N^0 d’ordre : 20 \ 2008-M \ MT

MINISTÈRE DE L’ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

Présenté pour l’obtention du diplôme de Magistère

EN : Mathématiques

Spécialité : Analyse : Équations aux Dérivées Partielles

Par

FERHOUNE ZAHIA

THÈME

Unicité du prolongement des solutions des « E.D.P » ; entre le théorème de Hörmander et le théorème de Holmgren.

Soutenu publiquement le Mercredi 05 \ 03 \ 2008, devant le jury composé de :

Mr. **A. HEMINNA**	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr. **D. TENIOU**	Professeur	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
Mr. **A. KESSAB**	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examinateur.
Mme. **O. ZAIR**	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examinateur.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous ceux qui m'ont aidé à réaliser cette thèse.

En premier lieu je remercie vivement Monsieur **D.Teniou** *mon directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Sa disponibilité, malgré ses nombreuses sollicitations, sa gentillesse et ses conseils ont été des éléments décisifs dans l'aboutissement de cette thèse.*

Je remercie également Monsieur **A. Kessab** *Maitre de Conférences à l'U.S.T.H.B. pour son soutien, son aide et l'intéret qu'il a manifesté à légard de mon travail et pour avoir accepté de faire partie de mon jury.*

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciments les plus vifs à Monsieur **A.Hemina**, *Professeur à l'U.S.T.H.B. pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.*

Mes remerciements tout aussi vifs vont à Madame **O.Zair**, *Maitre de Conférences à l'U.S.T.H.B. qui a accepté de faire partie de mon jury.*

Je voudrais exprimer ma reconnaissance à toute ma famille, mon père, ma mère, mes frères et soeurs, mes enfants et surtout à mon mari pour son soutien indéfectible.

Merci également à toutes mes amies , en particulier *Djamila qui m'a beaucoup aidé, encouragé et conseillé, Naima, Kahina et Chahrazad.*

Unicité du prolongement des solutions des "E .D. P" ; entre le théorème de Hörmander et le théorème de Holmgren

Résumé

Dans son article "*Unique continuation for solutions to PDE'S; between Hörmander's theorem and Holmgren's theorem*", **Daniel Tataru** démontre un nouveau résultat d'unicité du prolongement à travers une hypersurface S. Plus précisément, en supposant les coefficients de l'opérateur partiellement analytiques, il obtient un résultat d' unicité du prolongement, intermédiaire entre le théorème de **Holmgren** qui s'applique à des problèmes à coefficients analytiques et des surfaces non cractéristiques, et le théorème de **Hörmander** qui s'applique à des problèmes à coefficients de classe C^1 et des surfaces fortement pseudo-convexes.

Quelques applications à l'équation `des ondes` et à l'équation de `Schröedinger` sont données après la démonstration des théorèmes qui concrétisent ce résultat. En particulier, Tataru obtient le résultat conjecturé par Hörmander à savoir l' unicité du prolongement de la solution pour l'équation des ondes (avec des coefficients seulement C^1 indépendants du temps) à travers toute surface non caractéristique.

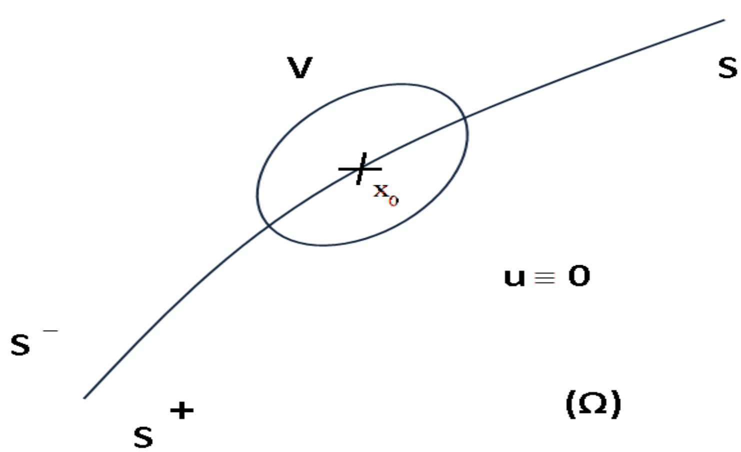
Table des matières

Liste des principales notations

Notation	**Description**
∇	le gradient
$\triangle$	le Laplatien
$T^*(\Omega)$	le fibré cotangent de Ω
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	espace des fonctions k continûment différentiables sur Ω
$\mathcal{D}'(\Omega)$	espace des distributions sur Ω
$H^k(\Omega)$	Espace de sobolev
$H^k_\tau(\Omega)$	Espace de sobolev avec poids
$S'(\mathbb{R}^n)$	espace des distributions tempérées
$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_a}; H^m(\mathbb{R}^{n_b}))$	espace des distributions sur $\mathbb{R}^{n_a}$ à valeurs dans $H^m(\mathbb{R}^{n_b})$
$H^{r,k}_\tau(\mathbb{R}^n)$	$\{u \in S'(\mathbb{R}^n); (\lvert\xi_a\rvert^2+\tau^2)^{\frac{r}{2}}(\lvert\xi\rvert^2+\tau^2)^{\frac{k}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$
$\lvert u\rvert^2_{r,k,\tau}$	$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}(\lvert\xi_a\rvert^2+\tau^2)^r(\lvert\xi\rvert^2+\tau^2)^k\lvert\hat{u}(\xi)\rvert^2 d\xi$
$\lvert u\rvert_{C^r_\tau}(\Omega)$	$\displaystyle\sum_{\lvert\alpha\rvert\leq r}\tau^{-\lvert\alpha\rvert}\lvert D^\alpha u\rvert_{L^\infty(\Omega)}$
$\lvert D\rvert^2$	$\displaystyle\sum_{1\leq j\leq n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$
$P_\tau(x,D)$	$P(x, D+i\tau\nabla\varphi)$
$P_{\epsilon,\tau}(x,D)$	$P_\tau(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a, x_b, D)$
$Q^\varphi_{\epsilon,\tau}(x,D)u$	$e^{\frac{-\epsilon}{2\tau}\lvert D\rvert^2}(e^{\tau\varphi}u)$

Introduction générale

Les questions concernant l'unicité des solutions sont d'une grande impotance dans beaucoup de domaines des équations aux dérivées partielles. L'étude de ces questions a nécessité beaucoup de temps et tient une grande place dans l'histoire des Mathématiques. Récemment les problèmes appliqués comme les problèmes inverses ou les problèmes de contrôle ont en créé d'autres. L' unicité du prolongement (unique continuation en Anglais) des solutions des équations aux dérivées partielles en fait partie. Cette notion d' unicité du prolongement peut être décrite de la façon suivante : On considère une fonction ou une distribution u qui satisfait une équation aux dérivées partielles dans un ouvert Ω. Cet ouvert est partagé en deux parties par une hypersurface S passant par un point fixé x_0 dans Ω. L' unicité du prolongement de la solution veut dire que si $u \equiv 0$ d'un côté de l'hypersurface S alors $u \equiv 0$ dans un voisinage V de x_0 tel que $V \subset \Omega$
(Voir figure ci-dessous)



Cette notion d'unicité du prolongement qui est une notion locale dépend de plusieurs conditions :

- la régularité des coefficients de l'opérateur différentiel
- la régularité de la la solution
- la géométrie de l'hypersurface liée aux notions de caractéristiques et de pseudo-convexité.

Au début des années 1990, deux résultats classiques étaient bien connus.
Le premier résultat est le théorème de `Holmgren` [6], qui suppose la surface non caractéristique et l'opérateur différentiel à coefficients analytiques. Ce théorème semble optimal pour la surface mais pas pour la régularité des coefficients de l'opérateur puisque l'analyticité est y requise.
Le second résultat est le théorème de `Hörmander` [8] qui suppose les coefficients seulement C^1 mais la surface fortement pseudo-convexe par rapport à P dans $T^*\mathbb{R}^n$. De même ce théorème semble optimal par rapport à la régularité des coefficients, mais la condition de pseudo-convexité forte exigée dans $\mathbb{R}^n$ tout entier est assez rigide. Cependant, ce théorème nous fournit un résultat optimal pour les opérateurs elliptiques du second ordre (voir [13]).

Beaucoup de processus d'évolution sont décrits par des équations paraboliques ou hyperboliques et la question qui se pose est la suivante : Peut on adapter le théorème de `Holmgren` à ces opérateurs là si leurs coefficients sont seulement $\mathcal{C}^1$? Peu d'éléments de réponses existaient avant 1991 date à laquelle `Robbiano` obtient quelques résultas partiels [9] pour les solutions de l'équation des ondes avec des coefficients indépendants du temps. Il a montré l'unicité du prolongement à travers toute surface du type temps (en Anglais "time-like surface") non caractéristique. Bien que que son résultat ne soit pas optimal il a néanmois marqué une avancée considérable sur cette question. Plus tard en 1992 Hörmander [5] améliora les résultats de Robbiano et conjectura l'unicité du prolongement des solutions à travers toute surface non caractéristique, ce qui s'est confirmé pour les opérateurs du second degré "of real principal type" (voir Applications chapitre 4). Grâce à la conjecture de Hörmander, `Daniel Tataru` [12] aboutit à un résultat plus concluant en 1995 puisque d'une part, il a affaibli les hypothèses de régularité des coefficients car il s'est intéressé à des opérateurs dont les coefficients sont partiellement analytiques, D'autre part il a restreint la condition de pseudo-convexité forte à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ noté ci-dessous Γ. Cette restriction est une conséquence de l'utilisation du poids pseudodifférentiel au lieu du poids scalaire utilisé par Hörmander. En quelques mots, pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_a} \times \mathbb{R}^{n_b}$, $n \geq 2$, en supposant les coefficients de l'opérateur analytiques par rapport aux n_a premières variables et seulement C^1 par rapport aux autres, moyennant quelques hypothèses techniques il montre l'unicité du prolongement de la solution du problème $P(x, D)u = 0$ à travers des hypersurfaces passant par un point fixé x_0 dans Ω, fortement pseudo-convexe par rapport à P dans l'ensemble $\Gamma = \{(x, \xi) \in T^*\Omega \ ; \ \xi_a = 0\}$, ξ étant la variable duale de x. C'est ce résultat qu'on exposera dans ce mémoire.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre, on introduit les espaces fonctionnels dans lesquels on travaille, les opérateurs et leurs symboles ainsi que les propriétés les concernant. On définit également la géométrie des hypersurfaces intervenant tout au long de ce travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'ensemble des propriétés des espaces fonctionnels introduits dans le premier chapitre.

Dans le troisième chapitre on rappelle les théorèmes classiques de Holmgren et de Hörmander avant d'énoncer celui de Tataru qui fait l'objet de ce mémoire. La preuve de ce résultat repose essentiellement sur des inégalités de type **Carleman** datant de 1930. Elles sont données dans le théorème 3.2.1 et établies à la suite.

Ce mémoire s'achève par l'application du nouveau résultat à deux exemples importants de la théorie des "Equations aux dérivées partielles" : `l'équation des ondes` et `l'équation de Schröedinger`, faisant l'objet du dérnier chapitre.

Chapitre 1

Rappels de quelques résultats fondamentaux

1.1 Espaces de Sobolev

1.1.1 Notation

Soit α un multi-indice c-à-d : $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on définit la longueur de α par $|\alpha| = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$ et factoriel α par $\alpha! = \alpha_1!... \alpha_n!$. On pose

$$D^\alpha = D_1{}^{\alpha_1}... D_n{}^{\alpha_n}.$$

Avec $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $i \in \mathbb{C}$ ($i^2 = -1$). De même pour $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ on écrit

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}... \xi_n^{\alpha_n}$$

$$x\xi = \sum_{1 \leq j \leq n} x_j \ \xi_j$$

1.1.2 Espaces de Sobolev usuels $H^k(\Omega)$

Définition 1.1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, On note par $H^k(\Omega), k \in \mathbb{N}$, l'espace usuel de Sobolev*

$$H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k\}$$

muni de la norme :

$$\| u \|_{H^k(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|^2{}_{L^2(\Omega)}$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ *on définit une norme équivalente qu'on notera* $|u|_k$ *telle que*

$$|u|_k^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

$\hat{u}$ *est la transformée de Fourier de u définie par :*

$$\hat{u}(\xi) = (\frac{1}{2\pi})^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x) dx.$$

Ceci nous conduit à la définition suivante

Espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$

Définition 1.1.2 *On appelle espace de Sobolev d'ordre s (où s est un réel) et on note* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *l'espace vectoriel suivant :*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n); (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

muni du produit scalaire suivant (dans $\mathbb{C}$*)*

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi) \bar{\hat{v}}(\xi) d\xi$$

$S'(\mathbb{R}^n)$ *étant l'espace des distributions tempérées. voir [11]*

Remarque 1.1.1 $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, *possède les propriétés suivantes :*
•$H^s(\mathbb{R}^n)$ *est un espace de Hilbert.*
• *les* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *forment une suite décroissante d'espaces dans le sens suivant* $H^s(R^n) \subset H^{s'}(\mathbb{R}^n)$ *dès que* $s' \leq s$ *et l'injection est continue.*
• $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $s \in \mathbb{R}$.
• *l'espace* $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ *s'identifie canoniquement au dual de* $H^s(\mathbb{R}^n)$*(Voir théorème 2.1.1).*

1.1.3 Espaces de Sobolev avec poids $H^k_\tau(\mathbb{R}^n)$ et $H^{r,k}_\tau(R^n)$

Espaces de Sobolev $H^k_\tau(\mathbb{R}^n)$

Définition 1.1.3 *Pour $\tau \in \mathbb{R}$; $\tau > 0$ on note par $H^k_\tau(\mathbb{R}^n)$ les mêmes espaces avec une norme dépendante de τ, plus précisément :*

$$\| u \|^2_{H^k_\tau(\mathbb{R}^n)} = \|u\|^2_{k,\tau} = |(|D|^2 + \tau^2)^{\frac{k}{2}} u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Où l'on a posé

$$((|D|^2 + \tau^2)^{\frac{k}{2}} u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}(|\xi|^2 + \tau^2)^{\frac{k}{2}} \hat{u}(\xi) d\xi$$

cette norme est équivalente à la norme suivante

$$|u|^2_{k,\tau} = \sum_{|\alpha| \leq k} \tau^{2(k-|\alpha|)} \| D^\alpha u \|^2{}_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

on décompose $x \in \mathbb{R}^n, n \geq 2$, sous la forme suivante :

$$x = (x_a, x_b) \in \mathbb{R}^{n_a} \times \mathbb{R}^{n_b} = \mathbb{R}^n$$

et on pose pour $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 2$

$$|D_a|^2 u = \sum_{1 \leq j \leq n_a} \frac{1}{i^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \ u \ .$$

Remarque 1.1.2 *On comprendra dans la suite la raison de cette décomposition ainsi que celle de l'introduction des espaces $H^{r,k}_\tau(\mathbb{R}^n)$ suivants.*

Espaces $H^{r,k}_\tau(\mathbb{R}^n)$

Définition 1.1.4 *Soit $r \in \mathbb{Z}$, on définit les espaces $H^{r,k}_\tau(\mathbb{R}^n)$ comme suit :*

$$H^{r,k}_\tau(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n); (|\xi_a|^2 + \tau^2)^{\frac{r}{2}} (|\xi|^2 + \tau^2)^{\frac{k}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

avec une famille de normes équivalentes notées $|u|_{r,k,\tau}$; telles que :

$$|u|^2_{r,k,\tau} \sim \| u \|^2_{H^{r,k}_\tau(\mathbb{R}^n)} = |(|D|^2_a + \tau^2)^{\frac{r}{2}} (|D|^2 + \tau^2)^{\frac{k}{2}} u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Autrement dit

$$|u|^2_{r,k,\tau} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (|\xi_a|^2 + \tau^2)^r (|\xi|^2 + \tau^2)^k |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

1.2 Opérateurs différentiels et symboles

On note par $P(x, D)$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre m

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

$a_\alpha(x)$, appelé coefficient de P, désigne une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de Ω dans $\mathbb{C}$. À $P(x, D)$ on associe la fonction

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

Définition 1.2.1 *$p(x, \xi)$ s'appelle le symbole (complet) de P.*

Remarque 1.2.1 *On remarquera que p est caractérisé par l'identité*
$P(e_\xi)(x) = p(x, \xi) e_\xi(x)$, où $e_\xi(x) = e^{ix\xi}$
cette formule se généralise sous la forme suivante

$$P(e_\xi u)(x) = e_\xi \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha p(x, \xi) D^\alpha u(x) \quad ; \quad u \in C^\infty(\Omega)$$

En effet ;

$$P(e_\xi u)(x) = \sum_{|\beta| \leq m} c_\beta(x) D^\beta (e^{ix\xi} u)$$

$$= \sum_{|\beta| \leq m} c_\beta(x) \sum_{|\alpha| \leq |\beta|} \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)! \alpha!} D^{\beta - \alpha} e^{ix\xi} D^\alpha u(x)$$

$$= e_\xi \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(x) \sum_\beta \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} c_\beta(x) \xi^{\beta - \alpha}$$

$$= e_\xi \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(x) \partial_\xi^\alpha p(x, \xi)$$

1.2.1 Calcul symbolique

Proposition 1.2.1 *Si $P = p(x, D)$ et $Q = q(x, D)$ sont des opérateurs différentiels sur Ω, d'ordres m, n respectivement, alors le composé PQ est un opérateur différentiel d'ordre au plus $m + n$, son symbole est noté $p\#q$ et il est donné par*

$$(p\#q)(x, \xi) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} p(x, \xi) D_x^{\alpha} q(x, \xi), \tag{1.1}$$

la somme étant finie.(p est un polynôme de degré fini)

Preuve D'aprés l'identité caractérisant le symbole d'un opérateur et sa formule généralisée, on a :

$$(p\#q)(e_{\xi})(x, \xi) e_{\xi}(x) = (P \circ Q)(e_{\xi})(x) = P(Q(e_{\xi}))(x)$$
$$= P(q(., \xi) e_{\xi})(x)(e_{\xi})(x) = e_{\xi}(x) \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} p(x, \xi) D_x^{\alpha} q(x, \xi),$$

On dispose d'un résultat analogue pour l'adjoint formel.

Proposition 1.2.2 *Si $P = p(x, D)$ est un opérateur différentiel d'ordre m sur Ω, alors il existe un opérateur différentiel P^* unique d'ordre m sur Ω tel que, pour toutes fonctions $u, v \in C^{\infty}(\Omega)$ dont l'une est à support compact,*

$$(Pu, v)_{L^2(\Omega)} = (u, P^* v)_{L^2(\Omega)}.$$

Le symbole de P^* est donné par la somme finie

$$p^*(x, \xi) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\alpha} \bar{p}(x, \xi). \tag{1.2}$$

Preuve En ce qui concerne l'existence et l'unicité de P^*, le résultat est bien connu, voir par exemple [14]. On calcule le symbole de P^*

$$(p^*(., \xi), u) = \int_{\mathbb{R}^n} p^*(x, \xi) \bar{u}(x) dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} P^*(e_{\xi})(x) \bar{u}(x) e^{-ix\xi} dx = (P^*(e_{\xi}), u e_{\xi}) = (e_{\xi}, P(u e_{\xi}))$$

$$= (e_\xi, e_\xi \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha p(.,\xi) D_x^\alpha u) = (1, \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha p(.,\xi) D_x^\alpha u)$$

$$= (\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \partial_\xi^\alpha \bar{p}(.,\xi), u)$$

Définition 1.2.2 *Si P est un opérateur différentiel d'ordre m, et p son symbole (complet), alors son symbole principal est défini par*

$$p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

p_m est un polynôme homogène de degré m en ξ.

