

N° d'ordre :29/2009-M/PH

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DE PHYSIQUE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

En **PHYSIQUE**

Spécialité : Physique Théorique de la Matière et des Hautes Energies

Par **GHEBACHE Siham**

Sujet

Modes électrostatiques dans les plasmas quantiques

Soutenu publiquement le 04 /07/ 2009, devant le jury composé de :

Mme	F. CHAFA-MEKIDECHE	Professeur	U.S.T.H.B	Présidente
Mr	T.H. ZERGUINI	Professeur	U.S.T.H.B	Directeur de thèse
Mr	M. NEMOUCHI	Maître de Conférences	U.S.T.H.B	Examineur
Mr	M. TRIBECHÉ	Maître de Conférences	U.S.T.H.B	Examineur

Remerciements

Le travail présenté dans cette thèse a été entièrement réalisé au sein de l'équipe de recherche Physique des Plasmas du Laboratoire de Physique Théorique de la Faculté des Sciences-Physique de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene (USTHB) d'Alger.

Je remercie vivement le Professeur **Taha Houssine ZERGUINI**, mon directeur de thèse, pour avoir accepté de m'accueillir au sein de son équipe de Physique des Plasmas et pour l'intérêt qu'il a constamment porté à la progression de mon travail. Pour tout cela, je lui exprime toute ma gratitude, mon profond respect et ma très haute considération.

Je remercie également le docteur **Mouloud TRIBECHÉ** pour avoir proposé et structuré le sujet de la présente thèse. Outre la confiance qu'il m'a témoignée, il a suivi pas à pas l'évolution de mon travail et m'a initiée à la physique non linéaire des plasmas complexes. Qu'il trouve ici l'expression de mon profond respect et de ma très haute considération.

Je remercie vivement le Professeur **F. CHAFA-MEKIDECHE** du Laboratoire de Physique Théorique qui nous a honorés en acceptant de présider le jury de la présente thèse. Sa disponibilité en tant que chef de département nous a été d'un grand apport.

Mes remerciements les plus vifs vont également au docteur **M. NEMOUCHI**, Maître de Conférences du laboratoire d'Electronique Quantique, pour l'intérêt qu'il a manifesté et porté à ce travail en acceptant de prendre part au jury de la présente thèse.

Je remercie **K. Aoutou** pour les nombreuses et fructueuses discussions que nous avons eues et surtout pour son aide précieuse dans les calculs analytiques (parfois harassants) et l'intégration numérique des équations de base de notre modèle.

Mes vifs remerciements vont également à tous les membres du Laboratoire de Physique Théorique et particulièrement aux membres de l'équipe avec laquelle j'ai travaillé pour leur amitié et leur disponibilité (Younsi, Boubakour, Amour, Mayout, Ben Zekka, Boumezoued, Griba, Berbri) et à ceux de l'équipe de Physique du Solide avec lesquels nous avons beaucoup interagi.

Enfin, j'exprime ma profonde reconnaissance et mes remerciements à mon père, ma mère, mes sœurs et mes frères pour leur soutien et leurs encouragements sans cesse renouvelés tout au long du présent travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Physique des plasmas poussiéreux	5
1.1 Eléments de la théorie des plasmas	5
1.2 Propriétés des plasmas poussiéreux	8
1.2.1 Charge des grains de poussière	10
1.2.2 Modes électrostatiques de basses fréquences dans un plasma poussiéreux	12
1.2.3 Equation de Korteweg de Vries	13
1.3 Physique des plasmas quantiques	16
1.3.1 Propriétés des plasmas quantiques	16
1.3.2 Etablissement des équations fluides	17
2 Ondes acoustiques poussiéreuses associées à un plasma quantique	20
2.1 Présentation physique du problème	20
2.2 Ondes acoustiques poussiéreuses dans un plasma contenant des ions et des électrons quantiques	21
2.2.1 Equations de base du modèle de Shukla et Ali	21
2.2.2 Cas des amplitudes faibles mais finies	23
2.3 Onde acoustique poussiéreuse dans un plasma quantique électroniquement appauvri	29
2.3.1 Equations de base du modèle	29
2.3.2 Cas des faibles amplitudes	29
2.3.3 Potentiel solitaire dans un plasma quantique électroniquement appauvri	34
3 Ondes acoustiques ioniques poussiéreuses quantiques solitaires associées à un plasma poussiéreux	39
3.1 Présentation physique du problème	39

3.2	Equations de base du modèle	40
3.3	Simulation numérique et discussion des résultats	42
3.4	Analyse en pseudo-potentiel	44
3.5	Cas des faibles amplitudes	54
	Conclusion	57

Introduction

Il est communément admis que 99% de la matière de l'univers est à l'état plasma, un gaz électriqué dont les atomes sont dissociés en ions à charge positive et en électrons à charge négative. Les atmosphères, les nébuleuses et la majeure partie de l'hydrogène interstellaire sont à l'état plasma. Notre planète est elle même entourée d'un plasma à une distance comprise entre 90 et 500km de sa surface. Cette couche facilite et rend possible les communications radio et est responsable de l'apparition des aurores boréales. Dans le voisinage immédiat de notre planète, les ceintures de Van Allen et le vent solaire sont autant d'autres exemples de l'abondance du plasma. D'un autre côté, dans notre vie de tous les jours, le nombre d'exemples de plasma est quelque peu limité et restreint. Nous citerons les gaz conducteurs à l'intérieur des tubes fluorescents tels les tubes à néon. Il est utile de noter que n'importe quel gaz ionisé n'est pas forcément un plasma. Un gaz présente toujours un certain degré d'ionisation. Ce n'est qu'au moment où la concentration des particules chargées provoque une charge d'espace capable de limiter le libre parcours moyen des ions et des électrons que les caractéristiques du gaz changent de manière notable. Un plasma se définit comme étant un gaz quasi-neutre composé de particules chargées et de particules neutres qui exhibent un comportement collectif. Lorsque les particules chargées se meuvent dans un plasma, des concentrations locales de charge positive et de charge négative sont générées au sein de ce plasma. Ces concentrations, et donc ces charges d'espace, donnent naissance à des champs électriques. En outre, le mouvement des particules chargées génère des courants et crée, par conséquent, des champs électromagnétiques. Ces champs électromagnétiques affectent et perturbent le mouvement d'autres particules chargées qui à leur tour peuvent influencer le reste des particules du plasma. En fait, toute perturbation affectant la neutralité d'un plasma provoque de forts champs électromagnétiques qui tendent à la restaurer. La façon la plus naturelle d'obtenir un plasma est de chauffer un gaz jusqu'à ce que l'énergie moyenne des particules soit comparable à l'énergie d'ionisation de l'espèce considérée.

La définition d'un plasma telle que énoncée ci-dessus peut s'avérer, à bien des égards, incomplète et restrictive. En effet, un plasma réel contient toujours des impuretés chargées communément appelées poussières. La présence de ces extra particules, dont les dimensions sont de l'ordre du micron, rend la nature du système plasma beaucoup plus complexe et beaucoup plus difficile à cerner. Un plasma poussiéreux (dusty ou complex plasmas) est un gaz de basse température, complètement ou partiellement ionisé, comprenant des électrons, des ions et une composante additionnelle de grains de poussière chargés et extrêmement massifs. Au cours de ces dernières années, les plasmas poussiéreux ont suscité un large et profond regain d'intérêt à cause de leur rôle, parfois prépondérant, dans certaines applications technologiques, spatiales et astrophysiques. Les plasmas poussiéreux sont présents dans différentes parties de notre système solaire, à savoir, le milieu interplanétaire, les nuages interstellaires, les queues et chevelures des comètes, les anneaux planétaires, les boucles solaires et les nuages moléculaires interstellaires (nébuleuses Orion, Coalsack, Horsehead, Eagle). Ils sont aussi présents dans les dispositifs de laboratoires et les procédés industriels. La lumière zodiacale, la troposphère arctique, la mésosphère polaire, les gaz d'échappement d'une fusée, la flamme d'une chandelle, ...etc sont autant d'autres exemples de plasmas poussiéreux. Au vu des nouveaux phénomènes qu'ils introduisent et font intervenir, tels que la fluctuation de la charge électrique, l'appauvrissement électronique, ces grains de poussière massifs et hautement chargés peuvent modifier les propriétés intrinsèques du plasma traditionnel à deux composantes. De nouveaux modes et de nouvelles instabilités peuvent alors apparaître. En réalité, la physique des plasmas poussiéreux n'a connu son essor que grâce à la découverte de l'onde acoustique poussiéreuse (DAW, un nouveau mode identifié au début des années 90) et de l'onde acoustique ionique poussiéreuse (DIAW, mode acoustique ionique habituel modifié par la présence des grains de poussière dans le plasma). La physique des plasmas classiques (traditionnels) est principalement basée sur des régimes à hautes températures et à basses densités où les effets quantiques ne jouent aucun rôle. Les progrès technologiques récemment atteints, tels que la miniaturisation des dispositifs électroniques et les nano-objets (agrégats métalliques, nanoparticules, couches minces...etc) ont permis d'envisager des applications à l'échelle nanométrique où la mécanique quantique joue un rôle très important. Les effets quantiques deviennent importants quand la longueur de De Broglie, associée à une masse m donnée, devient non négligeable. Les plasmas quantiques sont caractérisés par de très basses températures et de hautes densités. Ces plasmas quantiques peuvent être composés d'électrons, de positrons, d'ions et de grains de poussière. Leur étude nécessite une nouvelle loi de pression (ou équation d'état) établie à partir de la

fonction de distribution de Fermi-Dirac et une nouvelle force dérivant du potentiel de Bohm quantique. Cette équation d'état prend en compte, à titre d'exemple, le caractère fermionique des électrons. Les recherches entreprises dans le domaine des plasmas quantiques, au départ essentiellement théoriques, s'intéressent maintenant à des applications intéressantes dans le domaine des nano-structures (agrégats métalliques, nano-particules, couches minces[1]...etc.) et des semi-conducteurs (dont la densité des porteurs de charge est nettement inférieure à celle des métaux). Le degré de miniaturisation atteint fait intervenir des longueurs caractéristiques dont l'ordre de grandeur avoisine celle de la longueur d'onde de De Broglie. Les effets quantiques, tels que l'effet tunnel et la diffraction quantique, ne sont alors plus négligeables. Par ailleurs, les modèles de plasmas quantiques ont été largement appliqués aux plasmas astrophysiques (telles les naines blanches) en conditions extrêmes de température et de densité. Ces derniers se comportent alors comme des plasmas de fusion quantiques.

Le but du présent mémoire de Magister s'inscrit dans le cadre général de la modélisation des plasmas quantiques. En particulier, il se propose d'investir, au moyen d'une approche hybride (analytique et numérique), les analogues quantiques des modes acoustiques non linéaires associés à différents modèles de plasma poussiéreux: le mode acoustique poussiéreux (un nouveau mode identifié au début des années 90) et le mode acoustique ionique poussiéreux (mode acoustique ionique habituel modifié par la présence de grains de poussière dans le plasma). Nous nous intéresserons particulièrement aux conditions d'existence et de réalisation des structures solitaires quantiques. Ces structures qui peuvent être perçues comme « les modes normaux non linéaires » d'un plasma poussiéreux quantique sont étudiées grâce à la méthode du pseudo-potential (amplitude arbitraire) et à la technique de la perturbation réductive de Washimi et Taniuti (amplitude faible mais finie).

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous définirons les concepts de base d'un plasma et introduirons les équations de base du modèle fluide standard. Nous décrirons ensuite les plasmas poussiéreux, rapporterons leurs propriétés et insisterons sur les phénomènes qui les caractérisent tels que l'appauvrissement électronique et l'apparition de nouveaux modes d'onde. Nous décrirons par la suite la physique des plasmas quantiques, leurs propriétés et introduirons un modèle fluide contenant des termes de correction quantique.

Le deuxième chapitre de cette thèse sera consacré à l'analyse du comportement non linéaire de l'onde acoustique poussiéreuse associée à un modèle de plasma quantique électroniquement appauvri. Pour cela on se propose de reconsidérer une récente étude[2] où la dynamique des grains de poussière est prise en compte et l'inertie des ions et des électrons

négligée. L'accent sera mis d'une part sur l'existence, la formation et la réalisation possible de ces ondes acoustiques poussiéreuses solitaires et d'autre part, sur l'influence des effets quantiques sur le profil de ces ondes solitaires.

Le troisième chapitre de cette thèse sera consacré à l'analyse du comportement non linéaire de l'onde acoustique ionique poussiéreuse quantique associée à un modèle de plasma composé d'ions fluides classiques, d'électrons quantiques et de grains de poussière immobiles. Deux cas de figures seront alors considérés, à savoir, des grains de poussière à charge positive et des grains de poussière à charge négative. L'accent sera mis sur l'influence des effets quantiques sur les propriétés de l'onde acoustique ionique poussiéreuse quantique solitaire non linéaire. Pour cela, nous ferons appel à la méthode bien connue du pseudo-potentiel et à la technique de la perturbation dite réductive. La stabilité linéaire ainsi que les solutions quasi-neutres sont succinctement analysées.

Nous terminerons notre manuscrit par une conclusion et une présentation succincte de nos perspectives.

1

Physique des plasmas poussiéreux

1.1 Éléments de la théorie des plasmas

De manière générale, un plasma est composé d'ions et d'électrons portant respectivement des charges positives et négatives (la neutralité globale de la charge doit être satisfaite, exception faite évidemment des faisceaux de particules chargées). Les électrons ont une masse nettement plus faible que celle des ions (le rapport de la masse du proton sur celle de l'électron est de l'ordre de 1836): ils possèdent moins d'inertie et sont donc plus réactifs que les ions. Un plasma peut être caractérisé par sa température électronique, notée T_e , et sa densité notée n_e . T_e et n_e peuvent varier respectivement de 0.1 à 10^6 eV et de 1 à 10^{18} cm⁻³ selon la nature (astrophysique ou de laboratoire) et les différentes applications du plasma. Dans un plasma, la plus petite distance au delà de laquelle le champ électrique produit par une charge est écranté de façon significative s'appelle longueur de Debye λ_D . Cette distance peut être déduite de l'équation de Poisson autour d'une charge en prenant une distribution de Boltzmann -Maxwell pour les électrons et les ions qui entourent la particule test. Pour un plasma de densité n_0 et de température $k_B T_e$, cette distance vaut

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{n_0 e^2}} \quad (1.1)$$

Par conséquent, si L est une grandeur caractéristique de la dimension du plasma, elle devra vérifier la condition suivante

$$\lambda_D \ll L \quad (1.2)$$

Le nombre de particules chargées N_D que comporte une sphère de Debye est alors très grand

$$N_D = n_0 \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 \gg 1 \quad (1.3)$$

et donc le caractère collectif du comportement des particules du plasma est important. Le second critère auquel doit satisfaire un gaz à l'état plasma a trait aux collisions des particules chargées avec les neutres: les effets dus à l'interaction électromagnétique doivent prédominer devant ceux dus aux collisions binaires entre particules chargées et neutres. En d'autres termes, cela veut dire que le mouvement d'une particule chargée dans un plasma est déterminé, en premier lieu, par la présence d'une charge d'espace. Par conséquent, la fréquence caractéristique des oscillations- plasma ν et le temps de vol d'une particule chargée entre deux collisions avec les neutres τ doivent vérifier la condition suivante

$$\nu\tau > 1 \quad (1.4)$$

Dans un plasma, les électrons et les ions suivent des trajectoires aléatoires et se meuvent avec de grandes vitesses. Une charge positive quelconque, placée à l'origine d'un référentiel, attire les électrons et repousse les ions, créant ainsi un nuage électronique dans son voisinage immédiat. On parle alors d'écrantage de Debye, car au delà d'une certaine distance, appelée longueur de Debye, le champ électrique créé par cette charge test sera annihilé et ne sera plus ressenti par le reste des particules chargées. A l'aide de l'équation de Poisson

$$\nabla^2\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{e}{\varepsilon_0}(n_e - n_i) \quad (1.5)$$

et moyennant les densités de particules suivantes

$$n_e = n_{e0} \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right) \quad (1.6)$$

$$n_i = n_{i0} \quad (1.7)$$

il est aisé de montrer(avec l'approximation $\left|\frac{e\phi}{k_B T_e}\right| \ll 1$) que le potentiel ϕ s'écrit comme

$$\phi = \phi_0 \exp\left(-\frac{|x|}{\lambda_D}\right) \quad (1.8)$$

avec

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{n_{e0} e^2}} \quad (1.9)$$

Il apparaît alors que la décroissance du potentiel électrostatique créé par une charge est plus rapide dans un plasma que dans le vide ($\propto \frac{1}{r}$) : c'est le phénomène d'écrantage (shielding).

Il existe une théorie dite "théorie fluide" qui considère le plasma comme un fluide se mouvant avec une vitesse \mathbf{u} . La masse et la quantité de mouvement d'un volume V de plasma de densité ρ sont données par

$$M = \int_V \rho dV \quad (1.10)$$

$$\mathbf{P} = \int_V \rho \mathbf{u} dV \quad (1.11)$$

Les équations fluides peuvent alors déduites à partir des lois de conservation de la masse et de l'impulsion

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (1.12)$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{F} \quad (1.13)$$

\mathbf{F} représente l'ensemble des forces externes (poids, forces électromagnétiques...etc) qui s'exercent sur l'élément de volume V . L'application du théorème de la divergence et de celui du gradient permet d'obtenir les deux équations fluides suivantes

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0 \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) - \frac{\nabla p_\alpha}{m_\alpha n_\alpha} + \mathbf{g} \quad (1.15)$$

$\alpha = i, e$ dénote l'espèce de particules considéré et \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{g} et p représentent respectivement le champ électrique, le champ magnétique, l'accélération de la pesanteur et la pression. La première équation, dite équation de continuité pour un fluide, représente la conservation du nombre de particules. La seconde, dite équation de mouvement, rend compte de l'ensemble des forces externes auxquelles est assujettie le fluide. Dans le but d'avoir autant d'équations que d'inconnues, nous complétons le système précédent à l'aide de trois équations supplémentaires : une équation d'état qui relie pression et densité

$$\frac{d(p_\alpha n_\alpha^{-\gamma})}{dt} = 0 \quad (1.16)$$

et deux équations de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.18)$$

qui relie \mathbf{E} et \mathbf{B} . Les deux autres équations de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.20)$$

où ρ représente maintenant la densité de charge électrique, n'apportent pas d'informations supplémentaires et peuvent être considérées comme conditions initiales des deux premières.

