N° d'ordre :../20-D/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène
Faculté de Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du Grade de

Doctorat en Mathématiques

Spécialité : **Théorie des Nombres**

Par

MEGUEDMI Djohra

Thème

Algèbre d'Opérateurs Différentiels et Formes Modulaires

Soutenue publiquement, le 28 Mai 2016, devant le Jury composé de :

Mr. K. BETINA,	Professeur, à l'USTHB.	**Président**
Mr. A . SEBBAR,	Professeur, Univ. Bordeaux 1	**Directeur de thèse**
Mr. D. BEHLOUL,	Professeur, à l'USTHB.	**Co-Directeur de thèse**
Mr. A. BAYAD,	MC. HDR, Univ. Evry Val-d'Essonne	**Examinateur**
Mr. A. BENAISSA,	Professeur, UDL, Sidi-Bel Abbes	**Examinateur**
Mr. F . MOKRANE,	Professeur, Paris 13	**Examinateur**
Mr. M.S.REZAOUI,	MCA, à l'USTHB .	**Examinateur**
Mme. A. LAOUDI,	MCA, à l'USTHB.	**Examinatrice**

Remerciements et Dédicaces

Je tiens à remercier de manière très particulière et à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Ahmed SEBBAR, de m'avoir proposé ce sujet de thèse, ainsi que pour sa disponibilité et son soutien indéfectibles. J'apprécie fortement ses hautes qualités scientifiques et valeurs humaines. Les mots ne peuvent exprimer toute ma gratitude, car quelque soit la formulation adoptée ça sera très en dessous de la réalité. Je tiens à remercier mon co-directeur le professeur Djilali BEHLOUL pour sa disponibilité et son aide.

Je remercie le professeur Kamel BETINA pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je remercie Abdelmejid BAYAD, Maître de Conférences à l'Université d'Evry Val-d'Essonne, d'avoir bien voulu faire partie du jury.

Je remercie Farid MOKRANE, professeur à l'université de Paris 13, d'avoir bien voulu faire partie du jury.

Je remercie Abbes BENAISSA, professeur UDL, Sidi-Bel Abbes, ainsi que Salem REZAOUI et Aini LAOUDI, Maîtres de Conférences à l'USTHB pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je dédie ce travail à la mémoire

- De mon père(ALLAH yarahmou), avec lequel je n'aurai pas le plaisir de partager cet évenement , mais qui est et qui demeurera dans au fond de mon coeur à jamais.
- De mon frère Ali (ALLAH yarahmou), parti trop tôt, laissant un grand vide.

Je le dédie aussi à

- Ma mère
- Ma famille

– Mes amies
– Mes étudiants

sans oublier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation, je leur serais éternellement reconnaissante.

Introduction

La théorie des formes modulaires est maintenant bien établie et ses origines remontent à l'antiquité avec Diophante d'Alexandrie et la résolution des équations *diophantiennes.*

Certains mathématiciens contemporains considèrent qu'il y a en réalité cinq opérations en Mathématiques : L'addition, la multiplication, la soustraction, la division et les formes modulaires. Cette formule, attribuée au mathématicien allemand Eichler et rapportée par le mathématicien japonais Schimura est aussi partagée par le mathématicien américain Ribet et bien d'autres. Nous n'avons pas forcément cet avis tranché mais nous pensons tout de même que la théorie des formes modulaires a dépassé le cadre classique de l'arithmétique pour conquérir d'autres domaines comme la géométrie hyperbolique ou la théorie spectrale. Le succès le plus remarquable de cette théorie est sans doute la preuve en 1994 du grand théorème de Fermat par le mathématicien britannique A.Wiles, donnant ainsi une solution à l'un des problèmes les plus célèbres de toute l'histoire des mathématiques.

Notre travail est plus modeste mais traduit tout de même la nature de cette théorie. Il se situe à mi-chemin entre les formes modulaires et les équations différentielles. Ce lien a vu le jour au 19ième siècle et principalement avec la théorie de l'Uniformisationn. En particulier avec

1. Riemann et la théorie des surfaces de Riemann
2. Schwarz et le principe de reflexion
3. Klein et la fonction modulaire J
4. Poincaré et les groupes fuchsiens

La grande conclusion de ces remarquables travaux est qu'il y a un lien étroit entre les équations différentielles linéaires d'ordre 2 et les équations uniformisantes. De même que la monodromie de ces équations et liée à l'uniformisation de certaines courbes algébriques.

L'étude locale de ces équations différentielles a été développée par Fuchs et a atteint sa forme la plus complète avec la fonction hypergéométrique de Gauss $F(a, b, c; x)$.

Une idée centrale dans notre travail est le fait que les périodes K, K' des courbes elliptiques sont des fonctions hypergéométriques et sont reliées aux fonctions thêta et à bien d'autres formes modulaires. Les équations différentielles ainsi obtenues sont connues sous le nom d'équations de Picard-Fuchs.

Indépendamment de ces idées K. Weierstrass a développé sa théorie des fonctions elliptiques et rendues populaires par H. Schwarz et la fonction doublement périodique la plus célébre est sans doute la fonction $\wp$ de Weierstrass. Elle donne lieu à d'autres fonctions elliptiques par différentiation ou intégration : Soit L un réseau du plan complexe, engendré par $2\omega_1, 2\omega_3$, on définit la fonction méromorphe

$$\wp(z; \omega_1, \omega_3) := \sum_{m,n\in\mathbb{Z}, m^2+n^2\neq 0} \left(\frac{1}{(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_3)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_3)^2} \right).$$

Cette fonction n'a à priori rien à voir avec les fonctions ou les formes modulaires. Elle répond simplement à un théorème très général de Weierstrass qui dit que si A est un sous-ensemble d'un ouvert D du plan complexe, n'ayant pas de point d'accumulation dans D alors on peut trouver une fonction méromorphe dans D ayant des parties principales prescrites en tout point de A. Ici on prend A le réseau L, $D = \mathbb{C}$ et les parties principales sont $\dfrac{1}{(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_3)^2}$ aux points $2m\omega_1 + 2n\omega_3$.

La géométrie intervient pour dire que $\wp'^2(z; \omega_1, \omega_3) = 4\wp^3(z; \omega_1, \omega_3) - g_2\wp(z; \omega_1, \omega_3) - g_3$ avec

$$g_2 = 60 \sum_{\lambda\in L\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda^4} = 60G_4, \qquad g_3 = 140 \sum_{\lambda\in L\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda^6} = 140G_6$$

L'homogénéité nous permet d'opérer le passage à un seul argument complexe, le rapport des périodes $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ supposé de partie imaginaire strictement positive. On notera pour simplifier $\wp(z) = \wp(z, 1, \tau)$.

L'Analyse intervient dans le développement de Laurent :

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k + 1)G_{2k+2} z^{2k.}$$

C'est l'apparition des premières formes modulaires G_{2k+2}, appelées séries d'Eisenstein, qui grâce à l'équation différentielle ci-dessus ont de belles propriétés de multiplication. Il est plus commode de considérer les développements en séries de Fourier de ces séries, ce qui fait apparaître les séries

$$E_4(\tau) = 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) q^n, \qquad E_6(\tau) = 1 - 504 \sum_{n \geq 1} \sigma_5(n) q^n \quad \sigma_s(n) = \sum_{d|n} d^s$$

et le discriminant Δ et l'invariant de Klein J :

$$\Delta = E_4^3 - 27E_6^2, \quad J = \frac{E_4^3}{\Delta}.$$

Notre point de départ a été le désir de comprendre, sous plusieurs angles, l'égalité de Fricke, reliant séries d'Eisenstein, Fonctions hypergéométriques et l'invariant modulaire de Klein J :

$$F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1; \frac{1}{J(\tau)}\right)^{4} = E_4(\tau).$$

Notre point de vue pour illustrer ce lien entre les formes modulaires et les équations différentielles (et la raison d'être de ces dernières) s'explique aussi, en utilisant l'Analyse classique, comme suit : Rappelons que les fonctions classiques : la fonction exponentielle, la fonction Gamma d'Euler, la fonction zeta de Riemann et la fonction thêta de Jacobi

$$e^x, \ \ \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, x > 0, \ \ \zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}, \ \Re s > 0, \ \ \vartheta(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^\infty e^{2i\pi n^2 \tau}, \ \Im\tau > 0$$

sont toutes reliées par la transformation de Mellin :

$$e^{-x} = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) x^{-s} \, ds \, (c > 0), \quad \Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{1}{e^t - 1} t^{s-1} \, dt, \ \Re s > 1$$

et

$$\Gamma(\frac{s}{2})(2\pi)^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\vartheta(it) - 1] t^{\frac{s-2}{2}} dt.$$

La fonction exponentielle vérifie l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ et c'est l'unique solution si on exige la continuité en au moins un point. Elle est aussi solution de l'équation différentielle $y' = y$. Les fonctions $\Gamma(x)$ and $\zeta(x)$, après prolongement analytique, vérifient les équations fonctionnelles :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\ \Gamma(1) = 1; \qquad \zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s \cos(\frac{\pi s}{2})}\Gamma(s)\zeta(s),\ s \neq 0, 1.$$

D'autre part, d'après le théorème de Bohr-Mollerup, la fonction Γ est l'unique solution logarithmiquement convexe de l'équation fonctionnelle $f(x+1) = xf(x)$ et d'après un théorème de Hamburger's la fonction zeta de Riemann est l'unique série de Dirichlet vérifiant l'équation fonctionnelle de la fonction zeta si on ajoute certaines hypothèses de croissance sur les bandes verticales. Ainsi donc Γ et ζ sont déterminées par une *SEULE* équation fonctionnelle. La conséquence de cette unicité est que la fontion Γ ne vérifie *AUCUNE* équation différentielle à coefficients algébriques(théorème de Hölder), tout comme la fonction zeta de Riemann (conjecturé par Hilbert et prouvé par Ostrowski). Par contre la fonction exponentielle et la fonction thêta sont solutions d'équations différentielles à coefficients algébriques.

Notre travail se situe dans cette ligne de pensée : Les formes modulaires vérifient des relations d'automorphie par rapport à certains sous-groupes du groupe modulaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et donc beaucoup de relations fonctionnelles indépendantes. En conclusion elles satisfont certaines équations différentielles, généralement non linéaires mais peuvent se transformer en des équations linéaires par changement de variable ou de fonction.

On a ainsi étudié en détails l'opérateur $\vartheta = x\dfrac{d}{dx}$ et certains polynômes en ϑ et a montré tout l'avantage que l'on peut tirer de la formule de Faà di Bruno. Elle met en évidence ce rapport inattendu entre la combinatoire sous-jacente à cette formule(Polynômes de Bell, de Hilbert, nombres de Stirling) et la théorie des formes modulaires. La thèse contient de nombreux résultats et nous voudrions mentionner une autre preuve, très originale de notre point de vue, et aussi plus simple d'une formule due à Ramanujan, formule qualifiée de "beautiful formula" par B. Brendt et ses co-auteurs.

$$\int_i^\tau \sqrt{E_4}\, d\tau \; = \frac{1}{2i\pi} \log \frac{E_4^{3/2} - E_6}{E_4^{3/2} + E_6}, \quad E_i = E_i(\tau),\ i = 4, 6. \tag{1}$$

Revenant à la formule de Fricke

$$F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1; \frac{1}{J(\tau)}\right)^{4} = E_4(\tau),$$

nous avons exploité le fait que la fonction hypergéométrique, étant solution d'une équation différentielle du second ordre, sa puissance quatrième est solution d'une équation différentielle du cinquème ordre, ceci nous a conduit à étudier les puissances symétriques ou le produit tensoriel d'opérateurs différentiels.

Enfin on peut dire que ce sujet de recherche nous a permis d'unir d'anciennes idées de l'Analyse ou de la Géométrie complexes à des aspects plus modernes tels que l'opórateur de Bol et les crochets de Rankin-Cohen. Ceci permet d'espérer d'ouvrir la voie à d'autres recherches dans ce domaine. Nos résultats ont été publiés dans [26]

Table des matières

Chapitre 1

Notions fondamentales

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on rappelle les principaux résultats connus concernant les formes modulaires dont nous aurons besoin. En général les démonstrations ne seront pas données. On peut les trouver dans de nombreux ouvrages traitant du sujet. Nos principales références sont : Zagier [43], Miyake [27] , Koblitz [23] et Apostol [5] .
Nous commençons par définir le groupe modulaire, et après avoir défini les notions *forme et fonction modulaire* on donnera quelques propriétés de l'espace des formes modulaires. On terminera par des exemples, en particulier l'invariant modulaire **j**, qui jouera un rôle singulier dans la suite.

1.1.1 Premières Définitions

Dans tout ce travail, $\mathcal{H}$ désigne le demi plan de Poincaré, c'est à dire

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$$

l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire positive. Le groupe modulaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agit par homographie sur $\mathcal{H}$ via l'action :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

On vérifie la stabilité de $\mathcal{H}$ sous cette action

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2} > 0.$$

On peut définir un domaine fondamental pour l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{H}$, c'est à dire un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathcal{H}$ tel que toute orbite de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dans $\mathcal{H}$ ait un unique représentant dans $\mathcal{D}$. Le domaine fondamental, noté $\mathcal{D}$, peut être représenté par le sous-ensemble de $\mathcal{H}$ défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathcal{H} \mid |\Re(z)| \leq \frac{1}{2} \text{ et } |z| \geq 1 \right\}.$$

Le groupe modulaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est engendré par deux éléments S et T

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.2 Double périodicité et Fonctions $\wp$ de Weierstrass

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction périodique de période T alors $F(x) := f(Tx)$ définit une fonction 1-périodique donc on peut supposer, sans diminuer la généralité que les fonctions périodiques considérées dans ce travail sont de période 1. De même si f est une fonction doublement périodique, de périodes τ_1 et τ_2, non nulles , alors la fonction $F(x) := f(\tau_1 x)$ est aussi doublement périodique de périodes $1, \tau := \frac{\tau_2}{\tau_1}$. Les fonctions doublement périodiques considérées dans ce travail sont donc supposées de périodes $1, \tau := \frac{\tau_2}{\tau_1}$. Nous supposerons aussi que τ n'est pas réel et aussi, pour simplifier, que sa partie imaginaire est toujours strictement positive : $\Im\tau > 0$. Nous définissons le réseau

$$\Lambda = \Lambda_\tau := \{m + n\tau,\ m, n \in \mathbb{Z}\}$$

auquel nous associons le parallélogramme

$$P_\tau = \{x + y\tau,\ 0 \leq x < 1;\ 0 \leq y < 1\}.$$

Nous définissons aussi C_τ le bord de P_τ consistant des segments

$$[0,1], \quad [1,1+\tau], \quad [1+\tau,\tau], \quad [1+\tau,1].$$

Une fonctions doublement périodique peut être vue comme étant définie sur $\mathbb{C}$ modulo Λ et que P_τ est un domaine fondamental pour $\mathbb{C}/\Lambda$. La fonction fondamentale parmi les fonctions doublement périodiques est la fonction $\wp$ de Weierstrass :

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{w\in\Lambda,\, w\neq 0} \left\{ \frac{1}{(w-z)^2} - \frac{1}{w^2} \right\}. \tag{1.1}$$

Cette série converge pour tout z n'appartenant pas à Λ et tenant compte du fait que si $|z|$ est assez petit

$$w^{-2}\left(\left(1-\frac{z}{w}\right)^{-2} - 1\right) = \sum_{j\geq 1}(j+1)\frac{z^j}{w^{j+2}}$$

il vient

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{j\geq 1}(j+1)G_{j+2}(\Lambda)z^j = \frac{1}{z^2} + \sum_{k\geq 2}(2k-1)G_{2k}(\Lambda)z^{2k-2} \tag{1.2}$$

où pour tout entier $k \geq 3$

$$G_k(\Lambda) := \sum_{w\in\Lambda,\, w\neq 0} \frac{1}{w^k}$$

est la série d'Eisenstein de poids k. La fonction de Weierstrass $\wp$ vérifie l'équation différentielle

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_4(\Lambda)\wp(z) - 140G_6(\Lambda). \tag{1.3}$$

Si dans cette équation différentielle on utilise le développement en série (1.2) on obtient

$$\left(108G_4^2 - 252G_8\right)z^2 + \left(180G_4G_6 - 396G_{10}\right)z^4 \tag{1.4}$$

$$+\left(100G_6^2 + 420G_4G_8 - 108G_4^3 - 572G_{12}\right)z^6 + \cdots \tag{1.5}$$

et par identification on trouve des relations intéressantes entre les séries d'Eisenstein :

$$G_8 = \frac{3}{7}G_4^2, \;\; G_{10} = \frac{5}{11}G_4G_6, \;\; G_{12} = \frac{1}{143}\left(18G_4^3 + 25G_6^2\right), \cdots$$

En fait on verra que

$$\mathcal{M}_k = \langle G_4^i G_6^j : 4i + 6j = k,\ i, j \geq 0 \rangle.$$

1.1.3 Formes Modulaires

Dans cette partie nous introduisons les notions de fonctions et formes modulaires , on donnera quelques propriétés de l'espace $\mathcal{M}_k$ de ces formes. On définera la fonction **j** ainsi que certains relations qui nous seront utiles.

***Définition* 1.1.1.** *Soit k un entier , une fonction $f : \mathcal{H} \to \mathbb{Z}$ est une forme modulaire de poids k par rapport à $SL_2(\mathbb{Z})$ si :*

1. *f est holomorphe sur $\mathcal{H}$.*
2. *$f(\gamma z) = (cz + d)^k f(z)$ pour tout $z \in \mathcal{H}$ et $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.*
3. *f est holomorphe à l'infini.*

Il nous faut éclaircir le 3ème point et définir ce que l'on entend par holomorphie à l'infini. En effet comme f vérifie le 2ème point donc pour $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a : $f(z + 1) = f(z)$ donc f est une fonction 1 périodique, par conséquent elle admet un développement en série de Fourier. De plus l'application q définie sur $\mathcal{H}$ par $q(\tau) = e^{2\pi i \tau}$ envoie $\mathcal{H}$ sur le disque pointé

$$\mathcal{D}^* = \{z \in \mathbb{C} : \quad 0 <\mid z \mid< 1\}.$$

Si $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ est périodique, il existe une fonction $\widetilde{f} : \mathcal{D}^* \to \mathbb{C}$ telle que $\widetilde{f} \circ q(\tau) = f(\tau)$, si f est holomorphe sur $\mathcal{H}$ alors $\widetilde{f}$ est holomorphe sur $\mathcal{D}^*$ et donc $\widetilde{f}$ admet un développement en série de Laurent :

$$\widetilde{f}(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^n \quad \text{avec} q \in \mathcal{D}^*$$

On a :

$$q \to 0 \Rightarrow \Im(\tau) \to \infty$$

***Définition* 1.1.2.** *Une fonction $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ holomorphe sur $\mathcal{H}$ est 1 périodique est holomorphe à l'infini si $\widetilde{f}$ est holomorphe en 0.*

Remarque 1.1.1. *il est équivalent de dire que f a un développement de Fourier*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{f}(n) e^{2i\pi nz}$$

normalement convergent sur tout compact $\mathcal{H}$.

Pour tout entier pair k, on introduit la série double [36]

$$G_k(\tau) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(m\tau+n)^k}$$

où $\sum'$ indique que l'on somme sur les couples $(m, n) \neq (0, 0)$. Cette série est une forme modulaire de poids k pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, appelée série d'Eisenstein d'indice k. On note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ la fonction zeta de Riemann et B_k le k-ième nombre de Bernoulli, c'est le coefficient de $\frac{z^k}{k!}$ dans le développement de la fonction holomorphe à l'origine $\frac{z}{e^z-1}$ en série entière. On a

$$\frac{(-1)^{\frac{k}{2}}(k-1)!}{(2\pi)^k}\zeta(k) = -\frac{B_k}{2k}$$

et pour $\Im\tau > 0$ et $q = e^{2i\pi\tau}$

$$G_k(\tau) = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)q^n = \frac{1}{2}\zeta(1-k) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)q^n$$

où $\sigma_l(n) = \sum_{d|n} d^l,\ l \geq 1$. On note

$$E_k(\tau) = 1 + \frac{2}{\zeta(1-k)} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)q^n. \tag{1.6}$$

On définit également

$$E_2(\tau) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)q^n = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^n}. \tag{1.7}$$

E_2 n'est pas une forme modulaire [43], elle satisfait l'équation fonctionnelle :

$$E_2\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^2 E_2(z) + \frac{6}{\pi i}c(cz+d) \tag{1.8}$$

Une forme modulaire qui vérifie la condition supplémentaire $a_0 = 0$ est dite forme parabolique.Par exemple la fonction discriminant

$$\Delta(\tau) = \frac{1}{1728}\left(E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2\right) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{n=0}^{\infty}\tau(n)q^n \tag{1.9}$$

où les $\tau(n)$ sont des entiers , est une forme parabolique de poids 12.
f est une fonction modulaire si elle est méromorphe sur $\mathcal{H}$, invariante sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

On note par $\mathcal{M}_k$ (resp $\mathcal{S}_k$) l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des formes modulaires de poids k (resp des formes paraboliques de poids k) sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.Rappelons maintenant certaines propriétés, leurs démonstration se trouvent par exemple dans Miyake [27] , Koblitz [23] et Apostol [5]

***Proposition* 1.1.** *1. Si $k < 0$ ou k impair, alors $\mathcal{M}_k = 0$.*

2. Pour $k \in 0, 4, 6, 8, 10, 14$ alors

$$\mathcal{M}_k = \mathbb{C}\boldsymbol{G}_k, \quad \mathcal{S}_k = \{0\}, \quad \mathcal{M}_2 = \{0\}$$

3. Pour $k \geq 12$

$$\mathcal{S}_k = \Delta\mathcal{S}_{k-12}$$

en particulier $\mathcal{S}_{12} = \mathbb{C}\Delta$

4. Pour $k \geq 4$, on a

$$\mathcal{M}_k = \mathcal{S}_k \oplus \mathbb{C}\boldsymbol{E}_k$$

5. La multiplication par Δ est un isomorphisme

$$\Psi : \mathcal{M}_{k-12} \to \mathcal{S}_k$$

$$f \mapsto \Delta f$$

6. Pour la dimension de $\mathcal{M}_k$, on a :

$$\dim \mathcal{M}_k = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor, & si\ k \equiv 2(mod 12)\,; \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1, & si\ non\ . \end{cases}$$

On remarque aisément que $\mathcal{M}_k \mathcal{M}_l \subset \mathcal{M}_{k+l}$ et donc l'ensemble

$$\mathcal{M}_* = \bigoplus_{\substack{k \in 2\mathbb{N} \\ k \neq 2}} \mathcal{M}_k$$

est une algèbre graduée. Ainsi on a le résultat suivant :

***Théorème* 1.1.** *Soit $k \geq 2$ un entier pair. L'ensemble des fonctions $E_4^\alpha E_6^\beta$, lorsque (α, β) parcourt l'ensemble des couples d'entiers tels que $4\alpha + 6\beta = k$ est une base de $M_k = M_k(1)$.*

Si $M = \oplus M_k$ est l'alg'ebre graduée, somme des M_k et ϵ

$$\epsilon : \mathbb{C}[X, Y] \mapsto M$$

l'homomorphisme qui applique X sur E_4 et Y sur E_6, alors ϵ est un isomorphisme. On peut donc identifier l'algèbre graduée M à l 'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[E_4, E_6]$.