Les propositions 1.2.1, 1.2.2 ont alors le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.1 *Si P est d'ordre au plus m, et Q d'ordre au plus n, alors les symbols principaux de PQ, P^* et $[P,Q] = PQ - QP$ sont respectivement*

$$(p\ q)_{m+n}(x,\xi) = p_m(x,\xi) q_n(x,\xi) \tag{1.3}$$

$$p_m^*(x,\xi) = \bar{p}_m(x,\xi) \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{i}\ \{\ p_m(x,\xi), q_m(x,\xi)\ \} \tag{1.5}$$

Définition 1.2.3 *La quantité $\{p,q\}$ intervenant dans (1.5) est définie par*

$$\{p,q\}(x,\xi) = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial p}{\partial \xi_j}(x,\xi)\frac{\partial q}{\partial x_j}(x,\xi) - \frac{\partial p}{\partial x_j}(x,\xi)\frac{\partial q}{\partial \xi_j}(x,\xi).$$

On l'appelle **`crochet de Poisson`** *des symbols p et q.*

Définition 1.2.4 *On appelle variété caractéristique de P l'ensemble*

$$V_P = \{(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\ ;\ p(x,\xi) = 0\}$$

Définition 1.2.5 *l'opérateur $P(x, D)$ d'ordre m est elliptique dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si son symbole principal vérifie*

$$p_m(x, \xi) \neq 0 \text{ pour } 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega.$$

Définition 1.2.6 *l'opérateur différentiel $P(x, D)$ est du type principal réel si son symbole principal $p_m(x, \xi)$ est réel et que $\nabla_{x,\xi} p_m(x, \xi) \neq 0$ dans V_P.*

Définition 1.2.7 *On dit que l'opérateur P est du type principal normal s'il vérifie la condition suivante :*

$$|\{\bar{p_m}, p_m\}| \leq |p_m||\xi|^{m-1}$$

Remarque 1.2.2 *Cette condition est vérifiée si P est du type principal réel ou elliptique.*

1.2.2 Espaces des symboles

Définition 1.2.8 *On définit l'espace des symboles S_τ^k par :*
$a(x, \xi, \tau) \in S_\tau^k$ si et seulement si

$$\begin{cases} a \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \mathbb{C}), a(.,.,\tau) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \\ |D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x, \xi, \tau)| \leq c_{\alpha,\beta}(1 + |(\xi, \tau)|)^{k-|\beta|}; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \end{cases} \tag{1.6}$$

Définition 1.2.9 *On définit également l'espace des symboles $C^1 S_\tau^k$ par :*
$a(x, \xi, \tau) \in C^1 S_\tau^k$ si et seulement si

$$\begin{cases} a \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \mathbb{C}), D_\xi^\beta a(x, ., \tau) \in C^0(\mathbb{R}^n), D_x^\alpha a(., \xi, \tau) \in C^0(\Omega), \\ |D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x, \xi, \tau)| \leq c_{\alpha,\beta}(1 + |(\xi, \tau)|)^{k-|\beta|}; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n; |\alpha| \leq 1 \end{cases} \tag{1.7}$$

la plupart des symboles considérés dans la suite sont des polynômes homogènes en ξ et τ. On prendra dans $C^1 S_\tau^k$ la topologie de l'espace de Banach engendrée par la norme C^1 des coefficients de ces symbols.

Dans la section suivante on définit l'opérateur $Q_{\epsilon,\tau}^\varphi$ qui jouera un rôle important dans la suite. On définit également les opérateurs P_τ et $P_{\epsilon,\tau}$ et on énoncera un lemme les concernant.

Définition 1.2.10 *Pour $\epsilon, \tau > 0$, $\varphi \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n)$, on définit le symbole*

$$q^{\varphi}_{\epsilon,\tau} = e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|\xi_a|^2+\tau\varphi}, \tag{1.8}$$

on utilisera la notation $Q^{\varphi}_{\epsilon,\tau}$ pour l'opérateur pseudo-différentiel correspondant (voir [14]) qui s'écrit formellement

$$Q^{\varphi}_{\epsilon,\tau}u(x) = e^{\frac{-\epsilon}{2\tau}|D_a|^2}(e^{\tau\varphi}u)\ ;\quad u \in H^{\tau}_k \tag{1.9}$$

plus précisement

$$Q^{\varphi}_{\epsilon,\tau}u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{n_a}} e^{ix_a\xi_a}e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|\xi_a|^2}\widehat{(e^{\tau\varphi}u)}(\xi_a, x_b)d\xi_a$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n_a}}((\frac{\tau}{2\pi\epsilon})^{\frac{n_a}{2}}\int_{\mathbb{R}^{na}} e^{i(x_a-y_a)\xi_a}e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|\xi_a|^2}d\xi_a)(e^{\tau\varphi}u)(y_a, x_b)dy_a$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} K(x_a, y_a)(e^{\tau\varphi}u)(y_a, x_b)dy_a$$

Où l'on a posé

$$K(x_a, y_a) = (\frac{\tau}{2\pi\epsilon})^{\frac{n_a}{2}}\int_{\mathbb{R}^{n_a}} e^{i(x_a-y_a)\xi_a}e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|\xi_a|^2}d\xi_a = \mathrm{F}^{-1}_{\xi_a\to(x_a-y_a)}(e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|\xi_a|^2})$$

Par définition $K(x_a, y_a)$ est le noyau de l'opérateur pseudodifférentiel $Q^{\varphi}_{\epsilon,\tau}$ et il est donné par

$$K(x_a, y_a) = (\frac{\tau}{2\pi\epsilon})^{\frac{n_a}{2}}e^{\frac{-\tau}{2\epsilon}(x_a-y_a)^2} \tag{1.10}$$

Lemme 1.2.1 *Soient $u \in H^m(\Omega)$, φ un polynôme du second degré, définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. si l'on note*

$$P_{\tau}(x, D) = P(x, D + i\tau\nabla\varphi)$$

$$P_{\epsilon,\tau}(x, D)u = P_{\tau}(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a, x_b, D)u$$

Alors on a les trois égalités suivantes :

$$Q^{\varphi}_{\epsilon,\tau}(D, x)P(x, D)u = e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2}P_{\tau}(x, D)e^{\tau\varphi}u \tag{1.11}$$

$$e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2}P(x, D)e^{\tau\varphi}u = P(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a, x_b, D)Q^{\varphi}_{\epsilon,\tau}(D, x)u \tag{1.12}$$

$$Q^{\varphi}_{\epsilon,\tau}(x, D)P(x, D)(u) = P(x_b, D + i\tau\nabla\varphi - \epsilon(\nabla^2\varphi)D_a)Q^{\varphi}_{\epsilon,\tau}(D, x)u \tag{1.13}$$

Remarque 1.2.3 *Dans les calculs qui suivent on remplace les coefficients de P par les sommes partielles de leur série de Taylor au voisinage de $x_a = 0$. Dans l'égalité (1.13) P est à coefficients réels indépendants de x_a.*

Preuve : Montrer (1.11) c'est montrer

$$e^{\tau\varphi} P e^{-\tau\varphi} w = P_\tau(x, D) w$$

avec $w = e^{\tau\varphi} u$ ce qui est équivalent à

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \prod_{j=1}^{j=n} (e^{\tau\phi} D_j^{\alpha_j} e^{-\tau\varphi}) w = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \prod_{j=1}^{j=n} (D_j + i\tau\partial_j\varphi)^{\alpha_j} w$$

il suffit donc d'établir l'égalité suivante :

$$e^{\tau\varphi} D_j^k e^{-\tau\varphi} w = (D_j + i\tau\partial_j\varphi)^k w \ , \ \forall k \geq 1, \ k \in \mathbb{N}, \ j = 1, \dots, n$$

cette égalité est établie en faisant un raisonnement par récurrence sur k.
$*$ Pour $k = 1$

$$(e^{\tau\varphi} D_j e^{-\tau\varphi}) w = e^{\tau\varphi} \frac{1}{i} \partial_j (e^{-\tau\varphi} w)$$
$$= D_j w + i\tau\partial_j\varphi w = (D_j + i\tau\partial_j\varphi) w$$

$*$ $k > 1$
On suppose que

$$e^{\tau\varphi} D_j^k e^{-\tau\varphi} w = (D_j + i\tau\partial_j\varphi)^k w$$

et on montre que

$$e^{\tau\varphi} D_j^{k+1} e^{-\tau\varphi} w = e^{\tau\varphi} D_j (D_j^k e^{-\tau\varphi} w)$$
$$= (e^{\tau\varphi} D_j e^{-\tau\varphi})(e^{\tau\varphi} D_j^k e^{-\tau\varphi} w)$$
$$= (e^{\tau\varphi} D_j e^{-\tau\varphi})(D_j + i\tau\partial_j\varphi)^k w$$
$$= (D_j + i\tau\partial_j\varphi)(D_j + i\tau\partial_j\varphi)^k w$$
$$= (D_j + i\tau\partial_j\varphi)^{k+1} w$$

Prouver (**1.12**) c'est prouver l'égalité suivante

$$e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2} x_a^{\alpha} u = (x_a + i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^{\alpha} e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2} u \tag{1.14}$$

on fait la démonstration par récurrence sur α.

$*$ Pour α_j telle que $|\alpha_j| = 1; 1 \leq j \leq n_a$ on a

$$e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2}(x_j u)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n_a}} \int_{\mathbb{R}^{n_a}} e^{i(x_j - y_j)\xi_j} e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|\xi_a|^2} y_j u(y_a, x_b) dy_a d\xi_a =$$

$$-(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n_a}} \int_{\mathbb{R}^{n_a}} e^{i(x_j - y_j)\xi_j} e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|\xi_a|^2} (x_j - y_j) u(y_a, x_b) d\xi_a dy_a +$$

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n_a}} \int_{\mathbb{R}^{n_a}} x_j e^{i(x_j - y_j)\xi_j} e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|\xi_a|^2} u(y_a, x_b) dy_a d\xi_a$$

on fait une intégration par parties sur le terme de la deuxième ligne, par rapport à ξ_j on obtient :

$$e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2}(x_j u)(x) = i\frac{\epsilon}{\tau}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n_a}} \int_{\mathbb{R}^{n_a}} \xi_j e^{i(x_j - y_j)\xi_j} e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|\xi_a|^2} u(y_a, x_b) dy_a d\xi_a +$$

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n_a}} \int_{\mathbb{R}^{n_a}} x_j e^{i(x_j - y_j)\xi_j} e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|\xi_a|^2} u(y_a, x_b) dy_a d\xi_a$$

$$= (x_j + i\frac{\epsilon}{\tau} D_j) e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2} u(x)$$

$*$ on suppose (1.14) vraie pour α telle que $|\alpha| > 1$. Soit $\alpha' = \alpha + \alpha_j$ où $|\alpha_j| = 1; 1 \leq j \leq n_a$
On a :

$$e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2} x_a^{\alpha'} u(x) = e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2} x_a^{\alpha_j} x_a^{\alpha} u(x)$$

$$= (x_j + i\frac{\epsilon}{\tau} D_j)^{\alpha_j} e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2} x_a^{\alpha} u(x)$$

$$= (x_j + i\frac{\epsilon}{\tau} D_j)^{\alpha_j} (x_a + i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^{\alpha} e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2} u(x)$$

$$= (x_a + i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^{\alpha'} e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2} u(x) \qquad (c.q.f.d.)$$

Preuve de (**1.13**) : Comme φ est un polynôme du second degré alors

$$\partial_j \varphi(x) = \sum_{k=1}^{k=n} a_{jk} x_k + b_j \quad \text{et} \quad \partial_{jk}\varphi(x) = a_{jk} \ ; \quad 1 \leq j \leq n$$

$$(1.13) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2}(e^{\tau\varphi}D^\alpha u) = \\ (D + i\nabla\varphi - \epsilon\nabla^2\varphi D'')^\alpha e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2}(e^{\tau\varphi}u) \end{array} \right.$$

On démontre cette égalité par réccurence sur α

• $|\alpha| = 1$, on pose $w = e^{\tau\varphi}u$ et $A = e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2}(e^{\tau\varphi}D_j u)(x)$

on utilise d'abord l'égalité (1.11)

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{R}^{n_a}} \Big(K(x_a, y_a)(D_j + i\tau \sum_{1\le k\le n_a} a_{jk}y_k + i\tau \sum_{n_a\le k\le n} a_{jk}x_k + i\tau b_j) w(y_a, x_b) \Big) dy_a \\ &= D_j \int_{\mathbb{R}^{n_a}} K(x_a, y_a) w(y_a, x_b) dy_a + i\tau(\sum_{n_a\le k\le n} a_{jk}x_k + b_j) \int_{\mathbb{R}^{n_a}} K(x_a, y_a) w(y_a, x_b) dy_a \\ &- \epsilon \sum_{1\le k\le n_a} a_{jk} D_k \int_{\mathbb{R}^{n_a}} K(x_a, y_a) w(y_a, x_b) dy_a + i\tau \sum_{1\le k\le n_a} a_{jk}x_k \int_{\mathbb{R}^{n_a}} K(x_a, y_a) w(y_a, x_b) dy_a \\ &= (D_j + i\tau\partial_j\varphi - \epsilon(\nabla^2\varphi D_a)_j) e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2} e^{\tau\varphi}u(x) \end{aligned}$$

d'où

$$e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2}(e^{\tau\varphi}D_j u) = (D_j + i\tau\partial_j\varphi - \epsilon(\nabla^2\varphi D_a)_j) e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2} e^{\tau\varphi}u$$

• $|\alpha| > 1$, on suppose le résultat vrai pour α telle que $|\alpha| \le l$. Soit $\alpha' = \alpha + \alpha_j$ où $|\alpha_j| = 1$ on obtient

$$\begin{aligned} &(D + i\nabla\varphi - \epsilon\nabla^2\varphi D'')^\alpha e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2}(e^{\tau\varphi}u) \\ &= (D + i\nabla\varphi - \epsilon\nabla^2\varphi D'')^{\alpha_j} (D + i\nabla\varphi - \epsilon\nabla^2\varphi D'')^\alpha e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2}(e^{\tau\varphi}u) \\ &= (D_j + i\tau\partial_j\varphi - \epsilon(\nabla^2\varphi D_a)_j) e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2} e^{\tau\varphi} D^\alpha u(x) \\ &= e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2}(e^{\tau\varphi}) D_j D^\alpha u(x) \end{aligned}$$

1.3 Géométrie des hypersurfaces

Définition 1.3.1 *Soient $x_0 \in \Omega$ et φ une fonction de classe C^2 définie sur Ω à valeurs réelles telle que $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$. Alors l'ensemble*

$$S = \{x \in \Omega, \varphi(x) = \varphi(x_0)\} \tag{1.15}$$

définit une hypersurface dans le voisinage de x_0, régulière et orientable, qu'on appelle aussi surface de niveau de φ en x_0.

On note

$$S_+ = \{x \in \Omega, \varphi(x) > \varphi(x_0)\} \ \text{ et } \ S_- = \{x \in \Omega, \varphi(x) < \varphi(x_0)\}$$

1.3.1 I) Surfaces caractéristiques :

Définition 1.3.2 *S définie par (1.15) est dite caractéristique en x_0 pour P si*

$$(x_0, \nabla\varphi(x_0)) \in V_p$$

(même définition que dans [10])

Exemple 1.3.1 *On considère l'équation des ondes :*

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$$

On a

$$P(\partial_t, \partial_x) = \partial_t^2 - \partial_x^2$$

son symbole principal est donné par

$$p(s,\xi) = -s^2 + \xi^2 \quad s \text{ est la variable duale de } t$$

alors si $\varphi(t,x) = x - t$

$$S = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 / \varphi(t,x) = 0\}$$

est caractéristique pour P en tous ses points.

1.3.2 II) Surfaces non caractéristiques

Définition 1.3.3 *S définie par (1.15) est non caractéristique en x_0 pour P si*

$$(x_0, \nabla\varphi(x_0)) \notin V_p$$

autrement dit si $p(x_0, \nabla\varphi(x_0)) \neq 0$.

Définition 1.3.4 *toute surface non caractéristique (respectivement caractéristique) en tous ses points est appellée surface non caractéristique (respectivement surface caractéristique).*

Dans l'exemple précédent S est caractéristique.

1.3.3 III) Surfaces et fonctions pseudo-convexes

Remarque 1.3.1 *Dans la suite p déignera le symbole principal de P.*

Définition 1.3.5 (fonctions fortement pseudo-convexes) *Soit Γ un sous-ensemble du fibré cotangant $T^*\mathbb{R}^n$. Soit φ une fonction définie sur Ω à valeurs réelles, de classe C^2. On dit que φ est fortement pseudo-convexe en x_0 par rapport à P dans Γ si et seulement si :*

$$\{\bar{p}\ (x_0, \xi - i\tau\nabla\varphi), p\ (x_0, \xi + i\tau\nabla\varphi)\}/(2\tau i) > c(\xi^2 + \tau^2)^{m-1} \tag{1.16}$$

dans

$$\{\ p\ (x_0, \xi + i\tau\nabla\varphi) = 0 : (x_0, \xi) \in \Gamma, \tau \geq 0, (\xi, \tau) \neq 0\} \tag{1.17}$$

Définition 1.3.6 (surfaces fortement pseudo-convexes) *Soit Γ un sous-ensemble du fibré cotangant $T^*\mathbb{R}^n$. Soient $x_0 \in \Omega$ et S une hypersurface comme dans (1.15), on dit que S est fortement pseudo-convexe en x_0 pour P dans Γ si et seulement si :*

$$Re\{\bar{p}, \{p, \varphi\}\}(x_0, \xi) > 0 \text{ pour tout } (x_0, \xi) \in \Gamma, \xi \neq 0\ ; p\ (x_0, \xi) = \{p, \varphi\}(x_0, \xi) = 0 \tag{1.18}$$

$$\{\bar{p}\ (x_0, \xi - i\tau\nabla\varphi), p\ (x_0, \xi + i\tau\nabla\varphi)\}/(2\tau i) > c(\xi^2 + \tau^2)^{m-1} \text{ pour tout } (x_0, \xi) \in \Gamma, \tau > 0$$

$$\text{vérifiant} : p\ (x_0, \xi + i\tau\nabla\varphi) = \{p\ (x_0, \xi + i\tau\nabla\varphi), \varphi\} = 0 \tag{1.19}$$

Les deux théorèmes suivants montrent la stabilité de la notion de pseudo-convexité forte par rapport à de petites perturbations.

Théorème 1.3.1 *Soit P un opérateur à coefficients réels dont le symbole principal est de classe C^1. On suppose que la surface de niveau de $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ est fortement pseudo-convexe par rapport à P dans Γ en x_0. Alors il existe $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que toute fonction $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ vérifiant*

$$|D^\alpha(\varphi - \psi)| < \epsilon \quad \text{pour } x \in B(x_0, \delta)\ ,\ |\alpha| \leq 2 \tag{1.20}$$

posséde une surface de niveau fortement pseudo-convexe en tout point de $B(x_0, \delta)$.

Pour la preuve voir [6] théorème 8.6.1 page 204.

Théorème 1.3.2 *Soit P un opérateur à coefficients réels. On suppose le symbole principal de P de classe C^1, et que la surface de niveau de $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ fortement pseudo-convexe par rapport à P dans Γ en x_0. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que la surface de niveau de φ est fortement pseudo-convexe par papport à $\widetilde{P}$ dans Γ en x_0 pourvu que*

$$|D^\beta(a_\alpha(x_0) - \tilde{a_\alpha}(x_0))| \leq \epsilon \quad pour\ |\beta| \leq 1\ ,\ |\alpha| = m, \tag{1.21}$$

où $(\tilde{a_\alpha})$ désigne les coefficients de $\widetilde{P}$.

Remarque 1.3.2 *On a les assertions suivantes*
a) *La définition 1.3.6 est indépendante du choix de la fonction φ représentant la surface S, en effet si on remplace φ par $a\varphi$ avec $a > 0$, ceci ne changera rien.*
b) *Toute C^2 surface S est fortement pseudo-convexe en tous ses points pour tout opérateur elliptique du second ordre.*
c) *Si P est du type principal normal (voir définition 1.2.7), Toute surface (régulière), de niveau d'une fonction fortement pseudo-convexe est une surface fortement pseudo-convexe.*
d) *De même toute surface fortement pseudo-convexe est une surface de niveau d'une fonction fortement pseudo-convexe si P est comme ci-dessus.*

Pour la démonstration voir [8].

Exemple 1.3.2 *$P = \Delta$, i.e. $p(x,\xi) = |\xi|^2$, $\Gamma = \mathbb{R}^n$ le calcul donne*

$$\{\bar{p}, \{p, \varphi\}\}(x_0, \xi) = 4\xi^T \varphi''(x_0)\xi$$

cette égalité montre que la première condition de pseudo-convexité forte est la même que la condition de convexité de φ. Cette condition est non significative ici car $V_P = \phi$.

1.3.4 Interprétation géométrique de la notion de pseudo-convexité

Soit H_p le champ Hamiltonien associé à p, p symbole réel.

$$H_p = \frac{\partial p}{\partial \xi}(x,\xi)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}(x,\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}$$

si les coefficients de p sont réguliers, (au moins C^2) les trajectoires deH_p définies par

$$\left\{\begin{array}{l} x_i'(t) = \frac{\partial p}{\partial \xi_i}(x(t),\xi(t))\ ;\ 1 \leq i \leq n \\ x(0) = x_0 \\ \xi_i'(t) = -\frac{\partial p}{\partial x_i}(x(t),\xi(t)) \\ \xi(0) = \xi_0 \end{array}\right.$$

sont déterminées d'une façon unique et sont appellées lignes bicaractéristiques, ou tout simplement bicaractéristiques, lorsque celles ci sont contenues dans V_p, on les appele bicaractéristiques nulles.

