

N° d'ordre : 11/2016 - M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté des Mathématiques



## MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme** de **MAGISTER**

**En** : MATHEMATIQUES

**Spécialité** : Recherche Opérationnelle

**Par** : **OULD MOHAMED Ryma**

## Sujet

**Le hull number de quelques classes de graphes**

**Soutenu publiquement le** : 14/04/2016

**Devant le jury composé de** :

Mr MOULAI Mustapha,	Professeur,	à l'U.S.T.H.B.,	Président
Mr AIDER Méziane,	Professeur,	à l'U.S.T.H.B.,	Directeur de mémoire
Mr. AIT HADDADÈNE Hacène,	Professeur,	à l'U.S.T.H.B.,	Examineur
Mr SEMRI Ahmed,	Professeur,	à l'U.S.T.H.B.,	Examineur

# Remerciements

Mes sincères remerciements s'expriment tout d'abord en faveur du Pr M. AIDER, je lui en sais gré pour avoir accepté de m'encadrer et m'avoir proposé ce thème de recherche en m'orientant tout au long de ce travail.

Je remercie également les membres du jury, le Pr M. MOULAI pour avoir accepté de présider ce jury, le Pr H. AIT HADDADENE et le Pr A. SEMRI pour l'intérêt qu'ils portent à ce travail en acceptant de l'examiner.

Pour l'aide précieuse qu'il m'a apporté, entre autres, la lecture de ce document, je remercie mon époux Mr M. N. CHEBAIKI.

Je n'oublie pas de remercier les enseignants de la faculté des mathématiques de l'université de l'U.S.T.H.B. pour tout leur savoir qu'ils ont partagé avec nous et pour nous avoir inculqué l'amour de la recherche scientifique.

Je témoigne mes profonds remerciements à toutes les personnes que je n'ai pas citées, mais qui se reconnaîtront, pour leur aide et leur soutien.

À ma mère et mon père,  
À mon frère et mes soeurs,  
À mes neveux,  
À Chahine et Rym,  
À mon mari.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Notions de base : Théorie des graphes</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction . . . . .	13
1.2 Graphes . . . . .	13
1.2.1 Graphe complémentaire et graphe adjoint . . . . .	16
1.2.2 Sous-graphes . . . . .	17
1.3 Connexité dans les graphes . . . . .	17
1.3.1 Chaîne et cycle . . . . .	17
1.3.2 Connexité . . . . .	18
1.4 Graphes particuliers . . . . .	18
1.4.1 Graphe complet . . . . .	18
1.4.2 Graphe biparti . . . . .	18
1.4.3 Arbre . . . . .	20
1.4.4 Graphe régulier . . . . .	21
1.4.5 Hypercube : . . . . .	21
1.5 Quelques classes de graphes . . . . .	21
1.5.1 Cographe . . . . .	22
1.5.2 Graphe Triangulé . . . . .	22
1.6 Isomorphismes de graphe . . . . .	24
1.7 Représentation des graphes . . . . .	24
1.7.1 Matrice d'adjacence sommets-sommets . . . . .	25
1.7.2 Matrice d'incidence . . . . .	25
1.7.3 Liste d'adjacence . . . . .	26
1.8 Algorithmes et complexité . . . . .	27
1.8.1 Problèmes, instance et algorithmes . . . . .	27
1.8.2 Complexité . . . . .	29

