

N^o d'ordre : 20/2009-M/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté des Mathématiques



MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER
En : MATHÉMATIQUES
Spécialité : Recherche Opérationnelle : Génie Mathématiques

Par : Widad DALI

Thème

**Nombres de Bondage et Graphes Critiques par rapport aux
Nombres de Domination (Totale) Localisatrice**

Soutenu le 15 Avril 2009, devant le jury composé de :

Mle. Isma BOUCHEMAKH	Professeur	U.S.T.H.B.	Président
Mr. Mostafa BLIDIA	Professeur	U. Blida	Directeur de thèse
Mr. Hacene AIT HADDADENE	Professeur	U.S.T.H.B.	Examineur
Mr. Mustapha CHELLALI	Maître de Conférence	U. Blida	Examineur
Mr. Ahmed SEMRI	Maître de Conférence	U.S.T.H.B.	Examineur

Remerciements

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse Mostafa BLIDIA qui m'a accompagné et soutenu tout le long de mon travail de recherche.

Mes remerciements les plus sincères aux membres de Jury : Isma BOUCHEMAKH, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury, Hacene AIT HADDADENE, Mustapha CHELLALI et Ahmed SEMRI qui m'ont fait l'honneur de participer à ce jury, merci d'avoir accepté d'examiner mon mémoire de magister.

Je remercie également tous mes enseignants qui m'ont aidé tout le long de ma formation.

Je remercie profondément ma mère, mon père, ma famille, mes amis et toute personne qui m'a aidé à réaliser ce travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Généralité sur les Graphes	4
1.1 Définitions et Notations	4
1.2 Aperçu sur la Domination dans les Graphes	9
1.2.1 Historique	9
1.2.2 La Domination dans les Graphes	10
1.2.3 Quelques Paramètres de Domination	11
2 Résultats Existants sur le Nombre de Bondage et les Graphes Critiques	19
2.1 Le Nombre de Bondage	19
2.1.1 Le Nombre de Bondage dans Certaines Classes de Graphes	20
2.1.2 Bornes Supérieures du Nombre de Bondage	22
2.1.3 Le Nombre de Bondage Fractionnaire	24
2.2 Le Nombre de Bondage d'autres Paramètres de Domination	25
2.2.1 Le Nombre de Bondage Pair	25
2.2.2 Le Nombre de Bondage Restreint	27
2.3 Le Concept des Graphes Critiques	29
2.3.1 Quelques Graphes π -Arête Enlevée-Critiques	29
2.3.2 Quelques Graphes π^- -Arête Enlevée-Critiques	31

3	Le Nombre de Bondage par rapport aux Paramètres γ_L et γ_L^t	32
3.1	Le Nombre de Bondage Localisateur	32
3.1.1	Valeurs Exactes du Nombre de Bondage Localisateur	33
3.1.2	Bornes Supérieures du Nombre de Bondage Localisateur	40
3.2	Le Nombre de Bondage Total Localisateur	43
3.2.1	Valeurs Exactes du Nombre de Bondage Total Localisateur	45
3.2.2	Caractérisation des Arbres γ_L^t -Fortement Stables	49
3.2.3	Quelques Graphes γ_L^t -Fortement Stables	53
4	La Classe des Graphes π Arête Enlevée Critiques, $\pi \in \{\gamma_L, \gamma_L^t\}$	56
4.1	La Classe des Graphes γ_L Arête Enlevée Critiques	57
4.1.1	Les Graphes γ_L^+ -Arête Enlevée-Critiques	57
4.1.2	Les Graphes γ_L^- -Arête Enlevée-Critiques	67
4.2	La Classe des Graphes γ_L^t Arête Enlevée Critiques	73
4.2.1	Les Graphes γ_L^{t+} -Arête Enlevée-Faiblement Critiques	74
4.2.2	Les Graphes γ_L^{t-} -Arête Enlevée-Critiques	79
	Conclusion	82
	Bibliographie	84

Table des figures

2.1	Le contre exemple	23
2.2	Un arbre T avec $b_p(G) = k$	27
3.1	Un graphe G avec $b_L(G) = 1$	33
3.2	Un graphe G avec $b_L^t(G) = 1$	44
3.3	Arbre $T \in \mathcal{K}$	50
3.4	Graphe $G \in \mathcal{F}$	54
4.1	Arbre $T \in \mathcal{T}$	60
4.2	Graphe $G \in \mathcal{G}$	64
4.3	Le graphe G	66
4.4	Graphe $H \in \mathcal{H}$	76

Introduction

La théorie des graphes est un outil important dans la recherche mathématique, l'économie, la sociologie, la gestion des réseaux, la liste peut aller indéfiniment. L'étude de la domination et les sous problèmes liés à cette branche note un développement important dans la théorie des graphes, en raison de la diversité de ses applications dans plusieurs domaines comme l'analyse des réseaux de communication, la détection des défaillances dans les systèmes, la garde et la sûreté dans les organismes...

En 1987 Slater introduit les ensembles dominants localisateurs (voir [30, 29]). Le concept de la domination totale localisatrice a été introduit par Haynes, Henning et Howard en 2006 (voir [25]). La principale motivation de l'introduction de ces deux notions de domination est l'étude de la protection contre les incendies.

En 1990, dans le but de l'étude de la vulnérabilité des réseaux de communication, Fink, Jacobson, Kinch et Roberts [17] introduisent un nouveau paramètre de domination le nombre de bondage $b(G)$ d'un graphe simple non vide. Le nombre de bondage désigne la robustesse du réseau quand certaines liaisons sont coupées.

Dans ce mémoire nous nous intéressons à l'étude théorique du nombre de bondage localisateur $b_L(G)$ et du nombre de bondage total localisateur $b_L^t(G)$. Nous examinons également les graphes arête enlevée critiques par rapport aux paramètres nombre de domination localisatrice γ_L et nombre de domination totale localisatrice γ_L^t .

Ce mémoire comporte quatre chapitres. Dans les deux premiers nous présentons quelques résultats préliminaires. Dans les chapitres 3 et 4 nous exposons nos résultats.

Le chapitre 1 comporte deux sections. Dans la première nous donnons les différentes notions de base de la théorie des graphes, dont nous nous servons tout au long de ce mémoire. Dans la seconde nous exposons un aperçu sur la domination dans les graphes et nous présentons quelques paramètres de domination, nous donnons des exemples d'applications pratiques ayant motivé l'introduction des paramètres γ_L et γ_L^t .

Le chapitre 2 comporte trois sections. Dans la première nous présentons le nombre de bondage $b(G)$ ainsi que l'application pratique ayant motivé l'introduction de ce paramètre, nous exposons les meilleures bornes du $b(G)$ et nous donnons quelques résultats sur le nombre de bondage fractionnaire $b^*(G)$. La deuxième section comporte quelques résultats sur le nombre de bondage d'autres paramètres de domination comme γ_p et γ_r . Enfin, dans la troisième section nous abordons le concept des graphes critiques.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude des paramètres $b_L(G)$ et $b_L^t(G)$, il comporte deux sections. Dans la première section nous donnons des valeurs exactes du $b_L(G)$ pour certaines classes de graphes, les chaînes, les cycles, les graphes complets et les graphes multipartis complets et nous établissons des bornes supérieures du $b_L(G)$ pour les arbres et pour les graphes dans quelques cas particuliers. Dans la deuxième section des valeurs exactes du $b_L^t(G)$ des chaînes, des cycles et des graphes complets et des graphes bipartis complets sont données, on y trouve également la définition et la caractérisation des arbres γ_L^t -fortement stables et l'exemple de quelques graphes γ_L^t -fortement stables.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude des graphes arête enlevée critiques par rapport aux paramètres γ_L et γ_L^t , il comporte deux sections. Dans la première section nous caractérisons les graphes γ_L^+ -arête enlevée-critiques et nous montrons que les graphes complets et les graphes multipartis complets sous certaines conditions sont des graphes γ_L^- -arête enlevée-critiques. Dans la seconde section nous caractérisons les graphes γ_L^{t+} -arête enlevée-faiblement critiques, nous prouvons également que les graphes complets et les graphes multipartis complets sous certaines conditions sont des graphes γ_L^{t-} -arête enlevée-critiques.

Nous proposons dans ce travail trois conjectures qui ont pour objet la caractérisation de tous

- Les graphes γ_L^t -fortement stables.
- Les graphes γ_L^- -arête enlevée-critiques.
- Les graphes γ_L^{t-} -arête enlevée-critiques.

Chapitre 1

Généralité sur les Graphes

Dans ce chapitre nous introduisons les différentes notions de base de la théorie des graphes, dont nous nous servons tout au long de ce mémoire. Nous exposons également un aperçu sur la domination dans les graphes et nous présentons quelques paramètres de domination.

Les différentes définitions et les principaux résultats employés dans ce chapitre sont inspirés des livres [3, 23].

1.1 Définitions et Notations

Graphe et Graphe Simple

Un graphe non orienté fini G est un couple (V, E) , où V est un ensemble d'éléments finis et dénombrables et E est un sous ensemble de paire de sommets de V , $E \subseteq \{uv, u \in V \text{ et } v \in V\}$. Un élément $v \in V$ est dit sommet, un élément $e = uv \in E$ est dit arête. G est souvent écrit $G = (V, E)$ ou $G = (V(G), E(G))$.

On note par n l'ordre de G , $n = |V|$ (si $n \geq 2$, alors G est non trivial) et par m la taille de G , $m = |E|$ (si $m \geq 1$, alors G est non vide).

Le complémentaire d'un graphe G est le graphe $\overline{G} = (V, U)$ avec $U = \{uv, uv \notin E\}$.

Deux sommets u, v dans V sont dit adjacents ou voisins si l'arête $uv \in E$, u et v sont dits les extrémités de l'arête e , e est dite incidente aux sommets u et v .

Deux arêtes sont adjacentes si elles ont au moins une extrémité commune.

Si l'arête $e = uu \in E$ pour un sommet $u \in V$, alors e est dite boucle.

Un graphe G est dit p -graphe si le nombre d'arêtes uv entre deux sommets u et v est inférieur ou égale à p .

Un graphe simple est un 1-graphe sans boucle.

Nous considérons dans ce qui suit les graphes simples.

Sommets, Voisinages d'un Sommet et degré d'un Sommet

Le voisinage ouvert d'un sommet $u \in V$ est l'ensemble de tous les sommets v voisins à u dans G , écrit $N(u)$ ou $N_G(u)$.

Le voisinage fermé d'un sommet $u \in V$ est l'ensemble $\{u\} \cup N(u)$, noté par $N[u]$ ou $N_G[u]$.

Deux sommets u et v dans G sont des vrais jumeaux si $uv \in E$ et $N(u) \setminus \{v\} = N(v) \setminus \{u\}$.

Deux sommets u et v dans G sont des faux jumeaux si $uv \notin E$ et $N(u) = N(v)$.

Le degré d'un sommet $v \in V$ est la cardinalité de l'ensemble du voisinage ouvert de v , écrit $deg(v)$ ou $d_G(v)$.

$\Delta(G)$, $\delta(G)$ désigne respectivement le degré maximum et le degré minimum du graphe G .

Un sommet $v \in V$ est dit isolé si et seulement si $deg(v) = 0$.

Un sommet $v \in V$ est dit pendant si et seulement si $deg(v) = 1$, le voisin d'un sommet pendant est dit sommet support et une arête incidente à un sommet pendant est dite pendante.

$L(G)$ est l'ensemble des sommets pendants du graphe G , $|L(G)| = l(G)$, et $S(G)$ est

l'ensemble des sommets supports du graphe G , $|S(G)| = s(G)$.

Nous appelons le cœur du graphe G l'ensemble des sommets $V(G) \setminus (S(G) \cup L(G))$.

L'ensemble L_v est l'ensemble des sommets pendants voisins à un sommet support v .

Si $|L_v| = 1$, alors v est un sommet support faible.

Si $|L_v| > 1$, alors v est un sommet support fort.

Soit S un sous ensemble de sommets du graphe G , l'ensemble $N(S) = \bigcup_{u \in S} N(u)$ est appelé le voisinage ouvert de S et l'ensemble $N[S] = S \cup N(S)$ est appelé le voisinage fermé de S .

Soit un sommet $u \in S$, un sommet v est un voisin privé de u par rapport à S si et seulement si $N[v] \cap S = \{u\}$. L'ensemble $pn_G[u, S] = \{v : N[v] \cap S = \{u\}\}$ est le voisinage privé du sommet u par rapport à S , il est noté également $pn_G(u, S)$.

Sous Graphe et Graphe Partiel

Soient, $G = (V, E)$ un graphe, $V' \subseteq V(G)$ et $E' \subseteq E(G)$. On note par $E_{V'}$ l'ensemble des arêtes $uv \in E(G)$ avec $u \in V'$ et $v \in V'$.

Le graphe $H = (V', E')$ est appelé un sous graphe de G engendré ou induit par V' , $H = \langle V' \rangle$.

Le graphe $H = (V, E')$ est appelé un graphe partiel de G engendré par E' , $H = G - E'', E'' = E - E'$.

Le graphe $H = (V', E' \cap E_{V'})$ est appelé un sous graphe partiel de G .

Un sous graphe vide est appelé stable.

Un sous graphe $H = (V', E')$ tel que $E' = \{uv, \forall u, v \in V' \text{ et } u \neq v\}$ est appelé clique.

Un couplage est un sous ensemble d'arêtes non adjacentes deux à deux. Le couplage est dit parfait si pour tout sommet $v \in V$ il existe une arête du couplage incidente à v .

Le Concept Minimal, Maximal, Minimum et Maximum

Un sous ensemble A de V est dit minimal par rapport à une propriété \mathcal{P} s'il n'existe pas un sous ensemble $B \subset A$ tel que le sous graphe induit par B vérifie la propriété \mathcal{P} . Un sous ensemble A de V est dit maximal par rapport à une propriété \mathcal{P} s'il n'existe pas un sous ensemble B tel que $A \subset B$ et le sous graphe induit par B vérifie la propriété \mathcal{P} .

Un sous ensemble A de V est dit minimum ou de taille minimale par rapport à une propriété \mathcal{P} s'il n'existe pas de sous ensemble $B \subseteq V$ tel que le sous graphe induit par B vérifie la propriété \mathcal{P} et $|B| < |A|$. Un sous ensemble A de V est dit maximum ou de taille maximale par rapport à une propriété \mathcal{P} s'il n'existe pas de sous ensemble $B \subseteq V$ tel que le sous graphe induit par B vérifie la propriété \mathcal{P} et $|B| > |A|$.

Un π -ensemble est un sous ensemble de cardinalité π vérifiant une propriété \mathcal{P} associé à un graphe G .

Chaîne, Cycle, Arbre et Connexité

La séquence de sommets $u_1 u_2 \dots u_n$ d'un graphe $G = (V, E)$ est une chaîne si et seulement si pour tout indice $i = 1, \dots, n - 1$, l'arête $u_i u_{i+1} \in E$.

Un graphe G est une chaîne $P_n = (V, E)$ si et seulement si $V = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ et $E = \{u_i u_{i+1}, i = 1, \dots, n - 1\}$, u_1 et u_n sont les extrémités de la chaîne. La longueur d'une chaîne désigne son nombre d'arêtes.

Un cycle d'un graphe $G = (V, E)$ est une chaîne dont les extrémités coïncident. Un graphe G est un cycle $C_n = (V, E)$ si et seulement si $V = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ et $E = \{u_n u_1\} \cup \{u_i u_{i+1}, i = 1, \dots, n - 1\}$. La longueur d'un cycle désigne son nombre

d'arêtes.

Un graphe G est dit connexe si et seulement si pour toute paire de sommet u et v dans G il existe une chaîne joignant u et v . Une composante connexe d'un graphe G est un sous graphe connexe maximal.

La distance entre deux sommets u et v , $d_G(u, v)$ est la longueur minimum d'une chaîne reliant u et v .

Le diamètre d'un graphe G , $diam(G) = \max_{u,v \in G} (d_G(u, v))$.

Un arbre est un graphe connexe sans cycle, il est souvent noté par T . Pour tout arbre T , $\Delta(T) \leq l(T)$

Une forêt est un graphe où chaque composante connexe est un arbre.

Nous appelons un sommet du sous ensemble $V(T) \setminus (L(T) \cup S(T))$ un sommet branche.

Un arbre enraciné en un sommet r est un arbre pendu par ce sommet. Les sommets d'un arbre enraciné seront classés par niveaux suivant leurs distances par rapport au sommet racine r .

Un sommet u est l'ancêtre d'un sommet v s'il se trouve sur la chaîne entre v et la racine de l'arbre.

Un sommet u est le père de v s'il est l'ancêtre de v qui lui est adjacent, v est dit le fils de u .

Graphes Particuliers

Un graphe complet K_n est un graphe connexe $G = (V, E)$, $|V| = n$ et $|E| = m$ tel que $m = n(n-1)/2$.

Un graphe multiparti complet ou t -partie complet K_{n_1, n_2, \dots, n_t} , $t \geq 2$ est un graphe connexe $G = (V, E)$ où l'ensemble des sommets V , $|V| = n_1 + n_2 + \dots + n_t$, peut être partitionné en t stables N_i , $i = \overline{1, t}$ avec $|N_i| = n_i$ et pour toute paire de sommets $u \in N_i$ et $v \in N_j$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, t}$, $uv \in E$.

Un graphe biparti complet est le graphe K_{n_1, n_2} .

Une étoile est le graphe K_{1, n_2} .

Une étoile double est un graphe connexe obtenu en reliant par une arête le sommet support d'une étoile $K_{1, p}$ et le sommet support d'une étoile $K_{1, q}$.

Une galaxie est une forêt où chaque composante connexe est une étoile.

Autres Concepts

Le produit cartésien de deux graphes G et H qu'on note $G \square H$ est le graphe $K = (V(K), E(K))$, avec $V(K) = V(G) \times V(H)$, et deux sommets (u_1, v_1) , (u_2, v_2) dans $V(K)$ sont adjacents dans $E(K)$ si et seulement si $u_1 = u_2$ et $v_1 v_2 \in E(H)$ ou bien $v_1 = v_2$ et $u_1 u_2 \in E(G)$.

Deux graphes G et H sont isomorphes s'il existe une bijection $\varphi : V(G) \longrightarrow V(H)$ telle que $uv \in E(G)$ si et seulement si $\varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$.

Le nombre arête-connectivité $\lambda(G)$ est le plus petit nombre d'arêtes à enlever d'un graphe G pour augmenter le nombre de composantes connexes de G .

1.2 Aperçu sur la Domination dans les Graphes

1.2.1 Historique

Bien que l'étude mathématique des ensembles dominants a commencé dans les années soixante, le sujet trouve son origine en 1862 dans les jeux des échecs quand De Jaenisch [15] étudia le problème de déterminer le nombre minimum de reines à placer sur un échiquier $n \times n$ de sorte que chaque case soit occupée par une reine ou peut être occupée en un seul mouvement par l'une d'elles, tout en sachant que

les règles du jeu des échecs permet à une reine de se déplacer à travers les cases soit horizontalement, verticalement ou diagonalement. Pour un échiquier 8×8 , cinq est le nombre minimum de reines qui dominent toutes les cases de l'échiquier, dans ce cas le problème est appelé « le problème des cinq reines », et on peut dire qu'il est l'origine de l'étude mathématique de la domination.

En 1892 Ball [1] a traité la question de De Jaenish en considérant d'autres conditions supplémentaires.

En 1964 les frères Yaglom [36] étudièrent les problèmes posés par De Jaenish et Ball.

Dans [3], Berge introduit le nombre de domination sous l'appellation « coefficient de stabilité externe ». En 1962 Ore [26] fut le premier à employer les termes « ensemble dominant » et « nombre de domination » qu'il nota $d(G)$.

L'étude moderne de la domination a débuté après l'apparition de l'article de Cockayne et Hedetniemi [12] en 1977. Les auteurs de [12] sont les premiers à utiliser la notation $\gamma(G)$ pour désigner le nombre de domination.

Depuis, plusieurs chercheurs se sont investis dans l'étude de la domination dans les graphes et beaucoup de nouveaux paramètres ont été introduits. Dans les livres de Haynes et al. [23, 24], on peut trouver les concepts fondamentaux de la domination ainsi que la majorité des articles publiés avant 1998.

1.2.2 La Domination dans les Graphes

On peut associer au problème des cinq reines le graphe de déplacement de la reine, soit $G = (V, E)$ un graphe simple tel que V est l'ensemble des cases de l'échiquier 8×8 , et $uv \in E$ si et seulement si la reine peut se déplacer de la case u vers la case v . La résolution du problème consiste à déterminer un ensemble dominant de cardinalité minimum dans le graphe G .

Définition 1.1. *Un ensemble dominant D dans un graphe simple $G = (V, E)$ est un sous ensemble de sommets dans V tel que tout sommet dans $V - D$ est adjacent à au moins un sommet dans D .*

La cardinalité d'un ensemble dominant ayant la plus petite taille dans G est appelée nombre de domination, notée $\gamma(G)$.

La cardinalité d'un ensemble dominant minimal ayant la plus grande taille dans G est appelée nombre de domination supérieur, notée $\Gamma(G)$.

Les définitions suivantes sont équivalentes à la définition 1.1.

- Un ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble dominant dans G si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap D| \geq 1$.
- Un ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble dominant dans G si $N[D] = V$.

Avant d'exposer quelques paramètres de domination nous présentons les ensembles irrédondants.

Irrédondant Un irrédondant dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous ensemble de sommets $I \subseteq V$ tel que tout sommet $v \in I$ possède un voisinage privé par rapport à I . $\forall v \in I, pn[v, I] \neq \emptyset$.

La cardinalité d'un ensemble irrédondant maximal ayant la plus petite (resp. grande) taille dans G est notée $ir(G)$ (resp. $IR(G)$).

Il est facile de conclure que tout ensemble dominant D est minimal si et seulement si D est un dominant et un irrédondant, et tout ensemble dominant minimal est un irrédondant maximal.

1.2.3 Quelques Paramètres de Domination

Dans plusieurs applications, il est nécessaire de combiner la domination avec d'autres propriétés de la théorie de graphes. Dans cette partie nous exposons quelques

paramètres de domination où des conditions supplémentaires sont imposées sur le sous graphe induit par l'ensemble dominant ou sur les sommets qui n'appartiennent pas à l'ensemble dominant.

Nous rappelons qu'un stable S dans un graphe G est un sous ensemble de sommets de G tel que le sous graphe induit par S , $\langle S \rangle$ est sans arêtes. Il est simple de voir que tout ensemble stable S est maximal si et seulement si S est un stable et un dominant, et tout stable maximal est un ensemble dominant minimal.

Dominant stable Un ensemble dominant stable dans G est un dominant D tel que le sous graphe induit par D est stable.

La cardinalité d'un ensemble dominant stable ayant la plus petite taille dans G est appelée nombre de domination stable, notée $i(G)$.

La cardinalité d'un ensemble dominant stable ayant la plus grande taille dans G est appelée nombre de domination stable supérieur, notée $\alpha(G)$, $\beta_0(G)$ ou bien $\beta(G)$.