Le crochet de Poisson défini précédemment s'écrit $\{p,\varphi\} = H_p\varphi = -H_\varphi p$. Dans le cas où p est réel, le crochet de Poisson posséde une interprétation géométrique, à savoir $\{p,\varphi\}$ est la dérivée de φ le long des bicaractéristiques de p.
En effet ; si on pose

$$\left\{\begin{array}{ll} g(t) & = \varphi(x(t)) \\ g(0) & = \varphi(x_0) \end{array}\right. \tag{1.22}$$

un premier calcul donne

$$\{p,\varphi\}(x(t),\xi(t)) = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial p}{\partial \xi_i}(x(t),\xi(t))\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x(t)) - \sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial p}{\partial x_i}(x(t),\xi(t))\underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}(x(t))}_{=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n}\underbrace{\frac{\partial p}{\partial \xi_i}(x(t),\xi(t))}_{=x_i'(t)}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x(t))$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x(t))x_i'(t) = \varphi'(x(t)) = g'(t)$$

en particulier

$$\{p,\varphi\}(x_0,\xi_0) = g'(0)$$

Un second calcul donne

$$g''(t) = \varphi''(x(t)) = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi'(x(t))) = \frac{\partial}{\partial t}\{p, \varphi\}(x(t), \xi(t))$$

$$= \sum_{1 \le i \le n} (\frac{\partial}{\partial x_i}\{p, \varphi\}x'_i(t) + \frac{\partial}{\partial \xi_i}\{p, \varphi\}\xi'_i(t))$$

$$= \sum_{1 \le i \le n} (\frac{\partial}{\partial x_i}\{p, \varphi\}\frac{\partial p}{\partial \xi_i}(x(t), \xi(t)) + \frac{\partial}{\partial \xi_i}\{p, \varphi\}\frac{\partial p}{\partial x_i}(x(t), \xi(t))) = \{p, \{p, \varphi\}\}(x(t), \xi(t))$$

en particulier

$$g''(0) = \{p, \{p, \varphi\}\}(x_0, \xi_0)$$

un développement de Taylor de g au voisinage de 0 donne

$$\varphi(x(t)) = g(t) = \varphi(x_0) + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + O(t^3)$$

La condition de pseudo-convexité s'écrit alors :

$$g''(o) > 0 \quad \text{la où} \quad p(x_0, \xi_0) = g'(0) = 0 \tag{1.23}$$

c'est à dire

$$\varphi(x(t)) > \varphi(x_0), t \neq 0$$

la condition de pseudo-convexité veut dire que φ restreinte aux bicaractéristiques nulles tangentes à sa surface de niveau est strictement convexe en x_0 et que $\varphi(x) > \varphi(x_0)$ pour x trés voisin de x_0.

Chapitre 2

Quelques résultats concernant les espaces $H_\tau^{r,k}(\mathbb{R}^n)$

2.1 Résultat 1

Soit M un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{N}$.

Définition 2.1.1 *Sur $C^r(M)$ on définit la famille de normes équivalentes :*

$$|f|_{C^r_\tau(M)} = \sum_{|\alpha| \leq r} \tau^{-|\alpha|} |D^\alpha f|_{L^\infty(M)}$$

Cette définition est motivée par la proposition suivante

Proposition 2.1.1 *Soit $r \in \mathbb{Z}$.*
***a)**Il existe c indépendante de τ, pour tout u tel que le terme de droite soit fini telle que*

$$|fu|_{r,0,\tau} \leq c \ |f|_{C_\tau^{|r|}(\mathbb{R}^n)} |u|_{r,0,\tau} \tag{2.1}$$

***b)** Soit $\delta > 0$. Alors il existe une constante $c > 0$ indépendante de τ telle que :*

$$|fu|_{r,0,\tau} \leq c \ |f|_{C_\tau^{|r|}(B(0,\delta))} |u|_{r,0,\tau} \tag{2.2}$$

pour tout τ, tel que $\delta\tau \geq 1$, et tout u à support dans $B(0,\delta)$, tel que le terme de droite soit fini. $B(0,\delta)$ désigne la boule (dans $\mathbb{R}^n$) de centre $x = 0$ et de rayon δ.

Preuve de la partie a)

i) $r \in \mathbb{N}$,

grâce à la formule de Leibnitz il vient :

$$
\begin{aligned}
|fu|^2_{r,0,\tau} &= \sum_{|\alpha|\leq r} \tau^{2(r-|\alpha|)} |D_a{}^{\alpha}(fu)|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \sum_{|\alpha|\leq r} \tau^{2(r-|\alpha|)} |\sum_{\beta\leq\alpha} C^{\beta}_{\alpha} D_a{}^{\alpha-\beta} f D_a{}^{\beta} u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \sum_{|\beta|\leq|\alpha|\leq r} \tau^{2(r-|\alpha|)} C^{\beta}_{\alpha} |D^{\alpha-\beta}_a f|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |D^{\beta}_a u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C(\sum_{|\beta|\leq r} \tau^{2(r-|\beta|)} |D^{\beta}_a u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)})(\sum_{|\beta|\leq|\alpha|\leq r} \tau^{-2(|\alpha|-\beta)} |D^{\alpha-\beta}_a f|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}) \\
&\leq C|u|^2_{r,0,\tau} \sum_{|\gamma|\leq r} \tau^{-2|\gamma|} |D^{\gamma}_a f|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C|u|^2_{r,0,\tau} |f|^2_{C^r_\tau(M)}
\end{aligned}
$$

ii) $r \in \mathbb{Z},\ r < 0$,

On donne d'abord le théorème suivant [11]

Théorème 2.1.1 *Pour tout réel r, l'espace $H^{-r}_\tau(\mathbb{R}^n)$ s'identifie canoniquement au dual de $H^r_\tau(\mathbb{R}^n)$. En particulier, toute distribution u dans $H^{-r}_\tau(\mathbb{R}^n)$ se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue sur $H^r_\tau(\mathbb{R}^n)$ définie par*

$$\forall v \in H^r_\tau(\mathbb{R}^n)$$

$$< u, v >_{-r,r} = < (\tau^2 + |\xi|^2)^{\frac{-r}{2}} \hat{u}, (\tau^2 + |\xi|^2)^{\frac{r}{2}} \hat{v} > = < u, v >_{L^2(R^n)}$$

Réciproquement, pour toute forme linéaire continue l sur $H^r_\tau(R^n)$, il existe une unique distribution u dans $H^{-r}_\tau(R^n)$ telle que $\forall v \in H^r_\tau(R^n)$; $l(v) = < u, v >$. On écrira

$$H^r_\tau(R^n)' = H^{-r}_\tau(R^n)$$

On revient à **ii) :** $r \in \mathbb{Z},\ r < 0$.

La démonstration se fait par dualité en utilisant le cas $r \in \mathbb{N}$; (ici $-r \in \mathbb{N}$)

$$|fu|_{r,0,\tau} = \sup_{g\in H^{-r};\ g\neq 0} \frac{|< fu, g >|}{|g|_{-r,0,\tau}}$$

$$|<fu,g>|=|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)\overline{g(x)}|=|\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\overline{\overline{f(x)}g(x)}|=|<u,\overline{f}g>|,$$

donc

$$|<fu,g>|\leq |u|_{r,0,\tau}|\overline{f}g|_{-r,0,\tau}\leq |u|_{r,0,\tau}|f|_{C_\tau^{-r}}|g|_{-r,0,\tau}$$

On a la dernière inégalitè grâce à a), $-r\in\mathbb{N}$; donc :

$$\frac{|<fu,g>|}{|g|_{-r,0,\tau}}\leq |u|_{r,0,\tau}|f|_{C_\tau^{-r}(\mathbb{R}^n)}=|u|_{r,0,\tau}|f|_{C_\tau^{|r|}(\mathbb{R}^n)}$$

d'où le résultat recherché.

Preuve de la partie b)

$$\begin{aligned}|fu|^2_{r,0,\tau} &= \int_{\mathbb{R}^n}|(D_a^2+\tau^2)^{\frac{r}{2}}f(x)u(x)|^2dx\\ &= \int_{B(0,\ \delta)}|\Big((\frac{1}{i})^2\sum_{1\leq j\leq n_a}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+\tau^2\Big)^{\frac{r}{2}}f(x)u(x)|^2dx\\ &= \int_{B(0,\ \delta)}\tau^r|\Big((\frac{1}{i})^2\sum_{1\leq j\leq n_a}\frac{\partial^2}{\partial(\tau x_j)^2}+1\Big)^{\frac{r}{2}}f(x)u(x)|^2dx\end{aligned}$$

grâce à un changement de variables (on pose $y=\tau x$) on a :

$$|fu|^2_{r,0,\tau}=\tau^{r-n}\int_{B(0,\ \delta\tau)}|(D_a^2+1)^{\frac{r}{2}}f(\frac{y}{\tau})u(\frac{y}{\tau})|^2dy$$

on pose $\delta\tau=\delta_1$ et donc la condition $\delta\tau\geq 1$ est équivalente à $\delta_1\geq 1$.
Soit maintenant la fonction $f_1(x)=f(\frac{x}{\tau})$, f_1 à support dans $B(0,\delta_1)$, $\delta_1\geq 1$, ceci permet de la prolonger à $\tilde{f}\in C^r(\mathbb{R}^n)$ à support dans $B(0,2\delta_1)$ telle que :

$$|\tilde{f}|_{C^r(\mathbb{R}^n)}\leq c\ |f_1|_{C^r(B(0,\ \delta_1))}$$

ce qui implique

$$|\tilde{f}|_{C^r_\tau(\mathbb{R}^n)}\leq c\ |f_1|_{C^r_\tau(B(0,\ \delta_1))}$$

avec c indépendante de δ_1, $\delta_1\geq 1$,

$$|fu|_{r,0,\tau}=\tau^{r-n}|\tilde{f}u_1|_{r,0,\tau}\quad (u_1(x)=u(\frac{x}{\tau})\text{ et } \mathit{supp}\ u_1\subset B(0,\ \delta_1))$$

or d'aprés a) :

$$|\tilde{f}u_1|_{r,0,\tau} \leq c\ |\tilde{f}|_{C_\tau^{|r|}(\mathbb{R}^n)}|u_1|_{r,0,\tau} \leq c\tau^{n-r}\ |\tilde{f}|_{C_\tau^{|r|}(\mathbb{R}^n)}|u|_{r,0,\tau}$$

mais

$$|\tilde{f}|_{C_\tau^r(\mathbb{R}^n)} \leq c\ |f_1|_{C_\tau^r(B(0,\ \delta_1))} \leq c|f|_{C_\tau^r(B(0,\ \delta))}$$

et donc

$$|\tilde{f}|_{C_\tau^{|r|}(\mathbb{R}^n)} \leq c|f|_{C_\tau^r(B(0,\ \delta))}$$

d'où le résultat.

2.2 Résultat 2

Théorème 2.2.1 *Soient $\gamma = max\{\delta\epsilon, \delta\epsilon^{-1}\}, c_1 > 0$. on suppose $\gamma < 1,\ r \geq 0$. Alors il existe une constante $c = c(k, r, c_1)$ telle que pour toute fonction régulière u à support dans $B(0, \delta)$ et pour τ assez grand on ait :*

$$|(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\alpha v|_{k,\tau}^2 \leq (c\gamma)^{|\alpha|}(|v|_{k,\tau}^2 + e^{-c_1\delta\tau}|u|_{-r,k,\tau}^2) \tag{2.3}$$

Preuve : Dans les estimations ci-dessous, on note c toute constante dépendante de r, k, c_1 et d toute constante pouvant dépendre de ϵ, δ.
Comme $\varphi(0) = 0$ alors il existe $c_2 > 0$ telle que $\varphi(x) \leq c_2|x|$ pour $|x| \leq \delta$. On rappelle que

$$v = e^{\frac{-\epsilon}{2\tau}|D_a|^2}(e^{\tau\varphi}u)$$

La démonstration se fait en trois étapes.
Étape 1 : On montre (2.3) pour $k = o, |\alpha| = 1$.
On pose

$$w = e^{\tau\varphi}u$$

Lemme 2.2.1 *Pour $\delta\tau \geq 1$ l'inégalité(2.3) est réduite à*

$$|(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)v|_{0,\tau}^2 \leq (c\gamma)(|v|_{0,\tau}^2 + e^{-c_1\delta\tau}|w|_{-r,0,\tau}^2) \tag{2.4}$$

Preuve du lemme 2.2.1 la proposition 2.1.1 nous donne

$$|w|_{-r,0,\tau} \leq c\ |e^{\tau\varphi}|_{C^r_\tau(B(0,\delta))}|u|_{-r,0,\tau}$$

$$\leq c \sum_{|\alpha|\leq r} \tau^{-|\alpha|}|D^\alpha e^{\tau\varphi}|_{L^\infty(B(0,\ \delta))}|u|_{-r,0,\tau}$$

$$\leq ce^{\tau\varphi(x)} \sum_{|\alpha|\leq r} |D^\alpha\varphi|_{L^\infty(B(0,\ \delta))}|u|_{-r,0,\tau}$$

D'une part $D^\alpha\varphi, |\alpha| \leq r$, est continue sur $B(0,\ \delta)$ qui est compacte, donc bornée et atteint ses bornes . D'autre part $|\varphi(x)| \leq c_2|x|$, pour $|x| \leq \delta$, d'où

$$|e^{\tau\varphi}|_{C^r_\tau(B(0,\delta))} \leq Ce^{c_2\delta\tau}$$

et

$$|w|_{-r,0,\tau} \leq Ce^{c_2\delta\tau}|u|_{-r,0,\tau}$$

et le lemme en découle si on renote $c_1 := c_1 + 2c_2$.

Preuve du théorème 2.2.1(suite) Comme on l'a vu précédemment

$$v(x) = \int_{R^{n_a}} k(x_a, y_a)\ w(y_a, x_b)\ dy_a$$

$$= \int_{B_a} k(x_a, y_a)\ w(y_a, x_b)\ dy_a$$

où

$$B_a = \{x_a \in R^{n_a}, |x_a| \leq \delta\}$$

Donc :

$$|v(x)| = | < k(x_a, .), w(., x_b >_{-r,r} |$$

$$\leq |k(x_a, .)|_{r,0,\tau_{(B_a)}}\ |w(., x_b)|_{-r,0,\tau}$$

d'où estimer $|v(x)|$ revient à estimer la quantité

$$|k(x_a, .)|_{r,0,\tau_{(B_a)}}$$

$$\begin{aligned}
|k(x_a,.)|_{r,0,\tau} &= (\sum_{|\alpha|\leq r}\tau^{2(r-|\alpha|)}|D_a^\alpha K(x_a,.)|^2_{L^2(B_a)})^{\frac{1}{2}}\\
&= (\sum_{|\alpha|\leq r}\tau^{2r}\tau^{-2|\alpha|}\int_{B_a}|D_a^\alpha K(x_a,.)|^2 dy_a)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \tau^r\Big(\sum_{|\alpha|\leq r}\tau^{-2|\alpha|}|D_a^\alpha K(x_a,.)|^2_{L^\infty(B_a)}\Big)^{\frac{1}{2}}\int_{B_a}1\ dy_a\\
&\leq \delta^{n_a}\tau^r(\sum_{|\alpha|\leq r}\tau^{-|\alpha|}|D_a^\alpha K(x_a,.)|_{L^\infty(B_a)})
\end{aligned}$$

D'où

$$|k(x_a,.)|_{r,0,\tau}\leq \delta^{n_a}\tau^r|k(x_a,.)|_{C^r_\tau(B_a)}$$

mais

$$\begin{aligned}
|k(x_a,.)|_{C^r_\tau(B_a)} &= \sum_{|\alpha|\leq r}\tau^{-|\alpha|}|D^\alpha k(x,.)|_{L^\infty(B_a(0,\delta))}\\
&\leq (\frac{\tau}{2\pi\epsilon})^{\frac{n_a}{2}}\sum_{|\alpha|\leq r}(\frac{\tau}{2\epsilon})^{|\alpha|}\tau^{-|\alpha|}\prod_{1\leq j\leq n_a}|(x_j-y_j)^{\alpha_j}|e^{-\frac{\tau}{2\epsilon}(x_a-y_a)^2}\\
&\leq \tau^{\frac{n_a}{2}}\underbrace{c\epsilon^{-(\frac{n_a}{2}+r)}}_{d_\epsilon}\sum_{|\alpha|\leq r}\prod_{1\leq j\leq n_a}(|x_j|+|y_j|)^{\alpha_j}e^{-\frac{\tau}{2\epsilon}(|x_a|-\delta)^2}\\
&\leq d_\epsilon\tau^{\frac{n_a}{2}}\sum_{|\alpha|\leq r}\prod_{1\leq j\leq n_a}(|x_a|+|y_a|)^{\alpha_j}e^{-\frac{\tau}{2\epsilon}(|x_a|-\delta)^2}\\
&\leq d_\epsilon\tau^{\frac{n_a}{2}}\sum_{|\alpha|\leq r}(|x_a|+1)^{|\alpha|}e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}(|x_a|-\delta)^2}\\
&\leq d_\epsilon r\tau^{\frac{n_a}{2}}\ (|x_a|+1)^r e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}(|x_a|-\delta)^2}
\end{aligned}$$

Or

$$(|x_a|+1)^r\leq r(|x_a|^r+1)$$

on renote $r^2 d_\epsilon := d_\epsilon$ et on obtient la majoration

$$|k(x_a,.)|_{C^r_\tau(B_a)}\leq d_\epsilon\tau^{\frac{n_a}{2}}(1+|x_a|^r)e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}(|x_a|-\delta)^2}$$

finalement on a l'estimation suivante pour $|v(x)|$

$$|v(x)|\leq \delta^{n_a}d_\epsilon\tau^{r+\frac{n_a}{2}}(1+|x_a|^r)e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}(|x_a|-\delta)^2}|w(.,x_b)|_{-r,0,\tau} \tag{2.5}$$

Pour estimer $|x_a v|_0^2$, on décompose $\mathbb{R}^n$ en : $A = \{\ |x_a| \leq 2\delta + 4c_3\sqrt{\delta\epsilon}\}$ et A^c ; c_3 est à choisir plus tard et on a :

$$|x_a v|^2_{L^2(A)} \leq (2\delta + 4c_3\sqrt{\delta\epsilon})^2 |v|^2_{0,\tau}$$

Par définition

$$\gamma = \delta\epsilon \quad ou \quad \gamma = \delta\epsilon^{-1}$$

dans les deux cas on a

$$\delta < \sqrt{\delta} < \sqrt{\gamma}$$

ce qui donne

$$(2\delta + 4c_3\sqrt{\delta\epsilon})^2 \leq \gamma(2 + 4c_3)^2$$

on peut toujours trouver $c > 0$ telle que $\quad (2 + 4c_3)^2 \leq c\ c_3^2$

$$\text{d'où} \quad |x_a v|^2_{L^2(A)} \leq c\ c_3^2 \gamma |v|^2_{0,\tau} \tag{2.6}$$

on estime maintenant

$$|x_a v|^2_{L^2(A^c)}$$

Grâce à la majoration (2.5) il vient :

$$\begin{aligned}
&|x_a v|^2_{L^2(A^c)} \\
&\quad = \int_{A^c} |x_a|^2 |v(x)|^2 dx \\
&\quad \leq d\ \tau^{2r+n_a} \int_{A^c} |x_a|^2 (1 + |x_a|^r)^2 e^{-\frac{\epsilon}{\tau}(|x_a|-\delta)^2} |w(.,x_b)|^2_{-r,0,\tau} dx \\
&\quad \leq d'\ \tau^{2r+n_a} \int_{A^c} (1 + |x_a|^{2r+2}) e^{-\frac{\epsilon}{\tau}(|x_a|-\delta)^2} dx_a\ |w|^2_{-r,0,\tau}
\end{aligned}$$

mais l'intégrale ci-dessus est bornée par

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_{A^c} \quad \tau^{r+n_a} (1 + |x_a|^{2r+2}) e^{-\frac{\epsilon}{\tau}(|x_a|-\delta)^2} dx_a \\
&\leq \int_{A^c} \tau^{r+n_a} (1 + |x_a|^{2r+2}) e^{-\frac{\epsilon}{4\tau}(|x_a|-\delta)^2} dx_a \\
&\leq e^{-2c_3^2\delta\tau} \int_{A^c} \tau^{r+n_a} (1 + |x_a|^{2r+2}) e^{-\frac{\epsilon}{8\tau}(|x_a|-\delta)^2} dx_a \\
&\leq d\ \tau^{r+n_a}\ e^{-2c_3^2\delta\tau}
\end{aligned}$$

d'où :

$$|x_a v|^2_{L^2(A^c)} \leq d\ \tau^{r+n_a}\ e^{-2c_3^2\delta\tau}|w|^2_{-r,0,\tau} \tag{2.7}$$

en combinant cette inégalitè avec (2.6) on obtient :

$$|x_a v|^2_{L^2} \leq c\ c_3^2\gamma|v|^2_{0,\tau} + d\ \tau^{r+n_a}\ e^{-2c_3^2\delta\tau}|w|^2_{-r,0,\tau}$$

on choisit c_3 et τ assez grand tels que $2\ c_3^2 > c_1$ et $d\ \tau^{r+n_a} \leq \gamma\ e^{(-c_1+2c_3^2)\delta\tau}$.
On a alors

$$|x_a v|^2_{0,\tau} \leq (c\gamma)(|v|^2_{0,\tau} + e^{-c_1\delta\tau}|w|^2_{-r,0,\tau}) \tag{2.8}$$

Pour estimer $i\frac{\epsilon}{\tau}D_a v$ on partage l'espace $\mathbb{R}^{n_a}$ de la variable de Fourier ξ_a en deux parties : $\{\ |\xi_a| \leq 2c_4\sqrt{\frac{\delta}{\epsilon}}\ \tau\}$ et $\{\ |\xi_a| \geq 2c_4\sqrt{\frac{\delta}{\epsilon}}\ \tau\}$

$$|\frac{\epsilon}{\tau}D_a v|^2_{0,\tau} \leq 4c_4^2\delta\epsilon|v|^2_{0,\tau} + |1_{\{|\xi_a|\geq 2c_4\sqrt{\frac{\delta}{\epsilon}}\ \tau\}}\frac{\epsilon}{\tau}\xi_a e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}\xi_a^2}w|^2_{0,\tau}$$

$$\leq 4c_4^2\delta\epsilon|v|^2_{0,\tau} + (\sup_{\{|\xi_a|\geq 2c_4\sqrt{\frac{\delta}{\epsilon}}\ \tau\}}\frac{\epsilon}{\tau}|\xi_a|(|\xi_a|^2+\tau^2)^{\frac{r}{2}}e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}\xi_a^2})^2|w|^2_{-r,0,\tau}$$

pour τ assez grand le sup du deuxième terme est atteint en $|\xi_a| = 2c_4\sqrt{\frac{\delta}{\epsilon}}\tau$.
En effet ;
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\epsilon}{\tau}x(x^2+\tau^2)^{\frac{r}{2}}e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}x^2}$$

sa fonction dérivée f' est donnée par

$$f'(x) = \frac{\epsilon}{\tau}(x^2+\tau^2)^{\frac{r}{2}-1}(-\frac{\epsilon}{\tau}x^2(x^2+\tau^2) + (r+1)x^2 + \tau^2)$$

$f'(x)$ est du même signe que

$$(-\frac{\epsilon}{\tau}x^2)(x^2+\tau^2) + (r+1)x^2 + \tau^2$$

$$\leq (-\frac{\epsilon}{\tau}x^2)(x^2+\tau^2) + (r+1)(x^2+\tau^2)\ ; \quad r \geq 0$$

$$\leq (-\frac{\epsilon}{\tau}x^2 + r + 1)(x^2+\tau^2)$$

le dernier terme est du même signe que

$$(-\frac{\epsilon}{\tau}x^2 + r + 1)$$

$$(-\frac{\epsilon}{\tau}x^2 + r + 1) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{\frac{\tau(r+1)}{\epsilon}}$$

comme $2c_4\frac{\delta}{\epsilon}\tau \geq \sqrt{\frac{\tau(r+1)}{\epsilon}}$ pour τ assez grand alors;
$f'(|\xi_a|) \leq 0$ sur $\{|\xi_a| \geq 2c_4\sqrt{\frac{\delta}{\epsilon}}\ \tau\}$.