1.1.4 L'invariant Modulaire j

***Définition* 1.1.3.** *L'invariant modulaire j est défini par*

$$j = \frac{1728}{(2\pi)^{12}} \frac{g_2^3}{\Delta} = 1728 \frac{E_4^3}{E_4^3 - E_6^2} \tag{1.10}$$

La fonction j est une fonction modulaire de poids zero. De plus elle est holomorphe sur $\mathcal{H}$, et comme Δ est parabolique alors que E_4 ne l'est pas elle a un pôle simple à l'infini. En posant $q = e^{2\pi i \tau}$ pour $\tau \in \mathcal{H}$, on a le développement suivant

$$j(\tau) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 2149760q^3 + \sum_{n=3}^{+\infty} c(n) q^n$$

où les $c(n)$ sont des entiers jouissant de remarquables propriétés de divisibilité. L'impor-

tance de l'invariant modulaire j réside notamment dans le fait que l'on peut montrer que toute fonction modulaire de poids nul s'écrit comme une fonction rationnelle de j.
Les c_n sont entiers. Par exemple

n	c_n
-1	1
0	744
1	196884
2	21493760
3	864299970
4	20245856256
5	333202640600
6	4252023300096
7	44656994071935
8	401490886656000
9	3176440229784420
10	22567393309593600
11	146211911499519294
12	874313719685775360
13	4872010111798142520
14	25497827389410525184

Les coefficients de la fonction j sont remarquables à maints égards. Par exemple on peut montrer que

$$e^{\pi\sqrt{163}} \text{ est presque un entier}$$

La fonction modulaire J est un isomorphisme analytique (biholomorphisme)

$$\mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}.$$

Le quotient $\mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est le domaine fondamental du groupe modulaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Le résultat suivant est bien connu mais vu son importance nous en donnons une preuve [11], p.67

***Lemme* 1.1.** *Soient $\rho = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ alors $g_2(\rho) = g_3(i) = 0$ avec la multiplicité un.*

En effet si Λ est un réseau sur $\mathbb{C}$, les séries d'Eisenstein

$$G_k(\Lambda) = \sum{}' \frac{1}{\omega^{2k}} = \sum_{\omega\in\Lambda,\omega\neq 0} \frac{1}{\omega^{2k}}$$

sont définies pour tout entier $k > 1$. Elles sont homogènes de poids $-2k$

$$G_k(\mu\Lambda) = \mu^{-2k} G_k(\Lambda).$$

Donc si $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ alors

$$G_k(\mu\Lambda) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^{2k}} = \frac{1}{\omega_2^{2k}} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(m\frac{\omega_1}{\omega_2} + n)^{2k}}.$$

Si $\tau := \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$, alors

$$G_k(\tau) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}}$$

est une forme modulaire de poids $2k$. rappelons que l'on définit

$$g_2(\tau) = 60G_2(\tau), \qquad g_3(\tau) = 140G_3(\tau).$$

Les formes $g_2,\ g_3$ sont holomorphes dans $\mathcal{H}$, et aussi à l'infini. Elles admettent les développements (où comme toujours $q = e^{2i\pi\tau}$)

$$g_2(\tau) = \pi^4 \left[\frac{4}{3} + 320q + \cdots\right]$$

$$g_3(\tau) = \pi^6 \left[\frac{8}{27} - \frac{448}{3} + \cdots\right] \tag{1.11}$$

Par conséquent

$$g_2(\infty) = \frac{4}{3}\pi^4, \qquad g_3(\infty) = \frac{8}{27}\pi^6.$$

On en déduit aussitôt que

$$g_2(\infty) = \frac{4}{3}\pi^4, \quad g_3(\infty) = \frac{8}{27}\pi^6.$$

D'autre part

$$g_2(\rho) = g_2\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = 60 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(m\rho+n)^4}$$

$$= 60 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{\rho^8}{(m\rho^3+n\rho^2)^4} = 60\rho^2 \sum_{m,n'\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(m+n'\rho)^4} = \rho^2 g_2(\rho) \tag{1.12}$$

et donc $g_2(\rho) = 0$. De même

$$g_3(i) = 140 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(mi+n)^6}$$

$$= 140 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' \frac{i^6}{(mi^2+ni)^6} = -140 \sum_{m,n'\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(m'+ni)^6} = -g_3(i) \tag{1.13}$$

et donc $g_3(i) = 0$.

Revenons à la fonction modulaire J : le lemme qu'on vient de voir nous donne

$$J(\rho) = 0, \quad J(i) = 1.$$

Soit $\mathcal{H}^* = \mathcal{H} \cup \infty$, le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agit encore sur $\mathcal{H}^*$. le quotient $\mathcal{H}^*/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ peut être muni d'une structure d'une surface de Riemann compacte. J s'étend en un isomorphisme analytique, noté encore J :

$$J : \mathcal{H}^*/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

1.1.5 La fonction discriminant et la fonction η de Dedekind

la fonction $\Delta(\tau), \tau \in \mathcal{H}$ est par définition le discriminant du trinôme

$$P(x) = 4x^3 - g_2(\tau) - g_3(\tau)$$

c'est à dire

$$\Delta(\tau) := g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2.$$

C'est une forme modulaire de poids 12, s'annulant seulement à l'infini [36]. Son ordre d'annulation est 1. De plus elle possède le développement en produit infini

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}, \quad q = e^{2i\pi\tau}, \tau \in \mathcal{H}$$

La fonction η a été définie par Dedkind en 1877 comme étant [31] :

$$\eta(\tau) := q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2i\pi\tau}, \tau \in \mathcal{H}.$$

Le produit infini dans cette définition est absolument convergent pour tout $\tau \in \mathcal{H}$ et converge uniformément sur tout compact de $\mathcal{H}$. Ainsi $\eta(\tau)$ est une fonction analytique ne s'annulant en aucun point de $\mathcal{H}$. Sous l'action des générateurs de ¶, S

$$\tau \longrightarrow \tau + 1, \quad \tau \longrightarrow \frac{-1}{\tau}$$

on a

$$\begin{aligned} \eta(\tau + 1) &= e^{\frac{i\pi}{12}\eta(\tau)} \\ \eta(\frac{-1}{\tau}) &= \sqrt{-i\tau}\ \eta(\tau), \end{aligned} \tag{1.14}$$

La branche de la racine carrée étant la branche principale, positive pour les arguments positifs. Enfin le développement en série de Fourier(ou le développement de la fonction η au point ∞, unique point parabolique de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) est :

$$\eta(\tau) = e^{\frac{i\pi\tau}{12}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{i\pi n(3n+1)\tau}.$$

Comme $m := \frac{3n^2+n}{2}$ est toujours entier pour n entier, on voit que les exposants dans le développement précédent sont de la forme $2i\pi(n+\frac{1}{24})$. On peut écrire ce développement, sous la célèbre forme d'Euler, pour faire apparaître le fait que la fonction η est essentiellement une fonction θ. On a avec $q = e^{2i\pi\tau}$ ([14], p.284) :

$$\eta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{(1+12n(3n+1))/24} = \sum_{n\geq 1,\, n\equiv\pm 1(12)} q^{\frac{n^2}{24}} - \sum_{n\geq 1,\, n\equiv\pm 5(12)} q^{\frac{n^2}{24}}$$

1.1.6 la fonction modulaire λ

La fonction modulaire λ, même si elle ne joue pas un rôle direct dans notre travail, est malgré tout fondamentale puisqu'elle illustre de façon significative le théorème (2.1) . De plus elle est intimement liée au revêtement universel $\widetilde{\mathbb{P}\setminus\{0,1,\infty\}}$ de la sphère privée des trois points $0, 1, \infty$. De ce point de vue elle est aussi très liée à la fonction hypergómétrique.

La fonction λ est modulaire par rapport au sous-groupe principal de congruence $\Gamma(2)$ du groupe modulaire modulaire $\Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),\ a \equiv d \equiv 1; b \equiv c \equiv 0 (mod\, 2) \right\}.$$

Ce groupe est engendré par les deux élèments

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\lambda(\tau+2) = \lambda(\tau), \quad \lambda\left(\frac{\tau}{-2\tau+1}\right) = \lambda(\tau).$$

De plus on peut exprimer la fonction modulaire comme quotient de deux fonctions theta.

Pour deux rationnels $a, b \in \mathbb{Q}$ on définit pour $\Im\tau > 0$

$$\vartheta_{ab}(z,\tau) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} e^{i\pi[(a+r)^2\tau+2(z+b)(a+r)]}.$$

L'expression voulue est

$$\lambda(\tau) = \frac{\theta^4_{0\frac{1}{2}}(0,\tau)}{\theta^4_{00}(0,\tau)}.$$

D'autre part , λ est reliée aux fonctions ϑ_{00} par

$$\vartheta_{00}(0,\tau)^2 = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda(\tau)\right) \tag{1.15}$$

et du fait que λ soit un générateur du corps des fractions de l'algèbre $\mathcal{M}(\Gamma(2))$ résulte la relation

$$J(\tau) = \frac{4}{27}\frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2} \tag{1.16}$$

1.1.7 Fonction ζde Weierstrass

La fonction ζde Weierstrass est définie par

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \int_0^z (\wp(z) - \frac{1}{z^2})dz.$$

Notons que la dérivée de cette fonction est :

$$\zeta'(z) = -\wp(z) \tag{1.17}$$

En remplaçant $\wp(z)$ par (1.1) et après intégration on obtient

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Lambda, w\neq 0} (\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}) \tag{1.18}$$

***Proposition* 1.2.** – *La fonction $\zeta(z)$ est impaire*

– *$\zeta(z)$ n'est pas une fonction elliptique.*

– *$\zeta(z)$ n'est pas périodique et on a*

$$\zeta(z+\omega_k) = \tau_k + \zeta(z) \qquad (k = 1, 2)$$

ou τ_k sont des canstantes

– *Les nombres ω_k et τ_k sont liés par la relation de Legendre :*

$$\omega_1\tau_2 - \omega_2\tau_1 = 2\pi i$$

1.2 Fonctions hypergéométriques

1.2.1 Équations différentielles du second ordre

Nous allons rappeler quelques notions classiques sur les équations linéaires du second ordre en renvoyant à [42] ou [1] pour les détails. De telles équations ont la forme

$$a_0(z)u'' + a_1(z)u' + a_2(z)u = 0$$

où les coefficients $a_0(z), a_1(z), a_2(z)$ sont supposés analytiques sur un domaine D du plan complexe. On écrira toujours ces équations sous la forme

$$u'' + p(z)u' + q(z)u = 0 \tag{1.19}$$

avec deux fonctions p et q, méromorphes dans D

***Définition* 1.2.1.** 1. *Un point $z_0 \in D$ est dit point ordinaire de l'équation* (1.19) *si p et q sont analytiques au voisinage de z_0.*

2. *Un point $z_0 \in D$ est un point singulier de l'équation* (1.19) *s'il est un pôle de p ou de q.*

3. *Un point $z_0 \in D$ est dit point singulier régulier si z_0 est un pôle de p, d'ordre un au plus et est un pôle de q, d'ordre deux au plus.*

Pour une fonction méromorphe il y a d'autres types de singularités que les pôles mais notre étude de la fonction hypergéométrique est concernée par les points singuliers réguliers seulement.

Cette notion est importante car elle va mettre en évidence certaines valeurs numériques :

si z_0 est un point singulier régulier de l'équation (1.19) alors on cherche une solution de la forme

$$u(z) = (z - z_0)^{\alpha} g(z) \tag{1.20}$$

où $\alpha \in \mathbb{Q}$ and g est analytique en z_0 et vérifiant en plus $g(z_0) \neq 0$. On écrit, vu les hypothèses sur p et q les développements de Laurent

$$p(z) = \frac{p_{-1}}{z - z_0} + \cdots, \qquad q(z) = \frac{q_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots.$$

Si $(z - z_0)^{\alpha} g(z)$ est solution de l'équation (1.19) alors α vérifie l'équation, dite équation indicielle :

$$\alpha(\alpha - 1) - p_{-1}\alpha - q_{-2} = 0. \tag{1.21}$$

Les racines α_1, α_2 de l'équation indicielle sont les exposants caractéristiques en z_0.

La première équation différentielle linéaire d'ordre deux non triviale est celle ayant trois points singuliers réguliers. Puisque les transformations de Möbius prśervent la nature de léquation et le type de ses singularités, on peut supposer (et c'est ce que nous ferons) que les équations différentielles linéaires d'ordre 2 ont leurs singularités situées en 0, 1, ∞. Soient

$$\alpha_1, \alpha_2, \quad \beta_1, \beta_2, \quad \gamma_1, \gamma_2 \tag{1.22}$$

les paires d' exposants caractéristiques en 0, 1, ∞ respectivement. Le fait que les singularités soient régulières implique que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1 \tag{1.23}$$

et l'équation différentielle (1.19) s'écrit

$$u'' + \left(\frac{1 - \alpha_1 - \alpha_2}{z} + \frac{1 - \beta_1 - \beta_2}{z - 1} \right) u' \tag{1.24}$$

$$+ \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{z^2} - \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2}{z(z-1)} + \frac{\beta_1\beta_2}{(z-1)^2} \right) u = 0. \tag{1.25}$$

Supposons à présent que

$$\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}, \quad \beta_1 - \beta_2 \notin \mathbb{Z}, \quad \gamma_1 - \gamma_2 \notin \mathbb{Z} \tag{1.26}$$

alors au voisinage de chacun des points singuliers réguliers, l'équation différentielle linéaire d'ordre deux admet deux solutions linéairement indépendantes de la forme (1.20) et l'équation différentielle (1.26) s'écrit sous la forme

$$u'' + \left(\frac{c}{z} + \frac{1-c+a+b}{z-1}\right)u' + \frac{ab}{z(z-1)}u = 0$$

ou, de façon équivalente,

$$z(1-z)u'' + [c-(a+b+1)z]\,u' - abu = 0$$

où

$$a = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \quad b = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_2, \quad c = 1 + \alpha_1 - \alpha_2.$$

Or, d'après (1.23)

$$\beta_2 - \beta_1 = c - a - b$$

la condition (1.26) se formule de cette autre manìere

$$c - 1 \notin \mathbb{Z}, \quad a - b \notin \mathbb{Z}, \quad a + b - c \notin \mathbb{Z}. \tag{1.27}$$

On obtient ainsi l'équation différentielle hypergéométrique (ou de la fonction hypergéométrique) dont les points singuliers réguliers sont 0, 1, ∞ et dont les exposants caractéristiques respectifs sont

$$0, \alpha_2 - \alpha_1; \quad 0, \beta_2 - \beta_1; \quad \gamma_1 + \alpha_1 + \beta_1, \gamma_2 + \alpha_1 + \beta_1,$$

c'est à dire

$$0, 1-c; \quad 0, c-a-b; \quad a, b.$$

Ses solutions sont sont celles de l'équation (1.26) multipliée par $z^{-\alpha_1}(z-1)^{-\beta_1}$. La fonction hypergéométrique $F(a,b,c;z)$ est la solution, holomorphe au voisinage de 0, prenant la valeur 1 en 0.

1.2.2 Représentation de Barnes

La fonction hypergéométrique

$$F(a,b,c;z)=\sum_{n\geq 0}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}z^n$$

où $(a)_n$ est le symbole de Pochhammer

$$(a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}=a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$$

est définie dans le disque unité ouvert $D=\{z\in\mathbb{C},|z|<1\}$ mais se prolonge analytiquement au revêtement universel $\widetilde{\mathbb{P}\setminus\{0,1,\infty\}}$. Les relations de monodromie obtenues par action du groupe fondamental $\pi_1\left(\widetilde{\mathbb{P}\setminus\{0,1,\infty\}}\right)$ sont d'une grande utilité et peuvent être obtenues grâce à la représentations intégrale de Barnes [42] (p.286) :

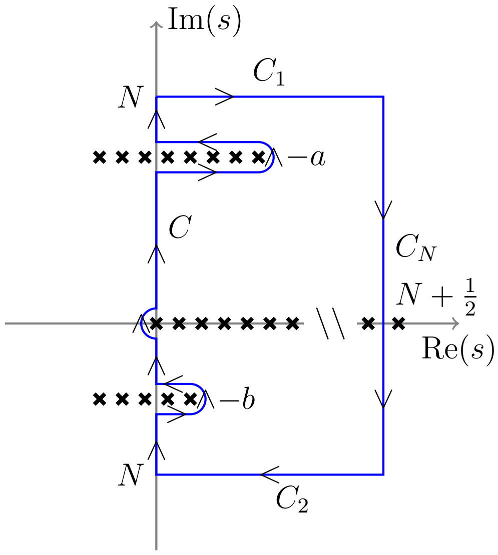
$$F(a,b,c;z)=\frac{\Gamma(c)}{2i\pi\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_{\mathcal{C}}\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s\,ds$$

où $\mathcal{C}$ venant de $-i\infty$ et allant à $i\infty$ lelong de l'axe imaginaire mais laissant tous les pôles

$$-a,-a-1,-a-2,\cdots,-a-n,\cdots,\quad de\quad \Gamma(s+a)-b,-b-1,-b-2,\cdots,-b-n,\cdots,\quad de\quad \Gamma(s+b)$$

à gauche et tous les pôles à droite. Les différentes relations de monodromie s'obtiennet alors par des déformations judicieuses du chemin d'intégration $\mathcal{C}$.

$$0,1,2,\cdots,n\cdots,\quad de\quad \Gamma(-s)$$



La fonction hypergéometrique $F(a,b,c;z)$ a, lorsque $a,b,c \in \mathbb{C}$, $-c \notin \mathbb{N}$ une autre représentation pour $|z| < 1$, due à Euler :

$$F(a,b,c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-xz)^{-a}dx$$

où $B(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ est la fonction *beta* d'Euler. L'intégrale converge pour $\Re c > \Re b > 0$. De plus $F(a,b,c;z)$ est l'unique solution, holomorphe au voisinage de l'origine, de

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + ((c-(a+b+1)z)\frac{du}{dz} - abu = 0.$$

D'autre part le comportement en $z = 1$ est d'une importance capitale dans la présente étude ([42], p.281, 293)

***Lemme* 1.2.** *1.* $F(a,b,c;1) = \dfrac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$ *si* $c-a-b > 0$

2. Lorsque $z \to 1^-$ *:* $F(a,b,c;z) \sim \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \log \dfrac{1}{1-z}$ *si* $c-a-b = 0$

3. Lorsque $z \to 1^-$ *:* $F(a,b,c;z) \sim \dfrac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b}$ *si* $c-a-b < 0$.

1.3 La dérivée schwarzienne

La linéarisation d'équation différentielle nécessite l'introduction de la dérivée schwarzienne . Dans ce qui suit on donnera la définition et des propriétés de cette dérivée qui nous seront utiles dans notre travail. Notre référence est [17].

***Définition* 1.3.1.** *Soit f une fonction méromorphe dans un domaine $\mathcal{D}$ de$\mathbb{C}$, et telle que $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathcal{D}$. La dérivée schwarzienne de f, qu'on note $\{f, z\}$, est définie par :*

$$\begin{aligned}\{f, z\} &= \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 \\ &= \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\end{aligned}$$

L'opérateur schwarzien posséde les propriétés suivantes

1. Une fonction méromorphe f est une transformation de Möbius si et seulement si

$$\{f, z\} = 0$$

2. Soient f et g deux fonctions méromorphes et localement injectives telles que fog soit définie dans un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C}$. Alors on a

$$\{fog, z\} = \{f, g(z)\}\,(g'(z))^2 + \{g, z\} \tag{1.28}$$

ce qui donne pour a, b, c et d des constantes vérifiant $ad - bc \neq 0$

1. $\left\{\frac{af+b}{cf+d}, x\right\} = \{f, x\}$ en particulier $\left\{\frac{ax+b}{cx+d}, x\right\} = 0$
2. $\left\{f, \frac{ax+b}{cx+d}\right\} \frac{(ad-bc)^2}{(cx+d)^2} = \{f, x\}$

1.3.0.1 Equation réduite et équation schwarzienne

Soient $\mathcal{U}$ un domaine de $\mathbb{C}$ et f,g deux fonctions holomorphes sur $\mathcal{U}$. On considére une équation différentielle linéaire homogène du 2^{em} ordre de la forme

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f\frac{du}{dx} + gu = 0 \tag{1.29}$$

Où $x \in \mathcal{U}$ l ' équation réduite de l 'équation (1.29)est

1. Pour $f = 0$: $\frac{d^2u}{dx^2} + gu = 0$
2. On peut toujours définir un changement de fonction "$u \mapsto v = \frac{u}{k}$ où k est une solution de l'équation différentielle.$\frac{dk}{dx} + \frac{f}{2}k = 0$, et on vérifie que la fonction v est

solution de :

$$\frac{d^2v}{dx^2} + hv = 0 \tag{1.30}$$

Avec

$$h = g - \frac{1}{2}\frac{df}{dx} - \frac{1}{4}f^2.$$

3. Soient u_1 etu_2 deux solutions linéairement indépendante d'une équation (1.30), et $w = \frac{u_1}{u_2}$ leur quotient . Alors w est solution de l'équation différentielle

$$\{w, x\} = 2h \tag{1.31}$$

4. Dans le cas d'une équation hypergéométrique

$$x(1-x)u^{''} + [c - (a+b+1)x]\, u' - abu = 0 \tag{1.32}$$

Pour $w = \frac{u_1}{u_2}$ avec u_1 et u_2 deux sulutions de (1.32) dans ce cas w vérifie l 'équation schwarzienne :

$$\{w, x\} = \frac{-1}{2}\left\{\frac{1-\lambda^2}{2x^2} + \frac{1-\mu^2}{2(1-x)^2} + \frac{1-\lambda^2-\mu^2+\gamma^2}{2x(1-x)}\right\}w'^2 \tag{1.33}$$

Avec

$$\lambda = 1-c, \mu = c-a-b, \gamma = a-b$$

.