1.9	Parcours d'un graphe . . . . .	32
1.9.1	Parcours en profondeur . . . . .	32
1.9.2	Parcours en largeur . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Propriétés métriques et Convexité dans les graphes</b>	<b>38</b>
2.1	Introduction . . . . .	38
2.2	$\Phi$ -chaîne et chaîne géodésique . . . . .	38
2.2.1	Chaîne géodésique . . . . .	38
2.3	Propriétés métriques . . . . .	39
2.3.1	Distance . . . . .	39
2.3.2	Fonction intervalle . . . . .	42
2.4	Convexité . . . . .	44
2.4.1	Espace Convexe . . . . .	44
2.4.2	Convexité dans les graphes . . . . .	46
2.5	Convexité géodésique . . . . .	47
2.5.1	Clôture géodésique d'un ensemble et ensemble convexe . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Quelques résultats sur le hull number</b>	<b>50</b>
3.1	Introduction . . . . .	50
3.1.1	Ensemble géodétique et nombre géodétique . . . . .	50
3.1.2	Hull set et hull number . . . . .	51
3.2	Propriétés d'un hull set . . . . .	51
3.3	Bornes pour le hull number . . . . .	53
3.4	Contraction de sommets et hull number . . . . .	57
3.5	Produit lexicographique . . . . .	57
3.6	Hull number des graphes réguliers . . . . .	58
3.6.1	Propriétés des graphes réguliers . . . . .	58
3.6.2	Bornes de $hn(G)$ des graphes réguliers . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Complexité du problème du hull number</b>	<b>63</b>
4.1	Introduction . . . . .	63
4.2	NP-Complétude du $hn(G)$ . . . . .	63
4.2.1	Graphes bipartis . . . . .	65
4.2.2	Graphes partiellement cubiques . . . . .	66
4.3	Polynomialité du $hn(G)$ . . . . .	66
4.3.1	Graphes $(P_5, \text{Triangle})$ -Libres . . . . .	66
4.3.2	Graphes triangulés . . . . .	68

---

4.3.3	Graphes distances héréditaires . . . . .	73
4.3.4	Graphes cobipartis . . . . .	75
4.3.5	Graphes $(q, q - 4)$ . . . . .	76
4.3.6	Graphes cactus . . . . .	76
<b>Conclusion</b>		<b>77</b>
<b>Bibliography</b>		<b>79</b>

# Table des figures

1	Réseau électrique RLC et son graphe représentatif. . . . .	9
1.1	Graphe orienté. . . . .	14
1.2	Graphe de Petersen (graphe non orienté). . . . .	14
1.3	Graphe complémentaire et graphe adjoint. . . . .	16
1.4	(a) graphe 4-parti - (b) graphe triparti complet. . . . .	19
1.5	(a) Arbre binaire à 5 sommets et de racine $r$ - (b) Arbre binaire complet à 8 feuilles et de racine $r'$ . . . . .	20
1.6	Hypercube $Q_4$ . . . . .	21
1.7	Cographe à 6 sommets, exemple extrait de [27]. . . . .	22
1.8	Graphe triangulé et un ordre d'élimination simplicial : $x_1 = d, x_2 = c,$ $x_3 = e, x_4 = b, x_5 = a, x_6 = f, x_7 = g, x_8 = h, x_9 = i, x_{10} = j.$ . . . .	23
1.9	Graphe scindé avec la partition $S$ et $C$ . . . . .	23
1.10	Graphe d'intervalle . . . . .	24
1.11	Représentation du graphe 1.5, par liste d'adjacence. . . . .	26
1.12	Les étapes de l'algorithme BFS appliqué à un graphe non orienté. . .	36
2.1	Chaîne avec corde. . . . .	39
2.2	Décomposition en couches à partir du sommet $a$ d'un graphe de dia- mètre $D = 3$ et de rayon $r = 2$ . . . . .	41
2.3	Chaîne monophonique $\{a, e, f, g\}$ et chaîne géodésique $\{a, d, g\}$ . . . .	43
2.4	Ensembles convexes : $\{a, b, j\}, \{a, b, c, j, k\}, \{d, l, m\}.$ . . . . .	47
3.1	Minimum hull set de quelques graphes particuliers. Les sommets en- tourés par un cercle définissent un minimum hull set. . . . .	52
3.2	Décomposition en couche d'un graphe $k$ -régulier de diamètre $D = 2$ . .	58
3.3	graphe $k$ -régulier de diamètre 3. . . . .	61
4.1	Hull number de quelques graphes particuliers. . . . .	63
4.2	Exemple de sous-graphe final extrait de [32]. . . . .	64

