Soit R un anneau commutatif unitaire, le R-module des séries formelles muni du produit de Hadamard défini comme suit:

$$(\sum_{n\geq 0} a(n)X^n) \odot (\sum_{n\geq 0} a(n)X^n) = \sum_{n\geq 0} a(n)b(n)X^n.$$

est une R-algèbre, notée $\mathcal{H}\ (R)$, appelée algèbre de Hadamard; le R-module des suites définies sur $I\!N$ à valeurs dans R muni du produit des suites terme à terme est une R-algèbre, nous avons un isomorphisme entre l'algèbre des suites d'éléments de R et l'algèbre de Hadamard, qui à toute suite $a = (a(n))_{n\in I\!N}$ associe sa série génératrice $f(X) = \sum a(n)X^n$ à coefficients dans R.

L'algèbre de Hadamard $\mathcal{H}\ (K)$, définie sur un corps K commutatif de caractéristique nulle, contient une sous-algèbre $R(K)$ des séries à coefficients dans K qui représentent des fractions rationnelles de $K(X)$ sans pôles en zéro, cette algèbre (par l'isomorphisme défini ci-dessus) est associée à l'algèbre $r(K)$, des suites satisfaisant une relation récurrente linéaire à coefficients constants.

Nous nous intéressons dans ce travail au problème de Pisot sur la racine $d^{ième}$ d'une suite récurrente linéaire: " l'existence des solutions, dans $r(K)$, de l'équation:

$$b(n) = P(X) \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

où $b = (b(n))_{\ n\in\mathbb{N}} \in r(K)$ et $P \in \overline{K}[X]$, où $\overline{K}$ désigne une clôture algébrique d'un corps commutatif K de caractéristique nulle ".

Nous établirons, le résultat dû à U.Zannier [22], dans le cas particulier $P(X) = X^d$ qui fait l'objet de la conjecture de Pisot généralisée sur la racine $d^{ième}$ d'une suite récurrente linéaire et le résultat de J.Berstel [3], dans le cas où $P(X) \in \mathbb{C}[X]$.

Dans le chapitreI, nous donnerons des généralités sur l'algèbre $r(K)$, où K est un corps commutatif de caractéristique nulle, en particulier l'équivalence des notions suite récurrente linéaire et polynôme exponentiel; nous donnerons une caractérisation des éléments de $r(K)$ par les déterminants de Kronecker-Hankel; nous décrirons l'anneau des polynômes exponentiels et enfin, nous donnerons l'historique de la conjecture de Pisot et le résultat de J.Berstel [3] sur l'équation (1).

Comme les notions de théorie de Kummer , hauteur et la décomposition des idéaux premiers dans un corps de nombres sont à la base de la preuve du résultat de U.Zannier, nous rappelerons ces notions dans le chapitreII; et dans le chapitreIII, nous expliquerons l'argument de spécialisation qui permettra de ramener l'étude d'un corps commutatif de caractéristique nulle à un corps de nombres .

Dans le chapitreIV, nous donnerons le détail du résultat de U.Zannier sur la conjecture de Pisot généralisée.