Chapitre 2

Formes Modulaires et Équations Différentielles

Notre point de départ a été le désir de comprendre, sous plusieurs angles, l'égalité de Fricke, reliant séries d'Eisenstein, Fonctions hypergéométriques et l'invariant modulaire de Klein J :

$$F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1; \frac{1}{J(\tau)}\right)^{4} = E_4(\tau).$$

En outre, Les formes modulaires vérifient des relations d'automorphie par rapport à certains sous-groupes du groupe modulaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et donc beaucoup de relations fonctionnelles indépendantes . Elles satisfont certaines équations différentielles, généralement non linéaires mais peuvent se transformer en des équations linéaires par changement de variable ou de fonction. Pour étudier ces équations différentielles associées aux formes modulaires nous commençons par rappeler les équations satisfaite par les séries E_2, E_4, E_6. Nous étudions l'équation satisfaite par l'invariant modulaire J.

On note à partir de maintenant

$$\vartheta = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz} = q\frac{d}{dq} \quad avec \quad q = e^{2\pi iz}$$

ϑ est l'opérateur différentiel de Rammanujan, qui sera etudié par la suite. Remarquons d'abord que la dérivée d'une forme modulaire de poids k n'est pas une forme modulaire . En effet, soit $f \in \mathcal{M}_k$ possedant le développement en série de Fourier , par dérivation on obtient

$$\vartheta(f) = \frac{1}{2\pi i}\frac{df}{dz} = q\frac{df}{dq} = \sum_{n=0}^{\infty} na_n q^n$$

de même pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on a :

$$\vartheta f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{k+2}\,\vartheta f(z) + \frac{k}{2\pi i}c\,(cz+d)^{k+1}\,f(z) \tag{2.1}$$

ϑf serait une forme modulaire de poids $k+2$, si on avait uniquement le 1^{er} terme. La présence du second terme rend l'étude des formes modulaire et en relation avec la différentiabilité plus riche . On commence par donner des équations différentielles satisfaites par les séries E_2, E_4, E_6

2.1 Èquations diffférentielles des formes E_2, E_4, E_6

D'après (1.8), E_2 n'est pas une forme modulaire de poids 2, c'est précisément ce défaut de modularité qui rend cette théorie des équations différentielles plus intéressante .
D'autre part on sait que E_4 et E_6 sont des générateurs de l'algèbre graduée $M = \oplus M_k$ (théorème (1.1))

2.1.1 équations satisfaites par E_2, E_4, E_6

E_2, E_4, E_6 sont définis par leurs dévelopement en séries de Fourier

$$E_2(\tau) = 1 - 24\sum_{n\geq 0}\sigma_1(n)e^{2i\pi n\tau} \tag{2.2}$$

$$E_4(\tau) = 1 - 240\sum_{n\geq 0}\sigma_3(n)e^{2i\pi n\tau} \tag{2.3}$$

$$E_6(\tau) = 1 - 504\sum_{n\geq 0}\sigma_5(n)e^{2i\pi n\tau} \tag{2.4}$$

où $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$. En particulier on a les identités suivantes, dues à Ramanujan,

$$\vartheta E_2 = \frac{1}{12}\left(E_2^2 - E_4\right), \vartheta E_4 = \frac{1}{3}\left(E_2E_4 - E_6\right) \tag{2.5}$$

$$\vartheta E_6 = \frac{1}{2}\left(E_2E_6 - E_4^2\right), \vartheta E_8 = \frac{2}{3}\left(E_2E_8 - E_{10}\right), \quad (E_8 = E_4^2). \tag{2.6}$$

La première équation que nous rencontrons est l'équation de Riccati dont une solution est la série d'Eisenstein E_2. En dérivant la première équation de Ramanujan on trouve :

$$\vartheta^2 E_2 = \frac{1}{72}E_2^3 - \frac{1}{24}E_2E_4 + \frac{1}{36}E_6 \tag{2.7}$$

Après une seconde dérivation de cette équation et en utilisant les identités de Ramanujan nous obtenons

$$\vartheta^3 E_2 = \frac{1}{288}E_2^4 - \frac{1}{96}E_4^2 - \frac{1}{48}E_2^2E_4 + \frac{1}{36}E_2E_6 \tag{2.8}$$

multiplions (2.7) par E_2 puis substituons le résultat dans l'expréssion (2.8) nous aurons l 'équation

$$\vartheta^3 E_2 = E_2^2\vartheta^2 E_2 - \frac{2}{3}(\vartheta E_2)^2.$$

Ainsi E_2 résout l'équation de Chazy :

$$\vartheta^3 y - y^2\vartheta^2 y + \frac{2}{3}\left(\vartheta y\right)^2 = 0$$

Le résultat suivant est une conséquence du système de Rammanujan

***Proposition* 2.1.** *$y_1 = \Delta^{-\frac{1}{12}}$ est solution d'un opérateur L de Schrödinger de potentiel $\frac{1}{144}E_4$:*

$$\vartheta^2 y_1 - \frac{1}{144}E_4\, y_1 = 0.$$

Proof : Selon produit infini [36], [43] :

$$\Delta(\tau) = e^{2i\pi\tau}\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \quad e^{2i\pi n\tau})^{24}$$

et en utilisant la 2 '*eme* égalité de (1.7), la dérivee logarithmique de Δ est

$$\vartheta \log \Delta(\tau) = E_2(\tau) \tag{2.9}$$

ainsi

$$
\begin{aligned}
\vartheta y_1 &= -\frac{1}{12}(\vartheta\Delta)\Delta^{-\frac{13}{12}} \\
&= -\frac{1}{12} y_1 E_2 \\
\vartheta^2 y_1 &= -\frac{1}{12}\left\{\vartheta y_1 E_2 + y_1 \vartheta E_2\right\} \\
&= -\frac{1}{12}\left\{-\frac{1}{12}E_2^2 + \vartheta E_2\right\} y_1 \\
&= \frac{1}{144} E_4 y_1
\end{aligned}
$$

□

Les séries E_2, E_4, E_6 peuvent être exprimées en fonction de l'invariant de Klein [43](p.22) :

$$
\begin{aligned}
j(\tau) &= 1728\frac{E_4(\tau)^3}{E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2} \\
&= \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + c(3)q^3 + c(4)q^4 + \cdots, \quad q = e^{2i\pi\tau}.
\end{aligned}
$$

Il est commode d'introduire le normalisé $J = \frac{1}{1728}j$ de l'invariant j.

***Lemme* 2.1.**

$$E_4 = \frac{(\vartheta J)^2}{J\,(J-1)} \tag{2.10}$$

$$E_6 = -\frac{(\vartheta J)^3}{J^2\,(J-1)} \tag{2.11}$$

$$E_2 = 6\frac{\vartheta^2 J}{\vartheta J} - 4\frac{\vartheta J}{J} - 3\frac{\vartheta J}{J-1}. \tag{2.12}$$

Une autre conséquence des relations de Ramanujan (2.5) est

$$\frac{\vartheta J}{J} = -\frac{E_6}{E_4} \qquad 6\frac{\vartheta^2 J}{\vartheta J} = E_2 - \frac{4E_6}{E_4} - 3\frac{E_4^2}{E_6} \tag{2.13}$$

Une autre application simple (2.5), que nous utiliserons, est

***Lemme* 2.2.** *Soit comme auparavant*

$$\Delta = \frac{1}{1728}\left(E_4^3 - E_6^2\right), \quad J = \frac{E_4^3}{\Delta}.$$

alors

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{J}\right) = 2i\pi\frac{E_6}{E_4}\left(\frac{1}{J}\right).$$

En particulier

$$\frac{d}{d\left(\frac{1}{J}\right)} = J\frac{E_4}{E_6}\frac{d}{2i\pi d\tau} = J\frac{E_4}{E_6}\vartheta$$

Tous ces résultats seront utiles dans la suite. En effet

2.1.2 Autour de la fonction J

Il est connu que les périodes d'intégrales elliptiques sont données par

$$K_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda t^2)}} = \frac{\pi}{2}{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda\right) \tag{2.14}$$

$$iK_2 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-(1-\lambda)t^2)}} = i\frac{\pi}{2}{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1-\lambda\right) \tag{2.15}$$

et par suite elles vérifient l'équation différentielle hypergéométrique

$$\lambda(1-\lambda)\frac{d^2y}{d\lambda^2} + (1-2\lambda)\frac{dy}{d\lambda} - \frac{1}{4}y = 0 \tag{2.16}$$

La fonction $\lambda \to \tau$, définie comme le quotient des périodes, est une branche de l'inverse de $\tau \to \lambda(\tau)$ et par conséquent vérifie l'équation de Schwarz

$$\{\lambda, \tau\} + \frac{1-\lambda+\lambda^2}{2\lambda^2(1-\lambda)^2}\lambda'^2 = 0 \tag{2.17}$$

où, comme d'habitude, la dérivation étant par rapport à τ

$$\{\lambda, \tau\} = \frac{\lambda'''}{\lambda'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)^2. \tag{2.18}$$

Utilisant la formule de transformation de la dérivée schwarzienne

$$\{f,t\} = \{f,x\}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \{x,t\}, \quad \{f,x\} = \{x,f\}\left(\frac{df}{dx}\right)^2. \tag{2.19}$$

on a

$$\{J,\tau\} + \frac{36J^2 - 41J + 32}{72J^2(J-1)^2}J'^2 = 0. \tag{2.20}$$

Cette équation peut être considérée comme l'équation différentielle de la fonction J. Il est préférable de l'écrire sous une forme d'interprétation équation hypergéométrique

$$\frac{J'''}{J'} - \frac{3}{2}\frac{J''^2}{J'^2} = \frac{-1}{2}\left\{\frac{1-\frac{1}{9}}{J^2} + \frac{1-\frac{1}{4}}{(1-J)^2} + \frac{1-\frac{1}{4}-\frac{1}{9}}{J(1-J)}\right\}J'^2. \tag{2.21}$$

Cela montre que l'invariant absolu J est l'inverse de la fonction égale au quotient de deux solutions linéairement indépendantes de l' équation différentielle hypergéométrique

$$J(J-1)\frac{d^2y}{dJ^2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{6}J\right)\frac{dy}{dJ} - \frac{1}{144}y = 0. \tag{2.22}$$

Les équations différentielles (2.22)et (2.16) sont deux exemples d'équations de Picard-Fuchs. Une autre manière d'associer à l'équation (2.21) une équation différentielle linèaire est d'utiliser le lemme suivant.

Lemme 2.3. *Soit f une fonction assez régulière vérifiant $\{f,x\} = \mathcal{F}(f)f'^2$ et soit $f' = \Omega^2$, alors*

$$\frac{d^2\Omega}{dJ^2} + \frac{1}{2}\mathcal{F}(f)\Omega = 0. \tag{2.23}$$

En effectuant le changement de variable $\Omega = (J')^{1/2}$, avec Ω une fonction de la variable J et tenant compte de l'égalité suivante

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(J) = &-\frac{36J^2 - 41J + 32}{72J^2(J-1)^2}\\ &= \frac{-1}{2}\left\{\frac{1-\frac{1}{9}}{J^2} + \frac{1-\frac{1}{4}}{(1-J)^2} + \frac{1-\frac{1}{4}-\frac{1}{9}}{J(1-J)}\right\}\end{aligned} \tag{2.24}$$

Ainsi nous obtiendrons l'équation linéaire

$$\frac{d^2\Omega}{dJ^2} + \frac{1}{4}\left\{\frac{1-\frac{1}{9}}{J^2} + \frac{1-\frac{1}{4}}{(1-J)^2} + \frac{1-\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-0}{J(1-J)}\right\}\Omega = 0. \tag{2.25}$$

2.1.3 Équation différentielle linéaire satisfaite par une forme modulaire

Nous commençons par donner un théorème qui a connu ces dernières années un regain d'interêt

***Théorème* 2.1.** *Soit k un entier non nul, $f \in \mathcal{M}_k$ et t un fonction modulaire non constante. La fonction F définie localement au voisinage de tout point $z_0 \in \mathcal{H}$ par $F(t(z)) = f(z)$ est une solution (multiforme) d'une équation différentielle linéaire d'ordre $k+1$ à coefficients algèbriques.*

Pour la démonstration de ce théorème, on se réfère à Zagier [44].

2.1.3.1 Exemples

Donnons un exemple , soit

$$\lambda(\tau) = \frac{\vartheta^4_{\frac{1}{2}0}(0,\tau)}{\vartheta^4_{00}(0,\tau)}.$$

$\lambda(\tau)$ est une fonction modulaire pour le sous-groupe $\Gamma(2)$. Soit

$$F(\tau) = \vartheta_{00}(0,\tau)^2$$

F est une forme modulaire de poids 1 sur $\Gamma(2)$. Par ailleurs on a :

$$\vartheta_{00}(0,\tau)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} \left(\frac{\lambda(\tau)}{16}\right)^n$$

$$= {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda(\tau)\right)$$

ce qui montre que F est solution de l'équation hypergéométrique :

$$t(1-t)F^{''}+(1-2t)F'-\frac{1}{4}F=0$$

avec $t=\lambda(\tau)$

Une illustration, toute aussi classique mais peut-être moins connue, est la relation de Fricke qui a constitué la principale motivation de toute notre étude.

$${}_2F_1\left(\frac{1}{12},\frac{5}{12},1;\frac{1}{J(q)}\right)=E_4(q)^{\frac{1}{4}} \tag{2.26}$$

Soient $\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\quad t(\tau)=\frac{1728}{j(\tau)}$ et $F(\tau)=E_4(\tau)$.
$E_4^{\frac{1}{4}}$ est solution d'une équation différentielle hypergéométrique

$$\frac{1}{J(q)}\left(1-\frac{1}{J(q)}\right)y''+\left(1-\frac{3}{2J(q)}\right)y'-\frac{5}{144}y=0 \tag{2.27}$$

Par conséquent E_4 est solution d'une équation différentielle du cinquième ordre , ce qui nous a conduit à étudier les puissances symétriques ou le produit tensoriel d'opérateurs différentiels.

Chapitre 3

Puissances Symétriques d'Opéerateurs Différentiels

La formule de Fricke

$$F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1; \frac{1}{J(\tau)}\right)^{4} = E_4(\tau),$$

et la structure d'algèbre graduée de $M(\Gamma)$ nous ont conduits à étudier les puissances symétriques ou le produit tensoriel d'opérateurs différentiels.

3.1 Définitions

Considérons un opérateur différentiel du second ordre

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)$$

qui est équivalent au système différentiel

$$\begin{cases} f' = & g \\ g' = & -qf - pg. \end{cases}$$

***Proposition* 3.1.** *Soient f et g deux fonctions dérivables telles que*

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

alors

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} f^n \\ f^{n-1}g \\ \vdots \\ fg^{n-1} \\ g^n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} f^n \\ f^{n-1}g \\ \vdots \\ fg^{n-1} \\ g^n \end{pmatrix}$$

où A est la matrice carrée d'ordre $n+1$ définie par

$$(\mathcal{S}) = \begin{cases} a_{k,k} = (1-k)p \quad 1 \leq k \leq n+1, \\ a_{k,k+1} = n+1-k \quad 1 \leq k \leq n \\ a_{k+1,k} = -kq \qquad 1 \leq k \leq n \\ a_{i,j} = 0 \qquad j+1 < i, \quad ou \quad i+1 < j. \end{cases}$$

En effet nous avons

$$(f^n)' = nf^{n-1}f' = nf^{n-1}g$$
$$(g^n)' = ng^{n-1}g' = -nqfg^{n-1} - npg^n.$$

Par ailleurs, pour $1 \leq k \leq n-1$, nous avons

$$\begin{aligned}(f^{n-1}g^k)' &= (n-k)f^{n-k-1}g^kf' + kf^{n-k}g^{k-1}g' \\ &= -kqf^{n-k+1}g^{k-1} - kpf^{n-k}g^k + (n-k)f^{n-k-1}g^{k+1}.\end{aligned}$$

ce qui permet de montrer la proposition.

Maintenant f^n vérifie l'équation $L^{\otimes n}f = 0$, qui est une équation différentielle d'ordre $n+1$. A titre d'exemple nous avons

***Corollaire* 3.1.** *les opérateurs $L_2 = L^{\otimes 2}$, $L_4 = L^{\otimes 4}$ sont donnés par :*

- $L^{\otimes 2} f = f''' + 3pf'' + (2p^2 + 4q + p')f' + (4pq + 2q')f = 0$

- $L^{\otimes 4} f = f^{(5)} + 10Pf^{(4)} + 5(7p^2 + 4q + 2p')f''' + 5(p'' + 6q' + 9pp' + 24pq + 10p^3)f'' + (p''' + 18q'' + 7p'^2 + 11pp'' + 56p'q + 120pq' + 46p^2p' + 64q^2 + 208p^2q + 24p^4)f' + 4(q''' + 2p''q + 7p'q' + 9pq'' + 16qq' + 20pp'q + 26p^2q' + 32pq' + 24p^3q + 26p^2q')f = 0.$

On va donner les détails pour le calcul de $L^{\otimes 2} f$, qui est basé sur un changement de base. Pour cela on va utiliser les résultats vus dans la proposition (3.1). Pour $n = 2$ la matrice A vérifie

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} f^2 \\ fg \\ fg \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f^2 \\ fg \\ g^2 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

avec,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -q & -p & 1 \\ 0 & -2q & -2p \end{pmatrix}$$

En posant

$$\begin{pmatrix} f^2(x) \\ \frac{d}{dx} f^2(x) \\ \frac{d^2}{dx^2} f^2(x) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} f^2(x) \\ f(x)g(x) \\ g^2(x) \end{pmatrix}$$

et en utilisant le fait que $f' = g$ et $g' = -qf - gp$, on obtient

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2q & -2p & 2 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} f^2(x) \\ \frac{d}{dx} f^2(x) \\ \frac{d^2}{dx^2} f^2(x) \end{pmatrix} = \frac{d}{dx}\left(B \begin{pmatrix} f^2(x) \\ f(x)g(x) \\ g^2(x) \end{pmatrix} \right)$$

Une simple dérivation nous donne

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} f^2(x) \\ \frac{d}{dx}f^2(x) \\ \frac{d^2}{dx^2}f^2(x) \end{pmatrix} = \frac{dB}{dx}\begin{pmatrix} f^2(x) \\ f(x)g(x) \\ g^2(x) \end{pmatrix} + B\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} f^2(x) \\ f(x)g(x) \\ g^2(x) \end{pmatrix}$$

En exprimant $\begin{pmatrix} f^2(x) \\ f(x)g(x) \\ g^2(x) \end{pmatrix}$ à l'aide de la matice B^{-1}, et par un simple calcul de $\left(\frac{dB}{dx}B^{-1} + BAB^{-1}\right)$ nous obtenons

$$\frac{d^3 f^2(x)}{dx^3} = -2\left(2pq + q'\right) f^2(x) - \left(2p^2 + 4q + p'\right)\frac{df^2(x)}{dx} - 3p\frac{d^2 f^2(x)}{dx^2}.$$

Ainsi

$$L^{\otimes 2} = \frac{d^3}{dx^3} + 3p\frac{d^2}{dx^2} + (2p^2 + 4q + p')\frac{d}{dx} + (4pq + 2q').$$

De la même manière on calcule $L^{\otimes 4}$.

Nous voudrions rappeler certaines définitions classiques sur les opérateurs différentiels. Notre référence sont [4] et [38] . Soit (k, δ) un corps différentiel de caractéristique 0 avec $\mathbb{C}$ comme corps des constantes . Soient $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ deux équations différentielles linéaires homogènes à coefficients dans k. Il existe une unique équation différentielle linéaire $L_3(y) = 0$ à coefficients dans k, vérifiant $L_3(y_1 y_2) = 0$ avec $L_i(y_i) = 0 \quad i = 1, 2$. L'opérateur L_3 est appelé le produit symétrique des deux opérateurs L_1 et L_2 , on le note $L_3 = L_1 L_2$.

Soit l 'équation différentielle linéaire :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + nP_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \binom{n}{2}P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + P_n y = 0 \tag{3.2}$$

Il est possible d'éliminer le terme $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ et cela par un changement de y en $ye^{-\int P_1 dx}$. L'équation obtenue est :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \binom{n}{2}H\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \binom{n}{3}G\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \binom{n}{4}(I + 3H^2)\frac{d^{n-4}y}{dx^{n-4}} + \cdots = 0 \tag{3.3}$$

Delà on obtient les invariants différentiels suivants :

$$H = P_2 - P_1^2 - \frac{dP_1}{dx}$$

$$G = 2P_1^3 - 3P_1P_2 + P_3 - \frac{d^2P_1}{dx^2}$$

$$I = -6P_1^4 + 12P_1^2P_2 - 4P_1P_3 - 3P_2^2 + P_4 - \frac{d^3P_1}{dx^3}.$$

Pour une équation différentielle du second ordre , on a un seul invariant : $H = P_2 - P_1^2 - \frac{dP_1}{dx}$. Toute équation du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2} + 2P_1\frac{dy}{dx} + P_2y = 0$ est équivalente, par le changement de la fonction y précédent, à $\frac{d^2Y}{dx^2} + HY = 0$. La notion de produits symétrique de deux opérateurs différentiels ou de puissances tensorielle d'un opérateur différentiel est très ancienne, remontant au moins à [4]. Pour un exposé récent on peut consulter [38]. Les deux lemmes suivants nous donnent la forme du produit symétrique ou tensoriel de certains opérateurs différentiels.

***Lemme* 3.1.** *Le produit symétrique de deux opérateurs différentiels*

$$y'' = ay' + by, \qquad z'' = Az' + Bz$$

est un opérateur différentiel du quatrième ordre(resp. troisième ordre) si l'invariant différentiel

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}(a' - A') - \frac{1}{4}\left(a^2 - A^2\right) - (b - B)$$

est non nul(resp. nul).