Dominant total Un ensemble dominant total dans G est un dominant D tel que le sous graphe induit par D est sans sommets isolés.

La cardinalité d'un ensemble dominant total ayant la plus petite taille dans G est appelée nombre de domination totale, notée $\gamma_t(G)$.

La cardinalité d'un ensemble dominant total minimal ayant la plus grande taille dans G est appelée nombre de domination totale supérieur, notée $\Gamma_t(G)$.

Dominant pair Un ensemble dominant pair ou couplé est un dominant D tel que le sous graphe induit par D admet un couplage parfait.

La cardinalité d'un ensemble dominant pair ayant la plus petite taille dans G est appelée nombre de domination couplée, notée $\gamma_p(G)$.

La cardinalité d'un ensemble dominant pair minimal ayant la plus grande taille dans G est appelée nombre de domination couplée supérieur, notée $\Gamma_p(G)$.

Dominant restreint Un ensemble dominant restreint est un dominant D tel que le sous graphe induit par $V - D$ est sans sommets isolés.

La cardinalité d'un ensemble dominant restreint ayant la plus petite taille dans G est appelée nombre de domination restreinte, notée $\gamma_r(G)$.

La cardinalité d'un ensemble dominant restreint minimal ayant la plus grande taille dans G est appelée nombre de domination restreinte supérieur, notée $\Gamma_r(G)$.

Code identifiant Un code identifiant est un ensemble dominant D tel que pour toute paire de sommets u et v dans V les ensembles $N[u] \cap D$ et $N[v] \cap D$ sont différents.

On note par $\gamma_d(G)$ la cardinalité d'un code identifiant ayant la plus petite taille dans G . On note par $\Gamma_d(G)$ la cardinalité d'un code identifiant minimal ayant la plus grande taille dans G .

Si G admet deux sommets u et v tels que $N_G[u] = N_G[v]$, alors $\gamma_d(G) = \infty$.

L'installation des appareils de contrôle tels que les caméras de surveillance, les alarmes de détection de feu ou d'objets intrus dans les constructions, est la principale motivation de l'introduction des ensembles dominants localisateurs et des ensembles dominants totaux localisateurs. Nous présentons maintenant ces paramètres et les principaux résultats utiles au développement des chapitres 3, 4.

Dominant localisateur

Les ensembles dominants localisateurs ont été introduits par Slater dans [29, 30].

Dans le but d'équiper une construction d'un système de détection de feu, on utilise un type d'appareil qui est conçu de la manière suivante,

- Détecter l'incendie qui débute dans la pièce où il est installé.
- Détecter tout incendie qui débute dans toutes pièces voisines à celle où il est installé.

- Distinguer entre un incendie déclenché dans la pièce où il est mis que celui supposé provenir d'une chambre voisine.

Pour des raisons de coût on veut minimiser le nombre d'appareil à installer.

Cette construction peut être modélisée par un graphe simple $G = (V, E)$, où l'ensemble des sommets V représente les pièces de la construction, et deux sommets sont adjacents dans G si et seulement si les pièces représentées par ces deux sommets sont voisines. Donc, le problème de détection et de localisation de tout incendie dans la construction consiste à déterminer dans le graphe G un ensemble dominant minimum tout en considérant la propriété supplémentaire des ensembles localisateurs.

Les notions suivantes sont dues à Slater [28, 30].

Définition 1.2. [30] *Un sous ensemble de sommets $D = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble localisateur si pour tout sommet $v \in V$ la D -localisation de v , $f(v) = (d_G(v, v_1), d_G(v, v_2), \dots, d_G(v, v_l))$ est unique.*

On note par $R(G)$ la taille minimum d'un ensemble localisateur dans G .

Autrement dit tout sommet $v \in V$ peut être localisé d'une manière unique par rapport à sa distance de chaque sommet dans D .

Définition 1.3. [30] *Un ensemble dominant localisateur (E.D.L.) dans un graphe simple G est un dominant D tel que pour toute paire de sommets u et v dans $V - D$ les ensembles $N(u) \cap D$ et $N(v) \cap D$ sont différents.*

Un ensemble dominant localisateur de cardinalité minimum est appelé « referencinset ».

La cardinalité d'un E.D.L. ayant la plus petite taille dans G est appelée nombre de domination localisatrice, notée $RD(G)$ ou $\gamma_L(G)$.

La cardinalité d'un E.D.L. minimal ayant la plus grande taille dans G est appelée nombre de domination localisatrice supérieur, notée $\Gamma_L(G)$.

Remarque 1.1. [30]

Un ensemble dominant localisateur est un dominant et un ensemble localisateur.

Un sous ensemble de sommets D qui est un ensemble dominant et un ensemble localisateur n'est pas forcément un ensemble dominant localisateur.

En effet il est simple de vérifier que pour la chaîne $P_6 = v_1v_2v_3v_4v_5v_6$, l'ensemble $\{v_1, v_2, v_5\}$ est un ensemble dominant et un ensemble localisateur mais il n'est pas un ensemble dominant localisateur.

On considère maintenant deux sommets u, v du graphe G , $d_1(u, v) = \min(2, d_G(u, v))$, et $f_1(v) = (d_1(v, v_1), d_1(v, v_2), \dots, d_1(v, v_l))$.

La définition suivante est équivalente à la définition 1.3.

Définition 1.4. [30] *Un sous ensemble de sommets $D = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ dans un graphe simple G est un ensemble dominant localisateur si et seulement si pour toute paire de sommets u, v dans V avec $u \neq v$ on a $f_1(u) \neq f_1(v)$ et $f_1(u) \neq (2, 2, \dots, 2), \forall u \in V$.*

Lemme 1.1. [30] *Pour tout graphe G , on a $\gamma_L(G) \geq \max\{\gamma(G), R(G)\}$.*

Lemme 1.2. [30] *Soit D_L un γ_L -ensemble d'un graphe G .*

- (i) *Si $uv \notin E$ et $N_G(u) = N_G(v)$,*
- (ii) *Ou bien $uv \in E$ et $N_G(u) \setminus \{v\} = N_G(v) \setminus \{u\}$,*

alors D_L contient u ou v .

Proposition 1.1. [30]

(a) Si C_1, C_2, \dots, C_k sont les k composantes connexes d'un graphe G , alors

$$\gamma_L(G) = \gamma_L(C_1) + \gamma_L(C_2) + \dots + \gamma_L(C_k).$$

(b) Si $|G| = n$, alors $\gamma_L(G) = n$ si et seulement si $G = \overline{K_n}$.

(c) Si $|G| = n$, alors $\gamma_L(G) = n-1$ si et seulement si G a exactement une composante non triviale qui soit un graphe complet soit une étoile.

(d) Si $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_t}$, $t \geq 2$ est un graphe t -partie complet d'ordre

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_t \text{ avec } 2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t, \text{ alors } \gamma_L(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = n - t.$$

Théorème 1.1. [30]

Le nombre de domination localisatrice d'une chaîne P_n , $n \geq 2$ est

$$\gamma_L(P_n) = \begin{cases} 2k & \text{si } n = 5k, \\ 2k + 1 & \text{si } n=5k+1, \quad n=5k+2, \\ 2k + 2 & \text{si } n=5k+3, \quad n=5k+4. \end{cases}$$

Le nombre de domination localisatrice d'un cycle C_n , $n \geq 2$ est

$$\gamma_L(C_n) = \gamma_L(P_n) = \begin{cases} 2k & \text{si } n = 5k, \\ 2k + 1 & \text{si } n=5k+1, \quad n=5k+2, \\ 2k + 2 & \text{si } n=5k+3, \quad n=5k+4. \end{cases}$$

Théorème 1.2. [30] Pour tout arbre T d'ordre n , $\gamma_L(T) > n/3$.

Le théorème 1.2 montre que tout γ_L -ensemble d'un arbre T contient plus que le tiers des sommets de T par contre le théorème 1.1 montre que tout γ_L -ensemble d'une chaîne P_n contient au moins 40% des sommets de P_n .

Les auteurs de [6] ont amélioré la borne du théorème 1.2.

Théorème 1.3. [6] *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$, avec l sommets pendants et s sommets supports, $\gamma_L(T) \geq (n + l - s + 1)/3$.*

Dominant total localisateur

Le concept des ensembles dominants totaux localisateurs a été introduit par Haynes, Henning et Howard [25].

En considérant l'application précédente et dans le but d'améliorer la sauvegarde dans la construction, on désire que chaque appareil installé soit au moins relié à une autre. Le problème consiste à identifier un ensemble dominant total localisateur minimum dans le graphe G .

Définition 1.5. [25] *Un ensemble dominant total localisateur (E.D.T.L.) dans un graphe simple G est un ensemble dominant total D tel que pour toute paire de sommets u et v dans $V - D$ les ensembles $N(u) \cap D$ et $N(v) \cap D$ sont différents.*

La cardinalité d'un E.D.T.L. ayant la plus petite taille dans G est appelée nombre de domination total localisatrice, notée $\gamma_L^t(G)$.

La cardinalité d'un E.D.T.L. minimal ayant la plus grande taille dans G est appelée nombre de domination totale localisatrice supérieur, notée $\Gamma_L^t(G)$.

Nous terminons ce chapitre en donnant les résultats suivants,

Remarque 1.2. [25] $\gamma_L^t(G) \geq \gamma_t(G)$, pour tout graphe G .

Théorème 1.4. [25] *Le nombre de domination totale localisatrice d'une chaîne P_n , $n \geq 2$ est $\gamma_L^t(P_n) = \gamma_t(P_n) = \lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/4 \rceil - \lfloor n/4 \rfloor$.*

Théorème 1.5. [25] *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 2$, $\gamma_L^t(T) \geq \frac{2}{5}(n + 1)$.*

Le théorème 1.6 est une amélioration du théorème 1.5.

Théorème 1.6. [11] *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 2$, avec l sommets pendants et s sommets supports, $\gamma_L^t(T) \geq (n + l - s + 1)/5$.*

Théorème 1.7. [25] *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$, avec l sommets pendants et s sommets supports, $\gamma_L^t(T) \geq (n + 2(l - s) + 1)/3$.*

Chapitre 2

Résultats Existants sur le Nombre de Bondage et les Graphes Critiques

Dans ce chapitre nous présentons le nombre de bondage $b(G)$ d'un graphe simple non vide G . L'application pratique ayant motivé l'introduction de ce paramètre est également donnée. Nous exposons des bornes et des valeurs exactes du $b(G)$ pour certaines classes de graphes. Nous donnerons par la suite quelques résultats sur le nombre de bondage d'autres paramètres de domination comme γ_p et γ_r . Enfin nous aborderons le concept des graphes critiques.

2.1 Le Nombre de Bondage

Motivé par l'application suivante, Fink, Jacobson, Kinch et Roberts [17] introduisent le nombre de bondage d'un graphe non vide simple.

« Parmi les applications variées de la théorie de la domination, on cite les réseaux de communication. Dans ces réseaux la communication se fait à travers des liaisons entre des sites fixes, le problème consiste à choisir un nombre minimum de sites où on place des transmetteurs de sorte que chacun des sites du réseau est soit équipé d'un

transmetteur soit il est relié à un site équipé d'un transmetteur. Ce problème revient à déterminer un ensemble dominant minimum dans le graphe G correspondant à ce réseau. Les sommets du graphe G représentent les sites et l'existence d'une arête e dans G correspond à l'existence d'une liaison directe entre les deux sites représentés par les deux extrémités de l'arête e . Pour l'étude de la vulnérabilité du réseau, supposons qu'un saboteur tout en ignorant les sites dotés de transmetteurs mais en connaissant leur nombre, quel est le nombre minimum de liaisons qu'il doit détruire pour que la communication entre tous les sites ne soit établie que si on doit équiper au moins un autre site d'un nouveau transmetteur ? La réponse à cette question mène à introduire un nouveau paramètre de domination qui est le nombre de bondage d'un graphe non vide. »

Définition 2.1. *Le nombre de bondage $b(G)$ d'un graphe $G = (V, E)$ non vide est la cardinalité du plus petit ensemble d'arêtes $E' \subseteq E$ pour lequel le nombre de domination du graphe partiel $G - E'$ augmente.*

$$b(G) = \min\{|E'|, E' \subseteq E \mid \gamma(G - E') > \gamma(G)\}.$$

Comme tout graphe partiel H d'un graphe non vide G est tel que $\gamma(H) \geq \gamma(G)$, le nombre de bondage $b(G)$ du graphe G est bien défini.

Le nombre de bondage $b(G)$ d'un graphe non vide $G = (V, E)$ est une mesure de la stabilité du nombre de domination $\gamma(G)$, quand G est modifié par la suppression d'un sous ensemble d'arêtes $E' \subseteq E$.

Les premiers résultats sur le nombre de bondage sont dus à Bauer, Harary, Nieminen et Suffel [2] sous le terme de « domination line-stability. »

2.1.1 Le Nombre de Bondage dans Certaines Classes de Graphes

Nous présentons maintenant des valeurs exactes et les meilleures bornes du nombre de bondage dans certaines classes de graphes.

Le Nombre de Bondage dans les Cycles

Théorème 2.1. [17] *Le nombre de bondage d'un cycle C_n , $n \geq 3$ est*

$$b(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \equiv 1[3], \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le Nombre de Bondage dans les Chaînes

Corollaire 2.1. [17] *Le nombre de bondage d'une chaîne P_n , $n \geq 2$ est*

$$b(P_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \equiv 1[3], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le Nombre de Bondage dans les Graphes Complets

Proposition 2.1. [17] *Le nombre de bondage d'un graphe complet K_n , $n \geq 2$ est*

$$b(K_n) = \lceil n/2 \rceil.$$

Le Nombre de Bondage dans les Graphes Multipartis Complets

Théorème 2.2. [17] *Le nombre de bondage d'un graphe t -partie complet*

K_{n_1, n_2, \dots, n_t} , $t \geq 2$ tel que $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$ est

$$b(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = \begin{cases} \lceil m/2 \rceil & \text{si } n_m = 1 \text{ et } n_m \geq 2, \text{ avec } 1 \leq m < t, \\ 2t - 1 & \text{si } n_1 = n_2 = \dots = n_t = 2, \\ \sum_{i=1}^{t-1} n_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le Nombre de Bondage dans les Arbres

Théorème 2.3. [2, 17] *Si T est un arbre non trivial, alors $b(T) \leq 2$.*

Corollaire 2.2. [17] *Si T est un arbre non trivial qui admet un sommet support adjacent à au moins deux sommets pendants, alors $b(T) = 1$.*

Suite au problème posé dans [17] de caractérisation de tous les arbres avec $b(G) = 1$ Hartnell et Rall donnent la caractérisation des arbres avec $b(T) = 2$, voir [21].

2.1.2 Bornes Supérieures du Nombre de Bondage

Observation 2.1. [23] *Si k arêtes peuvent être enlevées d'un graphe G , pour obtenir un graphe partiel H avec $b(H) = 1$, alors $b(G) \leq k + 1$.*

Théorème 2.4. [2, 17] *Si G est un graphe non vide, alors $b(G) \leq \deg(u) + \deg(v) - 1$, pour toute paire de sommets u et v dans G telle que $d_G(u, v) \leq 2$.*

Corollaire 2.3. [2, 17] *Si G est un graphe sans sommets isolés, alors $b(G) \leq \delta(G) + \Delta(G) - 1$.*

Dans [21] Hartnell et Rall améliorent la borne du théorème 2.4.

Soit $G = (V, E)$ un graphe non vide, et soient A, B deux sous ensembles dans V , On désigne par $E(A, B)$ l'ensemble des arêtes $ab \in E$ avec $a \in A$ et $b \in B$, $|E(A, B)| = e(A, B)$.

Théorème 2.5. [21] *Si G est un graphe non vide, alors*

$$b(G) \leq \min_{u \in V, v \in N(u)} \{ \deg(u) + e(v, V - N[u]) \}.$$

Corollaire 2.4. [21] *Si G est un graphe non vide, alors*

$b(G) \leq \deg(u) + e(v, V - N[u])$, pour toute paire de sommets non adjacents u et v telle que $\gamma(G + uv) = \gamma(G)$.

Proposition 2.2. [2] *Si G est un graphe qui admet un sommet v tel que*

$$\gamma(G - v) \geq \gamma_L(G), \text{ alors } b(G) \leq \Delta(G).$$

Les bornes présentées dans les théorèmes 2.6, 2.7, 2.8 indiquent la relation entre $b(G)$ et d'autres paramètres comme $\gamma(G)$ et $\lambda(G)$.

Théorème 2.6. [21] *Si G est un graphe non vide avec $\lambda(G) \geq 1$, alors*

$$b(G) \leq \Delta(G) + \lambda(G) - 1.$$

Théorème 2.7. [17] Si G est un graphe non vide avec $\gamma(G) \geq 2$, alors

$$b(G) \leq (\gamma(G) - 1)\Delta(G) + 1.$$

Théorème 2.8. [17] Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$, alors

$$b(G) \leq n - \gamma(G) + 1.$$

Suite à ces résultats Fink, Jacobson, Kinch et Roberts [17] posent la conjecture suivante,

Conjecture 2.1. [17] Si G est un graphe non vide, alors $b(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Contre exemple de la conjecture 2.1

Brigham, Chinn et Dutton [10] définissent un sommet critique comme suit,

Définition 2.2. [10] v est un sommet critique si et seulement si $\gamma(G - v) < \gamma(G)$.

G est un « sommet domination-critique » si et seulement si tout sommet dans G est un sommet-critique, G est écrit *vc-graphe*.

Le concept des *vc*-graphes joue un très grand rôle dans l'étude du nombre de bondage. Teschner prouve dans [32] que tout contre exemple de la conjecture 2.1 est un *vc*-graphe et suite à la proposition 2.2, il donne le corollaire suivant,

Corollaire 2.5. [32] Si $b(G) > \Delta(G)$, alors $\gamma(G - v) < \gamma(G)$, pour tout sommet v dans G .

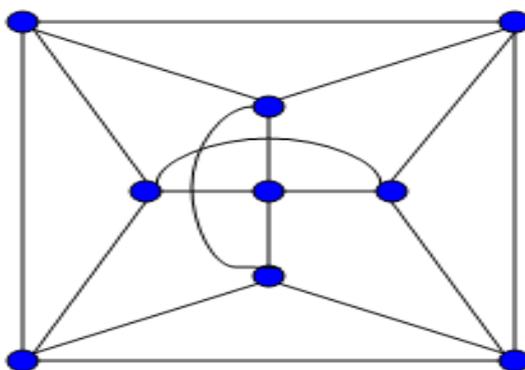


FIG. 2.1 – Le contre exemple

On peut vérifier que le graphe G de la figure 2.1 est un contre exemple de la conjecture 2.1, en effet $b(G) = 6 > \Delta(G) + 1 = 4 + 1$, de plus G est un vc -graphe.

Indépendamment, les auteurs de [21, 34] montrent que $b(K_n \square K_n) = \frac{3}{2}\Delta(K_n \square K_n)$, ce qui prouve qu'aucune borne supérieure de la forme $b(G) \leq \Delta(G) + c$, avec $c \in \mathbf{N}$, ne peut exister.

Théorème 2.9. [21, 34] *Le nombre de bondage du produit cartésien de deux graphes complets $K_n \square K_n$, $n \geq 3$ est $b(K_n \square K_n) = 3(n - 1) = \frac{3}{2}\Delta(K_n \square K_n)$.*

2.1.3 Le Nombre de Bondage Fractionnaire

Chvatal et Cook [14] ont montré que le problème du nombre de bondage $b(G)$ peut être représenté par un programme linéaire en nombre entier, ils donnent la définition suivante,

Définition 2.3. [14] *Un fouet F dans un graphe G est un graphe partiel de G tel que toute composante de F est une étoile et F a exactement $\gamma(G)$ composantes.*

On désigne par $W(G)$ l'ensemble de tous les fouets F dans G .

Par conséquent, $b(G)$ est la valeur de la solution optimale du programme linéaire suivant,

$$\begin{aligned}
 & \text{minimiser } \sum \{x_e : e \in E(G)\} \\
 & \sum \{x_e : e \in E(F)\} \geq 1 \quad \text{pour tout } F \in W(G), \\
 & x_e \geq 0 \quad \text{pour tout } e \in E(G). \\
 & x_e = \text{entier} \quad \text{pour tout } e \in E(G).
 \end{aligned} \tag{1}$$

On considère le programme linéaire relaxé du programme (1).

$$\begin{aligned}
 & \text{minimiser } \sum\{x_e : e \in E(G)\} \\
 & \sum\{x_e : e \in E(F)\} \geq 1 \quad \text{pour tout } F \in W(G), \\
 & x_e \geq 0 \quad \text{pour tout } e \in E(G).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Les auteurs de [14] ont défini le nombre de bondage fractionnaire $b^*(G)$. $b^*(G)$ est la valeur de la solution optimale du programme relaxé (2).

Théorème 2.10. [14] $b^*(G) \leq \Delta(G)$.

Théorème 2.11. [14] $b^*(P_n) = 3/2$ si $n \equiv 1[3]$, et $b^*(P_n) = 1$ sinon.

Théorème 2.12. [14] Si $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_t}$, $n_i \geq 2$, $i = 1, t$ est un graphe multipartite complet avec n sommets et m arêtes, alors $b^*(G) = m/(n - 2)$.

Théorème 2.13. [14] Si T est un arbre d'ordre n , alors $b^*(T) = (n - 1)/\lceil n/2 \rceil$.

2.2 Le Nombre de Bondage d'autres Paramètres de Domination

L'introduction du nombre de bondage a motivé l'étude des nombres de bondage par rapport à d'autres paramètres de domination.

2.2.1 Le Nombre de Bondage Pair

Dans [27], Raczek s'est investie dans l'étude du nombre de bondage pair. Nous donnons les résultats les plus importants qu'elle a obtenus.

Dans cette partie le graphe simple non vide $G = (V, E)$ est sans sommets isolés.

Définition 2.4. [27] *Le nombre de bondage pair $b_p(G)$ d'un graphe $G = (V, E)$ est la cardinalité du plus petit ensemble d'arêtes $E' \subseteq E$ pour lequel le nombre de domination pair du graphe partiel $G - E'$ sans sommets isolés augmente.*

$$b_p(G) = \min\{|E'|, E' \subseteq E \mid \gamma_p(G - E') > \gamma_p(G) \text{ et } G - E' \text{ est sans sommets isolés}\}.$$

Définition 2.5. [27] *Si pour tout sous ensemble d'arêtes E' de G , $G - E'$ contient des sommets isolés ou bien $\gamma_p(G - E') = \gamma_p(G)$, alors G est un graphe γ_p -fortement stable, on écrit $b_p(G) = 0$.*

Observation 2.2. [27] *Si k arêtes peuvent être enlevées d'un graphe G , pour obtenir un graphe partiel H avec $b_p(H) = 1$, alors $b_p(G) \leq k + 1$.*

Observation 2.3. [27] *Si une arête uv appartient à tout couplage parfait de tout γ_p -ensemble d'un graphe G avec $d_G(u) > 1$ et $d_G(v) > 1$, alors $b_p(G) = 1$.*

Proposition 2.3. [27] *Pour une chaîne $P_n, n \geq 6$, $1 \leq b_p(P_n) \leq 2$.*

Proposition 2.4. [27] *Soit $P_n, n \geq 2$ une chaîne, alors*

$$b_p(P_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \{2, 3, 5\}, \\ 1 & \text{si } n = 4k, n = 4k + 3 \text{ ou } n = 4k + 6, \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec k est un entier positif.

