N° d'ordre : 20/2004-M/MT.

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE

جامعة هواري بومدين
للعلوم والتكنولوجيا
U S T H B

FACULTE DES MATHEMATIQUES

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN : MATHEMATIQUES.

Spécialité : Analyse : Equations aux dérivées partielles

Par : Boudjemaa KERAI

SUJET

Espaces de Sobolev avec poids et problème du bilaplacien dans un demi-plan

Soutenu le 20/09/2004 à U.S.T.H.B, devant le jury composé de :

M. ***Dj. Teniou,*** professeur, U.S.T.H.B.	Président.
M. ***K. Lemrabet***, professeur, U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
M. ***T. Z. Boulmezaoud***, maître de conférences, U.P, Paris 6.	Co-Directeur de thèse.
M. ***A. Mokrane,*** Professeur, E.N.S. Kouba.	Examinateur.
M. ***A. Hemina***, maître de conférences, U.S.T.H.B.	Examinateur.

Pour mes parents, avec amour et admiration
Pour mes frères, Mefteh, Madjid, Samir, Boubekar, Rafik.
Pour mes sœurs, Saadia, Fatima
Pour mes oncles Hocine et M'hammed et leurs familles

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements et ma reconnaissance à mon promoteur monsieur ***K. Lemrabet*** qui a été à l'origine de ce sujet de mémoire et dont les conseils et la marque de confiance ont grandement contribué à l'élaboration de cette étude.

Mes remerciements vont également à mon co-promoteur monsieur ***Tahar. Z Boulemzaoud*** qui m'a initié au domaine des espaces de Sobolev avec poids et leurs propriétés .

Je tiens également à présenter mes sentiments respectueux à monsieur ***D.E. Teniou***, monsieur ***A. Hemina*** et monsieur ***A. Mokrane*** qui m'ont fait l'honneur de présider et de composer le jury de soutenance.

Enfin mes remerciements et ma sympathie également à mes professeurs et à toutes les personnes qui ont contribué de prés ou de loin à la réalisation de cette entreprise.

Table des matières

Introduction

Les espaces de Sobolev avec poids ont été introduits par nombreux auteurs pour étudier en particulier l'équation de poisson. Sans être exhaustif, nous signalons les travaux de Kudrjavcev [21], Hanouzet [14], ou Cantor [11], où une première famille d'espaces de Sobolev avec poids est utilisée, celle-ci ensuite généralisée avec l'introduction de poids logarithmique, notamment par Leroux [17], Giroire [12].

On s'intéresse dans ce travail à l'étude du problème bilaplacien dans un demi-plan avec conditions aux limites de type Dirichlet. Ce problème se rencontre lorsque l'on modélise les déplacements verticaux d'une plaque mince encastrée pour laquelle est faite l'hypothèse de Kirchoff ou lorsque l'on cherche à résoudre le système de Stokes bidimensionnel par l'intermédiaire d'une fonction de courant.

L'objet du premier chapitre est l'étude des espaces de Sobolev avec poids et de leurs propriétés. Cependant, si ce cadre fonctionnel est adéquat lorsque le domaine est borné, il ne l'est plus dès que l'on s'intéresse à certains domaines non bornés. En effet, on ne dispose plus pour de tels domaines des inégalités de Poincaré qui sont l'un des ingrédients essentiels de résolution. D'autre part, le comportement des fonctions à l'infini devient un élément important pour la description du comportement des solutions car les espaces de Sobolev classiques ne sont pas adéquats en domaines non bornés, ils ne permettent pas, d'une part, de décrire convenablement le comportement (croissance ou décroissance des fonctions à l'infini).

C'est pour quoi nous allons introduire le cadre fonctionnel, car l'inégalité de Poincaré n'étant valide dans un domaine non borné dans aucune direction, Hanouzet [14] a utilisé une inégalité de Hardy dans le cas hilbertien qui l'a conduit à introduire une famille d'espaces de Sobolev avec poids. Les poids sont, à l'infini, des puissances de

$$p\left(x\right)=\sqrt{1+\left|x\right|^{2}}$$

et ils sont déterminés de manière que les formes bilinéaires associées à l'opérateur de Laplace et aux opérateurs, polyharmonique, de l'élasticité ou de Stokes soient coercives.

En dimension deux, une difficulté supplémentaire apparaît : l'inégalité de Hardy qui a permet d'obtenir la coercivité des formes bilinéaires, n'est plus valide et doit être remplacée par une inégalité généralisée. Cela conduit à une famille d'espaces de Sobolev avec poids, ces derniers comportant, à l'infini, outre des puissances de p, la fonction

$$\lg r = Log\left(2+r^{2}\right),$$

tel que $r=\left|x\right|.$

Nous définissons ensuite les espaces X_{l}^{m+l}, les théorèmes de régularité de Laplace nous conduirons dans le cas critique $(p=2,\ n=2)$ à introduire une famille d'espaces très proches des espaces W_{l}^{m+l} ou $W_{l,\alpha}^{m+l}$, ces nouveaux espaces sont identiques aux W_{l}^{m+l} dans le cas non critique et n'en diffèrent en dimension deux ie : le cas critique, que du fait l'apparition brutale d'un logarithme.

L'objet du deuxième chapitre est l'étude du comportement à l'infini et de la régularité des solutions dans $\mathscr{S}'$, de l'équation de poisson dans le cas critique et non critique, le cadre fonctionnel développe à cette occasion, ainsi que les techniques utilisées permettant de faire le même travail pour l'opérateur polyharmoniques, puis nous étudierons la régularité de Laplace dans le cas hilbertien, critique et non critique, avec l'utilisation des espaces X_{n}^{m+n}, pour éviter d'avoir le poids logarithmique et nous donnons quelques résultats sur l'opérateur polyharmonique.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du problème de Laplace dans le demi plan, nous commençons par le problème de Dirichlet dans le cas hilbertien et non hilbertien après on passe au problème de Neumann.

Dans le dernier chapitre nous appliquons ce cadre fonctionnel à la résolution du problème du bilaplacien, plus précisément, nous caractérisons les données qui permettent de trouver une solution dans un espace avec poids donné. En particulier, dès que l'espace où l'on cherche une solution contient des fonctions polynomiales, l'unicité n'est plus assurée dans cet espace. Si au contraire, on impose des contraintes fortes de décroissance à la solution (typiquement, décroît plus vite que la solution élémentaire) alors son existence est subordonnée au fait que f, g et h vérifient des conditions de compatibilité, nous allons traiter le problème biharmonique, existence, unicité et régularité, avec l'utilisation des résultas de Laplace dans le cas non hilbertien, mais dans le cas hilbertien il faut changer l'espace W par$X$ pour éviter le problème de régularité.

Notation et cadre fonctionnel

Tout au long de ce travail,

- n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et p un réel dans l'intervalle $]1, \infty[$.
- $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, l'espace des fonctions indéfiniment différentiable à support compact dans $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ son dual.
- A tout réel $p \in]1, \infty[$, on a associée son conjugué par la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

  On rappelle que $L^p(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des fonctions mesurables telles que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \, dx < \infty,$$

  qui muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

  est un espace de Banach dont le dual est $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.

- Pour tout entier naturel m, $W^{m,p}(\Omega)$ désignera comme l'espace de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ v \in \mathscr{D}'(\Omega), \ \forall \lambda \in \mathbb{N}^n, \ |\lambda| \le m, \ \partial^\lambda u \in L^p(\Omega) \right\},$$

doté par la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left\{ \sum_{\lambda \le m} \left\| \partial^{\lambda} u \right\|^{p}_{L^{p}(\Omega)} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

- $\mathscr{P}_l$ $\left(resp.\ \mathscr{P}_l^{\Delta} \right)$ l'espace des polynômes (*resp.* polynôme harmonique) sur $\mathbb{R}^n$ de degré inférieur ou égal à l.

- On convient que $\mathscr{P}_l = \mathscr{P}_l^{\Delta} = \{0\}$ si $l < 0$.

- D'autre part, pour tout sous espace fermé Y d'un espace de Banach X, on note X/Y, l'espace quotient de X par Y et le polaire de Y dans le dual X'de X :

$$X' \perp Y = \{ f \in X',\ \forall v \in Y,\ \langle f, v \rangle = 0 \}.$$

- $\mathcal{A}_l^{\Delta}$: Espace des polynômes harmoniques de degré inférieur ou égal à l et vérifiant la condition

$$u\left(x_1', 0\right) = 0,\ \text{où } x_1' = \left(x_1, ...x_{n-1}\right).$$

  $\equiv$ Espace des polynômes harmoniques impairs par rapport à x_n et de degré inférieur ou égal à l.

- $\mathcal{N}_l^{\Delta}$: Espace des polynômes de degré inférieur ou égal à l et vérifiant la condition

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}\left(x_1', 0\right) = 0,\ \text{où } x_1' = \left(x_1, ...x_{n-1}\right).$$

  $\equiv$ Espace des polynômes harmoniques pairs par rapport à x_n et de degré inférieur ou égal l.

- $\widetilde{\mathscr{P}_l}$: Espace des polynômes $\mathscr{P}_l$ dépend de $n-1$ premier variable.

- $\mathcal{R}_l^{\Delta}$: Le sous espace de $\mathscr{P}_l^{\Delta} \times \widetilde{\mathscr{P}}_{l-1}$ engendré par les couples$\left(p,\ -\dfrac{\partial p}{\partial x_n}\left(x_1', 0\right) \right)$ quand p décrit $\mathcal{A}_l^{\Delta}$.

- $\mathcal{Q}_l^{\Delta}$: Le sous espace de $\mathscr{P}_l^{\Delta} \times \widetilde{\mathscr{P}_l}$ engendré par les couples $\left(p, p\left(x', 0\right)\right)$ quand p décrit (parcourt) $\mathcal{N}_l^{\Delta}$.

Chapitre 1

Espaces de Sobolev avec poids

1.1 Définitions des espaces avec poids $W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)$

Nous allons donc introduire une famille d'espaces adaptée au cas d'un ouvert non borné ou extérieur de $\mathbb{R}^n$, ils nous serviront pour des domaines suffisamment réguliers, complémentaires d'ouverts bornés, nous introduisons les hypothèses sur ces ouverts au fur et à mesure des besoins.

Définition 1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{N}^n,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N},\ X \in \mathbb{R}^n$. Posons*

$$r = |x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\rho = \rho(r) = (1+r^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$\lg r = Log(2+r).$$

Introduisons maintenant une famille d'espaces

$$W_{\alpha}^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in \mathscr{D}'(\Omega)\ ;\ \forall \lambda \in \mathbb{N}^n : 0 \leq |\lambda| \leq m,\ \rho^{\alpha-m+|\lambda|} D^{\lambda} u \in L^p(\Omega)\right\},$$

cet espace sera souvent considéré dans le cas $\dfrac{n}{p} + \alpha \notin \{1, ..., m\}$.

$$\begin{aligned} W_{\alpha}^{m,p}(\Omega) \quad &= \{u \in \mathscr{D}'(\Omega)\ ; \\ &\forall \lambda \in \mathbb{N}^n : 0 \leq |\lambda| \leq k,\ \rho^{\alpha-m+|\lambda|} (\lg r)^{-1} D^{\lambda} u \in L^p(\Omega)\ ; \\ &\forall \lambda \in \mathbb{N}^n : k+1 \leq |\lambda| \leq m,\ \rho^{\alpha-m+|\lambda|} D^{\lambda} u \in L^p(\Omega)\}, \end{aligned}$$

Dans le cas où $\dfrac{n}{p} + \alpha \in \{1, ..., m\}$, *on pose* $k = k(m,n,p,\alpha) = m - \dfrac{n}{p} - \alpha$, *où dans le cadre de la présente note, Ω est soit $\mathbb{R}^2$ tout entier, soit le demi-plan $\mathbb{R}^2_+$.*

Nous sommes, en mesure de faire un certain nombre de remarques

Remarque 1.1 *En convenant de poser :*

$$k=\begin{cases} -1, & si\ \dfrac{n}{p}+\alpha\notin\{1,...,m\}, \\ \\ m-\dfrac{n}{p}-\alpha, & si\ \dfrac{n}{p}+\alpha\in\{1,...,m\}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega) & =\{u\in\mathscr{D}'(\Omega)\ ; \\ & \forall\lambda\in\mathbb{N}^n: 0\leq|\lambda|\leq k,\ \rho^{\alpha-m+|\lambda|}(\lg r)^{\beta-1}D^{\lambda}u\in L^p(\Omega), \\ & \forall\lambda\in\mathbb{N}^n: k+1\leq|\lambda|\leq m,\ \rho^{\alpha-m+|\lambda|}(\lg r)^{\beta}D^{\lambda}u\in L^p(\Omega)\}, \end{aligned}$$

C'est un espace de Banach réflexif équipé de sa norme naturelle

$$\begin{aligned} \|u\|_{w_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega)} & =\left\{\sum_{0\leq|\lambda|\leq k}\left\|\rho^{\alpha-m+|\lambda|}(\lg r)^{\beta-1}D^{\lambda}u\right\|_{L^p(\Omega)}^p\right. \\ & \left.+\sum_{k+1\leq|\lambda|\leq m}\left\|\rho^{\alpha-m+|\lambda|}(\lg r)^{\beta}D^{\lambda}u\right\|_{L^p(\Omega)}^p\right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Remarque 1.2 *Lorsque $\beta=0$, on notera plus simplement $W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)$ au lieu de $W_{\alpha,0}^{m,p}(\Omega)$. Le rôle des poids est de préciser le comportement à l'infini des éléments de ces espaces, ils n'ont aucune influence sur les propriétés locale qui sont identiques, quel que soit α, à celles des espaces de Sobolev usuels $H^m(\Omega)$, en particulier dans le cas, où Ω est le complémentaire d'un compact $\overline{\theta}$, tous les théorèmes sur les traces des éléments de $H^m(\Omega)$, sur la frontière Γ de θ restent exacts pour les traces sur Γ des éléments de $W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)$. Par ailleurs, les fonctions de $W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)$ appartiennent à $W^{m,p}(\theta')$, pour tout ouvert borné θ' contenu dans Ω. les traces $\gamma_0,...,\gamma_{m-1}$ de ces fonctions sur Γ vérifient donc les théorèmes de traces usuels. Cela permet de définir l'espace*

$$\overset{0}{W}{}_{\alpha}^{m,p}(\Omega)=\left\{v\in W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)\ ;\ \gamma_0=...=\gamma_{m-1}=0\right\},$$

on montre que $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $\overset{0}{W}{}_{\alpha}^{m,p}(\Omega)$ est son dual $W_{-\alpha}^{-m,p'}(\Omega)$ est un espace de distributions.

Remarque 1.3 *i) $\rho(r)$ et $\lg(r)$ ont à l'infini le comportement de r et de $Log(r)$ respectivement. Lorsque l'intérieur du complémentaire de Ω n'est pas vide, il*

est loisible d'y placer l'origine, ce qui permet de remplacer dans la définition de $W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)$*,* $\rho(r)$ *par* r *éventuellement après un changement d'unité* $\lg(r)$ *par log*(r)*.*
ii) Les poids ont été choisis de manière à permettre l'obtention d'inégalités de coercivité grâce auxquelles nous construisons au chapitre suivant des formulations variationnelles de plusieurs problèmes.

1.2 Les espaces de traces

Afin de définir les traces des fonctions de $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}_{+}^{n})$, Hanouzet [14] à prolongé la définition des espaces aux valeurs réelles, comme toute fonction u appartenant à $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^{n})$ est localement dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^{n})$, la trace de u sur l'hyperplan $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^{n} \mid x_{n} = 0\}$ est localement dans $W^{m-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n})$. Nous nous proposons d'étudier le comportement à l'infini des traces sur un hyperplan des fonctions de $W_{0}^{m,p}(\mathbb{R}^{n})$, pour cela nous introduisons les espaces suivants

Définition 1.2 *Pour tout* $\sigma \in \left]0,1\right[$, $1 < p < \infty$, *on pose*

$$W_{0}^{\sigma,p}(\mathbb{R}^{n}) = \Big\{u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n}) \ ; \ w^{-\sigma}u \in L^{p}(\mathbb{R}^{n}), \\ \int_{0}^{+\infty} t^{-1-\sigma p}dt \int_{\mathbb{R}^{n}} |u(x+te_{i}) - u(x)|^{p}\,dx < \infty \Big\},$$

où $w = \rho$ *si* $\dfrac{n}{p} \neq \sigma$ *et* $w = \rho(\lg\rho)^{\frac{1}{\sigma}}$ *si* $\dfrac{n}{p} = \sigma$ *et* $e_{1}, ..., e_{n}$ *désignent les vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{R}^{n}$*.*

$W_{0}^{\sigma,p}(\mathbb{R}^{n})$: est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{W_{0}^{\sigma,P}(\mathbb{R}^{n})} = \left(\left\|\frac{u}{w^{\sigma}}\right\|_{L^{p}(\mathbb{R}^{n})}^{p} + \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\infty} t^{-1-\sigma p}\int_{\mathbb{R}^{n}} |u(x+te_{i}) - u(x)|^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Cette norme est équivalente à la norme suivante :

$$\left(\left\|\frac{u}{w^{\sigma}}\right\|_{L^{p}(\mathbb{R}^{n})}^{p} + \int\limits_{\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}^{n}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p}}{|x-y|^{n+\sigma p}}dxdy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour tout nombre réel α, on introduire l'espace suivant :

$$W_{\alpha}^{\sigma,p}(\mathbb{R}^{n}) = \Big\{u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n}) \ ; \ w^{\alpha-\sigma}u \in L^{p}(\mathbb{R}^{n}), \\ \int_{\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}^{n}} \frac{|\rho^{\alpha}(x)\,u(x) - \rho^{\alpha}(y)\,u(y)|^{p}}{|x-y|^{n+\sigma p}}dx < \infty \Big\},$$

où $w = \rho$ si $\dfrac{n}{p} + \alpha \neq \sigma$ et $w = \rho\left(\lg \rho\right)^{\frac{1}{\sigma-\alpha}}$ si $\dfrac{n}{p} + \alpha = \sigma$.

- Pour tout $s \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$\begin{aligned} W_\alpha^{s,p}\left(\mathbb{R}^n\right) = \Big\{ & u \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right) \; ; \; 0 \leq |\lambda| \leq k, \; \rho^{\alpha - s + |\lambda|}\left(\lg \rho\right)^{-1} D^\lambda u \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right), \\ & k+1 \leq |\lambda| \leq [s]-1, \; \rho^{\alpha-s+|\lambda|} D^\lambda u \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right) \; ; \; D^{[s]} u \in W_\alpha^{\sigma,p}\left(\mathbb{R}^n\right) \Big\}, \end{aligned}$$

$$\text{avec } \sigma = s - [s] \text{ et } \; k = \begin{cases} s - \dfrac{n}{p} - \alpha & \text{si } \dfrac{n}{p} + \alpha \in \{\sigma, ..., \sigma + [s]\}, \\ \\ -1 & \text{si } \dfrac{n}{p} + \alpha \notin \{\sigma, ..., \sigma + [s]\}. \end{cases}$$

- $W_\alpha^{s,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$: est un espace de Banach pour la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_\alpha^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = & \left[\sum_{0 \leq |\lambda| \leq k} \left\| \rho^{\alpha-s+|\lambda|}\left(\lg \rho\right)^{-1} D^\lambda u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + \sum_{k+1 \leq |\lambda| \leq [s]-1} \left\| \rho^{\alpha-s+|\lambda|} D^\lambda u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ & + \sum_{|\lambda| = [s]} \left\| D^\lambda u \right\|_{W_\alpha^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Si $s < 0$ l'espace $W_\alpha^{s,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$ est le dual de $W_{-\alpha}^{-s,p'}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

On a le résultat suivant :

Théorème 1.1 *Soit $m \geq 1$ un entier et α un nombre réel. Il existe une application linéaire continue $\gamma = \left(\gamma_0, ..., \gamma_{m-1}\right)$ de $W_\alpha^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ dans $\prod_{j=0}^{m-1} W_\alpha^{m-j-\frac{1}{p},p}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ avec les propriétés suivantes :*

- Pour $u \in \mathscr{D}\left(\overline{\mathbb{R}_+^n}\right)$, $\gamma u = \left(u\left(x', 0\right), \dfrac{\partial u}{\partial y}\left(x', 0\right), ..., \dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial y^{m-1}}\left(x', 0\right) \right)$.
- γ est une application surjective.
- $\gamma^{-1}\left(0\right) = \overset{0}{W}{}_\alpha^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$.

En plus si $p = 2$ on a la formule de Green suivante :

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} u \, \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx, \; \forall i = 1 =, ..., n-1,$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} u \, \frac{\partial v}{\partial x_n} dx = -\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial u}{\partial x_n} v dx + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u\left(x', 0\right) v\left(x', 0\right) dx'.$$

pour toute fonction $u \in W_\alpha^1\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ et $v \in W_{1-\alpha}^1\left(\mathbb{R}_+^n\right)$.

1.3 Propriétés fondamentales des espaces $W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega)$

Les propositions qui suivent se vérifient immédiatement ou se démontrent en reprenant mot pour mot, la démonstration de la propriété correspondante des espaces H^m.

Proposition 1.1 $W_{\alpha}^{m,2}(\Omega)$ *est un espaces de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(u,v)_{W_{\alpha}^{m,2}(\Omega)} = \sum_{0\leq|\lambda|\leq k}\int_{\Omega}\rho^{2(\alpha-m+|\lambda|)}(\lg r)^{-2}D^{\lambda}uD^{\lambda}v + \sum_{k+1\leq|\lambda|\leq m}\int_{\Omega}\rho^{2(\alpha-m+|\lambda|)}D^{\lambda}uD^{\lambda}v.$$

Proposition 1.2 *On a les inclusions suivantes avec injections continues :*
Lorsque $\frac{n}{p}+\alpha\notin\{1,...,m\}$,

$$W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow W_{\alpha-1,\beta}^{m-1,p}(\Omega)\hookrightarrow ...\hookrightarrow W_{\alpha-m,\beta}^{0,p}(\Omega).$$

Lorsque, par contre $\frac{n}{p}+\alpha=i\in\{1,...,m\}$,

$$W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow ...\hookrightarrow W_{\alpha-i+1,\beta}^{m-i+1,p}(\Omega)\hookrightarrow W_{\alpha-i,\beta-1}^{m-i,p}(\Omega)\hookrightarrow ...\hookrightarrow W_{\alpha-m,\beta-1}^{0,.p}(\Omega).$$

Proposition 1.3 *Soit* $u\in W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega)$, *alors*

$$\forall\lambda\in\mathbb{N}^n,\ 0\leq|\lambda|\leq m,\ D^{\lambda}u\in W_{\alpha\ ,\ \beta}^{m-|\lambda|,p}(\Omega),$$

cette application est continue.

Proposition 1.4 *Pour tout* $\lambda\in\mathbb{N}^n$ *et* $\beta\in\mathbb{R}$, *il* $\exists$ *une constante* $C(\lambda,\beta)$, *telle que*

$$\left|D^{\lambda}\rho^{\beta}\right|\leq C\rho^{\beta-|\lambda|}.$$

On a définit aussi la semi norme

$$|u|_{W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\lambda|=m}\left\|\rho^{\alpha}(\lg r)^{\beta}D^{\lambda}u\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.4 Approximation des éléments de $\overset{0}{W}{}^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ par des fonctions régulières

Théorème 1.2 *$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Tout d'abord, étant donné un élément u de $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$, nous construisons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant un support compact convergente vers u sur ce support, les topologies $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ et $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ coïncident, chaque élément de cette suite peut donc être approché par un élément de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, ce qui achève la démonstration.

