Priority Systems, Part I, North-Holland,(1991).
- [43] Takine, T. and Sengupta, B., A single server queue with service interruptions, *Queueing Systems*, Vol. 26, pp.285-300, 1997.

- [44] Tian, N., Li, Q. and Cao, J., Conditional stochastic decomposition in M/M/c queue with server vacations, *Stochastic Models*, Vol. 15, No. 2, pp.367-377, 1999.
- [45] Tian, N. and Zhang, Z. G., The discrete-time GI/Geo/1 queue with multiple vacations, *Queueing Systems*, Vol. 40, pp.283-294, 2002.
- [46] Vinck, B. and Bruneel, H., System delay versus system content for discretetime queueing systems subject to server interruptions, *European Journal of Operational Research*, Vol. 175, pp.362-375, 2006.
- [47] Wang, J., Cao, J. and Li, Q., Reliability analysis of the retrial queue with server breakdowns and repairs, *Queueing Systems*, Vol. 38, pp.363-380, 2001.
- [48] Wang, K. H., Chiang, Y. C. and Ke, J. C., Cost analysis of the unloader queueing system with a single unloader subject to breakdowns, *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 54, pp.515-520, 2003.