On peut même expliciter les formes des opérateurs obtenues par produits symétriques ou tensoriels. Il y a plusieurs proc'dés possibles. Nous allons dégager une propriété qui nous semble intéressante et faire le lien avec Appell [4]. Sans diminuer la généralité, on écrit

$$a = L + M, \;\; A = L - M; \quad b = P - Q, \;\; B = P - Q.$$

Soit $w = yz$ le produit de deux solutions $y'' = ay' + by$, $\;z'' = Az' + Bz$, on a

$$\begin{aligned} w'' &= Lw' - Mu + 2Pw + 2v \\ v' &= 2Lv + Qu + Pw' \\ u' &= Lu - Mw' - 2Qw \end{aligned} \tag{3.4}$$

L'élimination de v, v', u' conduit à

$$u\,(M' - LM - 2Q) = (2MQ - 4LP + 2P')\,w + \left(L' - 2L^2 + M^2 + 4P\right) w' + 3Lw'' - w'''.$$

Si

$$M' - LM - 2Q = 0 \tag{3.5}$$

alors $\mathcal{K} = 0$ et w vérifie

$$w''' - 3Lw'' - \left(L' - 2L^2 + M^2 + 4P\right) w' - (2MQ - 4LP + 2P')\,w = 0. \tag{3.6}$$

Sinon on écrit

$$u = \frac{(2MQ - 4LP + 2P')\,w + (L' - 2L^2 + M^2 + 4P)\,w' + 3Lw'' - w'''}{M' - LM - 2Q}$$

en appliquant aux deux membres l'opérateur différentiel $\dfrac{d}{dx} - L$ et en tenant compte de (3.4), on trouve

$$(\frac{d}{dx} - L)\frac{w''' - 3Lw'' - (L' - 2L^2 + M^2 + 4P)\,w' - (2MQ - 4LP + 2P')\,w}{2Q + LM - M'} + Mw' + 2Qw = 0 \tag{3.7}$$

Lemme 3.2. *Le produit symétrique de deux équations différentielles*

$$u'' + I(x)u = 0\,,\; v'' + J(x)v = 0$$

est

$$w^{(4)} + \lambda w^{(3)} + \mu w'' + \nu w' + \rho w = 0$$

avec

$$\lambda = -\frac{I' - J'}{I - J}$$

$$\mu = 2(I + J)$$

$$\nu = \frac{II' - JJ' + 5(IJ' - I'J)}{I - J}$$

$$\rho = \frac{(I - J)^3 + (I'' + J'')(I - J) - (I'^2 - J'^2)}{I - J}$$

Ennonçant un ancien résultat dû à Appell [4] sur le produit tensoriel d'opérateurs.

***Théorème* 3.1.** *Soit l' équation différentielle linéaire d'ordre n*

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_n y = 0$$

dont les coefficients sont des fonctions de x et avec $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ un système fondamental de solutions. On considére les polynômes $\phi_{k_1}, \phi_{k_2} \cdots, \phi_{k_m}$ de degrés respectifs $k_1, k_2, \cdots, k_m$. Alors la fonction

$$Y = \phi_{k_1}(y_1, y_2, \cdots, y_n) + \phi_{k_2}(y_1, y_2, \cdots, y_n) + \cdots + \phi_{k_m}(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

est solution d'une équation différentielle de degré

$$N = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{n(n+1)\cdots(n+k_i-1)}{k_i!}.$$

En particulier si $n = 2$ et $m = 1$, $k_1 = k$ on a $N = k + 1$.

Comme $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ est une base de solutions de l'équation différentielle, on a

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & \cdots & y_n \\ Dy & Dy_1 & \cdots & Dy_n \\ . & . & \cdots & . \\ D^n y & D^n y_1 & \cdots & D^n y_n \end{vmatrix} = 0 \tag{3.8}$$

Le calcul du déterminant suivant la première colonne nous donne l 'équation différentielle linéaire

$$D^n y + a_1 D^{n-1} y + a_2 D^{n-2} y + \cdots + a_n y = 0$$

dont les coefficients a_i sont donnés selon la règle de Cramer. Comme exemple, on prend une équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} - a\frac{dy}{dx} - by = 0. \tag{3.9}$$

Et avec un système fondamental de solutions $\{y_1, y_2\}$, l'équation différentielle linéaire admettant comme base de solutions $\{y_1^2,\, y_1y_2,\, y_2^2\}$ est l'équation d'ordre 3, donnée par :

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3a\frac{d^2y}{dx^2} - \left(4b - 2a^2 + \frac{da}{dx}\right)\frac{dy}{dx} - 2\left(\frac{db}{dx} - 2ab\right)y = 0. \tag{3.10}$$

Cette équation peut être obtenue on utilisant le lemme (3.2) avec $I = J$ ou bien le corrollaire (3.1).
Le produit symétrique pourra être calculé par la méthode donnée par le théorème suivant énoncé dans [9] et [38](prop. 4.26).

***Théorème* 3.2.** *Soit k un corps différentiel et $\Lambda = D^2 + a(x)D + b(x)$, avec $a(x), b(x) \in k$,D est une dérivation dans k . On définit un opérateur M_i par*

$$\begin{aligned} M_0 &= 1 \\ M_1 &= D \\ M_{i+1} &= (D + ia(x))\, M_i + (n - (i-1))\, b(x) M_{i-1}. \end{aligned}$$

Alors M_{n+1} est nième produit symétrique de Λ.

3.1.1 Exemples

Nous définissons finalement, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$y_k(\tau) = \left(E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2\right)^{-\frac{k}{12}} = \Delta^{-\frac{k}{12}} \tag{3.11}$$

de sorte que $y_k = y_1^k$. Les deux premières équations reliant ces fonctions sont des équations différentielles linéaires de second ordre, résultant des équations de Ramanujan

$$\frac{d^2y_1}{d\tau^2} + \frac{\pi^2}{36}E_4(\tau)y_1 = 0, \tag{3.12}$$

$$\frac{d^3y_2}{d\tau^3} - \frac{i\pi^3}{27}E_6(\tau)y_2 = 0. \tag{3.13}$$

Pour avoir (3.13)il suffit d'utiliser l'équation (3.12). En effet on remplace dans (3.10) $a = 0, b = -\frac{\pi^2}{36}E_4(\tau)$ ainsi $y_2 = y_1^2$ vérifie

$$\frac{d^3y_2}{d\tau^3} + \frac{\pi^2}{9}E_4(\tau)\frac{dy_2}{d\tau} + \frac{\pi^2}{18}y_2 = 0. \tag{3.14}$$

mais comme $y_2 = \Delta^{-\frac{1}{6}}$, alors on a $\frac{1}{y_2}\frac{dy_2}{d\tau} = -\frac{1}{6}\frac{\Delta'}{\Delta} = -\frac{i\pi}{3}E_2(\tau)$ et on utilisant $\frac{1}{2i\pi}\frac{E_4}{d\tau} = \frac{1}{3}(E_2E_4 - E_6)$,(3.10) sera

$$\frac{d^3y_2}{d\tau^3} - i\frac{\pi^3}{27}E_6y_2 = 0$$

En utilisant cette méthode on pourra obtenir les autres équations citées dans [41] . Comme conséquence on a le résultat suivant :

***Théorème* 3.3.** *Les fonctions $\Delta^{-\frac{k}{12}}$ sont solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre $k+1$ à coefficients dans $\mathbb{Q}[E_2, E_4, E_6]$, l'anneau différentiel des polynômes de E_2, E_4, E_6 à coefficients rationnels .*

Nous proposons un autre exemple ou nous donnons l'application du lemme (3.2). Désignant par $F(a, b; c; x)$ la fonction hypergéométrique de Gauss, soit $t \in \mathbb{C}$. On introduit l'opérateur différentiel

$$P(x, D) := \left((1-x)\frac{d}{dx}\right)^2 \left(x\frac{d}{dx}\right)^2 - t^4. \tag{3.15}$$

le but est de montrer que

***Proposition* 3.2.** On a :

$$P(x, D)\, F\left(\frac{t}{1+i}, \frac{-t}{1+i}; 1; x\right) F\left(\frac{t}{1-i}, \frac{-t}{1-i}; 1; x\right) = 0. \tag{3.16}$$

1.Par un calcul simple L'opérateur différentiel (3.15)prend la forme :

$$P(x, D) = x^2(1-x)^2\frac{d^4}{dx^4} + (1-x)(5x-6x^2)\frac{d^3}{dx^3} + (1-x)(4-7x)\frac{d^2}{dx^2} - (1-x)\frac{d}{dx} - t^4 \tag{3.17}$$

2. D'après (1.3.0.1), l'équation différentielle $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ est équivalente à $u'' + I(x)u = 0$ où $I(x) = p_2(x) - \frac{1}{2}p_1'(x) - \frac{1}{4}p_1^2(x)$. Les solutions de ces deux équations sont reliées par la relation

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int p_1(x)dx} u$$

3. Par définition $F\left(\frac{t}{1+i}, \frac{-t}{1+i}; 1; x\right)$ est solution de l'équation hypergéométrique

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{t^2}{2i}\frac{1}{x(1-x)}y = 0$$

On a donc

$$p_1(x) = \frac{1}{x}, \quad e^{\frac{1}{2}\int p_1(x)dx} = \sqrt{x}, \quad I(x) = \frac{t^2}{2i}\frac{1}{x(1-x)} + \frac{1}{4x^2}.$$

Par suite $u(x) = \sqrt{x}F\left(\frac{t}{1+i}, \frac{-t}{1+i}; 1; x\right)$ est solution de $u'' + I(x)u = 0$.

4.Nous devons utiliser que $F\left(\frac{t}{1-i}, \frac{-t}{1-i}; 1; x\right)$ est obtenue en substituant $t \mapsto it$ dans $F\left(\frac{t}{1+i}, \frac{-t}{1+i}; 1; x\right)$ et ainsi $v(x) = \sqrt{x}F\left(\frac{t}{1-i}, \frac{-t}{1-i}; 1; x\right)$ est une solution de $u'' + J(x)v = 0$ avec $J(x) = -\frac{t^2}{2i}\frac{1}{x(1-x)} + \frac{1}{4x^2}$.

5.Or si $\Phi(x,t) = F\left(\frac{t}{1+i}, \frac{-t}{1+i}; 1; x\right) F\left(\frac{t}{1-i}, \frac{-t}{1-i}; 1; x\right)$, il viendra

$$(x\Phi)^{(4)} + \lambda(x\Phi^{(3)}) + \mu(x\Phi)'' + \nu(x\Phi)' + \rho(x\Phi) = 0$$

ou

$$x\Phi^{(4)} + (4 + \lambda x)\Phi^{(3)} + (3\lambda + \mu x)\Phi'' + (2\mu + \nu x)\Phi' + (\nu + \rho x)\Phi) = 0.$$

6.Pour calculer λ, μ, ν, ρ on pose $I = I(x,t)$ et $J = J(x,t) = I(x, it)$ et on obtient

$$\begin{aligned}
I = & \frac{t^2}{2i}\frac{1}{x(1-x)} + \frac{1}{4x^2}, \ J(x) & = -\frac{t^2}{2i}\frac{1}{x(1-x)} + \frac{1}{4x^2} \\
I + J = & \frac{1}{2x^2}, \qquad I - J & = \frac{t^2}{i}\frac{1}{x(1-x)} \\
IJ' - I'J = & \frac{t^2}{4i}\frac{1}{x^4(1-x)^2}, \quad II' - JJ' & = -\frac{t^2}{4i}\frac{3-4x}{x^4(1-x)^2}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

7. D'aprés le lemme (3.2) , nous obtenons

$$\begin{aligned}
\lambda \quad &= \frac{1-2x}{x(1-x)}\,, \qquad & \mu \quad &= \frac{1}{x^2}\,,\\
\nu \quad &= \frac{x-2}{x^3(1-x)}\,, & \rho \quad &= -\frac{t^4}{x^2(1-x)^2}+\frac{3}{x^4}-\frac{1-2x}{x^4(1-x)}\,,\\
4+\lambda x \quad &= \frac{5-6x}{1-x}\,, & 3\lambda+\mu x \quad &= \frac{1}{x}\frac{4-7x}{1-x}\,,\\
2\mu+\nu x &= -\frac{1}{x(1-x)}\,, & \nu+\rho x &= -\frac{t^4}{x(1-x)^2}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

8. Par conséquent

$$x\Phi^{(4)}+(4+\lambda x)\Phi^{(3)}+(3\lambda+\mu x)\Phi''+(2\mu+\nu x)\Phi'+(\nu+\rho x)\Phi =$$

$$x\Phi^{(4)}+\frac{5-6x}{1-x}\Phi^{(3)}+\frac{(4-7x)}{(x(1-x)}\Phi''-\frac{1}{x(1-x)}\Phi'-\frac{t^4}{x(1-x)^2}\Phi \;=\; 0.$$

et enfin il ne reste qu'a multiplier la dernière équation par $x(1-x)^2$ pour obtenir (3.16).

Chapitre 4

Opérateur Thêta ϑ

4.1 Définitions et Propriétés

L'opérateur différentiel, appelé quelques fois opérateur de Ramanujan ou opérateur Theta, est défini par

$$\vartheta : \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n n q^n$$

c'est à dire

$$\vartheta = q\frac{d}{dq} = \frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dz}, \quad q = e^{2i\pi z}.$$

Son intérêt réside dans les propriétés suivantes : Si $\mathcal{M}_k$ (resp. $\mathcal{S}_k$) est l'espace des formes modulaires (resp. modulaires paraboliques) de poids k, on a

$$f \in \mathcal{M}_k \Longrightarrow \vartheta f - \frac{k}{12} f E_2 \in \mathcal{M}_{k+2}$$

et plus précisément si pour $k \geq 2$ on définit $h_k = \vartheta E_k - \frac{k}{12}\left(E_2 E_k - E_{k+2}\right)$ alors

1. Si $k \geq 4$, $h_k \in \mathcal{S}_{k+2}$

2. $h_2 = -\vartheta E_2$.

On peut exprimer les puissances ϑ^n comme opérateur différentiel en $\dfrac{d}{dq}$, à coefficients monômes. Plusieurs méthodes sont possibles pour aborder cette question, dont certaines sont certainement connues des mathématiçiens du XIXème siècle. Notre approche ici est d'exploiter le fait essentiel que tout monôme X^n est vecteur propre de l'opérateur

ϑ, $\vartheta X^n = nX^n$ et ensuite d'utiliser le théorème d'approximation de Stone-Weierstrass. On a

***Proposition* 4.1.** *Pour toute fonction assez régulière f de la variable q*

$$
\begin{aligned}
\vartheta^n f =& q\frac{df}{dq} + \Big[\frac{1^{n-1}}{1-2} + \frac{2^{n-1}}{2-1}\Big] q^2 \frac{d^2 f}{dq^2} \\
&+ \Big[\frac{1^{n-1}}{(1-2)(1-3)} + \frac{2^{n-1}}{(2-1)(2-3)} + \frac{3^{n-1}}{(3-1)(3-2)}\Big] q^3 \frac{d^3 f}{dq^3} \\
&+ \Big[\frac{1^{n-1}}{(1-2)(1-3)(1-4)} + \frac{2^{n-1}}{(2-1)(2-3)(2-4)} + \frac{3^{n-1}}{(3-1)(3-2)(3-4)} + \\
&+ \frac{4^{n-1}}{(4-1)(4-2)(4-3)}\Big] q^4 \frac{d^4 f}{dq^4} \\
&+ \cdots \\
&+ \Big[\frac{1^{n-1}}{(1-2)(1-3)\cdots(1-n)} + \frac{2^{n-1}}{(2-1)(2-3)\cdots(2-n)} + \frac{3^{n-1}}{(3-1)(3-2)(3-4)\cdots(3-n)} \\
&\qquad + \frac{n^{n-1}}{(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))}\Big] q^n \frac{d^n f}{dq^n}
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Pour prouver la proposition on se restreint, grâce au théorème d'approximation de Stone-Weierstrass, aux fonctions monômes $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$, ce qui revient à montrer le lemme suivant

***Lemme* 4.1.**

$$
\begin{aligned}
k^n =& k + \Big[\frac{1^{n-1}}{1-2} + \frac{2^{n-1}}{2-1}\Big]k(k-1) \\
&+ \Big[\frac{1^{n-1}}{(1-2)(1-3)} + \frac{2^{n-1}}{(2-1)(2-3)} + \frac{3^{n-1}}{(3-1)(3-2)}\Big]k(k-1)(k-2) \\
&+ \Big[\frac{1^{n-1}}{(1-2)(1-3)(1-4)} + \frac{2^{n-1}}{(2-1)(2-3)(2-4)} + \frac{3^{n-1}}{(3-1)(3-2)(3-4)} + \\
&+ \frac{4^{n-1}}{(4-1)(4-2)(4-3)}\Big]k(k-1)(k-2)(k-3)
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

$$+\cdots$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big[\frac{1^{n-1}}{(1-2)(1-3)\cdots(1-n)} + \frac{2^{n-1}}{(2-1)(2-3)\cdots(2-n)} + \frac{3^{n-1}}{(3-1)(3-2)(3-4)\cdots(3-n)} \\
&\qquad + \frac{n^{n-1}}{(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))}\Big]k(k-1)(k-2)\cdots(k-(n-1))
\end{aligned}
$$

4.2 Polynômes de Hilbert, Nombres de Stirling et preuve du lemme

Les polynômes de Hilbert $H_j(X)$ sont une extension (polynomiale) des coefficients binomiaux. On considère la suite de polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ (ou dans $\mathbf{K}[X]$, $\mathbf{K}$étant un corps de caractéristique zéro) définie par

$$H_0(X) = 1, \quad H_j(X) = \binom{X}{j} = \frac{X(X-1)\cdots(X-j+1)}{j!}. \tag{4.3}$$

La famille de polynômes échelonnés $(H_j(X))_{0\leq j\leq m}$ constitue une base de l'espace $\mathbb{R}_m[X]$ des polynômes de degrés au plus m et on a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$

$$X^m = \sum_{j\geq 0} A_{mj} H_j(X) \tag{4.4}$$

avec

$$A_{mj} = 0 \quad j > m.$$

Les nombres A_{mj} sont reliés aux nombres de Stirling de seconde espèce $S(m,n)$ dont nous rappelons la définition. En analyse combinatoire $S(m,n)$ est le nombre de manières de partitionner un ensemble de m élèments en n classes d'équivalence. Une façon équivalente est de dire que le cardinal de l'ensemble $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ des applications surjectives d'un ensemble E à m élèments dans d'un ensemble F à n élèments est

$$\sharp(\mathcal{E},\mathcal{F}) = n!S(m,n).$$

Ces nombres satisfont aux relations de récurrence

$$S(m,n) = S(m-1,n-1) + nS(m-1,n).$$

Pour fixer les idées voici une petite table donnant les $S(m,n)$, $0 \leq n \leq m \leq 4$

m \ n	0	1	2	3	4
0	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	1	3	1	
4	0	1	7	6	1

La relation de récurrence des $S(m,n)$ permet de montrer que

$$S(m,n) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m.$$

Les nombres de Stirling de première espèce $s(m,n)$ (signés ou avec signes) sont définis comme étant le coefficient de X^m dans le développement de

$$(X)_n := X(X-1)...(X-n+1).$$

C'est à dire

$$(X)_n := \sum_{m=0}^{n} s(n,m)X^m.$$

Ces nombres vérifient la relation de récurrence

$$s(m,n) = s(m-1,n-1) - (m-1)s(m-1,n),$$

avec les conditions initiales

$$s(0,0) = 1 \quad et \quad \forall n > 0, \quad s(n,0) = s(0,n) = 0$$

Une petite table pour les $s(m,n)$

$m \backslash n$	0	1	2	3	4
0	1				
1	0	1			
2	0	-1	1		
3	0	2	-3	1	
4	0	-6	11	-6	1

Les valeurs $|s(m,n)|$ des nombres de Stirling de première espèce sont appelés nombres de Stirling de première espèce signés. Ils vérifient la relation de récurrence

$$|s(m,n)| = |s(m-1,n-1)| + (m-1)|s(m-1,n)|$$

avec l'interprétation combinatoire que $|s(m,n)|$ est le nombre de permutations de m lettres avec exactement n cycles. Enfin on a les relations d'orthogonalité

$$\sum_{k=0}^{\min(m,n)} s(m,k)S(k,n) = \delta_{m,n}$$

$$\sum_{k=0}^{\min(m,n)} S(m,k)s(k,n) = \delta_{m,n}.$$

Ainsi, on a pour les nombres de Stirling de seconde espèce $S(m,n)$ la propriété suivante, pouvant servir, si on veut, de définition

$$X^m = \sum_{j=0}^{m} S(m,j)(X)_j = \sum_{j=0}^{m} S(m,j)X(X-1)...(X-j+1).$$

Comparant avec la relation (4.4), on a les égalités

$$\begin{aligned} S(m,j) &= \frac{A_{m,j}}{j!} \\ &= \frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\binom{j}{i}(j-i)^m \end{aligned}$$

d'où

$$A_{m,j} = \sum_{i=0}^{j}(-1)^i\binom{j}{i}(j-i)^m \tag{4.5}$$

Remarque 4.2.1. *Les nombres de Stirling de seconde espèce peuvent être retrouvés par la formule de Faà di Bruno à travers la relation*

$$\frac{d^m}{dx^m}f(e^x)_{|x=0} = \sum_{j=0}^{m} S(m,j)f^{(j)}(1).$$

On peut reconsidérer ce qui précède sous un angle plus général. On introduit l'application linéaire

$$u : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$$

$$P(X) \longrightarrow u(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

Cette application envoie $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Son noyau est $\mathbb{R}$ et elle est donc surjective par le théorème du rang. On introduit aussi

$$u^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}, \quad u^r = u \circ u \circ \cdots u \ (r\,fois).$$

Alors $u(H_0) = 0$ et $u(H_n) = H_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent

$$u^k(H_n) = H_{n-k},\ 0 \leq k \leq n$$

et

$$u^k(H_n) = 0,\ k \geq n+1.$$

Comme $H_0 = 1$ et $H_{n-k}(0) = 0$ pour $0 \leq k \leq n-1$ on arrive à la relation d'"orthogonalité"

$$u^k(H_n)(0) = \delta_{n,k},$$

$\delta_{n,k}$ étant le symbole de Kronecker. En conclusion pour tout polynôme non nul, de degré $n \geq 1$, s'écrivant $P = \sum_{0 \leq k \leq n} \lambda_k H_k$ on a pour $0 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned} u^j(P)(0) &= \sum_{0 \leq k \leq n} \lambda_k u^j(H_k)(0) \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} \lambda_k \delta_{k,j} \\ &= \lambda_j. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ainsi

$$P = \sum_{0 \leq k \leq n} u^j(P)(0) H_k.$$

Cette égalité généralise la relation (4.4) car

$$u^k(X^j)(0) = A_{jk} = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \binom{k}{n} (k-n)^j.$$

Nous allons porter notre attention sur la relation (4.4). Plusieurs expressions de A_{kj} sont connues, notamment dans [31] (p.2-4)

$$A_{nj} = \sum_{l_i > 0, l_1 + l_2 + \cdots l_j = n} \frac{n!}{l_1! l_2! \cdots l_j!} \tag{4.7}$$

ou, conformément à (4.5) :

$$A_{nj} = \sum_{m=0}^{j} (-1)^m \binom{j}{m} (j-m)^n = u^j X^n{}_{|X=0} \tag{4.8}$$

ou u est l'opérateur aux différences, $uf(x) = f(x+1) - f(x)$, introduite précédemment. Ceci achève la preuve du lemme (4.1).