En effet, nous pouvons écrire après avoir mené à bien la première étape

$$\forall u\in W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n),\ \forall\varepsilon>0,\ \exists u_n\in(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$Supp(u_n)\subset B(0,R_n)\ \ et\ \ \|u-u_n\|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

La deuxième étape permet d'écrire

$$\exists v_n\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n),\ \|u_n-v_n\|_{W^{m,p}(B(0,R_n))}=\|u_n-v_n\|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Il ne nous reste donc plus qu'a construire cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans ce but, nous allons introduire une fonction de troncature, plus précisément, introduisons une fonction $\phi\in C^\infty([0,\infty[)$, telle que

$$\begin{array}{lll}\forall t\in[0,1] & , & \phi(t)=0,\\ \forall t\in[1,2] & , & 0\leq\phi(t)\leq 1,\\ \forall t\in[2,\infty[& , & \phi(t)=1.\end{array}$$

Posons alors pour l'entier naturel n :

$$\phi_n(x)=\begin{cases}\phi\left(\frac{n}{Log|x|}\right), & \forall x\in\mathbb{R}^n,\ |x|>1,\\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Nous voyons que :

$$\begin{array}{ll}\forall x\in\mathbb{R}^n,\ |x|\leq\exp\left(\frac{n}{2}\right) & \phi_n(x)=1,\\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \exp\left(\frac{n}{2}\right)\leq|x|\leq\exp(n) & 0\leq\phi_n(x)\leq 1,\\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ |x|\geq\exp(n) & \phi_n(x)=0.\end{array}$$

Ce qui montre que ϕ_n est bien une fonction de troncature, il sera commode, dans la suite, poser

$$\forall r \in \left[\exp\left(\tfrac{n}{2}\right), \exp(n)\right] \qquad \psi_n(r) = \phi\left(\tfrac{n}{Log\ r}\right).$$

Nous aurons besoin de deux lemmes. ■

Lemme 1.1 *Pour $r \in \left[\exp\left(\frac{n}{2}\right), \exp(n)\right]$ et $n \geq 2$ nous avons l'inégalité*

$$\left|\frac{d^j}{dr^j}\psi_n(r)\right| s \leq \frac{C_j}{r^j Log\ r}.$$

Preuve. a) On démontre par récurrence que :

$$\frac{d^j}{dr^j}\Psi_n(r) = \sum_{m=1}^{j}\phi^{(m)}\left(\frac{n}{Log\ r}\right)\sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+j\ ,\ \alpha_j=j \\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_j=m}} C_{\alpha_1\ldots\alpha_M}\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{n}{Log\ r}\right)\right)^{\alpha_1}\ldots\frac{d^j}{dr^j}\left(\frac{n}{Log\ r}\right)^{\alpha_j}.$$

b) On démontre en suite toujours par récurrence que :

$$\frac{d^i}{dr^i}\left(\frac{1}{Log\ r}\right) = \frac{1}{r^i}\frac{1}{Log^2 r}\mathscr{P}_{i-1}\left(\frac{1}{Log\ r}\right).$$

Où $\mathscr{P}_{i-1}(t)$ est un polynôme en t, de degré $i-1$ au plus.

c) En reportant cette expression dans $\psi_n^{(j)}(r)$, on obtient la majoration souhaitée en tenant compte du fait que

pour les valeurs considérées de r et n, on a:

$$\frac{n}{Log\ r} \in [1,2]\,,\ 0 \leq \frac{1}{Log\ r} \leq 1.$$

En effet, nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{n}{Log\ r}\right)\right)^{\alpha_1}\ldots\left(\frac{d^j}{dr^j}\left(\frac{n}{Log\ r}\right)\right)^{\alpha_j}\right| \\
&\leq\ 2^m (Log\ r)^m\left|\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{n}{Log\ r}\right)\right)^{\alpha_1}\ldots\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{n}{Log\ r}\right)\right)^{\alpha_j}\right| \\
&\leq\ C_m (Log\ r)^m\frac{1}{r^j}\frac{1}{(Log^2 r)^m} \leq \frac{C_m}{r^j (Log\ r)^m} \leq \frac{C_m}{r^j (Log\ r)}.
\end{aligned}$$

■

Lemme 1.2 *Pour $x \in \mathbb{R}^n$, tel que $|x| \in \left[\exp\left(\frac{n}{2}\right), \exp(n)\right]$, $n \geq 2$, $\lambda \in \mathbb{N}^n$, nous avons la majoration*

$$\left|D^\lambda \phi_n(x)\right| \leq \frac{C_\lambda}{\rho(r)^{|\lambda|} \, Log \; r}.$$

Preuve. Comme

$$D^\lambda \phi_n(x) = D^\lambda \psi_n(|x|),$$

nous pouvons vérifier par récurrence que

$$\begin{aligned} D^\lambda \phi_n(x) &= \frac{d^{|\lambda|}}{dr^{|\lambda|}} \psi_n(|x|) \left(\partial_1(|x|)\right)^{\lambda_1} \left(\partial_2(|x|)\right)^{\lambda_2} ... \left(\partial_n(|x|)\right)^{\lambda_n} \\ &\quad + \sum_{|\mu|=1}^{|\lambda|-1} \frac{d^{|\mu|}}{dr^{|\mu|}} \psi_n(x) \left\{ \sum_\nu C_\nu \prod_{i=1}^{|\mu|} D^{\nu_i}(|x|) \right\}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} &\lambda \in (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{N}^n \ ; \ \mu = (\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{N}^n \ ; \\ &\nu_i \in \mathbb{N}^n \ ; \ \sum |\nu_i| = |\lambda| \ ; \ \sum (|\nu_i| - 1) = |\lambda| - |\mu| \ ; \\ &\nu = \left(\nu_1, ..., \nu_{|\mu|}\right). \end{aligned}$$

Puisque

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \ |D^\alpha |x|| \leq \frac{C_\alpha}{|x|^{|\alpha|-1}}.$$

Il vient immédiatement que

$$\left|D^\lambda \phi_n(x)\right| \leq \frac{C_\lambda}{|x|^{|\lambda|} \, Log \, |x|},$$

les hypothèses du lemme impliquant d'autre part que

$$r \geq \exp(1),$$

d'où

$$r \leq \sqrt{r^2+1} \leq r\sqrt{2}$$

et

$$Log \; r \leq Log\left(2 + r^2\right) = \lg(r)$$

$$r \leq \sqrt{r^2+1} = \rho(r).$$

nous en déduisons le résultat annoncé.

Nous pouvons Maintenant passer à la démonstration du théorème.

Soit donc la suite u_n définie par

$$u_n = \phi_n u.$$

Cette suite u_n converge vers u ssi :

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^n, 0 \leq |\lambda| \leq k, \ \left\| \rho^{\alpha - m + |\lambda|} (\lg r)^{\beta - 1} D^\lambda (u - u_n) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

D'une part et

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^n, \ k+1 \leq |\lambda| \leq m, \ \left\| \rho^{\alpha - m + |\lambda|} (\lg r)^{\beta} D^\lambda (u - u_n) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

D'autre part, tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Démontrons pour les termes de la deuxième série, la démonstration est identique pour la première. En développant $D^\lambda(\phi_n u)$ nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\| \rho^{\alpha - m + |\lambda|} (\lg r)^{\beta} D^\lambda (u - u_n) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \left\| \rho^{\alpha - m + |\lambda|} (\lg r)^{\beta} (1 - \phi_n) D^\lambda u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &+ \sum_{\mu \leq \lambda, \mu \neq 0} C_\lambda^\mu \left\| \rho^{\alpha - m + |\lambda|} (\lg r)^{\beta} D^\mu \phi_n D^{\lambda - \mu} u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite tend vers 0. Les autres s'écrivent :

$$\begin{aligned}&\left\| \rho^{\alpha - m + |\lambda|} (\lg r)^{\beta} D^\mu \phi_n D^{\lambda - \mu} u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \\ &\qquad \left\{ \int\limits_{\exp\left(\frac{n}{2}\right) \leq |x| \leq \exp(n)} \rho^{p(\alpha - m + |\lambda|)} (\lg r)^{p\beta} \left| D^\mu \phi_n D^{\lambda - \mu} u \right|^p dx^{\frac{1}{p}} \right\}^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

et en utilisant la majoration obtenue au deuxième lemme 1.2 pour $D^\mu \phi_n$ nous arrivons à

$$\begin{aligned}&\left\| \rho^{\alpha - m + |\lambda|} (\lg r)^{\beta} D^\mu \phi_n D^{\lambda - \mu} u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &\qquad \left\{ \int_{\exp\left(\frac{n}{2}\right) \leq |x| \leq \exp(n)} \rho^{p(\alpha - m + |\lambda - \mu|)} (\lg r)^{p(\beta - 1)} \left| D^{\lambda - \mu} u \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Cette quantité tend bien vers 0 puisque $u \in W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$, nous avons donc montré que

$$\lim_{n \to \infty} \|u - u_n\|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

La démonstration du théorème s'achève, alors le résultat.

Comme on a prouver que $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$, de sorte que le dual de $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ noté par $W^{-m,p'}_{-\alpha,-\beta}(\mathbb{R}^n)$, est un espace de distribution. On définit aussi la semi norme

$$|u|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{|\lambda|=m} \left\| \rho^\alpha (Log\ r)^\beta \partial^\lambda u \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On notera que la présence du poids logarithmique, n'intervient que pour des exposants dits critiques ie : qui vérifient $\frac{n}{p} + \alpha \in \{1, ..., m\}$ leur introduction indispensable pour prolonger certains résultats obtenus dans ce cas non critique. ■

Remarque 1.4 *Le facteur* $\frac{1}{Log\ r}$ *indispensable dans la majoration de* $\left|\frac{d^j}{dr^j}\psi_n(r)\right|$ *obtenue au 1.2 En effet, il est utilisé lorsque* $\frac{n}{p} + \alpha \in \{1, ..., m\}$ *pour les termes tels que*

$$|\lambda| \geq k + 1 \ \ et \ \ |\lambda - \mu| \leq k.$$

La fonction de troncature utilisé par Hanouzet [14], ne convenait donc pas ici.

Le théorème suivant généralise le résultat que nous venons d'obtenus à un ouvert $\Omega \neq \mathbb{R}^2$.

Théorème 1.3 *Soit* Ω *un ouvert ayant la propriété du segment (ie : régulier),* $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans* $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$*.*

Preuve. On procède comme pour le théorème précédent. La même fonction de troncature ϕ_n définie sur $\mathbb{R}^n$ donc sur Ω, permet de construire une suite u_n dont les éléments sont à support compact. On termine la propriété d'approximation des éléments de $W^{m,p}(\Omega)$ par ceux de $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$. ■

Nous pouvons maintenant introduire la

Définition 1.3 *Pour* $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $\overset{0}{W}{}^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ *désignera l'adhérence de* $\mathscr{D}(\Omega)$ *dans* $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$.

Un théorème (d'isomorphisme)

Le théorème est l'objet de ce paragraphe nous donnera la possibilité de réduire l'étude de la famille d'espaces $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ à celle d'une sous-famille plus restreinte.

Théorème 1.4 *Soient $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, l'application*

$$u \longrightarrow \lg(r)^{\delta} u,$$

est un isomorphisme de $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ sur $W^{m,p}_{\alpha,\beta-\delta}(\Omega)$. D'autre part, lorsque $\alpha+\dfrac{n}{p} \notin \{1,...,m\}$ alors pour toute $\gamma \in \mathbb{R}$, telle que $\alpha + \dfrac{n}{p} - \gamma \notin \{1,...,m\}$, l'application

$$u \longrightarrow \rho(r)^{\gamma} u,$$

est un isomorphisme de $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ sur $W^{m,p}_{\alpha-\gamma,\beta}(\Omega)$.

Preuve. Le théorème 1.3 va nous permettre de travailler avec des u réguliers nous allons d'autre part, utiliser le fait que

$$\forall \gamma \neq 0, \ \left| D^{\lambda} \rho^{\gamma} (\lg r)^{\delta} \right| \leq C \rho^{\gamma - |\lambda|} (\lg r)^{\delta}$$

et

$$\left| D^{\lambda} \left((\lg r)^{\delta} \right) \right| \leq C \rho(r)^{-|\lambda|} (\lg r)^{\delta-1}.$$

Soit donc $u \in \mathscr{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ posons

$$v = (\lg r)^{\delta} u.$$

Nous avons alors:

$$\rho^{\alpha-m+|\lambda|} (\lg r)^{\beta-\delta} D^{\lambda} v = \sum_{\mu \leq \lambda} \binom{\lambda}{\mu} \rho^{\alpha-m+|\lambda|} (\lg r)^{\beta-\delta} D^{\mu} (\lg r)^{\delta} D^{\lambda-\mu} u.$$

D'où il découle que

$$\rho^{\alpha-m+|\lambda|} (\lg r)^{\beta-\delta} \left| D^{\lambda} v \right| \leq C \sum_{\mu \leq \lambda} \binom{\lambda}{\mu} \rho^{\alpha-m+|\lambda-\mu|} (\lg r)^{\beta-1} \left| D^{\lambda-\mu} u \right|.$$

et donc que

$$\forall u \in \mathscr{D}\left(\overline{\Omega}\right), \ \|v\|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta-\delta}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)}.$$

Réciproquement, puisque

$$u = (\lg r)^{-\delta} v$$

on vérifie de la première partie du théorème, s'achève alors par densité.

La deuxième partie se démontre comme la première partie. La restriction $\dfrac{n}{p}+\alpha \notin \{1,...,m\}$ est nécessaire parce que lorsqu'elle n'est pas vérifiée, il faudrait pouvoir obtenir une majoration en $(\lg r)^{\delta-1}$, alors qu'on ne peut faire mieux que $(\lg r)^{\delta}$. ■

Nous allons établir des résultats du type de l'inégalité de Poincaré sur ces espaces ils sont basés sur l'inégalité suivante:

1.5 Inégalité de Hardy

Lemme 1.3 *Soient* $f \in \mathscr{D}\left(]R,\infty[\right)$ *et* $p \in]1,\infty[$*, alors*
a) Si $\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ *avec* $\beta \neq -1$ *et* $R \geq \exp\left(\frac{2|\gamma|}{\beta+1}\right)$*, nous avons*

$$\int_R^{+\infty} |f(r)|^p \, r^{\beta} \left(Log\ r\right)^{\gamma} dr \leq \left(\frac{2p}{|\beta+1|}\right)^p \int_R^{+\infty} \left|\frac{df}{dr}\right|^p r^{\beta+p} \left(Log\ r\right)^{\gamma} dr. \tag{1.1}$$

b) Si $\gamma \in \mathbb{R}$ *avec* $\gamma \neq -1$ *et* $R > 1$*, nous avons*

$$\int_R^{+\infty} |f(r)|^p \, r^{-1} \left(Log\ r\right)^{\gamma} dr \leq \left(\frac{p}{|\gamma+1|}\right)^p \int_R^{+\infty} \left|\frac{df}{dr}\right|^p r^{-1+p} \left(Log\ r\right)^{\gamma+p} dr. \tag{1.2}$$

Preuve. En utilisant l'égalité suivante

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\left[r^{\beta+1}\left(Log\ r\right)^{\gamma}\right] &= \left[(\beta+1)\, r^{\beta}\left(Log\ r\right)^{\gamma} + r^{\beta+1}\frac{\gamma}{r}\left(Log\ r\right)^{\gamma-1}\right] \\
&= \left[(\beta+1)\, r^{\beta}\left(Log\ r\right)^{\gamma} + r^{\beta}\gamma\left(Log\ r\right)^{\gamma}\frac{1}{Log\ r}\right] \\
&= r^{\beta}\left(Log\ r\right)^{\gamma}\left[\left(\beta+1+\frac{\gamma}{Log\ r}\right)\right].
\end{aligned}$$

Avec l'hypothèse sur

$$R \geq \exp\left(\frac{2|\gamma|}{|\beta+1|}\right) \text{ et } \beta \neq -1.$$

$$\forall r \geq R \Longrightarrow Log\ r \geq Log\ R \geq \left(\frac{2|\gamma|}{|\beta+1|}\right) \geq 0.$$

$$\begin{aligned}
\left|r^{\beta}\left(Log\ r\right)^{\gamma}\right| . \left|\left(\beta+1+\frac{\gamma}{Log\ r}\right)\right| &\geq r^{\beta}\left(Log\ r\right)^{\gamma}\left|\left(|\beta+1| - \left|\frac{\gamma}{Log\ r}\right|\right)\right| \\
&\geq r^{\beta}\left(Log\ r\right)^{\gamma}\left|\left(|\beta+1| - \frac{|\beta+1|}{2}\right)\right| \\
&= \frac{|\beta+1|}{2} r^{\beta}\left(Log\ r\right)^{\gamma}.
\end{aligned}$$

alors

$$\left|r^{\beta}\left(Log\ r\right)^{\gamma}\right|.\left|\left(\beta+1+\frac{\gamma}{Log\ r}\right)\right|\geq\frac{|\beta+1|}{2}r^{\beta}\left(Log\ r\right)^{\gamma}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\qquad r^{\beta}\left(Log\ r\right)^{\gamma} &\leq\frac{2}{|\beta+1|}\left|r^{\beta}\left(Log\ r\right)^{\gamma}\right|\left|\left(\beta+1+\frac{\gamma}{Log\ r}\right)\right|\\ &=\frac{2}{|\beta+1|}\frac{d}{dr}\left[r^{\beta+1}\left(Log\ r\right)^{\gamma}\right]\end{aligned}$$

D'après cette inégalité on obtient l'inégalité suivante

$$\int_{0}^{+\infty}|f(r)|^{p}\,r^{\beta}\left(Log\ r\right)^{\gamma}\leq\frac{2}{|\beta+1|}\int_{0}^{+\infty}|f(r)|^{p}\,\frac{d}{dr}\left[r^{\beta+1}\left(Log\ r\right)^{\gamma}\right]dr \tag{1.3}$$

Nous intégrons par parties le membre droite de (1.3)

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{+\infty}|f(r)|^{p}\,\frac{d}{dr}\left[r^{\beta+1}\left(Log\ r\right)^{\gamma}\right]dr=\\ &\qquad\left[|f(r)|^{p}\,r^{\beta+1}\left(Log\ r\right)^{\gamma}\right]_{R}^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty}p\frac{df(r)}{dr}\,|f(r)|^{p-1}\left[r^{\beta+1}\left(Log\ r\right)^{\gamma}\right]dr\\ &\qquad=\int_{0}^{+\infty}p\frac{df(r)}{dr}\,|f(r)|^{p-1}\left[r^{\beta+1}\left(Log\ r\right)^{\gamma}\right]dr.\end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty}|f(r)|^{p}\,r^{\beta}\left(Log\ r\right)^{\gamma}&\leq\frac{-2p}{|\beta+1|}\int_{0}^{+\infty}\frac{df(r)}{dr}\,|f(r)|^{p-1}\left[r^{\beta+1}\left(Log\ r\right)^{\gamma}\right]dr\\ &\leq\frac{2p}{|\beta+1|}\int_{0}^{+\infty}\frac{df(r)}{dr}\,|f(r)|^{p-1}\left[r^{\beta+1}\left(Log\ r\right)^{\gamma}\right]dr.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{+\infty}\left|\tfrac{df(r)}{dr}\right|\,|f(r)|^{p-1}\left[r^{\beta+1}\left(Log\ r\right)^{\gamma}\right]dr=\\ &\qquad\int_{0}^{+\infty}\left|\tfrac{df(r)}{dr}\right|\,|f(r)|^{p-1}\,r^{1+\frac{\beta}{p}}r^{\frac{\beta(p-1)}{p}}\left(Log\ r\right)^{\frac{\gamma}{p}}\left(Log\ r\right)^{\frac{\gamma(p-1)}{p}}dr\\ &\qquad\leq\left[\int_{0}^{+\infty}\left|\tfrac{df(r)}{dr}\right|^{p}r^{\beta+p}\left(Log\ r\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{p}}.\left[\int_{0}^{+\infty}|f(r)|^{p}\left(Log\ r\right)^{\gamma}r^{\beta}dr\right]^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{+\infty}|f(r)|^{p}\,r^{\beta}\left(Log\ r\right)^{\gamma}\leq\\ &\qquad\frac{2p}{|\beta+1|}\left[\int_{0}^{+\infty}\left|\frac{df(r)}{dr}\right|^{p}r^{\beta+p}\left(Log\ r\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{p}}.\left[\int_{0}^{+\infty}|f(r)|^{p}\left(Log\ r\right)^{\gamma}r^{\beta}dr\right]^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

$$\left[\int_0^{+\infty} |f(r)|^p r^\beta (Log\ r)^\gamma\right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{2p}{|\beta+1|}\left[\int_0^{+\infty}\left|\frac{df(r)}{dr}\right|^p r^{\beta+p}(Log\ r)^\gamma\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\Longrightarrow \left[\int_0^{+\infty} |f(r)|^p r^\beta (Log\ r)^\gamma\right] \leq \frac{2p}{|\beta+1|}\left[\int_0^{+\infty}\left|\frac{df(r)}{dr}\right|^p r^{\beta+p}(Log\ r)^\gamma\right].$$

D'où le résultat.

Deuxième cas : si $\gamma \in \mathbb{R}$, avec $\gamma \neq -1$ et $R \geq 1$, nous avons :

$$\int_R^\infty |f(r)|^p r^{-1}(Log\ r)^\gamma dr \leq \left(\frac{p}{|\gamma+1|}\right)^p \int_R^\infty \left|\frac{df(r)}{dr}\right|^p r^{-1+p}(Log\ r)^{\gamma+p} dr.$$

En utilisant cette égalité :

$$\frac{1}{r}(Log\ r)^\gamma = \frac{1}{(\gamma+1)}\frac{d}{dr}(Log\ r)^{\gamma+1}.$$

On a

$$\forall r \geq R,\ \int_R^\infty |f(r)|^p r^{-1}(Log\ r)^\gamma dr = -\frac{1}{\gamma+1}\int_R^\infty p\frac{df(r)}{dr}|f(r)|^{p-1}(Log\ r)^{\gamma+1} dr$$
$$= -\frac{p}{\gamma+1}\int_R^\infty \frac{df(r)}{dr}|f(r)|^{p-1}(Log\ r)^{\frac{\gamma}{p}}.(Log\ r)^{\frac{\gamma(p-1)}{p}} r^{\frac{(p-1)}{p}} r^{\frac{(1-p)}{p}} dr.$$

avec l'utilisation de l'inégalité de Hardy on obtient

$$\int_R^\infty |f(r)|^p r^{-1}(Log\ r)^\gamma dr \leq$$
$$\frac{p}{|\gamma+1|}\left[\int_R^\infty\left|\frac{df(r)}{dr}\right|^p r^{-1+p}(Log\ r)^p dr\right]^{\frac{1}{p}}.\left[\int_R^\infty |f(r)|^p (Log\ r)^\gamma r^{-1} dr\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\Longrightarrow \left[\int_R^\infty |f(r)|^p r^{-1}(Log\ r)^\gamma dr\right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{|\gamma+1|}\left[\int_R^\infty\left|\frac{df(r)}{dr}\right|^p r^{-1+p}(Log\ r)^p dr\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\Longrightarrow \left[\int_R^\infty |f(r)|^p r^{-1}(Log\ r)^\gamma dr\right] \leq \frac{p}{|\gamma+1|}\left[\int_R^\infty\left|\frac{df(r)}{dr}\right|^p r^{-1+p}(Log\ r)^p dr\right].$$

d'où le résultat. ■

Définition 1.4 *Les polynômes présents dans les espaces $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ vont jouer un certain rôle. On preuve facilement que q le plus haut degré des polynômes contenus dans $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$*

défini par

$$q=\begin{cases} m-\left(\dfrac{n}{p}+\alpha\right)-1 \ \mathit{si} & \begin{cases} \dfrac{n}{p}+\alpha\in\{1,...,m\} \ \mathit{et}\,(\beta-1)\,p\geq-1 \\ \qquad\qquad \mathit{ou} \\ \dfrac{n}{p}+\alpha\in\{i\in\mathbb{Z},i\leq0\} \ \mathit{et}\ \beta p\geq-1, \end{cases} \\ \\ \left[m-\left(\dfrac{n}{p}+\alpha\right)\right] & \mathit{sinon.} \end{cases}$$

[.] : *La partie entière.*

Notons $\mathscr{P}_q$ *l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à* q*, si* q *est négatif,* $\mathscr{P}_q$ *est nul*

Remarque 1.5 *Dans le cas où* $\beta=0$*, le plus haut degré des polynômes contenus dans* $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ *donnés par*

$$q=\begin{cases} \left[m-\left(\dfrac{n}{p}+\alpha\right)\right], & \mathit{si}\begin{cases} \dfrac{n}{p}+\alpha\in\{1,...m\} \\ \mathit{ou} \\ \dfrac{n}{p}+\alpha\notin\{1,...,m\} \ \ \mathit{et}\ \dfrac{n}{p}+\alpha\notin\{i\in\mathbb{Z},\ i\leq0\}, \end{cases} \\ \\ m-\left(\dfrac{n}{p}+\alpha\right)-1, & \mathit{si}\ \dfrac{n}{p}+\alpha\in\{i\in\mathbb{Z},\ i\leq0\}. \end{cases}$$

Nous aurons aussi besoin de la

Définition 1.5 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*, nous noterons* $F_{m,q}(\Omega)$ *l'espace des fonctions définies sur* Ω*,*

- dont la restriction à chaque composante connexe bornée de Ω *est un polynôme de degré* $m-1$ *au plus.*

- dont la restriction à chaque composante connexe non bornée de Ω *est un polynôme de degré* $\inf(q,m-1)$ *au plus.*

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème qui est l'objet de ce paragraphe

Théorème 1.5 *Soit α, β deux réels et m un entier ≥ 1 tels que*

$$\frac{n}{p}+\alpha \notin \{1,...,m\} \ \ ou \quad (\beta-1)\,p \neq -1.$$

Soit $q' = \inf(q, m-1)$, où q le plus haut degré des polynômes contenus dans $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$. Alors la semi norme $|.|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)}$ est une norme sur $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)/\mathscr{P}_{q'}$, équivalente à la norme quotient. En particulier si $q' < 0$, la semi norme $|.|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)}$ est une norme sur $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$, équivalente à la norme $\|.\|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)}$.