C-à-d f' est décroissante sur cet ensemble
donc :

$$|\frac{\epsilon}{\tau}D_a v|^2_{0,\tau} \leq 4c_4^2\delta\epsilon|v|^2_{0,\tau} + d\ \tau^{2r}\ e^{-2c_4^2\delta\tau}|w|^2_{-r,0,\tau}$$

on choisit c_4 et τ assez grand tels que $2c_4^2 > c_1$ et $d\tau^{2r} \leq \gamma e^{(-c_1+2c_4)\delta\tau}$ par conséquent :

$$|\frac{\epsilon}{\tau}D_a v|^2_{0,\tau} \leq (c\gamma)(|v|^2_{0,\tau} + e^{-c_1\delta\tau}|w|^2_{-r,0,\tau}) \tag{2.9}$$

en combinant cette inégalité avec (2.8) on obtient (2.3).
Étape 2 : On montre (2.3) pour $k = 0$ et α arbitraire.

Lemme 2.2.2 *Pour α multi-indice on choisit une suite*

$$0 = \beta_0 < \beta_1 < ... < \beta_{|\alpha|}, \quad |\beta_{j+1} - \beta_j| = 1.$$

Alors pour tout $0 \leq j \leq |\alpha|$ on a :

$$|(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\alpha v|^2_{0,\tau} \leq (c\gamma)^{|\alpha|}|v|^2_{0,\tau} + e^{-c_1\delta\tau}(\sum_{j=0}^{j=|\alpha|}(c\gamma)^{|\alpha|-|\beta_j|}|x_a^{\beta_j}u|^2_{-r,0,\tau}) \tag{2.10}$$

Preuve

$$(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta_{j+1}}v = (x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta_{j+1}-\beta_j}(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta_j}\ e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}D_a^2}e^{\tau\varphi}u$$

$$= (x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta_{j+1}-\beta_j}\ e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}D_a^2}e^{\tau\varphi}(x_a^{\beta_j}u)$$

On a la deuxième égalité grâce au lemme (1.2.1).
En appliquant l'étape 1 ($k = 0, \quad |\alpha| = 1$) à la fonction $x_a^{\beta_j} u$ il vient :

$$|(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^{\beta_{j+1}} v|_{0,\tau}^2 \leq (c\gamma)(\ |(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^{\beta_j} v|_{0,\tau}^2 + e^{-c_1 \delta \tau} |x_a^{\beta_j} u|_{-r,0,\tau}^2)$$

en itérant ce processus on arrive à :

$$|(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^{\alpha} v|_{0,\tau}^2 \leq (c\gamma)^{|\alpha|} |v|_{0,\tau}^2 + e^{-c_1 \delta \tau} (\sum_{j=0}^{j=|\alpha|} (c\gamma)^{|\alpha| - |\beta_j|} |x_a^{\beta_j} u|_{-r,0,\tau}^2)$$

d'où le lemme.
À présent on estime le terme $|x_a^{\beta_j} u|_{-r,0,\tau}^2$. En appliquant la proposition (2.1.1) on obtient :

$$|x_a^{\beta_j} u|_{-r,0,\tau}^2 \leq |x_a^{\beta_j}|_{C_\tau^r(B(0,\delta))} |u|_{-r,0,\tau}^2$$

$$\begin{aligned}
|x_a^{\beta_j}|_{C_\tau^r(B(0,\delta))} &= \sum_{|\gamma| \leq |\beta_j|} \tau^{-|\gamma|} |D_a^\gamma \ x_a^{\beta_j}|_{L^\infty(B(0,\delta))} \\
&\leq |x_a^{\beta_j}|_{L^\infty(B(0,\delta))} + \tau^{-1} |\beta_j| \quad |x_a^{\beta_j - 1}|_{L^\infty(B(0,\delta))} + ... \\
&+ \tau^{-|\beta_j|} |\beta_j| \ ... \beta_1| \ 1 \\
&\leq \delta^{|\beta_j|} + \tau^{-1} |\beta_j| \ \delta^{|\beta_{j-1}|} \ + ... \\
&+ \ \tau^{-|\beta_j|} |\beta_j| \ ... \ |\beta_1| \delta^0
\end{aligned}$$

d'où : $|x_a^{\beta_j} u|_{-r,0,\tau}^2 \leq c(\delta + \tau^{-1})^{2|\beta_j|} |\beta_j|^{2r} |u|_{-r,0,\tau}^2$.

soit c telque $|\beta_j|^{2r} \leq c \ 2^{|\beta_j|}$ ce qui implique :

$$|(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^{\alpha} v|_{0,\tau}^2 \leq (c\gamma)^{|\alpha|} |v|_{0,\tau}^2 + e^{-c_1 \delta \tau} (c\gamma + 2(\delta + \tau^{-1})^2)^{|\alpha|} |u|_{-r,0,\tau}^2$$

pour $\tau \geq \delta^{-1}$ on a

$$(c\gamma + 2(\delta + \tau^{-1})^2)^{|\alpha|} \leq (c\gamma + 8\delta^2)^{|\alpha|} \leq ((c+4)^2 \delta^2)^{|\alpha|} \leq ((c+4)^2 \gamma)^{|\alpha|}$$

D'où l'inégalité recherchée c-à-d :

$$|(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^{\alpha} v|_{0,\tau}^2 \leq (c(c+4)\gamma)^{|\alpha|} (|v|_{0,\tau}^2 + e^{-c_1 \delta \tau} |u|_{-r,0,\tau}^2) \qquad (2.11)$$

Étape 3 : On montre (2.3) pour k arbitraire. Il suffit de montrer l'inégalitè suivante :

$$|D^\beta(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\alpha v|^2_{0,\tau} \le (c\gamma)^{|\alpha|}(|v|^2_{|\beta|,\tau}+e^{-c_1\delta\tau}|w|^2_{-r,|\beta|,\tau}) \qquad (2.12)$$

pour tout β tel que $|\beta|\le k$. On calcule

$$\begin{aligned}
D^\beta(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\alpha v &= \sum_{z\le\ \beta_a,\ \alpha_a} \tbinom{\beta}{z} D^z(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\alpha D^{\beta-z}v\\
&= \sum_{z\le\ \beta_a,\ \alpha_a} \tbinom{\beta}{z}(\frac{1}{i})^{|z|}\frac{\alpha!}{(\alpha-z)!}(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\alpha-z}D^{\beta-z}v\\
&= \sum_{z\le\ \beta_a,\ \alpha_a} i^{-|z|}\ z!\ \tbinom{\beta}{z}\ \tbinom{\alpha}{z}\ (x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\alpha-z}D^{\beta-z}v\\
&= \sum_{z\le\ \beta_a,\ \alpha_a} i^{-|z|}\ z!\ \tbinom{\beta}{z}\ \tbinom{\alpha}{z}\ (x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\alpha-z}e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}D_a^2}e^{\tau\varphi}(D-i\tau\nabla\varphi)^{\beta-z}u
\end{aligned}$$

la dernière égalité est due au lemme 1.2.1.

Il suffit maintenant d'appliquer 2.3 étape 2 pour chacun des termes ci-dessus

$$|D^\beta(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\alpha v|_{0,\tau} \le \sum_{z\le\beta_a,\ \alpha_a} z!(c\gamma)^{\frac{|\alpha-z|}{2}}\tau^{-|z|}\tau^{|z|}(|D^{\beta-z}v|_{0,\tau}+e^{-c_1\delta\tau}|(D-i\tau\nabla\varphi)^{\beta-z}u|_{-r,0,\tau})$$

or

$$\begin{aligned}
\tau^{-2|z|}|v|^2_{|\beta|,\tau} = \tau^{-2|z|}\int(\tau^2+|\xi|^2)^{|\beta|}|\hat{v}(\xi)|^2d\xi &\ge \int\frac{(\tau^2+|\xi|^2)^{|\beta|}}{(\tau^2+|\xi|^2)^{|z|}}|\hat{v}(\xi)|^2d\xi\\
&\ge \int(\tau^2+|\xi|^2)^{|\beta|-|z|}|\hat{v}(\xi)|^2d\xi = |D^{\beta-z}v|^2_{0,\tau}
\end{aligned}$$

et de la même façon on montre que

$$|(D+i\tau\nabla\varphi)^{\beta-z}u|^2_{-r,0,\tau} \le \tau^{-2|z|}|u|^2_{-r,|\beta|,\tau}$$

et comme

$$\sum_{z\le\beta_a,\ \alpha_a} z!(c\gamma)^{\frac{|\alpha-z|}{2}}\tau^{-|z|} \le c_k(\sqrt{c\gamma}+\tau^{-1})^{|\alpha|}$$

On a :

$$|D^\beta(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\alpha v|_{0,\tau} \le c_k(\sqrt{c\gamma}+\tau^{-1})^{|\alpha|}(|v|_{|\beta|,\tau}+e^{-c_1\delta\tau}|u|_{-r,|\beta|,\tau})$$

pour τ suffisamment grand : $\tau^{-1}\le\delta<\sqrt{\gamma}$

$$|D^\beta(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\alpha v|^2_{0,\tau} \le c_k((c+1)\gamma)^{|\alpha|}(|v|^2_{|\beta|,\tau}+e^{-c_1\delta\tau}|u|^2_{-r,|\beta|,\tau}).\quad c.q.f.d.$$

2.3 Résultat 3

Proposition 2.3.1 *Soient k un entier positif, $c_1 > 0$ et $\gamma = \max\{\delta\epsilon, \delta\epsilon^{-1}\}$. Alors il existe une constante c telle que pour toute fonction régulière u à support dans $|x| \leq \delta$ et pour τ assez grand on ait :*

$$||D_a^k|v|_{0,\tau}^2 \leq c\gamma\tau^{2k}(|v|_{0,\tau}^2 + e^{-c_1\delta\tau}|u|_{-r,0,\tau}^2). \tag{2.13}$$

Preuve : Comme précédemment cette inégalité est réduite à la suivante ;

$$||D_a^k|v|_{0,\tau}^2 \leq c\gamma\tau^{2k}(|v|_{0,\tau}^2 + e^{-c_1\delta\tau}|w|_{-r,0,\tau}^2)$$

pour un c_1 différent.
Comme $v = e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}D_a^2}w$, alors

$$D_a^k v = D_a^k e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}D_a^2}w$$

Pour l'estimer on décompose ξ_a en deux parties complémentaires :

$$\{|\xi_a| \leq c_5(\frac{\delta}{\epsilon})^{\frac{1}{2}}\tau\} = B \quad \text{et} \quad B^c = \{|\xi_a| \geq c_5(\frac{\delta}{\epsilon})^{\frac{1}{2}}\tau\}$$

$$||D_a^k|v|_{0,\tau}^2 \leq cc_5^{2k}\tau^{2k}\gamma^k|v|_{0,\tau}^2 + \sup_{B^c}(|\xi_a|^k e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|\xi_a|^2}(|\xi_a|^2+\tau^2)^{\frac{r}{2}})^2|w|_{-r,0,\tau}^2$$

le sup est atteint pour $\xi_a = c_5(\frac{\delta}{\epsilon})^{\frac{1}{2}}\tau$ (même raisonnement que dans la preuve du théorème (2.2.1) donc il suffit de choisir τ assez grand et c_5 telle que $\tau^{2r} \leq e^{(c_5^2-c_1)\delta\tau}$ et la proposition est démontrée.

Chapitre 3

Théorèmes

3.1 Théorèmes classiques

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$

3.1.1 Théorème de Holmgren

Théorème 3.1.1 *Soient $P(x, D)$ un opérateur différentiel à coefficients analytiques, $x_0 \in \Omega$ et S une hypersurface orientée définie au voisinage de x_0 par $\varphi(x) = \varphi(x_0)$, de classe C^1 et non caractéristique en x_0 pour P. Alors il existe un voisinage de x_0, $V \subset \Omega$ tel que si $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ solution de $P(x, D)u = 0$ dans Ω et $u \equiv 0$ dans $\{x \in \Omega,\ \varphi(x) > \ \varphi(x_0)\}$. Alors $u \equiv 0$ dans V (voir [8]).*

3.1.2 Théorème de Hörmander

Théorème 3.1.2 *Soient P un opérateur différentiel à coefficients réels dont le symbole principal est de classe C^1, $x_0 \in \Omega$, S une hypersurface orientée définie au voisinage de x_0 par $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ de classe C^2 et fortement pseudo-convexe pour P en x_0 dans $\mathbb{R}^n$. Alors il existe un voisinage de x_0, $V \subset \Omega$ tel que si $u \in H^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ solution de $P(x, D)u = 0$ dans Ω et $u \equiv 0$ dans $\{x \in \Omega,\ \varphi(x) > \varphi(x_0)\}$. Alors $u \equiv 0$ dans V (voir [8] ou [6] théorème 8.9.1 p.224).*

3.2 Théorèmes principaux de ce mémoire

3.2.1 Hypothèses

On pose : $\Gamma = \{(x,\xi) \in T^*\Omega \setminus \xi_a = 0\}$ et pour $r \geq 0$ on note par

$$r^{\#} = \begin{cases} \max\{2, \frac{n_b}{r}\} & \text{si } r \neq \frac{n_b}{2} \\ 2+\epsilon & \text{si } r = \frac{n_b}{2}, \epsilon > 0 \end{cases}$$

l'exposant maximal pour lequel on a $H^r_{loc}(\mathbb{R}^{n_b}) \subset L^{r^{\#}}_{loc}(\mathbb{R}^{n_b}) \subset L^2_{loc}(\mathbb{R}^{n_b})$.

L'hypothèse principale sur les coefficients de P s'énonce comme suit :

(**P**) Pour tout $x \in \Omega$ il existe un voisinage ouvert $A \times B$ de x dans Ω, $A \subset \mathbb{R}^{n_a}$, $B \subset \mathbb{R}^{n_b}$ tel que :
i) Les coefficients de la partie principale de $P(x, D)$ sont des fonctions analytiques de A dans $C^1(B)$.
ii) Les coefficients des termes d'ordre inférieur de la forme D^α, $|\alpha| \leq m-1$ sont des fonctions analytiques de A dans $L^{(m-1-|\alpha|)^{\#}}(B)$.

On supposera, en plus de (**P**) une des conditions suivantes :

(**A1**) Le symbole principal de P est réel et les coefficients de la partie principale de P sont indépendants de x_a.

(**A2**) Le symbole principal de P est elliptique dans Γ (i.e $p(x,\xi) \neq 0$ pour $(x,\xi) \in \Gamma; \xi \neq 0$) et les coefficients de la partie principale de P sont des fonctions entières de $\mathbb{R}^{n_a}$ dans $C^1(\mathbb{R}^{n_b})$ se comportant, à l'infini comme $e^{\epsilon x_a^2}$ c'est à dire

$$|D_a^\alpha f(x_a, .)|_{C^1(\mathbb{R}^{n_b})} \leq M^{|\alpha|}(\alpha!)^{\frac{1}{2}}$$

(**A3**) $p(x, \xi + i\tau\nabla\varphi)$ est elliptique en (x, τ, ξ_b) dans $\mathbb{R}^+ \times \Gamma$.

Remarque 3.2.1 *On a repris les mêmes hypothèses que D. Tataru dans son article [12].*

Remarque 3.2.2 *Dans **(A3)** la condition de pseudo-convexité est vide dans* Γ*, car l'ensemble*

$$\{\ p\ (x_0, \xi + i\tau\nabla\varphi) = 0 : \xi \in \Gamma, \tau \geq 0, (\xi, \tau) \neq 0\},$$

est vide voir la définition 1.3.6.

3.2.2 Inégalités de Carleman

Les résultats principaux de ce travail sont les deux théorèmes suivants

Théorème 3.2.1 *(**Inégalités de Carleman**) Soit* $P(x, D)$ *un opérateur différentiel vérifiant (**P**) et une des trois conditions (**A1**), (**A2**) ou (**A3**), dans le domaine* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*. Soit* $x_0 \in \Omega,\ r \in \mathbb{N}$ *et soit* φ *une fonction (polynôme du second degré en* x*) définie sur* Ω *à valeurs réelles. On suppose* φ *fortement pseudo- convexe par rapport à* P *dans* Γ *en* x_0 *et* $\varphi(x_0) = 0$*. Alors pour tout* $\epsilon > 0$*, assez petit, il existe* $\delta > 0$ *et* $C > 0$ *tels que pour tout* τ *assez grand on ait pour tout* u *à support dans un* δ*-voisinage de* x_0 *et tel que le terme de droite soit fini*

$$\tau|Q^{\varphi}_{\epsilon,\tau}(D,x)u|^2_{m-1,\tau} \leq C\Big(|Q^{\varphi}_{\epsilon,\tau}(D,x)P(x,D)u|^2_{0,\tau} + e^{-\delta\tau}(|u|^2_{-r,m-1,\tau} + |P(x,D)u|^2_{-r,0,\tau})\Big) \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{\tau}|Q^{\varphi}_{\epsilon,\tau}(D,x)u|^2_{m-1,\tau} \leq C\Big(|Q^{\varphi}_{\epsilon,\tau}(D,x)P(x,D)u|^2_{0,\tau} + e^{-\delta\tau}(|u|^2_{-r,m-1,\tau} + |P(x,D)u|^2_{-r,0,\tau})\Big) \tag{3.2}$$

$$|Q^{\varphi}_{\epsilon,\tau}(D,x)u|^2_{m-1,\tau} \leq C\Big(|Q^{\varphi}_{\epsilon,\tau}(D,x)P(x,D)u|^2_{0,\tau} + e^{-\delta\tau}(|u|^2_{-r,m-1,\tau} + |P(x,D)u|^2_{-r,0,\tau})\Big) \tag{3.3}$$

*respectivement dans les cas **(A1)**, **(A2)** et **(A3)**.*

La nouveauté dans les estimations de Carleman précédentes est qu'au lieu d'utiliser un poids scalaire on utilise un poids pseudo-différentiel.