4.2.1 2eme Preuve du Lemme

Il est possible de donner une autre approche pour calculer $(xD)^n f$ en utilisant une représentation intégrale. Cette représentation s'appliquera, par exemple, à la classe des fonctions entières de type exponentiel et utilisera des idées empruntées à la transformation de Fourier-Borel. Nous rappelons le théorème de Wigert [13].

***Théorème* 4.1.** *Pour qu'une fonction entière $f(z)$ soit d'ordre 1 et de type exponentiel γ il faut et il suffit que $f(z)$ s'écrive sous la forme*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} e^{zu} \phi(u)\, du \tag{4.9}$$

où $\mathcal{C}$ est un contour, d'indice 1, entourant le circle $\{|u| = \gamma\}$ et ϕ est une fonction holomorphe dans le disque ouvert $\{|u| < \gamma\}$. Dans cette situation nous avons la formule d'inversion suivante :

$$\phi(u) = \int_0^\infty f(x) e^{xu}\, dx, \quad \gamma < u. \tag{4.10}$$

La formule (4.9) donne, avec $D_z = \dfrac{d}{dz}$:

$$(zD_z)^n f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} (zD_z)^n e^{zu} \phi(u)\, du. \tag{4.11}$$

Cette représentation intégrale a l'avantage de réduire notre problème au calcul de $(zD_z)^n e^{zu}$ qui est d'une certaine manière classique. Nous introduisons, ce que nous appelons les polynômes exponentiels Φ_n par

$$(xD_x)^n e^x = \Phi_n(x) e^x.$$

Ils admettent la série génératrice :

$$e^{x(e^z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) \frac{z^n}{n!}. \tag{4.12}$$

Ces polynômes satisfont à de nombreuses identitiés, à travers des dérivations de (4.12) par rapport à x et à z. L'égalité (4.11) devient

$$(zD_z)^n f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \Phi_n(zu) e^{zu} \phi(u)\, du$$

qui est une sorte de convolutions multiplicative.

Remarque 4.2.2. *On peut aussi donner des représentations intégrales de type Cauchy, en considérant*

$$(zD_z)^n \frac{1}{u-z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{u^{k+1}} z^k.$$

Un cas particulier, lorsque $n \in \mathbb{Z}^+$ est

$$(zD_z)^n \frac{z}{1-z} = \sum_{k=1}^{\infty} k^n z^k. \tag{4.13}$$

Les inverses, convenablement définis, de l'opérateur theta $\vartheta = x\frac{d}{dx}$ sont très intéressants. Un inverse est donné par exemple par

$$\vartheta^{-1}\ F(x) = \int_0^x F(u) \frac{du}{u}$$

agissant sur les fonctions pour lesquelles l'intégrale de F a un sens. Une recurrence simple montre que $n \in \mathbb{Z}^+$

$$(zD_z)^{-n} \frac{z}{1-z} = \Phi(z, n) \tag{4.14}$$

où

$$\Phi(z, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$$

est la fonction polylogarithme classique. Les (4.13) et (4.14), étendues à $n = 0$ en définissant $(zD_z)^0$ comme l'opérateur identité, deviennent $(zD_z)^n \frac{z}{1-z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque 4.2.3. *L'opérateur ϑ, assez naturel dans les questions de dérivations des fonc-*

tions modulaires par exemple, est aussi naturel dans l'étude des équations différentielles, notamment lorsque celles-ci sont réduites à la forme normale de Fuchs et Frobenius [29]. On peut vérifier que pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$x^m \frac{d^m}{dx^m} = \vartheta(\vartheta - 1)(\vartheta - 2) \cdots (\vartheta - m + 1)$$

et par suite toute équation différentielle

$$x^n \frac{d^n}{dx^n} y + P_1(x) x^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y + \cdots P_n(x) y = 0 \tag{4.15}$$

se réduit à la forme

$$\vartheta^n y + Q_1(x) \vartheta^{n-1} y + Q_2(x) \vartheta^{n-2} y + \cdots + Q_n(x) y = 0. \tag{4.16}$$

On verra plus loin une application de cette dernière expression à la fonction hypergéométrique.

Remarque 4.2.4. *Les opérateurs theta ϑ ont d'autres propriétés, relevant du calcul symbolique. Par exemple pour tout polynôme $F(X)$ et pour deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle de la droite réelle, on a, en remplaçant la variable q par la variable x :*

$$F(\vartheta) x^n = F(n) x^n$$

$$F(\vartheta) e^{g(x)} f(x) = e^{g(x)} F\left(\vartheta + x g'\right) f(x). \tag{4.17}$$

Nous terminons cette sous-section par une remarque arithmétique sur les polynômes de Hilbert. Nous savons par tout ce qui précède que tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$P(X) = a_0 + a_1 H_1(X) + a_2 H_2(X) + \cdots a_n H_n(X).$$

Une conséquence de cette décomposition est que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ si et seulement si $a_i \in \mathbb{Z}$ pour tout $0 \leq i \leq n$. En effet un sens est clair : si les a_i sont entiers, alors $P(n)$ est entier pour tout entier n. Dans l'autre sens, si $P(n)$ est entier pour tout entier n, alors

$$P(0) = a_0 \in \mathbb{Z}$$
$$P(1) = a_0 + a_1 \in \mathbb{Z}$$
$$P(2) = a_0 + a_1 H_1(2) + a_2 \in \mathbb{Z}$$

$$P(n) = a_0 + a_1 H_1(n) + a_2 H_2(n) + \cdots + a_n \in \mathbb{Z}. \tag{4.18}$$

On en déduit de proche en proche que tous les a_i sont entiers car $H_j(k)$ est entier pour tout entier $k \geq j$.

Chapitre 5

Lemme de Bol et Formule de Faà di Bruno

5.1 Lemme de Bol

Voici à présent un théorème fondamental sur lequel nous allons nous attarder, vu son importance dans notre travail

***Théorème* 5.1.** *(Lemme de Bol) Soit f une fonction définie sur $\mathcal{H}$ telle que*

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=\frac{\lambda}{(c\tau+d)^m}f(\tau),$$

alors

$$\frac{d^{m+1}}{d\tau'^{m+1}}f(\tau')=\lambda(c\tau+d)^{m+2}\frac{d^{m+1}}{d\tau^{m+1}}f(\tau). \tag{5.1}$$

En particulier, si $y_k=\left(E_4^3-E_6^2\right)^{-\frac{k}{12}}$, alors

$$\frac{1}{y_k(\tau)}\frac{d^{k+1}}{d\tau^{k+1}}y_k(\tau)$$

est une forme modulaire de poids $2k+2$.

Pour prouver ce théorème on peut faire appel à la formule de Faà di Bruno, donnant la dérivée d'ordre m d'une fonction composeée. Nous allons dans un premier temps rappeler quelques unes des versions de cette célèbre formule, essentiellement de nature combinatoire. On renvoie à notre référence principale [19] pour plus de détails.

5.1.1 La formule de Faà di Bruno

***Théorème* 5.2.** *(Formule de Faà di Bruno) Soient f, g deux fonctions suffisamment dérivables d'une variable x, on a*

$$\frac{d^m}{dt^m}g(f(t)) = \sum \frac{m!}{b_1!b_2!\cdots b_m!}g^{(k)}\left(f(t)\right)\left(\frac{f'(t)}{1!}\right)^{b_1}\left(\frac{f''(t)}{2!}\right)^{b_2},\cdots\left(\frac{f^{(m)}(t)}{m!}\right)^{b_m}$$

La somme étant étendue à tous les m-uplets $(b_1, b_2, \cdots, b_m)$ tels que

$$b_1 + 2b_2 + \cdots + mb_m = m, \qquad k = b_1 + b_2 + \cdots + b_m.$$

Cette formule a été redécouverte par plusieurs auteurs et est présentée sous différentes formes dont certaines utilisent la riche théorie des polynômes de Bell que nous dfinissons à présent

***Définition* 5.1.1.** *Les polynômes de Bell sont définis par*

$$B_{n,k}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-k+1}) = \sum \frac{n!}{j_1!j_2!\cdots j_{n-k+1}!}\left(\frac{x_1}{1!}\right)^{j_1}\left(\frac{x_2}{2!}\right)^{j_2}\cdots\left(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right)^{j_{n-k+1}}$$

La somme étant étendue à tous les m-uplets $(j_1, j_2, \cdots, j_{n-k+1})$ tels que

$$j_1 + 2j_2 + \cdots + (n-k+1)j_{n-k+1} = n, \qquad k = j_1 + j_2 + \cdots + j_{n-k+1} = k.$$

De sorte qu' à l'aide des polynômes de Bell, la formule de Faà di Bruno s'énonce comme suit

$$\frac{d^m}{dt^m}g(f(t)) = \sum_{k=0}^{m} g^{(k)}(f(t))B_{n,k}\left(f'(t), f''(t), \cdots, f^{(n-k+1)}(t)\right).$$

Nous donnons ici la version de Hope :

***Théorème* 5.3.** *Soient f, g deux fonctions assez dérivables sur un intervalle de l'axe réel, alors*

$$\frac{d^m}{dt^m}g(f(t)) = \sum_{k=0}^{m}\frac{g^{(k)}(f(t))}{k!}A_{m,k}\left(f(t)\right)$$

où

$$A_{m,k}\left(f(t)\right)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(-f(t)\right)^{k-j}\frac{d^m}{dt^m}\left(f(t)\right)^j.$$

Les $A_{m,k}\left(f(t)\right)$ vérifient les équations aux différences différentielles

$$\frac{d}{dt}A_{m,k}\left(f(t)\right)=A_{m+1,k}\left(f(t)\right)-f'(t)A_{m,k-1}\left(f(t)\right)$$

et où $A_{m,0}\left(f(t)\right)=0$ sauf si $m=0$ où il est égale à 1.

Remarque 5.1.1. *Si $x=f(t)=e^t$, $g(x)=g(e^t)$ alors*

$$\frac{d}{dt}g(e^t)=x\frac{d}{dx}g(x)=\vartheta g(x)$$

et donc par le formule de Hope (théorème (5.3))

$$\vartheta^m g(x)=\frac{d^m}{dt^m}g(f(t)).$$

Or si $f(t)=e^t$, on a

$$A_{m,k}\left(f(t)\right)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(-f(t)\right)^{k-j}j^m\left(f(t)\right)^j=f(t)^k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}j^m.$$

L'intérêt principal de la formule de Faà di Bruno est sa lecture différentielle, c'est à dire qu'elle est plus qu'une formule donnant la dérivée $n$ième d'une fonction composée mais donnant la puissance $n$ième de certains opérateurs différentiels à l'aide de dérivations élèmentaires $\frac{d^j}{dx^j}$. Plus précisément :

Si $\rho : z \to w$ est une fonction définie sur un intervalle I_z et si $f : t \to z$ est un difféomorphisme sur un intervalle T_t avec $f(I_t)=I_z$ On note $h : I_z \to I_t$ le difféomorphisme réciproque de f. On note $w=\rho\circ f$. Alors par la formule de Faà di Bruno

$$\frac{d^n w}{dt^n}=\sum_{k=1}^{n}A_{n,k}(t)\frac{d^k w}{dz^k},\quad n\geq 1,$$

avec

$$A_{n+1,k}=f'A_{n,k-1}-A'_{n,k},\quad 1\leq k\leq n+1;\ A_{n,0}=A_{n,n+1}=0;\ A_{1,1}=f'$$

et

$$A_{n,1} = f^{(n)}, \quad A_{n,n} = n!(f')^n.$$

Comme $\dfrac{d}{dt} = f'(t)\dfrac{d}{dz}$ on obtient la relation voulue

$$\left(f'(h(z))\frac{d}{dz}\right)^n = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k}(h(z))\frac{d^k}{dz^k}.$$

Remarque 5.1.2. *La formule énoncée dans le théorème précédent correspond vraiment à une autre, fondamentale dans la théorie des formes modulaires, notamment dans la conception des crochets de Rankin-Cohen, et qui s'énonce comme suit*

***Théorème* 5.4.** *Soit f une fonction définie sut $\mathcal{H}$ telle que*

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k f(\tau), \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad-bc = 1,$$

alors

$$f^{(m)}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \sum_{p=0}^{m} \frac{m!(k+m-1)!}{p!(m-p)!(k+p-1)!} c^{m-p}(c\tau+d)^{k+m+p} f^{(p)}(\tau)$$

Nous allons donner la preuve du Lemme de Bol, c'est à dire le théorème (5.1) et on suppose $\lambda = 1$ pour simplifier : elle est basée sur la formule de Faà di Bruno, énoncée à l'aide des polynômes de Bell. On part d'une fonction holomorphe dans le demi-plan supérieur qui vérifie pour tout z dans ce demi-plan et pour tout $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, ad-bc = 1$:

$$(cz+d)^m f(h(z)) = f(z), \quad h : z \to h(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Par la formule de Leibniz

$$f^{(m+1)}(z) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} \left((cz+d)^m\right)^{(j)} (f \circ h)^{(m+1-j)}(z),$$

le second membre ne comportant maintenant que $m+1$ termes au lieu de $m+2$. La formule de Faà di Bruno , écrite à l'aide des polynômes de Bell donne

$$(f \circ h)^{(m+1-j)}(z) = \sum_{p=1}^{m+1-j} f^{(p)}\left(h(z)\right) B_{m+1-j,p}\left(h'(z), \cdots, h^{(m+2-j-p)}(z)\right).$$

Or pour tout entier naturel non nul q on a

$$h^{(q)}(z) = (-1)^{q-1} q! c^{q-1} (cz+d)^{-q-1}$$

et donc, compte-tenu de l'expression des polynômes de Bell, on obtient

$$B_{m+1-j,p}\left(h'(z), \cdots, h^{(m+2-j-p)}(z)\right) = \frac{(m+1-j)!}{p!}\binom{m-j}{p-1}(-1)^{m+1-j-p}c^{m+1-j-p}(cz+d)^{-m-1+j-p}.$$

Il vient alors

$$f^{(m+1)}(z) = \sum_{j=0}^{m} \frac{m!(m+1)!}{j!}\left(\sum_{p=1}^{m+1-j} f^{(p)}(h(z)) \frac{(-1)^{m+1-j-p}c^{m+1-p}}{p!(p-1)!(m+1-j-p)!}(cz+d)^{-1-p}\right)$$

$$= \sum_{p=1}^{m+1} f^{(p)}(h(z)) \frac{c^{m+1-p}(cz+d)^{-1-p}}{p!(p-1)!}\left(\sum_{j=0}^{m+1-p} \frac{m!(m+1)!}{j!(m+1-p-j)!}(-1)^{m+1-p-j}\right)$$

$$= f^{(m+1)}(h(z))(cz+d)^{-m-2}$$

$$+\sum_{p=1}^{m} f^{(p)}(h(z))\binom{m+1}{p}\frac{m!c^{m+1-p}}{(p-1)!(cz+d)^{p+1}}\left(\sum_{j=0}^{m+1-p}\binom{m+1-p}{j}(-1)^{m+1-p-j}\right)$$

Mais, en vertu de la formule du binôme, pour tout p compris entre 1 et m on a :

$$\sum_{j=0}^{m+1-p}\binom{m+1-p}{j}(-1)^{m+1-p-j} = ((1+(-1))^{m+1-p} = 0.$$

On aboutit donc à la conclusion souhaitée

$$f^{(m+1)}(z) = f^{(m+1)}(h(z))(cz+d)^{-m-2}.$$

Comme conséquence du théorème (5.1), on a le

***Corollaire* 5.1.** *Pour tout entier k, $\dfrac{1}{y_k(\tau)}\dfrac{d^{k+1}}{d\tau^{k+1}}y_k(\tau)$ est une combinaison linéaire, à coefficients rationnels, des monômes $E_4^{\alpha}E_6^{\beta}$, $4\alpha+6\beta = 2k+2$.*

la preuve du corollaire utilise le lemme de Bol ainsi que le théorème (1.1).

Pour $k = 1$ on a

$$y_1 = \Delta^{\frac{-1}{12}}$$

Cette puissance de la fonction discriminant joue un rôle important dans ce qui va suivre. En utilisant le système différentiel de Ramanujan , on obtient

$$\frac{y_1'}{y_1} = -1/12E_2$$

une deuxieme dérivation nous donne

$$\frac{y_1''}{y_1} = \frac{1}{144}E_4$$

pour $k = 2$ on trouvel'équation différentielle du second ordre

$$\frac{y_2'''}{y_2} = \frac{-1}{216}E_6$$

on donnera à la fin de notre travail un tableau donnant des équations différentielles d'ordres plus élevés pour des puissances plus élevées de la fonction discriminant.

5.2 Opérateurs Différentiels

5.2.1 Formule de Faa di Bruno et opérateurs différentielles

Nous venons de nous rendre compte qu' obtenir une itération d'un même opérateur différentiel sous forme d'un opérateur différentiel explicite n'est pas chose facile. Sur les exemples déjà rencontrés, la formule de Faà di Bruno a été d'une grande utilité. Nous présentons dans cette sous-section un aspect que nous éspérons général. Soit I un intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ et soit $u \in \mathcal{C}^\infty(I)$, ne s'annulant jamais sur I. L'opérateur différentiel $u(x)\frac{d}{dx}$ agit (à gauche) sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(I)$. D'autre part, selon la variante du théorème de Cauchy-Lipschitz concernant les équations différentielles à variables séparables, l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dt} = u(X)$$

possède une solution (J, ϕ), dont l'image $\phi(J)$ est égale à l'intervalle I tout entier. De plus la fonction ϕ est la fonction réciproque d'une primitive de la fonction u^{-1}. Comme la fonction u ne s'annule pas sur I, cette solution est un changement de variables de J sur I. On dispose alors de la bijection linéaire

$$L : \mathcal{C}^{\infty}(I) \mapsto \mathcal{C}^{\infty}(J), \quad L(f) = f \circ \phi.$$

La bijection linéaire réciproque étant donnée par la formule

$$L^{-1}(g) = g \circ \phi^{-1}.$$

***Lemme* 5.1.** *Les opérateurs* $\dfrac{d}{dx}$ *et* $u(x)\frac{d}{dx}$ *sont conjugués en ce sens que*

$$u(x)\frac{d}{dx} = L^{-1} \circ \frac{d}{dx} \circ L$$

En effet si f est une fonction dérivable sur I on a $L^{-1} \circ \dfrac{d}{dx} \circ L(f) = f'(\phi)\phi' \circ \phi^{-1} = u\dfrac{d}{dx} = u\dfrac{d}{dx}(f)$. Par suite pour tout entier naturel non nul on obtient

$$\left(u(x)\frac{d}{dx}\right)^n = L^{-1} \circ \frac{d^n}{dx^n} \circ L.$$

Ainsi, pour tout entier naturel non nul et pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur I on a

$$\left(\left(u(x)\frac{d}{dx}\right)^n f\right) \circ \phi = \frac{d^n}{dx^n}(f \circ \phi).$$

C'est à dire, graâce à la formule de Faà di Bruno, exprimée à l'aide des polynoômes de Bell

$$\left(\left(u(x)\frac{d}{dx}\right)^n f\right) \circ \phi = \sum_{p=1}^{n} B_{n,p}\left(\phi', \cdots, \phi^{(n-p+1)}\right)\left(f^{(p)} \circ \phi\right)$$

et enfin on aboutit à la formule

$$\left(u(x)\frac{d}{dx}\right)^n = \sum_{p=1}^{n} B_{n,p}\left(\phi'\left(\phi^{-1}(x)\right), \cdots, \phi^{(n-p+1)}\left(\phi^{-1}(x)\right)\right)\frac{d^p}{dx^p}. \tag{5.2}$$

5.2.2 Exemples

Nous allons illustrer ces identités par deux exemples :

1. Le cas de $I =]0, \infty[$ et $u(x) = x^N$ où N est un entier non nul. La solution (J, ϕ) choisie est :
   - Si $N < 0$: $J =]0, \infty[$ et $\phi(t) = ((1-N)t)^{\frac{1}{1-N}}$
   - Si $N = 1$: $J = \mathbb{R}$ et $\phi(t) = e^t$
   - Si $N > 1$: $J =]-\infty, 0[$ et $\phi(t) = ((1-N)t)^{\frac{1}{1-N}}$

Dans tous les cas, pour tout entier k on a

$$\phi^{(k)} = \left(\prod_{j=1}^{k} ((j-1)(N-1)+1)\right) \phi^{k(N-1)+1}.$$

On désigne par $F(n,p)$ l'ensemble

$$\{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p) \in \mathbb{N}^p; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_p = n\}$$

Et compte tenu de l'expression des polynômes de Bell dans la base canonique de l'espace vectoriel des polynômes on a

$$B_{n,p}\left(\phi', \cdots, \phi^{(n-p+1)}\right) = \frac{1}{p!} \sum_{(r_1,\cdots,r_p)\in F(n,p)} \frac{n!}{r_1! \cdots r_p!} \phi^{(r_1)} \cdots \phi^{(r_p)}$$

$$= \phi^{n(N-1)+p} \frac{n!}{p!} \sum_{(r_1,\cdots,r_p)\in F(n,p)} \left(\prod_{\alpha=1}^{p} \frac{1}{r_\alpha!} \left(\prod_{j=1}^{r_\alpha} ((j-1)(N-1)+1)\right)\right).$$