Corollaire 2.6. [27] *Soit $C_n, n \geq 3$ un cycle, alors*

$$b_p(P_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \{3, 5\}, \\ 2 & \text{si } n = 4k, \text{ ou } n = 4k + 3 \text{ ou } n = 4k + 6, \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

k est un entier positif.

Théorème 2.14. [27] *Pour tout entier positif k , il existe un arbre T avec $b_p(T) = k$.*

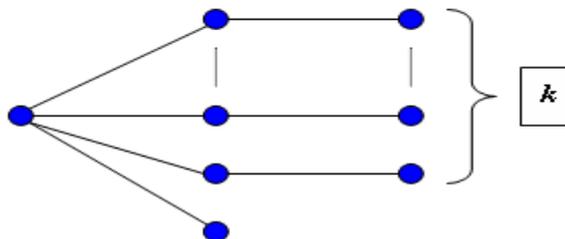


FIG. 2.2 – Un arbre T avec $b_p(G) = k$

Caractérisation des Arbres γ_p -Fortement Stables

Définition 2.6. [27] *Soit \mathcal{S} la famille des arbres définie comme suit,*

- \mathcal{S} contient P_2 .
- Les trois opérations suivantes prolongent un arbre $T \in \mathcal{S}$.
 - **Opération O_1** : joindre par l'arête xy un sommet support $y \in T$ à un sommet x .
 - **Opération O_2** : joindre par l'arête x_1y un sommet branche $y \in T$ à un sommet x_1 de la chaîne x_1x_2 .
 - **Opération O_3** : joindre par l'arête x_1y un sommet support $y \in T$ à un sommet x_1 de la chaîne $x_1x_2x_3$.

Théorème 2.15. [27] *T est un arbre γ_p -fortement stable si et seulement si $T \in \mathcal{S}$.*

2.2.2 Le Nombre de Bondage Restreint

Dans [22] Hatting et Plummer ont examiné le nombre de bondage restreint, nous donnons les plus importants résultats.

Définition 2.7. [22] *Le nombre de bondage restreint $b_r(G)$ d'un graphe $G = (V, E)$ est la cardinalité du plus petit ensemble d'arêtes $E' \subseteq E$ pour lequel le nombre de domination restreint du graphe partiel $G - E'$ augmente.*

$$b_r(G) = \min\{|E'|, E' \subseteq E \mid \gamma_r(G - E') > \gamma_r(G)\}.$$

Proposition 2.5. [22] *Pour un graphe complet K_n , $n \geq 3$,*

$$b_r(K_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3, \\ \lceil n/2 \rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 2.6. [22] *Si $n \geq 3$, alors*

$$b_r(C_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0[3], \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 2.16. [22] *Si P_n est une chaîne d'ordre $n \geq 4$, alors $b_r(P_n) = 1$.*

Théorème 2.17. [22] *Soit $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$, $t \geq 2$ avec $n_i \geq 2$ pour un certain $1 \leq i \leq t$, et soit $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_t}$, alors*

$$b_r(G) = \begin{cases} \lceil m/2 \rceil & \text{si } n_m = 1 \text{ et } n_{m+1} \geq 2 \ (1 \leq m < t), \\ 2t - 2 & \text{si } n_1 = n_2 = \dots = n_t = 2 \ (t \geq 2), \\ 2 & \text{si } n_1 = 2 \text{ et } n_2 \geq 3 \ (t = 2), \\ \sum_{i=1}^{t-1} n_i - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 2.18. [22] *Si $\delta(G) \geq 2$, alors*

$$b_r(G) \leq \min\{\deg(u) + \deg(v) - 2, uv \in E(G)\}.$$

Corollaire 2.7. [22] *Si $\delta(G) \geq 2$, alors $b_r(G) \leq \delta(G) + \Delta(G) - 2$.*

Théorème 2.19. [22] *Si $\gamma_r(G) \geq 2$, alors $b_r(G) \leq (\gamma_r(G) - 1)\Delta(G) + 1$.*

2.3 Le Concept des Graphes Critiques

Un graphe critique par rapport à un paramètre de domination π peut être défini de façons différentes en fonction de l'opération effectuée sur le graphe G .

Les problèmes classiques souvent étudiés dans la littérature sont les graphes critiques, suite à la suppression d'un sommet, la suppression d'une arête de G ou suite à l'ajout d'une arête e du complémentaire \overline{G} de G .

Selon [18], pour un graphe $G = (V, E)$, et un paramètre de domination π , G est dit

- π -critique si et seulement si $\pi(G - v) < \pi(G)$, pour tout sommet $v \in G$.
- π^+ -critique si et seulement si $\pi(G - v) > \pi(G)$, pour tout sommet $v \in G$.
- π -arête-critique si et seulement si $\pi(G + e) < \pi(G)$, pour toute arête $e \in \overline{G}$.
- π^+ -arête-critique si et seulement si $\pi(G + e) > \pi(G)$, pour toute arête $e \in \overline{G}$.
- π^- -arête enlevée-critique si et seulement si $\pi(G - e) < \pi(G)$, pour toute arête $e \in E$, G est écrit π^- -ER-critique.
- π -arête enlevée-critique si et seulement si $\pi(G - e) > \pi(G)$, pour toute arête $e \in E$, G est écrit π -ER-critique.

2.3.1 Quelques Graphes π -Arête Enlevée-Critiques

Nous exposons dans cette partie quelques résultats sur les graphes π -ER-critiques.

Il est clair que la suppression d'une arête e peut augmenter le nombre de domination $\gamma(G)$ par au plus un.

Les graphes G , ayant la propriété que pour toute arête $e \in G$, $\gamma(G - e) = \gamma(G) + 1$ ont été caractérisés séparément par Bauer [2], par Walikar et Acharya [35].

Théorème 2.20. [2, 35] *Un graphe G est γ -ER-critique si et seulement si G est une galaxie.*

Les auteurs de [35] ont également donné la caractérisation des graphes i -ER-critiques.

Proposition 2.7. [35] *Un graphe G est i -ER-critique si et seulement si G est une galaxie.*

On retrouve dans l'article [19] des résultats sur les graphes π -ER-critiques avec $\pi \in \{ir, \beta, \Gamma, IR\}$.

Proposition 2.8. [19] *Pour tout graphe $G = (V, E)$ non vide,*

- (a) $\beta(G - uv) \leq \beta(G) + 1$, pour toute arête $uv \in E$.
- (b) $\beta(G - uv) = \beta(G) + 1$, si et seulement s'il existe un β -ensemble B tel que $u \in B$ et $v \in pn_G(u, B)$.

Corollaire 2.8. [19]

- (a) $G = (V, E)$ est un graphe β -ER-critique si et seulement si $\beta(G - uv) = \beta(G) + 1$, pour toute arête $uv \in E$.
- (b) $G = (V, E)$ est un graphe β -ER-critique si et seulement si pour toute arête $uv \in E$, il existe un β -ensemble B tel que $u \in B$ et $v \in pn_G(u, B)$.

Comme $\beta \leq \Gamma \leq IR$ pour tout graphe G , si G est un graphe β -ER-critique et $\beta = \Gamma$, alors G est Γ -ER-critique, et si G est Γ -ER-critique et $\Gamma = IR$, alors G est IR -ER-critique.

Théorème 2.21. [16] *Un graphe G tel que $\gamma_d(G) < \infty$ et pour toute arête $e \in G$ $\gamma_d(G - e) = \infty$ si et seulement si G est l'union de sommets isolés et de chaînes disjointes de longueurs deux.*

Dans [31] Skaggs s'est penché sur l'étude des graphes critiques, arête critiques et arête enlevée critiques par rapport au code identifiant.

2.3.2 Quelques Graphes π^- -Arête Enlevée-Critiques

Nous terminons ce chapitre en donnant quelques résultats sur les graphes π^- -ER-critiques.

Proposition 2.9. [19] *Soit $\pi \in \{\gamma, \beta, \Gamma, IR\}$, pour tout graphe G non vide, il existe au moins une arête e dans G telle que $\pi(G - e) \geq \pi(G)$.*

Il s'ensuit de cette proposition qu'il n'existe aucun graphe π^- -ER-critique, pour $\pi \in \{\gamma, \beta, \Gamma, IR\}$.

Proposition 2.10. [19] *Si $m \geq 2$ et $n_i \geq 3, i = \overline{1, m}$, alors K_{n_1, n_2, \dots, n_m} est i^- -ER-critique.*

Cockayne, Favaron et Mynhardt ont étudié les graphes i^- -ER-critiques, voir [13].

Chapitre 3

Le Nombre de Bondage par rapport aux Paramètres γ_L et γ_L^t

Dans ce chapitre nous définissons et nous examinons le nombre de bondage par rapport à d'autres paramètres de domination. Nous nous investissons dans l'étude théorique du nombre de bondage localisateur $b_L(G)$ par rapport au nombre de domination localisatrice γ_L , nos résultats seront exposés dans la première section de ce chapitre. Dans la seconde section, nous présenterons la suite de notre étude du nombre de bondage total localisateur $b_L^t(G)$ par rapport au nombre de domination total localisatrice γ_L^t .

Nous considérons dans ce chapitre les graphes simples non vides.

3.1 Le Nombre de Bondage Localisateur

Comme tout graphe $G = (V, E)$ non vide admet au moins un graphe partiel $H = (V, \emptyset)$ tel que $\gamma_L(H) > \gamma_L(G)$, le nombre de bondage localisateur $b_L(G)$ d'un graphe G est bien défini.

Définition 3.1. *Le nombre de bondage localisateur $b_L(G)$ d'un graphe $G = (V, E)$ est la cardinalité du plus petit ensemble d'arêtes $E' \subseteq E$ pour lequel le nombre de domination localisatrice du graphe partiel $G - E'$ augmente.*

$$b_L(G) = \min\{|E'|, E' \subseteq E \mid \gamma_L(G - E') > \gamma_L(G)\}.$$

Dans la figure 3.1, l'ensemble des sommets colorés forment un $\gamma_L(G)$ -ensemble de cardinalité 3, il suffit d'enlever l'arête pendante pour obtenir un graphe partiel avec un nombre de domination localisatrice $\gamma_L = 4$, donc $b_L(G) = 1$.

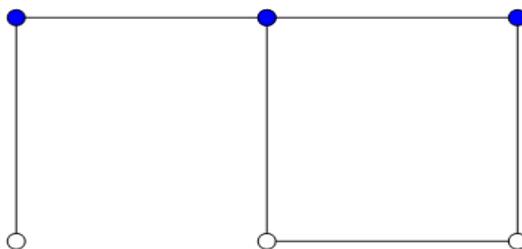


FIG. 3.1 – Un graphe G avec $b_L(G) = 1$

3.1.1 Valeurs Exactes du Nombre de Bondage Localisateur

Nous calculons dans cette partie des valeurs exactes du nombre de bondage localisateur pour certaines classes de graphes de structures simples.

Le Nombre de Bondage Localisateur dans les Chaînes

Proposition 3.1. *Le nombre de bondage localisateur d'une chaîne P_n , $n \geq 2$ est*

$$b_L(P_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \equiv 3[5], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Nous rappelons que le nombre de domination localisatrice d'une chaîne

P_n , $n \geq 2$ est (voir [30])

$$\gamma_L(P_n) = \begin{cases} 2\lceil n/5 \rceil - 1 & \text{si } n \equiv 1[5] \text{ ou } n \equiv 2[5], \\ 2\lceil n/5 \rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

La propriété est facilement vérifiée pour $n \leq 5$.

Soit maintenant $n \geq 6$. En enlevant une arête d'une chaîne P_n , considérons le cas où le graphe partiel H obtenu est composé de deux chaînes notées respectivement P_{n_1} et P_{n_2} avec $n_1 + n_2 = n$ et $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$. Nous discutons les cas suivants,

$$\text{Si } n \equiv 0[5], \text{ alors } \gamma_L(P_n) = 2\lceil n/5 \rceil \text{ et } \begin{cases} n_1 \equiv 0[5] & \text{et } n_2 \equiv 0[5], \\ \text{ou, } n_1 \equiv 1[5] & \text{et } n_2 \equiv 4[5], \\ \text{ou, } n_1 \equiv 2[5] & \text{et } n_2 \equiv 3[5]. \end{cases}$$

Considérons le cas où $n_1 \equiv 2[5]$ et $n_2 \equiv 3[5]$, calculons $\gamma_L(H)$.

$$\gamma_L(H) = \gamma_L(P_{n_1}) + \gamma_L(P_{n_2}) = 2\lceil n_1/5 \rceil - 1 + 2\lceil n_2/5 \rceil = 2(n_1 + 3)/5 - 1 + 2(n_2 + 2)/5 = 2(n/5) + 1 = 2\lceil n/5 \rceil + 1 > \gamma_L(P_n).$$

D'où $b_L(P_n) = 1$, pour $n \equiv 0[5]$.

$$\text{Si } n \equiv 1[5], \text{ alors } \gamma_L(P_n) = 2\lceil n/5 \rceil - 1 \text{ et } \begin{cases} n_1 \equiv 0[5] & \text{et } n_2 \equiv 1[5], \\ \text{ou, } n_1 \equiv 2[5] & \text{et } n_2 \equiv 4[5], \\ \text{ou, } n_1 \equiv 3[5] & \text{et } n_2 \equiv 3[5]. \end{cases}$$

Considérons le cas où $n_1 \equiv 3[5]$ et $n_2 \equiv 3[5]$, calculons $\gamma_L(H)$.

$$\gamma_L(H) = \gamma_L(P_{n_1}) + \gamma_L(P_{n_2}) = 2\lceil n_1/5 \rceil + 2\lceil n_2/5 \rceil = 2(n_1 + 2)/5 + 2(n_2 + 2)/5 = 2(n + 4)/5 = 2\lceil n/5 \rceil > \gamma_L(P_n).$$

D'où $b_L(P_n) = 1$, pour $n \equiv 1[5]$.

$$\text{Si } n \equiv 2[5], \text{ alors } \gamma_L(P_n) = 2\lceil n/5 \rceil - 1 \text{ et } \begin{cases} n_1 \equiv 0[5] & \text{et } n_2 \equiv 2[5], \\ \text{ou, } n_1 \equiv 1[5] & \text{et } n_2 \equiv 1[5], \\ \text{ou, } n_1 \equiv 3[5] & \text{et } n_2 \equiv 4[5]. \end{cases}$$

Considérons le cas où $n_1 \equiv 3[5]$ et $n_2 \equiv 4[5]$, calculons $\gamma_L(H)$.

$$\gamma_L(H) = \gamma_L(P_{n_1}) + \gamma_L(P_{n_2}) = 2\lceil n_1/5 \rceil + 2\lceil n_2/5 \rceil = 2(n_1 + 2)/5 + 2(n_2 + 1)/5 = 2(n + 3)/5 = 2\lceil n/5 \rceil > \gamma_L(P_n).$$

D'où $b_L(P_n) = 1$, pour $n \equiv 2[5]$.

Si $n \equiv 3[5]$, pour toute partition de P_n en deux composantes connexes C_{n_1} et C_{n_2}

$$\text{telle que } n_1 + n_2 = n \text{ et } \begin{cases} n_1 \equiv 0[5] & \text{et } n_2 \equiv 3[5], \\ \text{ou, } n_1 \equiv 1[5] & \text{et } n_2 \equiv 2[5], \\ \text{ou, } n_1 \equiv 4[5] & \text{et } n_2 \equiv 4[5]. \end{cases}$$

On a $\gamma_L(C_{n_1}) + \gamma_L(C_{n_2}) = \gamma_L(P_n)$, donc $b_L(P_n) \geq 2$.

En enlevant deux arêtes de P_n , considérons le graphe partiel H composé des deux sommets isolés n_1, n_2 et de la chaîne P_{n_3} , $n_3 \geq 2, n_3 \equiv 1[5]$ ($n_1 + n_2 + n_3 = n$), calculons $\gamma_L(H)$.

$$\gamma_L(H) = 2 + \gamma_L(P_{n_3}) = 2 + 2\lceil n_3/5 \rceil - 1 = 2 + 2(n_3 + 4)/5 - 1 = 2(n + 2)/5 + 1 = 2\lceil n/5 \rceil + 1 > \gamma_L(P_n), \text{ ainsi } b_L(P_n) \leq 2.$$

D'où $b_L(P_n) = 2$, pour $n \equiv 3[5]$.

$$\text{Si } n \equiv 4[5], \text{ alors } \gamma_L(P_n) = 2\lceil n/5 \rceil \text{ et } \begin{cases} n_1 \equiv 0[5] & \text{et } n_2 \equiv 4[5], \\ \text{ou, } n_1 \equiv 1[5] & \text{et } n_2 \equiv 3[5], \\ \text{ou, } n_1 \equiv 2[5] & \text{et } n_2 \equiv 2[5]. \end{cases}$$

Considérons le cas où $n_1 \equiv 1[5]$ et $n_2 \equiv 3[5]$, calculons $\gamma_L(H)$.

$$\gamma_L(H) = \gamma_L(P_{n_1}) + \gamma_L(P_{n_2}) = 2\lceil n_1/5 \rceil - 1 + 2\lceil n_2/5 \rceil - 2 = 2(n_1 + 4)/5 - 1 + 2(n_2 + 2)/5 - 2 = 2(n + 3)/5 + 1 = 2\lceil n/5 \rceil + 1 > \gamma_L(P_n).$$

D'où $b_L(P_n) = 1$, pour $n \equiv 4[5]$. \square

Le Nombre de Bondage Localisateur dans les Cycles

Corollaire 3.1. *Le nombre de bondage localisateur d'un cycle C_n , $n \geq 3$ est*

$$b_L(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \equiv 3[5], \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Nous rappelons que le nombre de domination localisatrice d'un cycle C_n , $n \geq 3$ est (voir [30])

$$\gamma_L(C_n) = \begin{cases} 2\lceil n/5 \rceil - 1 & \text{si } n \equiv 1[5] \text{ ou } n \equiv 2[5], \\ 2\lceil n/5 \rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

La propriété est facilement vérifiée pour $n \leq 5$.

Soit maintenant $n \geq 6$. Pour toute arête e de C_n , $\gamma_L(C_n - e) = \gamma_L(P_n) = \gamma_L(C_n)$, donc $b_L(C_n) \geq 2$.

Si $n \equiv 3[5]$. De la proposition 3.1, $b_L(P_n) = 2$. Donc pour tout couple d'arêtes $\{e, e'\}$ de C_n , on a $\gamma_L(C_n - \{e, e'\}) = \gamma_L(P_n - e') = \gamma_L(P_n) = \gamma_L(C_n)$, ainsi $b_L(C_n) \geq 3$.

D'autre part, considérons trois arêtes e, e' et e'' de C_n telles que

$$\gamma_L(C_n - \{e, e', e''\}) = \gamma_L(P_n - \{e', e''\}) > \gamma_L(P_n) = \gamma_L(C_n), \text{ ainsi } b_L(C_n) \leq 3.$$

D'où $b_L(C_n) = 3$, pour $n \equiv 3[5]$.

Si $n \not\equiv 3[5]$. De la proposition 3.1, $b_L(P_n) = 1$. Considérons deux arêtes e et e' de C_n telles que $\gamma_L(C_n - \{e, e'\}) = \gamma_L(P_n - e') > \gamma_L(P_n) = \gamma_L(C_n)$, ainsi $b_L(C_n) \leq 2$.

D'où $b_L(C_n) = 2$, pour $n \not\equiv 3[5]$. \square

Le Nombre de Bondage Localisateur dans les Graphes Complets

Proposition 3.2. *Le nombre de bondage localisateur d'un graphe complet K_n , $n \geq 2$ est $b_L(K_n) = n(n-1)/2$.*

Preuve. Comme le nombre de domination localisatrice d'un graphe complet K_n , $n \geq 2$ est $\gamma_L(K_n) = n-1$, le seul cas où le nombre de domination localisatrice peut

être augmenté est d'avoir un graphe partiel H tel que $\gamma_L(H) = n$, ce qui correspond au nombre de domination localisatrice du graphe partiel vide de K_n . Donc pour augmenter $\gamma_L(K_n)$ il faut enlever toutes les arêtes du graphe complet, ainsi

$$b_L(K_n) = n(n-1)/2. \quad \square$$

Le Nombre de Bondage Localisateur dans les Graphes Multipartis Complets

Théorème 3.1. *Le nombre de bondage localisateur d'un graphe t -partie complet K_{n_1, n_2, \dots, n_t} , $t \geq 2$ tel que $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$ est*

$$b_L(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = \begin{cases} n_2(n_1 - 1) & \text{si } t = 2 \text{ et } n_1 \geq 2, \\ n_1 \sum_{i=2}^t n_i & \text{si } t \geq 3 \text{ et } n_1 \geq 2, \\ n_2 & \text{si } t = 2 \text{ et } n_1 = 1, \\ \min\left\{ m \sum_{i=m+1}^t n_i + m(m-1)/2, \right. \\ \left. (n_{m+1} - 1) \sum_{i=1, i \neq m+1}^t n_i \right\} & \text{si } t \geq 3, n_m = 1, n_{m+1} \geq 2 \text{ et } 1 \leq m < t. \end{cases}$$

Preuve. Soit $K_{n_1, n_2, \dots, n_t} = (V, E)$, $t \geq 2$ un graphe t -partie complet tel que $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$. On note par N_i la partie de K_{n_1, n_2, \dots, n_t} de cardinalité n_i , $i = \overline{1, t}$. Nous avons vu dans le chapitre 1 que le nombre de domination localisatrice d'un graphe t -partie complet est

$$\gamma_L(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^t (n_i - 1) & \text{si } n_1 \geq 2, \\ n_2 & \text{si } t = 2 \text{ et } n_1 = 1. \end{cases}$$

et on peut conclure que,

$$\gamma_L(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = \sum_{i=m+1}^t (n_i - 1) + (m - 1) \quad \text{si } t \geq 3, n_m = 1, n_{m+1} \geq 2 \text{ et } 1 \leq m < t.$$

1^{er} cas. $n_1 \geq 2$.

Si $t = 2$. Observons d'abord que le graphe partiel H obtenu de K_{n_1, n_2} en enlevant les $n_2(n_1 - 1)$ arêtes incidentes aux $n_1 - 1$ sommets de N_1 est isomorphe au graphe $\underbrace{K_1 \cup \dots \cup K_1}_{n_1-1 \text{ fois}} \cup K_{1, n_2}$, ce qui fait que $\gamma_L(H) = n_1 + n_2 - 1 > \gamma_L(K_{n_1, n_2})$, donc $b_L(K_{n_1, n_2}) \leq n_2(n_1 - 1)$. D'autre part, dans tout graphe partiel H obtenu en enlevant au plus $n_2(n_1 - 1) - 1$ arêtes de K_{n_1, n_2} , il existe au moins deux sommets non isolés x et y et au moins un sommet de degré supérieur ou égale à deux dans N_1 , sans perte de généralité soit $\deg(x) \geq 2$ et dans ce cas le sous ensemble $(N_1 \setminus \{x\}) \cup (N_2 \setminus \{y'\})$ où $y' \in N_{K_{n_1, n_2}}(y)$, est un E.D.L. du graphe H , donc $\gamma_L(H) \leq \gamma_L(K_{n_1, n_2})$, alors $b_L(K_{n_1, n_2}) \geq n_2(n_1 - 1)$, ainsi $b_L(K_{n_1, n_2}) = n_2(n_1 - 1)$.