---

4.3	Exemple de sous-graphe final extrait de [2]. . . . .	65
4.4	Graphe d'intervalle unitaire. Les sommets reliés par des arêtes en tireté (resp. foncé) appartiennent à une plus courte chaîne qui relie les sommets $v_1, v_9$ (resp. $v_9, v_1$ ) obtenues par l'algorithme 4.2. . . . .	69
4.5	La chaîne $v_2, v_4, v_7$ est une chaîne grise. . . . .	70
4.6	Graphe scindé où $ S  = 4$ et $ C  = 6$ . On voit bien que $S$ n'est pas un hull set, les sommets engendrés par l'enveloppe convexe de $S$ sont les extrémités des arêtes représentées en tireté gris. . . . .	71



# Liste des Algorithmes

1.1	Parcours DFS . . . . .	34
1.2	Parcours BFS . . . . .	35
2.1	BFS_ N ( <b>E</b> : $G = (V, E)$ graphe, $v_0$ sommet ; <b>S</b> : $C$ tableau) . . . . .	42
2.2	Fermeture géodésique de $S$ . . . . .	48
4.1	$hn(G)$ d'un graphe biparti $P_5$ -libre. . . . .	67
4.2	Plus courte chaîne $v_i - v_j$ . . . . .	69
4.3	$hn(G)$ -graphe scindé . . . . .	72

# Introduction

La théorie des graphes est une discipline des mathématiques qui vise essentiellement à modéliser des phénomènes permettant une étude appréciable et facile. Son champ d'application s'élargit aussi bien sur les domaines de la science : chimie, physique, biologie, que sur le domaine des finances, la théorie de la décision et bien d'autres domaines. L'exemple de la figure 1, extrait du livre [29], chap. 13, illustre une représentation d'un réseau électrique par un graphe.

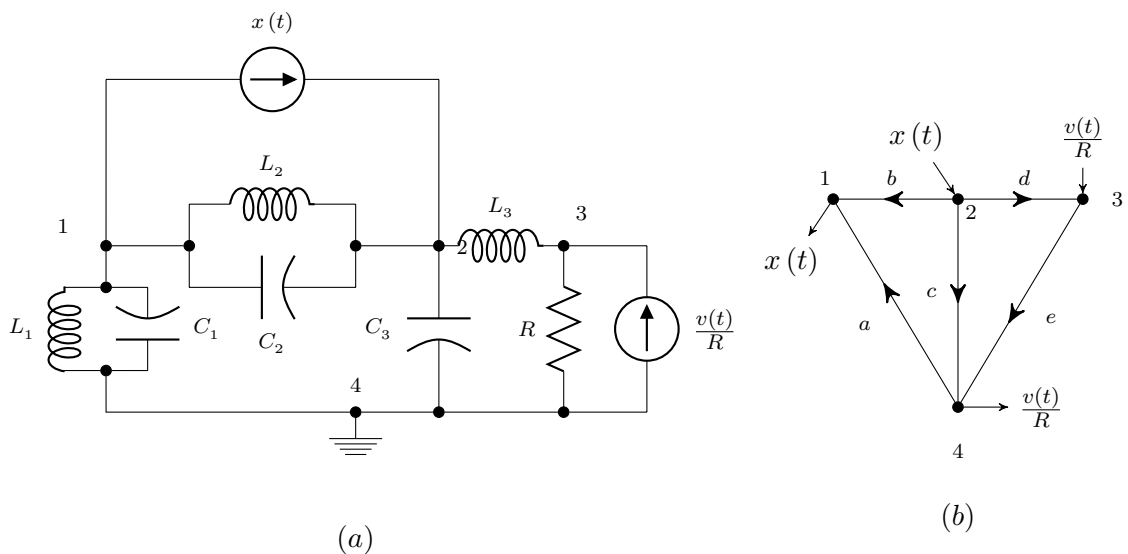


FIGURE 1 – Réseau électrique RLC et son graphe représentatif.

Les graphes furent étudiés sous différents aspects, que ce soit pour résoudre des problèmes rencontrés en pratique, tels les problèmes d'emploi du temps, de tournées de véhicules et bien d'autres, ou tout simplement par intérêt théorique, à titre d'exemple, la convexité dans les graphes. La convexité est une notion bien connue en géométrie euclidienne, où un ensemble convexe  $A$  est un ensemble qui vérifie pour chaque paire de sommets  $x, y \in A$ , la propriété suivante : "le segment de droite  $[x, y]$  qui les relie, est contenu dans  $A$  [8].

