Cette thèse est constituée de trois articles intitulés

1. Sur les puissances de convolution de la fonction de Dickman.
2. Valeur moyenne des fonctions de Piltz
3. Sur le théorème des idéaux premiers.

Les deux premiers articles sont une application de la méthode du point selle.

- à l'étude analytique et asymptotique de la fonction $\rho_K(u)$, solution continue pour $u > 0$ de l'équation différentielle aux différences avec conditions initiales

$$(0.1) \qquad \begin{cases} u\,\rho'_k(u) = (k-1)\,\rho_k(u) - k\,\rho_k(u-1) & (u > 1), \\ \rho_k(u) = u^{k-1} / \Gamma(k) & (0 < u \leq 1), \\ \rho_k(u) = 0 & (u \leq 0). \end{cases}$$

- à l'étude du comportement asymptotique de la fonction $S_k(x,y) = \sum_{\substack{n\leq x \\ p(n)\leq y}} \tau_k(n)$ où k est un réel strictement positif et $\tau_z(n)$ est la fonction de Piltz définie par

$$\zeta(s)^z = \sum_{n > 1} \tau_z(n)\, n^{-s} \qquad (\mathrm{Re}\, s > 1),$$

$\zeta(s)$ étant la fonction de Riemann.

Dans le troisième article, nous donnons une démonstration élémentaire, n'utilisant pas la méthode de Selberg, du théorème des idéaux premiers. Cette méthode s'inspire de celle de Daboussi pour le théorème des nombres premiers.

Nous présentons à présent, brièvement, le contenu de chacun des articles.

Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $P(n)$ le plus grand facteur premier de l'entier n, avec la convention $P(1) = 1$.

Pour $x \geq 1$, $y > 1$, on pose

$$S(x,y) := \{n \leq x : P(n) \leq y\}$$

$$u := \frac{\log x}{\log y}$$

La fonction $f(s)$ désigne la transformée de Laplace de la fonction f.