En conséquence l'équation (5.2) donne

$$\left(x^N \frac{d}{dx}\right)^n = n! x^{n(N-1)} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} C(N,n,p)\, x^p \frac{d^p}{dx^p} \tag{5.3}$$

où le coefficient $C(N,n,p)$ est

$$C(N,n,p) = \sum_{(r_1,\cdots,r_p)\in F(n,p)} \left(\prod_{\alpha=1}^{p} \frac{1}{r_\alpha!} \left(\prod_{j=1}^{r_\alpha} ((j-1)(N-1)+1)\right)\right)$$

On peut souligner notamment les cas $N = 1$ et $N = 2$

– $\left(x\dfrac{d}{dx}\right)^n = n!\sum_{p=1}^{n} B_{n,p}(1, ..., 1)x^p \dfrac{d^p}{dx^p}$

– $\left(x^2\dfrac{d}{dx}\right)^n = n!x^n \sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p!}\binom{n-1}{p-1} x^p \dfrac{d^p}{dx^p}.$

On peut remarquer que la formule (5.3) a de nombreuses conséquences algébriques et combinatoires. Si on applique (5.3) à la fonction $x \to x^\lambda, \lambda \in \mathbb{C}$ on obtient l'égalité

$$\frac{1}{n!}\prod_{0<k<n}(\lambda + k(N-1)) = \sum_{p=1}^{n} C\left(N, n, p\right)\left(\frac{1}{p!}\prod_{0<j<p}(\lambda - j)\right)$$

Examinons le cas $I = \mathbb{R}$ et $u(x) = e^{-x}$. La solution (J, ϕ) choisie est

$$J =]0,\ +\infty[, \quad \phi(t) = \log t.$$

On a alors

$$\phi^{(k)} = (-1)^k (k-1)!\, e^{-k\Phi}.$$

Compte-tenu de l'expression des polynômes de Bell dans la base canonique des polynômes, il vient alors

$$B_{n,p}\left(\phi', \cdots, \phi^{(n-p+1)}\right) = \frac{1}{p!}\sum_{(r_1,\cdots,r_p)\in F(n,p)} \frac{n!}{r_1!\cdots r_p!}\phi^{(r_1)}\cdots\phi^{(r_p)}$$

$$= \frac{n!}{p!}\, e^{-n\phi}\sum_{(r_1,\cdots,r_p)\in F(n,p)} (-1)^{n-p}\left(\prod_{\alpha=1}^{p}\frac{1}{r_\alpha}\right).$$

En conclusion nous obtenons la formule :

$$\left(e^{-x}\frac{d}{dx}\right)^n = n!\, e^{-nx}\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{n-p}}{p!}\left(\sum_{(r_1,\cdots,r_p)\in F(n,p)}\left(\prod_{\alpha=1}^{p}\frac{1}{r_\alpha}\right)\right)\frac{d^p}{dx^p}.$$

Si on applique cette dernière relation à la fonction $x \to e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, on obtient la nouvelle relation polynomiale

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n!} \prod_{0<j<n} (\lambda - j) = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}\lambda^{p-1}}{p!} \left(\sum_{(r_1,\cdots,r_p)\in F(n,p)} \left(\prod_{\alpha=1}^{p} \frac{1}{r_\alpha} \right) \right)$$

5.2.3 l'opérateur différentiel ϑ_2

Nous avons besoin d'obtenir une expression pour les puissances $\left(x^2 \dfrac{d}{dx}\right)^m$ à l'aide des puissances $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^j$, similaire à celle obtenue dans la sous-section précédente pour ϑ^n. Nous allons introduire la notation

$$\vartheta_2 = x^2 \frac{d}{dx}.$$

Pour ce faire nous allons encore utiliser la formule de Faà di Bruno ou sa variante la formule de Hope

On prend cette fois $x = f(t) = -t^{-1}$, $g(x) = g(-t^{-1})$ alors

$$\frac{d}{dt} g(-t^{-1}) = x^2 \frac{d}{dx} g(x) = \vartheta_2 g(x)$$

et donc par la formule de Hope (théorème (5.3))

$$\vartheta^m g(x) = \frac{d^m}{dt^m} g(f(t)) = \sum_{k=1}^{m} \frac{g^{(k)}(f(t))}{k!} A_{m,k}\left(f(t)\right),$$

avec

$$A_{m,k}\left(f(t)\right) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(-f(t)\right)^{k-j} \frac{d^m}{dt^m} \left(f(t)\right)^j.$$

Or avec $f(t) = -t^{-1}$, on a

$$A_{m,k}\left(f(t)\right) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(-f(t)\right)^{k-j} f(t)^{m+j} \frac{(m+j-1)!}{(j-1)!}$$

$$= f(t)^{k+m} (-1)^k \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(m+j-1)!}{(j-1)!}. \tag{5.4}$$

Ainsi

$$(\vartheta_2)^m = \left(x^2 \frac{d}{dx}\right)^m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \left((-1)^k \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(j+m-1)!}{(j-1)!} x^{k+m}\right) \frac{d^k}{dx^k} \tag{5.5}$$

5.2.4 l'opérateur différentiel ϑ_n :

On procède de la même. la fonction

$$y = \frac{C}{t^\alpha}; \quad \alpha = \frac{1}{n-1}, \quad C = \frac{1}{(n-1)^{\frac{1}{n-1}}}$$

vérifie l'équation différentielle $y' = -y^n$. On prend donc $x = f(t) = \frac{C}{t^\alpha}$ (avec les valeurs données de C et α) dans la formule de Faà di Bruno et on obtient

$$\frac{d^m}{dt^m} g(f(t)) = (-1)^m \left(x^n \frac{d}{dx}\right)^m g(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{g^{(k)}(f(t))}{k!} A_{m,k}\left(f(t)\right).$$

Ce qui donne

$$(\vartheta_n)^m = \left(x^n \frac{d}{dx}\right)^m = (-1)^m \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A_{m,k}\left(f(t)\right) \frac{d^k}{dx^k}.$$

avec

$$A_{m,k}\left(f(t)\right) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(-f(t)\right)^{k-j} \frac{d^m}{dt^m} \left(f(t)\right)^j.$$

comme $(f(t))' = -(f(t))^n$ donc, on a

$$\frac{d^m}{dx^m} \left(f(t)\right)^j = (-1)^m j(j+n-1)(j+2n-2)(j+3n-3)....(j+(m-1)(n-1))(f(t))^{j+mn-m}$$

par conséquent

$$A_{m,k}\left(f(t)\right) = (-1)^{k+m} \left(f(t)\right)^{k+mn-m} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j (j+n-1)(j+2n-2)(j+3n-3).....(j+(m-1)(n-1))$$

Ainsi

$$\left(x^n \frac{d}{dx}\right)^m = \sum_{k=0}^{m} \left(x^{k+m(n-1)} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!(k-j)!} (j+n-1)(j+2n-2)....(j+(m-1)(n-1))\right) \frac{d^k}{dx^k}$$

Chapitre 6

Équation différentielle Algébrique, Équation Hypergéométrique

6.1 Crochet de Rankin-Cohen, Opérateur de Bol :

6.1.1 Crochet de Rankin-Cohen et Equations Différentielles

Nous avons déjà observé que la série d'Eisenstein E_2 n'est pas modulaire mais c'est ce défaut de modularité qui permet de définir une dérivation dans l'espace des formes modulaires. Plus exactement, soit Γ un sous-groupe du groupe modulaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On note $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des formes modulaires de poids k sur Γ. On a naturellement une multiplication

$$M_k(\Gamma) \times M_l(\Gamma) \longrightarrow M_{(k+l)}(\Gamma)$$

$\mathcal{M}(\Gamma) = \oplus M_k(\Gamma)$ l'algèbre graduée par le poids des formes modulaires par rapport à $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Dans les années 1950, Robert Rankin a initié l'étude de certains opérateurs différentiels sur $\mathcal{M}(\Gamma)$ donnant lieu à de nouvelles formes modulaires, obtenues en considérant certaines expressions différentielles d'anciennes formes modulaires. Henri Cohen, vingt ans plus tard, a décrit de manière complète cette procédure, en montrant qu'ils se construisent tous à partir de qu'on appelle de nos jours les crochets de Rankin-Cohen.
Les produits de Rankin-Cohen [43], sont définis de la manière suivante.

***Définition* 6.1.1.** *Pour $f \in M_k(\Gamma)$ et $g \in M_l(\Gamma)$ on pose :*

$$[f,g]_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{k+n-1}{n-r}\binom{l+n-1}{r} f^{(r)} g^{(n-r)},$$

avec $f^{(r)} = \frac{1}{(2i\pi)^r}\frac{d^r f}{dz^r}$. Ainsi

1. $[f,g]_0 = fg$,
2. $[f,g]_1 = kfg' - lf'g$,
3. $[f,g]_2 = \dfrac{k(k+1)}{2} fg'' - (k+1)(l+1)f'g' + \dfrac{l(l+1)}{2} f''g.$

De plus, si f, g, h sont trois formes modulaires, on a

$$[[f,g]_1,h]_1 + [[h,f]_1,g]_1 + [[g,h]_1,f]_1 = 0$$

qui est l'identité de Jacobi, permettant de définir une structure d'algèbre de Lie sur l'espace $\oplus_{k\geq 0} M_k(\Gamma)$.

Il est possible de donner une interprétation des équations de Ramanujan (2.5)à l'aide des crochets de Rankin-Cohen. Rappelons que la forme modulaire

$$\Delta = \frac{1}{1728}\left(E_4^3 - E_6^2\right) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}, \quad q = e^{2i\pi}$$

est modulaire de poids 12 et que sa dérivée logarithmique est

$$\vartheta \log \Delta = \frac{\vartheta\Delta}{\Delta} = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n} = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n = E_2(\tau).$$

$$(\mathcal{R}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{d}{d\tau}E_2 & = \frac{1}{12}(E_2^2 - E_4) \\[2ex] \dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{d}{d\tau}E_4 & = \frac{1}{3}(E_2E_4 - E_6) \Rightarrow [E_4,\Delta]_1 = 4\Delta E_6 \\[2ex] \dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{d}{d\tau}E_6 & = \frac{1}{2}(E_2E_6 - E_4^2) \Rightarrow [E_6,\Delta]_1 = 6\Delta E_4^2. \end{cases}$$

6.1.2 Opérateurs de BOL

Soit $\mathcal{V}(\Gamma, k, \nu)$ l'espace des formes automorphes $f(z)$ de poids k par rapport à un groupe fuchsien de première espèce Γ, agissant sur le demi-plan supérieur $\mathfrak{H}$, donné avec un système de multiplicateurs ν. l'opérateur de Bol [35], [30] est un opérateur différentiel D tel que pour tout $m > 1$

$$D^m : \mathcal{V}(\Gamma, k, \nu) \mapsto \mathcal{V}(\Gamma, m(k+2), \nu)$$

et est défini comme suit : Soit $f \in \mathcal{V}(\Gamma, k, \nu)$, $k \neq 0$ et $L = \dfrac{1}{(2i\pi)}\dfrac{d}{dz} = q\dfrac{d}{dq}$, $q = e^{2i\pi z}$, on pose

$$L^m \left((f)^{((1-m)/k}\right) = (f)^{((1-(k+1)m)/k} D^m(f)$$

où $D^m(f)$ est un polynôme en f et ses dérivées $f, f', \ldots, f^{(m)}$.
Par ailleurs, les produits de Rankin-Cohen sont définis dans [43] Pour $f \in M_k(\Gamma)$ et $g \in M_l(\Gamma)$ Le produit de Rankin-Cohen envoie $M_k(\Gamma) \times M_l(\Gamma)$ dans $M_{k+l+2n}(\Gamma)$, et une de ses propriétés remarquables est qu'il est relié à l'opérateur de Bol. En effet si f est de poids k, alors on a

$$\begin{aligned} D^2(f) &= -\frac{1}{k^2(k+1)}[f, f]_2, \\ D^3(f) &= \frac{2}{k^3(k+1)}[f, [f, f]_1]_1. \end{aligned}$$

Le théorème suivant est d'une importance capitale.

***Théorème* 6.1.** *Soit Γ un groupe discret agissant sur $\mathcal{H}$ et dont le quotient $\mathcal{H}/\Gamma$ est de volume fini. Soit $f \in \mathcal{V}(\Gamma, k, \nu)$ une forme automorphe analytique avec un système multiplicatif vérifiant $\nu^s \equiv 1$ pour s un entier positif. Alors si le produit ks est positif il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ tel que*

$$P\left(f, D^2(f), D^3(f)\right) = 0\,.$$

Il est remarquable que l'équation différentielle satisfaite par E_4 (ainsi que celle de E_6) a été donnée dans [35], indépendemment des constructions de Rankin et Cohen . Nous donnons l'équation on utilisant [44]

***Proposition* 6.1.** *On suppose que* Γ *est un sous-groupe convenable de* $SL_2(\mathbb{Z})$ *et on considère* $g \in M_k(\Gamma)$, $w \in \mathbb{Q}$ *et* $f = g^{\frac{w}{k}}$, *alors*

$$G := \frac{[f,f]_2}{(k+1)f^{2+\frac{4}{w}}}, \quad F := \frac{[[f,f]_2, f]_1}{[f,f]_2 f^{1+\frac{2}{w}}} = -w\frac{G'}{Gf^{\frac{2}{w}}} \tag{6.1}$$

sont des fonctions modulaires et donc sont reliées par une équation algébrique.

6.2 Apparition de L'équation hypergéométrique

6.2.1 Équation Algébrique

Dans cette section on considère le cas $k = 4$. Auparavant nous rappelons quelques faits connus sur les zéros des formes modulaires pour pouvoir prendre les puissances fractionnaires des séries d' Eisenstein E_{2k} qui sont des formes modulaires sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de poids $2k$ avec k un entier ≥ 2. Rankin et Swinnerton-Dyer ont montré que les zéros de E_{2k} sont tous situés sur l'arc du cercle unité $\mathcal{U} = \left\{e^{i\phi}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{2\pi}{3}\right\}$. D'où pour chaque entier $k \geq 2$ et chaque réel α, E_{2k}^{α} est une fonction holomorphe sur chaque domaine simplement connexe contenu dans $\mathcal{F}\backslash\mathcal{U}$, où $\mathcal{F}$ est le domaine fondamentale de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Le point $z = i$ est fixé par la transformation de Möbuis $z \longmapsto \frac{-1}{z}$ et $\rho = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est fixé par $z \longmapsto -\frac{z+1}{z}$ et pour $k \in 2\mathbb{Z}$, et non congru à 0 modulo 3 , $E_k(\rho) = 0$. En particulier $E_4(\rho) = 0$. Si $k \equiv 2(mod4)$, $E_k(i) = 0$ et par suite $E_6(i) = 0$. De plus ces zéros sont simples. Pour montrer ceci on observe d'abord que la fonction discriminant Δ, lorsqu'elle est considérée sous forme de produit infini, ne s'annule pas sur le demi-plan $\mathcal{H}$ et d'après la relation (1.9) E_6 et E_4 n'ont pas de zéros communs. Si, par exemple E_4 admettait un zéro double α, alors dans ce cas la relation de Ramanujan $(2,1)$ montre que α serait aussi un zéro de E_6 , ce qui est impossible.

En utilisant les premiers coefficients de Fourier on obtient un cas spécial de la proposition (6.1).

***Proposition* 6.2.** *On note* $g = E_4$, $(k = 4)$ *et pour* $w \in \mathbb{Q}^+$, *on note* $f = E_4^{\frac{w}{4}}$. *Si* G, F *sont les fonctions modulaires associées à* f *comme dans* (6.1), *alors on a la relation algébrique*

$$\frac{144}{w+1}G + F^2 - w^2 = 0 \tag{6.2}$$

Pour $\omega = 4$ l' équation (6.2) est équivalente à l'équation

$$5\left(D_3(f)\right)^2 - 576\left(D_2(f)\right)^3 - 20f^3\left(D_2(f)\right)^2 = 0 \tag{6.3}$$

donnée dans [37] et dont une solution est E_4. Pour la valeur $\omega = 1$ on obtient l'équation

$$(\frac{1}{y}y'')^3 - \frac{5}{576}(\frac{1}{y^2}(y^2)''')^2 + \frac{5}{12}(\frac{1}{y^3}y'')^2 = 0 \tag{6.4}$$

qui a pour solution $y = 12^{\frac{1}{4}}\ \sqrt[-4]{E_4}$.

Le point central maintenant est que l'équation (6.2) est en fait une équation différentielle en G qu'on va écrire et résoudre. En effet d'après (6.1) et (6.2) on a successivement

$$\frac{144}{w+1}G^3 f^{\frac{4}{w}} + w^2 G'^2 = w^2 G^2 f^{\frac{4}{w}}$$

$$G^2\left(\frac{144}{w+1}G - w^2\right) f^{\frac{4}{w}} = -w^2 G'^2$$

c'est à dire

$$\frac{-G'^2}{G^2\left(\frac{144}{w+1}G - w^2\right)} = \frac{1}{w^2} f^{\frac{4}{w}} \tag{6.5}$$

On note pour simplifier $b = \dfrac{2^4.3^2}{w+1}$ et sans tenir compte des différentes déterminations des racines carrées, nos calculs n'en dépendent pas réellement, on obtient

$$\frac{G'}{G\sqrt{w^2 - bG}} = \frac{1}{w} f^{\frac{2}{w}}. \tag{6.6}$$

On utilise maintenant le lemme suivant

***Lemme* 6.1.** *Si* $w > 0$

$$\int \frac{G'}{G\sqrt{w^2 - bG}} = \frac{1}{w}\log\frac{\sqrt{w^2 - bG} - w}{\sqrt{w^2 - bG} + w}.$$

L'équation (6.6) donne alors

$$\log \frac{\sqrt{w^2 - bG} - w}{\sqrt{w^2 - bG} + w} = \int f^{\frac{2}{w}}.$$

On résout en G et on trouve

$$G = -\frac{4w^2}{b} \frac{e^{\int f^{\frac{2}{w}}}}{\left(1 - e^{\int f^{\frac{2}{w}}}\right)^2} \tag{6.7}$$

avec $b = \dfrac{144}{w+1}$, G est donnée par (6.1), $g = E_4$ et $f = E_4^{\frac{w}{4}}$ qui est de poids w. On prend désormais $w = \dfrac{1}{2}$ et ainsi f est de poids $\frac{1}{2}$. On introduit

$$z = \int f^4 = \int E_4^{\frac{1}{2}}. \tag{6.8}$$

L'intérêt est d'introduire z et de transformer le crochet de Rankin-Cohen $[f, f]_2$ en une dérivée schwarzienne lorsque f est de poids $\dfrac{1}{2}$. En effet

$$[f, f]_2 = \frac{3}{4}\left(ff'' - 3f'^2\right), \qquad z' = f^4, \quad z'^{\frac{1}{4}} = f$$

et ainsi

$$ff'' - 3f'^2 = \frac{1}{4} z'^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 \right\}.$$

Donc

$$[f, f]_2 = \frac{3}{16} z'^{\frac{1}{2}} \{z, \tau\}$$

avec la notation habituelle pour la dérivée schwarzienne

$$\{z, \tau\} = \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2.$$

En utilisant la définition de G dans la relation (6.1), on peut écrire

$$G = \frac{3}{16}.\frac{1}{5}\frac{z'^{\frac{1}{2}}\{z, \tau\}}{f^{10}} = \frac{3}{80} z'^{-2}\{z, \tau\} = -\frac{3}{80}\{\tau, z\} \tag{6.9}$$

grâce à la propriété fondamentale de réciprocité de la dérivée schwarzienne :

$$z'^{-2}\{z,\tau\} = -\{\tau, z\}.$$

Pour $w = \dfrac{1}{2}$, $b = 96$ et par (6.7) et (6.9) on a

$$\{\tau, z\} = \frac{5}{18} \frac{e^{\int E_4^{\frac{1}{2}}}}{\left(1 - e^{\int E_4^{\frac{1}{2}}}\right)^2}. \tag{6.10}$$

On va transformer l'équation (6.10) en posant $\xi = e^{\int E_4^{\frac{1}{2}}} = e^z$. Le calcul de $\{\tau, \xi\}$ par la formule de composition

$$\{\tau, \xi\} = \{\tau, z\} \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 + \{z, \xi\}.$$

donne

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{1}{\xi}, \qquad \{z, \xi\} = \frac{1}{2\xi^2}$$

et finalement la relation (6.10) donne

$$\{\tau, \xi\} = \frac{5}{18} \frac{1}{\xi(1-\xi)^2} + \frac{1}{2\xi^2}.$$

ou

$$\{\tau, \xi\} = \frac{5}{18} \frac{1}{\xi\,(1-\xi)} + \frac{5}{18} \frac{1}{(1-\xi)^2} + \frac{1}{2\xi^2}. \tag{6.11}$$

Remarque 6.2.1. *On peut exprimer plus simplement* $z = \displaystyle\int f^4\, d\tau = \int E_4^{\frac{1}{2}}\, d\tau$ *à l'aide de l'invariant modulaire* j *défini dans* (1.9)*. En effet l'égalité,* $E_4 = \dfrac{(\vartheta j)^2}{j\,(j-1728)}$*, donne*

$$z = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{dj}{\sqrt{j\,(j-1728)}}$$

or si $b \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-b)}} = \log\left(2\sqrt{x(x-b)} + 2x - b\right) + C$$

Cette dernière égalité permet de retrouver une formule de Ramanujan [7] (theorem 3.1, p.51) dont on donnera une démonstration un peu plus loin.