1.2 Propriétés des plasmas poussiéreux

Un plasma poussiéreux est composé de molécules de gaz neutres, d'électrons, d'ions et de grains de poussières chargés ($Q_d \sim -10^3 e$) et massifs ($m_d \sim 10^9 m_p \sim 10^{13} m_e$). Une telle mixture de plasma et de poussière possède trois échelles de longueur caractéristiques. Ce sont le rayon du grain de poussière r_d ($r_d \sim \mu m$), la longueur de Debye poussiéreuse λ_D et la distance moyenne inter-granulaire d . Cette dernière est reliée à la densité numérique n_d des grains par la relation $n_d d^3 \sim 1$. La longueur de Debye λ_D d'un plasma poussiéreux est donnée par[3]

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \frac{1}{\lambda_{De}^2} + \frac{1}{\lambda_{Di}^2} \quad (1.21)$$

où $\lambda_{De,i} = (T_{e,i}/4\pi n_{e,i0} e^2)^{1/2}$ représente la longueur de Debye électronique (ionique), $T_e(T_i)$ la température électronique (ionique) exprimée en unité d'énergie, $n_{e0}(n_{i0})$ la densité électronique (ionique) à l'équilibre et e la charge élémentaire. Dans le cas où $T_e \sim T_i$ et $n_{e0} \sim n_{i0}$, λ_{De} est de l'ordre de λ_{Di} tandis que pour $T_e \gg T_i$ et $n_{i0} > n_{e0}$, nous avons $\lambda_D \sim \lambda_{Di} \gg \lambda_{De}$. Dans un plasma poussiéreux typique, r_d est généralement très petit devant λ_D . Lorsque $r_d \ll \lambda_D < d$, le grain de poussière peut être traité d'un point de vue dynamique de la particule, et dans ce cas nous parlons de plasma poussiéreux contenant des grains de poussière isolés. D'un autre côté, les effets collectifs entre grains chargés deviennent importants et significatifs lorsque $r_d \ll d < \lambda_D$. Dans ce cas, les particules de poussière chargées peuvent être assimilées à des particules ponctuelles massives semblables à des ions à charge multiple dans un plasma à plusieurs espèces. La condition de quasi-neutralité de la charge électrique dans un plasma poussiéreux dont les grains portent une charge négative s'écrit sous la forme

$$n_{i0} = n_{e0} + Z_{d0} n_{d0} \quad (1.22)$$

n_{j0} est la densité numérique des particules d'espèce j (e, i, d) et Z_{d0} le nombre de charges non perturbées résidant sur la surface du grain. Lorsque la majeure partie des électrons du

plasma ambiant est collectée par les grains de poussière, la condition de quasi neutralité précédente (1.22) peut être réécrite sous la forme $n_{i0} \approx Z_{d0}n_{d0} \gg n_{e0}$. Cependant, il est important de noter que l'appauvrissement électronique ($n_{e0} \rightarrow 0$) ne peut être complet[4] étant donné que la valeur minimale du rapport entre les densités électronique et ionique est égal à $(m_e/m_i)^{1/2}$ lorsque le potentiel de la surface du grain tend vers zéro. Dans ce cas, le plasma poussiéreux peut être approximativement considéré comme un plasma à deux composantes comprenant des grains de poussière chargés négativement entourés d'ions à charge positive. Une telle situation est aussi bien commune dans les anneaux de Saturne que dans les décharges de laboratoire. D'un autre côté, dans les plasmas poussiéreux thermiques ou irradiés à l'aide de rayons ultraviolets, les grains émettent des électrons et, par conséquent, peuvent acquérir une charge positive. Dans ce cas, l'écrantage des grains positifs sera assuré par les électrons et à l'équilibre nous aurons $n_{e0} \approx Z_{d0}n_{d0}$. Dans le cas d'une géométrie sphérique, la solution de l'équation de Poisson linéarisée

$$\nabla^2 \phi_d - \frac{1}{\lambda_d^2} \phi_d = 0 \quad (1.23)$$

est donnée par[5]

$$\phi_d(r) = \phi_g(r_0) \frac{r_0}{r} \exp\left(-\frac{r-r_0}{\lambda_d}\right) \quad (1.24)$$

ϕ_d est dit potentiel de Debye- Hückel ou potentiel de Yukawa, $\phi_g(r_0)$ est le potentiel du grain à $r = r_0$ et λ_d la longueur de Debye effective du plasma poussiéreux donnée par[6] (incluant les effets de la fluctuation de la charge du grain)

$$\lambda_d = \frac{\lambda_D}{(1 + f_d \nu_2 / \nu_1)^{1/2}} \quad (1.25)$$

où

$$f_d = 4\pi n_{d0} \lambda_D^2 r_d \quad (1.26)$$

$$\nu_1 = (r_d / \sqrt{2\pi}) [(\omega_{pi} / \lambda_{Di}) + (\omega_{pe} / \lambda_{De}) \exp(e\phi_s / T_e)] \quad (1.27)$$

est la fréquence de relaxation de la charge du grain due aux variations du potentiel ϕ_s de la surface du grain

$$\nu_2 = (r_d / \sqrt{2\pi}) [(\omega_{pi} / \lambda_{Di})(1 - e\phi_s / T_i) + (\omega_{pe} / \lambda_{De}) \exp(e\phi_s / T_e)] \quad (1.28)$$

est la fréquence associée aux variations des courants de charge dues à l'existence du potentiel oscillant et ω_{pi} (ω_{pe}) représente la fréquence plasma ionique (électronique). Le terme $f_d \nu_2 / \nu_1$ est dû à la fluctuation de la charge électrique du grain de poussière[7]. Dans un plasma

poussiéreux, les grains de poussière peuvent être soit faiblement ou fortement corrélés. Ceci dépendra essentiellement de la valeur du rapport

$$\Gamma = \frac{(Z_{d0}e)^2}{dT_d} \exp(-k) \quad (1.29)$$

où T_d représente la température des grains de poussière et $k = d/\lambda_d$. Un plasma poussiéreux peut alors être considéré faiblement corrélé aussi longtemps que $\Gamma \leq 1$. Toutefois, pour $\Gamma \gg 1$ et $k \leq 1$, le plasma est dit fortement couplé et il devient alors possible d'obtenir des cristaux dits de Coulomb (créés dans les décharges dans les plasmas de laboratoire à basse températures, dans les expériences d'implosion par laser et dans les systèmes colloïdaux). Il arrive souvent que des arguments selon lesquels un plasma poussiéreux est similaire à un plasma à plusieurs espèces d'ions soient présentés. Cependant, cette assertion doit être réfutée car la présence, dans un plasma, de grains de poussière chargés et massifs produit de nouveaux phénomènes collectifs sur des échelles de temps et de longueur complètement différentes de celles du plasma habituel à deux composantes (électrons + ions). A titre d'exemple, citons l'onde acoustique poussiéreuse (DAW)[8] pour laquelle la masse du grain fournit l'inertie alors que les forces de rappel proviennent de la pression des électrons et des ions considérés, pour la circonstance, de masse négligeable. Ceci est dû au fait que la fréquence de l'onde DA soit extrêmement basse. Dans les décharges de laboratoire, la fréquence de la DAW varie typiquement de 10 à 20 Hz et des images vidéo du front d'onde de la DAW sont réalisables[9]. En outre, la dynamique de la fluctuation de la charge du grain[10],[7] ainsi que les interactions entre grains peuvent donner lieu à de nouveaux effets collectifs[11]. Les distributions de masse et de forme du grain peuvent également introduire de nouveaux effets[12]. De plus, les plasmas poussiéreux peuvent supporter une grande variété de structures non linéaires telles que les ondes de choc acoustiques poussiéreuses[13], les ondes de choc acoustiques ioniques poussiéreuses[14], les structures en vortex [15]..etc. Notons enfin que dans un plasma poussiéreux fortement couplé, il est possible d'avoir de nouvelles forces d'attraction (Wakefield[16], interaction dipolaire[17]) et des phénomènes de transition de phase relatifs aux cristaux poussiéreux[18]. Ces derniers, à l'inverse de ceux de l'état solide, peuvent avoir des propriétés inhabituelles: la charge du grain peut atteindre des milliers de fois la charge élémentaire et des énergies d'interaction de l'ordre de 900 eV.

1.2.1 Charge des grains de poussière

La charge d'un grain de poussière trouve son origine dans une variété de processus. Parmi ces derniers, nous citerons le bombardement de la surface du grain à l'aide des électrons et

des ions du plasma de base, l'émission photo-électronique sous l'effet d'un rayonnement ultraviolet, l'émission d'ions (ion sputtering) et la production d'électrons secondaires[19],[20]. Dans les plasmas de laboratoire de basses températures, la charge des particules de poussière est en général négative car la collecte des électrons par la surface du grain est dominante par rapport à celle des ions (les électrons étant plus mobiles). Le processus de charge dépend des sections efficaces de charge. Celles ci sont déterminées à partir du paramètre d'impact d'une particule approchant la surface d'un grain à une distance plus petite que les dimensions de cette particule. Leurs expressions, pour les électrons et les ions, sont données respectivement par

$$\sigma_e(q_d, v) = \pi r_d^2 \left(1 + \frac{2eq_d}{r_d m_e v^2} \right) \quad (1.30)$$

$$\sigma_i(q_d, v) = \pi r_d^2 \left(1 - \frac{2eq_d}{r_d m_i v^2} \right) \quad (1.31)$$

pour $v^2 > 2e|q_d|/r_d m_e = v_*^2$ alors que pour $v^2 < v_*^2$, $\sigma_e(q_d, v)$ est simplement nulle. Ici $v = |\mathbf{v}|$ et q_d est la charge du grain de poussière. Les électrons doivent avoir une vitesse minimale v_* pour pouvoir atteindre la surface du grain (vaincre la barrière de potentiel). L'équation d'évolution de la charge du grain de poussière est alors donnée par

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_d \cdot \nabla \right) q_d = I_e + I_i = I_d(q_d) \quad (1.32)$$

où

$$I_d(q_d) = \sum_{s=e,i} q_s \int v \sigma_s(q_d, v) f_s(\mathbf{v}) d^3 \mathbf{v} \quad (1.33)$$

est le courant plasma de charge, \mathbf{v} est le vecteur vitesse du grain, $q_{e(i)} = -e(e)$ et $f_s(\mathbf{v})$ représente la fonction de distribution des vitesses de la particule d'espèce s . Lorsque le plasma est en équilibre thermodynamique, la fonction de distribution des vitesses f_s peut être approximée par la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann f_{s0} donnée par

$$f_{s0} = n_{s0} \left(\frac{1}{2\pi v_{ts}^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{1}{2v_{ts}^2} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2 \right) \quad (1.34)$$

où \mathbf{v}_0 représente la vitesse de dérive entre le plasma de base et les grains de poussière, n_{s0} la densité à l'équilibre des particules d'espèce s et $v_{ts} = (T_s/m_s)^{1/2}$ leur vitesse thermique correspondante. En supposant les vitesses de dérive des électrons et des ions beaucoup plus petites que leurs vitesses thermiques respectives, les expressions des courants électronique et ionique à l'équilibre sont données par[5]

$$I_{e0} = -\pi r_d^2 e \left(\frac{8T_e}{\pi m_e} \right)^{1/2} n_{e0} \exp \left(\frac{eq_{d0}}{r_d T_e} \right) \quad (1.35)$$

$$I_{i0} = \pi r_d^2 e \left(\frac{8T_i}{\pi m_i} \right)^{1/2} n_{i0} \left(1 - \frac{eqd_0}{r_d T_i} \right) \quad (1.36)$$

1.2.2 Modes électrostatiques de basses fréquences dans un plasma poussiéreux

Un grain de poussière immergé dans un plasma acquiert une charge électrique qui peut équivaloir plusieurs milliers de fois la charge élémentaire. Sa présence dans le plasma peut altérer et modifier les modes normaux habituels de ce dernier et donner naissance à de nouveaux modes. Dans cette section, nous rapporterons de manière succincte l'essentiel des travaux d'un groupe de chercheurs de l'université de l'Iowa[21] sur les modes susceptibles de se propager dans un tel plasma. On se limitera aux deux modes acoustiques qui ont fait l'objet d'une intense investigation: le mode acoustique poussiéreux (DA, un nouveau mode identifié au début des années 90) et le mode acoustique ionique poussiéreux (DIA, mode acoustique ionique habituel modifié par la présence dans le plasma de grains de poussière). La relation de dispersion linéaire des ondes électrostatiques de basses fréquences dans un plasma poussiéreux magnétisé a été obtenue à l'aide du modèle fluide que D'Angelo a introduit au début des années 90[22]. Le terme "basses fréquences" désigne des fréquences de l'ordre de, ou plus petites que f_{ci} (la gyrofréquence) et f_{pi} (la fréquence plasma ionique).

Mode acoustique ionique poussiéreux (DIA) ($\omega/k \gg \sqrt{T_d/m_d}$)

C'est le mode acoustique ionique habituel avec, cependant, quelques modifications introduites par la présence de grains de poussière chargés négativement[22],[23]. Les grains de poussière, dans ce cas de figure, sont immobiles ($m_d \rightarrow \infty$) et jouent le rôle d'un fond neutralisant (participent à la quasi-neutralité du plasma). Sa relation de dispersion est alors donnée par

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \left[\frac{T_i}{m_i} + \frac{T_e}{m_i(1 - \varepsilon Z_d)} \right]^{1/2} = C_{s,d} \quad (1.37)$$

$C_{s,d}$ est la vitesse acoustique ionique modifiée. Notons que la vitesse de phase de l'onde v_p augmente à mesure que la concentration relative des grains $\varepsilon = n_{d0}/n_{i0}$ augmente. Pour s'en rendre compte, il suffit de linéariser l'équation de mouvement des ions et de l'écrire sous la forme

$$m_i n_{i0} \frac{\partial v_{i1}}{\partial t} = - \left(T_i + \frac{T_e}{1 - \varepsilon Z_d} \right) \frac{\partial n_{i1}}{\partial x} \quad (1.38)$$

où la relation de Boltzmann a été utilisée pour exprimer le champ électrique de l'onde E_1 en termes de $\frac{\partial n_{e1}}{\partial t}$. Le terme $m_i n_{i0} \frac{\partial v_{i1}}{\partial t}$ est la force par unité de volume agissant sur un élément fluide ionique en présence de la perturbation de l'onde. Le terme de droite est la force acoustique de rappel par unité de volume. Cette dernière augmente à mesure que la valeur de ε augmente. Un accroissement de la force de rappel donne alors lieu à une augmentation de la vitesse de phase de l'onde. Physiquement, comme le nombre d'électrons collectés par la surface des grains va en augmentant, il y en aura de moins en moins de "disponibles" pour contrecarrer et neutraliser les perturbations de la charge d'espace ionique. D'ailleurs, le terme $T_e/(1 - \varepsilon Z_d)$, comme relevé par certains auteurs, peut être perçu comme étant une température électronique effective.

Mode acoustique poussiéreux (DA) ($\omega/k \ll \sqrt{T_i/m_i}$)

C'est un nouveau mode acoustique de très basse fréquence. Par conséquent, la dynamique du grain de poussière doit être prise en compte et les inerties de l'électron et de l'ion peuvent alors être négligées. Sa relation de dispersion est alors donnée par [8]

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \left[\frac{T_d}{m_d} + \varepsilon Z_d^2 \frac{T_i}{m_d} + \frac{1}{1 + (1 - \varepsilon Z_d) T_i / T_e} \right]^{1/2} = C_{DA} \quad (1.39)$$

C_{DA} représente la vitesse acoustique poussiéreuse. Pour l'entretien de ce mode, l'inertie est fournie par les grains de poussière alors que la force de rappel est due aux pressions électronique et ionique. Un tel résultat peut être aisément obtenu en linéarisant l'équation de mouvement du grain (avec $T_d = 0$).

$$m_d n_{d0} \frac{\partial v_{d1}}{\partial t} = - \left(T_e \frac{\partial n_{e1}}{\partial x} + T_i \frac{\partial n_{i1}}{\partial x} \right) \quad (1.40)$$

En résumé, les deux relations de dispersion précédentes peuvent être réécrites sous la forme suivante

Mode DIA

$$\omega^2 = k^2 C_{s,d}^2 \quad (1.41)$$

Mode DA

$$\omega^2 = k^2 C_{DA}^2 \quad (1.42)$$

1.2.3 Equation de Korteweg de Vries

La non linéarité et la dispersion sont les propriétés caractéristiques les plus importantes d'un plasma. C'est pourquoi, nous allons, dans ce qui suit, discuter une équation différentielle

partielle (EDP) non linéaire classique, connue sous le nom d'équation de Korteweg de Vries (KdV). Celle ci apparaît dans une variété de situations physiques et est donnée par[24]

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + aU \frac{\partial U}{\partial \xi} + b \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0 \quad (1.43)$$

où ξ et τ sont des variables indépendantes et a et b des constantes réelles non nulles. U est une fonction quelconque qui peut représenter, entre autres, une densité numérique, un potentiel électrostatique ou une vitesse de propagation. L'équation (1.43) est à la fois non linéaire et dispersive: le terme convectif $U \frac{\partial U}{\partial \xi}$ traduit la non linéarité tandis que $\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}$ reflète la dispersion. Historiquement, l'équation (1.43) fut établie par Korteweg et de Vries en relation avec un problème d'ondes de surface dans un canal d'eau à profondeur finie. Plus tard, Gardner et Morikawa[25] établirent une équation analogue à partir d'un modèle hydro-magnétique de plasma froid pour décrire le comportement de perturbations se propageant perpendiculairement à un champ magnétique avec une vitesse proche de celle d'Alfven. D'autres auteurs montrèrent que (1.43) pouvait aussi bien décrire la propagation unidimensionnelle d'ondes acoustiques dans les cristaux que fournir une description faiblement non linéaire de perturbations sonores se propageant à une vitesse voisine de celle du son[26]. Et c'est à partir de là et dans un effort de généralisation que Su et Gardner[27] montrèrent que (1.43) pouvait s'appliquer à une large classe de systèmes dispersifs et faiblement non linéaires à l'instar de l'équation de Burgers dans les milieux dissipatifs et faiblement non linéaires. L'équation (1.43) peut être réécrite sous la forme généralement rencontrée dans la littérature

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0 \quad (1.44)$$

moyennant les changements de variables $\xi \rightarrow \xi b^{1/3}$ et $U \rightarrow U/ab^{-1/3}$. Notons que pour des ondes acoustiques ioniques se propageant avec une vitesse proche de celle du son, le terme $U \frac{\partial U}{\partial \xi}$ de l'équation (1.44) provient du terme non linéaire convectif $\mathbf{V}_i \cdot \nabla V_i$ de l'équation de mouvement des ions. De plus, le terme linéaire de troisième ordre $\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}$ est dû au fait que dans un repère se déplaçant avec la vitesse du son, les corrections de la relation de dispersion sont proportionnelles à k^3 , où k représente le vecteur d'onde de la perturbation acoustique. Remarquons que si le terme dispersif $\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}$ est omis dans l'équation (1.44), alors $\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0$ admettra comme solution

$$U(\xi, \tau) = U(\xi - U(\xi, \tau), 0) \quad (1.45)$$

Celle ci indique que toute perturbation initiale se déformera de manière continue dans les régions où $\partial U(\xi, 0)/\partial \xi < 0$ et éventuellement deviendra physiquement inacceptable. En réalité, le terme dispersif de l'équation (1.44) limite et prévient cette déformation illimitée. Avant d'aller plus loin, il convient de discuter les solutions solitaires de l'équation (1.44). A ce propos, moyennant le changement de variable $\chi = \xi - c\tau$ où c est une constante, l'équation (1.44) peut être deux fois intégrée pour obtenir

$$\left[\frac{dU(\chi)}{d\chi} \right]^2 = \frac{1}{3} U^2(\chi) [3c - U(\chi)] \quad (1.46)$$

où les conditions aux limites $U(\chi) \rightarrow 0$, $dU(\chi)/d\chi \rightarrow 0$ et $d^2U(\chi)/d\chi^2 \rightarrow 0$ lorsque $|\chi| \rightarrow 0$ ont été utilisées. L'équation (1.46) peut alors être intégrée pour donner

$$U(\xi - c\tau) = 3c \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{c/2}(\xi - c\tau) \right) \quad (1.47)$$

Dans l'équation (1.47), la hauteur, la largeur et la vitesse du pulse sont proportionnelles à c , $c^{-1/2}$ et c respectivement. De nombreuses études numériques[28],[29] de l'équation (1.44) indiquent que les solutions en ondes solitaires (soliton) données par (1.47) jouent un rôle intrinsèque dans l'évolution temporelle du système pour une variété de conditions initiales. Pour des données initiales localisées, un nombre fini de solitons émergent avec différentes hauteurs $3c_1, 3c_2 \dots$ etc., chaque soliton se propageant de la gauche vers la droite. Ces solitons interagissent en préservant leurs identités. Lorsque $\tau \rightarrow \infty$, les solitons se réarrangent dans l'ordre des hauteurs croissantes (le plus grand soliton se trouvant alors à l'extrême droite). L'investigation expérimentale des propriétés de la solution en onde solitaire de l'équation (1.44) a été réalisée par Ikezi *et al.*[30],[31]. Ils ont alors rapporté l'existence d'un désaccord entre l'observation expérimentale et la description théorique basée sur une image simplifiée du soliton de Korteweg de Vries. Plus tard, certains auteurs ont tenté de réduire cet écart en prospectant l'effet d'une température ionique finie[32] et l'effet des grandes amplitudes[33]. Un soliton résulte de l'équilibre de deux effets : la non linéarité et la dispersion[34]. Ces derniers sont donc les ingrédients nécessaires pour l'obtention de solutions en onde solitaire dans le cas d'une onde non linéaire. Cependant, quoique la plupart des ondes dans les plasmas présentent de la dispersion et que le plasma lui-même se comporte comme un milieu non linéaire, seulement un nombre restreint d'ondes est connu pour admettre des solutions en soliton. Les ondes acoustiques ioniques exhibent de telles solutions localisées et ont été largement investies tant sur le plan théorique qu'expérimentale. D'ailleurs la redécouverte de l'équation de Korteweg de Vries pour ce type d'onde dans les plasmas a été sans nul doute le premier pas pour démêler quelque peu le domaine très ardu des phénomènes non linéaires[35].