Si $t > 2$. Comme tout $\gamma_L(K_{n_1, n_2, \dots, n_t})$ -ensemble contient exactement $n_i - 1$ sommets de chaque partie N_i , pour augmenter le nombre de domination localisatrice du graphe t -partie complet, il faut enlever le minimum d'arêtes pour obtenir un graphe partiel H tel que tout $\gamma_L(H)$ -ensemble contient au moins tous les sommets d'une partie N_i et $n_j - 1$ sommets de chaque partie N_j , $j \neq i$, $i, j = \overline{1, t}$. Pour cela, il faut supprimer le minimum d'arêtes de telle manière à obtenir un graphe partiel qui contient n_i sommets isolés d'une partie N_i , et comme

$$n_1 \sum_2^t n_i \leq n_k \sum_{1, i \neq k}^t n_i, \forall k \neq 1,$$

on a,

$$\min\{n_j \sum_{i \neq j} n_i, i, j = 1, t\} = n_1 \sum_2^t n_i.$$

Donc le minimum d'arêtes à enlever est atteint pour la partie N_1 , en effet, si nous isolons les sommets de la partie N_1 , le graphe partiel H obtenu est isomorphe au graphe $\underbrace{K_1 \cup \dots \cup K_1}_{n_1 \text{ fois}} \cup K_{n_2, \dots, n_t}$, et il est de nombre de domination localisatrice

strictement supérieur à celui de K_{n_1, n_2, \dots, n_t} , ainsi $b_L(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = n_1 \sum_2^t n_i$.

2^{ème} cas. $n_1 = 1$.

Si $t = 2$. On a d'une part $\gamma_L(K_{1,n_2} - E) = n_2 + 1 > \gamma_L(K_{1,n_2})$ et d'autre part, $\forall E' \subset E$ on a $\gamma_L(K_{1,n_2} - E') = \gamma_L(K_{1,n_2})$, il s'ensuit que $b_L(K_{1,n_2}) = |E| = n_2$.

Si $t > 2$. Posons $M = \bigcup_{i=1}^m N_i$, $|M| = m$, comme tout $\gamma_L(K_{n_1,n_2,\dots,n_t})$ -ensemble contient respectivement $n_i - 1$ et $m - 1$ sommets des parties $N_i, i \geq m + 1$ et M , afin d'augmenter $\gamma_L(K_{n_1,n_2,\dots,n_t})$, il faut enlever le minimum d'arêtes pour

obtenir un graphe partiel H tel que tout $\gamma_L(H)$ -ensemble doit comprendre au moins tous les sommets de la partie M ou d'une partie $N_i, i \geq m + 1$. Pour cela, dans le premier cas il faut isoler tout les sommets de la partie M , ceci revient

donc à enlever les $m \sum_{i=m+1}^t n_i + m(m-1)/2$ arêtes, d'où on a

$$\gamma_L(H) = \gamma_L(\underbrace{K_1 \cup \dots \cup K_1}_{m \text{ fois}} \cup K_{n_{m+1}, \dots, n_t}) = m + \gamma_L(K_{n_{m+1}, \dots, n_t}) > \gamma_L(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}).$$

Ou bien, isoler tout les sommets sauf un d'une partie $N_i, i \geq m + 1$, et comme

$$- \sum_{i=1, i \neq m+1}^t n_i \leq - \sum_{i=1, i \neq k}^t n_i, \forall k \geq m + 2,$$

et

$$n_{m+1} \sum_{i=1, i \neq m+1}^t n_i \leq n_k \sum_{i=1, i \neq k}^t n_i, \forall k \geq m + 2,$$

on a,

$$\min\{(n_j - 1) \sum_{i \neq j} n_i, \quad \left. \begin{array}{l} i = \overline{1, t} \\ j = \overline{m + 1, t} \end{array} \right\} = (n_{m+1} - 1) \sum_{i \neq m+1} n_i.$$

En effet, le graphe partiel $H = \underbrace{K_1 \cup \dots \cup K_1}_{n_{m+1}-1 \text{ fois}} \cup K_{n_1, \dots, n_m, 1, n_{m+2}, \dots, n_t}$ obtenu de

K_{n_1, n_2, \dots, n_t} en supprimant les $(n_{m+1} - 1) \sum_{i \neq m+1}^t n_i$ arêtes incidentes aux sommets

de la partie N_{m+1} est tel que $\gamma_L(H) = \sum_{i=m+1}^t (n_i - 1) + m > \gamma_L(K_{n_1, n_2, \dots, n_t})$.

Ainsi, il reste à choisir le nombre minimum entre $m \sum_{i=m+1}^t n_i + m(m-1)/2$ et

$(n_{m+1} - 1) \sum_{i \neq m+1} n_i$, pour obtenir la valeur du nombre de bondage localisateur.

Par conséquent,

$$b_L(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) = \min\left\{m \sum_{i=1, i \neq m+1}^t n_i + m(m-1)/2, (n_{m+1} - 1) \sum_{i=1, i \neq m+1}^t n_i\right\}. \quad \square$$

3.1.2 Bornes Supérieures du Nombre de Bondage Localisateur

Nous commençons cette partie par établir des bornes supérieures du nombre de bondage localisateur dans la classe des arbres.

Le Nombre de Bondage Localisateur dans les Arbres

Théorème 3.2. *Si T est un arbre non trivial, alors $b_L(T) \leq \Delta(T)$.*

Preuve. Soient, $T = (V, E)$ un arbre non trivial et v un sommet support de T . Nous notons par $L_v = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$, $k \geq 1$ l'ensemble des sommets pendants voisins à v et par E_v l'ensemble des arêtes incidentes à v . Considérons le graphe partiel $H = (T - E_v)$. Tout dominant localisateur minimum D_L de H contient le sous-ensemble de sommets $\{v\} \cup L_v$. L'ensemble $D_L \setminus \{w_1\}$ est un dominant localisateur de l'arbre T de cardinalité strictement inférieure au nombre de domination localisatrice du graphe H , d'où $b_L(T) \leq |E_v| = d_T(v) \leq \Delta(T)$. \square

Il s'ensuit du théorème 3.2, le corollaire suivant,

Corollaire 3.2. *Si T est un arbre non trivial avec $l(T)$ sommets pendants, alors $b_L(T) \leq l(T)$.*

Corollaire 3.3. *Si T est un arbre non trivial qui admet un sommet support de degré deux, alors $b_L(T) \leq 2$.*

Preuve. Soit $S(T)$ l'ensemble des sommets supports de l'arbre T . Pour tout sommet $v \in S(T)$, $\gamma_L(T - E_v) > \gamma_L(T)$, où E_v est l'ensemble des arêtes incidentes à v . Donc $b_L(T) \leq \min\{d_T(v), v \in S(T)\}$, et comme T admet un sommet support v de degré deux, $\min\{d_T(v), v \in S(T)\} = 2$, ainsi $b_L(T) \leq 2$. \square

Il conséquent du théorème 3.1, le corollaire suivant,

Corollaire 3.4. *Le nombre de bondage localisateur d'une étoile $K_{1,n}$, $n \geq 1$ est $b_L(K_{1,n}) = n$.*

Nous présentons les résultats obtenus suite à notre étude des arbres dans cette inéquation $b_L(T) \leq \min\{d_T(v), v \in S(T)\} \leq \Delta(T) \leq l(T)$.

En considérant $b_L(T) \leq l(T)$, cette borne n'est pas atteinte pour tous les arbres, en particulier si le degré maximum de T est strictement inférieur au nombre de sommets pendants ou bien strictement supérieur au degré minimum des sommets supports de T . La question qu'on se pose est, pour quels arbres cette borne est atteinte ?

Proposition 3.3. *$b_L(T) = l(T)$ si et seulement si T est une chaîne P_n , $n \equiv 3[5]$ ou T est une étoile $K_{1,n}$, $n \geq 2$.*

Preuve. La borne du nombre de bondage localisateur est atteinte si et seulement si $b_L(T) = \min\{d_T(v), v \in S(T)\} = \Delta(T) = l(T)$.

La condition suffisante.

Soit $T = P_n$, $n \equiv 3[5]$. De la proposition 3.1, $b_L(P_n) = 2$. D'autre part, $\min\{d_{P_n}(v), v \in S(P_n)\} = \Delta(P_n) = l(P_n) = 2$. D'où l'égalité.

Soit $T = K_{1,n}$, $n \geq 2$. Du corollaire 3.4, $b_L(K_{1,n}) = n$. D'autre part, $\min\{d_{K_{1,n}}(v), v \in S(K_{1,n})\} = \Delta(K_{1,n}) = l(K_{1,n}) = n$. D'où l'égalité.

La condition nécessaire.

Pour $l(T) = 2$, T est une chaîne. De la proposition 3.1, $b_L(P_n) = 2 \Leftrightarrow n \equiv 3[5]$.

Pour $l(T) \geq 3$. Soit T un arbre tel que $b_L(T) = \min\{d_T(v), v \in S(T)\} = \Delta(T) = l(T)$ et supposons que $T \neq K_{1,n}$, $n \geq 2$. Donc T admet au moins deux supports v et v' et forcément $d_T(v) = d_T(v') = \Delta(T)$, et comme v et v' sont reliés par une unique chaîne, T a au moins $2(\Delta(T) - 1)$ sommets pendants, $l(T) \geq 2(\Delta(T) - 1)$ mais $\Delta(T) = l(T)$.

Il résulte que $l(T) \leq 2$, contradiction.

Ainsi la borne du nombre de bondage localisateur n'est atteinte que si T est une

chaîne P_n , $n \equiv 3[5]$ ou T est une étoile $K_{1,n}$, $n \geq 2$. \square

Nous terminons cette partie en donnant des bornes supérieures du nombre de bondage localisateur pour des graphes de structure plus générale.

Observation 3.1. *Si k arêtes peuvent être enlevées d'un graphe G , avec tout graphe partiel H de G vérifie $\gamma_L(H) \geq \gamma_L(G)$, pour obtenir un graphe partiel H avec $b_L(H) = 1$, alors $b_L(G) \leq k + 1$.*

Théorème 3.3. *Si G est un graphe tel que tout graphe partiel H vérifie*

$$\gamma_L(H) \geq \gamma_L(G), \text{ alors}$$

$$b_L(G) \leq \min\{\deg(u) + \deg(v) - 1, u \text{ et } v \text{ sont des sommets voisins dans } G\}.$$

Preuve. Soient u et v deux sommets voisins d'un graphe $G = (V, E)$. Nous notons par E_x l'ensemble des arêtes incidentes à un sommet $x \in V$. Considérons le graphe partiel $H = G - E'$ avec $E' = (E_u \cup E_v) - \{uv\}$. Il est clair que $b_L(H) = 1$ et comme $|(E_u \cup E_v) - \{uv\}| = \deg(u) + \deg(v) - 2$, il s'ensuit de l'observation 3.1 que $b_L(G) \leq \deg(u) + \deg(v) - 1$. Ainsi

$$b_L(G) \leq \min\{\deg(u) + \deg(v) - 1, u \text{ et } v \text{ sont des sommets voisins dans } G\}. \square$$

Corollaire 3.5. *Si G est un graphe sans sommets isolés tel que tout graphe partiel H vérifie $\gamma_L(H) \geq \gamma_L(G)$, alors $b_L(G) \leq \delta(G) + \Delta(G) - 1$.*

Preuve. Soient u et v deux sommets adjacents d'un graphe $G = (V, E)$ tels que $\deg(u) = \delta(G)$. Nous déduisons du théorème 3.1 que $b_L(G) \leq \delta(G) + \deg(v) - 1$, ceci implique que $b_L(G) \leq \delta(G) + \Delta(G) - 1$. \square

Proposition 3.4. *Si H est un graphe partiel d'un arbre T non trivial, alors*

$$\gamma_L(H) \geq \gamma_L(T).$$

Preuve. Soit $T = (V, E)$ un arbre non trivial. Supposons qu'il existe au moins un graphe partiel $H = T - E'$, $E' \subseteq E$ tel que $\gamma_L(H) < \gamma_L(T)$. Considérons un $\gamma_L(H)$ -ensemble D_L . En rajoutant l'ensemble des arêtes E' à H , il est clair que pour

toute paire de sommets u et v de $V \setminus D_L$ les ensembles $N_G(u) \cap D_L$ et $N_G(v) \cap D_L$ sont différents et non vides. Alors D_L est un ensemble dominant localisateur de l'arbre T . D'où $\gamma_L(T) \leq |D_L| = \gamma_L(H) < \gamma_L(T)$, contradiction. \square

Du corollaire 3.5 et de la proposition 3.4, nous pouvons déduire les bornes du nombre de bondage localisateur des chaînes et des arbres.

Proposition 3.5. *Si G est un graphe qui admet un sommet v tel que $\gamma_L(G - v) \geq \gamma_L(G)$, alors $b_L(G) \leq \Delta(G)$.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit v un sommet de G tel que $\gamma_L(G - v) \geq \gamma_L(G)$. On a $\gamma_L(G - v) = \gamma_L(G - E_v) - 1$, avec E_v est l'ensemble des arêtes incidentes à v . Il résulte que $\gamma_L(G - E_v) \geq \gamma_L(G) + 1 > \gamma_L(G)$. Ainsi $b_L(G) \leq |E_v| = \deg v \leq \Delta(G)$. \square

Comme conséquence immédiate de la proposition 3.5, on a le corollaire suivant,

Corollaire 3.6. *Si $b_L(G) > \Delta(G)$, alors $\gamma_L(G - v) < \gamma_L(G)$, pour tout sommet v de G .*

Remarquons que la proposition 3.5 s'applique au cas des cycles C_n lorsque $n \not\equiv 3[5]$, par contre le corollaire 3.6 s'applique au cas des cycles C_n lorsque $n \equiv 3[5]$ et au cas des graphes complets d'ordre strictement supérieur à deux.

Nous considérons maintenant les graphes simples non vides et sans sommets isolés.

3.2 Le Nombre de Bondage Total Localisateur

Puisque le concept de la domination totale localisatrice n'est défini que pour les graphes simples et sans sommets isolés et du fait que dans certains cas le graphe

partiel H d'un graphe G peut contenir des sommets isolés, le nombre de bondage total localisateur $b_L^t(G)$ n'est pas défini pour tout graphe G .

Définition 3.2. *Le nombre de bondage total localisateur $b_L^t(G)$ d'un graphe $G=(V, E)$ est la cardinalité du plus petit ensemble d'arêtes $E' \subset E$ pour lequel le nombre de domination total localisatrice du graphe partiel $G - E'$ sans sommets isolés augmente.*
 $b_L^t(G) = \min\{|E'|, E' \subset E \mid \gamma_L^t(G - E') > \gamma_L^t(G) \text{ et } \delta(G - E') \neq 0\}$.

Dans la figure 3.2, l'ensemble des sommets colorés forment un $\gamma_L^t(G)$ -ensemble de cardinalité 3, il suffit d'enlever l'arête en pointillé pour obtenir un graphe partiel avec un nombre de domination localisatrice $\gamma_L^t = 4$, donc $b_L^t(G) = 1$.

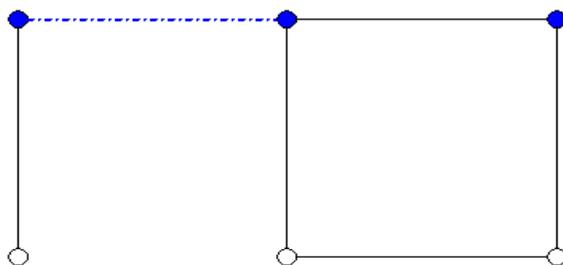


FIG. 3.2 – Un graphe G avec $b_L^t(G) = 1$

Définition 3.3. *Un graphe G est dit γ_L^t -fortement stable si pour tout sous ensemble d'arêtes E' de G , $G - E'$ contient des sommets isolés ou bien $\gamma_L^t(G - E') \leq \gamma_L^t(G)$. Par convention G est un graphe γ_L^t -fortement stable si et seulement si $b_L^t(G) = 0$.*

Observons que pour tout sous ensemble d'arêtes E' de la chaîne P_2 ou du cycle C_3 , le nombre de domination total localisatrice ne peut être augmenté, donc $b_L^t(P_2) = b_L^t(C_3) = 0$.

3.2.1 Valeurs Exactes du Nombre de Bondage Total Localisateur

Nous calculons dans ce qui suit la valeur exacte du nombre de bondage total localisateur des chaînes, des cycles, des graphes complets et des graphes bipartis complets.

Le Nombre de Bondage Total Localisateur dans les Chaînes

Proposition 3.6. *Le nombre de bondage total localisateur d'une chaîne P_n , $n \geq 2$ est*

$$b_L^t(P_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \{2, 3\}, \\ 2 & \text{si } n \equiv 2[4], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Nous rappelons que le nombre de domination total localisatrice d'une chaîne P_n , $n \geq 2$ est (voir [25])

$$\gamma_L^t(P_n) = \begin{cases} 2\lceil n/4 \rceil - 1 & \text{si } n \equiv 1[4], \\ 2\lceil n/4 \rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut vérifier facilement que $b_L^t(P_2) = b_L^t(P_3) = 0$.

Soit maintenant $n \geq 4$. Considérons le graphe partiel H composé des deux chaînes P_{n_1} et P_{n_2} , ($n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$ et $n_1 + n_2 = n$), obtenu en enlevant une arête de la chaîne P_n . Nous discutons les cas suivants,

Si $n \equiv 0[4]$, alors $\gamma_L^t(P_n) = 2\lceil n/4 \rceil$.

Il suffit de prendre $n_1 \equiv 2[4]$ et $n_2 \equiv 2[4]$, calculons $\gamma_L^t(H)$.

$$\gamma_L^t(H) = \gamma_L^t(P_{n_1}) + \gamma_L^t(P_{n_2}) = 2\lceil n_1/4 \rceil + 2\lceil n_2/4 \rceil = 2(n_1 + 2)/4 + 2(n_2 + 2)/4 = 2(n/4) + 2 = 2\lceil n/4 \rceil + 2 > \gamma_L^t(P_n).$$

D'où $b_L^t(P_n) = 1$, pour $n \equiv 0[4]$.

Si $n \equiv 1[4]$, alors $\gamma_L^t(P_n) = 2\lceil n/4 \rceil - 1$.

Il suffit de prendre $n_1 \equiv 2[4]$ et $n_2 \equiv 3[4]$, calculons $\gamma_L^t(H)$.

$$\gamma_L^t(H) = \gamma_L^t(P_{n_1}) + \gamma_L^t(P_{n_2}) = 2\lceil n_1/4 \rceil + 2\lceil n_2/4 \rceil = 2(n_1 + 2)/4 + 2(n_2 + 1)/4 = 2(n + 3/4) = 2\lceil n/4 \rceil > \gamma_L^t(P_n).$$

D'où $b_L^t(P_n) = 1$, pour $n \equiv 1[4]$.

Si $n \equiv 2[4]$, alors $\gamma_L^t(P_n) = 2\lceil n/4 \rceil$.

Pour toute partition de la chaîne P_n en deux composantes connexes C_{n_1} et C_{n_2} ,

$$n_1 + n_2 = n \text{ et } \begin{cases} n_1 \equiv 0[4] & \text{et } n_2 \equiv 2[4], \\ \text{ou, } n_1 \equiv 1[4] & \text{et } n_2 \equiv 1[4], \\ \text{ou, } n_1 \equiv 3[4] & \text{et } n_2 \equiv 3[4]. \end{cases}$$

Il résulte que $\gamma_L^t(C_{n_1}) + \gamma_L^t(C_{n_2}) = \gamma_L(P_n)$, donc $b_L^t(P_n) \geq 2$.

Sans perte de généralité considérons les trois chaînes P_{n_1} , P_{n_2} et P_{n_3} avec $n_i \geq 2$,

$n_i \not\equiv 1[4]$ et $\sum n_i = n$ pour $i = \overline{1, 3}$, obtenues en enlevant deux arêtes de P_n , on a

$$\gamma_L^t(P_{n_1}) + \gamma_L^t(P_{n_2}) + \gamma_L^t(P_{n_3}) = 2\lceil n_1/4 \rceil + 2\lceil n_2/4 \rceil + 2\lceil n_3/4 \rceil = 2(n_1 + 2)/4 + 2(n_2 + 2)/4 + (n_3 + 2)/4 = 2(n + 2/4) + 2 = 2\lceil n/4 \rceil + 2 > \gamma_L(P_n), \text{ ainsi } b_L^t(P_n) \leq 2.$$

D'où $b_L^t(P_n) = 2$, pour $n \equiv 2[4]$.

Si $n \equiv 3[4]$, alors $\gamma_L^t(P_n) = 2\lceil n/4 \rceil$.

Il suffit de prendre $n_1 \equiv 1[4]$ et $n_2 \equiv 2[4]$, calculons $\gamma_L^t(H)$.

$$\gamma_L^t(H) = \gamma_L^t(P_{n_1}) + \gamma_L^t(P_{n_2}) = 2\lceil n_1/4 \rceil - 1 + 2\lceil n_2/4 \rceil = 2(n_1 + 3)/4 - 1 + 2(n_2 + 2)/4 = 2(n + 1/4) + 1 = 2\lceil n/4 \rceil + 1 > \gamma_L^t(P_n).$$

D'où $b_L^t(P_n) = 1$, pour $n \equiv 3[4]$. \square

Le Nombre de Bondage Total Localisateur dans les Cycles

Corollaire 3.7. *Le nombre de bondage total localisateur d'un cycle C_n , $n \geq 3$ est*

$$b_L^t(C_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 3, \\ 3 & \text{si } n \equiv 2[4], \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Nous pouvons d eduire que le nombre de domination total localisatrice d'un cycle C_n , $n \geq 3$ est

$$\gamma_L^t(C_n) = \begin{cases} 2\lceil n/4 \rceil - 1 & \text{si } n \equiv 1[4], \\ 2\lceil n/4 \rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $n = 3$, $b_L^t(C_3) = 0$.

Soit maintenant $n \geq 4$. Pour toute arête e de C_n , $\gamma_L^t(C_n - e) = \gamma_L^t(P_n) = \gamma_L^t(C_n)$.

Donc $b_L^t(C_n) \geq 2$.

Si $n \equiv 2[4]$. De la proposition 3.6, $b_L^t(P_n) = 2$. Donc pour tout couple d'arêtes $\{e, e'\}$ de C_n on a $\gamma_L^t(C_n - \{e, e'\}) = \gamma_L^t(P_n - e') = \gamma_L^t(P_n) = \gamma_L^t(C_n)$, ainsi $b_L^t(C_n) \geq 3$.