Rappel sur la norme quotient

$$[u]_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)} = \|\dot{u}\|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)/\mathscr{P}_q} = \inf_{q\in\mathscr{P}_{q'}} \|u+q\|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)}$$

Dans certains cas il est possible de mieux caractérisé le comportement à l'infini des fonctions de $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$. A titre d'exemple, on a

Lemme 1.4 *Soit $p > n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{n}{p}+\alpha \neq 1$. Pour toute fonction $u \in W^{1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $|x| > 1$,on a*

$$|u(x)| \leq C\,|x|^{1-\frac{n}{p}-\alpha}\,\|u\|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} \ \ et \ \lim_{|x|\longrightarrow\infty} |x|^{\alpha+\frac{n}{p}-1}\,|u(x)| = 0,$$

où C est une constante indépendante de u.

Preuve. On traite tout d'abord le cas $\alpha = 0$. Soit $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ à support compact dans la boule de rayon 1 centrée à l'origine en (0) et égale à 1 sur la boule de rayon $\frac{1}{2}$ centrée en (0). L'estimation proposée est triviale pour $u\phi$. D'autre part, on montre aisément que

$$\nabla(u(1-\phi)) \in L^p(\mathbb{R}^n),\ p > n,$$

de Sorte que, grâce aux injections de Sobolev, on a

$$|u(x)(1-\phi(x)) - u(y)(1-\phi(y))| \leq C\,\|\nabla(u(1-\phi))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,|x-y|^{1-\frac{n}{p}},$$

Ce qui permet de conclure en choisissant $y = 0$. Pour traité le cas général, il suffit de remarquer que si $u \in W^{1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ et $\frac{n}{p}+\alpha \neq 1$, alors

$$\rho^{\alpha}u \in W^{1,p}_{0}(\mathbb{R}^n).$$

Pour la seconde propriété, on considère une suite $u_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

approximant u dans $W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. il découle de la première inégalité que

$$\sup_{|x|>1} \left| |x|^{\alpha+\frac{n}{p}-1} u(x) - |x|^{\alpha+\frac{n}{p}-1} u_n(x) \right| \leq C \|\nabla(u-u_n)\|_{W_\alpha^{1,p}}.$$

Par conséquent, en dehors de la boule unité $|x|^{\alpha+\frac{n}{p}-1} u$ est limite uniforme de fonctions à support compact et tend vers (0) à l'infini. ■

Passons maintenant à la démonstration du théorème

Preuve. du théoréme (1.5)

Il est clair par construction de $\mathscr{P}_{q'}$, que $|.|_{W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega)}$ est une norme sur $W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega)/\mathscr{P}_{q'}$ et que

$$\forall u \in W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega), \ |u|_{W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega)}$$

($\|.\|$ la norme naturelle). Il reste à montrer que

$$\exists C, \ \forall \dot{u} \in W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega)/\mathscr{P}_{q'} : \|\dot{u}\|_{W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega)/P_{\dot{q}}} \leq C |\dot{u}|_{W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega)}$$

Le reste voir [12]. ■

Lemme 1.5 *Etant donnés α, β et $m \geq 1$, tels que*

$$\frac{n}{p} + \alpha \notin \{1, ..., m\} \ \text{ou} \ (\beta - 1)p \neq -1.$$

Soit $B = B(0, R)$, la boule ouverte de centre l'origine et de rayon R suffisamment grand. Notons $B' = B_R^C$, le complémentaire de $\overline{B}$ Alors la semi norme $|.|_{W_{\alpha,\beta}^{m,p}(B')}$ est une norme sur $\overset{0}{W}{}_{\alpha,\beta}^{m,p}(B')$, équivalente à la norme induite par $W_{\alpha,\beta}^{m,p}(B')$.

Preuve. Remarquons tout d'abord qu'en vertu de la remarque 1.3 , nous pouvons remplacer $\rho(r)$ par r et $\lg(r)$ par $Log\ r$ dans la définition $W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\Omega)$ sans changer la topologie, ensuite $\mathscr{D}(B')$ étant dense dans $\overset{0}{W}{}_{\alpha,\beta}^{m,p}(B')$ Par définition, nous pouvons travailler avec u dans $\mathscr{D}(B')$. La démonstration du lemme est basée sur l'utilisation des coordonnées polaires et l'inégalité de Hardy, nous avons donc

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \overrightarrow{\nabla u}.\frac{\overrightarrow{r}}{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}.\frac{r_i}{r},$$
$$\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \left|\frac{r_i}{r}\right| \ \text{Cauchy Schwartz.}$$
$$\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^p \leq n^{\frac{p}{\dot{p}}}.\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p,$$

et plus généralement

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^n : 0 < |\lambda| \leq n-1, \ \left| \frac{\partial}{\partial r} D^\lambda u \right|^2 \leq n^{\frac{p}{p}} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} D^\lambda u \right|^2 \tag{1.4}$$

D'autre part,

$$D^\lambda u(r,\theta) = \int_R^r \frac{\partial}{\partial \rho} D^\lambda u(\rho,\theta)\, d\rho$$

Appliquons pour θ fixé et R suffisamment grand, l'inégalité de Hardy à la fonction

$$r \longrightarrow D^\lambda u(r,\theta),$$

Puis intégrons en θ, nous obtenons

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^n : 0 \leq |\lambda| \leq k-1,$$
$$\left\| r^{\alpha-m+|\lambda|} (Log\ r)^{\beta-1} D^\lambda u \right\|_{L^p(B')} \leq \left\| r^{\alpha-m+|\lambda|+1} (Log\ r)^{\beta-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(D^\lambda u\right) \right\|_{L^p(B')},$$

puis, comme nous avons exclu le cas $(\beta-1)\,p \neq -1$, lorsque $\dfrac{n}{p} + \alpha \in \{1,...,m\}$, il vient

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^n, \ |\lambda| = k,$$
$$\left\| r^{\alpha-m+|\lambda|} (Log\ r)^{\beta-1} D^\lambda u \right\|_{L^p(\beta')} \leq C \left\| r^{\alpha-m+|\lambda|+1} (Log\ r)^{\beta} \frac{\partial}{\partial r} D^\lambda u \right\|_{L^p(\beta')}$$

C'est pour ces valeurs de λ, que nous avons besoin de poids logarithmiques et de l'inégalité de Hardy généralisée. Enfin, pour le dernier cas à considérer, nous arrivons à

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^n : k+1 \leq |\lambda| \leq m-1,$$
$$\left\| r^{\alpha-m+|\lambda|} (Log\ r)^{\beta} D^\lambda u \right\|_{L^p(B')} \leq \ C \left\| r^{\alpha-m+|\lambda|+1} (Log\ r)^{\beta} \frac{\partial}{\partial r} \left(D^\lambda u\right) \right\|_{L^p(B')},$$

nous en déduisons, en prenant en compte les relations (1.4) que $\forall l = 0,1,...,m-1$

$$\sum_{|\lambda|=l} \left\| r^{\alpha-m+|\lambda|} (Log\ r)^{\beta'} D^\lambda u \right\|_{L^p(B')} \leq C \sum_{|\mu|=l+1} \left\| r^{\alpha-m+|\mu|} (Log\ r)^{\beta''} D^\mu u \right\|_{L^p(B')},$$

où

$$\beta' = \begin{cases} \beta-1, & \text{si } 0 \leq |\lambda| \leq k \\ \beta, & \text{sinon} \end{cases}, \ \beta'' = \begin{cases} \beta-1, & \text{si } 0 \leq |\mu| \leq k, \\ \beta, & \text{sinon} \end{cases},$$

ce qui permet de proche en proche de vérifier l'assertion du lemme ■

On définit finalement les espaces

$$\mathcal{D} = \{v \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \ ; \ \text{div}\ v = 0\}, \ H_p = \{v \in L^p(\mathbb{R}^n), \ \text{div}\ v = 0\}.$$

Lemme 1.6 *L'espace $\mathcal{D}$ est dense dans H_p.*

1.6 Une deuxième famille d'espaces de Sobolev avec poids

Introduction

Une deuxième famille de régularité du chapitre suivant nous conduiront (naturellement) dans le cas de $p = 2$ à introduire une famille d'espaces très proches des espaces W_l^m ou $W_{l,q}^m$, étudiés lors des paragraphes précédents. Nous verrons que ces nouveaux espaces sont identiques aux W_l^m en dimension trois ie : le cas non critique et n'en différent en dimension deux, que du fait de l'apparition brutale d'un logarithme dans la suite des poids intervenant dans la définition W_l^m.

1.7 Définitions et premières propriétés

Définition 1.6 *Soient $m \in \mathbb{Z}$, alors $X_l^{m+l}(\mathbb{R}^2)$ est l'espace défini par*

$$\begin{aligned} X_l^{m+l}(\mathbb{R}^2) = \ & \{f \in W_0^m(\mathbb{R}^2) \ ; \\ & \forall \alpha \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq |\alpha| \leq l, \ x^\alpha f \in W_0^{m+|\alpha|}(\mathbb{R}^2), \ f \in H_{loc}^{m+n}(\mathbb{R}^2)\}. \end{aligned}$$

Proposition 1.5 *$\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ est dense dans les espaces $X_l^{m+l}(\mathbb{R}^2)$.*

Pour ce faire, nous aurons besoin de trois lemmes.

Lemme 1.7 *Soient $m \in \mathbb{Z}, \ l \in \mathbb{N}$, alors*

$$\forall u \in X_l^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right), \ \forall \phi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^2\right), \ \phi u \in X_l^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Preuve. La propriété analogue étant vraie pour $H^{m+l}(\mathbb{R}^2)$ et $W_0^{m+q}(\mathbb{R}^2)$, il vient, pour tout $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} & \forall \alpha \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq |\alpha| \leq l, \ x^\alpha u \in W_0^{m+|\alpha|}(\mathbb{R}^2) \Longrightarrow \phi x^\alpha u = x^\alpha (\phi u) \in W_0^{m+|\alpha|}(\mathbb{R}^2), \\ & \forall \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2), \ \psi u \in H^{m+n}(\mathbb{R}^2) \Longrightarrow \phi \psi u = \psi \phi u \in H^{m+l}(\mathbb{R}^2) \Longrightarrow \phi u \in X_l^{m+l}(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Lemme 1.8 *Soient $m \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{N}$, tel que*

i)

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^2 : |\alpha| = l,\ x^\alpha u \in W_0^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right),$$

ii) $\exists \phi_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$, identique à 1dans un voisinage de l'origine des coordonnées, telle que $\phi_0 u \in H^{m+l}(\mathbb{R}^2)$, alors

$$\forall \phi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^2\right),\ \phi u \in H^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Preuve. On a

$x^\alpha u \in W_0^{m+l}(\mathbb{R}^2)$ par hypothèse, il en découle que

$$\forall \phi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^2\right),\ \phi x^\alpha u \in W_0^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right),$$

et même que $x^\alpha \phi u \in H^{m+l}(\mathbb{R}^2)$, du fait de la présence de ϕ, x^α ne joue de rôle qu'à l'origine des coordonnées , et nous avons donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \phi u \in H^{m+l}(B'_\varepsilon) \text{ tel que } B'_\varepsilon =^C B_\varepsilon.$$

Par ailleurs, $\phi_0 u \in H^{m+l}(\mathbb{R}^2)$, donc en choisissant ε, tel que B_ε soit contenu dans le voisinage de l'origine où ϕ_0 est identique à 1, il vient $u \in H^{m+l}(B_\varepsilon)$ et donc

$$\forall \phi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^2\right),\ \phi u \in H^{m+l}(B_\varepsilon),$$

et puisqu'il n'y pas de problème de raccord sur ∂B_ε du fait que

$$\forall \varepsilon' < 0,\ \phi u \in H^{m+l}(B'_{\varepsilon'}),$$

il vient

$$\forall \phi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^2\right),\ \phi u \in H^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

D'où le résultat. ∎

Lemme 1.9 *Soient $m \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{N}$, alors si u à support compact*

$$u \in X_l^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right) \Longleftrightarrow u \in H^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right)$$

Preuve. La propriété analogue est vraie pour les espaces W.

On a

$$X_l^{m+l}(\mathbb{R}^2) = \{f \in W_0^m(\mathbb{R}^2) \; ; \; \forall \alpha \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq |\alpha| \leq l, \; x^\alpha f \in W_0^{m+|\alpha|}(\mathbb{R}^2), \; f \in H_{loc}^{m+l}(\mathbb{R}^2)\}$$

et u à support compact, nous avons donc

$$\left\{\forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \; 0 \leq |\alpha| \leq l, \; x^\alpha u \in W_0^{m+|\alpha|}(\mathbb{R}^2)\right\} \iff \left\{\forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \; 0 \leq |\alpha| \leq l, \; x^\alpha u \in H^{m+|\alpha|}(\mathbb{R}^2)\right\}.$$

Mais cette dernière propriété, plus le fait que $u \in H_{loc}^{m+l}(\mathbb{R}^2)$ est équivalente à $u \in H^{m+l}(\mathbb{R}^2)$. D'où le résultat. ■

Proposition 1.6 *Soient $m \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ est dense dans $X_l^{m+l}(\mathbb{R}^2)$.*

Preuve. La démonstration est analogue à celle des W(c'est le même principe). ■

Montrons maintenant que $X_l^{m+l}(\mathbb{R}^2)$ est un espace de Hilbert.

Proposition 1.7 *Soient $m \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$ et $\phi_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ identique à 1 sur un voisinage de l'origine des coordonnées, alors $X_l^{m+l}(\mathbb{R}^2)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(.,.)_{m,n}$ défini par*

$$\forall u, v \in X_l^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right), \; (u,v)_{m,l} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} (x^\alpha u, x^\alpha v)_{m+|\alpha|,0} + (\phi_0 u, v)_{m+l}.$$

Où

** $(.,.)_{m+|\alpha|,0}$ désigne le produit scalaire de $W_0^{m+|\alpha|}(\mathbb{R}^2)$.*

** $(.,.)_{m+l}$ désigne le produit scalaire de $H^{m+l}(\mathbb{R}^2)$.*

Remarque 1.6 *La topologie ainsi définie ne dépend pas du choix de la fonction ϕ_0.*

Preuve. Il faut s'assurer que le produit scalaire ci-dessus fait de $X_l^{m+l}(\mathbb{R}^2)$ un espace de Hilbert, et que $X_l^{m+l}(\mathbb{R}^2)$ est complet pour la topologie ainsi définie. ■

Nous allons maintenant étudier le lien entre les deux familles $W_l^{m+l}(\mathbb{R}^2)$ et $X_l^{m+l}(\mathbb{R}^2)$.

1.8 Identité des familles $X_l^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right)$ et $W_l^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right)$ pour m et l positifs

Lemme 1.10 *Soient $q,\ m,\ l \in \mathbb{Z}$, alors les espaces :*

$$W_{l,q,loc}^{m}\left(\mathbb{R}^2\right) = \left\{u \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^2\right)\ ;\ \forall \phi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^2\right),\ \phi u \in W_{l,q}^{m}\left(\mathbb{R}^2\right)\right\}$$

S'identifient à l'espace

$$H_{loc}^{m}\left(\mathbb{R}^2\right) = \left\{u \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^2\right) / \ \forall \phi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^2\right),\ \phi u \in H^{m}\left(\mathbb{R}^2\right)\right\}$$

Preuve. Ce résultat se déduit de la définition où l'on constatait que les poids ne jouent aucun rôle à distance finie. ■

Proposition 1.8 *Soient $m,\ l \in \mathbb{N}$, alors l'espace $X_l^{m+l}(\mathbb{R}^2)$ s'identifie à l'espace $W_l^{m+l}(\mathbb{R}^2)$.*

Preuve. Voir la thèse [12] ■

1.9 Relations entre les familles $X_l^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right)$ et $W_l^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right)$ dans le cas où m est négatif et l positif

Ce paragraphe étudié la famille X_l^{-m+l} pour m positif (donc $-m$ négatif) et $-m+l$ positif, on donne une deuxième définition de cette famille.

Définition 1.7 *Soient $m,\ l \in \mathbb{N}$, tels que $-m+l \geq 0$, alors l'espace $X_l^{-m+l}(\mathbb{R}^2)$ peut être défini par la manière suivante équivalente à*

$$\begin{aligned} X_l^{-m+l}(\mathbb{R}^2) = \ & \{f \in W_0^{-m}(\mathbb{R}^2)\ ; \\ & \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq |\alpha| \leq l,\ x^\alpha f \in W_0^{-m+|\alpha|}(\mathbb{R}^2),\ f \in W_l^{-m+l}(\mathbb{R}^2)\}. \end{aligned}$$

Théorème 1.6 *Soient $m \in \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{N}$, alors nous avons les inclusions algébriques et topologiques ci-dessous :*

$$W_{l,1}^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right) \underset{dense}{\hookrightarrow} X_l^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right) \underset{dense}{\hookrightarrow} W_{l,-1}^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right)$$

Preuve. Voir [12]. ■

1.10 Multiplication et dérivation dans les espaces $X_l^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right)$

Proposition 1.9 *Soient $m \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{N}$, alors*

$$u \in X_l^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right) \Longrightarrow \partial_j u \in X_l^{m-1+l}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Preuve. On sait que

$$u \in W_0^{m}\left(\mathbb{R}^2\right) \Longrightarrow \partial_j u \in W_0^{m-1}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

On outre,

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq |\alpha| \leq n,\ x^\alpha \partial_j u = \partial_j\left(x^\alpha u\right) - \sum_{|\beta|=|\alpha|-1} C_{\alpha\beta_j} x^\alpha u,$$

Or

$$u \in X_l^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right) \Longrightarrow x^\beta u \in W_0^{m+|\beta|}\left(\mathbb{R}^2\right) = W_0^{m+|\alpha|-1}\left(\mathbb{R}^2\right),\ |\beta| = |\alpha| - 1,$$

mais aussi

$$\begin{aligned} u \in X_l^{m+l}(\mathbb{R}^2) &\Longrightarrow x^\alpha u \in W_0^{m+|\alpha|}(\mathbb{R}^2) \\ &\Rightarrow \partial_j\left(x^\alpha u\right) \in W_0^{m+|\alpha|-1}(\mathbb{R}^2) \end{aligned}$$

, et nous avons ainsi montré que

$$x^\alpha \partial_j u \in W_0^{m-1+|\alpha|}\left(\mathbb{R}^2\right),$$

ce qui achève la démonstration, Puisque d'autre part

$$u \in H_{loc}^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right) \Longrightarrow \partial_j u \in H_{loc}^{m-1+l}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

■

Proposition 1.10 *Soient $m \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{N},\ l \geq 1$, alors*

$$u \in X_l^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right) \Longrightarrow x_i u \in X_{l-1}^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Preuve. $\forall \beta \in \mathbb{N}^2,\ 0 \leq |\beta| \leq l-1,\ x_i x^\beta = x^\alpha,\ |\alpha| = |\beta| + 1$, il vient immédiatement que

$$\left\{\forall \alpha \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq |\alpha| \leq l,\ x^\alpha u \in W_0^{m+|\alpha|}\left(\mathbb{R}^2\right)\right\}$$

D'autre part,

$$u \in H_{loc}^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right) \Longrightarrow x_i u \in H_{loc}^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

■

Proposition 1.11 *Soient $m \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{N},$ alors tout u appartenant à $X_l^{m+l}(\mathbb{R}^2)$ vérifie*

$$\forall \alpha,\ \lambda \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq |\alpha| = |\lambda| \leq l,\ x^\alpha D^\lambda u \in W_0^m\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Preuve. Propriété des espaces $X_l^{m+l}(\mathbb{R}^2)$.

Le cas où l négatif nous utiliserons le dualité et transposition ■

Définition 1.8 *Soient $m \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{N},$ alors nous désignerons par $X_{-l}^{m-l}(\mathbb{R}^2)$ le dual de $X_{+l}^{-m+l}(\mathbb{R}^2)$, soit*

$$X_{-l}^{m-l}\left(\mathbb{R}^2\right) = \left(X_l^{-m+l}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)^*$$

Proposition 1.12 *Soient $m \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{Z},$ alors $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ est dense dans $X_l^{m+l}(\mathbb{R}^2)$.*

Preuve. C'est le même principe avec les W, troncature et la régularisation et l'utilisation de la topologie X. ■

Proposition 1.13 *Soient $m \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{N},\ l \geq 1,$ alors*

$$u \in X_{-l}^{m-l}\left(\mathbb{R}^2\right) \Longrightarrow \partial_j u \in X_{-l}^{m-1-l}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Preuve. Il s'agit de montrer que le produit scalaire $\langle \partial_j u, \phi \rangle$ est défini lorsque $\phi \in X_l^{-m+1+l}(\mathbb{R}^2)$, or par définition de la dérivée

$$\langle \partial_j u, \phi \rangle = -\langle u, \partial_j \phi \rangle,$$

le fait que

$$\phi \in X_l^{-m+1+l}\left(\mathbb{R}^2\right) \Longrightarrow \partial_j \phi \in X_l^{-m+l}\left(\mathbb{R}^2\right),$$

ce qui montre l'existence et la continuité du produit scalaire considéré. ■

Proposition 1.14 *Soient $m \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{N},$ alors*

$$u \in X_{-l}^{m-l}\left(\mathbb{R}^2\right) \Longrightarrow x_i u \in X_{-l-1}^{m+1-l-1}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Preuve. Il s'agit de montrer que le produit scalaire $\langle x_i u, \phi \rangle$, est défini lorsque $\phi \in X_{l+1}^{-m+1+l+1}(\mathbb{R}^2)$, or

$$\langle x_i u, \phi \rangle = \langle u, x_i \phi \rangle ,$$

et en vertu de la proposition précédente,

$$\phi \in X_{l+1}^{-m+1+l+1}\left(\mathbb{R}^2\right) \Longrightarrow x_i \phi \in X_l^{-m+l}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Ce qui montre bien l'existence et la continuité du produit scalaire. ■

Remarque 1.7 *La proposition 1.14 contient le cas $l = 0$, que ne contenait pas la proposition 1.10 , et remarquons aussi bien que*

$$u \in W_0^m\left(\mathbb{R}^2\right) \equiv X_0^m\left(\mathbb{R}^2\right) \not\Rightarrow x_i u \in W_{-1}^m\left(\mathbb{R}^2\right).$$

à cause du logarithime présent dans certaines poids de $W_0^m(\mathbb{R}^2)$ et absent dans tous les poids de $W_{-1}^m(\mathbb{R}^2)$, par contre

$$u \in X_0^m\left(\mathbb{R}^2\right) \equiv W_0^m\left(\mathbb{R}^2\right) \Longrightarrow x_i u \in X_{-1}^m\left(\mathbb{R}^2\right) = \left(X_1^{-(m+1)+1}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)^*$$

Proposition 1.15 *Soient $m,\ l \in \mathbb{Z}$, alors nous avons l'inclusion algébrique et topologique*

$$X_{l+1}^{m+l+1}\left(\mathbb{R}^2\right) \hookrightarrow X_l^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

En plus le premier espace est dense dans le deuxième.

1.11 Cas particulier : $\mathbb{R}_+^2$

Si $\Omega = \mathbb{R}_+^2$ les mêmes définitions que précédemment.