Avant de continuer plus loin, on rappelle une propriété importante de l'équation différentielle de la fonction hypergéométrique. Cette équation est de la forme

$$y'' + \frac{(2-\lambda-\nu)x + \lambda - 1}{x(x-1)} y' + \frac{(1-\lambda-\nu)^2 - \mu^2}{4x(x-1)} y = 0 \tag{6.12}$$

ou

$$y'' + py' + qy = 0$$

avec

$$p = \frac{1-\lambda}{x} + \frac{1-\nu}{x-1}, \quad q = \frac{(1-\lambda-\nu)^2 - \mu^2}{4x(x-1)}. \tag{6.13}$$

Nous savons alors que si y_1, y_2 sont deux solutions de (6.12), avec les notations (6.13) et $\eta = \frac{y_1}{y_2}$, on a pour la dérivée schwarzienne

$$\{\eta, x\} = \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = 2q - \frac{1}{2}p^2 - p'$$

ou

$$\{\eta, x\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\lambda^2}{x^2} + \frac{1-\nu^2}{(x-1)^2} + \frac{\lambda^2+\nu^2-\mu^2-1}{x(x-1)}\right). \tag{6.14}$$

En comparant (6.11) et (6.14), on trouve que

$$\lambda = \mu = 0, \quad \nu = \pm\frac{2}{3}.$$

Une autre facçon d'écrire l'équation (6.12) est d'introduire

$$a = \frac{1-\lambda-\mu-\nu}{2}, \quad b = \frac{1-\lambda+\mu-\nu}{2}, \quad c = 1-\lambda.$$

de sorte que l'équation (6.12) devienne

$$x(1-x)y'' + \{c - (a+b+1)x\}y' - aby = 0 \tag{6.15}$$

6.2.2 périodes de courbe elliptique

Par ailleurs nous essayons de trouver un lien entre l'équation (6.12) et l'équation satisfaite par les périodes des courbes elliptiques. Notre référence est [22].

Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbb{C}$ par l 'équation : $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$. On associe à E les deux périodes :

$$\omega_1 = \int_{c_1} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} \qquad \omega_2 = \int_{c_2} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

où c_1 et c_2 sont des cycles choisis sur E. On définit l'invariant J et le discriminant Δ par

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta}, \quad \Delta = g_2^3 - 27g_3^2$$

. Les périodes sont solutions de l'équation différentielle hypergéométrique

$$J(J-1)\frac{d^2\omega}{dJ^2} + \frac{7J-4}{6}\frac{d\omega}{dJ} + \frac{1}{144}\omega = 0$$

. Ainsi la dérivée schwarzienne du quotient $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ est :

$$\{\omega, J\} = \frac{4}{9J^2} + \frac{3}{8(J-1)^2} - \frac{23}{72J(J-1)} \tag{6.16}$$

Si on considère la famille de courbes elliptiques $E_t : y^2 = 4x^3 - g_2(t)x - g_3(t)$ avec

$$g_2(t) = at^4, \quad g_3(t) = bt^5(t-2)$$

$$\Delta = 4a^3t^{10}(t-1), a, b \in \mathbb{C}^*, a^3 - 27b^2 = 0$$

nous obtenons pour l'invariant modulaire

$$J(t) = \frac{t^2}{4(t-1)} \tag{6.17}$$

On utilisons les (6.16) et (6.17) on obtient

$$\{\omega, t\} = \{\omega, J(t)\}\left(\frac{dJ(t)}{dt}\right)^2 + \{J, t\}$$

$$= \frac{5}{18t^2} + \frac{1}{2(t-1)^2} - \frac{5}{18t(t-1)}.$$

Si on pose $t = 1 - \xi$ on obtient l'équation (6.11). Ce qui met en évidence un lien entre l 'é équation algébrique (6.2) et les périodes de courbes elliptiques.

6.2.3 Formule de Ramanujan

L'intégrale $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_i^\tau \sqrt{E_4}\,d\tau$ a été donnée par Ramanujan [7]. Nous présentons notre méthode trouvée indépendamment et nous montrons comment retrouver le résultat trouvé par Ramanujan.

***Lemme* 6.2.**

$$\begin{aligned}\int_i^\tau \sqrt{E_4}\,d\tau &= \frac{1}{2i\pi}\log\frac{E_4^{3/2}-E_6}{E_4^{3/2}+E_6},\\ &= \frac{1}{2i\pi\tau}\left(\log 432 + 2i\pi\tau + 120e^{2i\pi\tau} - 3060e^{4i\pi\tau} + 245920e^{6i\pi\tau} + \cdots\right)\end{aligned}$$

La série d'Eisenstein $E_4(\tau)$ s 'annule à l'intérieur du domaine fondamental de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$F = \{z\in\ H\ \ ,|z|>1,\ \frac{1}{2}\leq \Re z < \frac{1}{2}\}\cup\{z\in\ H\ \ ,|z|=1,\ \frac{1}{2}\leq\Re z\leq 0\}$$

uniquement au point $\rho = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ qui est sur le bord de F.
A l'intérieur $\tilde{F}$ de F , on considère la détermination de $\sqrt{E_4}$ donnée par

$$\sqrt{E_4(\tau)} = 1+120e^{2i\pi\tau}-6120e^{4i\pi\tau}+737760e^{6i\pi\tau}-107249640e^{8i\pi\tau}+17385063120e^{10i\pi\tau}+\cdots.$$

Pour tout $\tau\in\mathfrak{H}$ l'intégrale $\displaystyle\int_i^\tau\sqrt{E_4}\,d\tau$ est bien définie et ne dépend pas du chemin d'intégration joignant i à τ, contenu dans $\tilde{F}$ choisi. Notre démonstration est basée sur la $2em$ relation du lemme (2.1). De manière plus concréte :

$$\begin{aligned}\int_i^\tau\sqrt{E_4}\,d\tau &= \int_i^\tau \frac{\vartheta J}{\sqrt{J(J-1)}}d\tau\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_i^\tau\frac{J'(\tau)}{\sqrt{J(J-1)}}d\tau\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{J(i)}^{J(\tau)}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}\end{aligned}$$

Comme $J(i)=1$ et $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}} = \log\left(2x-1+2\sqrt{x(x-1)}\right)+C$, avec $J=J(\tau)$

alors,

$$\int_i^\tau \sqrt{E_4}\, d\tau = \frac{1}{2i\pi}\ \log\left(2J-1+2\sqrt{J(J-1)}\right)$$

qui est une première évaluation de notre intégrale. Pour trouver la formule de Ramanujan donnée dans le lemme 6.2 on utilise les $2em$ et $3em$ relations de la proposition (**??**). Ainsi

$$\begin{aligned} E_4^{\frac{3}{2}} - E_6 &= \frac{J'^3}{(J(J-1))^{\frac{3}{2}}} + \frac{J'^3}{J^2(J-1)} \\ &= \frac{J'^3}{J(J-1)} \frac{\sqrt{J}+\sqrt{J-1}}{J\sqrt{J-1}} \end{aligned}$$

et de la même manière

$$E_4^{\frac{3}{2}} + E_6 = \frac{J'^3}{J(J-1)} \frac{\sqrt{J}-\sqrt{J-1}}{J\sqrt{J-1}}$$

et donc

$$\frac{E_4^{\frac{3}{2}} - E_6}{E_4^{\frac{3}{2}} + E_6} = \frac{\sqrt{J}+\sqrt{J-1}}{\sqrt{J}-\sqrt{J-1}} = 2J-1+2\sqrt{J(J-1)}\ .$$

□

6.2.4 Équations différentielles, Forme finale

Rappelons que pour une équation différentielle du second ordre, ayant les trois points singuliers réguliers $0, 1, \infty$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{p_0}{t} + \frac{p_1}{t-1}\right)\frac{dv}{dt} + \left(\frac{q_0}{t^2} + \frac{q_1}{(t-1)^2} + \frac{q_2}{t(t-1)}\right) v = 0$$

où p_0, p_1, q_0, q_1, $q_2 \in \mathbb{C}$, l'équation indicielle est définie par

$$\boxed{\begin{array}{rr} en\ \ 0 \qquad (racines \quad \alpha_1,\alpha_2) & x^2+(p_0-1)x+q_0=0 \\ en\ \ 1 \qquad (racines \quad \beta_1,\beta_2) & x^2+(p_1-1)x+q_1=0 \\ en\ \ \infty \ \ (racines \quad \gamma_1,\gamma_2) & x^2+(1-p_0-p_1)x+(q_0+q_1+q_2)=0 \end{array}} \tag{6.18}$$

L'équation différentielle prend la forme équivalente :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{t} + \frac{1-\beta_1-\beta_2}{t-1}\right)\frac{dv}{dt} + \frac{\gamma_1\gamma_2 t^2 + (-\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2)t + \alpha_1\alpha_2}{t^2(t-1)^2}v = 0$$

avec

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2 \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2 = 1.$$

On adopte la notation de Riemann pour désigner les solutions de cette équation, mettant ainsi en évidence les points singuliers et les exposants :

$$P\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & t \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{array}\right\}$$

L'importance de cette fonction réside dans l'étude de l'action du groupe de transformations

$$t' = t, \qquad t' = \frac{1}{1-t}$$

$$t' = 1-t, \qquad t' = \frac{t}{t-1}$$

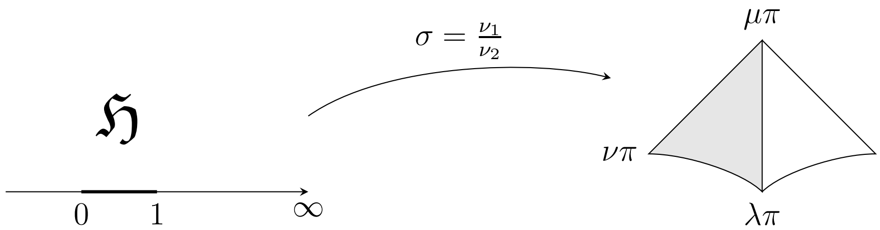
$$t' = \frac{1}{t}, \qquad t' = \frac{t-1}{t}.$$

Ainsi par exemple

$$P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & t \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{array}\right\} = P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \gamma_1 & 1-t \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 & \end{array}\right\}$$

De même

$$t^{\mu}(1-t)^{\nu} P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & t \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1+\mu & \beta_1+\nu & \gamma_1-\nu-\mu & t \\ \alpha_2+\mu & \beta_2+\nu & \gamma_2-\nu-\mu & \end{Bmatrix} \tag{6.19}$$

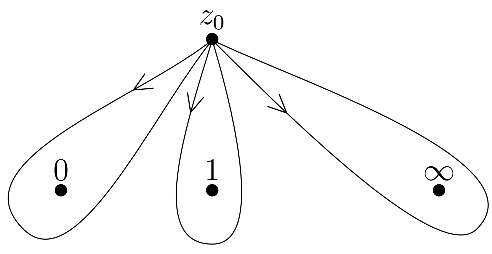


Si on considère un point $z_0 \notin \mathbb{P} \setminus \{0,1,\infty\}$ et on note $\pi_1(\mathbb{P} \setminus \{0,1,\infty\})$ le groupe fondamental de $\mathbb{P} \setminus \{0,1,\infty\}$ de base z_0. C'est un groupe libre à trois générateurs R, S, T avec la relation

$$RST = Id$$

et on a une représentation de la monodromie

$$\rho : \pi_1(\mathbb{P} \setminus \{0,1,\infty\}) \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$$



Considérons une famille de courbes elliptiques paramétrées par t :

$$\mathcal{C}_{(g_2,g_3)} : \quad y^2 = 4x^3 - g_2(t)x - g_3(t)$$

On désigne par

$$\omega(t) = \int \frac{dx}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \qquad \eta(t) = \int \frac{x dx}{y} = \int \frac{x dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

la différentielle holomorphe et la différentielle de seconde espèce ayant l'∞ comme pôle d'ordre 2 respectivement. De même on note

$$\Delta(t) = g_2(t)^3 - 27 g_3(t)^2, \quad J(t) = \frac{g_2(t)^3}{\Delta(t)}.$$

On a alors, d'après F. Klein [21], [22]

$$\begin{pmatrix} \omega' \\ \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12}\frac{\Delta'}{\Delta} & \frac{1}{18}\frac{g_2}{g_3}\frac{J'}{J} \\ \\ -\frac{1}{8}\frac{g_3}{g_2}\frac{J'}{J-1} & \frac{1}{12}\frac{\Delta'}{\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \\ \eta \end{pmatrix} \tag{6.20}$$

Ce qui donne en dérivant une seconde fois :

$$\omega'' + p(t)\omega'(t) + q(t)\omega(t) = 0 \tag{6.21}$$

avec

$$\begin{aligned} p &= \frac{g_3'}{g_3} - \frac{g_2'}{g_2} + \frac{J'}{J} - \frac{J''}{J'} \\ q &= \frac{J'^2}{144 J(J-1)} + \frac{1}{12}\frac{\Delta'}{\Delta}\left(p + \frac{\Delta''}{\Delta'} - \frac{13}{12}\frac{\Delta'}{\Delta}\right). \end{aligned}$$

La dérivation est par rapport à la variable t. Nous allons transformer l'équation différentielle (6.21) en introduisant les normalisations

$$\Omega = \sqrt{\frac{g_3}{g_2}}\omega \qquad H = \sqrt{\frac{g_2}{g_3}}\eta$$

et alors le système différentiel (6.20) devient

$$\begin{pmatrix} \frac{d\Omega}{dJ} \\ \\ \frac{dH}{dJ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{J+2}{12J(J-1)} & \frac{1}{18J} \\ \\ \frac{-1}{8J(J-1)} & -\frac{J+2}{12J(J-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega \\ \\ H \end{pmatrix}$$

ce qui montre que Ω, comme fonction de la variable J, vérifie l'équation différentielle fondamantale

$$\frac{d^2\Omega}{dJ^2} + \frac{1}{J}\frac{d\Omega}{dJ} + \frac{\frac{31}{144}J - \frac{1}{36}}{J^2(J-1)^2}\Omega = 0. \tag{6.22}$$

Ainsi $\Omega = \Omega(J)$ est une fonction hypergéométrique dont les exposants sont

$$-\frac{1}{6}, \frac{1}{6} \quad en\ 0; \qquad \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \quad en\ 1; \qquad 0, 0 \quad au\ point\ \infty.$$

Nous allons à prśent adopter une autre normalisation en introduisant

$$\tilde{\Omega} = \Delta^{\frac{1}{12}}\omega$$

***Théorème* 6.2.**

$$\frac{d^2\tilde{\Omega}}{dJ^2} + \frac{\frac{7}{6}J - \frac{2}{3}}{J(J-1)} + \frac{\frac{1}{144}}{J(J-1)}\tilde{\Omega} = 0.$$

D'abord ce théorème montre que $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}(J)$ est une fonction hypergéométrique dont les exposants sont

$$0, \frac{1}{3} \quad en\ 0; \qquad 0, \frac{1}{2} \quad en\ 1; \qquad \frac{1}{12}, \frac{1}{12} \quad au\ point\ \infty.$$

et donc d'après la théorie générale de la fonction hypergéometrique, rappelée dans la section (1.2) :

$$\tilde{\Omega} = F\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{2}{3}; J\right).$$

Pour prouver ce théorème on utilise d'abord les définitions $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$, $J = \dfrac{g_2^3}{\Delta}$ pour écrire

$$\tilde{\Omega} = \frac{\Delta^{\frac{1}{12}} g_2^{\frac{1}{2}}}{g_3^{\frac{1}{2}}}\Omega = 27^{\frac{1}{4}} J^{\frac{1}{6}}(J-1)^{-\frac{1}{4}}\Omega.$$

D'après l'équation (6.23) on a

$$\Omega = P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 & J \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{4} & 0 & \end{matrix}\right\}$$

D'après la formule de transformation (6.19) :

6.2.5 Relation de Fricke

Pour $\tau \in \mathfrak{H}$, on considère la courbe elliptique E_τ, définie sur $\mathbb{C}$, par l'équation

$$y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$$

On sait que la fonction modulaire J est un invariant de la classe d'isomorphie de E_τ et que pour une courbe définie par $\tilde{y}^2 = 4\tilde{x}^3 - a\tilde{x} - b$ on a $J = \dfrac{a^3}{a^3 - 27b^2}$. Prenant $a = b$ et notant c cette valeur commune $c := a = b$ on obtient pour $J \neq 0,\ J \neq 1$:

$$J = \frac{c^3}{c^3 - 27c^2}$$

ou

$$c = \frac{27J}{J-1}$$

et la courbe dépend seulement de J :

$$\tilde{y}^2 = 4\tilde{x}^3 - \frac{27J}{J-1}(\tilde{x} + 1)$$

Les périodes de E_J vérifient l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2\Omega}{dJ^2} + \frac{1}{J}\frac{d\Omega}{dJ} + \frac{\frac{31}{144}J - \frac{1}{36}}{J^2(J-1)^2}\Omega = 0. \tag{6.23}$$

Pour tout $\tau \in \mathfrak{H}$ tel que $J(\tau) = J$, E_τ est isomorphe à E_J et par conséquent les réseaux correspondants Λ_τ et Λ_J sont homothétiques, c'est à dire $\Lambda_J = \mu(\tau)\Lambda_\tau$ avec

$$\mu(\tau) = \sqrt{\frac{g_3}{g_2}} \quad ([10] \quad page 78)$$

Nous n'avons pas de problème avec les déterminations de la racine carrée puisque τ est fixé et de manière générale on a pour tout réseau Λ, $|\Lambda = -\Lambda$. Puisque $1, \tau$ engendrent

Λ_τ,

$$\mu(\tau), \quad \tau\mu(\tau)$$

sont des périodes de E_J et sont des fonctions multivaluées (ou multiformes) de J et en conséquence elles satisfont l'équation différentielle (6.23). Leurs différentes déterminations sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes et constituent une base locale de solutions de (6.23) . Comme

$$\mu(\tau) = \sqrt{\frac{g_3}{g_2}}$$

on a

$$\mu(\tau) = \left(J(\tau)^{\frac{1}{3}} \frac{J(\tau) - 1}{27J(\tau)} \right)^{\frac{1}{3}} \Delta^{\frac{1}{12}} \tag{6.24}$$

Supposons que l'on ait des solutions de (6.23) de la forme

$$G(J) = J^\alpha (1 - J)^\beta F\left(a,\, b,\, c; z(J)\right) \tag{6.25}$$

avec $\alpha,\, \beta \in \mathbb{Q}$ et $z(J)$ est l'une des transformations de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$J,\, 1 - J,\, \frac{1}{J},\, \frac{1}{1 - J},\, \frac{J}{J - 1},\, \frac{J - 1}{J}$$

préservant les points $0,\, 1,\, \infty$. Par définition $F\left(a,\, b,\, c; z\right)$ vérifie l'équation hypergéométrique

$$u'' + \left(\frac{c}{z} + \frac{1 - c + a + b}{z - 1} \right) u' + \frac{ab}{z(z - 1)} u = 0 \tag{6.26}$$

et cela va permettre de déterminer les solutions de (6.23) en utilisant le fait que $F\left(a,\, b,\, c; z(J)\right)$ vérifie l'équation analogue (6.26). Ainsi $G(J)$ est solution de

$$\Omega''(J) + \Omega'(J) \left\{ -2\alpha J^{-1} + 2\beta(1 - J)^{-1} - z''(z')^{-1} + \frac{c}{z(1 - z)} z' - \frac{a + b + 1}{1 - z} z' \right\}$$

$$
+\Omega(J)\left\{\begin{array}{r}
-\alpha(\alpha-1)J^{-2}+2\alpha^2J^{-2}-\beta(\beta-1)(1-J)^{-2} \\
+2\beta^2(1-J)^{-2}-2\alpha\beta J^{-1}(1-J)^{-1} \\
+z^{''}(z')^{-1}(\alpha J^{-1}-\beta(1-J)^{-1})- \\
\dfrac{cz'}{z(1-z)}(\alpha J^{-1}-\beta(1-J)^{-1}) \\
-\dfrac{(a+b+1)}{1-z}(\alpha J^{-1}-\beta(1-J)^{-1})-\dfrac{ab}{z(1-z)}(z')^2
\end{array}\right\}.
$$

en substituant dans l'équation précédente les six valeurs de $z(J)$ et par identification avec les coefficients de (6.23) et après résolution des équations nous obtenons les size solutions suivantes

$$J^{\frac{-1}{6}}(1-J)^{\frac{1}{4}}F\left(\frac{1}{12},\,\frac{1}{12},\,\frac{2}{3};J\right)$$
$$J^{\frac{1}{6}}(1-J)^{\frac{1}{4}}F\left(\frac{5}{12},\,\frac{5}{12},\,\frac{4}{3};J\right)$$
$$J^{\frac{-1}{6}}(1-J)^{\frac{3}{4}}F\left(\frac{7}{12},\,\frac{7}{12},\,\frac{2}{3};J\right)$$
$$J^{\frac{1}{6}}(1-J)^{\frac{3}{4}}F\left(\frac{11}{12},\,\frac{11}{12},\,\frac{4}{3};J\right)$$
$$J^{\frac{-1}{6}}(1-J)^{\frac{1}{4}}F\left(\frac{1}{12},\,\frac{1}{12},\,\frac{1}{2};1-J\right)$$
$$J^{\frac{1}{6}}(1-J)^{\frac{1}{4}}F\left(\frac{5}{12},\,\frac{5}{12},\,\frac{1}{2};1-J\right)$$
$$J^{\frac{-1}{6}}(1-J)^{\frac{3}{4}}F\left(\frac{7}{12},\,\frac{7}{12},\,\frac{3}{2};1-J\right)$$
$$J^{\frac{1}{6}}(1-J)^{\frac{3}{4}}F\left(\frac{11}{12},\,\frac{11}{12},\,\frac{3}{2};1-J\right)$$
$$J^{\frac{-1}{4}}(1-J)^{\frac{1}{4}}F\left(\frac{1}{12},\,\frac{5}{12},\,1;\frac{1}{J}\right)$$
$$J^{\frac{-3}{4}}(1-J)^{\frac{3}{4}}F\left(\frac{7}{12},\,\frac{11}{12},\,1;\frac{1}{J}\right)$$
$$J^{\frac{-1}{6}}(1-J)^{\frac{1}{6}}F\left(\frac{1}{12},\,\frac{7}{12},\,1;\frac{1}{1-J}\right)$$
$$J^{\frac{1}{6}}(1-J)^{\frac{-1}{6}}F\left(\frac{5}{12},\,\frac{11}{12},\,1;\frac{1}{1-J}\right)$$
$$J^{\frac{-1}{4}}(1-J)^{\frac{1}{4}}F\left(\frac{1}{12},\,\frac{5}{12},\,\frac{1}{2};\frac{J-1}{J}\right)$$
$$J^{\frac{-3}{4}}(1-J)^{\frac{3}{4}}F\left(\frac{7}{12},\,\frac{11}{12},\,\frac{3}{2};\frac{J-1}{J}\right)$$
$$J^{\frac{-1}{6}}(1-J)^{\frac{1}{6}}F\left(\frac{1}{12},\,\frac{7}{12},\,\frac{2}{3};\frac{J}{J-1}\right)$$
$$J^{\frac{1}{6}}(1-J)^{\frac{-1}{6}}F\left(\frac{5}{12},\,\frac{11}{12},\,\frac{4}{3};\frac{J}{J-1}\right)$$

Puisque $\{\mu(\tau),\,\tau\mu(\tau)\}$ est une base de solutions ils existent A et B dans $\mathbb{C}$ tels que

$$J^{\alpha}(1-J)^{\beta}F\,(a,\,b,\,c;z(J)) = A\mu(\tau) + B\tau\mu(\tau).$$

En utilisant (6.24), on obtient

$$J^{\alpha}(1-J)^{\beta}F\,(a,\,b,\,c;z(J)) = (A\tau + B)\,(J(\tau))^{\frac{-1}{6}}(1-J(\tau))^{\frac{1}{4}}\Delta^{112}. \tag{6.27}$$

En particulier pour $J^{\frac{-1}{4}}(1-J)^{\frac{1}{4}}F\left(\frac{1}{12},\,\frac{5}{12},\,1;\frac{1}{J}\right)$ on a, avec $J=J(\tau)$:

$$J^{\frac{-1}{4}}(1-J)^{\frac{1}{4}}F\left(\frac{1}{12},\,\frac{5}{12},\,1;\frac{1}{J}\right)=(A\tau+B)\,(J(\tau))^{\frac{-1}{6}}(1-J(\tau))^{\frac{1}{4}}\Delta^{112}.$$

Par conséquent :

$$F\left(\frac{1}{12},\,\frac{5}{12},\,1;\frac{1}{J}\right)=(A\tau+B)\,(J(\tau))^{\frac{1}{12}}\Delta^{112}.$$

L'invariance de $J(\tau)$ et de $\Delta(\tau)$ par la translation $\tau\to\tau+1$ nous permettent de trouver la valeur $A=0$.
l'identification des dévelopements à l'infini de $F\left(\frac{1}{12},\,\frac{5}{12},\,1;\frac{1}{J}\right)$ et de $(J(\tau))^{\frac{1}{12}}\Delta^{\frac{1}{12}}$ nous donne

$$B=\sqrt[4]{12}$$

et ainsi nous obtenons la relation fondamentale de Fricke

$$F\left(\frac{1}{12},\,\frac{5}{12},\,1;\frac{1}{J}\right)=E_4^4$$

6.3 Eléments de fonctions elliptiques

Le but de cette section est d'expliquer que les équations différentielles rencontrées jusquà présent (et généralement par rapport à la variable τ du demi-plan supérreur) sont le fruit d'une intéraction entre la variable modulaire τ et la variable spectrale z dans la théorie des fonctions elliptiques.