D'autre part, considérons trois arêtes e, e' et e'' de C_n telles que

$$\gamma_L^t(C_n - \{e, e', e''\}) = \gamma_L^t(P_n - \{e', e''\}) > \gamma_L^t(P_n) = \gamma_L^t(C_n), \text{ ainsi } b_L^t(C_n) \leq 3.$$

D'o u $b_L^t(C_n) = 3$, pour $n \equiv 2[4]$.

Si $n \not\equiv 2[4]$. De la proposition 3.6, $b_L^t(P_n) = 1$. Considérons deux arêtes e et e' de C_n telles que $\gamma_L(C_n - \{e, e'\}) = \gamma_L^t(P_n - e') > \gamma_L^t(P_n) = \gamma_L^t(C_n)$, ainsi $b_L^t(C_n) \leq 2$.

D'o u $b_L^t(C_n) = 2$, pour $n \not\equiv 2[4]$. \square

Le Nombre de Bondage Total Localisateur dans les Graphes Compl ets

Observation 3.2. *Si G est un graphe d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_L^t(G) = n$ si et seulement si $G = \bigcup K_2$.*

Proposition 3.7. *Le nombre de bondage total localisateur d'un graphe complet K_n d'ordre pair n , $n \geq 4$ est $b_L^t(K_n) = n(n-2)/2$.*

Preuve. Nous pouvons vérifier que $\gamma_L^t(K_n) = \gamma_L(K_n) = n-1$, $n \geq 3$.

Soit $K_n = (V, E)$ un graphe complet d'ordre pair n , $n \geq 4$. Remarquons d'une part que le graphe partiel H de K_n isomorphe au graphe $\underbrace{K_2 \cup \dots \cup K_2}_{n/2 \text{ fois}}$ est tel que $\gamma_L^t(H) = n > \gamma_L^t(K_n) = n-1$, alors $b_L^t(K_n) \leq n(n-1)/2 - n/2 = n(n-2)/2$. D'autre part, tout graphe partiel sans sommets isolés $H = K_n - E'$, $E' \subset E$ avec $|E'| < n(n-2)/2$, admet au moins une composante connexe $C_{n'}$, $n' \geq 3$. De l'observation 3.2, $\gamma_L^t(C_{n'}) \leq n'-1$, donc $\gamma_L^t(H) \leq n-1$, ceci implique que $b_L^t(K_n) \geq n(n-2)/2$. Ainsi $b_L^t(K_n) = n(n-2)/2$. \square

Le Nombre de Bondage Total Localisateur dans les Graphes Bipartis Complets

Observation 3.3. *Si G est un graphe d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_L^t(G) = n-1$ si et seulement si G est l'union de K_n et de $K_{1,p}$, $p \geq 2$.*

Théorème 3.4. *Le nombre de bondage total localisateur d'un graphe biparti complet K_{n_1, n_2} , tel que $n_1 \leq n_2$ est*

$$b_L^t(K_{n_1, n_2}) = \begin{cases} n_2(n_1 - 1) & \text{si } n_1 \geq 2, \\ 0 & \text{si } n_1 = 1. \end{cases}$$

Preuve. Soit $K_{n_1, n_2} = (V, E)$ un graphe biparti complet tel que $n_1 \leq n_2$. Nous pouvons vérifier que le nombre de domination total localisatrice d'un graphe biparti complet est

$$\gamma_L^t(K_{n_1, n_2}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^2 (n_i - 1) & \text{si } n_1 \geq 2, \\ n_2 & \text{si } n_1 = 1 \text{ et } n_2 \geq 2, \\ 2 & \text{si } n_1 = n_2 = 1. \end{cases}$$

1^{er} cas. $n_1 \geq 2$.

D'une part, supposons que $b_L^t(K_{n_1, n_2}) < n_2(n_1 - 1)$. Donc il existe un sous ensemble d'arêtes $E' \subset E$ et $|E'| < n_2(n_1 - 1)$ tel que $\gamma_L^t(K_{n_1, n_2} - E') > \gamma_L^t(K_{n_1, n_2})$. Tout graphe partiel sans sommets isolés $H = K_{n_1, n_2} - E', |E'| < n_2(n_1 - 1)$, soit il contient au moins une composante connexe $C_{n'}, n' \geq 4$ qui n'est pas une étoile ni un graphe complet, de l'observation 3.3, $\gamma_L^t(C_{n'}) \leq n' - 2$, soit il contient au moins deux étoiles $C_{n'}, n' \geq 3$, avec $\gamma_L^t(C_{n'}) = n' - 1$. Donc $\gamma_L^t(H) \leq \gamma_L^t(K_{n_1, n_2})$, contradiction. Ainsi $b_L^t(K_{n_1, n_2}) \geq n_2(n_1 - 1)$.

D'autre part, si $n_1 = n_2$. Soit le graphe partiel sans sommets isolés $H = \underbrace{K_{1,1}}_{n_1 \text{ fois}}$ obtenu de K_{n_1, n_2} en supprimant $n_2(n_1 - 1)$ arêtes. On a $\gamma_L^t(H) = n_1 + n_2$. Et si $n_1 < n_2$. Considérons le graphe partiel $H = \underbrace{K_{1,1}}_{n_1 - 1 \text{ fois}} \cup K_{1, n_2 - n_1 + 1} = K_{n_1, n_2} - E'$ avec $|E'| = n_2(n_1 - 1)$, H est sans sommets isolés. Il est facile de vérifier que $\gamma_L^t(H) = n_1 + n_2 - 1$. Alors dans les deux cas $b_L^t(K_{n_1, n_2}) \leq n_2(n_1 - 1)$.

Ainsi $b_L^t(K_{n_1, n_2}) = n_2(n_1 - 1)$.

2^{ème} cas. $n_1 = 1$.

K_{1, n_2} est une étoile, donc tout graphe partiel de K_{1, n_2} contient au moins un sommet isolé, ainsi $b_L^t(K_{1, n_2}) = 0$. \square

3.2.2 Caractérisation des Arbres γ_L^t -Fortement Stables

Comme il est difficile de trouver une borne supérieure du nombre de bondage total localisateur pour les arbres, nous nous sommes contentés de donner une structure constructive des arbres γ_L^t -fortement stables.

Pour cela nous définissons la famille des arbres \mathcal{K} .

Définition 3.4. Soit \mathcal{K} la famille des arbres définie comme suit,

$\mathcal{K} = \{\text{Étoile}, T/T \text{ est construit à partir de deux arbres } K \text{ et } S \text{ de } \mathcal{K} \setminus P_2 \text{ par l'opération } \mathcal{I}\}.$

- **Opération \mathcal{I}** : Joindre par l'arête ss' un sommet support s à un autre sommet support s' .

Observation 3.4. Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$, alors tout γ_L^t -ensemble D_L^t de G contient au moins l'ensemble de tous les sommets supports $S(G)$ et $l(G) - s(G)$ sommets pendants.

Observation 3.5. Un arbre $T \in \mathcal{K}$ est construit de sorte que,

- (i) $V(T) \setminus (S(T) \cup L(T)) = \emptyset.$
- (ii) $\gamma_L^t(T) = l(T).$
- (iii) Tout sommet support d'un arbre $T \neq P_2$ est fort.
- (iv) $T - uv$ a deux composantes connexes T_u, T_v dans $\mathcal{K} \setminus P_2$, pour toute arête non pendante uv de T .

Exemples

P_2 et P_3 sont des arbres de \mathcal{K} .

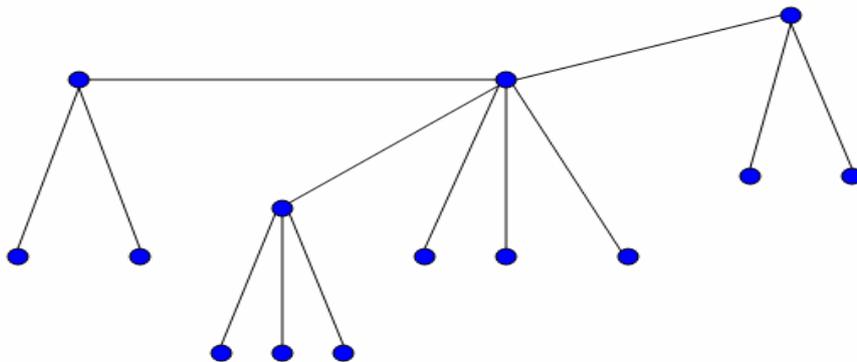


FIG. 3.3 – Arbre $T \in \mathcal{K}$

Proposition 3.8. *Si H est graphe partiel sans sommets isolés d'un arbre non trivial T , alors $\gamma_L^t(H) \geq \gamma_L^t(T)$.*

Preuve. Soit $H = T - E'$, $E' \subset E$ un graphe partiel sans sommets isolés d'un arbre non trivial $T = (V, E)$. Supposons que $\gamma_L^t(H) < \gamma_L^t(T)$. Considérons un $\gamma_L^t(H)$ -ensemble D_L^t . En rajoutant l'ensemble des arêtes E' à H , il est clair que pour toute paire de sommets u et v dans $V \setminus D_L^t$ les ensembles $N_G(u) \cap D_L^t$ et $N_G(v) \cap D_L^t$ sont différents et non vides. Alors D_L^t est un ensemble dominant localisateur de l'arbre T . D'où $\gamma_L^t(T) \leq |D_L^t| = \gamma_L^t(H) < \gamma_L^t(T)$, contradiction. \square

Lemme 3.1. *Si T est un arbre γ_L^t -fortement stable, alors toute composante connexe de tout graphe partiel H sans sommets isolés de T est un arbre non trivial γ_L^t -fortement stable.*

Preuve. Soit $T = (V, E)$ un arbre γ_L^t -fortement stable. Considérons un graphe partiel H sans sommets isolés de T . Il est clair que toute composante connexe K de H est un arbre non trivial. Il nous reste à montrer que $\forall K, b_L^t(K) = 0$. Supposons le contraire. Soient, K une composante connexe de H telle que $b_L^t(K) \neq 0$ et K' le graphe partiel de K avec $\gamma_L^t(K') > \gamma_L^t(K)$. Nous notons par S la forêt composée de l'ensemble de tous les arbres dans H différents de K . En considérant le graphe partiel $H' = K' \cup S$ de T , on a $\gamma_L^t(H') = \gamma_L^t(K') + \gamma_L^t(S) > \gamma_L^t(K) + \gamma_L^t(S) = \gamma_L^t(H)$. De la proposition 3.8 et comme T est fortement stable forcément $\gamma_L(H) = \gamma_L(T)$. T admet un graphe partiel H' avec $\gamma_L^t(H') > \gamma_L^t(T)$, contradiction. Ainsi $b_L^t(K) = 0$. \square

Lemme 3.2. *Si T est un arbre γ_L^t -fortement stable différent d'une étoile, alors tout sommet support est fort.*

Preuve. Soit D_L^t un γ_L^t -ensemble d'un arbre γ_L^t -fortement stable $T = (V, E)$ différent d'une étoile. Supposons que T admet au moins un sommet support faible v . Nous notons par w le pendant de v et par F_x l'ensemble des arêtes non pendantes incidentes à un sommet $x \in V$. Nous distinguons les deux cas suivants,

1^{er} cas. Il existe au moins un sommet support u voisin à v . Posons $H = T - E'$ avec

$$E' = (F_u \cup F_v) - \{uv\}.$$

2^{ème} cas. Tout sommet $u \in N(v) \setminus \{w\}$ est un sommet branche. Soit u' un sommet

adjacent à un sommet u , forcément u' n'est pas pendant. Considérons le graphe partiel $H = T - E'$ avec $E' = (F_v \cup F_u \cup F_{u'}) - \{uv, uu'\}$.

Dans les deux cas H est sans sommets isolés et admet comme composante connexe l'arbre T_v qui contient le sommet v . De plus il est facile de vérifier que $b_L^t(T_v) \neq 0$. Contradiction avec le lemme 3.1. Ainsi v est un sommet support fort. \square

Lemme 3.3. *Si T appartient à \mathcal{K} , alors T est un arbre γ_L^t -fortement stable.*

Preuve. Considérons un arbre $T \in \mathcal{K}$, pour démontrer cette propriété nous procédons par l'induction sur le nombre d'opérations $k(T)$ utilisées pour construire T .

Si $k(T) = 0$, T est une étoile. Ce qui fait que tout graphe partiel H de T contient au moins un sommet isolé, ainsi $b_L^t(T) = 0$.

Si $k(T) \geq 1$. Soit T un arbre avec $k(T) = k$. Supposons que la propriété est vraie pour tout arbre T' tel que $k(T') < k$. Afin de montrer que T est γ_L^t -fortement stable il suffit de prouver que pour toute arête non pendante uv de T , $T - uv$ admet deux arbres T_u, T_v γ_L^t -fortement stables et $\gamma_L^t(T - uv) = \gamma_L^t(T_u) + \gamma_L^t(T_v) = \gamma_L^t(T)$. Soit uv une arête non pendante de T . Par construction de T , T_u, T_v appartiennent à $\mathcal{K} \setminus P_2$. Donc par l'hypothèse d'induction T_u, T_v sont des arbres γ_L^t -fortement stables. De plus comme $\{u, v\} \in S(T)$ et tout sommet support de T est fort, $l(T_u) + l(T_v) = l(T)$. Il résulte de l'observation 3.5 que $\gamma_L^t(T - uv) = \gamma_L^t(T_u) + \gamma_L^t(T_v) = \gamma_L^t(T)$. Ainsi T est γ_L^t -fortement stable. \square

Lemme 3.4. *Si T est un arbre γ_L^t -fortement stable, alors T appartient à \mathcal{K} .*

Preuve. Soit $T = (V, E)$ un arbre γ_L^t -fortement stable, montrons que $T \in \mathcal{K}$.

Si $\text{diam}(T) \leq 3$, T est une étoile ou étoile double. La propriété est vraie.

Si $\text{diam}(T) \geq 4$, T est d'ordre $n \geq 5$. Nous supposons que pour tout arbre T' d'ordre strictement inférieur à celui de T la propriété est vérifiée. Considérons l'arbre enraciné

T_r de T en r et soit w le sommet le plus loin de r . Nous désignons par v le support de w , par u le père de v et par F_x l'ensemble des arêtes non pendantes incidentes à un sommet x de V . Du lemme 3.2, v est un support fort. Montrons que u est également un support fort, pour cela nous supposons que $u \notin S(T)$. Nous distinguons les deux cas suivants,

1^{er} cas. Si u est adjacent uniquement à des sommets supports. Soit $v' \neq v$ un sommet support voisin à u , et soit le graphe partiel sans sommets isolés $H = T - E'$, avec $E' = (F_u \cup F_{v'}) - \{uv, uv'\}$.

2^{ème} cas. Si u est adjacent à au moins un sommet branche x . Considérons le graphe partiel $H = T - E'$, avec $E' = (F_u \cup F_x) - \{uv, ux\}$, H est sans sommets isolés.

Dans les deux cas H admet une composante connexe T_v qui contient les sommets u, v . Il est simple de vérifier que $b_L^t(T_v) \neq 0$, contradiction avec le lemme 3.1. Ainsi $u \in S(T)$. Du lemme 3.2, u est un support fort de l'arbre T .

De plus comme T est un arbre γ_L^t -fortement stable. Il résulte du lemme 3.1 que les deux arbres T_u et T_v de $T - uv$ sont γ_L^t -fortement stables. Par l'hypothèse d'induction T_u et T_v appartiennent à \mathcal{K} . Ceci implique que T peut être obtenu de T_u et T_v par l'opération \mathcal{I} . Ainsi $T \in \mathcal{K}$. \square

Il s'ensuit des lemmes 3.3, 3.4 le théorème suivant,

Théorème 3.5. *T est un arbre γ_L^t -fortement stable si et seulement si T appartient à \mathcal{K} .*

3.2.3 Quelques Graphes γ_L^t -Fortement Stables

Proposition 3.9. *Si K_n est un graphe complet d'ordre impair $n, n \geq 3$, alors K_n est γ_L^t -fortement stable.*

Preuve. Soit K_n un graphe complet d'ordre impair $n, n \geq 3, \gamma_L^t(K_n) = n - 1$.

Nous observons que tout graphe partiel H de K_n sans sommets isolés contient forcément une composante connexe $C_{n'}$, $n' \geq 3$, de l'observation 3.2, $\gamma_L^t(C_{n'}) \leq n' - 1$. Donc $\gamma_L^t(H) \leq n - 1 = \gamma_L^t(K_n)$. Ainsi $b_L^t(K_n) = 0$. \square

Définition 3.5. Soit \mathcal{F} la famille des graphes simples définie comme suit,

$\mathcal{F} = \{K, G/G \text{ est obtenu après une séquence fini d'application de l'opération } \mathcal{I} \text{ à un graphe } G' \text{ de } \mathcal{F}\}$.

Observation 3.6. Un graphe $G \in \mathcal{F}$ est construit de sorte que,

- (i) $V(G) \setminus (S(G) \cup L(G)) = \emptyset$.
- (ii) $\gamma_L^t(G) = l(G)$.
- (iii) Tout sommet support d'un graphe $G \neq P_2$ est fort.

Exemple

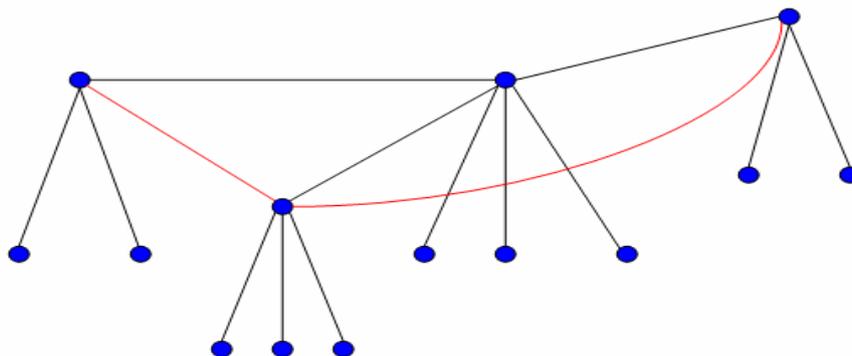


FIG. 3.4 – Graphe $G \in \mathcal{F}$

Selon les auteurs de [7] la famille des graphes $\mathcal{F} \setminus P_2$ est appelée « strong pseudocoronna ».

Proposition 3.10. *Si G appartient à \mathcal{F} , alors G est γ_L^t -fortement stable.*

Preuve. Si $G \in \mathcal{K}$. Du lemme 3.3, la propriété est vraie. Si $G \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{K}$, G est construit de sorte que $V(G) \setminus (S(G) \cup L(G)) = \emptyset$. Donc tout graphe partiel H de G sans sommets isolés est tel que $V(H) \setminus (S(H) \cup L(H)) = \emptyset$. De plus comme tout sommet support dans G est fort, forcément $S(H) = S(G)$ et $L(H) = L(G)$. Il s'ensuit de l'observation 3.4 que $\gamma_L^t(H) = l(H) = l(G) = \gamma_L^t(G)$. Ainsi G est γ_L^t -fortement stable.

□

Nous terminons ce chapitre par cette conjecture.

Conjecture 3.1. *G est un graphe γ_L^t -fortement stable si et seulement si*

- (i) *G est un graphe complet d'ordre impair n , $n \geq 3$,*
- (ii) *$G \in \mathcal{F}$.*

Chapitre 4

La Classe des Graphes π Arête Enlevée Critiques, $\pi \in \{\gamma_L, \gamma_L^t\}$

Dans le but d'approfondir l'étude d'un paramètre donné d'un graphe G , il est important d'étudier la structure des graphes extrêmes ou critiques par rapport à ce paramètre.

En considérant le nombre d'un paramètre de domination donné, le concept des graphes critiques est varié.

Dans ce chapitre nous étudions les graphes arête enlevée critiques par rapport au paramètre $\pi, \pi \in \{\gamma_L, \gamma_L^t\}$, ayant la propriété que pour toute arête e dans G , le nombre de domination π du graphe partiel $G - e$ change.

Nous utilisons la même terminologie suggérée par Haynes, Hedetniemi et Slater dans [23] pour dénoter les deux classes de ce problème.

Nous considérons dans ce qui suit les graphes simples non vides.

4.1 La Classe des Graphes γ_L Arête Enlevée Critiques

Dans cette première section nous étudions les graphes de la classe γ_L Arête Enlevée Critique, notée $\gamma_L CER$, $\gamma_L CER = \{G/\gamma_L(G - e) \neq \gamma_L(G), \forall e \in G\}$.

La suppression d'une arête e dans G peut augmenter ou diminuer le nombre de domination localisatrice.

Nous distinguons deux sous classes de la classe $\gamma_L CER$.

4.1.1 Les Graphes γ_L^+ -Arête Enlevée-Critiques

Définition 4.1. *Un graphe G de la classe $\gamma_L CER$ est dit γ_L^+ -arête enlevée-critique si et seulement si $\gamma_L(G - e) > \gamma_L(G)$, pour toute arête e dans G , G est écrit γ_L^+ -ER-critique.*

Observation 4.1. [6] *Soient, $S(G)$ l'ensemble des sommets supports d'un graphe G et v un sommet dans $S(G)$ avec L_v l'ensemble des sommets pendants voisins à v , alors*

- (i) *Il existe un $\gamma_L(G)$ -ensemble contenant l'ensemble $S(G)$.*
- (ii) *Tout $\gamma_L(G)$ -ensemble contient au moins $|L_v|$ sommets du sous ensemble $\{v\} \cup L_v$.*

Remarque 4.1. *Soit G un graphe γ_L^+ -ER-critique, alors $b_L(G) = 1$.*

Proposition 4.1. [8] *Si D_L est un γ_L -ensemble d'un graphe γ_L^+ -ER-critique G , alors les ensembles D_L et $V \setminus D_L$ sont stables.*

Preuve. Soient, $G = (V, E)$ un graphe γ_L^+ -ER-critique et D_L un $\gamma_L(G)$ -ensemble. Supposons qu'il existe au moins une arête e dans D_L ou bien dans $V \setminus D_L$. Donc D_L est un E.D.L. du graphe partiel $G - e$, d'où $\gamma_L(G - e) \leq \gamma_L(G)$, contradiction avec le fait que G est γ_L^+ -ER-critique. \square

Nous déduisons de la proposition 4.1 que si G un graphe γ_L^+ -ER-critique, alors G est un graphe biparti.