Dans un graphe, la convexité est principalement définie par une famille de chaînes, et selon la nature de la chaîne, il est possible de définir une convexité. Nous citons l'exemple de la convexité étudiée sur une famille de chaînes sans cordes, qui donne lieu à la convexité dite monophonique, un ensemble de sommets est, dans ce cas, convexe si pour toute paire de sommets de cet ensemble, les sommets de toutes les chaînes sans cordes qui les relient sont contenus dans cet ensemble. Un autre exemple de convexité, obtenue en considérant une famille de chaînes de longueur 2, connue sous le nom de  $P_3$ -convexité.

Nous envisageons de traiter dans cette thèse, uniquement la convexité géodésique. Plus particulièrement, nous nous limitons à étudier un paramètre introduit par les auteurs Everett et Seidman, dans [39], appelé "hull number" du graphe. Dans un graphe  $G = (V, E)$ , un sous-ensemble de sommets  $S \subseteq V$  est convexe si pour toute paire de sommets  $u, v \in S$ , les sommets des plus courtes chaînes qui relient  $u, v$  appartiennent à  $S$ . De même qu'en convexité standard, l'enveloppe convexe d'un ensemble  $S \subseteq V$ , noté  $[S]$ , est le plus petit ensemble convexe qui contient  $S$ . Un ensemble qui est tel que son enveloppe convexe soit égale à  $V$  est appelé "hull set". Le hull number d'un graphe  $G$ , noté  $hn(G)$ , représente le cardinal du plus petit ensemble de sommets qui soit un hull set.

Une des applications de la convexité qu'il est possible de rencontrer en pratique, est "La propagation d'une infection dans un réseau" [13, 17, 65], représenté par un graphe. Un sommet non infecté du réseau est infecté si au moins deux de ses voisins sont infectés. Le problème qui se pose dans ce cas, est de définir le nombre minimum de sommets qui une fois infectés, infectent à leur tour l'ensemble des sommets du réseau. Ce qui revient finalement à déterminer le cardinal du plus petit ensemble  $S$  dont l'enveloppe  $P_3$ -convexe est égale à l'ensemble des sommets du réseau, i.e. déterminer le  $P_3$ -hull number du graphe représentatif du réseau.

Nous pouvons de même, citer l'exemple des dépendances fonctionnelles et normalisations [53], qui garantissent la construction correcte du schéma relationnel d'une base de données. Soit un graphe  $G = (V, E)$  représentant les dépendances fonctionnelles dans une base de données relationnelle. Supposons à présent, que ces dépendances fonctionnelles sont toutes de type  $xy \rightarrow z$ , où  $x, y, z \in V$  et  $z$  est au milieu d'une plus courte chaîne reliant  $x$  et  $y$ . Une clé candidate pour cette base de données est

caractérisée par un ensemble de sommets dont l’enveloppe convexe est égale à  $V$  dans le graphe représentatif  $G$ .

L’étude de la convexité dans les graphes est récente, elle connaît un grand intérêt ces dernières années et de nombreux résultats ont été obtenus. Certaines notions connues en convexité dans  $\mathbb{R}^n$  ont été adaptées aux différents cas de convexité dans les graphes, tels que le théorème de Helly et Radon [38, 37, 61].

Déterminer si  $hn(G) \leq k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  est un problème NP-complet. Les différents travaux élaborés dans ce contexte visent à établir les meilleures bornes possibles pour  $hn(G)$ , la détermination de la complexité de ce problème pour des classes de graphes spécifiques, ou encore la mise en place de procédés de construction sur les graphes tels que la contraction de sommets, dans un but bien précis, celui d’obtenir un “hull set”. Nous avons étudié les graphes  $k$ -réguliers, en ayant considéré le cas où l’ordre  $n \leq 2k + 1$ , ainsi que le cas où le graphe en plus d’être régulier, est de diamètre  $D \leq 4$ , pour lesquels nous obtenons une borne pour le hull number. Les résultats sont présentés au chapitre 3.