Théorème 1.7 $\mathscr{D}\left(\overline{\mathbb{R}_+^2}\right)$ *est dense dans $W_\alpha^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$.*

Preuve. La démonstration est analogue au théorème ($\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ est dense dans $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^2)$.
■

Remarque 1.8 $\mathscr{D}\left(\overline{\mathbb{R}^2}\right)$ *est l'espace des restrictions à $\mathbb{R}_+^2$ des fonctions de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$.*

1.12 Propriétés de $W_\alpha^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$

Théorème 1.8 *$W_\alpha^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ coïncide algébriquement et topologiquement avec l'espace des restrictions à $\mathbb{R}_+^2$ des fonctions de $W_\alpha^{m,p}\left(\mathbb{R}^2\right)$.*

Lemme 1.11 *Il existe un opérateur de prolongement linéaire continu de $W_\alpha^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ dans $W_\alpha^{m,p}\left(\mathbb{R}^2\right)$.*

$$\begin{aligned} P \quad &: W_\alpha^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right) \longrightarrow W_\alpha^{m,p}\left(\mathbb{R}^2\right) \\ \|Pu\|_{W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^2)} &\leq C\,\|u\|_{W_\alpha^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)} \end{aligned}$$

Preuve. On utilise la méthode de Babich(voir l'article de Hanouzet [14]). ■

Remarque 1.9 *Comme $W_\alpha^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ coïncide localement avec $W^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$, pour $m \geq 1$, $\mathscr{D}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ n'est pas dense dans $W^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$.*

Nous introduisons donc un nouvel espace

Définition 1.9 *Pour $m \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{R},\ 1 < p < \infty$,*
on désigne par $\overset{0}{W}{}_\alpha^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ l'adhérence de $\mathscr{D}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ dans $W_\alpha^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$. Nous notons $W_{-a}^{-m,p'}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ le dual de $\overset{0}{W}{}_\alpha^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$, avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Cet espace $\left(W_{-a}^{-m,p'}\left(\mathbb{R}_+^2\right)\right)$est un espace de distributions.

1.13 Résultats sur $\overset{0}{W}{}_\alpha^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$

1- Pour $m \in \mathbb{N},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, l'application

$$u \longrightarrow \rho\,(r)^\beta\, u,$$

est un isomorphisme de $\overset{0}{W}{}_\alpha^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ sur $\overset{0}{W}{}_{\alpha-\beta}^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$.

Lemme 1.12 *Soit $m \geq 1$un entier et $\alpha,\ \beta$ deux réels tels que*

$$\alpha + \frac{n}{p} \notin \{1, ..., m\} \ \ ou \ \ (\beta - 1)\, p \neq -1.$$

Soit $q' = \inf(q, m-1)$, où q désigne le plus haut degré des polynômes contenus dans $W_{\alpha,\beta}^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$. Alors la semi norme $|.|_{W_{\alpha,\beta}^{m,p}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$,

* *Est une norme sur* $\overset{0}{W}{}^{m,p}_{\alpha,\beta}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$, *équivalente à la norme* $\|.\|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}\left(\mathbb{R}^n_+\right)}$.

* *Est une norme sur* $W^{m,p}_{\alpha,\beta}\left(\mathbb{R}^n_+\right)/\mathscr{P}_{q'}$.

**En particulier, si* $q' < 0$, *la semi norme* $|.|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}\left(\mathbb{R}^n_+\right)}$ *est une norme sur* $\|.\|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}\left(\mathbb{R}^n_+\right)}$.

Preuve. Voir la démonstration dans le chapitre précédent. ■

Nous avons aussi le lemme suivant :

Lemme 1.13 *Soit* $m \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $u \in W^{m,p}_{\alpha}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$, *on note par* $\widetilde{u}$ *le prolongement par zéro en dehors* $\mathbb{R}^n_+$. *Alors*

$$\widetilde{u} \in W^{m,p}_{\alpha}\left(\mathbb{R}^n\right) \Longleftrightarrow u \in \overset{0}{W}{}^{m,p}_{\alpha}\left(\mathbb{R}^n_+\right).$$

Chapitre 2

Résultats de Laplace et polyharmonique sur $\mathbb{R}^n$

2.1 Résultats préliminaires sur l'opérateur gradient et divergence

Ce paragraphe exhibe certaines propriétés des opérateurs gradient et divergence dans les espaces de Sobolev avec poids. On appliquera celles ci pour montrer certains résultats de Laplace.

Lemme 2.1 *Soit* $u \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, *tel que*

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^n : 0 \leq |\lambda| \leq \left[m - \frac{n}{p}\right],\ D^\lambda u(0) = 0.$$

Alors pour $m \geq 1$ *et* $\frac{n}{p} \notin \{1, ..., m\}$, *il existe une constante* C *indépendante de* u, *telle que*

$$\|u\|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\, |u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Proposition 2.1 *Pour tout entier* $n \geq 2$ *et* $1 < p < +\infty$, *tel que* $\frac{n}{p} \neq 1$.
Alors les opérateurs suivants

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) / \mathscr{P}_{\left[1-\frac{n}{p}\right]} \xrightarrow{grad} L^p(\mathbb{R}^n) \perp H_p$$

et

$$L^{p'}(\mathbb{R}^n) / H_{p'} \xrightarrow{div} W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}_{\left[1-\frac{n}{p}\right]},$$

sont des isomorphismes.

Preuve. L'opérateur gradient est clairement linéaire et continu, son noyau K_g réduit à $\{0\}$, pour $1 < p < n$ et à $\mathscr{P}_0$, pour $n < p < \infty$, ie : $K_g = \mathscr{P}_{\left[1-\frac{n}{p}\right]}$ D'ailleurs on sait que

$$[u]_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} < C\,|u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = C\,\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

et par conséquent l'opérateur gradient est un isomorphisme de $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{\left[1-\frac{n}{p}\right]}$ sur son image R_g. D'ou R_g est un sous espace fermé de $L^p(\mathbb{R}^n)$, ainsi que

$$R_g = (Ker\,(div))^{\perp},$$

où div est un opérateur défini par

$$L^{p'}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \left(W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{\left[1-\frac{n}{p}\right]}\right)'.$$

Ainsi $R_g = (H_{p'})^{\perp}$. On a le gradient est un isomorphisme, nous observons clairement par dualité et transposition que l'opérateur div est aussi isomorphisme. ■

Le résultat qui suit est une conséquence des inégalités de Hardy et de la densité de $\mathcal{D}$ dans H_p, où

$$\mathcal{D} = \{v \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\ ;\ \text{div } v = 0\},\ H_p = \{v \in L^p(\mathbb{R}^n),\ \text{div } v = 0\}\ ;$$

il caractérise les distributions dont le gradient est dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 2.2 *Soit $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, tel que $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Alors*
i) Si $1 < p < n$, il existe une constante k, dépendant de u, telle que $u + k \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. De plus il existe une constante $C > 0$, indépendante de u, telle que

$$\|u+k\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

ii) Si $n < p$, alors $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. De plus il existe une constante $C > 0$ indépendante de u, telle que

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_0} \leq C\,\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve. Cette proposition est une conséquence directe de la proposition 2.1 et du lemme 2.1 . En effet, soit $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, tel que $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ puisque $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, nous avons

$$\forall \phi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \; < \nabla u, \phi >= - < u, div\phi >,$$

ainsi que ∇u est orthogonal à $\mathcal{D}$ est dense dans $H_{p'}$, on sait que $\nabla u \in (H_{p'})^{\perp}$, ainsi que d'après la proposition 2.1 , il existe $w \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, tel que

$$\nabla w = \nabla u$$

et

$$\|w\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{\left[1-\frac{n}{p}\right]}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

maintenant puisque $\nabla(w-u) = 0 \Longrightarrow w - u = k$, où k est une constante

ii) Evidente ■

2.2 Théorèmes d'isomorphisme de Laplace sur $\mathbb{R}^n$ dans le cas non critique

Le premier théorème ci-dessous est une conséquence immédiate du théorème de Lax Milgram, où $p = 2$.

Théorème 2.1 *Si* $\frac{n}{p} \neq 1$ *et* $\frac{n}{p'} \neq 1$, *alors l'opérateur défini par*

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{\left[1-\frac{n}{p}\right]} \xrightarrow{\Delta} W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}_{\left[1-\frac{n}{p'}\right]}, \tag{2.1}$$

est un isomorphisme.

Preuve. L'application définie par (2.1) est clairement continue, linéaire et injective, puisque $\Delta u = 0$ implique que u est un polynôme de $\mathscr{P}_{\left[1-\frac{n}{p}\right]}$, il reste à montrer la surjectivité de cette application. Enfin, donner f dans $W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}_{\left[1-\frac{n}{p'}\right]}$ et nous construisons u dans $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, tel que

$$\Delta u = f,$$

il est évidemment que la représentation de u est $F * f$ où F est la solution fondamentale de l'opérateur Laplace, mais la difficulté est de donner un sens à ce produit de convolution, puisque aucune des deux distributions à un support compact, nous procédons en trois étapes :

1) Puisque $\dfrac{n}{p} \neq 1$, grâce à la proposition 2.1 , il existe $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$, tel que

$$div\,(v) = f$$
$$\text{et}$$
$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)}\,,$$

et où la constante C, indépendante de v. Maintenant, puisque $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, alors il existe une suite $v_m \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, tel que

$$v_m \longrightarrow v \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^n)$$

2) Posons

$$f_m = div\,(v_m)$$
$$\text{et}$$
$$\psi_m = F * f_m,$$

pour tout $i = 1, ..., n$ et $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} <\partial_i \psi_m, \phi> &= - < F * f_m, \partial_i \phi> = - < f_m, F * \partial_i \phi > \\ &= - < div\,(v_m)\,, \partial_i\,(F * \phi) > = < v_m, \nabla \partial_i\,(F * \phi) >, \end{aligned}$$

alors d'après l'inégalité suivante ■

Rappel : Inégalité de Calderon Zygmund :

Supposons que f de class C^2 à support compact, soit $\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, alors nous avons l'inégalité suivante

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_k} \right\|_p \leq A_p \|\Delta f\|_p\,, \text{ tel que} : 1 < p < \infty.$$

On a

$$\begin{aligned} &\langle \partial_i \psi_m, \phi \rangle = \langle v_m, \nabla \partial_i\,(F * \phi) \rangle \Longrightarrow |\langle \partial_i \psi_m, \phi \rangle| = |\langle v_m, \nabla \partial_i\,(F * \phi) \rangle| \\ &|\langle v_m, \nabla \partial_i\,(F * \phi) \rangle| \leq \|v_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \cdot \|\nabla \partial_i\,(F * \phi)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \\ &\qquad\qquad \leq C_1 \|v_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\Delta\,(F * \phi)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Car

$$\|\nabla \partial_i\,(F * \phi)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq \|\Delta\,(F * \phi)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

d'après l'inégalité de Caldéron-Zygmund. Alors on a

$$\begin{aligned}|\langle \partial_i \psi_m, \phi \rangle| &\leq C_1 \|v_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\Delta (F * \phi)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C_2 \|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)} \|\phi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

car

$$\Delta (F * \phi) = \Delta F * \phi = \delta * \phi = \phi.$$

Alors $\nabla \psi_m$est borné dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

3) Finalement puisque $\dfrac{n}{p} \neq 1$, nous appliquons la proposition 4.2 alors pour tout m, il existe une constante C_m, tel que

$$\begin{aligned}&\psi_m + C_m \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n), \\ &\|\psi_m + C_m\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_3 \|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Alors $\psi_m + C_m$ converge faiblement vers un élément de $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, tel que

$$\Delta u = f,$$

ainsi que l'application, est surjective

Lemme 2.2 *Pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $\dfrac{n}{p} \notin \{1, ..., m\}$, l'opérateur défini par*

$$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) / \mathscr{P}_{\left[m-\frac{n}{p}\right]} \xrightarrow{\Delta} W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n) / \mathscr{P}_{\left[m-2-\frac{n}{p}\right]}, \tag{2.2}$$

est un isomorphisme.

Preuve. On sait que l'application est bornée, linéaire, est injective.

D'après les résultats précédents, maintenant l'utilisation de (Calderon Zygmund), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}&\forall u \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n), \ \forall \lambda \in \mathbb{N}^n : |\lambda| = m-2, \ \forall i, j = 1, ..., n. \\ &\left\|\partial_i \partial_j D^\lambda u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\|\Delta D^\lambda u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\Delta u\|_{W_0^{m-2,p}/\mathscr{P}_{\left[m-2-\frac{n}{p}\right]}}\end{aligned}$$

On a

$$|u|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\lambda|=m-2} \left\|D^\lambda u\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

$|.|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)}$est une norme sur

$$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{\left[m-2-\frac{n}{p}\right]} \Longrightarrow |\Delta u|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\lambda|=m-2} \left\|\Delta D^{\lambda} u\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.3}$$

Donc par conséquent, puisque $\dfrac{n}{p} \notin \{1, ..., m\}$,

$[u]_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,|u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}$ (inégalité de Hardy).
$[u]_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum\limits_{|\lambda|=m} \left\|D^{\lambda}u\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|\Delta u\|_{W_0^{m-2,p}/\mathscr{P}_{\left[m-2-\frac{n}{p}\right]}}$, d'après l'inégalité 2.3 ,
$[u]_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|\Delta u\|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{\left[m-2-\frac{n}{p}\right]}}$,

preuve que l'image de l'opérateur de Laplace (2.2) est un sous espace fermé dans l'espace quotient $W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{\left[m-2-\frac{n}{p}\right]}$. On a $R(\Delta)$ est fermé implique que l'image de l'adjoint est fermé, l'adjoint est injectif Alors l'opérateur Δ est surjectif, d'où Δ est bijectif, continu d'après le théorème de Banach, implique que Δ est un isomorphisme de

$$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{\left[m-\frac{n}{p}\right]} \longrightarrow W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{\left[m-2-\frac{n}{p}\right]}.$$

D'où le résultat. ■

Le théorème suivant est une conséquence de la preuve du lemme.

Théorème 2.2 *Pour $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ et $\dfrac{n}{p} \notin \{1, ..., m\}$, l'opérateur défini par*

$$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}^{\Delta}_{\left[m-\frac{n}{p}\right]} \xrightarrow{\Delta} W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n), \tag{2-2}$$

est un isomorphisme.

Preuve. L'application définie par (2-2) est continue, linéaire et injective, il reste à montrer que l'application est surjective. Soit $f \in W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)$ d'après le lemme 2.2 , il existe $\dot{u} \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_{\left[m-\frac{n}{p}\right]}$, tel que

$$\Delta\dot{u} = f,$$

ceci signifie que pour tout $r \in \mathscr{P}_{\left[m-2-\frac{n}{p}\right]}$, il existe $s \in \mathscr{P}_{\left[m-\frac{n}{p}\right]}$, tel que

$$\Delta s = r. \qquad \text{(Voir Neri)}$$

Rappel :

Lemme(Neri) : Soit $l \leq m, q \in \mathscr{P}_l,\ q(x) \neq 0$, alors l'application linéaire

$$q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) : \mathscr{P}_m \longrightarrow \mathscr{P}_{m-l}$$

est surjective. ■

Le théorème donne une généralisation de la proposition 2.2

Corollaire 2.1 *Soit m un entier naturel et $\frac{n}{p} \notin \{1, ..., m\}$, $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, tel que*

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^n : \ |\lambda| = m,\ D^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Il existe un polynôme $q \in \mathscr{P}_{m-1}$, dépendant de u, tel que

$$u + q \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n),\ [u+q]_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,|u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve. Il suffit de montrer que $u + q \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ pour $m = 1$, voir la proposition 2.2

2) Raisonnement par récurrence, supposons que le corollaire est vérifié pour $|\lambda| = m - 1$, et montrons pour $m = |\lambda|$. Soit $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^n,\ |\lambda| = m,\ D^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}^n) \tag{2.4}$$

Nous pouvons écrire l'égalité (2.4) sous la forme suivante

$$\forall \mu \in \mathbb{N}^n,\ |\mu| = m - 1,\ D^\mu(\nabla u) \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

On supposons que la propriété est vraie pour $|\lambda| = m-1$ implique qu'il existe un polynôme $q \in \mathscr{P}_{m-2}$ dépend de ∇u, tel que

$$\nabla u + q \in W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Posons $l = \nabla u + q$, grâce au théorème 2.2 , il existe $z \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, tel que

$$\Delta z = divl.$$

On observe que

$$\begin{aligned} divl &= div\nabla u + divq \\ &= \Delta u + divq \Longrightarrow \Delta z = \Delta u + \Delta R, \end{aligned}$$

tel que R est un polynôme de degré $m-1$.

Maintenant,

$$\nabla.\left(\nabla u\right)=\nabla\left(\nabla\left(u+R\right)\right)\Longrightarrow\Delta\left(\nabla z\right)=\Delta\nabla\left(u+R\right),$$

d'ou les composantes de $\nabla\left(z-u-R\right)$ sont des fonctions harmoniques, puisque sont des distributions tempérées, dans la suite il existe un polynôme T, tel que

$$\nabla\left(z-u-R\right)=\nabla T,$$

considérons que $\nabla z\in W_0^{m-1,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$ et que ∇u est de la forme :

$$\nabla u=l-q$$

Avec $l\in W_0^{m-1,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$ et $q\in\mathscr{P}_{m-2}$ et que $m-2$ précise plus grand degré des polynômes dans $W_0^{m-1,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$. ■

Nous sommes maintenant dans la position de prouver les isomorphismes suivants : généralisation du théorème (2.1)

Théorème 2.3 *Soit* $m\geq 2,\ m\in\mathbb{N},\ \frac{n}{p}$ *et* $\frac{n}{p'}$ *n'appartient pas à* $\{1,...,m\}$, *alors l'opérateur polyharmonique défini par*

$$W_0^{m,p}\left(\mathbb{R}^n\right)/\mathscr{P}_{\left[m-\frac{n}{p}\right]}\xrightarrow{\Delta^m}W_0^{-m,p}\left(\mathbb{R}^n\right)\perp\mathscr{P}_{\left[m-\frac{n}{p'}\right]},$$

est un isomorphisme.

Preuve. Ce résultat est une conséquence du lemme 2.2 , nous examinons le cas où m paire et impaire.

Premier cas :

Si $m=2l$, application du 2.2 , nous voyons que Δ^l défini par

$$W_0^{2l,p}\left(\mathbb{R}^n\right)/\mathscr{P}_{\left[2l-\frac{n}{p}\right]}\xrightarrow{\Delta^l}L^p\left(\mathbb{R}^n\right)\tag{2.5}$$

est un isomorphisme, pour $\frac{n}{p}\notin\{1,...,2l\}$, l'utilisation de dualité et transposition on obtient

$$L^{p'}\left(\mathbb{R}^n\right)\longrightarrow W_0^{-2l,p'}\left(\mathbb{R}^n\right)\perp\mathscr{P}_{\left[2-\frac{n}{p'}\right]},$$

est un isomorphisme, en changeant p en p' on obtient :

$$L^p(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\Delta^l} W_0^{-2l,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}_{\left[2-\frac{n}{p}\right]} \tag{2.6}$$

est un isomorphisme, pour $\frac{n}{p} \notin \{1, ..., 2l\}$, avec la composition entre (2.5) et (2.6) On obtient le résultat.

Deuxième cas :

Si $m = 2l + 1$ ie : (m impaire), application de le lemme 2.2 , nous observons que

$$W_0^{2l+1,p}(\mathbb{R}^n) / \mathscr{P}_{\left[2l+1-\frac{n}{p}\right]} \xrightarrow{\Delta^l} W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) / \mathscr{P}_{\left[1-\frac{n}{p}\right]}, \tag{2.7}$$

est un isomorphisme pour $\frac{n}{p} \notin \{1, ..., 2l + 1\}$ avec dualité et transposition de l'opérateur on obtient que

$$W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}_{\left[1-\frac{n}{p'}\right]} \xrightarrow{\Delta^l} W_0^{-2l-1,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}_{\left[2l+1-\frac{n}{p}\right]},$$

en changeant p en p', on obtient

$$W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}_{\left[1-\frac{n}{p}\right]} \xrightarrow{\Delta^l} W_0^{-2l-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}_{\left[2l+1-\frac{n}{p'}\right]} \tag{2.8}$$

est un isomorphisme, pour $\frac{n}{p'} \notin \{1, ..., 2l + 1\}$. L'utilisation du théorème 2.1 , avec $\frac{n}{p} \neq 1, \frac{n}{p'} \neq 1$, on obtient

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}_{\left[1-\frac{n}{p}\right]} \xrightarrow{\Delta} W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}_{\left[2l+1-\frac{n}{p'}\right]} \tag{2.9}$$

est un isomorphisme, maintenant nous combinaisons (2.7) , (2.8) , (2.8) , d'ou le résultat pour m impaire. ■

GENERALISATION DU THEOREME 2.3

Théorème 2.4 *Soit $m \geq 2$ et l deux entiers, tel que $\frac{n}{p}$ et $\frac{n}{p'}$ n'appartient pas à $\{1, ..., m\}$, alors l'opérateur défini par*

$$W_l^{m+l,p}(\mathbb{R}^n) / \mathscr{P}_{\left[m-\frac{n}{p}\right]} \xrightarrow{\Delta^m} W_l^{-m+l,p} \perp \mathscr{P}_{\left[m-\frac{n}{p'}\right]},$$

est un isomorphisme

Preuve. Lorsque $l = 0$, voir théorème 2.3 supposons que le théorème est vrai pour $l = k$ et montrons pour $l = k+1$, il est clairement que Δ^m est continu et injectif, il reste à montrer que Δ^m est surjectif, Soit $f \in W_{k+1}^{-m+k+1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}_{\left[m-\frac{n}{p'}\right]}$ $\Longrightarrow f \in W_k^{-m+k,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}_{\left[m-\frac{n}{p'}\right]}$, On a Δ^m est surjectif pour $l = k+1$, d'après l'hypothèse, implique qu'il existe $u \in W_k^{m+k,p}(\mathbb{R}^n)$, tel que

$$\Delta^m u = f,$$

il reste à montrer que $u \in W_{k+1}^{m+k+1,p}(\mathbb{R}^n)$. On a la propriété suivante :

$$u \in W_{k+1}^{m+k+1,p}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \rho\partial_i u \in W_k^{k+m,p}(\mathbb{R}^n)$$

Nous considérons l'écriture suivante

$$\Delta^m(\rho\partial_i u) = \rho\partial_i f + \sum_{\substack{0 \leq |\lambda|, |\mu| \leq 2m \\ \lambda \neq 0, |\lambda+\mu| = 2m}} D^\lambda \rho D^\mu \partial_i u.$$

Application :

$$\begin{aligned}
W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n) &\subset W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\mathbb{R}^n) \subset, ..., \subset W_{\alpha-m}^{0,p}(\mathbb{R}^n) &\quad (2.10)\\
u &\in W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow D^\lambda u \in W_\alpha^{m-|\lambda|,p}(\mathbb{R}^n) &\quad (2.11)\\
\left|D^\lambda(\rho^\gamma)\right| &\leq C_{\lambda\gamma}\rho^{\gamma-|\lambda|} &\quad (2.12)\\
u &\in W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \rho^\gamma u \in W_{\alpha-\gamma}^{m,p}(\mathbb{R}^n) &\quad (2.13)
\end{aligned}$$

D'après (2.10), (2.11), (2.12), (2.13), on sait que

$$\Delta^m(\rho\partial_i u) \in W_k^{-m+k,p}(\mathbb{R}^n),$$

et puisque $k \geq 0 \Longrightarrow \Delta^m(\rho\partial_i u) \in W_{-1}^{-m-1,p}(\mathbb{R}^n)$, semblablement

$$\rho\partial_i u \in W_{k-1}^{m+k-1,p}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \rho\partial_i u \in W_{-1}^{m-1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Application de la formule de Green on obtient

$$\langle\Delta^m(\rho\partial_i u), \phi\rangle = \langle\rho\partial_i u, \Delta^m\phi\rangle.$$

En particulier si $\phi = q \in \mathscr{P}_{\left[m-\frac{n}{p'}\right]}$, $\langle \Delta^m (\rho\partial_i u), q\rangle = 0$, d'où

$$\Delta^m (\rho\partial_i u) \in W_k^{-m+k}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}_{\left[m-\frac{n}{p'}\right]}.$$

D'après l'hypothèse précédente pour $l = k$, implique l'existence d'un élément $v \in\ W_k^{m+k}(\mathbb{R}^n)$, tel que

$$\Delta^m v = \Delta^m (\rho\partial_i u),$$

ainsi $\rho\partial_i u - v$ est un polyharmonique de $W_{k-1}^{m+k-1,p}(\mathbb{R}^n)$, appartient à $\mathscr{P}_{\left[m-\frac{n}{p}\right]}$. D'où

$$\rho\partial_i u \in W_k^{m+k,p}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow u \in W_{k+1}^{m+k+1,p}(\mathbb{R}^n).$$

■

Proposition 2.3 *Soit l'entier naturel $l \geq 1$, tel que $\dfrac{n}{p} \notin \{1, ..., m\}$, alors l'opérateur défini par*

$$W_{-l}^{1,p}(\mathbb{R}^n) / \mathscr{P}^{\Delta}_{\left[l+1-\frac{n}{p}\right]} \xrightarrow{\Delta} W_{-l}^{-1,p}(\mathbb{R}^n),$$

est un isomorphisme.