6.3.0.1 Quelques champs de vecteurs fondamentaux

Une des proprie'tés remarquables des fonctions elliptiques est leur stabilité par rapport à l'action de certains opérateurs différentiels. Cette stabilité est la source de nombreuses relations entre invariants modulaires ou de nombreuses équations différentielles satisfaites par des formes modulaires.
Avant d'aborder ce sujet nous rappelons la notion classique d'une fonction homogène et le théorème d'Euler. Soient $f:U\to V$ une application différentiable, $U\subset\mathbb{C}^n,\;\; V\subset\mathbb{C}$,

stables par l'action de $\mathbb{C}^*$. L'application f est dite homogène de degré α si

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^*,\ \forall (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in U,\ f(\lambda z_1, \lambda z_2, \cdots, \lambda z_n) = \lambda^\alpha f(z_1, z_2, \cdots, z_n).$$

Ceci équivaut à

$$\sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial f}{\partial z_i}(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \alpha f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$$

comme on le voit en dérivant par rapport à λ la relation de la définition et en faisant $\lambda = 1$. En particulier si f est homogǹe de de gré 0 on a

$$\sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial f}{\partial z_i}(z_1, z_2, \cdots, z_n) = 0.$$

Soit à présent $f(u, 2\omega, 2\omega')$ une fonction elliptique, de période 2ω et $2\omega'$. Alors pour tout u appartenant au domaine de définition de f et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ on a

$$f(u + 2\alpha\omega + 2\beta\omega') = f(u, 2\omega, 2\omega'). \tag{6.28}$$

Notons $\dfrac{\partial f}{\partial \omega} = f_1(u, 2\omega, 2\omega')$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial \omega'} = f_2(u, 2\omega, 2\omega')$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial u} = f'(u, 2\omega, 2\omega')$. De (6.28) on déduit, en omettant de mentionner les périodes pour simplifier :

$$f_1(u + 2\alpha\omega + 2\beta\omega') + 2\alpha f'(u + 2\alpha\omega + 2\beta\omega') = f_1(u)$$

$$f_2(u + 2\alpha\omega + 2\beta\omega') + 2\alpha f'(u + 2\alpha\omega + 2\beta\omega') = f_2(u)$$

$$f'(u + 2\alpha\omega + 2\beta\omega') = f'(u)$$

Considérons la famille de courbes elliptiques

$$V = \{(x, y, g_2, g_3) \in \mathbb{C}^2 \times B,\ y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3\}$$

où

$$B = \{(g_2, g_3) \in \mathbb{C}^2, \Delta := g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0\}$$

On dispose deux champs de vecteurs tangents à B :

$$l_0 = 4g_2\frac{\partial}{\partial g_2} + 6g_3\frac{\partial}{\partial g_3}$$

$$l_1 = 18g_3\frac{\partial}{\partial g_2} + g_2^2\frac{\partial}{\partial g_3}$$

qui vérifient

$$l_0(\Delta) = 12\Delta, \quad l_1(\Delta) = 0.$$

On introduit 3 autres champs de vecteurs, ζ étant la fonction zeta de Weierstrass, reliée comme on le sait à la fonction $\wp$ de Weierstrass par $\wp = -\zeta$:

$$L_0 = 4g_2\frac{\partial}{\partial g_2} + 6g_3\frac{\partial}{\partial g_3} - u\frac{\partial}{\partial u}$$

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial u}$$

$$L_2 = 18g_3\frac{\partial}{\partial g_2} + g_2^2\frac{\partial}{\partial g_3} - 3\zeta\left(u, g_2, g_3\right) L_1.$$

On a la proposition suivante donnant les règles de commutation

***Proposition* 6.3.**

$$[L_0, L_1] = L_1, \quad [L_0, L_2] = 6L_2, \quad , [L_1, L_2] = 3\wp\left(u, g_2, g_3\right) L_1$$

où, comme d'habitude, $[A, B] = AB - BA$ *pour deux opérateurs quelconques* A *et* B *de domaines convenables.*

L'importance de ces champs de vecteurs est qu'ils constituent des dérivations de l'algèbre complexe des fonctions elliptiques. Rappelons que si A est une algèbre sur $\mathbb{C}$, unitaire, une dérivation $\mathfrak{D}$ de A est une application $\mathbb{C}$-linéaire

$$\mathfrak{D} : A \to A$$

telle quel pour $x, y \in A$ quelconques

$$\mathfrak{D}(xy) = (\mathfrak{D}x)\, y + x\mathfrak{D}y.$$

Une conséquence particulière est que : Si $f(u, g_2, g_3)$ est une fonction elliptique d'invariants g_2 et g_3, il en est de même des fonctions

$$f_0 = 4g_2 \frac{\partial}{\partial g_2} f + 6g_3 \frac{\partial}{\partial g_3} f - u \frac{\partial}{\partial u} f$$

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial u} f$$

$$f_2 = 18g_3 \frac{\partial}{\partial g_2} f + g_2^2 \frac{\partial}{\partial g_3} f - 3\zeta\,(u, g_2, g_3)\, \frac{\partial}{\partial u} f.$$

Par ailleurs on sait que les fonctions de Weierstrass $\wp(u), \zeta$ admettent les développements de Laurent

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \frac{g_2^2}{1200} u^6 + \cdots$$

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{60} u^3 - \frac{g_3}{140} u^5 - \frac{g_2^2}{8400} u^7 - \cdots$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \omega \tfrac{\partial \wp}{\partial \omega} + \omega' \tfrac{\partial \wp}{\partial \omega'} + u \tfrac{\partial \wp}{\partial u} &= -2\wp \\ \eta \tfrac{\partial \wp}{\partial \omega} + \eta' \tfrac{\partial \wp}{\partial \omega'} + \zeta(u) \tfrac{\partial \wp}{\partial u} &= -2\wp^2 + \tfrac{1}{3} g_2 \end{aligned} \tag{6.29}$$

et revenant à la définition de la fonction $\wp$,

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus(0,0)} \left(\frac{1}{(u + 2m\omega + 2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^2} \right)$$

on en déduit

$$\omega\tfrac{\partial g_2}{\partial\omega}+\omega'\tfrac{\partial g_2}{\partial\omega'}=-4g_2,\qquad \omega\tfrac{\partial g_3}{\partial\omega}+\omega'\tfrac{\partial g_3}{\partial\omega'}=-6g_3$$

$$\eta\tfrac{\partial g_2}{\partial\omega}+\eta'\tfrac{\partial g_2}{\partial\omega'}=-6g_3,\qquad \eta\tfrac{\partial g_3}{\partial\omega}+\eta'\tfrac{\partial g_3}{\partial\omega'}=-\tfrac{g_2^2}{3} \tag{6.30}$$

Si $\phi(\omega,\omega')$ est une fonction différentiable de ω et ω', le système différentiel (6.30) donne

$$\begin{aligned}\omega\tfrac{\partial\phi}{\partial\omega}+\omega'\tfrac{\partial\phi}{\partial\omega'} &= -\left(4g_2\tfrac{\partial\phi}{\partial g_2}+6g_3\tfrac{\partial\phi}{\partial g_3}\right)\\ \eta\tfrac{\partial\phi}{\partial\omega}+\eta'\tfrac{\partial\phi}{\partial\omega'} &= -\tfrac{1}{3}\left(18g_3\tfrac{\partial\phi}{\partial g_2}+g_2^2\tfrac{\partial\phi}{\partial g_3}\right)\end{aligned} \tag{6.31}$$

En particulier si $\phi=\Delta=g_2^3-g_3^2$ et $\phi=J=\frac{g_2^3}{\Delta}$, le système différentiel (6.31) donne

$$\begin{aligned}\omega\tfrac{\partial\Delta}{\partial\omega}+\omega'\tfrac{\partial\Delta}{\partial\omega'} &= -12\Delta, &\quad \omega\tfrac{\partial J}{\partial\omega}+\omega'\tfrac{\partial J}{\partial\omega'} &= 0\\ \eta\tfrac{\partial\Delta}{\partial\omega}+\eta'\tfrac{\partial\Delta}{\partial\omega'} &= 0, &\quad \eta\tfrac{\partial J}{\partial\omega}+\eta'\tfrac{\partial J}{\partial\omega'} &= 18\tfrac{g_2^2g_3}{\Delta}\end{aligned} \tag{6.32}$$

Et si $\tilde\omega\in\mathbb{C}\omega+\mathbb{C}\omega'$, $\tilde\eta\in\mathbb{C}\eta+\mathbb{C}\eta'$, le système différentiel (6.31) donne encore

$$4g_2\frac{\partial\tilde\omega}{\partial g_2}+6g_3\frac{\partial\tilde\omega}{\partial g_3}=-\tilde\omega,\quad 18g_3\frac{\partial\tilde\omega}{\partial g_2}+g_2^2\frac{\partial\tilde\omega}{\partial g_3}=-3\tilde\eta.$$

Définissons l'opérateur

$$\mathcal{D}=-2\eta\frac{\partial}{\partial\omega}-2\eta'\frac{\partial}{\partial\omega'}, \tag{6.33}$$

alors des relations (6.32), on obtient $\mathcal{D}g_2=12g_3$ et $\mathcal{D}g_3=\frac{2}{3}g_2^2$, et ainsi

$$\mathcal{D}=12g_3\frac{\partial}{\partial g_2}+\frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial}{\partial g_3} \tag{6.34}$$

En particulier :

$$\mathcal{D}\Delta=0,\quad \mathcal{D}J=\frac{36g_3g_2^2}{\Delta}.$$

Mais comme

$$g_2=(\Delta J)^{\frac{1}{3}},\quad g_3=\left(\frac{\Delta(J-1)}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$$

en posant $\nu=\frac{u}{2\omega}$ et par application de l'opérateur $\mathcal{D}$ nous obtenons

- $\mathcal{D}\omega_\alpha=-2\eta_\alpha$ avec $\omega_\alpha\in\{\omega,\omega'\}$ et $\eta_\alpha\in\{\eta,\eta'\}$

– $\mathcal{D}\nu = \frac{\eta u}{\omega^2}$

On peut prendre pour nouvelle variable Δ, J etν . Soit

$$f = \Delta^{-\lambda/12}\varphi$$

φ étant homogène de degré zéro, par un calcule simple on obtient

$$\mathcal{D}f = \mathcal{D}J\frac{\partial f}{\partial J} + \frac{\partial f}{\partial \nu}\mathcal{D}\nu \tag{6.35}$$

Supposant que f ne dépende plus de u , il vient

$$\mathcal{D}^2 f = (\mathcal{D}J)^2\frac{\partial^2 f}{\partial J^2} + \mathcal{D}J\frac{\partial f}{\partial J}\frac{\partial \mathcal{D}J}{\partial J} \tag{6.36}$$

de l'égalité $\mathcal{D}J = 4\sqrt{3}(J-1)^{\frac{1}{2}}J^{\frac{2}{3}}\Delta^{\frac{1}{6}}$ on déduit,

– $(\mathcal{D}J)^2 = 48\Delta^{\frac{1}{3}}J^{\frac{1}{3}}(J-1)J$

– $\frac{\partial \mathcal{D}J}{\partial J}\mathcal{D}J = 48\Delta^{\frac{1}{3}}\left(\frac{7J-4}{6}\right)$

L'équation (6.36) devient donc

$$J(J-1)\frac{\partial^2 f}{\partial J^2} + \left(\frac{7J-4}{6}\right)\frac{\partial f}{\partial J} = \frac{\mathcal{D}^2 f}{48\Delta^{\frac{1}{3}}J^{\frac{1}{3}}} \tag{6.37}$$

Pour $f = \omega_\alpha$, nous aurons

$$J(J-1)\frac{\partial^2 \omega_\alpha}{\partial J^2} + \left(\frac{7J-4}{6}\right)\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial J} + \frac{\omega_\alpha}{144} = 0 \tag{6.38}$$

qui n'est que l'équation donnée dans le théorème (6.2).

Comme nous l'avions annoncé dans le chapitre précédent, nous donnons une table illustrant le théorème (5.1) de ce chapitre et son corollaire.

1	E_4
2	E_6
3	E_4^2
4	$E_6 E_4$
5	$\frac{1941 E_4^3+1184 E_6^2}{3125}$
6	$E_6 E_4^2$
7	$\frac{359799 E_4^4+463744 E_6^2 E_4}{823543}$
8	$\frac{1773 E_6 E_4^3+275 E_6^3}{2048}$
9	$\frac{52283 E_4^5+124864 E_6^2 E_4^2}{177147}$
10	$\frac{7075557 E_6 E_4^4+2690068 E_6^3 E_4}{9765625}$
11	$\frac{57568144851 E_4^6+214094885760 E_6^2 E_4^3+13648640000 E_6^4}{285311670611}$
12	$\frac{7 E_6 E_4^5+5 E_6^3 E_4^2}{12}$
13	$\frac{41632603562781 E_4^7+223465948277472 E_6^2 E_4^4+37776554752000 E_6^4 E_4}{302875106592253}$
14	$\frac{311416267005 E_6 E_4^6+355253054844 E_6^3 E_4^3+11553751000 E_6^5}{678223072849}$
15	$\frac{25746735861 E_4^8+187878781696 E_6^2 E_4^5+61032685568 E_6^4 E_4^2}{274658203125}$

Bibliographie

[1] Ahlfors, L.V. Complex Analysis, McGraw-Hill Book Co. (1966)

[2] T. Aoki, Y. Kombu and Y. Ohno, A generating function for sums of multiple zeta values and its application, Preprint.

[3] T. Aoki and Y. Ohno, Sum relations for multiple zeta values and connection formulas for the Gauss hypergeometric function, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **41** (2005), 329-337.

[4] Appell, P. Mémoire sur les équations différentielles linéaires, Annales Scientifiques de l'ENS, 2^e série, tome 10 (1881), p. 391-424.

[5] Apostol, T. M., Modular functions and Dirichlet Series in Number Theory. 2nd ed., Springer-Verlag, GTM 41,1990.

[6] Archinard, N., Exceptional sets of hypergeometric series, Journal of Number Theory 101 (2003), 244-269.

[7] Berndt, B. C., Chan, H. H., Huang, S. S. Incomplete Elliptic Integrals in Ramanujan's Lost Notebook in q-series from a Contemporary Perspective, M. E. H. Ismail and D. Stanton, eds., Amer. Math. Soc., 2000, pp. 79-126.

[8] J. Borwein, D. Bailey and R. Girgensohn, Experimentation in Mathematics : Computational Paths to Discovery, AK Peters Ltd., 2003, ISBN-13 : 978-1568811369.

[9] Bronstein, M., Mulders,T. Weil, J-A. On Symmetric Powers of Differential Operators, ACM Press, Proceedings of the 1997 international symposium on Symbolic and algebraic computation, 1997.

[10] F. Beukers and J. Wolfart. Algebraic values of hypergeometric func tions. In New Advances in Transcendence Theory, ed.by A. Baker, Cambrige University Press, 1986.

[11] Ford,L.R.,Automorphic functions. Chelsea Publishing Compagny, New York, 1951.

[12] Hancock H., Elliptic Integrals, Dover Publications, New York, 1917.

[13] Hardy, G. H. On two theorems of F. Carlson and S. Wigert *Acta Mathematica,* 42 (1920) 327-339.

[14] Hardy, G.H., Wright, E.M., An Introduction to the Theory of Numbers. (4th ed.). Oxford U. Press, London, 1968.

[15] Hermite, Ch., Sur les équations algébriques, Comptes Rendus Académie des Sciences, 32, 458-461= Oeuvres, vol.I, 276-280.

[16] Hermite, Ch., Sur la résolution de l'équation du cinquième degré, Comptes Rendus Académie des Sciences, 46, 508-515= Oeuvres, vol.II, 5-12.

[17] Hille E.' Ordinary Differential Equations in the Cornplex Domain, John Wiley and Sons. Sew York London Sydney Toronto 1974.

[18] Hurwitz A., Über die Differentialgleichungen dritter ordnung, welchen die Formen mit linearen Transformationen in sich genü, Math. Ann. 36 (1848), 97-112.(Ges. math. Werke, Bd.2, 171-191).

[19] Johnson, W. P., The curious history of Faà di Bruno's formula. Am. Math. Mon. 109, No.3, 217-234 (2002).

[20] Jordan.C., Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, Volume 2, Gauthier-Vilars, Paris, (1894).

[21] Klein, F. Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Math. Ann. 14, 111-172, 1878-1879.

[22] Klein,F.Fricke,R.,Vorlesungen über die Theorie Der Elliptischen Modulfunctionen. Volume1, Teubner, Leipzig, (1890).

[23] Koblitz, N., Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms, 2nd ed., Springer-Verlag GTM 97, 1993.

[24] Krantz,S., The Lagrange inversion theorem in the smooth case. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 340, Issue 2, 1263-1270(2008).

[25] S. Lang, Elliptic Functions, Springer, Berlin, 1987.

[26] Meguedmi,D.,Sebbar,A. Faà di Bruno's Formula and Modular Forms Complex Analysis and Operator Theory Complex Anal. Oper. Theory DOI 10.1007/s11785-015-0494-3

[27] Miyake, Modular Forms, 1st ed., Springer-Verlag Monographs in Math.,1989.

[28] Olver, P. J. Classical Invariant Theory. Cambridge University Press, 1999.

[29] Poole, E. G. C., Introduction to the Theory of Linear Differential Equations. Dover Publications Inc., 1960

[30] Gustafsson, G., Peetre, J. : Notes on projective structures on complex manifolds. Nagoya Math. J. 116, 63–88 (1989)

[31] Rademacher, H., Topics in analytic number theory, DieGrundlehrender math.Wissenschaften, Band 169, Springer-Verlag, Berlin,1973.

[32] Ramanujan, Srinivasa : On certain arithmetical functions Trans. Cambridge Philos. Soc. 22 (1916) 159-84.

[33] Rankin, R.A. The construction of automorphic forms from the derivatives of given forms, *J. Indian Math.Soc.*, 20, (1956), 103-116.

[34] Rankin, R.A. The construction of automorphic forms from the derivatives of given forms, *Michigan Math. J.* 4, (1957), 181-186.

[35] Resnikoff, H. L. On differential operators and automorphic forms. *Trans. Amer. Math. Soc.* 124 (1966) 334-346.

[36] Serre,J.P., Cours d'arithmétique, PUF, Paris, 1995 (4ème édition)

[37] A. Sebbar and A. Sebbar, Equivariant functions and integrals of elliptic functions. Geom. Dedicata, 160 : 373-414, 2012.

[38] Van der Put, M., Singer, M.F. Galois Theory of Linear Differential Equations Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Volume 328, Springer, 2003.

[39] Stiller, P., Special values of Dirichlet series, monodromy, and the periods of automorphic forms, Memoirs Am. Math. Soc., Vol. 49, No. 299 (1984).

[40] Stiller, P., Classical Automorphic Forms and Hypergeometric Functions, Jour. of Number Theory, Vol. 28, No. 2 (1988), pp. 219-232.

[41] Touchard, J., B.Van Der Pol, Equations différentielles linéaires vérifiées par certaines fonctions modulaires elliptiques, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 59= Indag. Math. 18 (1956), 166-169.

[42] Whittaker, E. T., Watson, G. N., A Course of Modern Analysis (4th ed.), Cambridge University Press, 1927, (réimprimé en 1992)

[43] Bruinier, J. H., van der Geer, G., Ranestad, K.,

[44] The 1-2-3 of Modular Forms : Lectures at a Summer School in Nordfjordeid, Norway, Springer, 2008

[45] Zagier, D., Modular forms and differential operators. Proc. Indian Acad.Sci. Math.Sci. 104(1994), no. 1, 57-75.