1.3 Physique des plasmas quantiques

1.3.1 Propriétés des plasmas quantiques

Dans les plasmas quantiques, la distribution statistique de Fermi-Dirac est communément utilisée plutôt que la distribution de Maxwell-Boltzmann dans les plasmas classiques. Les échelles caractéristiques quantiques à savoir (le temps, la longueur, la vitesse thermique) des particules chargées sont tout à fait différentes de celle des plasmas classiques. Un gaz de Fermi unidimensionnel à température nulle obéit à l'équation d'état[36]-[38] de la forme

$$p_s = \frac{m_s v_{Fs}^2 n_s^3}{3n_{s0}^2} \quad (1.48)$$

où m_s est la masse de la particule d'espèce s (e pour les électrons, i pour les ions et d pour les grains de poussière). La vitesse de Fermi est définie par

$$v_{Fs} = \left(\frac{2E_{Fs}}{m_s} \right)^{1/2} = \frac{\hbar}{m_s} (3\pi^2 n_{s0})^{1/3} \quad (1.49)$$

où E_{Fs} représente l'énergie de Fermi et n_s la densité des particules d'espèce s . L'indice "0" désigne des grandeurs non perturbées. L'équation (1.48) est généralement utilisée dans l'étude des métaux et des nano-particules où la température de Fermi des électrons est beaucoup plus haute que la température ambiante. En raison des grandes valeurs de la densité dans les plasmas quantiques, la fréquence plasma $\omega_{ps} = \left(\frac{4\pi n_{s0} e^2}{m_s} \right)^{1/2}$ et la longueur de Fermi

$$\lambda_{Fs} = \frac{v_{Fs}}{\omega_{ps}} \quad (1.50)$$

sont nettement différentes de leurs analogues dans les plasmas classiques. Les effets quantiques commencent à se manifester lorsque la distance moyenne entre particules $d = n_{s0}^{-1/3}$ devient comparable à la longueur d'onde thermique de De Broglie associée

$$\lambda_B = \frac{\hbar}{m_s v_{th}} \quad (1.51)$$

c'est à dire à chaque fois que l'approximation $n_{s0}^{1/3} \lambda_B \geq 1$ est valable. En régime classique ($n_{s0} \lambda_B^3 \leq 1$), la longueur d'onde de De Broglie est petite et insignifiante. Par conséquent, il n'y a aucun recouvrement des fonctions d'onde et aucune interférence quantique. La température de Fermi T_{Fs} peut être exprimée en terme de densité à l'équilibre comme

$$k_B T_{Fs} = E_{Fs} = \frac{\hbar^2}{2m_s} (3\pi^2 n_{s0})^{2/3} \quad (1.52)$$

où \hbar représente la constante de Planck réduite et k_B la constante de Boltzmann. Notons que lorsque la température T d'une espèce de particules s'approche de T_{Fs} , la statistique appropriée pour décrire de telles particules est de type Fermi-Dirac (rappelons que dans les plasmas classiques, la statistique de Maxwell-Boltzmann est utilisée). La transition entre les deux régimes, classique et quantique, dépend du paramètre

$$\chi = \frac{T_{Fs}}{T} = \frac{1}{2} (3\pi^2)^{2/3} (n_{s0}\lambda_B^3)^{2/3} \quad (1.53)$$

Ainsi, les effets quantiques deviennent importants lorsque $\chi \geq 1$. Le paramètre de couplage quantique qui est défini comme étant le rapport entre l'énergie d'interaction (E_{int}) et l'énergie cinétique moyenne ($E_{cin} = E_{Fs}$) s'écrit sous la forme

$$g_Q = \frac{E_{int}}{E_{Fs}} = \frac{2m_s e^2 n_{s0}^{1/3}}{\varepsilon_0 \hbar^2 (3\pi^2 n_{s0})^{2/3}} \sim \left(\frac{\hbar\omega_{ps}}{E_{Fs}} \right)^2 \quad (1.54)$$

En utilisant les relations (1.49) et (1.50), on peut réécrire l'expression (1.54) sous la forme

$$g_Q = \left(\frac{1}{n_{s0}\lambda_{Fs}^3} \right)^{2/3} \quad (1.55)$$

L'avantage d'employer la définition (1.55) est évident. En réécrivant le paramètre de couplage classique en termes de λ_D , nous obtenons

$$g_C = \frac{E_{int}}{E_{cin}} = \frac{e^2 n_{s0}^{1/3}}{\varepsilon_0 k_B T} = \left(\frac{1}{n_{s0}\lambda_D^3} \right)^{2/3} \quad (1.56)$$

Ceci prouve que λ_F est l'analogie de λ_D . Les équations (1.55) et (1.56) sont équivalentes. Cependant, la relation (1.54) ne possède pas d'analogie classique et décrit le paramètre de couplage quantique comme étant le rapport entre l'énergie d'un plasmon sur l'énergie de Fermi.

1.3.2 Etablissement des équations fluides

La modélisation des plasmas quantiques est basée sur les approches mathématiques bien connues de Schrödinger-Poisson et de Wigner-Poisson. Celles-ci ont été largement utilisées pour étudier le comportement hydrodynamique et statistique des particules de plasma à l'échelle quantique. Ces approches sont l'analogie quantique des modèles fluide et cinétique en physique des plasmas classiques. Dans ce contexte, Manfredi[36],[39] a étudié ces approches dans un plasma quantique, électrostatique, non collisionnel et non magnétisé.

Système Schrödinger-Poisson

A l'échelle quantique, les particules sont décrites par des fonctions d'ondes. D'après[39], ces particules sont décrites par N fonctions d'ondes $\Psi_\alpha(x, t)$ obéissent à N équations indépendantes de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_\alpha}{\partial x^2} - e\phi \Psi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (1.57)$$

couplées à l'équation de Poisson

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\varepsilon_0} \left(\sum_{\alpha=1}^N p_\alpha |\Psi_\alpha|^2 - n_0 \right) \quad (1.58)$$

ϕ représente le potentiel électrostatique et e la charge élémentaire. Dawson[40] a supposé que la fonction de distribution $f(x, v, t)$ peut être représentée comme la somme de N faisceaux (streams) caractérisées par des probabilités p_α , des densités n_α et des vitesses u_α

$$f(x, v, t) = \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha n_\alpha(x, t) \delta(v - u_\alpha(x, t)) \quad (1.59)$$

δ représente la fonction de Dirac. Cette fonction de distribution doit satisfaire l'équation de Vlasov pour un plasma non magnétisé[41]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{q_\alpha}{m} \nabla \phi \cdot \nabla_v f = 0 \quad (1.60)$$

On introduit alors l'amplitude réelle $A_\alpha^2 = n_\alpha = |\Psi_\alpha|^2$ et la phase réelle S_α ($\nabla S_\alpha = m \mathbf{u}_\alpha$) associées à la fonction d'onde qui s'écrit, par conséquent, comme suit[42]

$$\Psi_\alpha = A_\alpha \exp\left(\frac{iS_\alpha}{\hbar}\right) \quad (1.61)$$

En substituant la relation (1.61) dans l'équation (1.57) et en séparant les parties réelle et imaginaire, nous obtenons

$$\frac{\partial A_\alpha^2}{\partial t} + \frac{1}{m} \nabla \cdot (A_\alpha^2 \nabla S_\alpha) = 0 \quad (1.62)$$

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \nabla S_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{m^2} (\nabla S_\alpha \cdot \nabla) \nabla S_\alpha = \frac{e}{m} \nabla \phi + \frac{\hbar^2}{2m^2} \nabla \left[\frac{\nabla^2 S_\alpha}{S_\alpha} \right] \quad (1.63)$$

En utilisant l'expression de la vitesse $\mathbf{u}_\alpha = 1/m \nabla S_\alpha$ dans les deux équations précédentes (1.62) et (1.63), nous déduisons le système d'équations suivant

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0 \quad (1.64)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha = \frac{e}{m} \nabla \phi + \frac{\hbar^2}{2m^2} \nabla \left[\frac{\nabla^2 \sqrt{n_\alpha}}{\sqrt{n_\alpha}} \right] \quad (1.65)$$

Ces deux équations représentent le premier modèle fluide pour les plasmas quantiques non magnétisés. Comme nous pouvons le constater, les effets quantiques sont décrits par le dernier terme de l'équation de mouvement (1.65). Ce terme représente le potentiel de Böhm dont l'expression est donnée par

$$\varphi_B = - \left(\hbar^2 / 2m\sqrt{n_\alpha} \right) \nabla^2 \sqrt{n_\alpha} \quad (1.66)$$

La densité et la vitesse macroscopiques sont alors définies par

$$n = \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha n_\alpha \quad (1.67)$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \quad (1.68)$$

En multipliant les équations (1.64) et (1.65) par p_α et en utilisant les relations (1.67) et (1.68), nous obtenons les équations de base du modèle fluide, dit modèle hydrodynamique quantique (QHD), suivantes

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0 \quad (1.69)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{e}{m} \nabla \phi - \frac{\nabla P}{mn} + \frac{\hbar^2}{2m^2} \nabla \left[\frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right] \quad (1.70)$$

couplées à l'équation de Poisson

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\varepsilon_0} (n - n_0) \quad (1.71)$$

2

Ondes acoustiques poussiéreuses associées à un plasma quantique

2.1 Présentation physique du problème

La présence de grains de poussière massifs et hautement chargés dans un plasma composé d'électrons et d'ions peut modifier les propriétés des ondes susceptibles de se propager dans un tel plasma. Ces modifications peuvent être attribuées aux nouvelles échelles spatio-temporelles introduites par les grains de poussière ainsi qu'à la déviation par rapport à la condition de quasi-neutralité de la charge conventionnelle d'un plasma à deux composants. Les oscillations collectives d'un plasma poussiéreux ont été intensément étudiées aussi bien théoriquement qu'expérimentalement durant les ces dernières années[43],[44]. Shukla et Silin[23] ont été les premiers à avoir étudié les ondes acoustiques ioniques poussiéreuses (DIAW) plus tard observées dans les expériences de laboratoires[45],[21]. D'un autre côté, de nouveaux modes associés uniquement à la dynamique des grains de poussière peuvent apparaître. Rao *et al.*[8] ont été les premiers à avoir proposé de prendre en considération la dynamique des grains de poussière dans un plasma dont les ions et les électrons sont distribués selon la loi de Maxwell- Boltzmann. Ils ont alors prédit l'existence d'un nouveau mode acoustique (baptisé depuis mode acoustique poussiéreux, DAW) de faible vitesse de phase (en comparaison avec les vitesses thermiques des ions et des électrons) et de très faible fréquence ($\omega \sim$ quelques dizaines de Hertz). Plus tard, un groupe de chercheurs de l'université de l'Iowa[9] ont entrepris une série d'expériences et ont pu confirmer l'existence du nouveau mode acoustique poussiéreux. La théorie linéaire joue un rôle important dans l'étude des ondes et des instabilités quand les amplitudes des ondes sont

petites. Cependant, quand ces amplitudes deviennent suffisamment grandes, on ne peut plus négliger la non linéarité. Cette dernière contribue à la localisation des ondes et donne lieu à différents types de structures non linéaires telles les structures solitaires, les ondes de choc, les structures en vortex, etc...Récemment, de nouvelles recherches ont porté sur les modes linéaires et non linéaires susceptibles de se propager dans un plasma quantique[46]-[47]. Haas et ses collaborateurs[48] ont établi la relation de dispersion de l'instabilité à deux courants et ont montré l'existence d'un nouveau mode quantique dans les plasmas en utilisant le système non linéaire de Schrödinger-Poisson. Plus tard, les propriétés linéaires et non linéaires de l'onde acoustique ionique ont été également étudiées par Haas et ses collaborateurs en utilisant un modèle hydrodynamique quantique (QHD) pour un plasma quantique unidimensionnel[38]. Le modèle QHD a d'ailleurs été reformulé par Haas[49] pour inclure l'effet d'un champ magnétique. Rappelons que les effets quantiques trouvent toute leur importance dans les dispositifs microélectroniques[50], dans les systèmes astrophysiques denses[51] et dans l'interaction laser-plasma[52]. Récemment, Shukla et Ali[2] ont étudié l'onde acoustique poussiéreuse dans un plasma quantique en faisant intervenir la dynamique des grains de poussière et en négligeant l'inertie des ions et des électrons. Ils ont alors montré que les effets quantiques peuvent modifier les propriétés de l'onde acoustique poussiéreuse.

2.2 Ondes acoustiques poussiéreuses dans un plasma contenant des ions et des électrons quantiques

2.2.1 Equations de base du modèle de Shukla et Ali

Considérons un plasma poussiéreux quantique ultrafroid non collisionnel et non magnétisé composé d'ions quantiques, d'électrons quantiques et de grains de poussière quantiques. Les oscillations acoustiques poussiéreuses (DAW) de faible vitesse de phase V_p ($V_{Fd} \ll V_p \ll V_{Fe}, V_{Fi}$ où V_{Fd}, V_{Fi} et V_{Fe} représentent, respectivement, la vitesse de Fermi des grains de poussière, des ions et des électrons) associées à un tel plasma, peuvent être décrites par les équations de base du modèle fluide suivantes

$$e \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{n_e} \frac{\partial p_e}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \sqrt{n_e} / \partial x^2}{\sqrt{n_e}} \right] = 0 \quad (2.1)$$

$$-e \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{n_i} \frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \sqrt{n_i} / \partial x^2}{\sqrt{n_i}} \right] = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_d}{\partial t} + u_d \frac{\partial u_d}{\partial x} = \frac{Z_d e}{m_d} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{m_d n_d} \frac{\partial p_d}{\partial x} + \frac{\hbar^2}{2m_d^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \sqrt{n_d} / \partial x^2}{\sqrt{n_d}} \right] \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial (n_d u_d)}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 4\pi e (n_e + Z_d n_d - n_i) \quad (2.5)$$

Les trois composantes de ce plasma sont supposées obéir à la loi de pression suivante[36]-[38].

$$P_j = \frac{m_j V_{Fj}^2}{3n_{j0}^2} n_j^3 \quad (2.6)$$

où $j = i, e, d$ indique, respectivement, les ions, les électrons et les grains de poussière. m_j représente la masse, $V_{Fj} = \sqrt{2K_B T_{Fj} / m_j}$ la vitesse de Fermi, K_B la constante de Boltzmann, T_{Fj} la température de Fermi et n_j la densité numérique de l'espèce j . A l'équilibre, $n_{i0} = Z_d n_{d0} + n_{e0}$ où n_{i0} , n_{d0} et n_{e0} désignent, respectivement, les densités non perturbées des ions, des grains de poussière et des électrons. ϕ est le potentiel électrostatique et u_d la vitesse fluide des grains de poussière. Les équations (2.1)-(2.5) constituent le modèle, dit QHD, d'un plasma poussiéreux quantiques à trois composantes. Les équations (2.1)-(2.5) peuvent être réécrites sous la forme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} - \sigma N_e \frac{\partial N_e}{\partial X} + \frac{H_e^2}{2} \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\partial^2 \sqrt{N_e} / \partial X^2}{\sqrt{N_e}} \right] = 0 \quad (2.7)$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial X} - N_i \frac{\partial N_i}{\partial X} + \frac{H_i^2}{2} \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\partial^2 \sqrt{N_i} / \partial X^2}{\sqrt{N_i}} \right] = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial U_d}{\partial T} + U_d \frac{\partial U_d}{\partial X} = \frac{\partial \Phi}{\partial X} - \delta N_d \frac{\partial N_d}{\partial X} + \frac{H_d^2}{2} \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\partial^2 \sqrt{N_d} / \partial X^2}{\sqrt{N_d}} \right] \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial N_d}{\partial T} + \frac{\partial (N_d U_d)}{\partial X} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = N_d + \mu_e N_e - \mu_i N_i \quad (2.11)$$

$H_e = \sqrt{(Z_d \hbar^2 \omega_{pd}^2) / m_e m_d C_d^4}$, $H_i = \sqrt{(Z_d \hbar^2 \omega_{pd}^2) / m_i m_d C_d^4}$ et $H_d = \sqrt{(\hbar^2 \omega_{pd}^2) / m_d^2 C_d^4}$ représentent les paramètres quantiques adimensionnels des électrons, des ions et des grains de poussière, $\sigma = T_{Fe} / T_{Fi}$ (rapport des température de Fermi des électrons et des ions), $\delta = T_{Fd} / Z_d T_{Fi}$, $\mu_e = n_{e0} / Z_d n_{d0} = 1 / (\mu - 1)$ et $\mu_i = n_{i0} / Z_d n_{d0} = \mu / (\mu - 1)$, où $\mu = n_{i0} / n_{e0}$. Les densités numériques N_j , la vitesse fluide des grains de poussière U_d , le potentiel électrostatique Φ , le temps T et la variable X sont normalisées, respectivement, par n_{j0} , $C_d =$

$(2Z_d K_B T_{Fi}/m_d)^{1/2}$, $2K_B T_{Fi}/e$, $\omega_{pd}^{-1} = (m_d/4\pi Z_d^2 n_{d0} e^2)^{1/2}$ et $\lambda_D = \sqrt{(2K_B T_{Fi})/4\pi Z_d e^2 n_{d0}}$ la longueur de Debye. En intégrant une fois les équations (2.7) et (2.8) et en utilisant les conditions aux limites $N_{i,e} = 1$ et $\Phi = 0$, lorsque $X \rightarrow +\infty$, nous obtenons

$$\Phi = -\frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma N_e^2}{2} - \frac{H_e^2}{2} \left[\frac{\partial^2 \sqrt{N_e}/\partial X^2}{\sqrt{N_e}} \right] \quad (2.12)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} - \frac{N_i^2}{2} + \frac{H_i^2}{2} \left[\frac{\partial^2 \sqrt{N_i}/\partial X^2}{\sqrt{N_i}} \right] \quad (2.13)$$

2.2.2 Cas des amplitudes faibles mais finies

Intéressons nous à la dynamique des ondes acoustiques poussiéreuses solitaires d'amplitude faible mais finie. Pour cela, nous établissons à partir des équations (2.9)-(2.13) l'équation de Korteweg-de Vries (K- dV) en utilisant la technique de la perturbation réductive de Washimi et Taniuti[26] ainsi que les variables qu'ils ont introduites $\xi = \varepsilon^{1/2}(X - v_0 T)$ et $\tau = \varepsilon^{3/2} T$, où ε est un paramètre de mesure de la faiblesse de l'amplitude ou de la dispersion de l'onde et v_0 la vitesse du soliton normalisée par C_d . Les variables U_d , N_d , Φ , N_e et N_i sont alors développées en séries de puissances de ε autour de leurs valeurs d'équilibres.

$$\Phi = \varepsilon \Phi^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi^{(2)} + \dots \quad (2.14)$$

$$U_d = \varepsilon U_d^{(1)} + \varepsilon^2 U_d^{(2)} + \dots \quad (2.15)$$

$$N_d = 1 + \varepsilon N_d^{(1)} + \varepsilon^2 N_d^{(2)} + \dots \quad (2.16)$$

$$N_i = 1 + \varepsilon N_i^{(1)} + \varepsilon^2 N_i^{(2)} + \dots \quad (2.17)$$

$$N_e = 1 + \varepsilon N_e^{(1)} + \varepsilon^2 N_e^{(2)} + \dots \quad (2.18)$$

A partir des deux équations (2.12), (2.13), nous obtenons

$$\Phi = (\sigma N_e^{(1)})\varepsilon + \left(\frac{\sigma}{2} (N_e^{(1)})^2 + \sigma N_e^{(2)} - \frac{H_e^2}{4} \frac{\partial^2 N_e^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) \varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3) \quad (2.19)$$

$$\Phi = (-N_i^{(1)})\varepsilon + \left(\frac{H_i^2}{4} \frac{\partial^2 N_i^{(1)}}{\partial \xi^2} - N_i^{(2)} - \frac{(N_i^{(1)})^2}{2} \right) \varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3) \quad (2.20)$$