Preuve. Nous commençons par le théorème suivant :

Théorème :

pour $m \in \mathbb{N},\ m \geq 2$, tel que $\dfrac{n}{p} \notin \{1, ..., m\}$,

$$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) / \mathscr{P}^{\Delta}_{\left[m-\frac{n}{p}\right]} \xrightarrow{\Delta} W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n),$$

est un isomorphisme.

Avec l'utilisation de dualité et transposition, on sait que l'opérateur défini par

$$W_0^{-m+2,p'}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\Delta} W_0^{-m,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}^{\Delta}_{\left[m-\frac{n}{p}\right]}$$

est un isomorphisme. Alors le raisonnement utilisé dans la preuve du théorème permet à montrer que

$$W_0^{-m+2,p'}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\Delta} W_0^{-m,p'} \perp \mathscr{P}^{\Delta}_{\left[m-\frac{n}{p}\right]},$$

est un isomorphisme. Avec un changement de variable, $l = m - 1$ on obtient

$$W_l^{1,p'}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\Delta} W_l^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}^{\Delta}_{\left[m-\frac{n}{p}\right]},$$

Avec dualité et transposition, on trouve que

$$W_{-l}^{1,p}(\mathbb{R}^n) / \mathscr{P}^{\Delta}_{\left[l+1-\frac{n}{p}\right]} \xrightarrow{\Delta} W_{-l}^{-1,p}(\mathbb{R}^n),$$

est un isomorphisme. ■

Théorème 2.5 *Soit $m \geq 0$ et $l \geq 1$ deux entiers et $\dfrac{n}{p} \notin \{1, ..., l+1\}$, alors l'opérateur défini par*

$$W_{-l+m}^{1+m,p}(\mathbb{R}^n) / \mathscr{P}^{\Delta}_{\left[l+1-\frac{n}{p}\right]} \xrightarrow{\Delta} W_{-l+m}^{-1+m}(\mathbb{R}^n),$$

est un isomorphisme.

Preuve. C'est une conséquence de la proposition 2-2 avec la régularité classique. ■

Le corollaire suivant est une conséquence de la proposition 2.3 par dualité et transposition.

Corollaire 2.2 *Soit $l \geq 1$, un entier et $\dfrac{n}{p'} \notin \{1, ..., l+1\}$, alors l'opérateur défini par*

$$W_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\Delta} W_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}^{\Delta}_{\left[l+1-\frac{n}{p'}\right]},$$

est un isomorphisme.

Proposition 2.4 *Soit $m \geq 0$ et $l \geq 1$, deux entiers et $\dfrac{n}{p'} \notin \{1, ..., l+1\}$, alors l'opérateur défini par*

$$W_{l+m}^{1+m,p}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\Delta} W_{l+m}^{-1+m,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}^{\Delta}_{\left[l+1-\frac{n}{p'}\right]},$$

est un isomorphisme.

Remarque 2.1 *Lorsque on change le signe de m par dualité on obtient*

$$W_{-l+m}^{1+m,p}(\mathbb{R}^n) / \mathscr{P}^{\Delta}_{\left[l+1-\frac{n}{p}\right]} \xrightarrow{\Delta} W_{-l+m}^{-1+m,p}(\mathbb{R}^n).$$

2.2.1 Résultats de régularité de Laplace dans le cas non critique

Théorème 2.6 *Soit $m \in \mathbb{Z}$, $p \in \left]1, \infty\right[$, alors*
i) Pour tout entier $l > 0$, tel que $\frac{n}{p} \notin \{1, ..., l+1\}$, les opérateurs suivants

$$\begin{aligned} \Delta &: W^{1+m,p}_{-l+m}(\mathbb{R}^n) / \mathscr{P}^{\Delta}_{\left[l+1-\frac{n}{p}\right]} \longrightarrow W^{-1+m,p}_{-l+m}(\mathbb{R}^n), \\ \Delta &: W^{1+m,p'}_{l+m}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow W^{-1+m,p'}_{l+m}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}^{\Delta}_{\left[l+1-\frac{n}{p}\right]}, \end{aligned}$$

sont des isomorphismes
ii) Si $\frac{n}{p} \neq 1$ et $\frac{n}{p'} \neq 1$, alors

$$\Delta : W^{1+m,p}_{m}(\mathbb{R}^n) / \mathscr{P}_{\left[1-\frac{n}{p}\right]} \longrightarrow W^{-1+m,p}_{m}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}_{\left[1-\frac{n}{p'}\right]},$$

est un isomorphisme.

2.3 Théorèmes d'isomorphisme de Laplace dans le cas critique

Nous commençons par le gradient et divergence . Pour $\frac{n}{p} = 1$, la proposition 2.1 est fausse car l'inégalité de Hardy n'est pas vérifier pour l'espace $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$, en particulier $\frac{n}{p} \notin \{1, ..., m\}$.

Lemme 2.3 *Pour tout entier $n \geq 2$, les opérateurs suivants*

$$\begin{gathered} W^{1,n}_{0}(\mathbb{R}^n) / \mathscr{P}_0 \xrightarrow{grad} L^n(\mathbb{R}^n) \perp H_{\frac{n}{n-1}} \\ \text{et} \\ L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n) / H_{\frac{n}{n-1}} \xrightarrow{div} W^{-1,\frac{n}{n-1}}_{0}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}_0, \end{gathered} \tag{2.14}$$

sont des isomorphismes.

Proposition 2.5 *Les opérateurs suivants*

$$\begin{gathered} W^{1,p}_{0}(\mathbb{R}^n) / \mathscr{P}_{\left[1-\frac{n}{p}\right]} \xrightarrow{grad} L^p(\mathbb{R}^n) \perp H_{p'} \\ \textit{et} \\ L^{p'}(\mathbb{R}^n) / H_{p'} \xrightarrow{div} W^{-1,p'}_{0}(\mathbb{R}^n) \perp \mathscr{P}_{\left[1-\frac{n}{p}\right]}, \end{gathered}$$

Sont des isomorphismes.

Remarque 2.2 *Cette proposition est une extension de la proposition 2.1*

Proposition 2.6 *Soit $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, tel que $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Alors*
i) Si $1 < p < n$, il existe une constante k dépendant de u, telle que $u + k \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. De plus il existe une constante $C > 0$, indépendante de u, telle que

$$\|u + k\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

ii) Si $n < p$, alors $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. de plus il existe une constante $C > 0$, indépendante de u, telle que

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{P}_0} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

2.3.1 L'équation de Laplace dans le cas $\mathbb{R}^2$ et $p = 2$

Le cas intermédiaire

Proposition 2.7 *Le problème suivant*

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in W_0^1(\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}, \text{ tel que} \\ \qquad \Delta u = f \text{ dans } \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

définit un isomorphisme de $W_0^1(\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}$ sur son dual $(W_0^1(\mathbb{R}^2)/\mathbb{R})^*$

Preuve. Grâce à une inégalité de Hardy généralisée, on montre que la forme bilinéaire au problème est coercive sur $W_0^1(\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}$ ■

Résultats de régularité de Laplace pour le cas intermédiaire

Proposition 2.8 *Soit $l \in \mathbb{N}$, alors le problème*

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in W_l^{1+l}(\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}, \text{ tel que} \\ \qquad \Delta u = f \text{ dans } \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

définit un isomorphisme de $W_l^{1+l}(\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}$ sur $\left(X_{-l}^{1-l}(\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}\right)^*$.

Preuve. raisonnement par induction. ■

Cas de contraintes moins restrictives que le cas intermédiaire

Nous nous intéressons dans ce paragraphe aux solutions de l'équation de Laplace ayant un comportement à l'infini moins bon que la solution variationnelle.

Théorème 2.7 *Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, alors l'opérateur de Laplace définit un isomorphisme de*

$$X^1_{-l}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}^\Delta_l \text{ sur } X^{-1}_{-l}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Preuve. Même démarche qu'en le cas non critique, mais nous aurons besoin du lemme suivant ■

Lemme 2.4 *Soit $l \in \mathbb{N}$, alors nous avons les inclusions*

$$\mathscr{P}_l \subset X^1_{-l}\left(\mathbb{R}^2\right) \text{ et } l \geq 2,\ \mathscr{P}_{l-1} \subset X^{-1}_{-l}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Preuve. Procédons par dualité

$$X^1_{-l}\left(\mathbb{R}^2\right) = \left(X_l^{-l-1+l}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)^* = \left\{\begin{array}{l} u \in W_0^{-l-1}\left(\mathbb{R}^2\right) /\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq |\alpha| \leq l, \\ x^\alpha u \in W_0^{-l-1+|\alpha|}\left(\mathbb{R}^2\right),\ u \in H^{-l-1+|\alpha|}\left(\mathbb{R}^2\right) \end{array}\right\}$$

et comme $\mathscr{P}_l$ est inclus dans $W_0^{l+1}\left(\mathbb{R}^2\right)$, $\mathscr{P}_{l-|\alpha|}$ dans $W_0^{l+1-|\alpha|}\left(\mathbb{R}^2\right)$, il en découle que les produits de dualité

$$\forall\beta,\gamma \in \mathbb{N}^2 : |\beta+\gamma| = l,\ |\beta| = |\gamma|,\ \left\langle u, x^{\beta+\gamma}\right\rangle = \left\langle x^\beta u, x^\gamma\right\rangle,$$

sont bien définis, ce qui montre que $\mathscr{P}_l$ est bien inclus dans $X^1_{-l}\left(\mathbb{R}^2\right)$. Pour la deuxième inclusion ie : $(l \geq 2)$ se montre de la même manière. ■

Examinons maintenant ce qui passe à la régularité.

La régularité dans le Cas de contraintes moins restrictives que le cas intermédiaire

Théorème 2.8 *Soient $m,\ l \in \mathbb{N},\ l \geq 1$, alors l'opérateur de Laplace définit un isomorphisme de*

$$X^{1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}^\Delta_l \text{ sur } X^{-1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Preuve. Remarquons tout d'abord que l'application est linéaire et continue, en vertu de la proposition 1.13 et le lemme 1.8 d'autre part, du fait de l'inclusion

$$X^{1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2\right) \hookrightarrow X^{1}_{-l}\left(\mathbb{R}^2\right),$$

le théorème 2.7 , nous assurons de l'injection de cette application, il nous reste donc à montrer sa surjectivité. Pour ce faire, nous allons distinguer deux cas, suivant que m inférieur ou supérieur à m. ■

Dans le premier cas nous passons par le lemme suivant

Lemme 2.5 *Soient $m,\ l \in \mathbb{N},\ l \geq 1,\ 1 \leq m \leq l$, alors l'opérateur de Laplace définit de*

$$X^{1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_l \textit{ sur } X^{-1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2\right), \textit{ lorsque } l=1,$$
$$\textit{et}$$
$$X^{1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_l \textit{ sur } X^{-1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_{l-2}, \textit{ lorsque } l\geq 2,$$

est un isomorphisme.

Preuve. a) On a les applications

$$X^{1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_l \overset{\Delta}{\longmapsto} X^{-1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2\right), \text{ pour } l=1,$$
$$X^{1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_l \overset{\Delta}{\longmapsto} X^{-1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_{l-2}, \text{ pour } l\geq 2,$$

sont définies, continues, injectives.

b) L'application :

$$W^{l+1+(l-m)}_{l-m}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_l \overset{\Delta^{l+1}}{\longrightarrow} \left(X^{1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_l\right)^*$$

et donc sont des isomorphismes, l'adjoint admet donc l'inverse.

$$\left(W^{2l+1-m}_{l-m}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_l\right)^* \overset{\Delta^{-l-1}}{\longrightarrow} X^{1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_l.$$

c) L'espace $W^{l+1+(l-m)}_{l-m}\left(\mathbb{R}^2\right)$, s'identifie à l'espace $X^{l+1+(l-m)}_{l-m}\left(\mathbb{R}^2\right)$, donc les applications

$$W^{2l+1-m}_{l-m}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_l \overset{\Delta^{l}}{\longrightarrow} X^{1-m}_{l-m}\left(\mathbb{R}^2\right), \text{ pour } l=1,$$
$$W^{2l+1-m}_{l-m}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_l \overset{\Delta^{l}}{\longrightarrow} \left(X^{-1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_{l-2}\right)^*,$$

pour $l \geq 2$, sont bien définies et continues, ainsi que leurs adjointes

$$X_{-l+m}^{-1+m}(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\Delta^l} \left(W_{l-m}^{2l+1-m}(\mathbb{R}^2)/\mathscr{P}_l\right)^*, \text{ pour } l = 1,$$
$$X_{-l+m}^{-1+m}(\mathbb{R}^2)/\mathscr{P}_{l-2} \xrightarrow{\Delta^l} \left(W_{l-m}^{2l+1-m}(\mathbb{R}^2)/\mathscr{P}_l\right)^*, \text{ pour } l \geq 2.$$

d) Composons, nous obtenons les applications continues

$$X_{-l+m}^{-1+m}(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\Delta^l} \left(W_{l-m}^{2l+1-m}(\mathbb{R}^2)/\mathscr{P}_l\right)^* \xrightarrow{\Delta^{-l-1}} X_{-l+m}^{1+m}(\mathbb{R}^2), \text{ pour } l = 1,$$
$$X_{-l+m}^{-1}(\mathbb{R}^2)/\mathscr{P}_{l-2} \xrightarrow{\Delta^l} \left(W_{l-m}^{2l+1-m}(\mathbb{R}^2)/\mathscr{P}_l\right)^* \xrightarrow{\Delta^{-l-1}} X_{-l+m}^{1+m}(\mathbb{R}^2), \text{ pour } l \geq 2.$$

D'où la démonstration. ■

Preuve. (du théorème) la suite

Le théorème se déduit dans le cas $m \leq l$, du lemme (2.5) , il nous reste pour finir, à montrer la surjectivité des applications de l'énoncé dans le cas $l > m$ Remarquons qu'alors

$$X_{-l+m}^{1+m}\left(\mathbb{R}^2\right) = X_{m-l}^{1+l+(m-l)}\left(\mathbb{R}^2\right) = W_{-l+m}^{1+m}\left(\mathbb{R}^2\right)$$

et procédons par récurrence.

a) Le théorème est vrai pour $m = l$, nous venons de le montrer.

b) Supposons que le théorème est vrai pour $m' = p,\ p+1, ..., m$, et soit $f \in X_{-l+m+1}^{-1+m+1}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow X_{-l+m}^{-1+m}(\mathbb{R}^2)$. Du fait de l'hypothèse de récurrence, il existe un $u \in X_{-l+m}^{1+m}(\mathbb{R}^2) \equiv W_{-l+m}^{1+m}(\mathbb{R}^2)$, tel que

$$\Delta u = f \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

Examinons

$$\Delta\left(x_i \partial_j u\right) = x_i \partial_j f + 2\partial_i \partial_j u,$$

alors

$$u \in X_{-l+m}^{1+m}\left(\mathbb{R}^2\right) \Rightarrow \partial_i \partial_j u \in X_{-l+m}^{-1+m}\left(\mathbb{R}^2\right), \text{ d'après la proposition } 1.13$$
$$f \in X_{-l+m+1}^{-1+m+1}\left(\mathbb{R}^2\right) \Longrightarrow x_i \partial_j f \in X_{-l+m}^{-1+m}\left(\mathbb{R}^2\right), \text{ d'après la proposition } 1.13 \text{ et } 1.14$$

D'où

$$\Delta\left(x_i \partial_j u\right) \in X_{-l+m}^{-1+m}\left(\mathbb{R}^2\right),$$

et donc en vertu de l'hypothèse de récurrence et du fait que

$$x_i \partial_j u \in X_{-l+m-1}^{-1+m+1}\left(\mathbb{R}^2\right),\ x_i \partial_j u \in X_{-l+m}^{1+m}\left(\mathbb{R}^2\right) \equiv W_{-l+m}^{1+m}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Comme $u \in W^{1+m}_{-l+m}(\mathbb{R}^2)$, il en résulte que

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^2 : |\lambda| = m+1,\ x_i \rho^{m-n} D^\lambda u \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Il reste donc à montrer que

$$D^\lambda u \in L^2_{loc}\left(\mathbb{R}^2\right),$$

cela se fait comme la partie de la démonstration du théorème 2.12 , ce qui achève la démonstration. ■

Corollaire 2.3 *Soient* $m,\ l \in \mathbb{N},\ l \geq 1,\ m \geq l$, *alors l'opérateur définit un isomorphisme de*

$$W^{1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}^\Delta_l \ \textit{sur}\ W^{-1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Preuve. Il s'agit en fait d'un cas particulier du théorème 2.8 , son intérêt réside dans le fait qu'il peut s'exprimer dans le cadre des espaces W,

sans recours aux espaces X. ■

Théorème 2.9 *Soient* $m \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{N},\ m < 0,\ l \geq 1$, *alors l'opérateur de Laplace définit de*

$$X^{1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}^\Delta_l \ \textit{sur}\ X^{-1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2\right)$$

est un isomorphisme.

Preuve. Elle identique à la démonstration du théorème 2.8 faite dans le cas $0 \leq m \leq l$, le point clé et que l'identification

$$W^{(l+1)+(l-m)}_{l-m}\left(\mathbb{R}^2\right) \equiv X^{(l+1)+(l-m)}_{l-m}\left(\mathbb{R}^2\right),$$

utilisé au cours du lemme 2.5 , reste valide pour le cas négatif. Passons maintenant à l'étude du cas où la solution variationnelle à un meilleur comportement à l'infini que le comportement standard ie : $\left(u \in W^1_0(\mathbb{R}^2)\right)$, nous allons voir, que comme le cas non critique, les données doivent non seulement avoir un meilleur comportement à l'infini que le comportement standard $\left(\Delta u \in W^{-1}_0\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$; mais doivent en outre satisfaire des relations d'orthogonalité à des polynômes harmoniques, tout ceci est l'objet de ce paragraphe. ■

Cas de contraintes fortes

Nous avons immédiatement

Théorème 2.10 *Soit $l \in \mathbb{N},\ l \geq 1$, alors l'application définie par*

$$X_l^1\left(\mathbb{R}^2\right) \longrightarrow \left(X_{-l}^1\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_l^{\Delta}\right)^*,$$

est un isomorphisme.

Preuve. Ce théorème s'obtient par dualité et transposition à partir du théorème 2.7 ■

La régularité dans le cas où les contraintes fortes

Examinons maintenant ce qui passe à la régularité.

Théorème 2.11 *Soient $m \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{N},\ l \geq 1$, alors l'application définie par*

$$X_{l+m}^{1+m}\left(\mathbb{R}^2\right) \xrightarrow{\Delta} \left(X_{-l-m}^{1-m}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_l^{\Delta}\right)^*$$

est un isomorphisme.

Preuve. Le théorème s'obtient par dualité et transposition à partir des théorèmes (2.8 et 2.9). ■

Corollaire 2.4 *Soit $m,\ l \in \mathbb{N}^*,\ m \geq l$, alors l'application définie par*

$$W_{l-m}^{1-m}\left(\mathbb{R}^2\right) \xrightarrow{\Delta} \left(W_{-l+m}^{1+m}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_l^{\Delta}\right)^*,$$

est un isomorphisme.

Preuve. Ce corollaire se déduit du corollaire 2.3 par dualité et transposition. ■

2.4 Quelques résultats sur l'équation polyharmonique

Proposition 2.9 *Soient $m \in \mathbb{N},\ m \geq 1,$ alors le problème*

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in W_o^m\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_{m-1}, \text{ tel que} \\ \Delta^m u = f \text{ dans } \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

définit un isomorphisme de $W_o^m\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_{m-1}$ sur son dual $\left(W_o^m\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_{m-1}\right)^*$, le problème admet une formulation variationnelle analogue au proposition 2.7 coercive et continue, d'après l'inégalité de Hardy.

Nous aurons aussi besoin d'un théorème de régularité analogue à la proposition 2.8 c'est là que vont s'introduire les espaces X, déjà étudier au chapitre précédent.

Théorème 2.12 *Soient $m,\ l \in \mathbb{N},\ m \geq 1, l \geq 1,$ alors le problème*

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in W_l^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_{m-1}, \text{ tel que} \\ \Delta^m u = f \text{ dans } \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{2.15}$$

définit un isomorphisme de $W_l^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_{m-1}$ sur $\left(X_{-l}^{m-l}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_{m-1}\right)^*$.

Preuve. Pour la démonstration nous aurons besoin du lemme suivant ■

Lemme 2.6 *Soient $u \in W_l^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right) \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{N}^2 : |\lambda| = 2m, D^\lambda u \in \left(X_{-l}^{m-l}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_{m-1}\right)^*$.*

Preuve. a) Le lemme précédent nous assure que le problème (2.15) définit une application continue de

$$W_l^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_{m-1} \text{ dans } \left(X_{-l}^{m-l}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_{m-1}\right)^*.$$

D'autre part, $u \in W_l^{m+l}\left(\mathbb{R}^2\right)$ et $\left\{\Delta^m u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2\right\} \Longrightarrow u \in \mathscr{P}_{m-1}$, cette application est bien injectif, il reste à montrer la surjectivité, pour ce faire, nous allons procéder par récurrence, supposons que $f \in \left(X_{-1}^{m-1}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_{m-1}\right)^*$, alors $f \in \left(W_0^m\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_{m-1}\right)^*$, d'après la définition des X et donc en vertu de la proposition 2.9 , il existe
$u \in W_0^m\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_{m-1}$ unique, tel que

$$\Delta^m u = f \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

Mais on a

$$\Delta^m (x_i \partial_j u) = x_i \partial_j \Delta^m u + \sum_{|\lambda|=2m} C_\lambda D^\lambda u$$

On vérifier tout d'abord que

$$\forall \phi \in \mathscr{P}_{m-1},\ \langle x_i \partial_j \Delta^m u, \phi \rangle = \left\langle D^\lambda u, \phi \right\rangle = 0.$$

On a

$i)$ $u \in W_0^m (\mathbb{R}^2)$ d'après l'hypothèse $\Longrightarrow D^\lambda u \in W_0^{-m} (\mathbb{R}^2)$, pour $|\lambda| = 2m$.

$ii)$ $\Delta^m u \in X_1^{-m+1} (\mathbb{R}^2) \Longrightarrow x_i \partial_j \Delta^m u \in W_0^{-m} (\mathbb{R}^2)$.