Nous avons jugé utile de diviser notre travail, rapporté dans cette thèse, en deux parties. La première, comprenant les chapitres 1 et 2 est consacrée aux définitions sur la théorie des graphes et la convexité relative à ces derniers. La seconde partie, composée des chapitres 3 et 4, est quant à elle dédiée à l’étude du hull number. Nous faisons ainsi une synthèse des résultats majeurs obtenus sur le hull number.

Nous présentons dans le chapitre 1, des rappels sur des notions de base de la théorie des graphes et quelques-unes de leurs propriétés, nécessaires et utiles à la compréhension du sujet traité dans ce manuscrit. Le lecteur pourra ainsi retrouver les notions de sous-graphe, connexité ou encore morphisme de graphe. Par la suite, nous faisons un bref aperçu sur les notions d’algorithmes et de complexité. Nous terminons ce chapitre, en présentant deux algorithmes de parcours d’un graphe, en particulier l’algorithme de parcours en largeur BFS. Nous verrons au chapitre 2, comment cet algorithme permet de déterminer l’enveloppe convexe d’un sous-ensemble de sommets.

Le chapitre 2 est également consacré à des définitions. Nous rappelons en premier lieu, les notions de distance, diamètre et de rayon dans un graphe ainsi que la fonction intervalle. Nous introduisons en second lieu, le concept de convexité adaptée aux

graphes. Nous définissons ainsi la convexité dans le cas général et nous présentons différents exemples de convexité dans le cas continu ainsi que dans le cas des graphes.

Le chapitre 3 regroupe les travaux et résultats obtenus par les auteurs, dans le cadre de l'étude du hull number. Nous mettons en évidence les différents paramètres rencontrés et étudiés en convexité géodésique, par la suite nous présentons les principales bornes pour certaines classes de graphes, telles que les graphes multipartis complets ou les graphes sans triangles. Dans [2], les auteurs montrent que le hull number d'un graphe  $k$ -régulier est borné par  $1 + \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ . Nous prouvons qu'il est possible d'améliorer cette borne, lorsque l'ordre du graphe est  $n \leq 2k + 1$ , ou encore lorsque le graphe est en plus biparti de diamètre inférieur ou égal à 4. Les résultats sont rapportés en dernière partie du chapitre.

Nous dédions le dernier chapitre à l'étude de la complexité du problème du hull number qui est connu pour être un problème NP-complet. Nous étudions en dernière partie de ce chapitre, d'autres classes de graphes qui admettent des algorithmes efficaces permettant de calculer le hull number.

# Chapitre 1

## Notions de base : Théorie des graphes

### 1.1 Introduction

Nous consacrons ce chapitre à des définitions de base autour de la théorie des graphes et des propriétés relatives aux graphes. Nous commençons en premier lieu par donner deux définitions, la première définition présente un graphe comme un couple d'ensembles de sommets et d'arêtes respectivement, et la seconde définition algébrique fait appel à une fonction mettant en évidence la relation entre l'ensemble des sommets et celui des arêtes. Nous rappelons également, les notions de complexité dans les graphes, dans le cadre des besoins théoriques relatifs à notre thème de recherche. La dernière partie est dédiée au parcours d'un graphe. Nous finalisons donc ce chapitre, en présentant les deux principales méthodes ainsi que les algorithmes permettant de parcourir un graphe. Nous nous sommes inspirés des ouvrages [10, 14, 16, 30, 44, 56, 68, 69] pour rédiger l'intégralité de ce chapitre.

### 1.2 Graphes

Un graphe  $G = (V, E)$  est un couple constitué d'un ensemble  $V$  (qu'on considérera comme fini) d'objets  $v_1, v_2, \dots, v_n$  appelés sommets et d'un ensemble  $E$  d'éléments  $e_1, e_2, \dots, e_m$  appelés arêtes ayant chacune d'entre elles pour extrémités deux sommets de  $V$ . On appelle ordre (resp. taille) du graphe  $G$  le nombre de sommets  $n$  (resp. le nombre d'arêtes  $m$ ).