Comme conséquence du théorème 3.2.1 on obtient le

3.2.3 Théorème d' unicité du prolongement de la solution

Théorème 3.2.2 *(unicité du prolongement de la solution) Soit $P(x,D)$ un opérateur différentiel vérifiant (**P**) et une des trois conditions (**A1**), (**A2**) ou (**A3**) dans le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Soit $x_0 \in \Omega$ et φ une fonction régulière dans Ω telle que $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$. On suppose aussi que sa surface de niveau S est fortement pseudo-convexe en x_0 par rapport à P dans Γ. Alors il existe un voisinage ouvert de $x_0, V \subset \Omega$ tel que si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_a}; H^{m-1}(\mathbb{R}^{n_b}))$ est solution de $P(x,D)u = 0$ dans Ω et $u \equiv 0$ dans $\{x \in \Omega, \varphi(x) > \varphi(x_0)\}$ alors $u \equiv 0$ dans V.*

Ceci veut dire que l'on a l'unicité pour des solutions

$$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_a}; H^{m-1}_{loc}(\mathbb{R}^{n_b}))$$

de l'équation $P(x,D)u = 0$ à travers des surfaces fortement pseudo-convexes pour P dans Γ. La condition de régularité sur u est, dans un sens, minimale. Elle est de telle sorte que $P(x,D)u$ soit bien définie comme distribution. (On rappele que les coefficients de P sont $\mathcal{C}^1$ par rapport à x_b).

Remarque 3.2.3 *Ce résultat est un résultat intermédiaire entre les théorèmes de Hörmander et de Holmgren. Si $n_a = 0$ alors les coefficients sont seulement $\mathcal{C}^1$ et $\Gamma = T^*\Omega$, en utilisant (**A1**) on retrouve le théorème de Hörmander pour des solutions appartenant à $H^{m-1}(\mathbb{R}^{n_b})$. Si $n_b = 0$ alors (**A3**) est vérifiée et on retrouve le théorème de Holmgren pour des solutions appartenant à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_a})$. On obtient donc une nouvelle preuve du théorème de Holmgren basée entièrement sur des estimations quantitatives du type "Carleman".*

Pour démontrer les théorèmes précédents on a besoin des résultats suivants

3.2.4 L' inégalité de Garding

Cette inégalité est très importante dans la suite. Elle permet de démontrer le théorème 3.2.4 qui joue un rôle important dans la démonstration des inégalités de Carleman.

Théorème 3.2.3 *[8] Soit $p(x,\xi,\tau) \in S_\tau^{2k}$ un symbole vérifiant :*

$$Re\ p\ (x,\xi,\tau) \geq c\ (|\xi|^2+\tau^2)^k.$$

Alors il existe c et d telles que pour tout $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$ on a : $(P(x,D,\tau)u,u) \geq (c-\frac{d}{\tau})|u|^2_{k,\tau}$ $(.\ ,.)$ désigne le produit scalaire dans L^2.

Théorème 3.2.4 *Soit $P(x,D,\tau)$ un opérateur différentiel de symbole $p(x,\xi,\tau)$ homogène d'ordre m (en ξ et τ).*
(A1) On suppose que $p(x,\xi,\tau) \in C^1S_\tau^m,\ Imp \in \tau\ C^1S_\tau^{m-1}$ et $\{Rep, Imp\} > 0$ dans $V_p \cap \{\xi_a = 0\}$. Alors pour τ assez grand et $v \in H^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ à support dans un compact fixé, on a :

$$|P(x,D,\tau)v|^2_{0,\tau} + \tau|D_a^{m-1}v|^2_{0,\tau} \geq c\tau|v|^2_{m-1,\tau} \tag{3.4}$$

(A2) On suppose que $p(x,\xi,\tau) \in C^1S_\tau^m$, et que $\tau\{Rep, Imp\} > 0$ dans $V_p \cap \{\xi_a = 0\}$. Alors il existe $d > 0$ tel que pour τ assez grand et $v \in H^m(\mathbb{R}^n)$ à support dans un compact fixé, on ait :

$$\begin{aligned} |P(x,D,\tau)v|^2_{0,\tau} + \frac{d}{\tau}|D_a^m v|^2_{0,\tau} &\geq 2Im < (ReP)v, (ImP)v > \\ &+ \frac{d}{\tau}(|P(x,D,\tau)v|^2_{0,\tau} + |D_a^m v|^2_{0,\tau}) \geq \frac{c}{\tau}|v|^2_{m,\tau} \end{aligned} \tag{3.5}$$

(A3) On suppose que $p(x,\xi,\tau) \in C^0S_\tau^m$ et $V_p \cap \{\xi_a = 0\} = \phi$. Alors pour τ assez grand et $v \in H^m(\mathbb{R}^n)$, à support dans un compact fixé, on a :

$$|P(x,D,\tau)v|^2_{0,\tau} + \tau^{-1}|D_a^m v|^2_{0,\tau} \geq |v|^2_{m,\tau}. \tag{3.6}$$

Preuve : Cas (A1). Grâce à l'homogeneité de p, il existe $c > 0$ telle que

$$\tau^{-1}\{Rep, Imp\} > 3\ c\ |(\xi,\tau)|^{2(m-1)}\ dans\ V_p \cap \{\xi_a = 0\} \tag{3.7}$$

On calcule :

$$|Pv|^2_{0,\tau} = < Pv, \bar{P}v >=< (ReP + iImP)v, (ReP - iImP)v >$$

$$= |(ReP)v|^2_{0,\tau} + |(ImP)v|^2_{0,\tau} + 2Im < (ReP)v, (ImP)v >$$

$$\geq 2Im < (ReP)v, (ImP)v >$$

$|Pv|^2_{0,\tau} \ \geq \ \tau^2 \ |Pv|^2_{-1,\tau}$; donc

$$2\tau^{-1}Im < (ReP)v, (ImP)v > +d \ (|Pv|^2_{-1,\tau} + |\tau^{-1}(ImP)v|^2_{0,\tau} + |D_a^{m-1}v|^2_{0,\tau})$$

$$\leq \tau^{-1} \ |Pv|^2_{0,\tau} \ (1 + 2 \ d\tau^{-1}) + d \ |D_a^{m-1}v|^2_{0,\tau}$$

$$\leq \ c \ (\tau^{-1} \ |Pv|^2_{0,\tau} + |D_a^{m-1}v|^2_{0,\tau})$$

d est à choisir plus tard. On pose

$$F_P(v) = 2\tau^{-1}Im < (ReP)v, (ImP)v > +d \ (|Pv|^2_{-1,\tau} + |\tau^{-1}(ImP)v|^2_{0,\tau} + |D_a^{m-1}v|^2_{0,\tau}) \tag{3.8}$$

la preuve est terminée si on montre que :

$$F_P(v) \geq \ c \ |v|^2_{m-1,\tau} \tag{3.9}$$

On suppose pour le moment les coefficients de P réguliers , alors $F_P(v)$ est de la forme :

$$F_P(v) =< A(x, D, \tau)v, v >$$

où $A \in OPS^{2(m-1)}_\tau$ est défini par :

$$A = i\tau^{-1}((ReP)^*(ImP) - (ImP)^*(ReP))$$

$$+d \ (P^*(D^2 + \tau^2)^{-1}P + \tau^{-2}(ImP)^*(ImP) + |D_a|^{2(m-1)})$$

En effet :

$$F_P(v) = i\tau^{-1}(< (ImP)v, (ReP)v > - < (ReP)v, (ImP)v >)$$

$$+d(< (D^2 + \tau^2)^{-1}Pv, Pv > +\tau^{-2} < (ImP)v, (ImP)v >$$

$$+ < |D_a|^{m-1}v, |D_a|^{m-1}v >)$$

$$= i\tau^{-1}(< (ReP)^*(ImP)v, v > - < (ImP)^*(ReP)v, v >)$$

$$+d(< P^*(D^2+\tau^2)^{-1}Pv, v > +\tau^{-2} < (ImP)^*(ImP)v, v >$$

$$+ < |D_a|^{2(m-1)}v, v >)$$

Grâce aux propositions 1.2.1 et 1.2.2 le symbole complet de

$$((ReP)^*(ImP)) - ((ImP)^*(ReP))$$

est :

$$\sum_{\alpha\geq 0} \frac{(i)^{-|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha(\sum_{\beta\geq 0}\frac{1}{\beta!}i^{-|\beta|}\partial_x^\beta\partial_\xi^\beta Rep)\partial_x^\alpha Imp$$

$$-\sum_{\alpha\geq 0} \frac{(i)^{-|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha(\sum_{\beta\geq 0}\frac{1}{\beta!}i^{-|\beta|}\partial_x^\beta\partial_\xi^\beta Imp)\partial_x^\alpha Rep$$

Comme on cherche le symbole principal, on ne s'intéressera dans la somme ci-dessus qu'à l'ordre 0 et 1 par rapport à α et β, ce qui donne que le symbole principal de

$$((ReP)^*(ImP)) - ((ImP)^*(ReP))$$

est égal à

$$\frac{1}{i}\{Rep, Imp\} + i\partial_{x\xi}(Rep)(Imp) - i\partial_{x\xi}(Imp)(Rep)$$

d'où :

$$a(x,\xi,\tau) = \tau^{-1}(Imp)\partial_{x\xi}(Rep) - \tau^{-1}(Rep)\partial_{x\xi}(Imp)$$

$$+d(p^2(\xi^2+\tau^2)^{-1} + \tau^{-2}|Imp|^2 + |\xi_a|^{2(m-1)}) + \tau^{-1}\{Rep, Imp\}$$

Grâce aux hypothèses et pour tout (x,ξ) appartenant à $V_p \cap \{\xi_a = 0\}$ ou à son complémentaire, si on choisit d assez grand on a $a(x,\xi,\tau) \in S_\tau^{2(m-1)}$ et

$$a(x,\xi,\tau) \geq 2c|(\xi,\tau)|^{2(m-1)}.$$

Alors (3.9) découle de l'inégalité de Garding. On suppose maintenant que les coefficients de P sont seulement C^1 et on remarque

Remarque 3.2.4 *Les hypothèses ainsi que les constantes c dans (3.7) et donc dans (3.9) sont stables par rapport à de petites perturbations de P dans $C^1_{\mathbb{R}}S^m_\tau + i\tau C^1_{\mathbb{R}}S^{m-1}_\tau$.*

Preuve de la remarque : on considère un autre opérateur différentiel Q dont le symbole appartient à

$$C^1_{\mathbb{R}}S^m_\tau + i\tau C^1_{\mathbb{R}}S^{m-1}_\tau$$

Alors notre assertion est vraie si on montre que : si Q est borné dans

$$C^1_{\mathbb{R}}S^m_\tau + i\tau C^1_{\mathbb{R}}S^{m-1}_\tau$$

alors :

$$|F_P(v) - F_{P+Q}(v)| \leq |Q||v|^2_{m-1,\tau} \tag{3.10}$$

Pour montrer cette inégalité , on considère séparément chaque terme de $F_P(v)$. Pour le premier terme on a :

$$\tau^{-1}Im < (Re(P+Q))v, (Im(P+Q))v > -\tau^{-1}Im < (ReP)v, (ImP)v >$$

$$= \tau^{-1}Im < (ReP)v, (ImQ)v > +\tau^{-1}Im < (ReQ)v, (ImP)v >$$

$$+\tau^{-1}Im < (ReQ)v, (ImQ)v >$$

Il suffit donc de montrer que :

$$|Im < Rv, Sv > | \leq \ c\ |R|_{C^1S^m_\tau}\ |S|_{C^1S^{m-1}_\tau}\ |v|^2_{m-1,\tau} \tag{3.11}$$

pour tout $R \in OPC^1S^m_\tau, S \in OPC^1S^{m-1}_\tau$, à coefficients réels. Mais

$$Im < Rv, Sv >= -i(< Rv, Sv > - < Sv, Rv >)$$

par conséquent (3.11) vient par intégration par parties.

Pour le second terme on utilise le fait que tout élement de $C^1S^m_\tau$ envoie $H^{m-1,\tau}$ dans $H^{-1,\tau}$ d'où on a :

$$||(P+Q)v|^2_{-1,\tau} - |Pv|^2_{-1,\tau}| \leq |Qv|^2_{-1,\tau} + 2|Pv|_{-1,\tau}|Qv|_{-1,\tau} \leq c\ |Q||v|^2_{m-1,\tau}$$

Le même argument est valable pour le troisième terme de $F_P(v)$ et la démonstration de (3.10) est achevée.

Cas (`A2`) Comme dans le cas (`A1`), l'inégalité est réduite à :

$$F_P(v) = 2\tau Im < (ReP)v, (ImP)v > +d\ (|Pv|_0^2 + |D_a^m v|_{0,\tau}^2) \geq c\ |v|_{m,\tau}^2$$

Si les coefficients de P sont réguliers on peut alors écrire le terme de gauche une fois encore sous la forme :

$$F_P(v) =< A(x, D, \tau)v, v >$$

où $A \in OPS_\tau^{2m}$ est défini par :

$$A = i\tau\big((ReP)^*(ImP) - (ImP)^*(ReP)\big)$$

$$+d\ (P^*P + |D_a|^{2m})$$

ayant comme symbole la fonction suivante

$$a(x, \xi, \tau) = \tau(Imp)\partial_{x\xi}(Rep) - \tau(Rep)\partial_{x\xi}(Imp)$$

$$+d(p^2 + |\xi_a|^{2m}) + \tau\{Rep, Imp\}.$$

Ce symbole est positif si d est assez grand, et donc l'inégalité de Garding permet de conclure. Si les coefficients de P sont seulement C^1, on applique le même argument que dans le cas (`A1`).

Cas (`A3`) : Ce cas est plus simple que les deux précédents car il est clair que les hypothèses et l'inégalité (3.9) sont stables par rapport à de petites perturbations de P dans $C^0S_\tau^m$, donc le problème est réduit au cas où le symbole $p(x, \xi, \tau)$ est régulier et (3.6) résulte de l'inégalité de Garding.

Remarque 3.2.5 *On suppose $x_0 = 0$. Il Suffit de montrer qu'on a uniformément les inégalités de Carleman pour $P(x, D)$ si on remplace ses coefficients par des sommes partielles de leurs séries de Taylor en $x_a = 0$. Donc dans les calculs qui suivent, les coefficients dépendent de x_a d'une manière polynômiale.*

La proposition suivante nous permet de supposer dans la démonstration du théorème 3.2.1 (inégalités de Carleman) que P est un opérateur differentiel d'ordre m, sans termes d'ordre inférieur.

Proposition 3.2.1 *Soit R un opérateur différentiel d'ordre $m-1$ qui satisfait la condition (ii) dans (**P**) pour les termes d'ordre inférieur. Si δ est assez petit, alors pour tout u à support dans $|x| \leq \delta$ il existe $c > 0$ telle que pour tout τ suffisamment grand on ait :*

$$|Q^{\varphi}_{\epsilon,\tau} Ru|^2_{0,\tau} \leq c(|v|^2_{m-1,\tau} + e^{-\delta\tau}|u|^2_{-r,m-1,\tau}) \tag{3.12}$$

.

Preuve : L'inégalité (3.12) peut être reformulée comme suit :

$$|e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2} R_\tau(x,D)e^{\tau\varphi}u|^2_{0,\tau} \leq c(|v|^2_{m-1,\tau} + e^{-\delta\tau}|u|^2_{-r,m-1,\tau}) \tag{3.13}$$

où : $R_\tau(x,D) = R(x, D + i\tau\nabla\varphi)$.
Les coefficients de R_τ sont combinaisons linéaires, avec coefficients analytiques, des coéfficients des termes dans R, ayant le même ordre ou supérieur. Donc ils satisfont la condition (**P**)(ii) pour les termes d'ordre inférieur. Réécrivons R_τ sous la forme :

$$R_\tau(x,D) = S(D_a, x, D_b)$$

i.e. on commute les coefficients et les dérivations par rapport à x_a. Donc les coefficients de S sont des combinaisons linéaires, avec des coefficients constants, des coefficients ou des dérivées par rapport à x_a des coefficients des termes de R_τ ayant le même ordre ou bien supérieur. Puisque on prend des dérivées des coefficients, par rapport à x_a, des termes d'ordre inférieur satisfaisant (**P**)(ii) ceci ne réduit pas leur régularité (car analytique par rapport à x_a) et donc les coefficients de S demeurent satisfaire la condition (**P**)(ii). On écrit :

$$S(D_a, x, D_b) = \sum_{|\alpha|+|\beta|+k \leq m-1} \tau^k D^\alpha_a c_{\alpha,\beta,k}(x) D^\beta_b$$

si on remplace $R_\tau(x,D)$ par $S(D_a,x,D_b)$ dans (3.13) il suffira de la montrer pour chaque terme de S c'est à dire démontrer que :

$$|e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2} \tau^k D^\alpha_a c_{\alpha,\beta,k}(x) D^\beta_b e^{\tau\varphi}u|^2_{0,\tau} \leq c(|v|^2_{m-1,\tau} + e^{-\delta\tau}|u|^2_{-r,m-1,\tau}) \tag{3.14}$$

grâce à l'hypothèse (P), le coefficient $c_{\alpha,\beta,k}$ regardé comme un opérateur de multiplication dans $\mathbb{R}^{n_b}$ avec x_a comme paramètre, est analytique en x_a et à valeurs dans

$L(H^{m-1-|\alpha|-|\beta|}(\mathbb{R}^{n_b}), L^2(\mathbb{R}^{n_b}))$. Donc au voisinage de $x_a = 0$ le coefficient $c_{\alpha,\beta,k}$ peut être représenté sous la forme :

$$c_{\alpha,\beta,k}(x) = \sum_{\eta} d_\eta(x_b) x_a^\eta$$

où d_η vérifie

$$|d_\eta|_{L(H^{m-1-|\alpha|-|\beta|}(\mathbb{R}^{n_b}),L^2(\mathbb{R}^{n_b}))} \leq M^{|\eta|} \tag{3.15}$$

pour un certain M positif. Prouver (3.14) pour $c_{\alpha,\beta,k}$ c'est la prouver uniformément par rapport à N pour

$$\sum_{|\eta|<N} d_\eta(x_b) x_a^\eta$$

Il s'agit donc de montrer

$$\begin{aligned} & |e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2} \tau^k D_a^\alpha \sum_{|\eta|\leq N} d_\eta(x_b) x_a^\eta D_b^\beta e^{\tau\varphi} u|_{0,\tau}^2 \\ & \leq c(|v|_{m-1,\tau}^2 + e^{-\delta\tau}|u|_{-r,m-1,\tau}^2) \end{aligned} \tag{3.16}$$

où la constante c est indépendante de N.
D'abord on sait que

$$\begin{aligned} | \quad & e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|D_a|^2} \tau^k D_a^\alpha \sum_{|\eta|\leq N} d_\eta(x_b) x_a^\eta D_b^\beta e^{\tau\varphi} u|_0 \\ = \quad & |\tau^k \sum_{|\eta|\leq N} d_\eta(x_b) D_a^\alpha D_b^\beta (x_a + i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^\eta v|_0 \\ \leq \quad & \sum_{k+|\alpha|+|\beta|\leq m-1} |\tau^k \sum_{|\eta|\leq N} d_\eta(x_b) D_a^\alpha D_b^\beta (x_a + i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^\eta v|_0 \\ \leq \quad & \sum_{|\eta|\leq N} M^{|\eta|} |(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^\eta v|_{m-1,\tau} \\ \leq \quad & c \sum_{|\eta|\leq N} M^{|\eta|} (c\gamma)^{\frac{|\eta|}{2}} (|v|_{m-1,\tau}^2 + e^{-\delta\tau}|u|_{-r,m-1,\tau}^2)^{\frac{1}{2}} \\ \leq \quad & c(\frac{1}{1-(c\gamma)^{\frac{1}{2}} M})^{n_a} (|v|_{m-1,\tau}^2 + e^{-\delta\tau}|u|_{-r,m-1,\tau}^2)^{\frac{1}{2}} \\ \leq \quad & c'(|v|_{m-1,\tau}^2 + e^{-\delta\tau}|u|_{-r,m-1,\tau}^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

on a les trois dernières inégalités grâce à (3.15), le théorème 2.2.1 et le choix de γ, assez petit pour que ($c\gamma M^2 < 1$).