Alors

$$\begin{aligned} \langle x_i \partial_j \Delta^m u, \phi \rangle &= \langle \partial_j \Delta^m u, x_i \phi \rangle_{X_1^{-m} \times \mathscr{P}_m} \\ &= \langle \Delta^m u, \partial_j x_i \phi \rangle_{X_1^{-m+1} \times X_{-1}^{m-1}} \\ &= 0 \\ &\Longrightarrow \left\langle D^\lambda u, \phi \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

de sorte que, $\Delta^m (x_i \partial_j u) \in \left(W_0^m (\mathbb{R}^2) / \mathscr{P}_{m-1}\right)^*$, il existe nécessairement un w unique de $W_0^m (\mathbb{R}^2) / \mathscr{P}_{m-1}$, tel que

$$\Delta^m w = \Delta^m (x_i \partial_j u) \text{ dans } \mathbb{R}^2,$$

d'où puisque $u \in W_0^m (\mathbb{R}^2)$ et $x_i \partial_j u \in W_0^m (\mathbb{R}^2)$ et il en découle que

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^2 : |\lambda| = m+1,\ x_i D^\lambda u \in L^2 \left(\mathbb{R}^2\right).$$

Pour montrer que, $u \in W_1^{m+1} (\mathbb{R}^2)$, il ne nous reste plus qu'a vérifier que

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^2 : |\lambda| = m+1,\ D^\lambda u \in L^2_{loc} \left(\mathbb{R}^2\right),$$

or nous savons, puisque $\Delta^m u \in X_1^{-m+1} (\mathbb{R}^2)$, que $\Delta^m u \in H_{loc}^{-m+1} (\mathbb{R}^2)$, d'après la définition des X, pour tout $R > 0$ et tout $\phi \in \mathscr{D} (B_R)$, nous avons :

$$\Delta^m (\phi u) = \phi \Delta^m u + \sum_{\substack{|\lambda| = 2m \\ 0 \leq |\mu| \leq 2m-1}} C_{\lambda\mu} D^{\lambda-\mu} \phi D^\mu u.$$

Or

$i)$ $\Delta^m u \in H^{-m+1}_{loc}(\mathbb{R}^2) \Longrightarrow \phi\Delta^m u \in H^{-m+1}_{loc}(B_R)$

$ii)$ $u \in W^m_0(\mathbb{R}^2) \Longrightarrow \forall\mu \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq |\mu| \leq 2m-1,$

$D^\lambda u \in W^{m-\mu}_0(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow H^{m-|\mu|}_{loc}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow H^{-m+1}_{loc}(\mathbb{R}^2) \Longrightarrow D^{\lambda-\mu}\phi D^\mu u \in H^{-m+1}(B_R)$

$iii)$ $\phi \in \mathscr{D}(B_R) \Longrightarrow (\phi u)/_{\partial B_R} = \dfrac{\partial}{\partial n}(\phi u) = ... = \dfrac{\partial^{m-1}}{\partial n^{m-1}}(\phi u) = 0,$

et ainsi nous arrivons à

$$\begin{cases} \Delta^m \phi u \in H^{-m+1}(B_R) \\ (\phi u)/_{\partial B_R} = ... = \dfrac{\partial^{m-1}}{\partial n^{m-1}}(\phi u) = 0 \end{cases}.$$

Problème aux limites d'u ouvert borné les résultats classiques de régularité, nous disent alors que $\phi u \in H^{m+1}(B_R)$, puisque R et ϕ sont quelconques, $u \in H^{m+1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ et en définitive, nous avons montré que $u \in W^{m+1}_1(\mathbb{R}^2)$.

b) Deuxième partie de la récurrence, supposons maintenant que le théorème est vrai pour $l' = 1, ..., l$ et nous donnons $f \in \left(X^{m-l-1}_{-l-1}(\mathbb{R}^2)/\mathscr{P}_{m-1}\right)^*$ avec le même

raisonnement, on trouve le résultat ■

Chapitre 3

Résultats de Laplace dans un demi plan

3.1 Le problème de Dirichlet dans un demi-plan relatif au laplacien

3.1.1 Introduction

On se propose d'étudier dans un cadre fonctionnel, l'équation de Laplace

$$\Delta u = f,$$

dans un demi-plan, cette équation joue un rôle fondamental dans l'étude des équations aux dérivées partielles, dans le cas d'un domaine géométrique borné, on dispose dans la littérature d'un nombre considérable de résultas précis la concernant et cela pour divers types des conditions aux limites. Quand le domaine non borné, des contraintes supplémentaires sont nécessaires pour contrôler le comportement des solutions à l'infini. Nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \mathbb{R}_+^2 \\ u = g & \text{sur } \Sigma \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1.2 Le cas variationnel

Théorème 3.1 *Soit $f \in W_0^{-1}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ et $g \in W_0^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$, alors le problème (3.1) a une unique solution u dans $W_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)$, il existe une constante C indépendante de f et g, telle que*

$$\|u\|_{W_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)} \leq C\left\{\|f\|_{W_0^{-1}\left(\mathbb{R}_+^2\right)}+\|g\|_{W_0^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}\right\}.$$

En plus, si $f \in X_m^{m-1}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ et $g \in W_m^{m+\frac{1}{2}}(\Sigma)$, pour m entier supérieur ou égal à 1, alors

$$u \in W_m^{m+1}\left(\mathbb{R}_+^2\right) \text{ et } \|u\|_{W_m^{m+1}\left(\mathbb{R}_+^2\right)} \leq C\left\{\|f\|_{W_m^{m-1}\left(\mathbb{R}_+^2\right)}+\|g\|_{W_m^{m+\frac{1}{2}}(\Sigma)}\right\}$$

Existence et l'unicité :

Lemme 3.1 *Soit $u_0 \in W_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)$, tel que $u/_\Sigma = g$ un relèvement, alors $u \in W_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ est une solution du problème 3.1 si et seulement si $u_1 = u - u_0$ est une solution du problème suivant*

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u_1 \in \overset{0}{W}{}_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right), \text{ tel que} \\ \left(\Delta u_1, \Delta v\right)=\left\langle f-\Delta u_{0,} v\right\rangle \ \forall v \in \overset{0}{W}{}_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right).\end{array}\right.$$

Preuve. En utilisant l'inégalité de Hardy, on montre en suite que la semi norme $|v|_{W_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)} = \|\nabla v\|_{0,\mathbb{R}_+^2}$ est une norme sur $\overset{0}{W}{}_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)$, équivalente à la norme$\|.\|_{W_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)}$ D'après Lax Milgram, on en déduit qu'il existe une et une seule solution de la formulation variationnelle dans $W_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)$. Pour démontrer la régularité, en utilisant l'espace $X_l^{m+l}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ pour éviter l'apparition de poids logarithmique. Puis on procède par récurrence.

Régularité :

$$\left\{\begin{array}{c} f \in X_m^{m-1}\left(\mathbb{R}_+^2\right) \\ \text{et} \\ g \in W_m^{m+\frac{1}{2}}(\Sigma) \end{array}\right\} \Longrightarrow u \in W_m^{m+1}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$$

et

$$\|u\|_{W_m^{m+1}\left(\mathbb{R}_+^2\right)} \leq C\left\{\|f\|_{X_m^{m-1}\left(\mathbb{R}_+^2\right)}+\|g\|_{W_m^{m+\frac{1}{2}}(\Sigma)}\right\}$$

A' $m=1$, supposons que $f \in X_1^0\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ et $g \in W_1^{\frac{3}{2}}(\Sigma)$. D'après le théorème de traces il existe un relèvement

$$u_{0/\Sigma} = g.$$

Posons

$$u_1 = u - u_0.$$

On a

$$\left.\begin{array}{l} u \in W_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right) \\ u_0 \in W_1^2\left(\mathbb{R}_+^2\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow u_1 \in W_1^2\left(\mathbb{R}_+^2\right) \text{ et } \Delta u_1 \in W_1^0\left(\mathbb{R}_+^2\right).$$

En s'appuyant sur le principe de réflexion de Schwarz. On prolonge u_1 à tout l'espace $\mathbb{R}^2$,

$$\widetilde{u}_1\left(x', x_n\right) = \begin{cases} u_1\left(x', x_n\right) \text{ si } x_n > 0, \\ -u_1\left(x', -x_n\right) \text{ si } x_n < 0. \end{cases}$$

Ainsi, $\widetilde{u}_1 \in W_0^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ et $\Delta\widetilde{u}_1 \in W_1^0\left(\mathbb{R}^2\right)$. Les théorèmes de régularité dans $\mathbb{R}^2$ permettent de conclure que $\widetilde{u}_1 \in W_1^2\left(\mathbb{R}^2\right)$, d'ou u_1 et u appartient à $W_1^2\left(\mathbb{R}_+^2\right)$. Maintenant supposons que la propriété est vraie pour $0, 1, ..., m$. On suppose ensuite que $f \in X_{m+1}^m\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ et $g \in W_{m+1}^{m+\frac{3}{2}}\left(\mathbb{R}\right)$, Puisque

$$\begin{array}{l} X_{m+1}^m\left(\mathbb{R}_+^2\right) \equiv X_{m+1}^{-1+(1+m)}\left(\mathbb{R}_+^2\right) \hookrightarrow X_m^{-1+m}\left(\mathbb{R}_+^2\right), \\ W_{m+1}^{m+\frac{3}{2}}\left(\mathbb{R}_+^2\right) \hookrightarrow W_m^{m+\frac{1}{2}}\left(\mathbb{R}_+^2\right). \end{array}$$

On a

$$\left.\begin{array}{l} f \in X_{m+1}^m\left(\mathbb{R}_+^2\right) \\ g \in W_{m+1}^{m+\frac{3}{2}}\left(\Sigma\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow u \in W_m^{m+1}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$$

(hypothèse de récurrence).

Pour $i = 1, ..., n-1$, posons $v_i = \rho\partial_i u$, nous avons

$$\Delta v_i = \rho\partial_i f + \frac{2}{\rho} r\nabla\left(\partial_i u\right) + \left(\frac{2}{\rho} + \frac{1}{\rho^3}\right)\partial_i u,$$

d'ou $\Delta v_i \in X_m^{m-1}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ et $v_{i/\Sigma} \in W_m^{m+\frac{1}{2}}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$.

D'après l'hypothèse de récurrence implique que

$$\rho\partial_i u \in W_m^{m+1}\left(\mathbb{R}_+^2\right) \Longrightarrow \partial_i u \in W_{m+1}^{m+1}\left(\mathbb{R}_+^2\right) \ \forall i = 1, ..., n-1.$$

En plus nous avons :

$$\partial_n u \in W_m^m\left(\mathbb{R}_+^2\right) \text{ puisque } u \in W_m^{m+1}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$$

$$\partial_n^2 u \in W_{m+1}^m\left(\mathbb{R}_+^2\right) \text{ puisque } \partial_n^2 u = \Delta u - \sum_{i=1}^{n-1}\partial_i^2 u \in W_{m+1}^m\left(\mathbb{R}_+^2\right).$$

Et pour tout $i = 1, ..., n-1$.

$$\partial_i \partial_n u \in W^m_{m+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right) \text{ puisque } \partial_i \partial_n u = \partial_n \partial_i u \in W^m_{m+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$$

D'après les relations

$$\partial_i \partial_n u = \partial_n \partial_i u \text{ si } i \neq n \text{ et } \partial_n^2 u \in \ W^m_{m+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right),$$

on en déduit que

$$\partial_n u \in W^{m+1}_{m+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right).$$

D'ou $u \in W^{m+2}_{m+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$, finalement la propriété est vraie pour tout $m \geq 1$. ■

3.1.3 Cas de contraintes faibles

Dans ce deuxième cas les conditions à l'infini sur la solution moins restrictives que dans le cas précédent ie : le cas variationnel. Nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ dans } \mathbb{R}^2_+, \\ \quad u = g \text{ sur } \Sigma = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

Théorème 3.2 *Soit k un entier supérieur ou égal à 1, $f \in X^{-1}_{-k}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ et $g \in X^{\frac{1}{2}}_{-K}(\Sigma)$, alors le problème a une unique solution dans $X^1_{-k}\left(\mathbb{R}^2_+\right)/\mathcal{A}^\Delta_k$. En plus, si $f \in X^{m-1}_{m-k}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ et $g \in X^{m+\frac{1}{2}}_{m-k}(\Sigma)$ pour tout entier $m \geq 1$, alors $u \in X^{m+1}_{m-k}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathcal{A}^\Delta_k$ et il existe une constante $C(k,m)$, telle que*

$$\|u\|_{X^{m+1}_{m-k}\left(\mathbb{R}^2_+\right)/\mathcal{A}^\Delta_k} \leq C\left\{\|f\|_{X^{m-1}_{m-k}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} + \|g\|_{X^{m+1}_{m-k}(\Sigma)}\right\}$$

Preuve. Montrons tout d'abord l'existence d'au moins une solution du problème, on se ramène à un problème avec les données sur le bord homogène. On effectue ensuite une extension de f à tout l'espace $\mathbb{R}^2$, en utilisant encore le principe de réflexion de Schwarz. Nous considérons le problème (3.2) avec $f \in X^{-1}_{-k}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ et $g \in X^{\frac{1}{2}}_{-k}(\Sigma)$, avec l'utilisation du théorème de traces, nous pouvons supposé que $g = 0$.

$$\left\langle \widetilde{f}, v\right\rangle = \langle f, v_1\rangle \ \forall v \in X^1_k\left(\mathbb{R}^2\right),$$

c'est à dire c'est un prolongement par zéro (0)

$$\widetilde{f} = \begin{cases} f \in X_{-k}^{-1}\left(\mathbb{R}_+^2\right) \\ 0 \in X_{-k}^{-1}\left(\mathbb{R}_-^2\right) \end{cases}$$

Pour toute fonction $v \in X_k^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, nous posons

$$v_1\left(x_1, x_2\right) = v\left(x_1, x_2\right) - v\left(x_1, -x_2\right) \in \overset{0}{X}{}_k^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)$$

Les théorèmes de régularité dans $\mathbb{R}^2$ permettent de conclure qu' il existe une fonction $\widetilde{u} \in X_{-k}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, tel que

$$\Delta \widetilde{u} = \widetilde{f},$$

nous posons

$$u\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{2}\left[\widetilde{u}\left(x_1, x_2\right) - \widetilde{u}\left(x_1, -x_2\right)\right],$$

alors $u \in \overset{0}{X}{}_{-k}^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)$. De plus pour toute fonction $v \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$, nous avons

$$\begin{aligned} 2\left\langle \Delta u, v\right\rangle &= \int_{\mathbb{R}_+^2}\left[\widetilde{u}\left(x_1, x_2\right) - \widetilde{u}\left(x_1, -x_2\right)\right]\Delta v\left(x_1, x_2\right) dx, \\ &= \left\langle \Delta \widetilde{u}, v\right\rangle - \int_{\mathbb{R}_-^2} \widetilde{u}\left(x_1, x_2\right)\Delta v\left(x_1, -x_2\right) dx, \\ &= \left\langle \Delta \widetilde{u}, v - \overline{v}\right\rangle, \end{aligned}$$

où $\overline{v} \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}_-^2\right)$ définie par

$$\overline{v}\left(x_1, x_2\right) = v\left(x_1, -x_2\right), \forall x = \left(x_1, x_2\right) \in \mathbb{R}_-^2.$$

On note que $v = v_1$ et $\overline{v} = -v$

$$\left\langle \Delta \widetilde{u}, v - \overline{v}\right\rangle = \left\langle \overline{f}, v - \overline{v}\right\rangle = \left\langle \overline{f}, v_1 - \overline{v}_1\right\rangle = 2\left\langle f, v\right\rangle.$$

D'ou

$$\Delta u = f,$$

et u est une solution du problème avec $g = 0$.

L'unicité est une conséquence simple du lemme suivant : ■

Lemme 3.2 *Soit k un entier dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des solutions du problème suivant*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ \ dans\ \mathbb{R}^2_+ \\ u_{/\Sigma} = 0 \ \ sur\ \Sigma \end{cases} \tag{3.3}$$

n'est autre que $\mathcal{A}_k^{\Delta}$.

Preuve. Il est clair que tout élément u de $\mathcal{A}_k^{\Delta}$ est une solution du problème (3.3) .

Inversement :

Toute solution $u \in X^1_{-k}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ du problème (3.3) est prolongeable par le principe de réflexion de Schwarz à une fonction harmonique $\overline{u} \in X^1_{-k}\left(\mathbb{R}^2\right)$ ainsi, $\overline{u}$ appartient nécessairement à $\mathscr{P}_k^{\Delta}$ et $u \in \mathcal{A}_k^{\Delta}$. ■

Passons maintenant au cas où les données possédant plus de régularité en dérivées.

Théorème 3.3 *Soient $m,\ l \in \mathbb{N},\ l \geq 1,$ alors le problème suivant*

$$\begin{cases} Trouver\ u,\ tel\ que \\ \ \Delta u = f \in X^{-1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2_+\right), \\ u_{/\Sigma} = u_0 \in X^{\frac{1}{2}+m}_{-l+m}\left(\Sigma\right), \end{cases}$$

a une unique solution $u \in X^{1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2_+\right)/\mathcal{A}_l^{\Delta}$

Preuve. Du fait des inclusions

$$\begin{aligned} X^{1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2_+\right) &\hookrightarrow X^{1}_{-l}\left(\mathbb{R}^2_+\right). \\ X^{-1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2_+\right) &\hookrightarrow X^{-1}_{-l}\left(\mathbb{R}^2_+\right),\ X^{\frac{1}{2}+m}_{-l+m}\left(\Sigma\right) \hookrightarrow X^{\frac{1}{2}}_{-l}\left(\Sigma\right). \end{aligned}$$

Il résulte du théorème précédent, que le problème admet au plus une solution.

Il reste la surjectivité (la démonstration est semblable à la première) ie : raisonnement par récurrence (avec l'utilisation de prolongement par le principe de réflexion). ■

Corollaire 3.1 *Soient $m,\ l \in \mathbb{N},\ m \geq 1,$ alors l'application*

$$u \longrightarrow \left(\Delta u, u_{/\Gamma}\right)$$

est un isomorphisme de $X^{1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2_+\right) /\ \mathcal{A}_{l-1}^{\Delta}$ sur $X^{-1+m}_{-l+m}\left(\mathbb{R}^2_+\right) \times X^{\frac{1}{2}+m}_{-l+m}\left(\Sigma\right).$

Preuve. Cette application est bien définie, continue d'après le théorème précédent il est bijective, d'ou est un isomorphisme, d'après le théorème de Banach. ■

3.1.4 Cas de contraintes fortes

Passons maintenant à l'étude des cas où la solution variationnelle à un comportement meilleur que le comportement standard : celui de $W_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)$. Nous allons travailler par dualité et transposition à partir de certain des résultats du paragraphe précédent.

Théorème 3.4 *Soit k un entier, $k \geq 1$, $f \in X_k^{-1}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ et $g \in X_k^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$, alors le problème suivant*

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ dans } \mathbb{R}_+^2, \\ u_{/\Sigma} = g, \end{cases}$$

a une unique solution dans $X_k^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ si et seulement si

$$\forall p \in \mathcal{A}_k^{\Delta} \quad \langle f, p\rangle - \left\langle g, \frac{\partial p}{\partial x_2}\right\rangle_{\Sigma} = 0. \tag{3.4}$$

En plus, si $f \in X_{m+k}^{m-1}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ et $g \in X_{m+k}^{m+\frac{1}{2}}(\Sigma)$, où $m \geq 1$, est un entier, alors $u \in X_{m+k}^{m+1}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ et il existe une constante $C(k,m)$, telle que

$$\|u\|_{X_{m+k}^{m+1}\left(\mathbb{R}_+^2\right)} \leq C\left\{\|f\|_{X_{m+k}^{m-1}\left(\mathbb{R}_+^2\right)} + \|g\|_{X_{m+k}^{m+\frac{1}{2}}(\Sigma)}\right\}.$$

Preuve. Il résulte d'après la formule de Green que les données f et g doivent vérifier la relation de comptabilité (3.4) . ■

L'existence. Nous aurons besoin du

Lemme 3.3 *Soient $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $f \in X_k^{-1}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$, $u_0 \in X_k^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ et R_g un relèvement de g dans $X_k^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)$, alors la propriété*

$$\forall p \in \mathcal{A}_k^{\Delta},\ \langle f - \Delta R_g, p\rangle = 0,$$

est équivalente à la propriété

$$\forall p \in \mathcal{A}_k^{\Delta},\ \langle f, p\rangle + \left\langle g, \frac{\partial p}{\partial n}\right\rangle = 0.$$

Preuve. Tout d'abord, on sait que tout $g \in X_k^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ admet un relèvement R_g à support compact dans $X_k^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ et par conséquent $\Delta(R_g)$ appartient bien $X_k^{-1}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$.

D'autre part

$$\forall p \in \mathcal{A}_k^{\Delta},\ p\left(x_1,0\right)=0 \text{ et } \Delta p=0 \in X_{k+1}^0\left(\mathbb{R}_+^2\right),$$

et par conséquence(application de la formule de Green) on obtient :

$$\begin{aligned}\langle \Delta R_g, p\rangle &= -\textstyle\int_{\mathbb{R}_+^2} \nabla R_g \nabla p\, dx \\ &= -\left\langle R_g, \frac{\partial p}{\partial n}\right\rangle + \textstyle\int_{\mathbb{R}_+^2} R_g \Delta p\, dx \\ &= -\left\langle R_g, \frac{\partial p}{\partial n}\right\rangle \\ &= -\left\langle g, \frac{\partial p}{\partial n}\right\rangle_{\Sigma}.\end{aligned}$$

n : est la normale extérieur à $\mathbb{R}_+^2$. D'ou découle l'équivalence des deux propriétés.

L'existence et la régularité se démontrent alors de la même manière qu'au cas précédent, avec le souci supplémentaire d'avoir une extension de f. ■

3.1.5 Le cas non hilbertien

Dans ce paragraphe nous étudions l'équation de Laplace avec une condition aux limites de type Dirichlet dans le cas non hilbertien.

Théorème 3.5 *Soient $l \in \mathbb{Z}$ et $p \neq 2,\ 1<p<\infty$. Alors pour toutes fonctions $f \in W_l^{-1,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ et $g \in W_l^{\frac{1}{p'},p}(\Sigma)$, vérifient la condition de compatibilité suivante*

$$\forall \phi \in \mathcal{A}_{\left[l+1-\frac{2}{p'}\right]}^{\Delta},\ \langle f, \phi\rangle_{W_l^{-1,p} \times W_{-l}^{1,p'}} = \left\langle g, \frac{\partial \phi}{\partial n}\right\rangle_{\Sigma}. \tag{3.5}$$

On note par $\langle .,.\rangle_{\Sigma}$ le crochet de dualité entre $W_l^{\frac{1}{p'},p}(\Sigma)$ et $W_{-l}^{-\frac{1}{p'},p'}(\Sigma)$, le problème admet unique solution dans l'espace quotient $W_l^{1,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)/\mathcal{A}_{\left[-l+1-\frac{2}{p}\right]}^{\Delta}$. De plus il existe une constante C indépendante de $u,\ f$ et g, telle que

$$\inf_{q \in \mathcal{A}_{\left[-l+1-\frac{2}{p}\right]}^{\Delta}} \|u+q\|_{W_l^{1,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)} \leq C\left(\|f\|_{W_l^{-1,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)} + \|g\|_{W_l^{\frac{1}{p'},p}(\Sigma)}\right).$$

Preuve. Premier cas :

Si $l \geq 0$, $\mathcal{A}^{\Delta}_{\left[-l+1-\frac{2}{p}\right]} = 0$, montrons que l'application suivante est bijective.

$$\begin{array}{rccc}(-\Delta, \gamma_0): & W_l^{1,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right) & \longrightarrow & W_l^{-1,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right) \times W_l^{\frac{1}{p'},p}(\Sigma) \\ & u & \longrightarrow & (f,g)\end{array}$$

Cette application est injective il reste à montrer la surjectivité. En utilisant le théorème de traces, soit u_g un relèvement de g, tel que

$$u_g = g \text{ sur } \Sigma \text{ et } \|u_g\|_{W_l^{1,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)} \leq C\,\|g\|_{W_l^{\frac{1}{p'},p}(\Sigma)}.$$

Le problème est équivalent au problème homogène suivant

$$\begin{cases} -\Delta v = f + \Delta u_g \text{ dans } \mathbb{R}_+^2, \\ v = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$

Posons

$$h = f + \Delta u_g$$

pour tout $\phi \in W_{-l}^{1,p'}\left(\mathbb{R}^2\right)$, posons

$$\phi_1 = \phi(x_1, x_2) - \phi(x_1, -x_2) \text{ si } x_2 > 0.$$

Il est évident que $\phi_1 \in \overset{0}{W}{}_{-1}^{1,p'}\left(\mathbb{R}^2\right)$. Alors h peut être prolongeable à $\tilde{h}$ par

$$\phi \in W_{-l}^{1,p'}\left(\mathbb{R}^2\right),\ \tilde{h}(\phi) = \langle h, \phi_1\rangle_{W_l^{-1,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right) X W_{-l}^{1,p'}\left(\mathbb{R}_+^2\right)}$$

De plus

$$\left\|\tilde{h}\right\|_{W_l^{-1,p}(\mathbb{R}^2)} = \|h\|_{W_l^{-1,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)}.$$

Soit q un polynôme de $\mathscr{P}^{\Delta}_{\left[l+1-\frac{2}{p'}\right]}$, alors q peut s'écrire sous la forme

$$q = r + s \text{ où } r \in \mathcal{A}^{\Delta}_{\left[l+1-\frac{2}{p'}\right]} \text{ et } s \in \mathcal{N}^{\Delta}_{\left[l+1-\frac{2}{p'}\right]}.$$

Alors

$$\left\langle \tilde{h}, q \right\rangle = \langle f + \Delta u_g, r\rangle_{W_l^{-1,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right) X W_{-l}^{1,p'}\left(\mathbb{R}_+^2\right)}.$$

Application de la formule de Green on obtient

$$\langle \Delta u_g, r\rangle = -\int_{\mathbb{R}^2_+} \nabla u_g.\nabla r dx$$

$$= -\left\langle g, \frac{\partial r}{\partial x_2}\right\rangle_\Sigma$$

(on a $\Delta r = 0$ dans $\mathbb{R}^2_+$ et $r = 0$ sur Σ). Ainsi, $\tilde{h} \in W_l^{-1,p}(\mathbb{R}^2)$ et vérifiant la condition

$$\forall q \in \mathscr{P}^\Delta_{\left[l+1-\frac{2}{p'}\right]},\ \left\langle \tilde{h}, q\right\rangle = 0.$$

D'après les résultats précédents sur le Laplace sur tout l'espace

$$W_l^{1,p}\left(\mathbb{R}^2\right) \xrightarrow{\Delta} W_l^{-1,p}\left(\mathbb{R}^2\right) \perp \mathscr{P}^\Delta_{\left[l+1-\frac{2}{p'}\right]},\ \text{si } l \geq 1.$$

$$W_l^{1,p}\left(\mathbb{R}^2\right)/\mathscr{P}_{\left[1-\frac{2}{p}\right]} \xrightarrow{\Delta} W_l^{-1,p}\left(\mathbb{R}^2\right) \perp \mathscr{P}^\Delta_{\left[1-\frac{2}{p'}\right]},\ \text{si } l = 0.$$

D'ou il existe $\tilde{v} \in W_l^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, tel que

$$-\Delta\tilde{v} = \tilde{h},$$

maintenant nous remarquons que la solution $w = \frac{1}{2}\tilde{v}_1 = \frac{1}{2}\left(\tilde{v}(x_1, x_2) - \tilde{v}(x_1, -x_2)\right)$ $\in W_l^{1,p}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ et

$$-\Delta w = h \text{ dans } \mathbb{R}^2_+ \text{ et } w = 0 \text{ sur } \Sigma$$

ie : w est une solution du (3.1) .