Proposition 4.2. [8] *Si G est un graphe γ_L^+ -ER-critique, alors $\gamma_L(G-e) = \gamma_L(G)+1$, pour toute arête e dans G .*

Preuve. Soit D_L un γ_L -ensemble d'un graphe γ_L^+ -ER-critique G . Par définition pour toute arête uv dans G , $\gamma_L(G-uv) \geq \gamma_L(G)+1 = |D_L|+1$. De la proposition 4.1, uv a exactement une seule extrémité dans D_L , sans perte de généralité soit $u \in D_L$, l'ensemble $\{v\} \cup D_L$ est un E.D.L. du graphe $G-uv$, donc $\gamma_L(G-uv) \leq |D_L|+1$. Ainsi $\gamma_L(G-uv) = \gamma_L(G)+1$. \square

Proposition 4.3. [8] *Si G est un graphe γ_L^+ -ER-critique, alors tout sommet support dans G est faible.*

Preuve. Soit D_L un γ_L -ensemble d'un graphe γ_L^+ -ER-critique G qui admet un sommet support fort v . Notons par L_v l'ensemble des sommets pendants adjacents à v , $L_v = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$, $k \geq 2$. De l'observation 4.1, D_L contient $|L_v|$ sommets du sous ensemble $\{v\} \cup L_v$, sans perte de généralité soit $\{v\} \cup \{w_2, \dots, w_k\} \subseteq D_L$. De la proposition 4.1, D_L est stable, contradiction. \square

Dans le but de donner une caractérisation détaillée des graphes γ_L^+ -ER-critiques, nous commençons d'abord par étudier les chaînes ensuite les arbres et nous terminons par une étude des graphes dans le cas général.

Les Chaînes γ_L^+ -ER-Critiques

Proposition 4.4. P_n est une chaîne γ_L^+ -ER-critique si et seulement si $n \in \{2, 5\}$.

Preuve. Si $n \in \{2, 3, 4, 5\}$. Il est facile de vérifier qu'uniquement P_2 et P_5 sont des chaînes γ_L^+ -ER-critiques.

Si $n \geq 6$. Pour prouver qu'aucune chaîne P_n n'est γ_L^+ -ER-critique, il suffit qu'il existe

une arête e dans P_n telle que $\gamma_L(P_n - e) = \gamma_L(P_n)$. Soient P_{n_1} et P_{n_2} ($n_1 + n_2 = n$) les deux composantes connexes de $P_n - e$. Nous avons les cas suivants,

Si $n \equiv 0[5]$. Considérons le cas où $n_1 \equiv 0[5]$ et $n_2 \equiv 0[5]$.

$$\gamma_L(P_n - e) = \gamma_L(P_{n_1}) + \gamma_L(P_{n_2}) = 2\lceil n_1/5 \rceil + 2\lceil n_2/5 \rceil = 2\lceil n/5 \rceil = \gamma_L(P_n).$$

Si $n \equiv 1[5]$. Considérons le cas où $n_1 \equiv 0[5]$ et $n_2 \equiv 1[5]$.

$$\gamma_L(P_n - e) = \gamma_L(P_{n_1}) + \gamma_L(P_{n_2}) = 2\lceil n_1/5 \rceil + 2\lceil n_2/5 \rceil - 1 = 2\lceil n/5 \rceil - 1 = \gamma_L(P_n).$$

Si $n \equiv 2[5]$. Considérons le cas où $n_1 \equiv 0[5]$ et $n_2 \equiv 2[5]$.

$$\gamma_L(P_n - e) = \gamma_L(P_{n_1}) + \gamma_L(P_{n_2}) = 2\lceil n_1/5 \rceil + 2\lceil n_2/5 \rceil - 1 = 2\lceil n/5 \rceil - 1 = \gamma_L(P_n).$$

Si $n \equiv 3[5]$. De la proposition 3.1, $b_L(P_n) = 2$, ainsi de la remarque 4.1, P_n n'est pas une chaîne γ_L^+ -ER-critique.

Si $n \equiv 4[5]$. Considérons le cas où $n_1 \equiv 2[5]$ et $n_2 \equiv 2[5]$.

$$\gamma_L(P_n - e) = \gamma_L(P_{n_1}) + \gamma_L(P_{n_2}) = 2\lceil n_1/5 \rceil + 2\lceil n_2/5 \rceil - 2 = 2\lceil n/5 \rceil = \gamma_L(P_n). \quad \square$$

Les Arbres γ_L^+ -ER-Critiques

Nous admettons dans cette partie que la chaîne P_2 admet exactement un sommet support et un sommet pendent.

Afin de donner la structure des arbres γ_L^+ -ER-critiques nous introduisons la famille des arbres \mathcal{T} .

Définition 4.2. Soit \mathcal{T} la famille des arbres définie comme suit,

$\mathcal{T} = \{P_2, T/T \text{ est obtenu après une séquence fini d'application de l'opération } \mathcal{O} \text{ à un arbre } T' \text{ de } \mathcal{T}\}$.

- **Opération \mathcal{O}** : Attacher par l'arête vx un sommet support v d'un arbre T' à un sommet x d'une chaîne xyz .

Observation 4.2. *Un arbre $T \in \mathcal{T} \setminus P_2$ est construit de sorte que,*

- (i) $s(T) = l(T)$.
- (ii) $N(C(T)) = S(T)$, $C(T) = V(T) \setminus (S(T) \cup L(T))$.
- (ii) $N(S(T)) = L(T) \cup C(T)$.
- (iv) $S(T)$ est un $\gamma_L(T)$ -ensemble.

Exemples

P_2 et P_5 sont des arbres de \mathcal{T} .

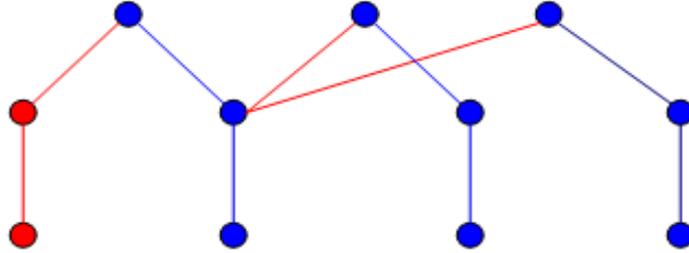


FIG. 4.1 – Arbre $T \in \mathcal{T}$

Lemme 4.1. *Soit T un arbre obtenu d'un arbre T' par l'opération \mathcal{O} , alors*

$$\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + 1.$$

Preuve. Soit D'_L un γ_L -ensemble d'un arbre $T' = (V', E')$ tel que D'_L contient l'ensemble des sommets supports $S(T')$. Considérons un arbre T obtenu de l'arbre T' par l'opération \mathcal{O} . $\{y\} \cup D'_L$ est un E.D.L. de l'arbre T , donc $\gamma_L(T) \leq \gamma_L(T') + 1$. D'autre part, soit D_L un $\gamma_L(T)$ -ensemble, forcément un des sommets y ou z est dans D_L . Supposons que $y \in D_L$ (sinon z peut être remplacé par y) et $x \notin D_L$ (sinon il est remplacé par v), comme $v \in D_L$, l'ensemble $D_L \cap V'$ domine l'arbre T' . Donc $\gamma_L(T') \leq \gamma_L(T) - 1$. Ainsi $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + 1$. \square

Définition 4.3. [5] Un graphe (resp. arbre) est dit GDLU (resp. ADLU) si et seulement s'il admet un unique dominant localisateur minimum.

Lemme 4.2. [5] Si T appartient à $\mathcal{T} \setminus P_2$, alors T est un ADLU.

Preuve. Soit $T \in \mathcal{T} \setminus P_2$. De l'observation 4.2, $S(T)$ est un $\gamma_L(T)$ -ensemble. Il suffit donc de démontrer l'unicité. Pour cela nous procédons par l'induction sur le nombre d'opérations utilisées pour avoir un arbre T , noté $\mathcal{O}(T) = k$.

Si $k = 1$, $T = P_5$. La propriété est vraie.

Si $k \geq 2$. Soit T un arbre avec $\mathcal{O}(T) = k$. Nous supposons que la propriété est vraie pour tout arbre $T' = (V', E')$ avec $\mathcal{O}(T') \leq k - 1$. T est obtenu d'un arbre T' avec $\mathcal{O}(T') = k - 1$ par l'opération \mathcal{O} . Considérons un $\gamma_L(T)$ -ensemble D_L , $|D_L| = s(T)$. Montrons que $D_L = S(T)$. Forcément un des sommets y ou z est dans D_L , supposons que $y \in D_L$ (sinon z peut être remplacé par y) et $x \notin D_L$ (sinon il est remplacé par v), comme $v \in D_L$, on a $D_L \cap V'$ est un E.D.L. de l'arbre T' . Par l'hypothèse d'induction, $S(T')$ est l'unique $\gamma_L(T')$ -ensemble. Du lemme 4.1, $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + 1$. Donc $D_L \cap V(T') = S(T')$. Ainsi $D_L = S(T)$. \square

Lemme 4.3. Si T appartient à \mathcal{T} , alors T est un arbre γ_L^+ -ER-critique.

Preuve. De la proposition 4.4, P_2 est γ_L^+ -ER-critique. Considérons une arête uv d'un arbre $T \in \mathcal{T} \setminus P_2$. Par construction de T , une seule extrémité de uv est dans $S(T)$ l'unique dominant localisateur de T , sans perte de généralité soit $u \in S(T)$. L'ensemble $\{v\} \cup S(T)$ est un E.D.L. du graphe partiel $T - uv$, donc $\gamma_L(T - uv) \leq \gamma_L(T) + 1$. D'autre part, nous distinguons les deux cas suivants,

1^{er} cas. uv est une arête non pendante de T . Donc $v \in C(T)$ et $S(T - uv) = S(T)$.

De l'observation 4.1, il existe un $\gamma_L(T - uv)$ -ensemble contenant tous l'ensemble $S(T)$ et comme $S(T)$ n'est pas un E.D.L. de $T - uv$, $\gamma_L(T - uv) > \gamma_L(T)$, donc $\gamma_L(T - uv) \geq \gamma_L(T) + 1$.

2^{ème} cas. uv est une arête pendante de T . Donc $v \in L(T)$ et $S(T - uv) = S(T - v) = S(T) \setminus \{u\}$. De l'observation 4.1, il existe un $\gamma_L(T - v)$ -ensemble contenant tous

l'ensemble $S(T) \setminus \{u\}$ mais $S(T) \setminus \{u\}$ n'est pas un E.D.L. de l'arbre $T - v$, d'où $\gamma_L(T - v) > \gamma_L(T) - 1$. En plus comme $\gamma_L(T - uv) = \gamma_L(v) + 1$, il résulte que $\gamma_L(T - uv) > \gamma_L(T)$, ceci implique que $\gamma_L(T - uv) \geq \gamma_L(T) + 1$.

Ainsi dans les deux cas $\gamma_L(T - uv) = \gamma_L(T) + 1$, T est un arbre γ_L^+ -ER-critique. \square

Lemme 4.4. *Si T est un arbre γ_L^+ -ER-critique, alors T appartient à \mathcal{T} .*

Preuve. Si $\text{diam}(T) \leq 3$, T est une étoile ou étoile double. On peut vérifier qu'uniquement la chaîne P_2 est un arbre γ_L^+ -ER-critique. Donc la propriété est vraie. Si $\text{diam}(T) \geq 4$. Pour démontrer cette propriété nous supposons que pour tout arbre T' d'ordre strictement inférieur à l'ordre de T le résultat est vrai. Soit T un arbre γ_L^+ -ER-critique d'ordre $n \geq 5$. Considérons l'arbre enraciné T_r de T en r et soit z le sommet le plus loin de r . Notons par y le support de z , x le père de y et v le père de x . De la proposition 4.3, y est un support faible, donc $\text{deg}(y) = 2$. De l'observation 4.1 et de la proposition 4.1, il existe un $\gamma_L(T)$ -ensemble contenant tous les sommets supports de l'arbre T qui est un stable. Il résulte que x n'est pas dans $S(T)$. De plus x admet un unique fils y , sinon $\gamma_L(T - xy) = \gamma_L(T)$, donc $\text{deg}(x) = 2$. T est un arbre γ_L^+ -ER-critique, forcément tout $\gamma_L(T)$ -ensemble D_L contient v , sinon D_L contient deux sommets des sommets x, y et z . Comme D_L est stable, soit $\{x, z\} \in D_L$. La suppression de l'arête xy n'augmente pas le nombre du domination localisatrice de l'arbre. De plus il doit exister un unique sommet pendant $u \in V \setminus D_L$, dominé par v , sinon $\gamma_L(T - xy) = \gamma_L(T)$. Donc $v \in S(T)$. Posons $T' = T \setminus \{z, y, x\}$, T est obtenu de l'arbre T' par l'opération \mathcal{O} , alors $\gamma_L(T') + 1 = \gamma_L(T)$. Vérifions si T' est γ_L^+ -ER-critique, si nous supposons le contraire, alors T' admet une arête ab telle que $\gamma_L(T' - ab) = \gamma_L(T'_a) + \gamma_L(T'_b) = \gamma_L(T')$, où T'_a et T'_b sont les deux composantes connexes de $T' - ab$. Considérons les deux cas suivants,

1^{er} cas. ab est une arête non pendante, alors ab est aussi une arête non pendante de T et $T - ab$ admet deux composantes connexes T_a et T_b . De plus on a $T_a = T'_a$ ou bien $T_b = T'_b$. Sans perte de généralité soit $T_a = T'_a$, dans ce cas T_b est obtenu

de T'_b par l'opération \mathcal{O} , du lemme 4.1,

$$\gamma_L(T - ab) = \gamma_L(T_a) + \gamma_L(T_b) = \gamma_L(T'_a) + (\gamma_L(T'_b) + 1) = \gamma_L(T') + 1 = \gamma_L(T),$$

mais T est γ_L^+ -ER-critique, contradiction.

2^{ème} cas. ab est une arête pendante telle que $b \in L(T')$, alors ab est aussi une arête pendante de T et $T - ab$ admet deux composantes connexes $T_b = T'_b = \{b\}$ et T_a . Si $a \neq v$, T_a peut être obtenu de T'_a par l'opération \mathcal{O} , il résulte du lemme 4.1, $\gamma_L(T - ab) = \gamma_L(T_a) + 1 = (\gamma_L(T'_a) + 1) + 1 = \gamma_L(T') + 1 = \gamma_L(T)$, contradiction. Si $a = v$, T_a peut être obtenu de T'_a en joignant les sommets x et a par l'arête xa . Soit D_a un $\gamma_L(T_a)$ -ensemble contenant le sommet a sinon D_a contient le sommet x et dans ce cas on remplace x par a , il est facile de vérifier que $\gamma_L(T'_a) \leq \gamma_L(T_a) - 1$, donc $\gamma_L(T') = \gamma_L(T' - ab) = \gamma_L(T'_a) + 1 \leq (\gamma_L(T_a) - 1) + 1 = (\gamma_L(T_a) + 1) - 1 = \gamma_L(T) + 1 - 1 = \gamma_L(T)$, mais $\gamma_L(T') < \gamma_L(T)$, contradiction.

Ainsi T' est un arbre γ_L^+ -ER-critique, par l'hypothèse d'induction $T' \in \mathcal{T}$, donc $T \in \mathcal{T}$.

□

Il s'ensuit des lemmes 4.3, 4.4 le théorème suivant,

Théorème 4.1. *T est un arbre γ_L^+ -ER-critique si et seulement si $T \in \mathcal{T}$.*

Les Graphes γ_L^+ -ER-Critiques

Nous établissons maintenant la caractérisation des graphes γ_L^+ -ER-critiques dans le cas général.

Pour cela nous définissons la famille des graphes \mathcal{G} .

Définition 4.4. [8] Soit $G = (V, W, E)$ un graphe biparti connexe tel que

- $\forall w \in W$ et $\forall V' \subseteq N_G(w)$, il existe un unique $w' \in W$ tel que $N_G(w') = V'$.

Nous désignons par \mathcal{G} l'ensemble des graphes G .

Observation 4.3. [8] Un graphe $G \in \mathcal{G}$ est construit de sorte que,

- (i) Tout sommet support de G est faible.
- (ii) V est l'ensemble des sommets supports de G .
- (iii) V est un $\gamma_L(G)$ -ensemble.

Exemples

P_2 et P_5 sont des graphes de \mathcal{G} .

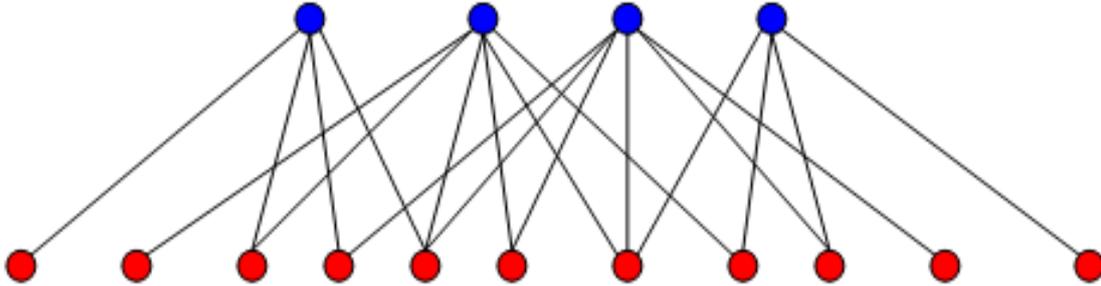


FIG. 4.2 – Graphe $G \in \mathcal{G}$

Proposition 4.5. Si G appartient à $\mathcal{G} \setminus P_2$, alors G est un GDLU.

Preuve. Soit $G \in \mathcal{G} \setminus P_2$. De l'observation 4.3, $V = S(G)$ est un dominant localisateur minimum du graphe G , montrons que V est l'unique $\gamma_L(G)$ -ensemble. Supposons que G admet un autre $\gamma_L(G)$ -ensemble D_L différent de V , $|D_L| = |V|$. Donc forcément il existe au moins un sommet support v tel que $v \notin D_L$, et dans ce cas D_L contient tous l'ensemble $N_G(v)$, $|N_G(v)| \geq 2$. Il résulte que $|D_L| > |V|$, contradiction. Ainsi V est l'unique $\gamma_L(G)$ -ensemble. \square

Lemme 4.5. [8] Si G appartient à \mathcal{G} , alors G est un graphe γ_L^+ -ER-critique.

Preuve. Une simple vérification montre que P_2 est un graphe γ_L^+ -ER-critique. Soit maintenant un graphe $G = (V, W, E)$ de \mathcal{G} et $G \neq P_2$. En supprimant une arête vw de G avec $v \in V$ et $w \in W$, l'ensemble $\{w\} \cup V$ est un E.D.L. du graphe partiel $G - vw$, donc $\gamma_L(G - vw) \leq \gamma_L(G) + 1$. D'autre part, nous distinguons les deux cas suivants,

1^{er} cas. vw est une arête non pendante de G . G est construit de sorte que,

$S(G - vw) = S(G)$. De l'observation 4.1, il existe un $\gamma_L(G - vw)$ -ensemble contenant tous l'ensemble V , mais V n'est pas un E.D.L. de $G - vw$, ceci implique que $\gamma_L(G - vw) > \gamma_L(G)$, donc $\gamma_L(G - vw) \geq \gamma_L(G) + 1$.

2^{ème} cas. vw est une arête pendante de G . Par construction de G , $S(G - vw) = S(G) \setminus \{v\}$. De l'observation 4.1, il existe un $\gamma_L(G - w)$ -ensemble contenant tous l'ensemble $V \setminus \{v\}$, mais $V \setminus \{v\}$ n'est pas un E.D.L. du graphe $G - w$, ceci implique que $\gamma_L(G - w) > \gamma_L(G) - 1$. En plus comme $\gamma_L(G - vw) = \gamma_L(G - w) + 1$, $\gamma_L(G - vw) > \gamma_L(G)$, donc $\gamma_L(G - vw) \geq \gamma_L(G) + 1$.

Ainsi dans les deux cas $\gamma_L(G - vw) = \gamma_L(G) + 1$, G est un graphe γ_L^+ -ER-critique. \square

Lemme 4.6. [8] Si G est un graphe connexe γ_L^+ -ER-critique d'ordre $n \geq 3$, alors $S(G)$ est l'unique $\gamma_L(G)$ -ensemble.

Preuve. Considérons un graphe connexe γ_L^+ -ER-critique G d'ordre $n \geq 3$, et un $\gamma_L(G)$ -ensemble D_L qui contient tout l'ensemble des sommets supports $S(G)$. De la proposition 4.1, D_L et $V \setminus D_L$ sont stables.

Montrons que $D_L = S(G)$. Soit $v \in D_L$, pour tout sommet $w \in N_G(v) \subseteq V \setminus D_L$ avec $N_G(w) = \{v, v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq D_L$, $k \geq 1$, il existe un unique sommet $w_1 \in V \setminus D_L$, tel que $N_G(w_1) = \{v, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$, sinon D_L est un E.D.L. du graphe $G - vw_k$, contradiction avec le fait que G est un graphe γ_L^+ -ER-critique. Par conséquent, il doit exister un unique sommet $w_l, l \geq 1$ dans $V \setminus D_L$ tel que $N_G(w_l) = v$. Donc v est un sommet support, ainsi $D_L = S(G)$.

Il nous reste à montrer l'unicité. Supposons qu'il existe un autre $\gamma_L(G)$ -ensemble D_L différent de $S(G)$. De l'observation 4.1 et de la proposition 4.3, D_L contient au moins un sommet pendant w . Si nous considérons que v est le support de w , alors le nombre de domination localisatrice du graphe G n'augmente pas si nous enlevons l'arête uv , où u est un sommet non pendant dans D_L voisin à v , contradiction. Ainsi $S(G)$ est l'unique $\gamma_L(G)$ -ensemble. \square

Nous indiquons que tout graphe connexe qui admet l'ensemble $S(G)$ comme un unique γ_L -ensemble n'est pas forcément γ_L^+ -ER-critique, nous donnons un exemple d'un tel graphe dans la figure 4.3.

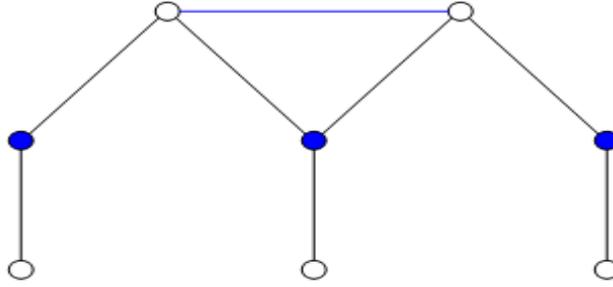


FIG. 4.3 – Le graphe G

Lemme 4.7. [8] *Si G est un graphe connexe γ_L^+ -ER-critique, alors G appartient à \mathcal{G} .*

Preuve. Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe γ_L^+ -ER-critique d'ordre n .

Si $n = 2$, $G = P_2$ et $G \in \mathcal{G}$.

Si $n \geq 3$. De la proposition 4.1 et du lemme 4.6, G est un graphe biparti avec la bipartition $X = V \cup W$ et $V = S(G)$.

Montrons maintenant que $\forall w \in W$ et $\forall V' \subseteq N_G(w)$, il existe un unique w' dans W tel que $N_G(w') = V'$. Considérons un sommet $w \in W$. Si w est un sommet pendant attaché à un sommet support v . De la proposition 4.2, v est un support faible, donc $V' = \{v\} = N_G(w)$. Sinon w est un sommet non pendant de G avec

$N_G(w) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, $k \geq 2$. Pour $V' = N_G(w)$, comme V est un γ_L -ensemble de G , il est clair que tout sommet $w' \neq w$ dans W , $N_G(w')$ est différent de $N_G(w)$. Pour $V' \subset N_G(w)$ avec $|V'| = k - 1$, sans perte de généralité, posons $V' = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$. G est γ_L^+ -ER-critique, alors V n'est pas un E.D.L. du graphe $G - wv_k$, forcément il doit exister un unique sommet w' dans W tel que $N_G(w') = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$. Même raisonnement pour tous les sous ensembles V' inclus strictement dans $N_G(w)$. Ainsi $G \in \mathcal{G}$. \square

À partir des lemmes 4.5, 4.7 nous pouvons donner la caractérisation des graphes γ_L^+ -ER-critiques.