Proposition 3.2.2 *Soit $u \in H^{-r,m-1}(\mathbb{R}^n)$ telle que $P(x,D)u \in H^{-r,\,0}(\mathbb{R}^n)$. Alors si la première partie de (**A2**) ou (**A3**) est vérifiée, $u \in H^{-r-1,m}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve : Soit $u \in H^{-r,m-1}(\mathbb{R}^n)$ telle que $P(x,D)u \in H^{-r,\,0}(\mathbb{R}^n)$, si

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

$$P(x,D)u = \sum_{|\alpha_a+\alpha_b|\leq m} a_\alpha(x) D_a^{\alpha_a} D_b^{\alpha_b} u$$
$$= \sum_{|\alpha_b|\leq m} a_\alpha(x) D_b^{\alpha_b} u + \sum_{|\alpha'_a|+|\alpha_b|\leq m-1} a_\alpha(x) D_a^{\alpha'_a} D_b^{\alpha_b} D_a u$$

Si l'on note

$$Q_a^{m-1}(x,D) = \sum_{|\alpha'_a|+|\alpha_b|\leq m-1} a_\alpha(x) D_a^{\alpha'_a} D_b^{\alpha_b}$$
$$P(x,0,D_b) = \sum_{|\alpha_b|\leq m} a_\alpha(x) D_b^{\alpha_b}$$

alors

$$P(x,0,D_b)u = P(x,D_a,D_b)u - Q_a^{m-1}(x,D)D_a u$$

ici Q_a^{m-1} désigne un opérateur différentiel d'ordre $m-1$ dont les coefficients possédent la même régularité que les coefficients de P . On a par hypothèse :

$$\begin{cases} P(x,D_a,D_b)u \in H^{-r,\,0}(\mathbb{R}^n) \subset H^{-r-1,\,0}(\mathbb{R}^n) \\ u \in H^{-r,m-1}(\mathbb{R}^n) \quad \text{donc} \quad D_a u \in H^{-r-1,\,m-1}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

ce qui entraine $Q_a^{m-1}(x,D)D_a u \in H^{-r-1,\,0}(\mathbb{R}^n)$ et donc $P(x,0,D_b)u \in H^{-r-1,\,0}(\mathbb{R}^n)$. Grâce à l'une des hypothèses ; première partie de (**A2**) ou de (**A3**), $P(x,0,D_b)$ est élliptique d'ordre m en D_b, par conséquent :

$$\begin{cases} u \in H^{-r-1,\,0}(\mathbb{R}^n) \\ P(x,0,D_b)u \in H^{-r-1,\,0}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

implique $u \in H^{-r-1}(\mathbb{R}^{n_a}, H^m(\mathbb{R}^{n_b}))$
comme $u \in H^{-r,m-1}(\mathbb{R}^n)$ alors $u \in H^{-r-1,m}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve du théorème 3.2.1 Grâce à la proposition 3.2.1, sans aucune restriction, on peut supposer P d'ordre m sans termes d'ordre inférieur. La preuve du théorème comporte troix cas **(A1)**, **(A2)** et **(A3)**.

Cas **(A1) :** D'après le lemme 1.2.1

$$P_{\epsilon,\tau}(x, D) = P(x_b, D + i\tau\nabla\varphi - \epsilon(\nabla^2\varphi)D_a)$$

on rappele que φ est une fonction polynômiale de degré deux, par conséquent $\nabla\varphi$ dépend liéairement de x_a et $\nabla^2\varphi$ est une matrice constante. Donc $P_{\epsilon,\tau}$ est un opérateur d'ordre m, de plus, si ϵ est assez petit, on peut le considérer comme une petite perturbation de P_τ dans $OPC^1S^m_\tau$.Grâce à la condition de pseudo-convexité forte sur φ, l'opérateur P_τ satisfait les hypothèses du théorème 3.2.4 cas (`A1`), à savoir $p_\tau \in C^1S^m_\tau$, $Imp_\tau \in \tau C^1S^{m-1}_\tau$, $\{Rep_\tau, Imp_\tau\}/\tau = \{p(x, \xi - i\tau\nabla\varphi), p(x, \xi + i\tau\nabla\varphi)\}/2\tau i > c(\xi^2 + \tau^2)^{m-1}$. Alors grâce au théorème 3.2.4 et la remarque 3.2.4 on obtient pour τ assez grand l'inégalité suivante

$$\tau|v|^2_{m-1,\tau} \leq c(|P_{\epsilon,\tau}v|^2_{0,\tau} + \tau|D^{m-1}_a v|^2_{0,\tau}) \tag{3.17}$$

pour τ assez grand, uniformément en ϵ, ϵ assez petit. On utilise maintenant la proposition 2.3.1 pour estimer le second terme de droite et l'inégalité devient

$$\tau|v|^2_{m-1,\tau} \leq C\Big(|P_{\epsilon,\tau}v|^2_{0,\tau} + c\gamma\tau\big(\tau^{2(m-1)}(|v|^2_{0,\tau} + e^{-c\delta\tau}|u|^2_{-r,0,\tau})\big)\Big) \tag{3.18}$$

mais

$$\tau^{2(m-1)}|v|^2_{0,\tau} \leq c|v|^2_{m-1,\tau} \quad \text{et} \quad \tau^{2(m-1)}|u|^2_{-r,0,\tau} \leq c|u|^2_{-r,m-1,\tau}$$

en reportant ces deux égalités dans (3.18) on a

$$\tau(1 - c\gamma)|v|^2_{m-1,\tau} \leq C(P_{\epsilon,\tau}v|^2_{0,\tau} + c\gamma\tau e^{-\delta\tau}|u|^2_{-r,m-1,\tau}) \tag{3.19}$$

or

$$|u|^2_{-r,m-1,\tau} = \int_{\mathbb{R}^n} (\xi_a^2 + \tau^2)^{-r}(\xi^2 + \tau^2)^{m-1}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} (\xi_a^2+\tau^2)^{-r-1}(\xi^2+\tau^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = |u|^2_{-r-1,m,\tau}$$

Et (3.19) devient

$$\tau(1-c\gamma)|v|^2_{m-1,\tau} \leq C(|P_{\epsilon,\tau}v|^2_{0,\tau} + c\gamma\tau e^{-\delta\tau}|u|^2_{-r-1,m,\tau}) \tag{3.20}$$

La proposition 3.2.2 nous donne l'inégalité suivante

$$|u|^2_{-r-1,m,\tau} \leq c(|u|^2_{-r,m-1,\tau} + |Pu|^2_{-r,0,\tau})$$

et permet de conclure en la reportant dans la majoration précédente.
D'où pour δ assez petit (donc pour γ assez petit) on a (3.1).

Remarque 3.2.6 *Le raisonnement ci-dessus n'est pas tout à fait correct car v telle qu'elle est définie n'est pas à support compact car supp$v = \mathbb{R}^{n_a} \times B(0,\delta)$. Cependant, on peut affirmer que v et toutes ses dérivées décroient exponentiellement en τ quand $\tau \to \infty$ en dehors de $B(0, 2\delta + 4\sqrt{(c_1+1)\delta\epsilon}) \times B(0,\delta)$.*

En effet ; comme

$$v(x) = (\frac{\tau}{2\pi})^{\frac{n_a}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n_a}} e^{-\frac{\tau}{2\epsilon}(x_a-y_a)^2} e^{\tau\varphi(y_a,x_b)} u(y_a,x_b) dy_a$$

alors grâce à la proposition 2.1.1 on a :

$$|D^\alpha v(x)| = |D^\alpha < K(x_a,.), w(.,x_b) > |$$

$$= | < D^{\alpha_a} K(x_a,.), D^{\alpha_b} w(.,x_{n_b}) > |$$

$$\leq |D^{\alpha_a} K(x_a,.)|_{r,0,\tau} |D^{\alpha_b} w(.,x_b)|_{-r,0,\tau}$$

$$\leq c\tau^r |D^{\alpha_a} K(x_a,.)|_{C^r_\tau(B_a)} |D^{\alpha_b} w(.,x_b)|_{-r,0,\tau}$$

$$\leq c(\frac{\tau}{\epsilon})^{\frac{n_a}{2}+r+|\alpha_a|}(1+|x_a|^{r+|\alpha_a|}) e^{-\frac{\tau}{2\epsilon}(|x_a|-\delta)^2} |D^{\alpha_b} w(.,x_b)|_{-r,0,\tau}$$

on estime maintenant

$$|D^{\alpha_b} w|^2_{-r,0,\tau}$$

la même proposition donne :

$$\begin{aligned}
|D^{\alpha_b}w|^2_{-r,0,\tau} &= \int_{\mathbb{R}^{n_b}} |D^{\alpha_b}w(.,x_b)|^2_{-r,0,\tau}dx_b = |D^{\alpha_b}(e^{\tau\varphi}u)|^2_{-r,0,\tau} \\
&= |\sum_{\beta'\leq\alpha'} C^{\beta'}_{\alpha'}D^{\beta'}e^{\tau\varphi}D^{\alpha'-\beta'}u|^2_{-r,0,\tau} \leq C|D^{\beta'}e^{\tau\varphi}|^2_{C^r_\tau(B_\delta)}|D^{\alpha'-\beta'}u|^2_{-r,0,\tau} \\
&\leq C\sum_{\beta'\leq\alpha'}\tau^{2|\beta'|}e^{2c_1\delta\tau}|D^{\alpha'-\beta'}u|^2_{-r,0,\tau} \leq Ce^{2c_1\delta\tau}\sum_{\gamma'\leq\alpha'}\tau^{2(|\alpha'|-|\gamma'|)}|D^{\gamma'}u|^2_{-r,0,\tau} \\
&\leq Ce^{2c_1\delta\tau}|u|^2_{-r,|\alpha_b|,\tau}
\end{aligned}$$

d'où en notant A^c l'ensemble complémentaire de $B(0, 2\delta + 4\sqrt{(c_1+1)\delta\epsilon})$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_{A^c\times\mathbb{R}^{n_b}} & |D^\alpha v(x)|^2 \\
\leq \quad & C(\frac{\tau}{\epsilon})^{n_a+2r+2|\alpha_a|}\int_{A^c}(1+|x_a|^{2(r+|\alpha_a|)})e^{-\frac{\tau}{4\epsilon}|x_a|^2}dx_a e^{2c_1\delta\tau}|u|^2_{-r,|\alpha_b|,\tau} \\
\leq \quad & Ce^{-2\delta\tau}(\frac{\tau}{\epsilon})^{n_a+2r+2|\alpha_a|}\int_{A^c}(1+|x_a|^{2(r+|\alpha_a|)})e^{-\frac{\tau}{8\epsilon}|x_a|^2}dx_a|u|^2_{-r,|\alpha_b|,\tau} \\
\leq \quad & Ce^{-2\delta\tau}(\frac{\tau}{\epsilon})^{n_a+2r+2|\alpha_a|}|u|^2_{-r,|\alpha_b|,\tau}
\end{aligned}$$

ici on a utilisé le fait que $e^{-\frac{\tau}{\epsilon}(|x_a|-\delta)^2} \leq e^{-\frac{\tau}{4\epsilon}|x_a|^2}$ pour $x_a \in A^c$
et que $e^{2c_1\delta\tau-\frac{\tau}{8\epsilon}|x_a|^2} \leq e^{-2\delta\tau}$ pour $x_a \in A^c$, de plus

$$\int_{A^c}(1+|x_a|^{2(r+|\alpha_a|)})e^{-\frac{\tau}{8\epsilon}|x_a|^2}dx_a$$

est bornée car l'intégrante est à décroissance rapide.

Cas **(A2) :** Dans ce cas on peut décomposer P_τ sous la forme :

$$P_\tau(x,D) = \sum_\alpha Q_\alpha(x_b,D)x_a^\alpha$$

$Q_\alpha(x_b,D)$est un opérateur differentiel d'ordre m sans termes d'ordre inférieur
donc $P_{\epsilon,\tau}$ devient comme suit :

$$P_{\epsilon,\tau}(x,D) = \sum_\alpha Q_\alpha(x_b,D)(x_a + \frac{i\epsilon}{\tau}D_a)^\alpha$$

grâce à (**A2**) les symboles q_α vérifient les majorations suivantes :

$$|q_\alpha|_{C^1S^m_\tau} \leq M^{|\alpha|}(\alpha!)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.21}$$

On note P^1_τ la linéarisation de P_τ en x_a au voisinage de $x_a = 0$ et $J_a = \{1, ..., n_a\}$

$$P^1_\tau = Q_0(x_b, D) + \sum_{j \in J_a} Q_{\delta_j}(x_b, D) x_j$$

Comme P^1_τ satisfait la condition de pseudo-convexité forte en $x_a = 0$ (car en ce point $\{\overline{P_\tau}(x_0, \xi), P_\tau(x_0, \xi)\} = \{\overline{P^1_\tau}(x_0, \xi), P^1_\tau(x_0, \xi)\}$) et donc dans un petit voisinage de l'origine, alors si δ est assez petit le théorème 3.2.4 cas (A2) donne :

$$\frac{c}{\tau}|v|^2_{m,\tau} \leq 2Im < (ReP^1_\tau)v, (ImP^1_\tau)v > + \frac{d}{\tau}(|P^1_\tau v|^2_{0,\tau} + |D^m_a v|^2_{0,\tau}). \tag{3.22}$$

Pour passer de P^1_τ à $P_{\epsilon,\tau}$ on utilisera les deux estimations suivantes (vraies pour γ assez petit) qu'on démontrera plus tard

$$|P_{\epsilon,\tau} v - P^1_\tau v|^2_{0,\tau} \leq c(\epsilon + \sqrt{\gamma})(|v|^2_{m,\tau} + e^{-\delta\tau}|u|^2_{-r,m,\tau}) \tag{3.23}$$

$$|Im < (ReP_{\epsilon,\tau})v, (ImP_{\epsilon,\tau})v > - Im < (ReP^1_\tau)v, (ImP^1_\tau)v > | \leq c\gamma\tau^{-1}|v|^2_{m,\tau} \tag{3.24}$$

Ces deux inégalités veulent dire que les termes d'ordre supérieur dans les séries de Taylor sont négligeables dans notre estimation.
Pour avoir (3.22) pour $P_{\epsilon,\tau}$ on commence par rajouter et retrancher les deux quantités suivantes au terme de droite de (3.22)

$$2Im < (ReP_{\epsilon,\tau})v, (ImP_{\epsilon,\tau})v > \quad et \quad P_{\epsilon,\tau} v$$

on obtient

$$\frac{c}{\tau}|v|^2_{m,\tau} \leq 2Im < (ReP_{\epsilon,\tau})v, (ImP_{\epsilon,\tau})v > + \frac{d}{\tau}(2|P^1_\tau v - P_{\epsilon,\tau})v|^2_{0,\tau} + 2|P_{\epsilon,\tau} v|^2_{0,\tau} + |D^m_a v|^2_{0,\tau})$$
$$+ |2Im < (ReP^1_\tau)v, (ImP^1_\tau)v > - 2Im < (ReP_{\epsilon,\tau})v, (ImP_{\epsilon,\tau})v > |$$

et grâce à (3.23) et (3.24) il vient :

$$\frac{c}{\tau}|v|^2_{m,\tau} \leq 2Im < (ReP_{\epsilon,\tau})v, (ImP_{\epsilon,\tau})v > + c\gamma\tau^{-1}|v|^2_{m,\tau} + \frac{d}{\tau}c(\epsilon + \sqrt{\gamma})$$
$$(|v|^2_{m,\tau} + e^{-\delta\tau}|u|^2_{-r,m,\tau}) + 2\frac{d}{\tau}(|P_{\epsilon,\tau} v|^2_{0,\tau} + |D^m_a v|^2_{0,\tau})$$

comme

$$2Im < (ReP_{\epsilon,\tau})v, (ImP_{\epsilon,\tau})v > \leq |P_{\epsilon,\tau}v|^2_{0,\tau}$$

il vient donc, en mettant tous les termes de la forme $c|v|^2_{m,\tau}$ à gauche de l'inégalité :

$$\frac{\grave{c}}{\tau}|v|^2_{m,\tau} \leq |P_{\epsilon,\tau}v|^2_{0,\tau} + \frac{d}{\tau}(|D^m_a v|^2_{0,\tau} + e^{-\delta\tau}|u|^2_{-r,m,\tau})$$

où $\grave{c} = c(1 - d(\epsilon + \sqrt{\gamma}) - \gamma)$ pour ϵ, γ assez petits tels que $d(\epsilon + \sqrt{\gamma}) - \gamma < 1$.
En appliquant la proposition 2.3.1 au terme $|D^m_a v|^2_{0,\tau}$ on a

$$\frac{\grave{c}}{\tau}|v|^2_{m,\tau} \leq |P_{\epsilon,\tau}v|^2_{0,\tau} + (\tau c\gamma + \frac{d}{\tau})e^{-\delta\tau}|u|^2_{-r-1,m,\tau}$$

La proposition (3.2.2) donne (aprés avoir choisi γ assez petit et τ assez grand tels que $(\tau c\gamma + \frac{d}{\tau}) < 1$) et en suivant la même démarche que dans le cas (**A1**) on a l'inégalité suivante (3.2)

$$\frac{\grave{c}}{\tau}|v|^2_{m,\tau} \leq |P_{\epsilon,\tau}v|^2_{0,\tau} + e^{-\delta\tau}(|Pu|^2_{-r,0,\tau} + |u|^2_{-r,m-1,\tau}).$$

À présent On montre (3.23), le calcul donne

$$\begin{aligned} |P_{\epsilon,\tau}v - P^1_\tau v|_{0,\tau} &= |\sum_{j\in J_a} Q_{\delta_j}(x_b, D)\frac{i\epsilon}{\tau}D_j v + \sum Q_\alpha(x_b, D)(x_a + \frac{i\epsilon}{\tau}D_a)^\alpha v|_{0,\tau} \\ &\leq (M(c\gamma)^{\frac{1}{2}} + \sum_{|\alpha|\geq 2} M^{|\alpha|}(c\gamma)^{\frac{|\alpha|}{2}})(|v|^2_{m,\tau} + e^{-c_1\delta\tau}|u|_{-r,m,\tau})^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Cette estimation est dûe au théorème 2.2.1, la majoration (3.21) et l'inégalité $|v|^2_{0,\tau} \leq |v|^2_{m,\tau}$.
On choisit maintenant γ assez petit tel que $c\gamma M^2 < 1$ et la quantité

$$M(c\gamma)^{\frac{1}{2}} + \sum_{|\alpha|\geq 2} M^{|\alpha|}(c\gamma)^{\frac{|\alpha|}{2}}$$

est plus petite qu'une certaine constante c dépendante de γ, ainsi (3.23) est démontrée.
Dans ce qui suit on s'intéressera à la démonstration de (3.24).
Pour cela on introduit la forme bilinéaire symétrique :

$$[R, S](u, v) = Re(< Ru, Sv > - < \bar{R}v, \bar{S}u >)$$

où R, S sont des opérateurs différentiels. On écrit donc

$$Im < (ReP_{\epsilon,\tau})v, (ImP_{\epsilon,\tau})v >= -\frac{1}{4}Re(< P_{\epsilon,\tau}v, P_{\epsilon,\tau}v > - < \bar{P}_{\epsilon,\tau}v, \bar{P}_{\epsilon,\tau}v >)$$

$$= -\frac{1}{4}[P_{\epsilon,\tau}, P_{\epsilon,\tau}](v, v).$$

Avec les notations ci-dessus et la représentation de $P_{\epsilon,\tau}$ on a :

$$Im(< (ReP_{\epsilon,\tau})v, (ImP_{\epsilon,\tau})v > - < (ReP^1_\tau)v, (ImP^1_\tau)v >) =$$

$$- \sum_{j,k\in J_a}[x_jQ_{\delta_j}, x_kQ_{\delta_k}](v, v) + 2\sum_{j\in J_a}[Q_0, i\frac{\epsilon}{\tau}D_jQ_{\delta_j}](v, v)$$

$$+ \sum_{|\alpha|+|\beta|\geq 2}[Q_\alpha(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\alpha, Q_\beta(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\beta](v, v)$$

En tenant compte des majorations sur q_α, montrer (3.24) revient à montrer les deux inégalités suivantes

$$|[x_jQ_{\delta_j}, x_kQ_{\delta_k}](v, v)| + |[Q_0, i\frac{\epsilon}{\tau}D_jQ_{\delta_j}](v, v)| \leq c\gamma^{\frac{1}{2}}\tau^{-1}(|v|^2_{m,\tau} + e^{-\delta\tau}|u|^2_{-r,m,\tau}) \quad (3.25)$$

$$[R(x_b, D)(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\alpha, S(x_b, D)(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\beta](v, v) \leq c|R||S|(\alpha!\beta!)^{\frac{1}{2}} \quad (3.26)$$
$$(\epsilon + \gamma)(c\gamma)^{\frac{\alpha+\beta-2}{2}}\tau^{-1}(|v|^2_{m,\tau} + e^{-\delta\tau}|u|^2_{-r,m,\tau})$$

avec c indépendante de ϵ, δ si γ, ϵ sont assez petits.
On montre (3.26) pour $|\alpha| + |\beta| \geq 2$ et pour tout opérateur $R, S \in OPC^1S^m_\tau$. Ici et ci-dessous , les normes $|R|, |S|$ sont des normes $C^1S^m_\tau$, i.e. essentiellement des normes C^1 de leurs coefficients.
On commence par donner l'estimation suivante qu'on retrouve en faisant une intégration par parties :

$$|[R, S](u, v)| \leq |R||S||u|_{m,\tau}|v|_{m-1,\tau} \leq c\tau^{-1}|R||S||u|_{m,\tau}|v|_{m,\tau} \quad (3.27)$$

On montre maintenant (3.25). D'abord en commutant D_j et Q_{δ_j} on a l'égalité suivante

$$[Q_0, i\frac{\epsilon}{\tau}D_jQ_{\delta_j}](v, v) = \frac{\epsilon}{\tau}[Q_0, iQ_{\delta_j}](v, D_jv).$$