Les équations (2.9), (2.10) et (2.11) deviennent alors

$$\left[-v_0 \frac{\partial U_d^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \xi} + \delta \frac{\partial N_d^{(1)}}{\partial \xi} \right] \varepsilon + \left[-v_0 \frac{\partial U_d^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_d^{(1)}}{\partial \tau} + U_d^{(1)} \frac{\partial U_d^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \xi} + \delta \frac{\partial N_d^{(2)}}{\partial \xi} + \delta N_d^{(1)} \frac{\partial N_d^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{H_d^2}{4} \frac{\partial^3 N_d^{(1)}}{\partial \xi^3} \right] \varepsilon^2 = 0 \quad (2.21)$$

$$\left[\frac{\partial U_d^{(1)}}{\partial \xi} - v_0 \frac{\partial N_d^{(1)}}{\partial \xi} \right] \varepsilon + \left[\frac{\partial N_d^{(1)}}{\partial \tau} - v_0 \frac{\partial N_d^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_d^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial (N_d^{(1)} U_d^{(1)})}{\partial \xi} \right] \varepsilon^2 = 0 \quad (2.22)$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \xi^2} = (1 + \mu_e - \mu_i) + \varepsilon \left(N_d^{(1)} + \mu_e N_e^{(1)} - \mu_i N_i^{(1)} \right) + \varepsilon^2 \left(N_d^{(2)} + \mu_e N_e^{(2)} - \mu_i N_i^{(2)} \right) \quad (2.23)$$

A l'ordre le plus faible en ε , le système d'équations (2.19)-(2.23) donnent

$$\mu_i - \mu_e = 1 \quad (2.24)$$

En définissant une nouvelle fonction $U(\xi, \tau) = \Phi^{(1)}$, nous obtenons, à l'ordre 1, les expressions suivantes

$$\Phi^{(1)} = \sigma N_e^{(1)} \implies N_e^{(1)} = \frac{1}{\sigma} U \quad (2.25)$$

$$\Phi^{(1)} = -N_i^{(1)} = U \quad (2.26)$$

$$-v_0 \frac{\partial U_d^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \xi} + \delta \frac{\partial N_d^{(1)}}{\partial \xi} = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial U_d^{(1)}}{\partial \xi} - v_0 \frac{\partial N_d^{(1)}}{\partial \xi} = 0 \quad (2.28)$$

$$N_d^{(1)} + \mu_e N_e^{(1)} - \mu_i N_i^{(1)} = 0 \quad (2.29)$$

à partir desquelles nous déduisons la vitesse du soliton

$$v_0 = \sqrt{\delta + \frac{1}{(\mu_e/\sigma + \mu_i)}} \quad (2.30)$$

A l'ordre 2, en remplaçant $N_d^{(1)}$ et $U_d^{(1)}$ par les expressions suivantes $N_d^{(1)} = U/(\delta - v_0^2)$, $U_d^{(1)} = (\delta/v_0(\delta - v_0^2) - 1/v_0)U$, nous obtenons le système d'équations suivant

$$\left(\frac{\delta}{v_0(\delta - v_0^2)} - \frac{1}{v_0}\right) \frac{\partial U}{\partial \tau} + \left[\frac{\delta}{(\delta - v_0^2)^2} + \left(\frac{\delta}{v_0(\delta - v_0^2)} - \frac{1}{v_0}\right)^2\right] U \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{H_d^2}{4(\delta - v_0^2)} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} - \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \xi} + \delta \frac{\partial N_d^{(2)}}{\partial \xi} - v_0 \frac{\partial U_d^{(2)}}{\partial \xi} = 0 \quad (2.31)$$

$$\left(\frac{1}{\delta - v_0^2}\right) \frac{\partial U}{\partial \tau} + \left(\frac{2\delta}{v_0(\delta - v_0^2)^2} - \frac{2}{v_0(\delta - v_0^2)}\right) U \frac{\partial U}{\partial \xi} - v_0 \frac{\partial N_d^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_d^{(2)}}{\partial \xi} = 0 \quad (2.32)$$

$$\left(\mu_i - \frac{\mu_e}{\sigma^2}\right) U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \left(\frac{\mu_e H_e^2}{4\sigma^2} + \frac{\mu_i H_i^2}{4} - 1\right) \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \frac{\partial N_d^{(2)}}{\partial \xi} + \left(\frac{\mu_e}{\sigma} + \mu_i\right) \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \xi} = 0 \quad (2.33)$$

En utilisant

$$\frac{\partial N_e^{(2)}}{\partial \xi} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\sigma^2} \left(U \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{H_e^2}{4} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right) \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial N_i^{(2)}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \xi} - U \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{H_i^2}{4} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \quad (2.35)$$

et en éliminant $\Phi^{(2)}$ des équations (2.31)- (2.33), nous obtenons l'équation de type Korteweg-de Vries suivante

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + AU \frac{\partial U}{\partial \xi} + B \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0 \quad (2.36)$$

où les constantes A et B sont données par

$$A = \frac{v_0 [(v_0^2 - \delta)(\mu_e/\sigma^2 - \mu_i) - (2/(v_0^2 - \delta))(1 + \delta/(v_0^2 - \delta))]}{1 + \delta/(v_0^2 - \delta) + v_0^2/(v_0^2 - \delta)} - \frac{v_0 [(\delta/(v_0^2 - \delta)^2) - 1/v_0^2 (1 + \delta/(v_0^2 - \delta))^2]}{1 + \delta/(v_0^2 - \delta) + v_0^2/(v_0^2 - \delta)} \quad (2.37)$$

et

$$B = \frac{v_0(v_0^2 - \delta) [1 - (H_d^2/4(v_0^2 - \delta)^2) - (H_e^2\mu_e/4\sigma^2) - H_i^2\mu_i/4]}{1 + \delta/(v_0^2 - \delta) + v_0^2/(v_0^2 - \delta)} \quad (2.38)$$

En transformant la variable indépendant ξ et τ en $\zeta = \xi - u_0\tau$, où u_0 est une vitesse constante normalisée et en imposant les conditions aux limites appropriées aux perturbations

localisées, à savoir, $U \longrightarrow 0$, $dU/d\zeta \longrightarrow 0$, $d^2U/d\zeta^2 \longrightarrow 0$ lorsque $\zeta \longrightarrow \pm\infty$, la solution de l'équation (2.36) est donnée par

$$U(\xi, \tau) = U_m \text{Sech}^2[(\xi - u_0\tau)/\Delta] \quad (2.39)$$

où $U_m = 3u_0/A$ et $\Delta = \sqrt{4B/u_0}$ représentent, respectivement, l'amplitude et la largeur du Soliton. Les deux derniers termes (le deuxième et le troisième) de l'équation (2.36) traduisent respectivement la non linéarité et la dispersion dont l'équilibre donne lieu à la formation du soliton. Comme u_0 est une quantité positive, nous avons alors $U_m < 0$. La solution (2.39) indique que notre modèle de plasma ne peut admettre que des ondes acoustiques poussiéreuses de raréfaction ($U < 0$). Nous avons alors mené une investigation numérique sur plusieurs paramètres. Nous avons alors constaté que le paramètre adimensionnel quantique H_e n'affecte pas l'amplitude du potentiel négatif mais rétrécit sa largeur (Fig.1). Par ailleurs les paramètres H_i et H_d n'influent pas, de manière significative, sur l'amplitude et la largeur de l'onde solitaire à cause de leurs faibles valeurs. Les paramètres suivants[2] $H_i = 7 \cdot 10^{-3}$, $H_d = 1.1 \cdot 10^{-7}$, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-28}\text{g}$, $m_i = 12m_p$ (m_p est la masse du proton), $m_d = 4.008 \cdot 10^{-16}\text{g}$, $u_0 = 0.1$, $Z_{d0} = 200$, $\sigma = 220$, $n_{e0} = 5.9 \cdot 10^{22}\text{cm}^{-3}$, $T_{Fe} = 6.4 \cdot 10^4\text{K}$ et $\delta = 1.7 \cdot 10^{-4}$ ont été choisis. La figure 2 indique qu'à mesure que u_0 augmente, l'amplitude du soliton augmente alors que sa largeur diminue. Une augmentation de δ (Fig. 3) entraîne une diminution de l'amplitude et de la largeur du soliton. A l'inverse, une augmentation de μ (Fig.4) se traduit par une augmentation de l'amplitude et de la largeur du soliton.

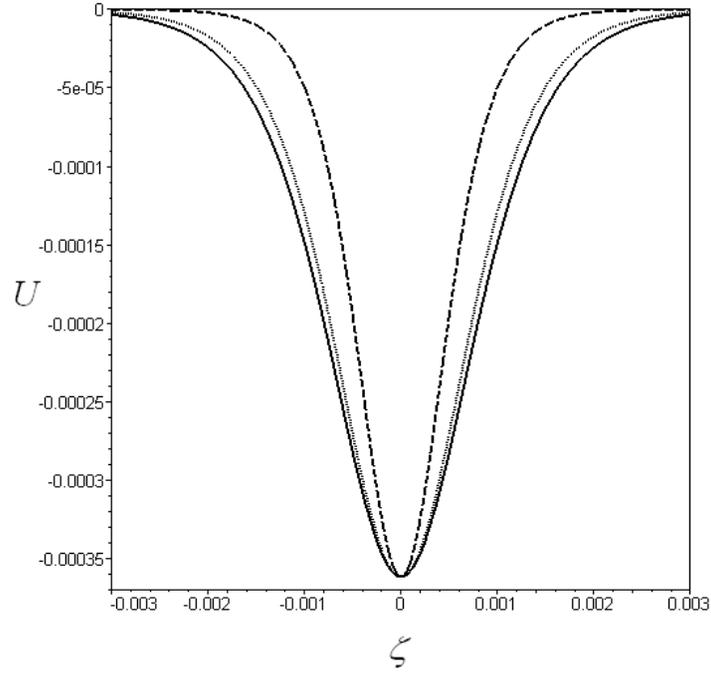


Figure 1: Solution stationnaire et localisée de l'équation **(K-dV)** pour différents valeurs de $H_e = 0.3$ (trait plein), 0.8 (pointillés) et 1.6 (tirets), Les paramètres choisis sont $u_0 = 0.1$, $\sigma = 220$, $\delta = 1.7 \times 10^{-4}$, $H_i = 7.10^{-3}$, $H_d = 1.1 \times 10^{-7}$

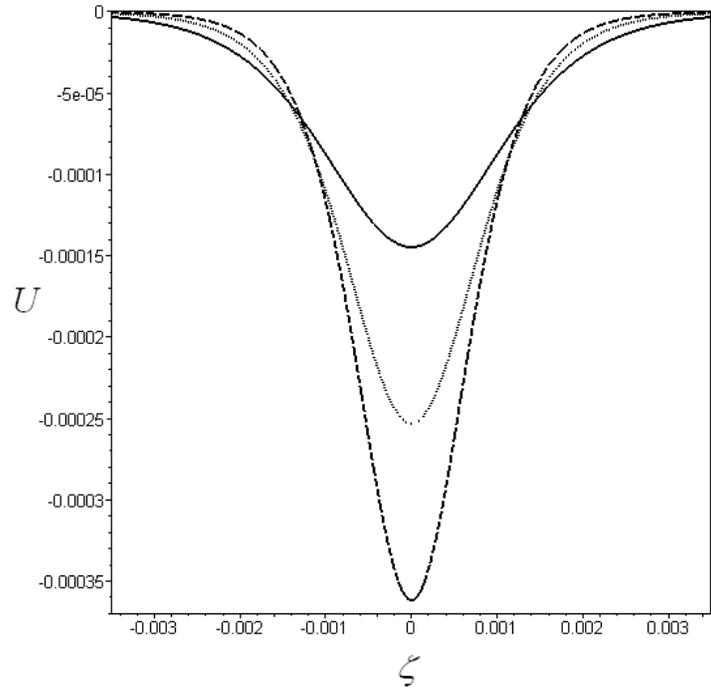


Figure 2: Solution stationnaire et localisée de l'équation **(K-dV)** pour différents valeurs de $u_0 = 0.04$ (trait plein), 0.07 (pointillés) et 0.1 (tirets), $H_e = 1$, $\sigma = 220$, $\delta = 1.7 \times 10^{-4}$, $H_i = 7.10^{-3}$, $H_d = 1.1 \times 10^{-7}$

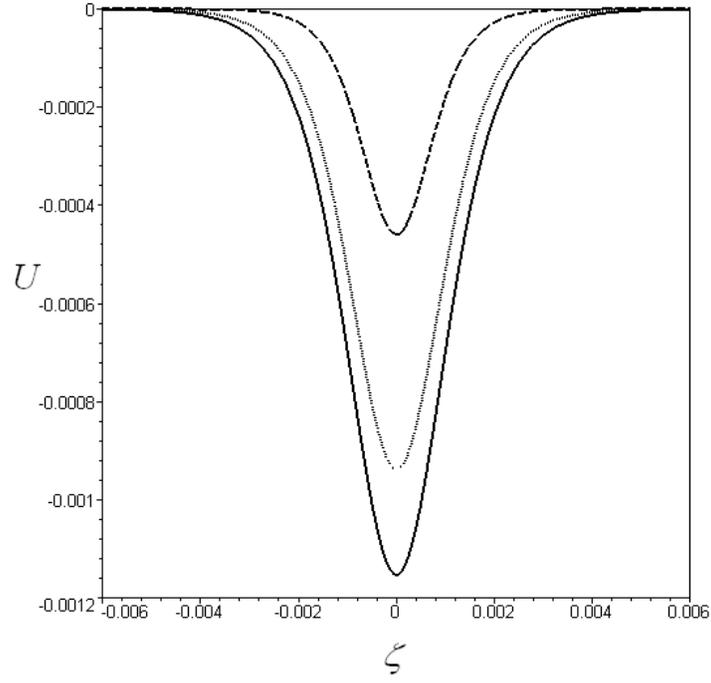


Figure 3: Solution stationnaire et localisée de l'équation **(K-dV)** pour différents valeurs de $\delta = 0$ (trait plein), 10^{-5} (pointillés) et 10^{-4} (tirets), $H_e = 1$, $u_0 = 0.1$, $\sigma = 220$, $H_i = 7.10^{-3}$, $H_d = 1.1 \times 10^{-7}$

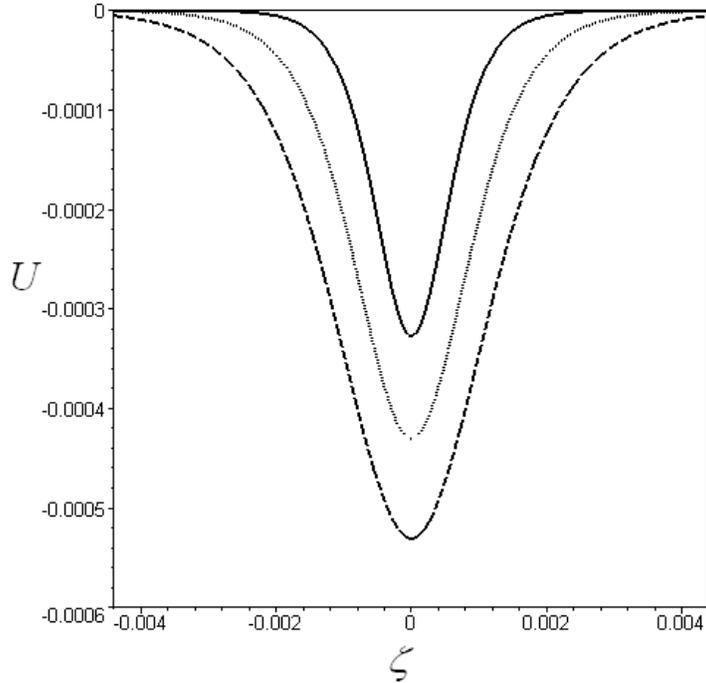


Figure 4: Solution stationnaire et localisée de l'équation **(K-dV)** pour différents valeurs de $\mu = 1.00003$ (trait plein), 1.00004 (pointillés) et 1.00005 (tirets), $H_e = 1$, $u_0 = 0.1$, $\sigma = 220$, $\delta = 1.7 \times 10^{-4}$, $H_i = 7.10^{-3}$, $H_d = 1.1 \times 10^{-7}$.

2.3 Onde acoustique poussiéreuse dans un plasma quantique électroniquement appauvri

2.3.1 Equations de base du modèle

Nous allons maintenant reconsidérer l'étude précédente[2] dans le cas d'un plasma quantique poussiéreux électroniquement appauvri contenant des ions quantiques et des grains de poussière fluides classiques. La dynamique de l'onde acoustique poussiéreuse est régie par l'inertie de ces grains de poussière et la pression des ions. Les oscillations acoustiques poussiéreuses (DAW) de faible vitesse de phase V_p , associées à un tel plasma, peuvent alors être décrites par les équations de base du modèle fluide suivantes

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial X} - N_i\frac{\partial N_i}{\partial X} + \frac{H_i^2}{2}\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\partial^2\sqrt{N_i}/\partial X^2}{\sqrt{N_i}}\right] = 0 \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial U_d}{\partial T} + U_d\frac{\partial U_d}{\partial X} = \frac{\partial\Phi}{\partial X} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial N_d}{\partial T} + \frac{\partial(N_d U_d)}{\partial X} = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2} = N_d - N_i \quad (2.43)$$

Les équations (2.40)-(2.43) constituent le modèle hydrodynamique quantique (QHD) d'un plasma poussiéreux quantique à deux composantes. Les densités N_j ($j = i, d$ indique, respectivement, les ions et les grains de poussière), la vitesse fluide des grains de poussière U_d , le potentiel électrostatique Φ , le temps T et la variable X sont normalisées respectivement par n_{j0} (densité non perturbée), $C_d = (2Z_d K_B T_{Fi}/m_d)^{1/2}$, $2K_B T_{Fi}/e$, $\omega_{pd}^{-1} = (m_d/4\pi Z_d^2 n_{d0} e^2)^{1/2}$ et $\lambda_D = \sqrt{(2K_B T_{Fi})/4\pi Z_d e^2 n_{d0}}$ (longueur de Debye). $H_i = \sqrt{(Z_d \hbar^2 \omega_{pd}^2)/m_i m_d C_d^4}$ représente le paramètre quantique adimensionnel des ions. En intégrant une fois l'équation (2.40) et en utilisant les conditions aux limites $N_i = 1$, $\Phi = 0$ lorsque $X \rightarrow +\infty$, nous obtenons

$$\Phi = \frac{1}{2} - \frac{N_i^2}{2} + \frac{H_i^2}{2}\left[\frac{\partial^2\sqrt{N_i}/\partial X^2}{\sqrt{N_i}}\right] \quad (2.44)$$

2.3.2 Cas des faibles amplitudes

Nous allons maintenant nous intéresser à la dynamique des ondes acoustiques poussiéreuses solitaires de faible amplitude. Pour cela, nous établissons à partir des équations (2.41)-(2.44)

une équation de type Korteweg–de Vries (K- dV) en utilisant la méthode des perturbations de Washimi et Taniuti et les variables qu'ils ont introduites $\xi = \varepsilon^{1/2}(X - v_0T)$ et $\tau = \varepsilon^{3/2}T$, où ε est un paramètre de mesure de la faiblesse de l'amplitude ou de la dispersion de l'onde et v_0 la vitesse du soliton normalisée par C_d . Les variables U_d , N_d , Φ et N_i sont alors développées en séries de puissances de ε autour de leurs valeurs d'équilibres

$$\Phi = \varepsilon\Phi^{(1)} + \varepsilon^2\Phi^{(2)} + \dots \quad (2.45)$$

$$U_d = \varepsilon U_d^{(1)} + \varepsilon^2 U_d^{(2)} + \dots \quad (2.46)$$

$$N_d = 1 + \varepsilon N_d^{(1)} + \varepsilon^2 N_d^{(2)} + \dots \quad (2.47)$$

$$N_i = 1 + \varepsilon N_i^{(1)} + \varepsilon^2 N_i^{(2)} + \dots \quad (2.48)$$