Deuxième étape. même démarche que précédemment ■

3.1.6 Résultat de régularité

Théorème 3.6 *Soient m et l deux entiers relatifs, $p \neq 2,\ 1 < p < \infty$.*
Soit $g \in W_{l+m}^{\frac{1}{p'}+m,p}(\Sigma)$ et $f \in W_{l+m}^{-1+m,p}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$, vérifient la condition de compatibilité (3.5) alors le problème (3.1) a une unique solution dans $W_{l+m}^{1+m,p}\left(\mathbb{R}^2_+\right)/\mathcal{A}^\Delta_{\left[-l+1-\frac{2}{p}\right]}$. De plus

$$\inf_{q\in\mathcal{A}^\Delta_{\left[-l+1-\frac{2}{p}\right]}} \|u+q\|_{W_{l+m}^{1+m,p}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} \leq C\left(\|f\|_{W_{l+m}^{-1+m,p}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} + \|g\|_{W_{l+m}^{\frac{1}{p'}+m,p}(\Sigma)}\right).$$

Preuve. On procède par récurrence. ■

3.2 Le problème de Neumann dans un demi-plan relatif au Laplacien

Introduction

On s'intéresse dans ce paragraphe au problème de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f, \\ \gamma_1 u = g, \end{cases}$$

l'étude de ce problème dans les espaces $W_k^m\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ conduit de manière analogue au problème de Dirichlet à distinguer trois situations.

3.2.1 Le cas variationnel

On introduit maintenant pour tout réel k, l'espace

$$Y_k^1 = \left\{u \in X_k^1\left(\mathbb{R}_+^2\right), \text{ tel que } \Delta u \in X_{k+1}^0\left(\mathbb{R}_+^2\right)\right\}.$$

Lemme 3.4 *L'opérateur de dérivée normale sur le bord*

$$\gamma_1 : u \in Y_k^1 \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial n} \in X_k^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$$

est bien défini et continu. En outre on a la formule de Green

$$(\nabla u, \nabla v) + (\Delta u, v) = \left\langle -\frac{\partial u}{\partial n}, v\right\rangle_{X_k^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)\times X_{-k}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)} \quad \forall u \in X_k^1\left(\mathbb{R}_+^2\right), \forall v \in X_{-k}^1\left(\mathbb{R}_+^2\right).$$

$(.,.)$ désigne le produit scalaire de $L^2\left(\mathbb{R}_+^2\right)$,

Théorème 3.7 *Etant données* $(f,g) \in \left\{\left(X_{-1}^0\left(\mathbb{R}_+^2\right) \times X_0^{\frac{1}{2}}(\Sigma)\right)/\mathbb{R}\right\}^*$

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \\ \Delta u = f \text{ dans } \mathbb{R}_+^2, \ , \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \Sigma, \end{cases} \tag{3.6}$$

alors le problème a une unique solution dans $u \in X_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)/\mathbb{R} \equiv W_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)/\mathbb{R}$

Preuve. On a

$$f \in X_1^0\left(\mathbb{R}_+^2\right) \equiv X_1^{-1+1}\left(\mathbb{R}_+^2\right) = \left\{f \in W_0^{-1}\left(\mathbb{R}_+^2\right),\ \text{tel que } \forall \alpha \in \mathbb{N}^2,\ 0 \leq |\alpha| \leq 1,\right.$$
$$\left. x^\alpha f \in W_0^{-1+\alpha}\left(\mathbb{R}_+^2\right),\ f \in W_1^0\left(\mathbb{R}_+^2\right)\right\}$$

Ici il faut une condition de compatibilité pour que la solution existe

$$(f,g) \in \left\{\left(X_{-1}^0\left(\mathbb{R}_+^2\right) \times X_0^{\frac{1}{2}}(\Sigma)\right)/\mathbb{R}\right\}^*.$$

Supposons qu'une solution u existe, intégrons sur $\mathbb{R}_+^2$ et appliquons la formule de Green

$$-\int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n}.Cd\delta = \int_{\mathbb{R}_+^2} f.Cdx.$$

La condition au bord entraîne que

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} f.dx = -\int_\Sigma gd\delta.$$

Donc pour qu'une solution existe il faut ajouter une condition de compatibilité. De même il faut chercher u dans $W_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)/\mathbb{R}$ pour assurer l'unicité, alors le problème admet la formulation variationnelle suivante

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in X_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)/\mathbb{R} \equiv W_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)/\mathbb{R}, \text{ tel que} \\ \forall v \in W_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)/\mathbb{R}\ \ ; \\ \int_{\mathbb{R}_+^2} \nabla u \nabla v = -\langle f, v\rangle_{W_0^{-1}\left(\mathbb{R}_+^2\right)\times W_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)} + \langle g, v\rangle_{X_0^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)\times X_0^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)} \end{cases}$$

Puisque par hypothèse

$$f \in X_1^0\left(\mathbb{R}_+^2\right) = \left\{f \in W_0^{-1}\left(\mathbb{R}_+^2\right) \mid \rho f \in L^2\left(\mathbb{R}_+^2\right)\right\},$$

et $g \in X_0^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$, donc le second membre de problème 3.6 est bien défini sur $W_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)$, il est en outre supposé orthogonal aux constantes est la forme bilinéaire associée étant coercive sur $W_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)/\mathbb{R}$, alors le problème admet bien une solution unique. L'interprétation de g comme $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ est rendue possible par le fait que $\rho f \in L^2\left(\mathbb{R}_+^2\right)$. ■

3.2.2 Résultat de régularité

Théorème 3.8 *Soit $m \geq 1$, un entier, alors l'opérateur*

$$u \longrightarrow \left(\Delta u, \frac{\partial u}{\partial n}\right),$$

définit un isomorphisme de

$$W_m^{1+m}\left(\mathbb{R}_+^2\right)/\mathbb{R} \longrightarrow \left\{\left(X_{-m}^{1-m}\left(\mathbb{R}_+^2\right) \times X_m^{\frac{1}{2}-m}\left(\Sigma\right)\right)/\mathbb{R}\right\}^*$$

Remarque 3.1 *i) Pour $m=0$, le théorème est faux, puisque $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ ne peut pas être définit dans ce cas. Le théorème 3.7 montre que l'on a alors un isomorphisme de*

$$X_0^1\left(\Delta, \mathbb{R}_+^2\right) = \left\{v \in W_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right) \equiv X_0^1\left(\mathbb{R}_+^2\right) \mid \Delta u \in X_1^0\left(\mathbb{R}_+^2\right)\right\}$$

sur

$$\left\{\left(X_{-1}^0\left(\mathbb{R}_+^2\right) \times X_0^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{R}\right)\right)/\mathbb{R}\right\}^*$$

3.2.3 Le cas non hilbertien

Introduction

Nous étudions ici le problème non homogène de Neumann dans le demi plan. Nous donnons des résultats fondamentaux d'existence et de régularité en théorie L^p, avec $p \neq 2$ et $1 < p < \infty$, dans des espaces avec poids. Soit (3.7) le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \mathbb{R}_+^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = g \end{cases} \tag{3.7}$$

Théorème 3.9 *Soit l un entier et supposons que $p \neq 2,\ 1 < p < \infty$.*
Pour tout $f \in W_l^{0,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$, vérifiant la condition de compatibilité suivante

$$\forall \phi \in \mathcal{N}_{\left[l-\frac{2}{p'}\right]}^{\Delta},\ \langle f, \phi\rangle_{W_l^{0,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)\times W_{-l}^{0,p'}\left(\mathbb{R}_+^2\right)} = 0.$$

Le problème (3.7), avec $g=0$, a une unique solution $u \in W_l^{2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)/\mathcal{N}_{\left[2-l-\frac{2}{p}\right]}^{\Delta}$.

Preuve. L'unicité est évidente.

Le premier cas : $l \leq 1$. Nous posons $\widetilde{f} = f$ dans $\mathbb{R}_+^2$ et $\widetilde{f} = 0$ dans $\mathbb{R}_-^2$. Alors $\widetilde{f} \in W_l^{0,p}(\mathbb{R}^2)$ et pour tout $\phi \in \mathcal{N}_{\left[l-\frac{2}{p}\right]}^{\Delta} = \mathscr{P}_{\left[l-\frac{2}{p}\right]}^{\Delta}$, nous avons :

$$\left\langle \widetilde{f}, \phi\right\rangle_{W_l^{0,p}(\mathbb{R}^2)\times W_{-l}^{0,p'}(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{f}.\phi dx = \int_{\mathbb{R}_+^2} f.\phi dx = \langle f, \phi\rangle_{W_l^{0,p}(\mathbb{R}^2)\times W_{-l}^{0,p'}(\mathbb{R}^2)} = 0.$$

Donc, il existe une fonction $w \in W_l^{2,p}(\mathbb{R}^2)$, tel que

$$\Delta w = \widetilde{f} \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

La fonction u définie par

$$u(x', x_n) = \frac{1}{2}\left[w(x', x_2) + w(x', -x_2)\right],$$

avec $x_2 > 0$, appartient à $W_l^{2,p}(\mathbb{R}^2)$ et vérifiant $-\Delta u = f$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0$ sur Σ.

Le deuxième cas : $l \geq 2$. La fonction définie par

$$\widetilde{f}(x', x_2) = \begin{cases} f(x', x_2) & \text{si } x_2 > 0 \\ f(x', -x_2) & \text{si } x_2 < 0 \end{cases},$$

appartient à $W_l^{0,p}(\mathbb{R}^2)$ et vérifiant

$$\forall \phi \in \mathscr{P}^{\Delta}_{\left[l-\frac{2}{p'}\right]}, \ \left\langle \widetilde{f}, \phi \right\rangle_{W_l^{0,p}(\mathbb{R}^2)\times W_{-l}^{0,p'}(\mathbb{R}^2)} = 0.$$

Ainsi, il existe une fonction $w \in W_l^{2,p}(\mathbb{R}^2)$, tel que

$$-\Delta w = \widetilde{f} \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

Mais, notons que la fonction v définie par

$$v(x', x_2) = w(x', -x_2),$$

appartient à $W_l^{2,p}(\mathbb{R}^2)$ et vérifiant également l'équation. L'unicité des solutions $v = w$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0$ sur Σ. Maintenant, la fonction $u = w_{/\mathbb{R}^2_+}$ est la solution de notre problème. ■

Corollaire 3.2 *Soit l un entier et $g \in W_l^{1-\frac{1}{p},p}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ Supposons que $p \neq 2, \ 1 < p < \infty$.*

Si $f \in W_l^{0,p}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ et vérifiant la condition de compatibilité suivante

$$\forall \phi \in \mathcal{N}^{\Delta}_{\left[l-\frac{2}{p'}\right]}, \ \langle f, \phi \rangle_{W_l^{0,p}\left(\mathbb{R}^2_+\right)\times W_{-l}^{0,p'}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} = \langle g, \phi \rangle_{W_l^{1-\frac{1}{p},p}(\Sigma)\times W_{-l}^{-\frac{1}{p'},p'}(\Sigma)}$$

Alors le problème (3.7) a une unique solution $u \in W_l^{2,p}\left(\mathbb{R}^2_+\right)/\mathcal{N}^{\Delta}_{\left[2-l-\frac{2}{p}\right]}$.

Preuve. Conséquence du théorème 3.9 . ■

Théorème 3.10 *Soit l un entier, tel que $p \neq 2,\ 1 < p < \infty$ et $g \in W_{-l}^{-1-\frac{1}{p'},p'}(\Sigma)$ vérifiant la condition de compatibilité*

$$\forall \phi \in \mathcal{N}^{\Delta}_{\left[2-l-\frac{2}{p}\right]},\ \langle g, \phi\rangle_{W_{-l}^{-1-\frac{1}{p'},p'}(\Sigma) X W_{l}^{2-\frac{1}{p},p}(\Sigma)} = 0. \tag{3.8}$$

Alors le problème (3.7), avec $f = 0$, a une unique solution $v \in W_{-l}^{0,p'}\left(\mathbb{R}^2_+\right)/\mathcal{N}^{\Delta}_{\left[l-\frac{2}{p'}\right]}$.

Preuve. Première étape : nous définissons l'espace

$$T\left(\mathbb{R}^2_+\right) = \left\{ v \in W_{-l}^{0,p'}\left(\mathbb{R}^2_+\right)\ ;\ \Delta u \in W_{-l+2}^{0,p'}\left(\mathbb{R}^2_+\right)\right\}$$

,et nous pouvons que si $v \in T\left(\mathbb{R}^2_+\right)$, alors $\dfrac{\partial v}{\partial n} \in W_{-l}^{-1-\frac{1}{p'},p'}(\Sigma)$, alors nous remarquons que le problème (3.7) avec $f = 0$ est équivalent à trouver $v \in W_{-l}^{0,p'}\left(\mathbb{R}^2_+\right)/\mathcal{N}^{\Delta}_{\left[l-\frac{2}{p'}\right]}$, tel que pour tout $\phi \in W_{l}^{2,p}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ avec $\dfrac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0$ sur Σ,

$$\langle v, \Delta\phi\rangle_{W_{-l}^{0,p'}\left(\mathbb{R}^2_+\right) x W_{l}^{0,p}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} = -\langle g, \phi\rangle_{W_{-l}^{-1-\frac{1}{p'},p'}(\Sigma)\times W_{l}^{2-\frac{1}{p},p}(\Sigma)}.$$

Maintenant d'après le théorème 3.9 , pour tout $h \in W_{l}^{0,p}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$, tel que

$$\forall \phi \in \mathcal{N}^{\Delta}_{\left[l-\frac{2}{p'}\right]},\ \langle h, \phi\rangle_{W_{l}^{0,p}\left(\mathbb{R}^2_+\right)\times W_{-l}^{0,p'}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} = 0.$$

Il existe unique $\phi \in W_{l}^{2,p}\left(\mathbb{R}^2_+\right)/\mathcal{N}^{\Delta}_{\left[2-l-\frac{2}{p}\right]}$, tel que

$$-\Delta\phi = h \text{ dans } \mathbb{R}^2_+ \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0 \text{ sur } \Sigma,$$

avec l'estimation

$$\|\phi\|_{W_{l}^{2,p}\left(\mathbb{R}^2_+\right)/\mathcal{N}^{\Delta}_{\left[2-l-\frac{2}{p}\right]}} \leq C\,\|h\|_{W_{l}^{0,p}\left(\mathbb{R}^2_+\right)}$$

En utilisant (3.8) , nous avons

$$\forall \lambda \in \mathcal{N}^{\Delta}_{\left[2-l-\frac{2}{p}\right]}, |\langle g, \phi\rangle| = |\langle g, \phi + \lambda\rangle| \leq \|g\|_{W_{-l}^{-1-\frac{1}{p'},p'}(\Sigma)} \|h\|_{W_{l}^{o,p}\left(\mathbb{R}^2_+\right)}.$$

Grâce au théorème de représentation de Reisz, l'application $h \longrightarrow \langle g, \phi\rangle$ définie à unique

$$v \in \left[W_{l}^{0,p}\left(\mathbb{R}^2_+\right) \perp \mathcal{N}^{\Delta}_{\left[l-\frac{2}{p'}\right]}\right]' = W_{-l}^{0,p'}\left(\mathbb{R}^2_+\right)/\mathcal{N}^{\Delta}_{\left[l-\frac{2}{p'}\right]}$$

solution du problème (3.7) , avec $f = 0$. ■

Corollaire 3.3 *Soit l un entier, tel que* $p \neq 2, 1 < p < \infty$ *et* $g \in W_{-l}^{-\frac{1}{p'},p'}(\Sigma)$ *vérifiant la condition de compatibilité suivante*

$$\forall \phi \in \mathcal{N}^{\Delta}_{\left[1-l-\frac{2}{p}\right]},\ \langle g, \phi \rangle_{W_{-l}^{-\frac{1}{p'},p'}(\Sigma)\times W_{l}^{1-\frac{1}{p},p}(\Sigma)} = 0.$$

Alors le problème (3.7) , *avec* $f = 0$, *admet unique solution* $v \in W_{-l}^{1,p'}\left(\mathbb{R}^2_+\right)/\mathcal{N}^{\Delta}_{\left[1+l-\frac{2}{p'}\right]}$.

Théorème 3.11 *Soit l un entier, tel que* $p \neq 2, 1 < p < \infty$.
Pour tout $f \in W_{l}^{0,p}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ *et* $g \in W_{l-1}^{-\frac{1}{p},p}(\Sigma)$ *vérifient la condition de compatibilité suivante*

$$\forall \phi \in \mathcal{N}^{\Delta}_{\left[l-\frac{2}{p'}\right]},\ \langle f, \phi \rangle_{W_{l}^{0,p}\left(\mathbb{R}^2_+\right)\times W_{-l}^{0,p'}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} = \langle g, \phi \rangle_{W_{l-1}^{-\frac{1}{p},p}(\Sigma)\times W_{-l+1}^{1-\frac{1}{p'},p'}(\Sigma)}.$$

Le problème (3.7) *admet unique solution* $u \in W_{l-1}^{1,p}\left(\mathbb{R}^2_+\right)/\mathcal{N}^{\Delta}_{\left[2-l-\frac{2}{p}\right]}$.

Chapitre 4

Problème de Dirichlet pour le bilaplacien dans un demi plan

4.1 Le cas hilbertien intermédiaire

Dans cette partie, on s'intéresse à la résolution avec conditions aux limites de type Dirichlet. Etant données $f \in W_0^{-2,2}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$, $g_0 \in W_0^{2-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ et $g_1 \in W_0^{1-\frac{1}{2}}(\Sigma)$.

Trouver $u \in W_0^{2,2}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ solution de

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \text{ dans } \mathbb{R}_+^2, \\ u = g_0 \text{ sur } \Sigma, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g_1 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \tag{4.1}$$

A l'aide d'un relèvement de g_0 et g_1, on ramène le problème de (4.1) au problème homogène suivant

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \text{ dans } \mathbb{R}_+^2 \\ u = 0 \quad \text{sur } \Sigma \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Sigma \end{cases} \tag{4.2}$$

Une formulation variationnelle équivalente de ce problème est : Trouver $u \in \overset{0}{W}{}_0^{2,2}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$

solution de

$$\forall v \in \overset{0}{W}{}_0^{2,2}\left(\mathbb{R}_+^2\right), \int_{\Omega} \Delta u.\Delta v dx = \langle f, v\rangle_{W_0^{-2,2}\left(\mathbb{R}_+^2\right)\times \overset{0}{W}{}_0^{2,2}\left(\mathbb{R}_+^2\right)}$$

le crochet désigne le crochet de dualité entre $W_0^{-2,2}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ et $\overset{0}{W}{}_0^{2,2}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$. Or on a le lemme suivant :

Lemme 4.1 *Pour tout $v \in \overset{0}{W}{}_0^{2,2}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ on a*

$$|v|_{\overset{0}{W}{}_0^{2,2}\left(\mathbb{R}_+^2\right)} = \|\Delta v\|_{L^2\left(\mathbb{R}_+^2\right)}.$$

Grâce à ce lemme, le théorème de Lax Milgram et le lemme 1.12 montrent que le problème (4.2) admet unique solution.

Preuve. En effet

$$\forall v \in \overset{0}{W}{}_0^{2,2}\left(\mathbb{R}_+^2\right), \ |v|^2_{\overset{0}{W}{}_0^{2,2}\left(\mathbb{R}_+^2\right)} = \sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\right\|^2_{L^2\left(\mathbb{R}_+^2\right)} + \sum_{i\neq j}^{2}\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right\|^2_{L^2\left(\mathbb{R}_+^2\right)}.$$

Or pour tout $v \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ et $i, j \in \{1,2\}$

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}.\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = -\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\partial v}{\partial x_i}.\frac{\partial^3 v}{\partial x_i \partial x_j^2} = \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}.\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}.$$

Donc pour tout $v \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ on a

$$|v|^2_{W_0^{2,2}} = \|\Delta v\|^2_{L^2\left(\mathbb{R}_+^2\right)},$$

par densité cette égalité est vraie sur $\overset{0}{W}{}_0^{2,2}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$, cette égalité est vraie sur $\overset{0}{W}{}_0^{2,2}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$. ■

4.2 Le cas non hilbertien intermédiaire

Dans cette partie, on s'intéresse à la résolution avec condition aux limites $f \in W_0^{-2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$, $g_0 \in W_0^{2-\frac{1}{p}}(\Sigma)$ et $g_1 \in W_0^{1-\frac{1}{p}}(\Sigma)$.

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \text{ dans } \mathbb{R}_+^2, \\ u = g_0 \text{ sur } \Sigma, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g_1 \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$

Donnons maintenant des théorèmes d'isomorphisme (démontrés dans les chapitres précédents) que l'on utilisera dans la suite.

Théorème 4.1 *Pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel $p > 1$, l'opérateur*

$$\Delta^2 : W_0^{2,p}\left(\mathbb{R}^n\right)/\mathscr{P}_{\left[2-\frac{n}{p}\right]} \longrightarrow W_0^{-2,p}\left(\mathbb{R}^n\right) \perp \mathscr{P}_{\left[2-\frac{n}{p'}\right]}$$

est un isomorphisme.

Théorème 4.2 *Pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel $p > 1$, tels que $\dfrac{n}{p} \notin \{1,2\}$ et $\dfrac{n}{p'} \notin \{1,2\}$, les opérateurs biharmoniques suivants :*

$$\Delta^2 : W_1^{3,p}\left(\mathbb{R}^n\right)/\mathscr{P}_{\left[2-\frac{n}{p}\right]} \longrightarrow W_1^{-1,p}\left(\mathbb{R}^n\right) \perp \mathscr{P}_{\left[2-\frac{n}{p'}\right]}$$

et

$$\Delta^2 : W_2^{4,p}\left(\mathbb{R}^n\right)/\mathscr{P}_{\left[2-\frac{n}{p}\right]} \longrightarrow W_2^{0,p}\left(\mathbb{R}^n\right) \perp \mathscr{P}_{\left[2-\frac{n}{p'}\right]}$$

sont des isomorphismes.

4.3 Existence et unicité dans les espaces de Sobolev avec poids $W_l^{2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$

Nous commençons par établir l'existence de solutions lorsque $l = 0$. Puis, nous généralisons la méthode au cas $l < 0$ et on obtient le cas $l > 0$ par dualité.

Caractérisation des noyaux : On se propose maintenant de caractériser le noyau $\mathscr{D}_o^p\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ de l'opérateur bilaplacien avec des conditions de Dirichlet.

$$\mathscr{D}_o^p\left(\mathbb{R}_+^2\right) = \left\{ z \in W_0^{2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right),\ \Delta^2 z = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^2,\ z = \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Sigma \right\}$$

Proposition 4.1 *Soit $p \in \left]1,\infty\right[$, $f \in W_0^{-2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$, $g_0 \in W_0^{2-\frac{1}{p}}(\Sigma)$ et $g_1 \in W_0^{1-\frac{1}{p}}(\Sigma)$. Trouver $u \in W_0^{2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ solution de*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \text{ dans } \mathbb{R}_+^2 \\ u = g_0 \text{ sur } \Sigma, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g_1 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \tag{4.3}$$

Alors le problème 4.3 a une unique solution $u \in W_0^{2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)/\mathscr{D}_o^p\left(\mathbb{R}_+^2\right)$.

Remarque 4.1 *Si* $p \leq 2,\ \mathscr{D}_o^p\left(\mathbb{R}_+^2\right) = 0$.

Nous pouvons maintenant résoudre le problème pour $p \geq 2$.