En appliquant (3.27) et le théorème 2.2.1 on a :

$$[Q_0, i\frac{\epsilon}{\tau}D_jQ_{\delta_j}](v,v) \leq c\tau^{-1}\gamma^{\frac{1}{2}}(|v|^2_{m,\tau} + e^{-c_1\delta\tau}|u|^2_{-r,m,\tau}) \tag{3.28}$$

pour terminer on montre l'inégalité suivante

$$|[x_jQ_{\delta_j}, x_kQ_{\delta_k}](v,v)| \leq c(|x_jv|_{m,\tau}|x_kv|_{m,\tau}) \leq c\gamma^{\frac{1}{2}}\tau^{-1}(|v|^2_{m,\tau} + e^{-c_1\delta\tau}|u|^2_{-r,m,\tau}) \tag{3.29}$$

$$[x_jQ_{\delta_j}, x_kQ_{\delta_k}](v,v) = Re\Big(\int_{\mathbb{R}^n} x_jQ_{\delta_j}(x_b,D)vx_k\overline{Q_{\delta_k}(x_b,D)v}dx - \int_{\mathbb{R}^n} x_j\overline{Q_{\delta_j}(x_b,D)}vx_kQ_{\delta_k}(x_b,D)\bar{v}dx\Big)$$

On écrit Q_{δ_j} comme suit

$$Q_{\delta_j}(x_b,D) = \sum_{|\eta|=m} a_{\eta,j}(x_b)D^{\eta}$$

pour estimer $|[x_jQ_{\delta_j}, x_kQ_{\delta_k}](v,v)|$ il suffit donc d'estimer chaque terme de la forme

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_ja_{\eta,j}(x_b)D^{\eta}vx_k\overline{a_{\beta,k}(x_b)D^{\beta}v}dx - \int_{\mathbb{R}^n} x_j\overline{a_{\eta,j}(x_b)D^{\eta}}vx_ka_{\beta,k}(x_b)D^{\beta}\bar{v}dx$$

on écrit

$$x_ja_{\eta,j}(x_b)D^{\eta}v = x_ja_{\eta,j}(x_b)D_jD^{\grave{\eta}}v = D_j(x_ja_{\eta,j}(x_b)D^{\grave{\eta}}v) + iD^{\grave{\eta}}v, |\grave{\eta}| = m-1$$

$$x_ka_{\beta,k}(x_b)\overline{D^{\beta}}v = x_ja_{\beta,k}(x_b)\overline{D_k}\overline{D^{\grave{\beta}}}v = \overline{D_k}(x_ja_{\beta,k}(x_b)\overline{D^{\grave{\beta}}}v) - i\overline{D^{\grave{\beta}}}v, |\grave{\beta}| = m-1$$

en reportant les deux derniers termes des égalités ci-dessus dans les deux intégrales précédentes on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_ja_{\eta,j}(x_b)D^{\eta}vx_k\overline{a_{\beta,k}(x_b)D^{\beta}v}dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} a_{\eta,j}(x_b)D^{\eta}(x_jv)\overline{a_{\beta,k}(x_b)D^{\beta}(x_kv)}dx - i\int_{\mathbb{R}^n} a_{\eta,j}(x_b)D^{\eta}(x_jv)\overline{a_{\beta,k}(x_b)D^{\grave{\beta}}v}dx$$
$$+i\int_{\mathbb{R}^n} \overline{a_{\beta,k}(x_b)D^{\beta}(x_kv)}a_{\eta,j}(x_b)D^{\grave{\eta}}vdx + \int_{\mathbb{R}^n} a_{\eta,j}(x_b)D^{\grave{\eta}}v\overline{a_{\beta,k}(x_b)D^{\grave{\beta}}v}dx$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_j\overline{a_{\eta,j}(x_b)D^{\eta}}vx_ka_{\beta,k}(x_b)D^{\beta}\bar{v}dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} a_{\beta,k}(x_b)D^{\beta}(x_k\bar{v})\overline{a_{\eta,j}(x_b)D^{\eta}}(x_jv)dx - i\int_{\mathbb{R}^n} a_{\beta,k}(x_b)D^{\beta}(x_k\bar{v})\overline{a_{\eta,j}(x_b)D^{\grave{\eta}}}vdx$$

$$+i\int_{\mathbb{R}^n}\overline{a_{\eta,j}(x_b)D^{\eta}}(x_jv)a_{\beta,k}(x_b)D^{\grave{\beta}}\bar{v}dx+\int_{\mathbb{R}^n}\overline{a_{\eta,j}(x_b)D^{\grave{\eta}}}va_{\beta,k}(x_b)D^{\grave{\beta}}\bar{v}dx$$

les modules des : premier, deuxième, troisième et quatrième terme des sommes pécédentes sont majorées respectivement par $|x_jv|_{m,\tau}|x_kv|_{m,\tau}$, $|x_jv|_{m,\tau}|v|_{m-1,\tau}$, $|x_kv|_{m,\tau}|v|_{m-1,\tau}$, $|v|^2_{m-1,\tau}$ en appliquant (3.27) ainsi que le théorème 2.2.1 et en combinant l'inégalité obtenue avec (3.28), on aboutit à (3.25).

À présent on démontre (3.26), (3.27) et le théorème 2.2.1 donnent

$$|[R(x_b,D),S(x_b,D)]((x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\alpha}v,(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta}v)|\leq$$

$$\frac{c}{\tau}|R||S||(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\alpha}v|_{m,\tau}|(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta}v)|_{m,\tau}$$

$$\leq\frac{c}{\tau}|R||S|(c\gamma)^{\frac{(|\alpha|+|\beta|)}{2}}(|v|^2_{m,\tau}+e^{-\delta\tau}|u|^2_{-r,m,\tau})$$

En comparant le terme de gauche de cette inégalité et celui de (3.26) on remarque qu' il nous reste à estimer la quantité suivante :

$$E=(<\bar{S}(x_b,D)(x_a-i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta}v,\bar{R}(x_b,D)(x_a-i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\alpha}v>-$$

$$<\bar{S}(x_b,D)(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\alpha}v,\bar{R}(x_b,D)(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta}v>)$$

on commence par calculer la première partie de E

$$(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta}S(x_b,D)\bar{R}(x_b,D)(x_a-i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\alpha}v$$

comme $R\in OPC^1S^m_{\tau}$, il s'écrit

$$R(x_b,D)=\sum_{|\gamma|\leq m}d_{\gamma}(x_b)D^{\gamma}$$

on établit l'identité suivante

$$(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta}D^{\gamma}v=\sum_{h\leq\beta}\begin{pmatrix}\beta\\h\end{pmatrix}(i)^h\frac{\gamma!}{(\gamma-h)!}D^{\gamma-h}(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta-h}v$$

où

$$\begin{pmatrix}\beta\\h\end{pmatrix}=\frac{\beta!}{(\beta-h)!h!}$$

on le fait par récurrence sur β.

$*\quad |\beta| = 1$

$$D^\gamma(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)v = (x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)D^\gamma v + \frac{1}{i}\gamma D^{\gamma-1}v$$

$$\Updownarrow$$

$$(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)D^\gamma v = D^\gamma(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a v) + i\gamma D^{\gamma-1}v$$

$*\quad |\beta| > 1$

on suppose le résultat vrai pour β et on l'établit pour $\beta + \beta_j$; $|\beta_j| = 1$ on suppose donc

$$(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\beta D^\gamma v = \sum_{h\leq\beta}\left(\begin{array}{c}\beta\\h\end{array}\right)(i)^h\frac{\gamma!}{(\gamma-h)!}D^{\gamma-h}(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta-h}v$$

et on calcule

$$
\begin{aligned}
(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta+\beta_j}D^\gamma v &= (x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta_j}D^\gamma((x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta}D^\gamma v)\\
&= (x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta_j}\sum_{h\leq\beta}\begin{pmatrix}\beta\\ h\end{pmatrix}(i)^{|h|}\frac{\gamma!}{(\gamma-h)!}D^{\gamma-h}(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta-h}v\\
&= \sum_{h\leq\beta}\begin{pmatrix}\beta\\ h\end{pmatrix}(i)^{|h|}\frac{\gamma!}{(\gamma-h)!}(D^{\gamma-h}(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta+\beta_j-h}v\\
&+ i(\gamma-h)D^{\gamma-(h+\beta_j)}(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta-h}v)\\
&= \sum_{h\leq\beta}\begin{pmatrix}\beta\\ h\end{pmatrix}(i)^{|h|}\frac{\gamma!}{(\gamma-h)!}D^{\gamma-h}(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta+\beta_j-h}v\\
&+ \sum_{h\leq\beta}\begin{pmatrix}\beta\\ h\end{pmatrix}(i)^{|h|+1}\frac{\gamma!}{(\gamma-(h+\beta_j))!}D^{\gamma-(h+\beta_j)}(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta-h}v\\
&= \sum_{h\leq\beta}\begin{pmatrix}\beta\\ h\end{pmatrix}(i)^{|h|}\frac{\gamma!}{(\gamma-h)!}D^{\gamma-h}(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta+\beta_j-h}v\\
&+ \sum_{h\leq\beta+\beta_j}\begin{pmatrix}\beta\\ h-\beta_j\end{pmatrix}(i)^{|h|}\frac{\gamma!}{(\gamma-(h))!}D^{\gamma-h}(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta+\beta_j-h}v\\
&= \sum_{h\leq\beta}\begin{pmatrix}\beta+\beta_j\\ h\end{pmatrix}(i)^{|h|}\frac{\gamma!}{(\gamma-h)!}D^{\gamma-h}(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta+\beta_j-h}v\\
&+ i^{|\beta+\beta_j|}\frac{\gamma!}{(\gamma-(\beta+\beta_j))!}D^{\gamma-(\beta+\beta_j)}v\\
&= \sum_{h\leq\beta+\beta_j}\begin{pmatrix}\beta+\beta_j\\ h\end{pmatrix}(i)^{|h|}\frac{\gamma!}{(\gamma-h)!}D^{\gamma-h}(x_a+i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta+\beta_j-h}v
\end{aligned}
$$

Pour calculer $\bar{R}(x_b,D)(x_a-i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\alpha v$ on calcule d'abord $\bar{D}^\gamma((x_a-i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\alpha v)$

$$
\bar{D}^\gamma((x_a-i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\alpha v)=\sum_{k_1\leq\gamma}C_\gamma^{k_1}\bar{D}^{k_1}(x_a-i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\alpha\bar{D}^{\gamma-k_1}v
$$

$$
=\sum_{k_1\leq\gamma}\frac{\gamma!}{(\gamma-k_1)!k_1!}(i)^{k_1}\frac{\alpha!}{(\alpha-k_1)!}(x_a-i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\alpha-k_1}\bar{D}^{\gamma-k_1}v
$$

$$= \sum_{k_1 \leq \alpha} (i)^{k_1} \frac{\alpha!}{(\alpha - k_1)! k_1!} (x_a - i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^{\alpha - k_1} \frac{\gamma!}{(\gamma - k_1)!} \bar{D}^{\gamma - k_1} v$$

on note

$$\sum_{|\gamma| \leq m} d_\gamma(x_b) \frac{\gamma!}{(\gamma - k_1)!} \bar{D}^{\gamma - k_1} v = \bar{R}^{(k_1)} v$$

d'où

$$\bar{R}(x_b, D)(x_a - i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^\alpha v = \sum_{k_1 \leq \alpha} (i)^{k_1} \frac{\alpha!}{(\alpha - k_1)! k_1!} (x_a - i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^{\alpha - k_1} \bar{R}^{(k_1)} v.$$

De la même façon on a

$$S\bar{R}(x_a - i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^\alpha v = \sum_{k_1, h_1 \leq \alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha - k_1 - h_1)! h_1! k_1!} (i)^{k_1 - h_1} (x_a - i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^{\alpha - k_1 - h_1} S^{(h_1)}(\bar{R}^{(k_1)} v).$$

On calcule à présent

$$F = (x_a + i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^\beta [(x_a - i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^{\alpha - k_1 - h_1} S^{(h_1)}(\bar{R}^{(k_1)} v)]$$

$$F = \sum_{r \leq \beta} \begin{pmatrix} \beta \\ r \end{pmatrix} (x_a + i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^r (x_a - i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^{\alpha - k_1 - h_1} (x_a + i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^{\beta - r} (S^{(h_1)}(\bar{R}^{(k_1)} v))$$

$$G = (x_a + i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^r (x_a - i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^{\alpha - k_1 - h_1} v = (\frac{\epsilon}{\tau})^{|r|} \frac{(\alpha - k_1 - h_1)!}{(\alpha - k_1 - h_1 - r)!} (x_a - i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^{\alpha - k_1 - h_1 - r} v$$

en utilisant l'identité

$$(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^\beta D^\gamma v = \sum_{h \leq \beta} \begin{pmatrix} \beta \\ h \end{pmatrix} (i)^h \frac{\gamma!}{(\gamma - h)!} D^{\gamma - h} (x_a + i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^{\beta - h} v$$

on peut calculer

$$H = (x_a + i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^{\beta - r} (S^{(h_1)}(\bar{R}^{(k_1)} v))$$

$$H = \sum_{h_2, k_2, r \leq \beta} \begin{pmatrix} \beta - r \\ h_2, k_2 \end{pmatrix} (i)^{|h_2| - |k_2|} S^{(h_1 + h_2)} \bar{R}^{(k_1 + k_2)} (x_a + i\frac{\epsilon}{\tau} D_a)^{\beta - r - h_2 - k_2} v$$

où

$$\begin{pmatrix} \beta - r \\ h_2, k_2 \end{pmatrix} = \frac{(\beta - r)!}{(\beta - r - h_2 - k_2)! h_2! k_2!}$$

en remplaçant G et H dans la première partie de E on a

$$(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\beta S(x_b, D)\bar{R}(x_b, D)(x_a - i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\alpha v =$$

$$\sum_{h,k,r} i^{k_1+k_2+h_1+h_2} \begin{pmatrix} \alpha \\ h_2, k_2, r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ h_1, k_1, r \end{pmatrix} r!(\frac{\epsilon}{\tau})^{|r|}(x_a - i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\alpha-h_1-k_1-r}$$

$$S^{(h_1+h_2)}(x_b, D)R^{(k_1+k_2)}(x_b, D)(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta-h_2-k_2-r}v$$

si on pose $j = |h_1 + h_2 + k_1 + k_2|$ et on remplace la première partie de E par l'expression ci-dessus on a

$$E = Re(\sum_{j,r\geq 0}^{j\leq 2m} \begin{pmatrix} \alpha \\ h_2, k_2, r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ h_1, k_1, r \end{pmatrix} r!(\frac{\epsilon}{\tau})^{|r|}$$

$$< \bar{S}^{(h_1+h_2)}(x_b, D)(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\alpha-h_1-k_1-r}v, \bar{R}^{(k_1+k_2)}(x_b, D)(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta-h_2-k_2-r}v >$$

$$- < \bar{S}(x_b, D)(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\alpha v, \bar{R}(x_b, D)(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^\beta v >$$

d'où

$$E = Re\sum_{j+|r|>0}^{j\leq 2m} \begin{pmatrix} \alpha \\ h_2, k_2, r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ h_1, k_1, r \end{pmatrix} r!(\frac{\epsilon}{\tau})^{|r|}$$

$$< \bar{S}^{(h_1+h_2)}(x_b, D)(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\alpha-h_1-k_1-r}v, \bar{R}^{(k_1+k_2)}(x_b, D)(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta-h_2-k_2-r}v >$$

comme $H^r_{k,\tau}$ est un espace de Hilbert on a la majoration

$$E \leq c|R||S| \sum_{j+|r|>0}^{j\leq 2m} \begin{pmatrix} \alpha \\ h_2, k_2, r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ h_1, k_1, r \end{pmatrix} r!\epsilon^{|r|}\tau^{-|r|}$$

$$|(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\alpha-h_1-k_1-r}v|_{m-|h_1|-|h_2|,\tau}|(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta-h_2-k_2-r}v|_{m-|k_1|-|k_2|,\tau}$$

et donc

$$E \leq c|R||S| \sum_{j+|r|>0}^{j\leq 2m} \begin{pmatrix} \alpha \\ h_2, k_2, r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ h_1, k_1, r \end{pmatrix} r!\epsilon^{|r|}\tau^{-(j+|r|)}$$

$$|(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\alpha-h_1-k_1-r}v|_{m,\tau}|(x_a + i\frac{\epsilon}{\tau}D_a)^{\beta-h_2-k_2-r}v|_{m,\tau}$$

ci dessus on a utilisé la majoration

$$|v|_{m-l,\tau} \leq \tau^{-l}|v|_{m,\tau} \quad ; l \in \mathbb{N}.$$

On utilise maintenant le théorème 2.2.1

$$E \leq c|R||S| \sum_{j+|r|>0}^{j\leq 2m} \begin{pmatrix} \alpha \\ h_2, k_2, r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ h_1, k_1, r \end{pmatrix} r! \epsilon^{|r|} \tau^{-(j+|r|)}$$

$$(c\gamma)^{(|\alpha|+|\beta|-j-2|r|)\frac{1}{2}} (|v|^2_{m,\tau} + e^{-\delta\tau}|u|_{-r,m,\tau})$$

mais

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ h_2, k_2, r \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{(\alpha-r)!r!} \frac{(\alpha-r)!}{(\alpha-r-k_2)!} \frac{(\alpha-r-k_2)!}{(\alpha-r-k_2-h_2)!}$$

$$\frac{(\alpha-r)!}{(\alpha-r-k_2)!} = (\alpha-r)(\alpha-r-1)...(\alpha-r-(k_2)) \leq \alpha^{k_2} \leq \alpha^m$$

de même

$$\frac{(\alpha-r-k_2)!}{(\alpha-r-k_2-h_2)!} \leq \alpha^{h_2} \leq \alpha^m$$

on fait de même pour le terme contenant β ce qui donne

$$E \leq c\alpha^{2m}\beta^{2m}|R||S| \sum_{j+|r|>0}^{j\leq 2m} \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ r \end{pmatrix} r! \epsilon^{|r|} \tau^{-(j+|r|)} (c\gamma)^{(|\alpha|+|\beta|-j-2|r|)\frac{1}{2}}$$

$$(|v|^2_{m,\tau} + e^{-\delta\tau}|u|_{-r,m,\tau})$$

et on a l'inégalité suivante

$$\sum_{j+|r|>0}^{j\leq 2m} \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ r \end{pmatrix} r! \epsilon^{|r|} \tau^{-(j+|r|)} (c\gamma)^{(-j-2|r|+2)\frac{1}{2}}$$

$$\leq c(\sum_r \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ r \end{pmatrix} r!) \sum_{j+|r|>0}^{j\leq 2m} \epsilon^{|r|} \tau^{-(j+|r|)} (c\gamma)^{(-j-2|r|+2)\frac{1}{2}}$$

or les termes de la deuxième somme (finie) sont très petits pour τ assez grand, $\tau^2 c\gamma > 1$, on peut donc la majorer par une constante c' multipliée par les termes obtenus en faisant $r = 0, j = 1; r = 1, j = 1$

$$\sum_{j+|r|>0}^{j\leq 2m} \epsilon^{|r|} \tau^{-(j+|r|)} (c\gamma)^{(-j-2|r|)\frac{1}{2}} \leq c'((\tau^2 c\gamma)^{-\frac{1}{2}} c\gamma + \epsilon(\tau^2 c\gamma)^{-\frac{1}{2}})$$

$$\leq c_1(c\gamma)^{-\frac{1}{2}}\frac{(\gamma+\epsilon)}{\tau} \leq c_2\frac{(\gamma+\epsilon)}{\tau}$$

On peut majorer $|\alpha|^m, |\beta|^m$ respectivement par $c2^{|\alpha|}, c2^{|\beta|}$, par conséquent la somme $\sum_r \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ r \end{pmatrix} r!$ peut être majorée par $2^{|\alpha|}\beta!$ et par $2^{|\beta|}\alpha!$ donc par $2^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}}(\alpha!)^{\frac{1}{2}}(\beta!)^{\frac{1}{2}}$. En insérant tout ceci dans l'inégalité ci-dessus on obtient la majoration(3.26). avec une constante c qui ne dépend que de m.

Cas **(A3) :** On note

$$P_\tau^0 = P_\tau(0, x_b, D, \tau)$$

grâce à la condition (**A3**), $p_\tau(x,\xi) = p(x,\xi + i\tau\nabla\varphi)$ est elliptique en (x,τ,ξ_b) dans $\mathbb{R}^+ \times \Gamma$ donc $V_P \cap \{\xi_a = 0\} = \phi$, le théorème 3.2.4 cas (`A3`) donne

$$|v|_{m,\tau}^2 \leq c(|P_\tau^0(x,D,\tau)v|_{0,\tau}^2 + \tau^{-1}|D_a^m v|_{0,\tau}^2) \tag{3.30}$$

Comme dans (3.23), en utilisant le théorème 2.2.1 on obtient

$$|P_{\epsilon,\tau}v - P_\tau^0 v|_{0,\tau}^2 \leq c\gamma(|v|_{m,\tau}^2 + e^{-\delta\tau}|u|_{-r,m,\tau}^2)$$

En utilisant cette majoration et la proposition 2.3.1 dans l'inégalité (3.30) on obtient (3.3) pour ϵ et γ suffisamment petits et τ assez grand.

3.3 Preuve du théorème d' unicité du prolongement

La proposition suivante est aussi nécessaire dans cette démonstation que les inégalités de Carleman dans le théorème 3.2.1.