En procédant à un développement limité de Φ dans l'équation (2.44) et en utilisant les variables précédentes, nous obtenons

$$\begin{aligned} \Phi = \varepsilon & \left(-N_i^{(1)} + \frac{H_i^2}{4} \frac{\partial^2 N_i^{(1)}}{\partial X^2} \right) + \\ \varepsilon^2 & \left(-N_i^{(2)} - \frac{(N_i^{(1)})^2}{2} + \frac{H_i^2}{4} \frac{\partial^2 N_i^{(2)}}{\partial X^2} - \frac{H_i^2}{4} N_i^{(1)} \frac{\partial^2 N_i^{(1)}}{\partial X^2} - \frac{H_i^2}{8} \left(\frac{\partial N_i^{(1)}}{\partial X} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

A partir des équations (2.45) et (2.49), nous établissons les relations suivantes

$$\Phi^{(1)} = -N_i^{(1)} \quad (2.50)$$

$$\Phi^{(2)} = \frac{H_i^2}{4} \frac{\partial^2 N_i^{(1)}}{\partial \xi^2} - N_i^{(2)} - \frac{(N_i^{(1)})^2}{2} \quad (2.51)$$

L'équation de mouvement (2.41) peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned} & \left[-v_0 \frac{\partial U_d^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i^{(1)}}{\partial \xi} \right] \varepsilon + \\ & \left[-v_0 \frac{\partial U_d^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_d^{(1)}}{\partial \tau} + U_d^{(1)} \frac{\partial U_d^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{H_i^2}{4} \frac{\partial^3 N_i^{(1)}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial N_i^{(2)}}{\partial \xi} + N_i^{(1)} \frac{\partial N_i^{(1)}}{\partial \xi} \right] \varepsilon^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

L'équation de continuité (2.42) donne

$$\left[\frac{\partial U_d^{(1)}}{\partial \xi} - v_0 \frac{\partial N_d^{(1)}}{\partial \xi} \right] \varepsilon + \left[\frac{\partial N_d^{(1)}}{\partial \tau} - v_0 \frac{\partial N_d^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_d^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial (N_d^{(1)} U_d^{(1)})}{\partial \xi} \right] \varepsilon^2 = 0 \quad (2.53)$$

L'équation de Poisson (2.43) devient alors

$$\varepsilon \left(N_i^{(1)} - N_d^{(1)} \right) + \varepsilon^2 \left(N_i^{(2)} - N_d^{(2)} - \frac{\partial^2 N_i^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) = 0 \quad (2.54)$$

A l'ordre le plus petit en ε , nous obtenons a partir des équations (2.52)-(2.53)-(2.54) les relations suivantes $N_i^{(1)} = N_d^{(1)} = v_0 U_d^{(1)} = U$, $U_d^{(1)} = v_0 N_d^{(1)}$ et $v_0 = 1$. Aux ordres les plus élevés en ε , nous obtenons les équations suivantes

$$-\frac{\partial U_d^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \tau} + 2U \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{H_i^2}{4} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \frac{\partial N_i^{(2)}}{\partial \xi} = 0 \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial N_d^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_d^{(2)}}{\partial \xi} + 2U \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0 \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial N_i^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial N_d^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0 \quad (2.57)$$

à partir desquelles nous établissons l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + 2U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{H_i^2}{4} \right) \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0 \quad (2.58)$$

L'équation (2.58) est appelée équation de Korteweg- de Vries déformée (dK- dV). Le terme de dispersion contient le paramètre quantique adimensionnel H_i . Pour $H_i \neq 2$, nous pouvons transformer les variables indépendantes ξ et τ en $\eta = \xi - u_0 \tau$, où u_0 est une vitesse constante normalisée. En imposant les conditions aux limites appropriées aux perturbations localisées, $U \rightarrow 0$, $dU/d\eta \rightarrow 0$, $d^2U/d\eta^2 \rightarrow 0$ lorsque $\eta \rightarrow \pm\infty$, nous obtenons

$$U = U_m \text{Sech}^2 \left(\frac{\xi - u_0 \tau}{\Delta} \right) \quad (2.59)$$

$U_m = 3u_0/2$ et $\Delta = \sqrt{2(1 - \frac{H_i^2}{4})}/u_0$ représentent, respectivement, l'amplitude et la largeur du soliton. Notant que U_m ne dépend plus de H_i . La solution (2.59) indique que les effets quantiques (qui apparaissent à travers H_i) peuvent affecter de manière sensible la largeur de l'onde acoustique poussiéreuse. Pour $H_i < 2$ et $u_0 > 0$, notre modèle de plasma n'admet que des solitons de compression ($U > 0$) dont la largeur diminue à mesure que le paramètre quantique H_i augmente (Fig. 5). Ce résultat est confirmé par la figure 6 qui montre les variations de la largeur Δ du soliton en fonction de H_i . Pour $H_i > 2$ et $u_0 < 0$, notre modèle de plasma n'admet que des solitons de raréfaction ($U < 0$) dont la largeur augmente à mesure que le paramètre quantique H_i augmente (Fig. 7). Ce résultat est confirmé par la figure 8

2.3. Onde acoustique poussiéreuse dans un plasma quantique électroniquement appauvri

qui montre les variations de la largeur Δ du soliton en fonction de H_i . Par conséquent, en régime faiblement non linéaire, les effets quantiques n'affectent que la largeur de la structure solitaire associée à un plasma électroniquement appauvri. Ces structures solitaires peuvent être aussi bien de compression ($H_i < 2$ et $u_0 > 0$) que de raréfaction ($H_i > 2$ et $u_0 < 0$).

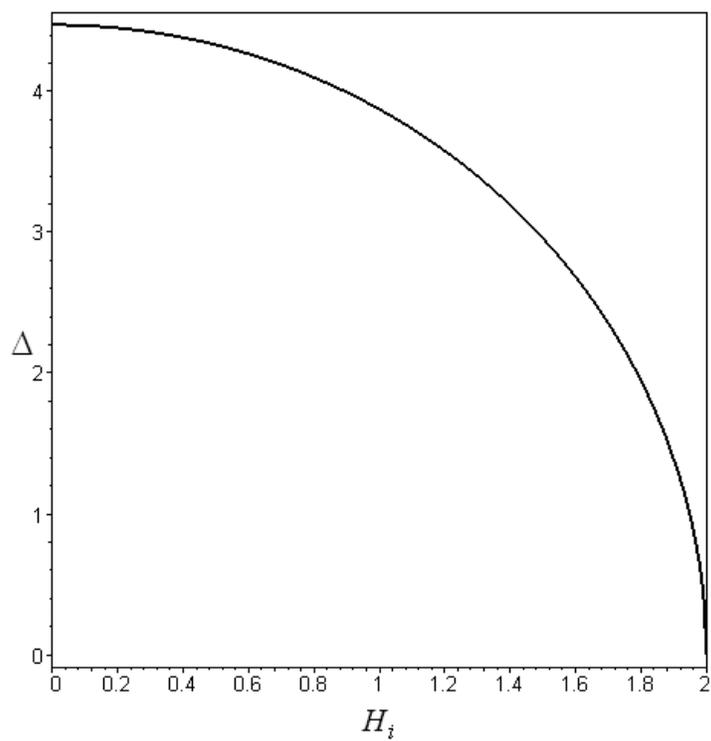


Figure 6: Variation de la largeur de l'onde solitaire Δ en fonction de H_i avec $u_0 = 0.1$.

2.3.3 Potentiel solitaire dans un plasma quantique électroniquement appauvri

Dans le but d'étudier les propriétés de l'onde acoustique poussiéreuse d'amplitude arbitraire, les équations (2.40)-(2.43) sont réécrites en introduisant la variable suivante $\xi = X - MT$, où M est appelé nombre de Mach (vitesse de propagation du soliton / C_d). En imposant les conditions aux limites appropriées aux solutions localisées ($\Phi \rightarrow 0, U_d \rightarrow 0, N_d \rightarrow 1$ lorsque $\xi \rightarrow \pm\infty$), nous obtenons à partir des équations (2.41) et (2.42) les expressions de N_d et U_d suivantes

$$N_d = \frac{M}{M - U_d} \quad (2.60)$$

et

$$U_d = M \pm \sqrt{2(E + \Phi)} \quad (2.61)$$

avec $E = M^2/2$, en portant (2.61) dans l'équation (2.60) on obtient

$$N_i = \frac{M}{\sqrt{2(E + \Phi)}} \quad (2.62)$$

dont on exprime la densité des ions en fonction du potentiel.

On défini $N_i = A^2$ et on utilise les équations (2.43),(2.44) et (2.62) on obtient le système d'équation différentielle ordinaire de second ordre suivant.

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = -A^2 + \frac{M}{\sqrt{2(E + \Phi)}} \quad (2.63)$$

$$\frac{d^2A}{d\xi^2} = \frac{A}{H_i^2} (-1 + A^4 + 2\Phi) \quad (2.64)$$

pour étudier la gamme du nombre de Mach M permise et pour confirmer la discussion numérique, nous supposons l'approximation plasma (la neutralité de la charge)[53], nous obtenons à partir de l'équation (2.63).

$$2\Phi = \frac{M^2}{A^4} - M^2 \quad (2.65)$$

En portant (2.65) dans l'équation (2.64) ensuite en multipliant chaque membre de l'équation (2.64) par $dN_i/d\xi$ en intégrant une fois et en imposant les conditions aux limites appropriées aux solutions localisées ($N_i \rightarrow 0, dN_i/d\xi \rightarrow 0$ lorsque $\xi \rightarrow \pm\infty$), nous obtenons la quadrature suivante

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right)^2 + W(N_i) = 0 \quad (2.66)$$

avec

$$W(N_i) = \frac{1}{H_i^2} \left\{ -\frac{2}{3} N_i^4 + 2(M^2 + 1) N_i^2 - \left[\frac{4}{3} + 4M^2 \right] N_i + 2M^2 \right\} \quad (2.67)$$

où $W(N_i)$ est dit pseudo potentiel ou potentiel de Sagdeev[54] (introduit pour l'étude des phénomènes non linéaires). L'analyse de l'équation (2.67) montre que notre modèle de plasma peut effectivement admettre des ondes solitaires acoustiques poussiéreuses. Il est aisé de vérifier que $W(N_i)$ et $\frac{dW}{dN_i}$ sont nuls en $N_i = 1$. La nature de ces ondes solitaires (de compression ou de raréfaction) peut être mise en évidence en développant le potentiel de Sagdeev à l'ordre trois en séries de Taylor. Le nombre de Mach critique est alors celui pour lequel le terme quadratique est nul. A ce moment là, si le terme cubique est négatif, le puits de potentiel $W(N_i)$ se trouvera du côté des densités ($0 < N_i \leq 1$), dans le cas inverse, le puits de potentiel $W(N_i)$ se trouvera du côté des densités ($N_i \geq 1$). Dans notre cas, le nombre de Mach critique obtenu est donné par

$$M_c = 1 \quad (2.68)$$

le terme cubique est négatif est donné par

$$\left(\frac{d^3 W}{dN_i^3} \right)_{N_i=1} = -\frac{8}{3H_i^2} \quad (2.69)$$

donc le puits de potentiel $W(N_i)$ se trouvera du côté des densités ($0 < N_i \leq 1$).

l'équation (2.65) peut alors être réécrite sous la forme suivante

$$2\Phi = M^2 \left(\frac{1}{A^4} - 1 \right) \quad (2.70)$$

en raison de $A^2 \leq 1$, nous concluons

$$\Phi \geq 0 \quad (2.71)$$

Et donc notre modèle de plasma poussiéreux quantique admet seulement des ondes solitaires de compression (QDA).

Nous allons maintenant procéder à la présentation de nos résultats numériques. Les équations (2.63)-(2.64) sont alors intégrées numériquement en faisant appel à un schéma d'intégration numérique adéquat pour les problèmes hautement non linéaires dits "problèmes raides" ou stiff problems. Pour entamer le processus de l'intégration numérique, les

2.3. Onde acoustique poussiéreuse dans un plasma quantique électroniquement appauvri

valeurs initiales $A_0(\xi = 0) = 1$, $(dA/d\xi)_{\xi=0} = -10^{-7}$, $\Phi_0(\xi = 0) = 0$ et $(d\Phi/d\xi)_{\xi=0} = 0$ ont été choisies. La figure 9a indique la formation d'une structure acoustique solitaire de compression dont l'existence est confirmée par le profil en forme de puits du pseudo-potentiel qui lui est associé (Fig9b). La largeur du soliton augmente à mesure que H_i augmente sans que l'amplitude de ce dernier soit affectée. les effets quantiques rendent la structure solitaire plus large et moins piques. La figure 10a ainsi que le pseudo- potentiel qui lui est associé (Fig.10b) indiquent qu'une augmentation du nombre de Mach M entraîne une diminution de l'amplitude du soliton tandis que la largeur de ce dernier augmente légèrement.

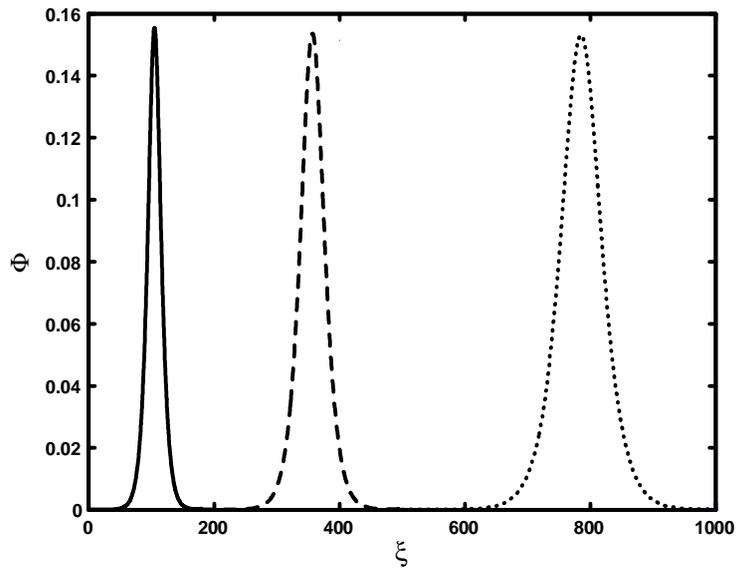


Figure 9a: Potentiel électrostatique solitaire Φ pour différentes valeurs de $H_i = 7$ (trait plein), 12 (tirets), 20 (tirets pointillés) avec $M = 0.9$.

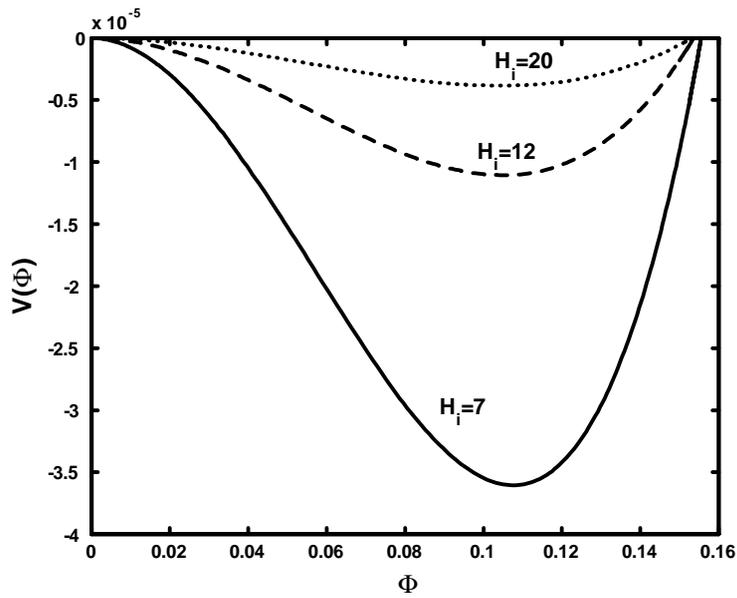


Figure 9b: Potentiel de Sagdeev associé au soliton de la figure 9a pour différentes valeurs de H_i avec $M = 0.9$.

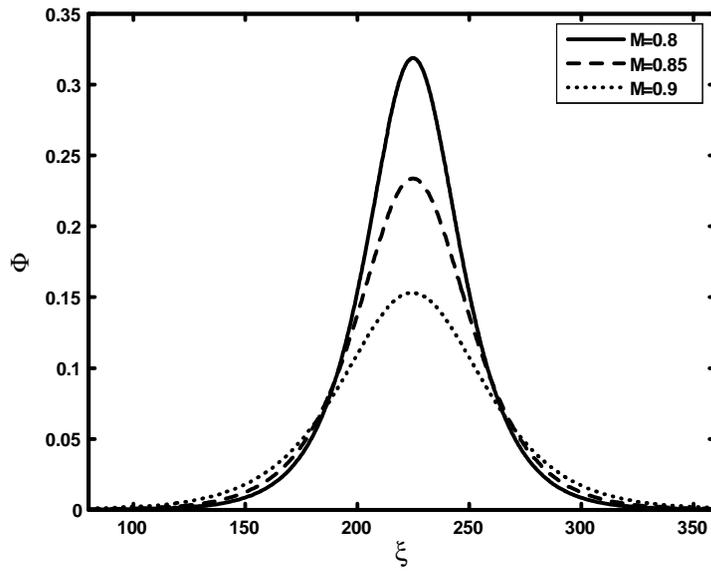


Figure 10a: Potentiel électrostatique solitaire Φ pour différents valeurs de $M = 0.8$ (traitplein), 0.85 (tirets), 0.9 (tirets pointillés) avec $H_i = 20$.

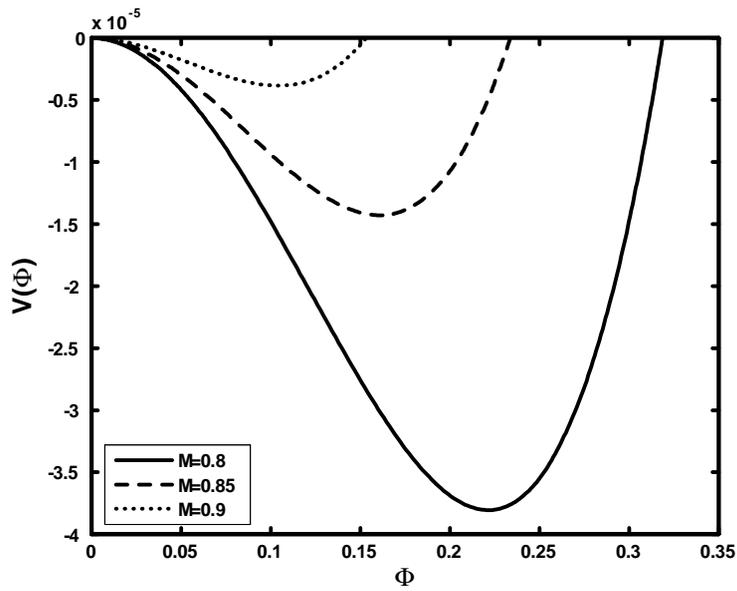


Figure 10b: Potentiel de Sagdeev associé au soliton de la figure 10a pour différentes valeurs de M avec $H_i = 20$.