Théorème 4.2. [8] G est un graphe connexe γ_L^+ -ER-critique si et seulement si $G \in \mathcal{G}$.

Corollaire 4.1. [8] G est un graphe γ_L^+ -ER-critique si et seulement si G est l'union de sommets isolés et de graphes $G \in \mathcal{G}$.

4.1.2 Les Graphes γ_L^- -Arête Enlevée-Critiques

Nous montrons dans cette partie que les graphes complets et les graphes multipartis complets sous certaines conditions sont des graphes γ_L^- -ER-critiques.

Définition 4.5. Un graphe G de la classe γ_L CER est dit γ_L^- -arête enlevée-critique si et seulement si $\gamma_L(G - e) = \gamma_L(G) - 1$, pour toute arête e dans G , G est écrit γ_L^- -ER-critique.

Proposition 4.6. *Si l'une des assertions suivantes est vérifiée,*

- (i) *G est un graphe complet d'ordre supérieur ou égale à quatre,*
- (ii) *G est un graphe biparti complet K_{n_1, n_2} tel que $\min\{n_1, n_2\} \geq 3$,*
- (iii) *G est un graphe t -partie complet K_{n_1, n_2, \dots, n_t} , $t \geq 3$ tel que $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$ et $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 3$,*
- (iv) *G est un graphe multiparti complet $K_{\underbrace{1, \dots, 1}_m, n}$ tel que $\min\{m, n\} \geq 3$,*
- (v) *G est un graphe t -partie complet $K_{\underbrace{1, \dots, 1}_{m \text{ fois}}, n_1, n_2, \dots, n_t}$, $t \geq 2$, $m \geq 3$ tel que $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$ et $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 3$,*

alors G est un graphe γ_L^- -ER-critique.

Preuve.

1^{er} cas.

Soient, $K_n = (V, E)$ un graphe complet d'ordre $n \geq 4$ et D_L un $\gamma_L(K_n)$ -ensemble. Considérons une arête uv de K_n . Nous observons que pour tout ensemble dominant D de $K_n - uv$ de cardinalité $|D| \leq n - 3$, il existe deux sommets x et y ou plus dans $V(K_n - uv) \setminus D$ tels que $N_D(x) = N_D(y)$, alors $\gamma_L(K_n - uv) \geq n - 2 = \gamma_L(K_n) - 1$. D'autre part, si $uv \in D_L$ alors $D_L \setminus \{u\}$ est un ensemble dominant localisateur de $K_n - uv$ et si $uv \notin D_L$, comme $\gamma_L(K_n) = n - 1$, l'arête uv a une seule extrémité dans $V(K_n) \setminus D_L$, soit $u \in V(K_n) \setminus D_L$, si nous considérons un sommet w dans D_L différent de v , il est clair que $D_L \setminus \{w\}$ est un E.D.L. du graphe $K_n - uv$. Ainsi $\gamma_L(K_n - uv) \leq \gamma_L(K_n) - 1 = n - 2$, il résulte que $\gamma_L(K_n - uv) = \gamma_L(K_n) - 1$.

2^{ème} cas.

Soit K_{n_1, n_2} un graphe biparti complet tel que $\min\{n_1, n_2\} \geq 3$. Considérons une arête uv de K_{n_1, n_2} . Comme tout ensemble dominant D du graphe partiel $K_{n_1, n_2} - uv$ de cardinalité $|D| \leq n_1 + n_2 - 4$ admet au moins deux sommets dans $V(K_{n_1, n_2} - uv) \setminus D$ du même voisinage dans D , $\gamma_L(K_{n_1, n_2} - uv) \geq n_1 + n_2 - 3 = \gamma_L(K_{n_1, n_2}) - 1$. Nous

montrons maintenant que $\gamma_L(K_{n_1, n_2} - uv) \leq \gamma_L(K_{n_1, n_2}) - 1$.

Soit D_L un $\gamma_L(K_{n_1, n_2})$ -ensemble, nous distinguons les sous cas suivants,

1^{er} sous cas. Si $uv \in D_L$. Soit l'ensemble $D'_L = D_L \setminus \{u\}$.

2^{ème} sous cas. Si $\{u, v\} \notin D_L$. Soient u', v' deux sommets adjacents dans D_L , et considérons l'ensemble $D'_L = (D_L \setminus \{u', v'\}) \cup \{v\}$.

3^{ème} sous cas. Si une seule extrémité de uv appartient à D_L . Sans perte de généralité soit $u \in D_L$ et soit $v \notin D_L$. Posons $D'_L = D_L \setminus \{v'\}$, avec v' est un sommet voisin à u dans D_L .

Comme $\min\{n_1, n_2\} \geq 3$, il est simple de vérifier dans chacun des trois sous cas précédents, que D'_L est un ensemble dominant localisateur du graphe $K_{n_1, n_2} - uv$ de cardinalité $\gamma_L(K_{n_1, n_2}) - 1$, donc $\gamma_L(K_{n_1, n_2} - uv) \leq \gamma_L(K_{n_1, n_2}) - 1$.

Ainsi $\gamma_L(K_{n_1, n_2} - uv) = \gamma_L(K_{n_1, n_2}) - 1$.

3^{ème} cas.

Soit $G = (V, E)$ un graphe multiparti complet K_{n_1, n_2, \dots, n_t} avec

$t \geq 3$, $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$ et $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 3$, et soit D_L un $\gamma_L(G)$ -ensemble.

$|D_L| = \sum_{i=1}^t (n_i - 1)$, nous désignons par N_i la partie stable de G de cardinalité n_i ($i = 1, t$). Considérons le graphe partiel H obtenu en enlevant une arête uv de G .

Pour tout ensemble dominant D dans H de cardinalité $|D| \leq \sum_{i=1}^t (n_i - 1) - 2$, il

existe au moins deux sommets dans $V \setminus D$ ayant le même voisinage dans D , alors

$$\gamma_L(H) \geq \sum_{i=1}^t (n_i - 1) - 1 \geq \gamma_L(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) - 1.$$

D'autre part, supposons que $u \in N_i$ et $v \in N_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, t$. Nous avons les sous cas suivants,

1^{er} sous cas. Si $uv \in D_L$. Vérifions si l'ensemble $D'_L = D_L \setminus \{u\}$ est un E.D.L. du graphe partiel H . En effet, comme G contient au moins trois parties stables,

D'_L est un dominant du graphe partiel H , et il est clair que pour le sommet

$u' \in N_i$ avec $u' \notin D'_L$, on a $N_{D'_L}(u) \neq N_{D'_L}(u')$, d'autre part au plus une

partie dans G est de cardinalité 2, donc $N_{D'_L}(u) \neq N_{D'_L}(v')$ avec $v' \in N_j$ et $v' \notin D'_L$ et pour tout sommet w dans $(V \setminus N_i \cup N_j) \setminus D'_L = (V \setminus N_i \cup N_j) \setminus D_L$, on a $N_{D'_L}(u) \neq N_{D'_L}(w)$, il s'ensuit que D'_L est un E.D.L. du graphe partiel H .

2^{ème} sous cas. Si $uv \notin D_L$. Soient u', v' deux sommets voisins dans D_L , avec $u' \in N_i$ et $v' \in N_j$, nous posons $D'_L = (D_L \setminus \{u', v'\}) \cup \{v\}$, D'_L est un dominant dans H , car G contient au moins trois parties stables, il est clair que $N_{D'_L}(u) \neq N_{D'_L}(u')$, de plus G admet au plus une partie stable de cardinalité 2, alors le sommet v' a un voisinage distinct du voisinage du sommet u dans D'_L , et pour tout w dans $(V \setminus N_i \cup N_j) \setminus D'_L = (V \setminus N_i \cup N_j) \setminus D_L$, $N_{D'_L}(u') \neq N_{D'_L}(w)$ et $N_{D'_L}(v') \neq N_{D'_L}(w)$, donc D'_L est un ensemble dominant localisateur du graphe H .

3^{ème} sous cas. Si l'un des sommets u ou v est dans D_L . Sans perte de généralité soit $u \in D_L$ et soit $v \notin D_L$, considérons un sommet $v' \in N_j \cap D_L$, comme G contient au moins trois parties stables, $D'_L = D_L \setminus \{v'\}$ est un dominant du graphe H et $N_{D'_L}(v) \neq N_{D'_L}(v')$, de plus G contient au plus une partie N_i , $n_i = 2$, donc $N_{D'_L}(v) \neq N_{D'_L}(u')$ avec $u' \in N_i$, $u' \notin D'_L$, et $\forall w \in (V \setminus N_i \cup N_j) \setminus D'_L = (V \setminus N_i \cup N_j) \setminus D_L$, on a $N_{D'_L}(w) \neq N_{D'_L}(v')$, donc D'_L est un E.D.L. du graphe partiel H .

Il s'ensuit des trois sous cas précédents que $\gamma_L(H) \leq \gamma_L(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) - 1$.

$$\text{Ainsi } \gamma_L(H) = \sum_{i=1}^t (n_i - 1) - 1 = \gamma_L(K_{n_1, n_2, \dots, n_t}) - 1.$$

4^{ème} cas.

Soit $G = (V, E)$ un graphe multiparti complet $K_{\underbrace{1, \dots, 1}_m, n}$ avec $m \geq 3$ et $n \geq 3$.

Considérons un $\gamma_L(G)$ -ensemble D_L , $|D_L| = m + n - 2$.

Observons d'abord que si H est un graphe partiel de G , $H = G - uv, uv \in E$, alors pour tout ensemble dominant D dans H avec $|D| \leq m + n - 4$, $V(H) \setminus D$ admet au moins deux sommets du même voisinage, d'où $\gamma_L(H) \geq m + n - 3 = \gamma_L(G) - 1$. Soit $M = \{l'union des parties de G à un élément\}$, $|M| = m$ et $N = V \setminus M$, $|N| = n$, montrons que $\gamma_L(H) \leq \gamma_L(G) - 1$. Nous discutons les sous cas suivants,

1^{er} sous cas. $uv \in M$. Soit $uv \in D_L$, comme $m \geq 3$ et $n \geq 3$, l'ensemble dominant

$D'_L = D_L \setminus \{u\}$ est un E.D.L. du graphe H , en effet pour le sommet $u' \in M$ et $u' \notin D_L$, on a $N_{D'_L}(u') \neq N_{D'_L}(u)$, de plus pour le sommet $w \in N$ et $w \notin D'_L$, on a $N_{D'_L}(u) \neq N_{D'_L}(w)$.

Si D_L contient uniquement u , comme $m \geq 3$, il existe au moins un sommet $u' \in M \cap D_L$ et $u' \neq u$, et dans ce cas l'ensemble dominant $D'_L = D_L \setminus \{u'\}$ est un E.D.L. du graphe H , car $N_{D'_L}(u') \neq N_{D'_L}(v)$, de plus pour le sommet $w \in N$ et $w \notin D'_L$, les voisinages $N_{D'_L}(u')$ et $N_{D'_L}(w)$ sont distincts.

Donc $\gamma_L(H) \leq \gamma_L(G) - 1$.

2^{ème} sous cas. L'arête uv a une seule extrémité dans la partie M , sans perte de généralité soient $u \in M$ et $v \in N$. Considérons le graphe biparti complet $K_{m,n}$ obtenu de G en enlevant les $m(m-1)/2$ arêtes incidentes aux sommets de la partie clique M , nous avons démontré dans le 2^{ème} cas que $K_{m,n}$ est γ_L^- -ER-critique, donc $\forall u \in M, \forall v \in N, \gamma_L(K_{m,n} - uv) = m + n - 3$. D'autre part, le graphe partiel $H = G - uv$ peut être aussi obtenu du graphe $K_{m,n} - uv$ en rattachant les $m(m-1)/2$ arêtes de la partie M , et il est simple de vérifier que tout $\gamma_L(K_{m,n} - uv)$ est un E.D.L. du graphe H , donc

$$\gamma_L(H) \leq \gamma_L(K_{m,n} - uv) = m + n - 3 = \gamma_L(G) - 1.$$

Par conséquent pour toute arête uv , $\gamma_L(G - uv) = \gamma_L(G) - 1$, d'où $K_{\underbrace{1, \dots, 1}_m, n}$ est un graphe γ_L^- -ER-critique.

5^{ème} cas.

Soit $G = (V, E)$ un graphe multiparti complet $K_{\underbrace{1, \dots, 1}_m, n_1, n_2, \dots, n_t}, t \geq 2, m \geq 3$ avec $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$ et $n_1 \geq 2, n_2 \geq 3$, et D_L un ensemble dominant localisateur minimum de G de cardinalité $\sum_{i=1}^t (n_i - 1) + (m - 1)$.

Observons que si D est un dominant d'un graphe partiel $H = G - uv, uv \in E$, de cardinalité inférieure ou égale à $\sum_{i=1}^t (n_i - 1) + m - 3$, alors D n'est pas un γ_L -ensemble

de H , et donc $\gamma_L(H) \geq \sum_{i=1}^t (n_i - 1) + m - 2 = \gamma_L(G) - 1$. Nous posons $M = \{l'union des parties de G à un élément\}$, $|M| = m$, et N_i la partie stable dans G de cardinalité n_i . Nous discutons les cas suivants,

1^{er} sous cas. $uv \in M$. Si $uv \in D_L$, comme $m \geq 3$ et $t \geq 2$, l'ensemble dominant

$D'_L = D_L \setminus \{u\}$ est un E.D.L. du graphe H , en effet pour le sommet $u' \notin D_L$ et $u' \in M$ on a $N_{D'_L}(u) \neq N_{D'_L}(u')$, de plus pour tout sommet $w \in V \setminus M$ et $w \notin D'_L$, on a $N_{D'_L}(u) \neq N_{D'_L}(w)$. Si $u \in D_L$ et $v \notin D_L$, considérons le sommet $u' \in M \cap D_L$ avec $u' \neq u$, et dans ce cas l'ensemble dominant $D'_L = D_L \setminus \{u'\}$ est un E.D.L. du graphe H , car $N_{D'_L}(u') \neq N_{D'_L}(v)$, et pour tout sommet $w \in V \setminus M$ et $w \notin D'_L$, on a $N_{D'_L}(u') \neq N_{D'_L}(w)$. Même raisonnement si $u \notin D_L$ et $v \in D_L$. Donc $\gamma_L(H) \leq \gamma_L(G) - 1$.

2^{ème} sous cas. L'arête uv a au moins une extrémité dans une partie $N_i, i = 1, t$, sans perte de généralité soient $u \in N_i$ et $v \in N_j \cup M, i, j = \overline{1, t}$ avec $j \neq i$.

Considérons le graphe partiel $H' = K_{m, n_1, n_2, \dots, n_t}$ obtenu de G en enlevant les $m(m-1)/2$ arêtes incidentes aux sommets de la partie M , nous avons démontré dans le 3^{ème} cas que H' est γ_L^- -ER-critique, donc pour toute arête $uv \in H'$, $\gamma_L(H' - uv) = \gamma_L(H') - 1$. D'autre part, le graphe partiel $H = G - uv$ peut être aussi obtenu du graphe $H' - uv$ en rejoignant les $m(m-1)/2$ arêtes de la partie M , et il est simple de vérifier que tout $\gamma_L(H' - uv)$ -ensemble est un E.D.L. du graphe H , donc $\gamma_L(H) \leq \gamma_L(H') - 1 = \sum_{i=1}^t (n_i - 1) + (m - 1) - 1 = \gamma_L(G) - 1$.

Il résulte que $\gamma_L(H) = \gamma_L(G) - 1 = \sum_{i=1}^t (n_i - 1) + m - 2$.

Ainsi $K_{\underbrace{1, \dots, 1}_{m \text{ fois}}, n_1, n_2, \dots, n_t}$ est un graphe γ_L^- -ER-critique. \square

Nous terminons cette première section par cette conjecture.

Conjecture 4.1. *G est un graphe γ_L^- -ER-critique si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée,*

- (i) *G est un graphe complet d'ordre supérieur ou égale à quatre,*
- (ii) *G est un graphe biparti complet K_{n_1, n_2} tel que $\min\{n_1, n_2\} \geq 3$,*
- (iii) *G est un graphe t -partie complet K_{n_1, n_2, \dots, n_t} , $t \geq 3$ tel que $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$ et $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 3$,*
- (iv) *G est un graphe multiparti complet $K_{\underbrace{1, \dots, 1}_m, n}$ tel que $\min\{m, n\} \geq 3$,*
- (v) *G est un graphe t -partie complet $K_{\underbrace{1, \dots, 1}_{m \text{ fois}}, n_1, n_2, \dots, n_t}$, $t \geq 2$, $m \geq 3$ tel que $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$ et $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 3$.*

Nous considérons maintenant les graphes simples non vides et sans sommets isolés.

4.2 La Classe des Graphes γ_L^t Arête Enlevée Critiques

Dans cette seconde section nous étudions les graphes de la classe γ_L^t Arête Enlevée Critiques notée $\gamma_L^t CER$, $\gamma_L^t CER = \{G / \gamma_L^t(G - e) \neq \gamma_L(G), \forall e \in G\}$.

Nous définissons deux sous classes de graphes de la classe $\gamma_L^t CER$. Les graphes G tels que pour toute arête e dans G , le graphe partiel $G - e$ est sans sommets isolés et $\gamma_L^t(G - e) > \gamma_L^t(G)$, et les graphes G ayant la particularité que pour toute arête e dans G , le graphe partiel $G - e$ est sans sommets isolés et $\gamma_L^t(G - e) = \gamma_L^t(G) - 1$.

Proposition 4.7. *Il n'existe aucun graphe G de degré minimum $\delta(G) \geq 2$ qui vérifie $\gamma_L^t(G - e) > \gamma_L^t(G)$, pour toute arête e dans G .*

Preuve. Soient, $G = (V, E)$ un graphe de degré minimum $\delta(G) \geq 2$ tel que $\gamma_L^t(G - uv) > \gamma_L^t(G)$, pour toute arête $uv \in E$, et D_L^t un $\gamma_L^t(G)$ -ensemble. Forcément $V \setminus D_L^t$ est un stable. Considérons un sommet v dans $V \setminus D_L^t$ de degré minimum, avec $N_G(v) = \{u, u_1, \dots, u_k\}$, $k \geq 2$. Donc, il n'existe aucun sommet w dans $V \setminus D_L^t$ de sorte que $N_G(w) \subset N_G(v)$. En particulier, si $N_G(w) = \{u_1, \dots, u_k\}$. En enlevant l'arête uv , D_L^t est un ensemble dominant total localisateur du graphe partiel $G - uv$. Donc $\gamma_L^t(G - uv) \leq \gamma_L^t(G)$, contradiction. \square

De la proposition 4.7, et comme le concept de la domination totale localisatrice n'est pas défini pour tout graphe partiel $H = G - e$, $e \in G$ avec $\delta(G) = 1$, nous introduisons la sous classe des graphes γ_L^{t+} -arête enlevée-faiblement critiques.

4.2.1 Les Graphes γ_L^{t+} -Arête Enlevée-Faiblement Critiques

Définition 4.6. *Un graphe G de la classe γ_L^t CER est dit γ_L^{t+} -arête enlevée-faiblement critique si et seulement si $\gamma_L^t(G - e) > \gamma_L^t(G)$, pour toute arête non pendante e dans G , G est écrit γ_L^{t+} -ER-faiblement critique.*

Remarque 4.2. *Soit G un graphe γ_L^{t+} -ER-faiblement critique, alors $b_L^t(G) = 1$.*

Proposition 4.8. [9] *Si D_L^t est un γ_L^t -ensemble d'un graphe γ_L^{t+} -ER-faiblement critique G , alors le sous graphe induit par $V \setminus D_L^t$ est un stable.*

Preuve. Soit D_L^t un γ_L^t -ensemble d'un graphe $G = (V, E)$, γ_L^{t+} -ER-faiblement critique. Supposons que $\langle V \setminus D_L^t \rangle$ admet deux sommets voisins u et v , alors D_L^t est un E.D.T.L. du graphe partiel sans sommets isolés $G - uv$. Donc $\gamma_L^t(G - uv) \leq \gamma_L^t(G)$, contradiction. Ainsi $\langle V \setminus D_L^t \rangle$ est un stable. \square

Proposition 4.9. [9] *Si D_L^t est un γ_L^t -ensemble d'un graphe γ_L^{t+} -ER-faiblement critique G , alors le sous graphe induit par D_L^t est une galaxie.*

Preuve. Soit D_L^t un γ_L^t -ensemble d'un graphe $G = (V, E)$, γ_L^{t+} -ER-faiblement critique. $\langle D_L^t \rangle$ est sans sommets isolés. Donc toute composante connexe C_i , $i \geq 1$ dans $\langle D_L^t \rangle$ est soit un arbre non trivial soit un graphe connexe. Supposons que le sous graphe induit par D_L^t n'est pas une galaxie. Forcément il contient au moins une composante C_i qui n'est pas une étoile. Si C_i est un arbre, alors C_i admet au moins une arête non pendante uv , $G - uv$ est sans sommets isolés et D_L^t est un E.D.T.L. du graphe partiel $G - uv$, donc $\gamma_L^t(G - uv) \leq \gamma_L^t(G)$, contradiction. Sinon C_i contient au moins un cycle C , pour toute arête uv de C , $G - uv$ est sans sommets isolés et D_L^t est un E.D.T.L. du graphe partiel $G - uv$, donc $\gamma_L^t(G - uv) \leq \gamma_L^t(G)$, contradiction. Ainsi $\langle D_L^t \rangle$ est une galaxie. \square

La réciproque des propositions 4.8, 4.9 n'est pas vérifiée dans tous les cas.

Remarquons que tout dominant total localisateur minimum D_L^t d'un cycle C_3 est une étoile $K_{1,1}$ et $\langle V(C_3) \setminus D_L^t \rangle$ est un stable, mais C_3 n'est pas un graphe γ_L^{t+} -ER-faiblement critique.

Nous caractérisons maintenant les graphes γ_L^{t+} -ER-faiblement critiques.

Les Chaînes γ_L^{t+} -ER-Faiblement Critiques

Proposition 4.10. P_n est une chaîne γ_L^{t+} -ER-faiblement critique si et seulement si $n \in \{4, 5\}$.

Preuve. Si $n \leq 6$. Il est facile de vérifier qu'uniquement P_4 et P_5 sont des chaînes γ_L^{t+} -ER-faiblement critiques.