Proposition 3.3.1 *Soit $u \in H^{-r,0}(\mathbb{R}^n)$ une fonction à support compact. Si φ est une fonction C^r telle que*

$$|Q_{\epsilon,\tau}^\varphi(D,x)u|_{L^2} \to 0 \quad \textit{quand} \quad \tau \to \infty$$

alors $u = 0$ dans $\{x \in \mathbb{R}^n \ ,\varphi(x) > 0\}$.

Preuve : Dans la suite le symbole $< .,. >$ désigne la dualité entre fonctions et distributions.

Soit $\lambda > 0$ et $f = e^{-\lambda D_a^2}g$, où $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On définit la distribution $h_f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ par :

$$h_f(w) =< f(x)w(\varphi(x)), u(x) >, \quad w \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

sa transformée de Fourier (voir [11]) est la fonction entière

$$\hat{h_f}(\tau) = h_f(e^{-i\tau.}) =< e^{-i\tau\varphi(x)} f(x), u(x) >=< e^{-i\tau\varphi} f, u >, \text{ pour } \tau \in \mathbb{C}$$

on remarque que :
$*$ d'une part si $\tau \in \mathbb{R}$ alors

$$|\hat{h_f}(\tau)| \leq |e^{-i\tau\varphi} f|_{r,0,\tau} |u|_{-r,0,\tau} \leq c\tau^r$$

en effet, le noyau de l'opérateur $e^{-\lambda D_a^2}$ étant

$$K'(x_a, y_a) = e^{-\frac{1}{\lambda}(x_a - y_a)^2}$$

donc

$$|e^{-i\tau\varphi} f|^2_{r,0,\tau} = \sum_{|\alpha| \leq r} \tau^{2(r-|\alpha|)} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_a}} |D_a^\alpha (e^{-i\tau\varphi} K'(x_a, y_a) g(y_a, x_b))|^2 dy_a dx$$

mais

$$\tau^{2r} \sum_{|\alpha| \leq r} \tau^{-2|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_a}} |D_a^\alpha (e^{-i\tau\varphi} K'(x_a, y_a) g(y_a, x_b))|^2 dy_a dx \leq \tau^{2r} c$$

et comme $u \in H^{-r,0}(\mathbb{R}^n)$, $|u|_{-r,0,\tau} \leq c$, et la première assertion est démontrée.
$*$ d'autre part :

$$\hat{h_f}(i\tau) =< f, e^{\tau\varphi} u >=< e^{(\frac{\epsilon}{2\tau} - \lambda) D_a^2} g, Q^\varphi_{\epsilon,\tau}(D, x) u > \to 0 \text{ quand } \tau \to \infty \tag{3.31}$$

donc $\hat{h_f}(i\tau)$ est bornée pour $\tau > 0$.
De plus h_f est à support compact, alors $\hat{h_f}$ se comporte à l'infini comme une exponentielle.

Si on résume : la fonction $g(z) = \hat{h_f}(z)(z + i)^{-r}$ est analytique dans le demi plan supérieur, bornée sur l'axe réel et l'axe imaginaire positif et croit comme une exponentielle à l'infini.
En appliquant le théorème de Phragmen-Lindelof (voir Corollaire 4.2 p.139 dans [3]) dans les deux cadrants supérieurs, on conclut que g est bornée dans le demi plan supérieur, et donc $\hat{h_f}$ est bornée par $c(1 + |z|)^r$ dans le demi plan supérieur.

Le théorème de Paley-Wiener-Schwartz (théorème 7.3.1 dans [7]) nous dit que h_f est d'ordre fini r et que

$$\sup_{x \in \ supp \ h_f} < x, Im\tau >= 0 \text{ pour } Im\tau \geq 0$$

ceci implique que son support est contenu dans $\mathbb{R}^-$, c'est à dire :
$h_f(w) =< fw(\varphi), u >= 0$ pour toute fonction $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans $\mathbb{R}^+$.
Faisons tendre λ vers 0 ; on obtient $< gw(\varphi), u >= 0$ pour tout $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et w à support dans $\mathbb{R}^+$.
En particulier $< g(x), u(x) >= 0$ pour tout $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\{x, \varphi(x) > 0\}$ et donc $u = 0$ dans $\{x, \varphi(x) > 0\}$.
Preuve du théorème 3.2.2 (suite) : On note que (3.3) est plus forte que (3.2) qui est plus forte que (3.1) mais on n' a besoin que de (3.1) pour montrer le théorème.
Sans aucune restriction on peut supposer que φ est fortement pseudoconvexe en x_0 pour P dans Γ.
On définit la fonction ψ par :

$$\psi(x) = D\varphi(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}D^2\varphi(x_0)(x - x_0, x - x_0) - 3\gamma|x - x_0|^2, \gamma > 0$$

pour γ assez petit la fonction ψ est fortement pseudo-convexe en x_0 pour P dans Γ car la pseudo-convexité est stable pour de petites perturbations C^2 (voir théorème 1.3.1).
Soit ϵ assez petit, et soit δ comme dans le théorème 3.2.1 correspondant à ϵ, x_0 et ψ.
On suppose δ assez petit tel que : $\{|x - x_0| \leq 2\delta\} \subset \Omega$
et

$$\psi(x) \leq \varphi(x) - \varphi(x_0) - 2\gamma|x - x_0|^2 \text{ pour } |x - x_0| \leq 2\delta \tag{3.32}$$

Soit χ une fonction de troncature définie par :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq -\gamma\delta^2 \\ 0 & \text{si } x < -2\gamma\delta_2 \end{cases}$$

on définit $\tilde{u}$ par :

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \chi(\psi(x))u(x) & \text{si } |x - x_0| \leq 2\delta \\ 0 & \text{si } |x - x_0| > 2\delta \end{cases}$$

pour pouvoir appliquer la proposition 3.3.1 on montre que

$$supp\ \tilde{u} \subset \{|x-x_0| \leq \delta\},$$

et que

$$\tilde{u} \in H^{-r,m-1}\ et\ P(x,D)\tilde{u} \in H^{-r,0}$$

pour r assez grand.
On a :

$$supp\ \tilde{u} \subset\ supp\ u \cap\ supp\ \chi(\psi(x)) \cap \{|x-x_0| \leq 2\delta\}$$

$$\subset \{\varphi(x) \leq \varphi(x_0)\} \cap \{\psi(x) > -2\gamma\delta^2\} \cap \{|x-x_0| \leq 2\delta\}$$

(3.32) nous donne

$$supp\ \tilde{u} \subset \{\varphi(x) \leq \varphi(x_0)\} \cap \{\varphi(x) - \varphi(x_0) - 2\gamma|x-x_0|^2 > -2\gamma\delta^2\}.$$

$$\subset \{-2\gamma|x-x_0|^2 \geq \varphi(x) - \varphi(x_0) - 2\gamma|x-x_0|^2 > -2\gamma\delta^2\} \subset \{|x-x_0| \leq \delta\}$$

On montre maintenant que $\tilde{u} \in H^{-r,m-1}$.
Comme $u \in D'(\mathbb{R}^{n_a}; H^{m-1}(\mathbb{R}^{n_b}))$, alors pour r assez grand, $u \in H^{-r,m-1}(\mathbb{R}^n)$ et il en est de même pour $\tilde{u}$. De plus :

$$P(x,D)\tilde{u} = P(x,D)(\chi(\psi(x))u(x))$$

$$= \chi(\psi(x)) \underbrace{Pu}_{=0} + [P,\chi(\psi)]u = [P,\chi(\psi)]u \in H^{-r,0}.$$

On applique maintenant le théorème 3.2.1 à $\tilde{u}$ et ψ d'où :

$$\tau|Q^{\psi}_{\epsilon,\tau}(D,x)\tilde{u}|^2_{m-1,\tau} \leq c\Big(|Q^{\psi}_{\epsilon,\tau}(D,x)P(x,D)\tilde{u}|^2_{0,\tau} + e^{-\delta\tau}\big(|\tilde{u}|^2_{-r,m-1,\tau} + |P(x,D)\tilde{u}|^2_{-r,0,\tau}\big)\Big) \tag{3.33}$$

On note que $P(x,D)\tilde{u}$ est à support dans l'ensemble
$G =$ support de $\chi \cap$ support $\tilde{u}$, ce qui donne :

$$G = \{\psi \leq -\gamma\delta^2\} \cap \{|x-x_0| \leq 2\delta\}.$$

en utilisant d'abord la transformée de Fourier ensuite la proposition 2.1.1 on obtient les estimations suivantes

$$
\begin{aligned}
|Q^{\psi}_{\epsilon,\tau}(D,x)P(x,D)\tilde{u}|^2_{0,\tau} &= |e^{-\frac{\epsilon}{2\tau}|\xi_a|^2}\widehat{e^{\tau\psi}P(x,D)}\tilde{u}|^2_{0,\tau} \\
&\leq \sup_{\xi\,\in\,\mathbb{R}^n}(\tau^2+|\xi_a|^2)^r e^{-\frac{\epsilon}{\tau}|\xi_a|^2}|e^{\tau\psi}P(x,D)\tilde{u}|^2_{-r,0,\tau} \\
&\leq c\tau^{2r}|e^{\tau\psi}|^2_{C^r_\tau(G)}|P(x,D)\tilde{u}|^2_{-r,0,\tau} \\
&\leq c\tau^{2r}e^{-2\gamma\delta^2\tau}|P(x,D)\tilde{u}|^2_{-r,0,\tau}
\end{aligned}
$$

en combinant cette dèrnière inégalité avec (3.33), et en utilisant le fait que

$$\tilde{u} \in H^{-r,m-1}_\tau \ (|\tilde{u}|_{-r,m-1,\tau} < \infty)$$

$$P(x,D)\tilde{u} \in H^{-r,0}_\tau \ (|P(x,D)\tilde{u}|_{-r,0,\tau} < \infty)$$

on a pour $\gamma, \delta \leq 1$ et τ assez grand

$$\tau|Q^{\psi}_{\epsilon,\tau}(D,x)\tilde{u}|^2_{m-1,\tau} \leq c(\tau^{2r}e^{-2\gamma\delta^2\tau} + e^{-\delta\tau})$$

par conséquent

$$|Q^{\psi}_{\epsilon,\tau}(D,x)\tilde{u}|^2_{m-1,\tau} \leq c\tau^{2r}e^{-2\gamma\delta^2\tau}$$

ce qui donne

$$|Q^{\psi+\frac{\gamma\delta^2}{2}}_{\epsilon,\tau}(D,x)\tilde{u}|_{m-1,\tau} \leq c\tau^r e^{-\frac{\gamma\delta^2\tau}{2}} \to 0 \ quand \ \tau \to \infty.$$

la proposition 3.3.1 implique $\tilde{u} = 0$ dans $\{x \in \Omega;\ \psi(x) > \frac{-\gamma\delta^2}{2}\}$, mais $\tilde{u} = u$ dans $V = \Omega \cap \{x \in \Omega;\ \psi(x) > \frac{-\gamma\delta^2}{2}\}$ donc $u = 0$ dans V. Comme $x_0 \in V$, ceci conclut la preuve du théorème 3.2.2.

Chapitre 4

Applications

4.1 Equation des ondes

On considère dans $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, l'opérateur différentiel du second ordre.

$$P(x, \partial) = \sum_{i,j=0}^{n} a^{ij}(x)\partial_i\partial_j + b^i\partial_i + c \tag{4.1}$$

On suppose la partie principale de P (qu'on notera P dans la suite) réelle et hyperbolique par rapport aux sous ensembles de niveau (de $\mathbb{R}^{n+1}$) d'une des coordonnées appelée x_0. Un tel sous ensemble est de la forme $\{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_0 = cste\}$. On appele x_0 la coordonnée temps, et $(x_1, ..., x_n)$ coordonnées d'espace. On s'intéresse à deux cas importants :
A. $x_a = x_0$ (i.e. les coefficients de P sont analytiques en temps) et

$$\Gamma = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+1}; \xi_0 = 0\}$$

dans ce cas on suppose que :
(i) Les coefficients $a^{ij}, 0 \leq i, j \leq n$, sont analytiques en temps, à valeurs dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, satisfaisant la seconde partie de la condition (**A2**).
(ii) Les coefficients $b^i, 0 \leq i \leq n$, sont analytiques en temps, à valeurs dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
(iii) Le coefficient c est analytique en temps à valeurs dans $L^n(\mathbb{R}^n)$ si $n \geq 3$ et $L^{2+\epsilon}(\mathbb{R}^n)$ si $n = 2$.

B. $x_a = x_1, ..., x_n$. (i.e. les coefficients de P sont analytiques en espace) et

$$\Gamma = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+1}; (\xi_1, .., \xi_n) = (0, .., 0)\}$$

dans ce cas on suppose que :
(i) Les coefficients $a^{ij}, 0 \leq i, j \leq n$, sont analytiques en variables d'espace, à valeurs dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
(ii) Les coefficients $b^i, 0 \leq i \leq n$, sont analytiques en variables d'espace, à valeurs dans $L^\infty(\mathbb{R})$.
(iii) Le coefficient c est analytique en variables d'espace, à valeurs dans $L^2(\mathbb{R})$.

Définition 4.1.1 *Soit S une hypersurface. S est dite du type temps par rapport à P si*

$$a^{00}(x)(\partial_t\varphi)^2 - \sum_{k,j=1}^{n} a^{kj}(x)\partial_k\varphi\partial_j\varphi > 0$$

Remarque 4.1.1 *Dans le cas **A**, la condition de pseudo-convexité est vide pour toute surface non caractérisique et (**A2**) peut être appliqué. Dans le cas **B**, P_τ est elliptique dans Γ en (ξ_b, τ) pour toute surface de type temps, et (**A3**) permet de conclure.*

En effet, dans le cas **A**,
Pour $\tau \neq 0$, $p(x, \xi + i\tau\nabla\varphi) = \{p(x, \xi + i\tau\nabla\varphi), \varphi\} = 0$ veut dire que $i\tau$ est une racine double du polynôme $q(z) = p(x, \xi + z\nabla\varphi), z \in \mathbb{C}, \xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, comme $p(x, \nabla\varphi) \neq 0$ car la surface est non caractéristique, q est du second degré à coefficients réels par conséquant sa racine double est réelle d'où $\tau = 0$ et la deuxième condition de la définition 1.3.6 est vide et elle se ramène à la première condition de la même définition.
si $\tau = 0$, puisque P est hyperbolique par rapport à $\xi' = (\xi_1, .., \xi_n)$ donc le symbole

$$P(x, \xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

est elliptique dans Γ et la condition de pseudo-convexité forte est vide, on peut donc appliquer (**A2**).

Dans Le cas **B**

$$P_\tau(x,\xi) = p(x,\xi+i\tau\nabla\varphi) = a^{00}(x)\xi_0^2 - \tau^2\sum_{k,j=0}^{n} a^{kj}(x)\partial_k\varphi\partial_j\varphi + i\tau\sum_{j=0}^{n}(a^{0j}(x)+a^{j0}(x))\xi_0\partial_j\varphi$$

$P_\tau(x,\xi) \neq 0$ si

$$a^{00}(x)\xi_0^2 - \tau^2\sum_{k,j=0}^{n} a^{kj}(x)\partial_k\varphi\partial_j\varphi \neq 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{j=0}^{n}(a^{0j}(x)+a^{j0}(x))\xi_0\partial_j\varphi \neq 0$$

$$\text{si} \qquad \sum_{j=0}^{n}(a^{0j}(x)+a^{j0}(x))\xi_0\partial_j\varphi = 0$$

$$\text{alors} \qquad \sum_{j=1}^{n}(a^{0j}(x)+a^{j0}(x))\xi_0\partial_j\varphi = -2a^{00}(x)\partial_t\varphi$$

on reporte cette égalité dans la partie réelle de $P_\tau(x,\xi)$ on obtient

$$Re\ P_\tau(x,\xi) = a^{00}(x)\xi_0^2 + \tau^2\big(a^{00}(x)(\partial_t\varphi)^2 - \sum_{k,j=1}^{n} a^{kj}(x)\partial_k\varphi\partial_j\varphi\big)$$

comme $a^{00}(x)(\partial_t\varphi)^2 - \sum_{k,j=1}^{n} a^{kj}(x)\partial_k\varphi\partial_j\varphi > 0$ (S est du type temps) et $a^{00}(x)\xi_0^2 > 0$ pour $\xi_0 \neq 0$ on conclut que P_τ est elliptique dans Γ en $(\xi_b,\tau) = (\xi_0,\tau)$, on peut donc appliquer (**A3**).
Le théorème 3.2.2 donne le résultat suivant :

Théorème 4.1.1 *On suppose que (**A**) ou (**B**) soit vérifiée. Alors on a l' unicité du prolongement à travers toute surface non caractéristique pour toute solution u de* $P(x,\partial)u = 0$*, appartenant respectivement à* $\mathcal{D}'(\mathbb{R};H^1(\mathbb{R}^n))$ *et* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n;H^1(\mathbb{R}))$.

Dans le cas(**A**), ce résultat améliore substentiellement les résultats de Robbiano [9] et de Hörmander [5], car dans ces derniers, on suppose tous les coefficients indépendents du temps et on conclut l' unicité du prolongement à travers toute surface loin d'être caractéristique (en Anglais "not too close to being caracteristic"). Dans le cas (**B**), le résultat est entièrement nouveau.

4.2 Equation de Schröedinger

On considère l'opérateur de Schröedinger

$$P(x,\partial) = i\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\partial_i\partial_j + b^i + c \tag{4.2}$$

Une fois encore la condition de pseudo-convexité est vide pour les surfaces non caractéristiques pour $\tau \neq 0$. Comme précédemment on considère deux cas

A. $x_a = t$ (i.e. les coefficients de P sont analytiques en temps).
On suppose que :
(i) Les coefficients $a^{ij}, 0 \leq i,j \leq n$, sont analytiques en temps, à valeurs dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, satisfaisant la seconde partie de la condition (**A2**).
(ii) Les coefficients $b^i, 0 \leq i \leq n$, sont analytiques en temps, à valeurs dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
(iii) Le coefficient c est analytique en temps à valeurs dans $L^n(\mathbb{R}^n)$ si $n \geq 3$ et $L^{2+\epsilon}(\mathbb{R}^n)$ si $n = 2$.

B. $x_a = x_1, ..., x_n$. (i.e. les coefficients de P sont analytiques en espace).
Dans ce cas on suppose :
(i) Les coefficients $a^{ij}, 0 \leq i,j \leq n$, sont analytiques en variables d'espace, à valeurs dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, satisfaisant la deuxième partie de la condition (**A2**).
(ii) Les coefficients $b^i, 0 \leq i \leq n$, sont analytiques en variables d'espace, à valeurs dans $L^\infty(\mathbb{R})$.
(iii) Le coefficient c est analytique en variables d'espace, à valeurs dans $L^2(\mathbb{R})$.
Par le théorème 3.2.2 on obtient :

Théorème 4.2.1 *On suppose que (**A**) ou (**B**) soit vérifiée. Alors on a l' unicité du prolongement pour toute solution u appartenant respectivement à* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^n))$ *et* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n; H^1(\mathbb{R}))$ *de* $P(x,\partial)u = 0$ *à travers toute surface non caractéristique.*

Le résultat est nouveau dans les deux cas (**A**) et (**B**).

Bibliographie

[1] **Matthias M. Eller** *Uniqueness of continuation theorems*, Johannesburg, Septembre 1997.

[2] **Marcel Berger et Bernard Gostiaux**, *Géométrie Différentielle.* Librairie Armand Colin, Paris, 1972.

[3] **J.B. Conway** *Functions of one complex variable,* Springer-Verlag, Berlin 1973.

[4] **H. Brézis**, *Analyse fonctionnelle ; théorie et applications*, Masson, Paris, New york, Barcelone, Milan, México, Sao Polo 1983.

[5] **L. Hormander**, A uniqueness theorem for second order hyperbolic differential equations, *Comm. Partial Differential Equations* **17**(1992), 699-714.

[6] **L. Hörmander**, *Linear Partial Differential Operators,* Springer-Verlag, 1976.

[7] **L. Hörmander** , *The Analysis of linear Partial Differential Operators* I-IV Springer-Verlag, Berlin 1983.

[8] **L. Hörmander**, *The Analysis of linear Partial Differential Operators,* Springer-Verlag, 1985.

[9] **L. Robbiano**, Théorème d' unicité du prolongement adapté au contrôle des solutions des problèmes hyperboliques, *Comm. Partial Differential Equations* **16** (1991), 789-800.

[10] **J. Rauch**, *Partial differential Equations*, Graduate Texts in Mathematics 128, springer-Verlag.

[11] **L. Schwartz**, *Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques.* Paris, Hermann 1965.

[12] **D. Tataru**, Unique continuation for solutions to PDE'S ; between Hörmander's theorem and Holmgren's theorem, *Commun. In Partial Differential Equations,* **20**(5 & 6), 855-884 (1995).

[13] **D.Tataru**, Carleman estimates, unique continuation and applications, Departement of mathématics, Northwestern University, September30, 1999.

[14] **M. Taylor**, *Pseudodifferential Operators and non linear PDE*, Birkhäuser, Boston 1991.