Théorème 4.3 *Soit* $p \geq 2,\ f \in W_0^{-2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right),\ g_0 \in W^{2-\frac{1}{p}}(\Sigma)$ *et* $g_1 \in W_0^{1-\frac{1}{p}}(\Sigma)$, *alors le problème a une unique solution dans* $W_0^{2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)/\mathscr{D}_0^p\left(\mathbb{R}_+^2\right)$.

Preuve. On a déjà traité le cas hilbertien $p = 2$

On vient de montrer notamment que pour tout réel $p \geq 2$, l'opérateur bilaplacien

$$\Delta^2 : \overset{0}{W}{}_0^{2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)/\mathscr{D}_0^p\left(\mathbb{R}_+^2\right) \longrightarrow W_0^{-2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right).$$

Cette application est injective, il nous reste à étudier sa surjectivité. On a pour tout ϕ dans $\overset{0}{W}{}_0^{2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$, $\nabla\phi$ appartient à $\left(\overset{0}{W}{}_0^{1,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)\right)^2$ et grâce au résultats précédents il existe une constante C, telle que

$$\forall \phi \in \overset{0}{W}{}_0^{2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right),\ \|\phi\|_{W_0^{2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)} \leq C\,|\phi|_{W_0^{2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)}.$$

Or

$$|\phi|_{W_0^{2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)} \leq \|\nabla\phi\|_{W_0^{1,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)}$$

On en déduit donc que

$$\forall \phi \in \overset{0}{W}{}_0^{2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right),\ \|\phi\|_{W_o^{2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)} \leq \|\nabla\phi\|_{W_0^{1,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)}$$

On vient donc de montrer que l'application linéaire, continue suivante

$$\nabla : \overset{0}{W}{}_0^{2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right) \longrightarrow \overset{0}{W}{}_0^{1,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right).$$

est d'image fermée, on a donc $\operatorname{Im}\nabla = (Ker\ div)^{\perp}$ et il $\exists \xi \in \left(W_0^{-1,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)\right)^2$, tel que

$$f = div\xi.$$

Les théorèmes des isomorphismes sur le Laplace montre l'existence de $\Psi \in \left(W_0^{1,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)\right)^2$, vérifiant

$$\Delta\Psi = \xi.$$

En posant

$$F = div\Psi,$$

où

$$f_g = \Delta F,$$

avec $F \in L^p\left(\mathbb{R}_+^2\right)$.

Soit $\widetilde{F}$ le prolongement de F par 0 dans $\mathbb{R}_-^2$ et $\widetilde{f_g} = \Delta\widetilde{F}$, alors $\widetilde{f_g}$ appartient à $W_0^{-2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right) \perp \mathscr{P}_{\left[2-\frac{2}{p'}\right]}$. Vérifiant

$$\Delta^2 w = f_g \text{ dans } \mathbb{R}^2,$$

d'où l'existence. Alors l'application est une bijection, cette application étant continue, on en déduit, via le théorème d'isomorphisme de Banach que l'application est une isomorphisme. Par ailleurs on a

$$\forall v \in \overset{0}{W}{}_0^{2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right),\ \forall \phi \in W_0^{2,p'}\left(\mathbb{R}_+^2\right),\ \left\langle \Delta^2 v, \phi\right\rangle = \left\langle v, \Delta^2\phi\right\rangle$$

Par conséquent, par dualité en changeant p' en p, on obtient que pour tout réel $1 < p < 2$, l'opérateur bilaplacien :

$$\Delta^2 : \overset{0}{W}{}_0^{2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right) \longrightarrow W_0^{-2,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right) \perp \mathscr{D}_0^{p'}\left(\mathbb{R}_+^2\right) \tag{4.4}$$

■

Remarque 4.2 *Dans l'application (4.4), notons qu'il n'y a pas de condition d'orthogonalité dans le second membre car on a* $p > 2 \Rightarrow p' < 2 \Rightarrow \mathscr{D}_0^{p'}\left(\mathbb{R}_+^2\right) = 0$.

4.4 Existence et unicité pour le bilaplacien dans $W_{l+1}^{3,p}\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ avec $p \neq 2$

L'objectif de cette section est établir des résultats d'existence, d'unicité et de régularité du problème bilaplacien dans les espaces de Sobolev avec poids. Le problème trouver la solution u de

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \text{ dans } \mathbb{R}_+^2 \\ u = g \text{ sur } \Sigma, \\ \partial_2 u = h \text{ sur } \Sigma, \end{cases} \tag{4.5}$$

avec g et h sont des fonctions données sur la frontière.

Remarque 4.3 *Toute fois avant de prouver l'existence dans les espaces de Sobolev avec poids, nous caractérisons les noyaux.*
- Nous utilisons l'espace $W^{3,p}_{-l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ pour l'utilisation des résultats de Laplace.

Nous sommes alors en mesure de formuler précisément notre problème : comment choisir g et h pour que le problème (4.5) admet une solution dans l'espace de Sobolev avec poids ?

La solution est-elle unique dans cet espace ?

La réponse est donnée par le théorème suivant:

Théorème 4.4 *Soit l un entier relatif, tel que $p \neq 2$ et $1 < p < \infty$, alors pour toutes fonctions f dans $W^{-1,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$, $g \in W^{3-\frac{1}{p},p}_{l+1}(\Sigma)$ et $h \in W^{2-\frac{1}{p},p}_{l+1}(\Sigma)$, le problème admet une solution dans $W^{3,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ si et seulement si*

$$\langle f, u_0\rangle_{W^{-1,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)\times W^{1,p'}_{-l-1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} + \langle h, \Delta u_0\rangle_{W^{2-\frac{1}{p},p}_{l+1}(\Sigma)\times W^{-2+\frac{1}{p},p'}_{-l-1}(\Sigma)} - \langle g, \Delta\partial_2 u_0\rangle_{W^{3-\frac{1}{p},p}_{l+1}(\Sigma)\times W^{-3+\frac{1}{p},p'}_{-l-1}(\Sigma)} = 0,$$
$$\forall u_0 \in \mathcal{B}^{+,p'}_{2,l}.$$

Quand la solution existe, elle est unique dans $W^{3,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)/\mathcal{B}^{+,p}_{2,-l}$ et dépend continûment des données. En outre si $f \in W^{m-1,p}_{l+1+m}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$, $g \in W^{m+3-\frac{1}{p},p}_{l+1+m}(\Sigma)$, $h \in W^{m+2-\frac{1}{p},p}_{l+1+m}(\Sigma)$, avec $m \geq 1$, alors $u \in W^{m+3,p}_{l+1+m}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$.

Nous démontrons dans cette section le théorème. Nous étudions en premier lieu l'unicité des éventuelles solutions dans un espace avec poids donné.

Un résultat d'unicité des solutions

Nous introduisons l'espace défini par

$$\mathcal{B}^{+,p}_{2,l} = \left\{u \in W^{3,p}_{-l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right),\ \text{tel que } \Delta^2 u = 0,\ u = 0 \text{ sur } \Sigma,\ \partial_2 u = 0 \text{ sur } \Sigma\right\}.$$

Cet espace caractérise le noyau de l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{T}: & W^{3,p}_{-l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right) & \longrightarrow & W^{-1,p}_{-l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right) \times W^{3-\frac{1}{p},p}_{-l+1}(\Sigma) \times W^{2-\frac{1}{p},p}_{-l+1}(\Sigma). \\ & u & \longmapsto & (\Delta^2 u, u, \partial_2 u) \end{array}$$

Le noyau est décrit explicitement dans la proposition suivante :

Proposition 4.2 *Soit $l \in \mathbb{Z}$, $p \neq 2$ et $1 < p < \infty$, on note par $\mathcal{B}^{+,p}_{2,l}$ les solutions dans $W^{3,p}_{-l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ de*

$$\Delta^2 u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2_+,\ u = \partial_2 u = 0 \text{ sur } \Sigma. \tag{4.6}$$

Alors $\mathcal{B}^{+,p}_{2,l}$ est l'espace des polynômes de la forme

$$u = \theta x_2 + \Pi p + x_2 \partial_2 \phi - \phi,$$

où $\theta \in \mathcal{A}^{\Delta}_{\left[l+1-\frac{2}{p}\right]}$, $p \in \mathcal{A}^{\Delta}_{\left[l-\frac{2}{p}\right]}$ et $\phi \in \mathcal{A}^{\Delta}_{\left[l+2-\frac{2}{p}\right]}$ et Π est un opérateur défini par

$$\begin{array}{rccl} \Pi : & \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}^{\Delta}_k & \longrightarrow & \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{P}_k \\ & p & \longmapsto & \Pi p = \dfrac{1}{2}\left(x_2 \int_0^{x_2} p\left(x_1, t\right) dt - \int_0^{x_2} \int_0^t p\left(x_1, u\right) du dt\right). \end{array}$$

Possède la propriété suivante
$\Delta \Pi p = 0$ *dans* $\mathbb{R}^2_+$, $\partial_2 \Pi p = \dfrac{1}{2} x_2 p$ *dans* $\mathbb{R}^2_+$ *et* $\Pi p = \partial_2 \Pi p = 0$ *sur* $\Sigma, \forall p \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}^{\Delta}_k$.

Remarque 4.4 *Dans le cas où $\dfrac{2}{p} \notin \{1, ..., k+2\}$*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\Delta}_{\left[l+1-\frac{2}{p}\right]} &= \mathcal{A}^{\Delta}_{-\left[-l+\frac{2}{p}\right]}, \\ \mathcal{A}^{\Delta}_{\left[l-\frac{2}{p}\right]} &= \mathcal{A}^{\Delta}_{-\left[-l+\frac{2}{p}\right]-1}, \\ \mathcal{A}^{\Delta}_{\left[l+2-\frac{2}{p}\right]} &= \mathcal{A}^{\Delta}_{-\left[-l+\frac{2}{p}\right]+1}. \end{aligned}$$

Dans ce cas on a $p \neq 2$, alors le noyau est nul si $l < \dfrac{2}{p}$, ie : $\mathcal{B}^{+,p}_{2,l} = \{0\}$.

Preuve. (**de la proposition** 4.2)

nous aurons besoin dans cette démonstration à l'espace nul de l'opérateur de Stokes défini par

$$\mathcal{S}^{+,p}_{2,l} = \left\{ \begin{array}{c} (u, \pi) \in W^{1,p}_{-l}\left(\mathbb{R}^2_+\right) \times W^{0,p}_{-l}\left(\mathbb{R}^2_+\right),\ -\sigma \Delta u + \nabla \pi = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2_+, \\ div\ u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2_+,\ u = 0 \text{ sur } \Sigma \end{array} \right\}, \tag{4.7}$$

le noyau est décrit explicitement :

$\mathcal{S}^{+,p}_{2,l}$ est l'espaces polynomial de la forme

$$u = (div\ \phi')\, x + x_2 \nabla \phi_2 - \phi_2 e_2 - \phi' - x \nabla \phi',$$

où $\phi = \phi' + \phi_2 e_2$ appartient à$\left(\mathcal{A}^{\Delta}_{\left[-l+\frac{2}{p}\right]}\right)^2$.

Passons maintenant à la démonstration, Soit $u \in W^{3,p}_{-l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ est une solution de l'équation (4.6)

Premier cas. Si $l \leq 0$ on a $\mathcal{B}^{+,p}_{2,l} = \{0\}$ d'après la remarque précédente.

Deuxième cas. Maintenant supposons que si $l \geq 1$ et soit $q \in W^{2,p}_{-l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ est une solution du problème de Neumann suivant

$$\begin{cases} \Delta q = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2_+ \\ \partial_2 q = \Delta u \text{ sur}\Sigma \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \Delta\left(-\Delta u + \partial_2 q\right) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2_+ \\ -\Delta u + \partial_2 q = 0 \text{ sur } \Sigma, \end{cases}$$

ainsi, il existe une fonction polynomiale $p \in \mathcal{A}^{\Delta}_{-\left[-l+\frac{2}{p}\right]-1}$, tel que

$$-\Delta u + \partial_2 q = p.$$

Posons

$$v_2 = u + \Pi p,$$

alors

$$-\Delta v_2 + \partial_2 q = 0,$$

soit $v' \in W^{3,p}_{-l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ la solution du problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} \Delta v = \partial_1 q \text{ dans } \mathbb{R}^2_+, \\ v = 0 \text{ sur } \Sigma, \end{cases}$$

alors le couple $(v = v' + v_2 e_2, q)$ vérifiant

$$-\Delta v + \nabla q = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2_+,$$

d'ailleurs, nous avons

$$\begin{cases} \Delta\left(div\ v\right) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2_+, \\ div\ v = 0 \text{ sur } \Sigma, \end{cases}$$

dans la suite il existe une fonction polynomiale $s \in \mathcal{A}^{\Delta}_{-\left[-l+\frac{2}{p}\right]}$, tel que

$$div\ v = s \text{ dans } \mathbb{R}^2_+,$$

nous posons

$$\lambda = v - \nabla\Pi s \text{ et } \mu = q - s,$$

alors le couple (λ, μ) appartient à $\mathcal{S}^{+,p}_{2,l+1}$ avec $\sigma = 1$. La proposition (4.7) implique l'existence d'une fonction $\phi \in \mathcal{A}^{\Delta}_{-\left[-l+\frac{2}{p}\right]+1}$, tel que

$$u + \Pi p - \partial_2 \Pi s = (div\ \phi')\, x_2 + x_2 \partial_2 \phi_2 - \phi_2,$$

ainsi

$$u = \theta x_2 - \Pi p + x_2 \partial_2 \phi_2 - \phi_2,$$

où

$$\theta = \frac{s}{2} + div\ \phi'.$$

inversement. Toute fonction de la forme

$$u = \theta x_2 - \Pi p + x_2 \partial_2 \phi_2 - \phi_2,$$

tels que $\theta \in \mathcal{A}^{\Delta}_{\left[l+1-\frac{2}{p}\right]}$, $p \in \mathcal{A}^{\Delta}_{\left[l-\frac{2}{p}\right]}$ et $\phi \in \mathcal{A}^{\Delta}_{\left[l+2-\frac{2}{p}\right]}$ appartient à $\mathcal{B}^{+,p}_{2,l}$.

Peuve du théorème 4.4

1) Unicité. Conséquence de la proposition 4.2 .

2) La condition de compatibilité est nécessaire. Considérons $u \in W^{3,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$, alors $\Delta^2 u \in W^{-1,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$, de plus, par densité de $\mathscr{D}\left(\overline{\mathbb{R}^2_+}\right)$ dans $W^{1,p'}_{-l-1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$, on vérifie que pour tout $\phi \in \mathscr{D}\left(\overline{\mathbb{R}^2_+}\right)$

$$\begin{aligned}
\langle \Delta^2 u, \phi \rangle_{W^{-1,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right) \times W^{1,p'}_{-l-1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} &= -\langle \nabla \Delta u, \nabla \phi \rangle + \left\langle \frac{\partial \Delta u}{\partial n}, \phi \right\rangle_{\Sigma} \\
&= \langle \Delta u, \Delta \phi \rangle - \left\langle \Delta u, \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\rangle_{\Sigma} + \left\langle \frac{\partial \Delta u}{\partial n}, \phi \right\rangle_{\Sigma} \\
&= -\langle \nabla u, \nabla \Delta \phi \rangle + \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, \Delta \phi \right\rangle_{\Sigma} - \left\langle \Delta u, \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\rangle_{\Sigma} + \left\langle \frac{\partial \Delta u}{\partial n}, \phi \right\rangle_{\Sigma} \\
&= \langle u, \Delta^2 \phi \rangle - \left\langle u, \frac{\partial \Delta \phi}{\partial n} \right\rangle_{\Sigma} + \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, \Delta \phi \right\rangle_{\Sigma} - \left\langle \Delta u, \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\rangle_{\Sigma} + \\
&= \left\langle \frac{\partial \Delta u}{\partial n}, \phi \right\rangle_{\Sigma},
\end{aligned}$$

comme $\mathscr{D}\left(\overline{\mathbb{R}^2_+}\right)$ est dense dans $W^{1,p'}_{-l-1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$, alors $\forall \phi \in W^{1,p'}_{-l-1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ et $\phi = u_0 \in \mathcal{B}^{+,p'}_{2,l} \hookrightarrow W^{1,p'}_{-l-1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ On a

$$\begin{aligned}\left\langle \Delta^2 u, u_0 \right\rangle_{W^{-1,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)\times W^{1,p'}_{-l-1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} = \\ &\langle u, \Delta^2 u_0\rangle - \left\langle u, \frac{\partial \Delta u_0}{\partial n}\right\rangle_\Sigma + \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, \Delta u_0\right\rangle_\Sigma - \left\langle \Delta u, \frac{\partial u_0}{\partial n}\right\rangle_\Sigma + \\ &\left\langle \frac{\partial \Delta u}{\partial n}, u_0\right\rangle_\Sigma, \\ &= -\left\langle u, \frac{\partial \Delta u_0}{\partial n}\right\rangle_\Sigma + \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, \Delta u_0\right\rangle_\Sigma,\end{aligned}$$

comme $u = g$ sur Σ et $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g$ sur Σ, alors

$$\left\langle \Delta^2 u, u_0 \right\rangle_{W^{-1,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)\times W^{1,p'}_{-l-1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} = \langle f, u_0\rangle_{W^{-1,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)\times W^{1,p'}_{-l-1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} = -\left\langle g, \frac{\partial \Delta u_0}{\partial n}\right\rangle_\Sigma - \langle h, \Delta u_0\rangle_\Sigma, \forall u_0 \in \mathcal{B}^{+,p'}_{2,l},$$

d'où le résultat.

3) Existence. Avec l'utilisation du théorème de traces le problème devient homogène

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \text{ dans } \mathbb{R}^2_+, \\ u = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ \partial_2 u = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$

Soit $\Delta l = f$ dans $\mathbb{R}^2_+, l = l_0$ sur Σ, tel que $f \in W^{-1,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ ce problème a une unique soluion ssi l_0 vérifiant la condition de compatibilité suivante

$$\langle f, p\rangle_{W^{-1,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)\times W^{1,p'}_{-l-1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} - \langle l_0, \partial_2 p\rangle_{W^{3-\frac{1}{p},p}_{l+1}(\not<)\times W^{-3+\frac{1}{p},p'}_{+l+1}(\not<)} = 0, \forall p \in \mathcal{A}^\Delta_{\left[l+2-\frac{2}{p'}\right]}, \tag{4.8}$$

d'après les résultats précédents sur le Laplace. D'ailleurs, pour tout polynôme p dans $\mathcal{A}^\Delta_{\left[l+2-\frac{2}{p'}\right]}$, on a

$$\langle \Delta l, \Pi p\rangle_{W^{-1,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)\times W^{1,p'}_{-l-1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} = \langle f, \Pi p\rangle_{W^{-1,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)\times W^{1,p'}_{-l-1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} = 0,$$

puisque $\Pi p \in \mathcal{B}^{+,p'}_{2,l}$, ainsi

$$\langle l, \Delta \Pi p\rangle_{W^{3,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)\times W^{-3,p'}_{-l-1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} = \langle l, p\rangle_{W^{3,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)\times W^{-3,p'}_{-l-1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} = 0, \forall p \in \mathcal{A}^\Delta_{\left[l-\frac{2}{p'}\right]}. \tag{4.9}$$

En plus nous pouvons trouver une fonction θ dans $W^{3,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ solution du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta \theta = l \text{ dans } \mathbb{R}^2_+, \\ \theta = 0 \text{ sur } \Sigma, \end{cases}$$

le système évidement admet une solution puisque l vérifie (4.9) Considérons aussi une fonction q_1 dans $W^{2,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ solution du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta q_1 = \partial_2 l \text{ dans } \mathbb{R}^2_+, \\ q_1 = 0 \text{ sur } \Sigma, \end{cases}$$

ce problème a une solution puisque pour tout p appartient à $\mathcal{A}^{\Delta}_{\left[l+1-\frac{2}{p'}\right]}$,

$$\begin{aligned} 2\left\langle \partial_2 l, p\right\rangle_{W^{0,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)\times W^{0,p'}_{-l-1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} &= -2\left\langle l, \partial_2 p\right\rangle_{W^{1,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)\times W^{-1,p'}_{-l-1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} \\ &= -\left\langle \Delta l, x_2 p\right\rangle_{W^{-1,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)\times W^{1,p'}_{-l-1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} \\ &= -\left\langle f, x_2 p\right\rangle_{W^{-1,p}_{l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)\times W^{1,p'}_{-l-1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)} = 0, \end{aligned}$$

on a $x_2 p \in \mathcal{B}^{+,p'}_{2,l}$, finalement

$$u = x_2 q_1 + \theta - x_2 \partial_2 \theta,$$

alors avec les calculs on obtient

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \text{ dans } \mathbb{R}^2_+, \\ u = \partial_2 u = 0 \ sur \ \Sigma \end{cases}$$

4) La régularité. Nous supposons que $f \in W^{m-1,p}_{m+l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$, avec $m \geq 1$, alors $l \in W^{m+1,p}_{m+l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ et par conséquence $\theta \in W^{m+3,p}_{m+l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$ quand $q_1 \in W^{m+2,p}_{m+l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$, d'après les théorèmes de régularité précédents on observe que

$$\Delta u = 2\partial_2 q_1 + l - \partial_2^2 \theta,$$

implique que $u \in W^{m+3,p}_{m+l+1}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$. D'où le résultat. ■

Remarque 4.5 *Dans le cas hilbertien le noyau reste le même, voir [3] mais il faut changer l'espace* $W^{m,p}_{\alpha}$ *par* $X^{m,p}_{\alpha}$, *les démonstrations sont semblables.*

REFERENCES

[1] Avantaggitia. A. Spazi di Sobolev con peso ed alcune applicazioni, Bolletino. U.M.I.

[2] Adams. R. A. Sobolev Spaces, New York, Academic Press, 1975.

[3] Amrouche. C, Girault. V, Giroire.J. Weighted Sobolev spaces for laplace's equation in $\mathbb{R}^n$, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 73 (1994) 579-606.

[4] Amrouche. C, Girault.V, Giroire.J. Dirichlet and Neumann exterior problems for the n-dimensional Laplace operator. An approach in Weighted Sobolev spaces, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 76 (1997) 55-81.

[5] Amrouche. C, Necasova.S. Laplace equation in the half space with a non homogeneous Dirichlet boundary condition, Mathematica Bohemica 126-2, 2001, 265-274.

[6] Boulmezaoud. T. Z. Weighted Sobolev spaces for the Laplaces equation in the Half-space, Comptes Rendus de L'académie des sciences, série I,1999 ; 328 : 221-226

[7] Barros Neto. J. Inhomogeneous boundary value problems in a half spac,Ama,Sc.pisa,19 (1965), 331-365.

[8] Babich V. M. Sur le problème du prolongement des fonctions, Usephi Mat.Nauk 8,2 (1953),111-113.

[9] Bourlad M. Problème de Dirichlet pour le bilaplacien dans un polygone, résolution par element finis frontières raffinés, C. R. RAcad.Sci.Paris, série I,306 (1988), 461-466.

[10] Boulmezaoud. T. Z. On the Stokes system and on Biharmonic equation in the half-space An approach via weighted Sobolev spaces, Mathematical Methods in the Applied Sciences 2002, 25 : 373-398.

[11] Cantor. M. Spaces of functions with asymtotic conditions on $\mathbb{R}^n$. Indiana Univ. Math.J ; 9(24): 897-902,1975.

[12] Giroire.J. Etude de quelques problèmes aux limites exterieurs et résolution par equation intégrale. Thèse de Doctorat d'état, université pierre et marie curie, paris,1987.

[13] Girault.V, Raviart. P.A. Finité element approximation of the Navier-Stokes equations. Springer.Berlin 1979.

[14] Hanouzet.B. Espaces de Sobolev avec poids. Application au problème de Dirichlet dans un demi-espace. Rendiconti del seminario matimatico dell unversita dipadova 1971 ; XLVI,227-272.

[15] Hardy. G. G, Littlewood.D.E, Polya.G. Inequalités cambridge 1952.

[16] Kufner. A, John.O, Fucik.S. Function spaces, Noodhoff Intem. Pbubl. Leyden groninger 1977

[17] Résolution numérique du problème du potentiel dans le plan par une méthode variationnelle d'éléments finis.master's thesis, thèse de troisième cycle, Université de Rennes, 1974

[18] Necas. J. Les méthodes directes en théories des equations elliptiques. Paris1967.

[19] Robert. C. Mcowen. Boundary value problems for the laplacien in an exterior domain.com In partial differential equation 6(7) 783 (1981).

[20] Schwartz. L. Theorie des distributions. Paris(1966).

[21] Kudrjvcev. L. D. Direct and inverse imbeddings teorems, application to the solution of elliptic equation by variationnel method. Trudy Mat.Ins.Steklov, 55 : 1-182.