Une fois créée par Cauchy, la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe va fournir le cadre d'une grande partie des études sur les équations différentielles pendant la seconde moitié du $19^{ème}$ siècle.

Le problème central est l'étude globale du prolongement analytique d'une telle solution u à partir d'un point ordinaire z_0, l'attention se concentra rapidement sur les points singuliers d'un tel prolongement.

L'étude des équations non linéaires dans le domaine complexe présente, contraire à ce qui se passe pour les équations linéaires, des points singuliers qui dépendent des conditions initiales; on dit qu'ils sont *mobiles*. Par exemple, l'équation de Riccati

$$y' = y^2 + 1 \longrightarrow y = -\cot(z - z_1)$$

où $z_1 \in \mathbb{C}$ est un pôle.

Pour l'équation $y' = -\dfrac{z}{y}$ qui admet comme solution.

$$y = \left(z_1^2 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

z_1 est un point critique algébrique de la solution.

Pour les équations du second ordre, on peut avoir des points singuliers essentiels mobiles; par exemple l'équation

$$y'' = \frac{y'^2\,(2y-1)}{(y^2+1)}$$

a pour solution générale

$$y = \tan\left(\log\left(Az - B\right)\right),$$

et $z_1 = \dfrac{B}{A}$ est donc un point singulier essentiel, de sorte que lorsque z tend vers z_1 le long d'un chemin, y ne tend en général vers aucune limite. Enfin, l'équation du troisième ordre

$$\frac{y'''}{y'^3} - \frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'^4} = \frac{1}{2\,(y-1)^2} + \frac{4}{9y^2} - \frac{41}{72\,(y-1)}$$

admet comme intégrale $y = j\left(\dfrac{(az+b)}{(cz+d)}\right)$, où j est la fonction modulaire et a, b, c, d des constantes; le cercle d'équation $\wp\left(\dfrac{(az+b)}{(cz+d)}\right) = 0$, où $\wp$ est la fonction de Weierstrass, est donc une ligne de points singuliers mobiles.

Devant cette complexité des cas possibles, les recherches se sont orientées vers la détermination de classe d'équations dont les points singuliers mobiles peuvent être uniquement des pôles.