3

Ondes acoustiques ioniques poussiéreuses quantiques solitaires associées à un plasma poussiéreux

3.1 Présentation physique du problème

Récemment, les plasmas quantiques ont suscité un intérêt assez remarquable et ont donné lieu à de nombreuses études[55]-[71]. Ces études ont porté, notamment, sur l'expansion d'un gaz d'électrons quantique dans le vide[56], les propriétés d'un plasma quantique[57], les instabilités à deux ou trois faisceaux quantiques[48],[60],[61], la dynamique self-consistante d'un gaz de Fermi[36], les ondes acoustiques ioniques quantiques[38], la correction quantique des trous électroniques[63], les équations de Zakharov quantiques modifiées[64] et les modes poussiéreux quantiques[65]-[71]. Shukla et Ali[72] ont démontré que les propriétés dispersives de l'onde acoustique poussiéreuse (DA) peuvent être affectées par les corrections quantiques. Khan et Mushtaq[69] ont étudié, en régime linéaire et non linéaire, l'onde acoustique ionique poussiéreuse dans un plasma poussiéreux quantique ultra-froid. Ils ont alors constaté que l'amplitude et la largeur des ondes acoustiques ioniques solitaires poussiéreuses sont modifiées par les effets quantiques et la concentration des grains de poussière. Moslem *et al.*[71] ont étudié les doubles couches (double layers) associées aux ondes acoustiques poussiéreuses quantiques. Ils ont montré que la formation des doubles couches, compressives ou rarefactives, dépend des paramètres de plasma quantique. Cependant, l'analogie quantique non linéaire de l'onde acoustique ionique poussiéreuse (DIA) n'a jamais été étudié, ni rapporté dans la littérature. Ce dernier est le mode acoustique ionique habituel modifié

par la présence des grains de poussière dans le plasma[23],[43]. Contrairement aux ondes acoustiques poussiéreuses[8], la fréquence des ondes acoustiques ioniques poussiéreuses est beaucoup plus grande (plus petite) que la fréquence plasma des grains de poussière (des ions) tandis que leur vitesse de phase est beaucoup plus grande (plus petite) que la vitesse thermique des ions et des grains de poussière (électrons). On se propose dans ce chapitre d'étudier l'analogie quantique de l'onde acoustique ionique poussiéreuse. L'accent sera mis sur l'existence, la formation et la réalisation possible des ondes acoustiques ioniques quantiques solitaires associées à un plasma poussiéreux.

3.2 Equations de base du modèle

Suivant la dérivation hydrodynamique quantique standard[38], considérons un système contenant des électrons quantiques, des ions fluides classiques chargé positivement et des grains de poussière de charge négative $q_d = -Z_d e$, où Z_d représente le nombre de charges résidant sur la surface du grain de poussière. Ces derniers étant beaucoup plus lourds que les ions et les électrons, leur dynamique est alors caractérisée par une échelle temporelle beaucoup plus longue. Ils peuvent, par conséquent, être considérés immobiles. La dynamique non linéaire des oscillations de faible vitesses de phase des ondes acoustiques ioniques poussiéreuses quantiques peut alors être décrite par le modèle hydrodynamique quantique unidimensionnel suivant:

$$\Phi = -\frac{1}{2} + \frac{N_e^2}{2} - \frac{\mu H_e^2}{2\sqrt{N_e}} \frac{\partial^2 \sqrt{N_e}}{\partial X^2} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial T} + \frac{\partial (N_i U_i)}{\partial X} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial T} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial X} = -\frac{\partial \Phi}{\partial X} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = \frac{N_e}{\mu} - N_i + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \quad (3.4)$$

Les densités $N_{j=i,e}$, la vitesse fluide des ions U_i , le potentiel électrostatique Φ , le temps T et la variable X sont normalisées, respectivement, par n_{j0} (les densités non perturbées), $C_s = (2k_B T_{Fe}/m_i)^{1/2}$ (la vitesse acoustique ionique quantique), $2k_B T_{Fe}/e$, $\omega_{pi}^{-1} = (m_i/4\pi n_{i0} e^2)^{1/2}$ (la période plasma ionique) et C_s/ω_{pi} . $\mu = n_{i0}/n_{e0} = 1 + Z_d n_{d0}/n_{e0}$ représente la mesure du rapport entre la densité électronique et ionique à l'équilibre et $H_e = \hbar \omega_{pe}/(2K_B T_{Fe})$ est le paramètre quantique non dimensionnel. Ce dernier est le rapport entre l'énergie d'un plasmon électronique et l'énergie de Fermi électronique. $\omega_{pe} = (4\pi n_{e0} e^2/m_e)^{1/2}$, \hbar , K_B et

T_{Fe} représentent, respectivement, la fréquence plasma électronique, la constante de Planck, la constante de Boltzmann et la température de Fermi électronique.

Dans le but d'étudier les propriétés de l'onde acoustique ionique quantique poussiéreuse d'amplitude arbitraire dans un repère lié à l'onde, les équations (3.1)-(3.4) sont réécrites en introduisant la variable $\xi = X - MT$, où M est le nombre de Mach (normalisé par C_s). En imposant des conditions aux limites appropriées aux solutions localisées ($\Phi \rightarrow 0, U_i \rightarrow 0, N_i \rightarrow 1$ lorsque $\xi \rightarrow \pm\infty$), nous obtenons à partir de (3.2)-(3.3) les relations

$$N_i = \frac{M}{M - U_i} \quad (3.5)$$

et

$$U_i = M \pm \sqrt{2(E - \Phi)} \quad (3.6)$$

avec $E = M^2/2$. En portant (3.6) dans la relation (3.5), nous obtenons

$$N_i = \frac{M}{\sqrt{2(E - \Phi)}} \quad (3.7)$$

qui exprime la densité des ions en fonction du potentiel électrostatique Φ . En définissant $N_e = A^2$ et en utilisant les équations (3.1), (3.4) et (3.7), nous obtenons le système d'équations différentielles ordinaire de second ordre suivant

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = \frac{A^2}{\mu} - \frac{M}{\sqrt{2(E - \Phi)}} + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \quad (3.8)$$

$$\frac{d^2A}{d\xi^2} = \frac{A}{\mu H_e^2} (-1 + A^4 - 2\Phi) \quad (3.9)$$

En multipliant chaque membre de l'équation (3.8) par $d\Phi/d\xi$, en intégrant une fois et en imposant les conditions aux limites appropriées aux solutions localisées ($\Phi \rightarrow 0, d\Phi/d\xi \rightarrow 0$ lorsque $\xi \rightarrow \pm\infty$), nous obtenons la quadrature suivante[54]

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Phi}{d\xi} \right)^2 + V(\Phi) = 0 \quad (3.10)$$

où le pseudo-potentiel $V(\Phi)$ s'écrit sous la forme

$$V(\Phi) = -\frac{1}{\mu} \int_0^\Phi A^2 d\Phi - M^2 (1 - 2\Phi/M^2)^{1/2} - (1 - 1/\mu) \Phi + M^2 \quad (3.11)$$

On se propose dans qui ce suit de présenter une brève analyse linéaire de stabilité des équations (3.8) et (3.9) à l'instar de la référence[38]. Pour cela, Φ et A sont écrits sous la forme

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_0 + \beta \\ A &= A_0 + \alpha\end{aligned}\tag{3.12}$$

En retenant les termes jusqu'au premier ordre en α et β , nous trouvons que les équations (3.8) et (3.9) se réduisent, pour des régimes de faible densités, au système linéaire suivant

$$\begin{aligned}\frac{d^2\beta}{d\xi^2} &= \frac{2\alpha A_0}{\mu} - \frac{M\beta}{2\sqrt{2}(E - \Phi_0)^{3/2}} \\ \frac{d^2\alpha}{d\xi^2} &= \frac{2A_0(2A_0^3\alpha - \beta)}{\mu H_e^2}\end{aligned}\tag{3.13}$$

En supposant des solutions de la forme $\alpha = \alpha_0 \exp(k\xi)$ et $\beta = \beta_0 \exp(k\xi)$, où α_0 , β_0 , et k sont des constantes, on peut obtenir des solutions non triviales qui dépendent de μ .

3.3 Simulation numérique et discussion des résultats

Nous allons maintenant procéder à la présentation de nos résultats numériques[74]. Le système d'équations (3.8) et (3.9) est alors résolu grâce à un schéma d'intégration numérique à pas variable. Ce dernier semble être le mieux adapté pour le traitement des problèmes dits "raides" (stiff problems). Notant que plusieurs livres et articles traitent des problèmes dits raides et nous mentionnons et les travaux de Shampine et Gear[73], Bank *et al.*[75] et Hairer et Wanner[76]. Notons que le système d'équations précédent peut être résolu soit comme un problème aux valeurs limites, soit comme un problème aux valeurs initiales. Notons que les problèmes aux valeurs limites posent certaines difficultés (choix des conditions aux limites, numériquement coûteux...etc). Par souci de simplicité, nous avons choisi de résoudre le système d'équations précédent comme un problème aux valeurs initiales. Pour entamer le processus de l'intégration numérique, les valeurs initiales $A_0(\xi = 0) = 1$, $(dA/d\xi)_{\xi=0} = -10^{-7}$, $\Phi_0(\xi = 0) = 0$ et $(d\Phi/d\xi)_{\xi=0} = 0$ ont été choisies. Il peut être utile de noter qu'en vertu de $A^2 = N_e$, il s'ensuit que $\frac{dA}{d\xi} = \frac{1}{2\sqrt{N_e}} \frac{dN_e}{d\xi}$ et nous alors écrire $\left(\frac{dA}{d\xi}\right)_{\xi=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{dN_e}{d\xi}\right)_{\xi=0}$ étant donné que $N_e(\xi = 0) = A^2(\xi = 0) = 1$. A des fins de comparaison, nous avons tracé la variation spatiale de Φ pour différentes valeurs du paramètre

quantique non dimensionnel $H_e = 5, 10, 15,$ et 20 dans la figure 1a (notons que les différents graphes du soliton ont été délibérément décalés vers la droite dans un but comparatif). Le potentiel électrostatique non linéaire exhibe une structure solitaire de raréfaction spatialement localisée comme le confirme d'ailleurs la structure en puits du potentiel de Sagdeev dans la figure 1b. Les paramètres suivants $\mu = 2.5$ et $M = 1.5$ ont été choisis de telle manière à ce que les conditions d'existence des structures solitaires soient satisfaites. On peut constater que si H_e augmente la largeur du soliton augmente tandis que son amplitude est trouvée presque insensible à H_e . Par conséquent, les effets quantiques rendent la structure solitaire plus large et moins cornu. De même, pour des valeurs données de H_e et M , une diminution de $\mu = n_{i0}/n_{e0}$ entraîne un étalement de la structure solitaire (figure 2). Cette dernière peut d'ailleurs devenir arbitrairement large. En gardant constante la valeur de H_e , $H_e = 10$, l'influence des nombres de Mach admissibles pour l'existence des structures solitaires, est analysée. Il est alors intéressant de noter que notre modèle de plasma poussiéreux quantique admet l'existence d'ondes solitaires subsoniques ($M < 1$) comme l'indiquent le profil du potentiel (Fig. 3a) et du pseudo-potentiel associé (Fig. 3b). Une augmentation de M se traduit par une augmentation de la profondeur ainsi que de la largeur du soliton. Nous avons alors procédé à une analyse numérique sur une large gamme des paramètres du plasma pour étudier les effets de H_e et de μ sur les nombres de Mach subsoniques admissibles M_{sub} . Nous avons alors trouvé qu'une augmentation de μ restreint et réduit le domaine des M_{sub} admissibles et peut même empêcher la formation du soliton subsonique. Au contraire, une diminution de H_e élargit ce domaine. En gardant constantes les valeurs de H_e et M , nos résultats pour différentes valeurs du paramètres $\mu = n_{i0}/n_{e0}$ sont représentés sur les figures 4-8. Nous avons alors trouvé que tant que les valeurs de μ sont inférieures à environ 1.44, le potentiel non linéaire Φ développe des structures spatialement périodiques (train d'onde) (figure 4) qui semblent être liés à un type de récurrence quantique[38]. Au delà de $\mu \sim 1.45$, n'importe qu'elle perturbation initiale arbitraire se développera en une structure solitaire localisée cohérente comme l'indiquent les figures 5 et 6. Les figures 7 et 8 montrent, peut être, les solutions les plus intéressantes. En augmentant μ de 3 à 3.16, le soliton s'élargit et évolue vers une forme limite avec une partie centrale qui exhibe la formation d'un plateau quasi-neutre (table-bottomed soliton). Au delà de cette limite ($\mu = 3.16$), la tendance est renversée et le soliton se rétrécit à mesure que μ augmente (figure 8). Ce résultat ressemble quelque peu au travail de Grimshaw *et al.*[77] qui ont montré que l'équation étendue de Korteweg-de Vries (EK- dV) peut admettre des solitons de grandes amplitudes avec des parties centrales en forme de plateau. Rappelons que les solutions solitaire de l'équation

EK- dV (également appelée équation de Gardner) dépendent du signe du coefficient du terme cubique non linéaire. Le soliton à partie centrale en forme de plateau n'existe que si ce terme est négatif (c'est à dire que le terme non linéaire cubique est de signe opposé au terme dispersif non linéaire). Notre soliton (table-bottomed) qui peut être perçu comme la combinaison d'un "kink" et d'un "anti-kink" est, en fait, associé à un fort appauvrissement électronique comme l'indique la figure 9 (notons que la valeur minimale de N_e est $2.4 \cdot 10^{-3}$). Cette dernière montre que ce vide (void) électronique s'élargit à mesure que μ augmente.

Analysons maintenant de manière succincte la partie centrale en forme de plateau du soliton (figure 8). Cette partie correspond à un plateau quasi- neutre. Dans ce cas, le système d'équations (3.1)-(3.4) peut être considérablement simplifié comme cela a été fait dans la référence[38] dans le cas de nombres d'onde très petits. En négligeant la partie gauche de l'équation de poisson (3.4) et en utilisant l'équation (3.1) ainsi que l'équation de conservation du mouvement (3.3), nous obtenons

$$\frac{\partial U_i}{\partial T} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial X} = -\mu (\mu N_i + 1 - \mu) \frac{\partial N_i}{\partial X} + \frac{\mu H_e^2}{2} \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\partial^2 \sqrt{(\mu N_i + 1 - \mu) / \partial X^2}}{\sqrt{(\mu N_i + 1 - \mu)}} \right] \quad (3.14)$$

Tel que démontré dans la référence[38], l'équation (3.14) indique qu'en régime quasi-neutre et en dépit de leurs grandes masses (relativement à celles des électrons), la dynamique des ions peut acquérir un caractère purement quantique. Ce caractère leur est instantanément transmis par les électrons quantiques à travers la relation de quasi-neutralité. Le profile spatiale de ces ions est tracé sur la figure 10. Notons qu'il est possible de reprendre les mêmes calculs de la section présente dans le cas de grains de poussière à charge positive. Il suffit de modifier l'expression de μ qui deviendra alors $\mu = n_{i0}/n_{e0} = 1 - Z_d n_{d0}/n_{e0}$ et qui variera de 0 à 1. Nous avons alors constaté qu'un tel plasma poussiéreux quantique n'admet que des ondes solitaires subsoniques dont l'existence nécessitent des valeurs élevées de H_e (figure 11).

3.4 Analyse en pseudo-potentiel

On se propose maintenant de considérer quelques aspects analytiques de l'équation (3.9) en étudiant la gamme des nombres de Mach M admissibles pour confirmer nos résultats numériques précédents. En supposant la neutralité de la charge électrique pour les ondes acoustiques ioniques poussiéreuses quantiques (QDIA) non linéaires de basse fréquence[78]-

[80] (nous pouvons également utiliser l'approximation plasma[53]), nous obtenons [à partir de l'équation (3.8)]

$$-2\Phi = \left(\frac{\mu M}{A^2 + \mu - 1} \right)^2 - M^2 \quad (3.15)$$

Cette relation peut être combinée avec l'équation (3.9) pour obtenir la quadrature

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_e}{\partial \xi} \right)^2 + W(N_e) = 0 \quad (3.16)$$

où le potentiel de Sagdeev[54] ou pseudo-potentiel est donné par

$$W(N_e) = \frac{1}{\mu H_e^2} \left\{ -\frac{2}{3} N_e^4 + 2(M^2 + 1) N_e^2 - \left[\frac{4}{3} + 2(1 + \mu) M^2 \right] N_e + \frac{2\mu^2 M^2 N_e}{(N_e + \mu - 1)} \right\} \quad (3.17)$$

En établissant l'expression (3.16), nous avons imposé les conditions aux limites suivantes $N_e \rightarrow 1$, $\partial N_e / \partial \xi \rightarrow 0$ à $\xi \rightarrow \pm\infty$. Il est clair, à partir de (3.17), que $W(N_e = 1) = \left(\frac{dW}{dN_e} \right)_{N_e=1} = 0$. L'équation (3.16) admet des solutions en onde solitaire si la condition suivante

$$\left(\frac{d^2 W}{dN_e^2} \right)_{N_e=1} < 0 \quad (3.18)$$

est vérifiée et à partir de laquelle nous déduisons la gamme des nombres de Mach admissibles suivante

$$M < \sqrt{\mu} \quad (3.19)$$

Il est évident à partir de (3.19) que pour les grains de poussière négativement chargés ($\mu > 1$), des solitons acoustiques ioniques poussiéreux quantiques subsoniques et supersoniques sont possibles. L'inégalité (3.19) devient plus restrictive dans le cas des grains de poussière à charge positive ($\mu < 1$) où seulement les solitons subsoniques sont possibles. La nature de ces ondes solitaires (de compression ou de raréfaction) peut alors être trouvée en développant le potentiel de Sagdeev $W(N_e)$ à l'ordre 3 en séries de Taylor. Le nombre de Mach critique est alors celui pour lequel le terme quadratique est nul. A ce moment là, si le terme cubique est négatif, le puits de potentiel $W(N_e)$ se trouvera du côté des densités N_e telles que $0 < N_e \leq 1$, et dans le cas inverse, le puits de potentiel $W(N_e)$ se trouvera du côté des densités électroniques $N_e \geq 1$. En développant le potentiel de Sagdeev $W(N_e)$ autour de $N_e = 1$, le nombre de Mach critique pour lequel le terme quadratique du développement de $W(N_e)$ change de signe a été trouvé égal à

$$M^2 = \frac{1}{1 + 2/\mu} \quad (3.20)$$

A cette valeur critique, le terme cubique s'écrit comme

$$\left(\frac{d^3W}{dN_e^3}\right)_{N_e=1} = -\frac{4}{\mu H_e^2} \left(\frac{4\mu^2 + 2\mu + 6}{\mu^2 + 2\mu}\right) \quad (3.21)$$

Cette relation indique clairement que le terme cubique est négatif. Maintenant, en utilisant l'équation (3.15) suivante

$$2\Phi = M^2 - M^2 \left(\frac{\mu}{A^2 + \mu - 1}\right)^2 = M^2 \left\{1 - \left(\frac{\mu}{A^2 + \mu - 1}\right)^2\right\} \quad (3.22)$$

et en notant que (en raison de $A^2 \leq 1$)

$$A^2 + \mu - 1 \leq \mu \quad (3.23)$$

nous pouvons conclure que

$$\Phi \leq 0 \quad (3.24)$$

Par conséquent, notre modèle de plasma poussiéreux quantique n'admettra que des potentiels solitaires négatifs associées aux ondes acoustiques ioniques poussiéreuses quantiques non linéaires.

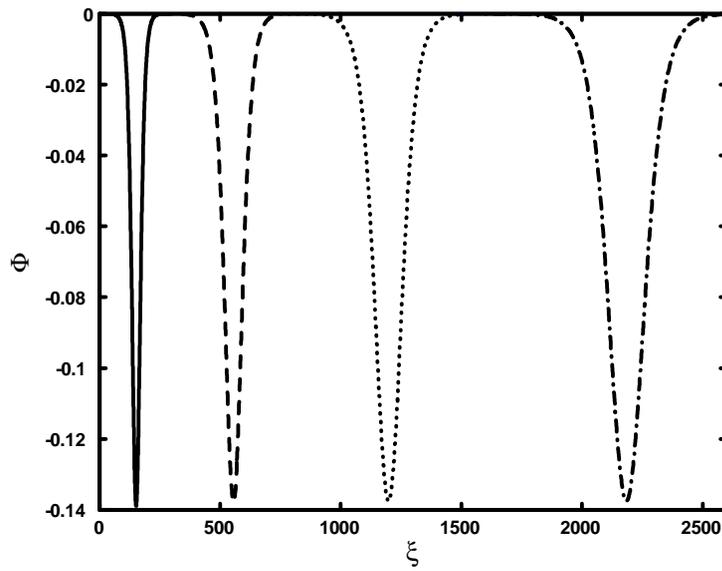


Figure 1a: Potentiel électrostatique solitaire Φ pour différentes valeurs de $H_e = 5$ (trait plein), 10 (tirets), 15 (pointillés) et 20 (tirets-pointillés), avec $M = 1.5$ et $\mu = 2.5$.