Si $n \geq 6$. Pour prouver cette propriété il suffit qu'il existe une arête non pendante e dans P_n telle que $\gamma_L^t(P_n - e) = \gamma_L^t(P_n)$. Soient P_{n_1} et P_{n_2} ($n_1 + n_2 = n$) les deux composantes connexes de $P_n - e$. Nous avons les cas suivants,

Si $n \equiv 0[4]$. Considérons le cas où $n_1 \equiv 0[4]$ et $n_2 \equiv 0[4]$.

$$\gamma_L^t(P_n - e) = \gamma_L^t(P_{n_1}) + \gamma_L^t(P_{n_2}) = 2\lceil n_1/4 \rceil + 2\lceil n_2/4 \rceil = 2\lceil n/4 \rceil = \gamma_L^t(P_n).$$

Si $n \equiv 1[4]$. Considérons le cas où $n_1 \equiv 0[4]$ et $n_2 \equiv 1[4]$.

$$\gamma_L^t(P_n - e) = \gamma_L^t(P_{n_1}) + \gamma_L^t(P_{n_2}) = 2\lceil n_1/4 \rceil + 2\lceil n_2/4 \rceil - 1 = 2\lceil n/4 \rceil - 1 = \gamma_L^t(P_n).$$

Si $n \equiv 2[4]$. De la proposition 3.6, $b_L^t(P_n) = 2$, ainsi de la remarque 4.2, P_n n'est pas γ_L^{t+} -ER-faiblement critique.

Si $n \equiv 3[5]$. Considérons le cas où $n_1 \equiv 0[4]$ et $n_2 \equiv 3[4]$.

$$\gamma_L^t(P_n - e) = \gamma_L^t(P_{n_1}) + \gamma_L^t(P_{n_2}) = 2\lceil n_1/4 \rceil + 2\lceil n_2/4 \rceil - 2 = 2\lceil n/4 \rceil = \gamma_L^t(P_n). \quad \square$$

Les Graphes γ_L^{t+} -ER-Faiblement Critiques

Définition 4.7. [9] Soit $H = (V, E)$ un graphe connexe tel que

- V peut être partitionné en deux sous ensembles X, Y de sorte que le sous graphe induit par X est une galaxie et le sous graphe induit par Y est un stable,
- $\forall y \in Y$ et $\forall X' \subseteq N_H(y)$, il existe un unique y' de Y tel que $N_H(y') = X'$,
- $\forall x \in S(H) \cap X$, $N_H(x) \cap Y \neq \emptyset$.

Nous désignons par \mathcal{H} l'ensemble des graphes H .

Exemples

P_4 et P_5 sont des graphes de \mathcal{H} .

$K_{1,n}$, $n \geq 1$ est un graphe de \mathcal{H} .

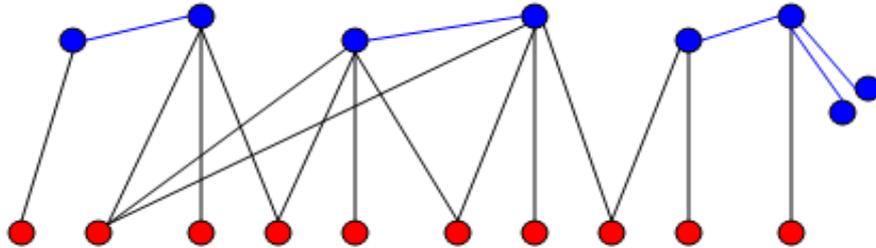


FIG. 4.4 – Graphe $H \in \mathcal{H}$

Observation 4.4. [9] Un graphe $H \in \mathcal{H}$ est construit de sorte que,

- $S(H) \subseteq X$.
- $\forall x \in V(H) \setminus (S(H) \cup L(H)), N_H(x) \cap Y = \emptyset$.
- Le sous graphe induit par $V(H) \setminus (S(H) \cup L(H))$ est stable.
- X est un $\gamma_L^t(H)$ -ensemble de H .

Lemme 4.8. [9] Si H appartient à \mathcal{H} , alors H est γ_L^{t+} -ER-faiblement critique.

Preuve. Soit $H = (X \cup Y, E) \in \mathcal{H}$. Si H est une étoile, alors par définition H est γ_L^{t+} -ER-faiblement critique. Sinon, nous considérons une arête non pendante $xy \in E$, le graphe partiel $H - xy$ est sans sommets isolés. Nous distinguons les deux cas suivants,

1^{er} cas. $\{x, y\} \in X$, xy appartient à une étoile dans $\langle X \rangle$. De l'observation 4.4, le sous

graphe induit par $V(H) \setminus (S(H) \cup L(H))$ est stable. Donc nous avons les deux sous cas suivants,

- x et y sont des sommets supports. Par construction de H , $N_H(x) \cap Y \neq \emptyset$ et $N_H(y) \cap Y \neq \emptyset$ et au plus l'un des deux sommets x et y est un sommet support fort dans H , sinon $\langle X \rangle$ contient une étoile double.

- Dans le cas où x et y sont des supports faibles, xy est la chaîne P_2 dans $\langle X \rangle$.

Si nous supposons que $(N_H(x) \cap N_H(y)) \cap Y = \emptyset$, alors tout γ_L^t -ensemble D_L^t du graphe partiel $H - xy$ contient les sommets $\{x, y\}$ et deux sommets $\{x', y'\}$ avec $x' \in N_H(x) \cap Y$ et $y' \in N_H(y) \cap Y$, l'ensemble $D_L^t \setminus \{x', y'\}$ est un E.D.T.L. du graphe H . Donc $\gamma_L^t(H - xy) > \gamma_L^t(H)$. Si nous considérons qu'il existe au moins un sommet $x' \in (N_H(x) \cap N_H(y)) \cap Y$, tout $\gamma_L^t(H - xy)$ -ensemble D_L^t contient $\{x, y\}$ et un sommet x' , mais $D_L^t \setminus \{x'\}$ est un E.D.T.L. du graphe H . Donc $\gamma_L^t(H - xy) > \gamma_L^t(H)$.

- Dans le cas où l'un des sommets x ou y est un support fort. Supposons que y est un support fort, tout ensemble dominant total localisateur minimum D_L^t du graphe partiel $H - xy$ contient $\{x, y\}$ et un sommet x' voisin à x

dans Y , d'autre part, $D_L^t \setminus \{x'\}$ est un E.D.T.L. du graphe H . Il résulte que $\gamma_L^t(H - xy) > \gamma_L^t(H)$.

- x ou y est un sommet support, soit $x \in S(H)$, donc y appartient au cœur de H , par construction de H , $N(x) \cap Y \neq \emptyset$ et $N(y) \cap Y = \emptyset$ et comme $\langle X \rangle$ est une galaxie, forcément x est un sommet support faible, de plus tout ensemble dominant total localisateur minimum D_L^t du graphe partiel $H - xy$ contient $\{x, y\}$ et un sommet x' adjacent à x dans Y , or que $D_L^t \setminus \{x'\}$ est un E.D.T.L. du graphe H , donc $\gamma_L^t(H - xy) > \gamma_L^t(H)$.

2^{ème} cas. Sans perte de généralité supposons que $x \in X$ et $y \in Y$, comme xy est un arête non pendante, $d_H(y) \geq 2$, posons $N_H(y) = \{x, x_1, \dots, x_l\}$, $l \geq 1$. H est construit de sorte que $N_H(y) \subseteq X$, et en plus pour tout sous ensemble $X' \neq \emptyset$ dans l'ensemble des parties de $N_H(y)$, il existe un unique sommet y' dans Y distinct de y tel que $N_H(y') = X'$, en particulier si $X' = \{x_1, \dots, x_l\}$, donc tout graphe partiel $H' = H - xy$ contient des faux jumeaux $\{y, y'\}$ ceci implique que tout $\gamma_L^t(H')$ -ensemble D_L^t contient y ou y' , soit $y \in D_L^t$, il est clair que $D_L^t \setminus \{y\}$ est un E.D.T.L. du graphe H , d'où $\gamma_L^t(H - xy) > \gamma_L^t(H)$.

Ainsi dans les deux cas H est γ_L^{t+} -ER-faiblement critique. \square

Lemme 4.9. [9] *Si H est un graphe γ_L^{t+} -ER-faiblement critique, alors H appartient à \mathcal{H} .*

Preuve. Soit $H = (V, E)$ un graphe γ_L^{t+} -ER-faiblement critique. Si H est une étoile, alors $H \in \mathcal{H}$. Sinon, soit D_L^t un γ_L^t -ensemble de H . De la proposition 4.8, $V \setminus D_L^t$ est un stable et de la proposition 4.9, le sous graphe induit par D_L^t est une galaxie. Montrons maintenant que $\forall y \in V \setminus D_L^t$ et $\forall X' \subseteq N_H(y)$, il existe un unique y' de $V \setminus D_L^t$ tel que $N_H(y') = X'$. Soit $y \in V \setminus D_L^t$ tel que $N_H(y) = \{x_1, \dots, x_l\}$, $l \geq 1$. Nous considérons les cas suivants, qui dépendent de la cardinalité de X' .

$|X'| = l = 1$. y est un sommet pendant et x_1 est le sommet support de y , de l'observation 3.4, tout sommet pendant y' distinct de y voisin à x appartient à D_L^t ,

donc $X' = \{x_1\} = N_H(y)$.

$|X'| = l \neq 1$. Comme D_L^t est un γ_L^t -ensemble du graphe H , tout sommet $y' \in V \setminus D_L^t$ est de voisinage $N_H(y')$ différent de $N_H(y)$.

$2 \leq |X'| \leq l - 1$. Soit $|X'| = l - 1$, sans perte de généralité posons $X' = \{x_1, \dots, x_{l-1}\}$. si nous supposons qu'il n'existe aucun sommet y' dans $V \setminus D_L^t$ tel que $N_H(y') = \{x_1, \dots, x_{l-1}\}$, alors D_L^t est un E.D.T.L. du graphe partiel sans sommets isolés $H' = H - yx_l$. il s'ensuit que $\gamma_L^t(H - yx_l) \leq \gamma_L^t(H)$, contradiction avec le fait que H est γ_L^{t+} -ER-faiblement critique. Répétant cette procédure pour tous les sous ensembles X' de $N_H(y)$ tels que $2 \leq |X'| \leq l - 1$.

Il nous reste à vérifier que pour tout sommet support $x \in D_L^t$, $N_H(x) \cap V \setminus D_L^t \neq \emptyset$. Supposons le contraire, donc $(x \cup N_H(x)) \subset D_L^t$, mais H n'est pas un étoile, alors il existe au moins un sommet $y \in N_H(x) \setminus L_x$, où $L_x = \{\text{les sommets pendants voisins à } x\}$. Ceci implique que $D_L^t \setminus \{x'\}$, $x' \in L_x$ est un E.D.T.L. du graphe H de cardinalité strictement inférieur à $\gamma_L^t(H)$, contradiction.

Ainsi $H \in \mathcal{H}$. \square

Comme conséquence immédiate des lemmes 4.8, 4.9, on a le théorème suivant,

Théorème 4.3. *H est un graphe connexe γ_L^{t+} -ER-faiblement critique si et seulement si $H \in \mathcal{H}$.*

Corollaire 4.2. *H est un graphe γ_L^{t+} -ER-faiblement critique si et seulement si toute composante connexe de H est dans \mathcal{H} .*

4.2.2 Les Graphes γ_L^{t-} -Arête Enlevée-Critiques

Suite aux résultats obtenus dans la partie « Les Graphes γ_L^- -Arête Enlevée-Critiques », nous déduisons dans cette partie que les graphes complets et les graphes multipartis complets sous certaines conditions sont également des graphes γ_L^{t-} -ER-critiques.

Définition 4.8. Un graphe G de la classe γ_L CER est dit γ_L^t -arête enlevée-critique si et seulement si le graphe partiel $G - e$ est sans sommet isolé et $\gamma_L^t(G - e) = \gamma_L^t(G) - 1$, pour toute arête e dans G , G est écrit γ_L^t -ER-critique.

Proposition 4.11. Si l'une des assertions suivantes est vérifiée,

- (i) G est un graphe complet d'ordre supérieur ou égale à quatre,
- (ii) G est un graphe biparti complet K_{n_1, n_2} tel que $\min\{n_1, n_2\} \geq 3$,
- (iii) G est un graphe t -partie complet K_{n_1, n_2, \dots, n_t} , $t \geq 3$ tel que $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$ et $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 3$,
- (iv) G est un graphe multiparti complet $K_{\underbrace{1, \dots, 1}_m, n}$ tel que $\min\{m, n\} \geq 3$,
- (v) G est un graphe t -partie complet $K_{\underbrace{1, \dots, 1}_{m \text{ fois}}, n_1, n_2, \dots, n_t}$, $t \geq 2$, $m \geq 3$ tel que $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$ et $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 3$,

alors G est un graphe γ_L^t -ER-critique.

Preuve. Tout ensemble dominant total localisateur dans un graphe G est un ensemble dominant localisateur dans le graphe G . Donc $\gamma_L(G) \leq \gamma_L^t(G)$ et l'égalité n'est vérifiée que si et seulement si G possède au moins un dominant localisateur minimum D_L sans sommets isolés. D'autre part, tout $\gamma_L(G)$ -ensemble d'un graphe G , énoncé dans la proposition 4.6, est connexe, alors $\gamma_L(G) = \gamma_L^t(G)$. De plus G est γ_L^t -ER-critique, donc pour toute arête $uv \in G$, $\gamma_L(G - uv) = \gamma_L(G) - 1$. Et comme tout $\gamma_L(G - uv)$ -ensemble est connexe, il résulte que,
 $\gamma_L^t(G - uv) = \gamma_L(G - uv) = \gamma_L(G) - 1 = \gamma_L^t(G) - 1$. \square

Nous terminons ce chapitre en donnant cette conjecture.

Conjecture 4.2. *G est un graphe γ_L^t -ER-critique si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée,*

- (i) *G est un graphe complet d'ordre supérieur ou égale à quatre,*
- (ii) *G est un graphe biparti complet K_{n_1, n_2} tel que $\min\{n_1, n_2\} \geq 3$,*
- (iii) *G est un graphe t-partie complet K_{n_1, n_2, \dots, n_t} $t \geq 3$, tel que $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$ et $n_1 \geq 2, n_2 \geq 3$,*
- (vi) *G est un graphe multiparti complet $K_{\underbrace{1, \dots, 1}_m, n}$ tel que $\min\{m, n\} \geq 3$,*
- (v) *G est un graphe t-partie complet $K_{\underbrace{1, \dots, 1}_m, n_1, n_2, \dots, n_t}$ $t \geq 2, m \geq 3$ tel que $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_t$ et $n_1 \geq 2, n_2 \geq 3$.*

Conclusion

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés aux deux paramètres de domination, le nombre de domination localisatrice γ_L et le nombre de domination total localisatrice γ_L^t . Nous avons défini les nombres de bondage relatif à ces paramètres, $b_L(G)$ et $b_L^t(G)$.

Dans le chapitre 3 nous avons donné des valeurs exactes du $b_L(G)$ et $b_L^t(G)$ pour certaines classes de graphes, les chaînes, les cycles, les graphes complets et les graphes multipartis complets. Nous avons également établi des bornes supérieures du $b_L(G)$ pour les arbres et pour les graphes dans quelques cas particuliers. Nous avons défini par la suite les arbres γ_L^t -fortement stables et nous les avons caractérisés, aussi nous avons donné quelques exemples de graphes γ_L^t -fortement stables.

L'objectif du chapitre 4 était l'étude des graphes arête enlevée critiques par rapport aux paramètres γ_L et γ_L^t . Nous avons pu établir la caractérisation des graphes γ_L^+ -arête enlevée-critiques et des graphes γ_L^{t+} -arête enlevée-faiblement critiques. Nous avons également prouvé que les graphes complets et les graphes multipartis complets sous certaines conditions sont des graphes γ_L^- -arête enlevée-critiques et γ_L^{t-} -arête enlevée-critiques.

Nous avons posé dans notre travail trois conjectures qui ont pour objet la caractérisation de tous

- Les graphes γ_L^t -fortement stables.
- Les graphes γ_L^- -arête enlevée-critiques.
- Les graphes γ_L^{t-} -arête enlevée-critiques.

En conclusion, il serait intéressant de traiter les questions suivantes qui peuvent être considérées comme une suite de notre travail.

- Déterminer des valeurs exactes et des bornes inférieures ou supérieures du $b_L(G)$ et $b_L^t(G)$ pour d'autres classes de graphes.
- Caractériser les graphes critiques par rapport aux paramètres γ_L et γ_L^t .
- Caractériser les graphes arête critiques par rapport aux paramètres γ_L et γ_L^t .

Bibliographie

- [1] W.W. Rouse Ball, *Mathematical recreation and problems of past and present times*, MacMillan, London, 1892.
- [2] D. Bauer, F. Harary, J. Nieminen and C.L. Suffel, Domination alteration sets in graphs, *Discrete Mathematics*, 47 (1983) 153-161.
- [3] C. Berge, *Graphes et Hypergraphes*, Paris Dunod, 1970.
- [4] M. Blidia, M. Chellali and O. Favaron, Independence and 2-domination in trees, *Australasian Journal of Combinatorics*, 33 (2005) 317-327.
- [5] M. Blidia, M. Chellali, R. Lounes and F. Maffray, Characterizations of trees with unique minimum locating-dominating sets, submitted.
- [6] M. Blidia, M. Chellali, F. Maffray, J. Moncel and A. Semri, Locating-domination and identifying codes in trees, *Australasian Journal of Combinatorics*, 39 (2007) 219-232.
- [7] M. Blidia, O. Favaron and R. Lounes, Locating-domination, 2-domination and independence in trees, *Australasian Journal of Combinatorics*, 42 (2008) 309-316.
- [8] M. Blidia and W. Dali, A Characterizations of locating domination edge critical graphs, *Australasian Journal of Combinatorics*, 44 (2009) 297-300.
- [9] M. Blidia and W. Dali, A characterization of locating-total domination edge critical graphs, submitted to *Discussiones Mathematicae Graph Theory*.
- [10] R.C. Brigham, P. Chinn and R.D. Dutton, Vertex domination critical graphs, *Networks*, 18 (1988) 173-179.

- [11] M. Chellali, On locating and differentiating-total domination in trees, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 28 (2008) 383-392.
- [12] E.J. Cockayne and S.T. Hedetniemi, Towards a theory of domination, *Networks*, 7 (1977) 247-261.
- [13] E.J. Cockayne, O. Favaron and C.M. Mynhardt, On i^- -ER-critical graphs, *Discrete Math.*, 276 (2004) 111-125.
- [14] V. Chvatal and W. Cook, The discipline number of a graphs, *Discrete Math.*, 86 (1990) 191-198.
- [15] C.F. De Jaenisch, Trait des applications de l'analyse mathématique au jeu des Echecs, Petrograd, 1862.
- [16] R.C. Entringer and L.D. Gassman, Line critical point determining and point distinguishing graphs, *Discrete Math.*, 10 (1974) 170-182.
- [17] J.F. Fink, M.S. Jacobson, L.F. Kinch and J. Roberts, The bondage number of graph, *Discrete Mathematics*, 86 (1990) 47-57.
- [18] P.J.P. Grobler and C.M. Mynhardt, Upper domination parameters and edge critical graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 33 (2000) 239-251.
- [19] P.J.P. Grobler and C.M. Mynhardt, Domination parameters and edge removal critical graphs, *Discrete Mathematics*, 231 (2001) 221-239.
- [20] B.L. Hartnell and D.F. Rall, A Characterizations of trees in which no edge is essential to the domination number, *Ars. Combin.*, 33 (1992) 65-72.
- [21] B.L. Hartnell and D.F. Rall, Bounds on the bondage number of a graph, *Discrete Mathematics*, 128 (1994) 173-177.
- [22] J.H. Hatting and A.R. Plummer, Restrained bondage in graphs, *Discrete Mathematics*, 2007.
- [23] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi and P.J. Slater, Fundamentals of domination in graphs, Marcel Dekker, New York, 1998.

- [24] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi and P.J. Slater, Domination in graphs, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [25] T.W. Haynes, M.A. Henning and J. Howard, Locating and total locating sets in trees, *Discrete Mathematics*, 2006.
- [26] O. Ore, Theory of graphs, *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, 38 (*Amer. Math. Soc., Providence, RI*), 1962.
- [27] J. Raczek, Paired bondage number, *Discrete Mathematics*, 308 (2008) 5570-5575.
- [28] P.J. Slater, Leves of trees, *Proc. of the Sixth S.E. Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Utilitas Mach.*, (1975) 549-559.
- [29] P.J. Slater, Domination and acyclic in graphs, *Networks*, 17 (1987) 55-64.
- [30] P.J. Slater, Dominating and reference sets in graphs, *J.Mathematical and Physical Sciences*, 22 (1988) 445-455.
- [31] R.D. Skaags, Identifying vertices in graphs and digraphs, Thèse de doctora, Université d'Afrique du Sud, 2007.
- [32] Ulrich Teschner, A conterexample to a conjecture on the bondage number of a graph, *Discrete Mathematics*, 122 (1993) 393-395.
- [33] Ulrich Teschner, The bondage number of a graph G can be much greater than $\Delta(G)$, *Ars. Combin.*, 43 (1996).
- [34] Ulrich Teschner, A new upper bound for the bondage number of a graphs with small domination number, *Australasian Journal of Combinatorics*, 12 (1995) 27-35.
- [35] H.B. Walikar and B.D. Acharya, Domination critical graphs, *Nat. Acad. Sci. Lett.*, 2 (1979) 70-72.
- [36] A.M. Yaglom and A.M. Yaglom, Challenging mathematical problems with elementary solution, In volume 1, *Combinatorial analyse and probability theory*, San Fransisco, 1964, Holden-Day.

Résumé

Dans ce mémoire nous nous intéressons aux deux paramètres de domination, le nombre de domination localisatrice γ_L et le nombre de domination total localisatrice γ_L^t . Nous définissons par rapport à ces deux paramètres deux autres paramètres de domination le nombre de bondage localisateur $b_L(G)$ et le nombre de bondage total localisateur $b_L^t(G)$, d'un graphe simple non vide G . Nous donnons des valeurs exactes et des bornes supérieures du $b_L(G)$ et $b_L^t(G)$ pour certaines classes de graphes. Nous caractérisons la famille des arbres γ_L^t -fortement stables et en dernier nous étudions les graphes de la classe π Arête Enlevée Critique, notée πCER , par rapport au paramètre $\pi, \pi \in \{\gamma_L, \gamma_L^t\}$.

Mots clés : Dominant localisateur, dominant total localisateur, nombre de bondage, graphe critique.

Abstract

In this memory we are interested in both parameters domination, the locating domination number γ_L and the locating total domination number γ_L^t . We define two other parameters in relation to these two parameters, the locating bondage number $b_L(G)$ and the total locating bondage number $b_L^t(G)$ of a simple graph non-empty G . Upper bounds are obtained and exact values are determined for $b_L(G)$ and $b_L^t(G)$ for several classes of graphs. We give a constructive characterization of γ_L^t -strongly stable trees and at last we study graphs's class π Edge Removal Critical, noted πCER , compared to the parameter $\pi, \pi \in \{\gamma_L, \gamma_L^t\}$.

Keywords : Locating-dominating, locating-total dominating, bondage number, critical graph.