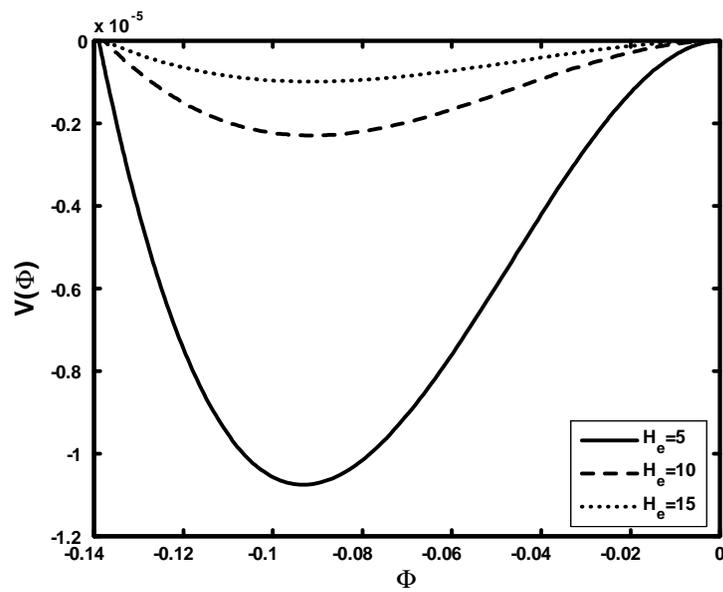


Figure 1b: Potentiel de Sagdeev associé au soliton de la figure 1a pour différentes valeurs de H_e , avec $M = 1.5$ et $\mu = 2.5$.

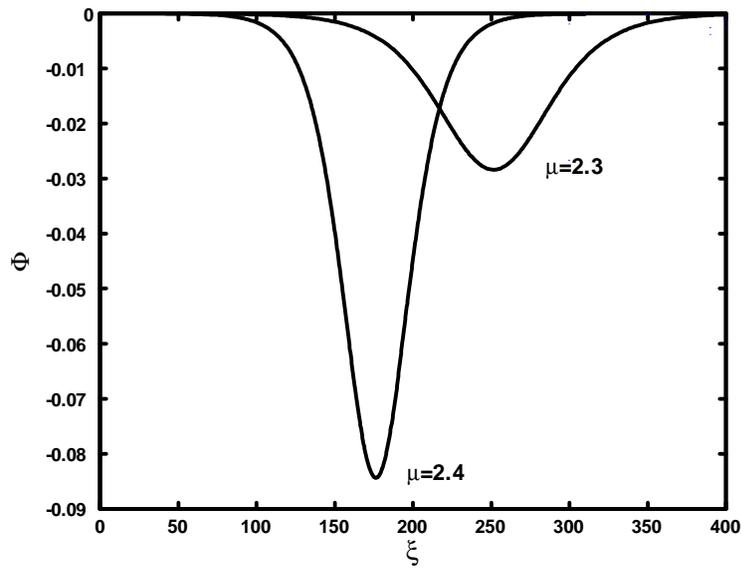


Figure 2: Potentiel électrostatique solitaire Φ pour deux différentes valeurs de μ , avec $M = 1.2$ et $H_e = 5$.

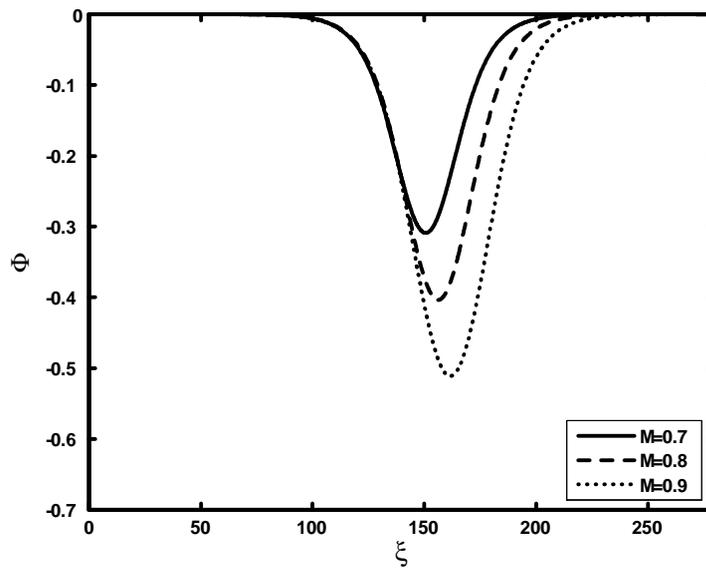


Figure 3a: Potentiel électrostatique solitaire Φ pour différentes valeurs de $M = 0.7$ (trait plein), 0.8 (tirets), 0.9 (pointillés), avec $\mu = 3$ et $H_e = 10$.

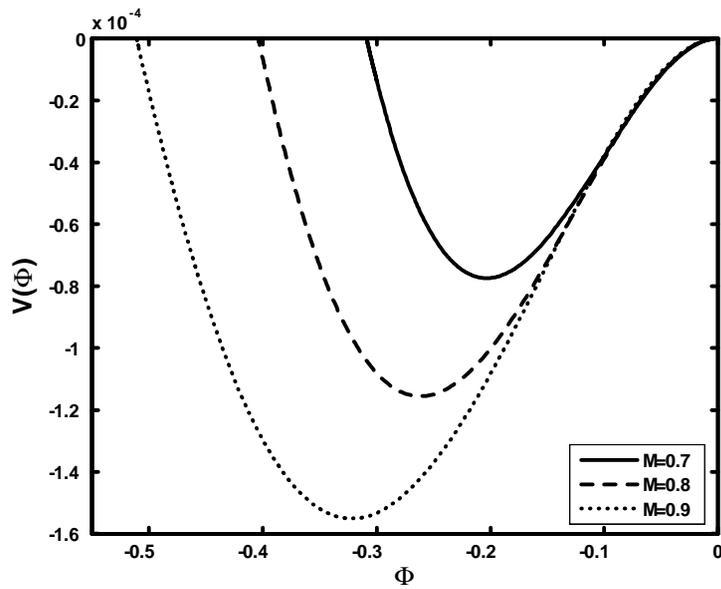


Figure 3b: Potentiel de Sagdeev associé au soliton de la figure 4a pour différentes valeurs du nombre de Mach M .

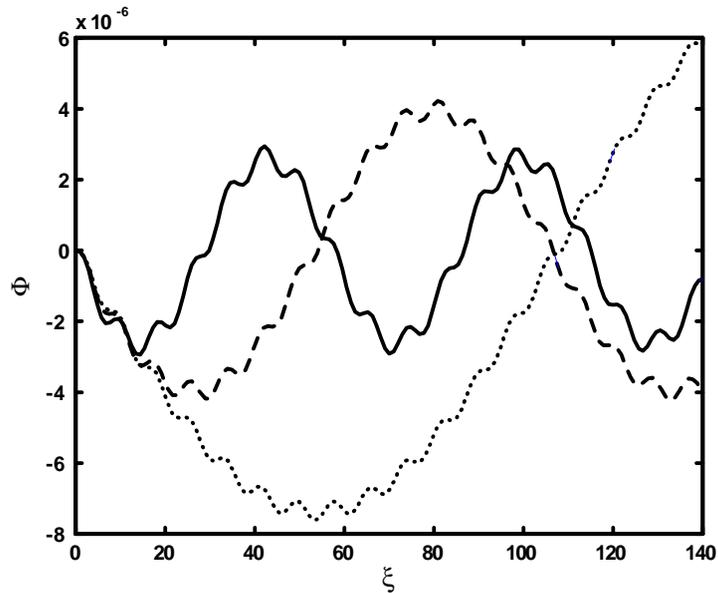


Figure 4: Potentiel électrostatique solitaire Φ pour différentes valeurs de $\mu = 1.1$ (trait plein), 1.3 (tirets), 1.4 (pointillés), avec $M = 1.2$ et $H_e = 10$.

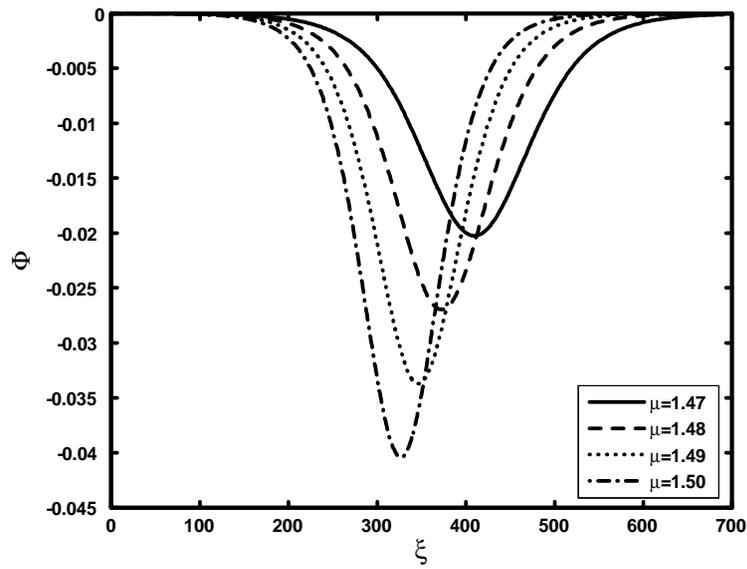


Figure 5: Potentiel électrostatique solitaire Φ pour différentes valeurs de $\mu = 1.47$ (trait plein), 1.48 (tirets), 1.49 (pointillés) et 1.50 (tirets-pointillés), avec $M = 1.2$ et $H_e = 10$.

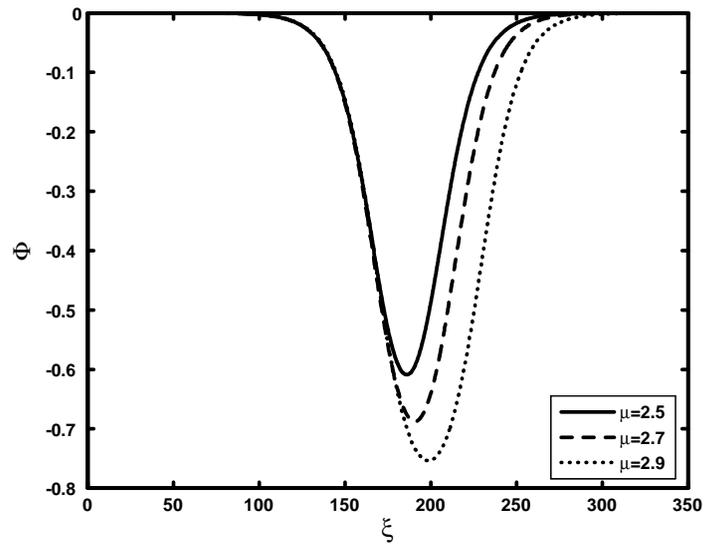


Figure 6: Potentiel électrostatique solitaire Φ pour différentes valeurs de $\mu = 2.5$ (trait plein), 2.7 (tirets), 2.9 (pointillés), avec $M = 1.2$ et $H_e = 10$.

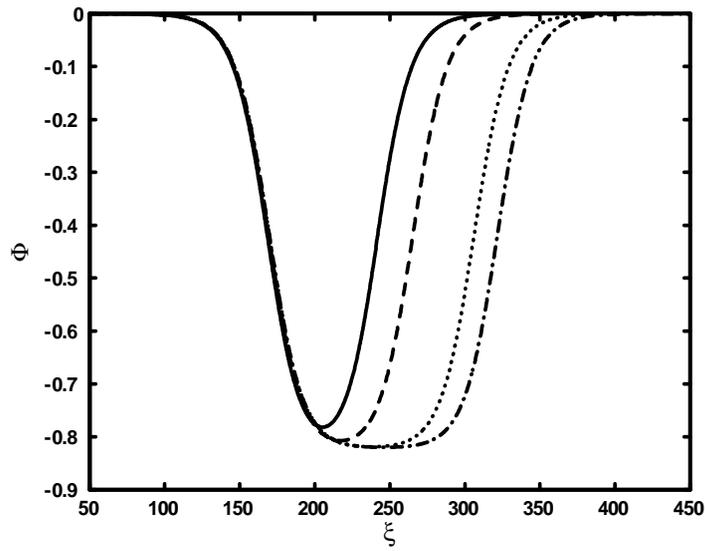


Figure 7: Potentiel électrostatique solitaire Φ pour différentes valeurs de $\mu = 3$ (trait plein), 3.1 (tirets), 3.15 (pointillés) et 3.155 (tirets-pointillés), avec $M = 1.2$ et $H_e = 10$.

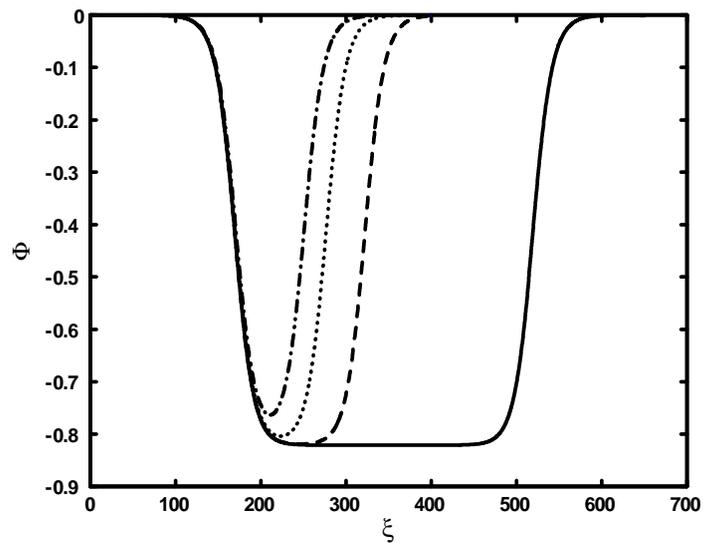


Figure 8: Potentiel électrostatique solitaire Φ pour différentes valeurs de $\mu = 3.16$ (trait plein), 3.165 (tirets), 3.2 (pointillés), 3.3 (tirets-pointillés), avec $M = 1.2$ et $H_e = 10$.

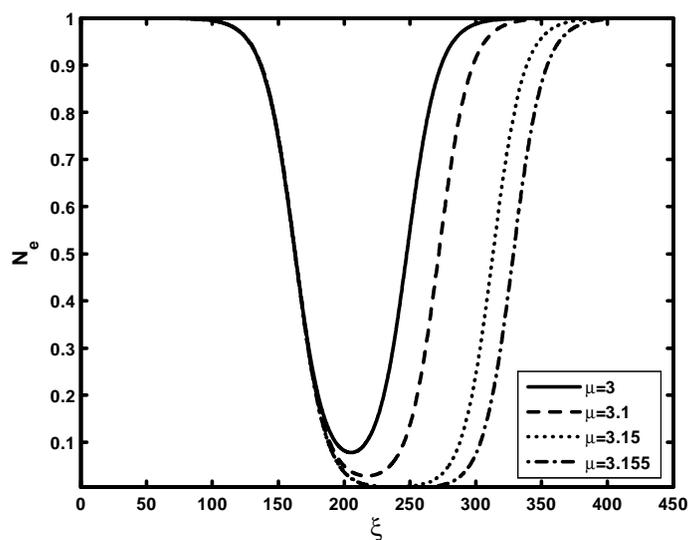


Figure 9: Profils de la densité des électrons pour différentes valeurs de $\mu = 3$ (trait plein), 3.1 (tirets), 3.15 (pointillés) et 3.155 (tirets-pointillés), avec $M = 1.2$ et $H_e = 10$. La valeur minimale de N_e est $2.4 \cdot 10^{-3}$.

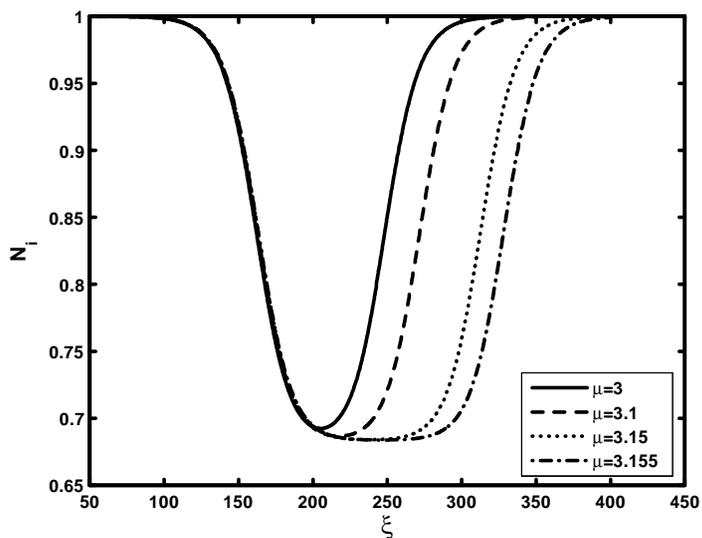


Figure 10: Profils de la densité des ions pour différentes valeurs de $\mu = 3$ (trait plein), 3.1 (tirets), 3.15 (pointillés) et 3.155 (tirets-pointillés), avec $M = 1.2$ et $H_e = 10$.

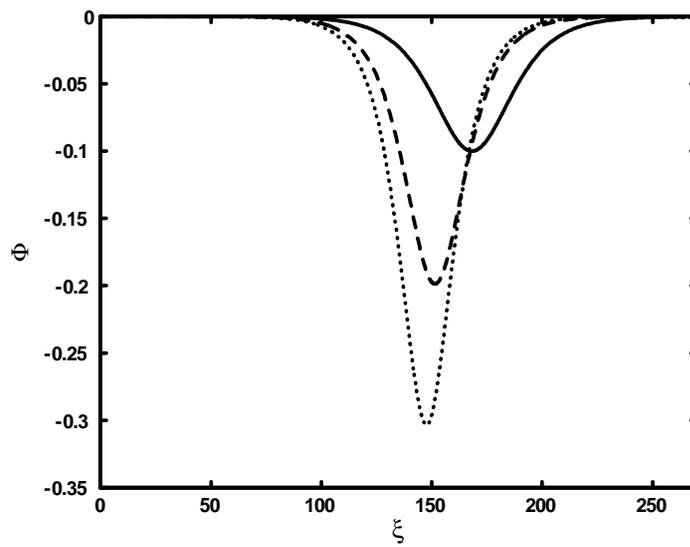


Figure 11: Potentiel électrostatique solitaire Φ pour différentes valeurs de $\mu = 0.6$ (trait plein), 0.7 (tirets), 0.8 (pointillés), avec $M = 0.7$ et $H_e = 15$.

3.5 Cas des faibles amplitudes

On se propose dans cette partie de montrer l'existence, la formation, et la réalisation possible des solitons acoustiques ioniques poussiéreuses quantiques de faibles amplitudes. Pour cela, nous utiliserons les équations de base précédentes, à savoir

$$\Phi = -\frac{1}{2} + \frac{N_e^2}{2} - \frac{\mu H_e^2}{2\sqrt{N_e}} \frac{\partial^2 \sqrt{N_e}}{\partial X^2} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial T} + \frac{\partial (N_i U_i)}{\partial X} = 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial T} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial X} = -\frac{\partial \Phi}{\partial X} \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = N_e/\mu - N_i + (1 - 1/\mu) \quad (3.28)$$

Dans la limite linéaire et grâce à l'analyse de Fourier, il est possible d'obtenir à partir des équations (3.25)-(3.28) la relation de dispersion de l'onde acoustique ionique poussiéreuse

$$\omega^2 = \frac{\mu k^2 (1 + \mu H_e^2 k^2 / 4)}{1 + \mu k^2 (1 + \mu H_e^2 k^2 / 4)} \quad (3.29)$$

où ω et k représentent, respectivement, la fréquence de l'onde ainsi que le nombre d'onde. Intéressons nous alors à l'existence des solitons acoustiques ioniques poussiéreuses quantiques de faible amplitude. Pour cela, introduisons les variables $\xi = \varepsilon^{1/2} (X - v_0 T)$ et $\tau = \varepsilon^{3/2} T$, où ε est un paramètre de mesure de la faiblesse de l'amplitude ou de la dispersion et v_0 la vitesse du soliton (normalisée par rapport à C_d) à priori inconnue que nous déterminerons plus tard. Les variables N_e , N_i et U_i peuvent être alors développées en séries de puissances autour de leur valeur d'équilibre

$$N_e = 1 + \varepsilon N_e^{(1)} + \varepsilon^2 N_e^{(2)} + \dots \quad (3.30)$$

$$N_i = 1 + \varepsilon N_i^{(1)} + \varepsilon^2 N_i^{(2)} + \dots \quad (3.31)$$

$$U_i = \varepsilon U_i^{(1)} + \varepsilon^2 U_i^{(2)} + \dots \quad (3.32)$$

et remplacées dans les équations (3.25)-(3.28). A l'ordre le plus petit en ε , nous obtenons $N_e^{(1)} = \mu N_i^{(1)} = v_0 U_i^{(1)} = U$ et $v_0 = \sqrt{\mu}$. Aux ordres les plus élevés en ε , nous obtenons les équations suivantes

$$\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{2}{v_0^3} U \frac{\partial U}{\partial \xi} - v_0 \frac{\partial N_i^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial U}{\partial \tau} = 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{v_0} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{v_0^2} U \frac{\partial U}{\partial \xi} - v_0 \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_e^{(2)}}{\partial \xi} + U \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\mu H_e^2}{4} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0 \quad (3.34)$$

$$\frac{1}{\mu} N_e^{(2)} - N_i^{(2)} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3.35)$$

à partir desquelles nous établissons l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\sqrt{\mu}}{2} \left(1 + \frac{3}{\mu}\right) U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\mu^{3/2}}{2} \left(1 - \frac{H_e^2}{4}\right) \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0 \quad (3.36)$$

L'équation (3.36) est une équation de Korteweg-de Vries déformée (dk- dv) dans laquelle la diffraction quantique est responsable de l'expression proportionnelle à H_e^2 . Pour $H_e \neq 2$, nous pouvons transformer les variables indépendantes ξ et τ en $\eta = \xi - u_0\tau$, où u_0 est une vitesse constante normalisée. En utilisant les conditions aux limites propres aux perturbations localisées, à savoir, $U \rightarrow 0$, $\partial U / \partial \eta \rightarrow 0$, $\partial^2 U / \partial \eta^2 \rightarrow 0$ lorsque $|\eta| \rightarrow \infty$, nous obtenons la solution solitaire suivante

$$U(\xi, \tau) = U_m \text{Sech}^2 \left(\frac{\xi - u_0\tau}{\delta} \right) \quad (3.37)$$

où $U_m = 6u_0 / [\sqrt{\mu}(1 + 3/\mu)]$ et $\delta = \sqrt{2\mu^{3/2}(1 - \frac{H_e^2}{4})/u_0}$ représentent, respectivement, l'amplitude et la largeur du soliton. Notons que U_m ne dépend pas de H_e . Pour H_e plus petit ou plus grand que 2, le soliton peut exhiber une compression (avec une vitesse de phase $u_0 > 0$) ou une raréfaction (avec une vitesse de phase $u_0 < 0$). A mesure que H_e augmente, la largeur du soliton compressif diminue (Fig.12) alors qu'elle devient plus importante dans le cas d'un soliton de raréfaction (Fig.13). Cette augmentation est plus significative lorsque l'appauvrissement électronique est plus important (Fig.14).

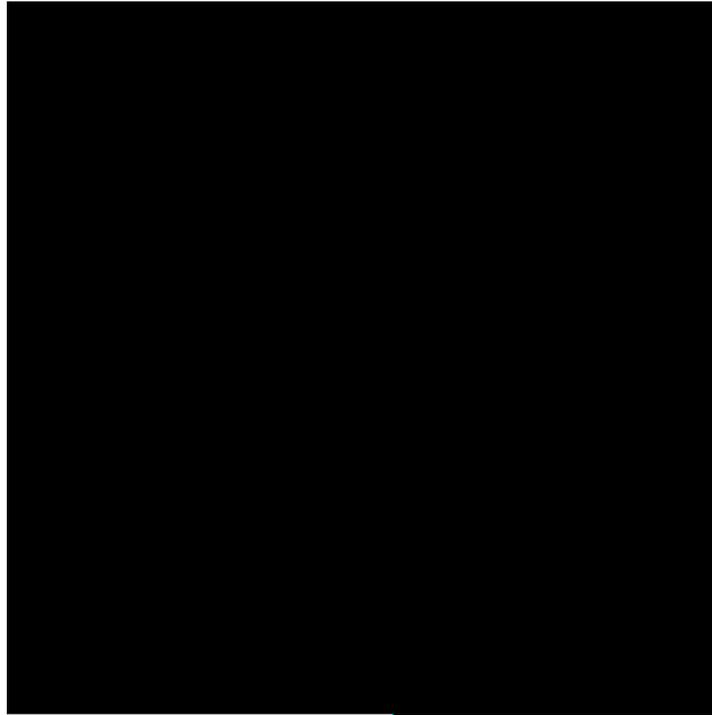


Figure 12: Variation de la largeur de l'onde solitaire δ en fonction de H_e avec $\mu = 1.2, u_0 = 1$.



Figure 13: Variation de la largeur de l'onde solitaire δ en fonction de H_e avec $\mu = 1.2, u_0 = -1$.

Conclusion

Les travaux présentés dans ce mémoire de Magister ont porté sur l'analyse et l'existence de certaines structures non linéaires associés à différents modèles de plasma quantique en utilisant les équations hydrodynamiques quantiques.

Le premier chapitre de cette thèse a d'abord porté sur la définition des concepts de base du plasma habituel à deux composantes. Nous avons alors introduit les plasmas poussiéreux, décrit leurs propriétés intrinsèques et énuméré les différents processus physiques qui les caractérisent. Par la suite, nous avons insisté sur les propriétés de base des plasmas denses quantiques. Nous avons constaté que les échelles quantiques, telles que le temps, la vitesse et la longueur sont complètement différentes de celles des plasmas classiques. Nous avons alors décrit l'approche de Schrödinger-Poisson pour modéliser les plasmas denses quantiques.

Au cours du deuxième chapitre, nous nous sommes intéressés à l'analyse du comportement non linéaire de l'onde acoustique poussiéreuse dans un plasma quantique électroniquement appauvri. La dynamique des grains de poussière, considérés pour la circonstance classiques, est prise en compte tandis que l'inertie des ions quantiques est négligé. Nos résultats ont alors révélé que dans un tel plasma, des structures solitaires peuvent exister. Leurs propriétés intrinsèques (notamment leur la largeur) dépendent fortement du paramètre adimensionnel quantique H_i . La méthode de la perturbation réductive (amplitude faible mais finie) a été utilisée et une équation de type Korteweg-de Vries déformée a été obtenue. Nos résultats ont alors révélé l'existence du potentiel solitaire de compression et de raréfaction associé à l'onde acoustique poussiéreuse. En particulier, nous avons noté que le soliton exhibe une compression pour $H_i < 2$ et une raréfaction dans le cas purement quantique $H_i > 2$. Dans le cas des grandes amplitudes, nous avons montré que seul le potentiel solitaire de compression est admissible et que les effets quantiques n'affectent que la largeur de l'onde solitaire.

Le troisième et dernier chapitre de cette thèse a été consacré à l'analyse de l'onde acoustique ionique poussiéreuse quantique solitaire dans un plasma contenant des électrons quan-

tiques, des ions fluides et des grains de poussière immobiles. Nous nous sommes intéressés à l'analyse du comportement linéaire et non linéaire des oscillations associés à un tel modèle de plasma. Les équations hydrodynamiques quantiques contenant un paramètre quantique adimensionnel, noté H_e , ont alors été utilisées. Ce paramètre représente le rapport entre l'énergie d'un plasmon électronique et l'énergie de Fermi électronique. Dans le cas linéaire, nous avons établi une relation de dispersion qui dépend du paramètre H_e . Celle-ci tend vers la relation de dispersion classique quand les effets quantiques s'annulent ($H_e \rightarrow 0$). Dans le cas des faibles amplitudes, nous avons obtenu une équation non linéaire de type Korteweg-de Vries déformée (dK-dV). Nous avons alors montré que, dans ce cas, notre modèle de plasma peut admettre aussi bien des solitons de compression que de raréfaction. Dans le cas des grandes amplitudes (en réalité, amplitude arbitraire) nous avons montré que seul un potentiel solitaire de raréfaction associée à un appauvrissement électronique est admissible. Nous avons ensuite effectué une analyse en pseudo-potential pour étudier la gamme des nombres de Mach admissibles. Nous avons alors montré que dans le cas des grains de poussière à charge négative, des solitons subsoniques ($M < 1$) et supersoniques ($M > 1$) sont possibles. À l'inverse, pour des grains de poussière à charge positive, seuls les solitons subsoniques peuvent exister. Leurs profils spatiaux sont sensiblement affectés par les effets quantiques. Ces derniers tendent à le rendre plus large. Sous certaines conditions, le soliton évolue vers une forme limite et sa partie centrale exhibe alors la formation d'un plateau quasi-neutre (table-bottomed soliton). Actuellement, nous n'avons aucune observation expérimentale concernant les ondes acoustiques ioniques poussiéreuses avec des corrections quantiques pour pouvoir établir une comparaison avec nos résultats théoriques. Notons que les ondes acoustiques ioniques poussiéreuses ont été observées expérimentalement dans les laboratoires [45], [21], [81], [82], [83]. L'un des points communs entre ces expériences de laboratoire et notre investigation théorique est le fait que les ondes acoustiques poussiéreuses solitaires soient sensiblement modifiées par la concentration des grains de poussière. On peut souligner ici que les résultats de notre étude pourraient avoir des applications dans les plasmas quantiques poussiéreux astrophysiques et dans la prochaine génération des interactions laser-plasmas de laboratoire contenant des grains de poussière.

Nous estimons atteints les objectifs que nous nous sommes fixés au début de ce travail de recherche. Les perspectives du présent mémoire sont nombreuses. Nous nous proposons à l'avenir d'étendre notre analyse au cas des plasmas poussiéreux quantiques magnétisés. Le champ magnétique jouera alors un rôle central dans la formation d'ondes de choc acoustiques quantiques. Par ailleurs, la prise en compte de la fluctuation de la charge électrique des

grains de poussière nous renseignera sur les effets de ce mécanisme sur les oscillations non linéaires d'un plasma poussiéreux quantiques.

Bibliographie

- [1] M. Bonitz, R. Binder and S. W. Koch, Phys. Rev. Lett. **70**, 3790, (1993).
- [2] S. Ali, P. K. Shukla, Phys. Plasmas **13**, 022313 (2006).
- [3] P. K. Shukla, Phys. Plasmas **1**, 1362 (1994).
- [4] E. C. Whipple, T. G. Northrop et D. A. Mendis, J. Geophys. Res. **90**, 7405 (1985).
- [5] P. K. Shukla, Phys. Plasmas **8**, 1791 (2001).
- [6] L. Stenflo, P. K. Shukla et M. Y. Yu, Phys. Plasmas **7**, 2731 (2000).
- [7] M. R. Jana, A. Sen et P. K. Kaw, Phys. Rev. E **48**, 3930 (1993).
- [8] N. N. Rao, P. K. Shukla et M.Y. Yu, Planet. Space Sci. **38**, 543 (1990).
- [9] A. Barkan, R. L. Merlino et N. D'Angelo, Phys. Plasmas **2**, 3563 (1995).
- [10] R. K. Varma, P. K. Shukla et V. Krishan, Phys. Rev. E **47**, 3612 (1993).
- [11] P. K. Kaw et A. Sen, Phys. Plasmas **5**, 3552 (1998).
- [12] A. Brattli, O. Havnes et F. Melandso, J. Plasma Phys. **58**, 691 (1997).
- [13] F. Melandso et P.K. Shukla, Planet. Space Sci. **43**, 635 (1995).
- [14] Q. Z. Luo, N. D'Angelo et R. L. Merlino, Phys. Plasmas **6**, 3455 (1999).
- [15] G. E. Morfill, H. M. Thomas, U. Konopka et al., Phys. Rev. Lett. **83**, 1598 (1999).
- [16] P. K. Shukla et N. N. Rao, Phys. Plasmas **3**, 1760 (1996).
- [17] G. Lapenta, Phys. Plasmas **6**, 1442 (1999).
- [18] G. E. Morfill, H. M. Thomas, U. Konopka et al., Phys. Plasmas **6**, 1769 (1999).

-
- [19] A. A. Sickafoose, J. E. Colwell, M. Horanyi, et S. Robertson, Phys. Rev. Lett. **84**, 6034 (2000).
- [20] V. N. Tsytovitch, A. P. Nefedov, V. N. Fortov, O. F. Petrov et G. E. Morfill, Phys. Plasmas **10**, 2633 (2003).
- [21] R. L. Merlino, A. Barkan, C. Thompson et N. D'Angelo, Phys. Plasmas **5**, 1607. (1998).
- [22] N. D'Angelo, Planet. Space Sci **38**, 1143 (1990)
- [23] P. K. Shukla et V. P. Silin, Phys. Scr. **45**, 508 (1992).
- [24] R. C. Davidson, *Methods in Nonlinear plasma Theory* (Academic press, New York, 1972), p. 15.
- [25] C. S. Gardner et G. K. Morikawa, *Similarity in the asymptotic behavior of collision-free hydromagnetic waves and water waves*, New York Univ., Courant Inst. Math. Sci. Res. Rep. NYO-9082 (1960).
- [26] H. Washimi et T. Taniuti, Phys. Rev. Lett. **17**, 996(1966).
- [27] C. H. Su et C. S. Gardner, J. Math. Phys. **10**, 536 (1969).
- [28] N. J. Zabusky et M.D. Kruskal, Phys. Rev. Lett. **15**, 240 (1965).
- [29] N. J. Zabusky, Phys. Rev. Lett. **168**, 124 (1968).
- [30] H. Ikezi, R. J. Taylor et R. D. Baker, Phys. Rev. Lett. **25**, 11 (1970).
- [31] H. Ikezi, Phys. Fluids **16**, 1668 (1973).
- [32] Y. Kato, M. Tajiri et T. Taniuti, Phys. Fluids **15**, 865 (1972).
- [33] H. Schamel, J. Plasma Phys. **9**, 377 (1973).
- [34] M. Q. Tran, Phys. Scr. **20**, 317 (1979).
- [35] Y. H. Ichikawa, Phys. Scr. **20**, 296 (1979).
- [36] G. Manfredi, F. Haas, Phys. Rev. B **64**, 075316 (2001).
- [37] I. Nagy, Phys. Rev. B **52**, 1497 (1995).
- [38] F. Haas, L. G. Garcia, J. Goedert et G. Manfredi, Phys. Plasmas **10**, 3858 (2003).

-
- [39] G. Manfredi, quant-ph/0505004v1 (2005).
- [40] J. Dawson, *On Landau damping*. *Phys. Fluids* **4**, 869-874 (1961).
- [41] F.F.Chen, *Introduction to Plasma Physics and controlled Fusion*, 2 nd edition (1974).
- [42] E. Madelung, *Quantentheorie in hydrodynamischer Form*, *Zeit. Phys.* **40**, 322-326 (1926).
- [43] P. K. Shukla, A. A. Mamun, *Introduction to Dusty Plasma Physics* (Institute of Physics, Bristol, 2002).
- [44] V. E. Fortov, A. V. Ivlev, S. A. Khrapak et G. E. Morfill, *Phys. Rep.* **421**, 1 (2005).
- [45] A. Barkan, N. D'Angelo et R. L. Merlino, *Planet. Space Sci.* **44**, 239 (1996).
- [46] A. Mushtaq, H. A. Shah, *Phys. Plasmas* **12**, 012301 (2005).
- [47] P. K. Shukla et A. A. Mamun, *New J. Phys.* **5**, 17.1 (2003).
- [48] F. Haas, G. Manfredi et M. Feix, *Phys. Rev. E* **62**, 2763 (2000).
- [49] F. Haas, *Phys. Plasmas* **12**, 062117 (2005).
- [50] P. A. Makowich, C. A. Ringhofer et C. Schmeiser, *Semiconductor Equations* (Springer, Vienna, 1990).
- [51] Y. D. Jung, *Phys. Plasmas* **8**, 3842 2001; M. Opher, L. O. Silva, D. E. Dauger, V. K. Decyk et J. M. Dawson, *ibid.* **8**, 2454 (2001).
- [52] D. Kremp, Th. Bornath, M. Bonitz et M. Schlanges, *Phys. Rev. E* **60**, 4725 (1999).
- [53] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics* (Plenum, New York, 1974), pp.65-66.
- [54] R. Z. Sagdeev, in *Reviews of Plasma Physics*, edited by M. A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1966), Vol. 4, p. 23.
- [55] N. C. Kluskdahl, A. M. Krizan, D. K. Ferry et C. Ringhofer, *Phys. Rev. B* **39**, 7720 (1989).
- [56] S. Mola, G. Manfredi et M. R. Feix, *J. Plasma Phys.* **50**, 145 (1993).
- [57] G. Manfredi, M. R. Feix, *Phys. Rev. E* **53**, 6460 (1996).

-
- [58] F. Cornu, Phys. Rev. E **58**, 5293 (1998).
- [59] B. Shokri, A. A. Rukhadze, Phys. Plasmas **6**, 3450 (1999).
- [60] F. Haas, G. Manfredi et J. Goedert, Phys. Rev. E **64**, 026413 (2001).
- [61] D. Anderson, B. Hall, M. Lisak et M. Marklund, Phys. Rev. E **65**, 046417 (2002).
- [62] R. Redmer, Phys. Rep. **282**, 35 (1997).
- [63] A. Luque, H. Schamel et R. Fedele, Phys. Lett. A **324**, 185 (2004).
- [64] L. G. Garcia, F. Haas, L. P. L. de Oliveira et J. Goedert, Phys. Plasmas **12**, 012302 (2005).
- [65] P. K. Shukla, Phys. Lett. A **352**, 242 (2006).
- [66] S. Ali, P. K. Shukla, Phys. Plasmas **13**, 129902 (2006).
- [67] P. K. Shukla, L. Stenflo, Phys. Lett. A **355**, 378 (2006).
- [68] A. P. Misra, A. R. Chowdhury, Phys. Plasmas **13**, 072305 (2006).
- [69] S. A. Khan, A. Mushtaq, Phys. Plasmas **14**, 083703 (2007).
- [70] S. Ali and P. K. Shukla, Eur. Phys. J. D. **41**, 319 (2007).
- [71] W. M. Moslem, P. K. Shukla, S. Ali et R. Schlickeiser, Phys. Plasmas **14**, 042107 (2007).
- [72] P. K. Shukla, S. Ali, Phys. Plasmas **12**, 114502 (2005).
- [73] L. F. Shampine et W. Gear, SIAM Rev **21**, 1 (1979).
- [74] M. Tribeche, S. Ghebache, K. Aoutou et T.H. Zerguini, Phys. Plasmas **15**, 033702 (2008).
- [75] R. E. Bank, W. C. Coughran, Jr., W. Fichtner, E. Grosse, D. Rose et R. Smith, IEEE Trans. CAD **4**, 436 (1985).
- [76] E. Hairer, G. Wanner, *Solving ordinary differential equations II, stiff and differential-algebraic problems* (Springer- Verlag, 1991).
- [77] R. Grimshaw, D. Pelinovsky, E. Pelinovsky et A. Slunyaev, Chaos **12**, 1070 (2002)

- [78] F. Verheest, T. Cattaert, *Phys. Plasmas* **12**, 032304 (2005).
- [79] S. Ali, W. M. Moslem, P. K. Shukla et I. Kourakis, *Phys. Lett. A* **366**, 606 (2007).
- [80] S. Mahmood, *Phys. Plasmas* **15**, 014502 (2008).
- [81] Y. Nakamura, H. Bailung et P. K. Shukla, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1602 (1999).
- [82] Q.-Z. Luo, N. D'Angelo et R. L. Merlino, *Phys. Plasmas* **6**, 3455 (1999).
- [83] Y. Nakamura et A. Sarma, *Phys. Plasmas* **8**, 3921 (2001).