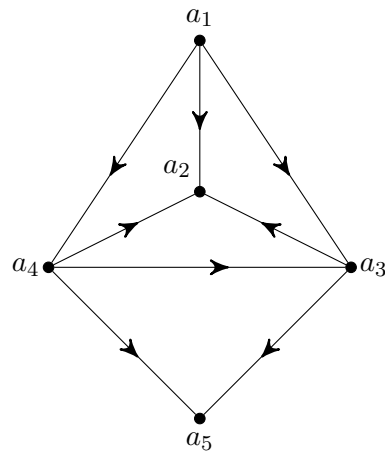


FIGURE 1.1 – Graphe orienté.

Deux sommets  $u, v \in V$  sont adjacents ou voisins si  $\exists e \in E$  telle que  $e$  soit une arête commune à  $u$  et  $v$ . On dira alors que  $e$  est incidente à  $u$  et à  $v$ , ou encore que  $u$  et  $v$  sont les extrémités de l'arête  $e$ . Deux arêtes sont adjacentes si elles ont au moins une extrémité en commun.

Dans le graphe de la figure 1.1 les sommets sont tous reliés par des arêtes munies de flèches qu'on appelle arcs, un tel graphe est dit orienté. En réalité les graphes sont tous orientés, mais il arrive dans certains cas que l'orientation du graphe n'intervienne pas dans l'étude du problème posé, les arcs sont alors remplacés par des arêtes, on dit ainsi que le graphe est non orienté, comme l'illustre la figure 1.2.

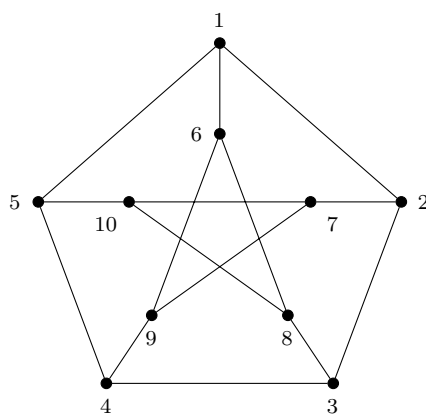


FIGURE 1.2 – Graphe de Petersen (graphe non orienté).

Chaque élément  $e \in E$  est constitué d'une paire d'éléments de  $V$ . Il existe donc une certaine relation entre l'ensemble des arêtes  $E$  et l'ensemble des sommets  $V$ . Par conséquent, il est possible de définir un graphe de la manière suivante :

**Définition 1.1** [14]. Un graphe  $G$  est défini par l'ensemble des sommets  $V$ , l'ensemble d'arêtes  $E$  et une fonction d'incidence  $\phi$  telle que :

$$\begin{aligned} \phi &: E \longrightarrow \mathcal{P}_2(V) \\ e &\longmapsto \phi(e) \end{aligned}$$

Où  $\mathcal{P}_2(V)$  est l'ensemble des parties à deux éléments de  $V$ . La fonction  $\phi$  associe à chaque arête  $e \in E$  les sommets qui lui sont incidents. Ainsi si les extrémités de  $e$  sont  $u, v$  alors  $\phi(e) = \{u, v\}$ .

Dans ce qui suit, lorsqu'on fera référence à une arête  $\{u, v\}$  on écrira simplement  $uv$  sans parenthèses ni virgule.

La définition qui précède, n'interdit pas l'existence de plusieurs liaisons entre deux sommets  $u, v \in V$ , l'arête  $uv$  est dans ce cas appelée arête multiple et on dit que  $G$  est un multigraphe. De manière plus explicite, si  $p \in \mathbb{N}$  est le plus grand nombre d'arêtes multiples entre deux sommets de  $V$  dans le graphe  $G$ , on dira que  $G$  est un  $p$ -graphe. Une arête  $e \in E$  peut aussi être du type  $\phi(e) = uu$ , ce type d'arête est appelé boucle. Un graphe simple est un graphe sans arêtes multiples et sans boucle.

Dans la suite du document, il sera question de graphe fini simple non orienté sauf indication contraire.

Le degré d'un sommet  $u \in V$  est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes, qu'on note  $d(u)$ . Si le degré d'un sommet  $u \in V$  est nul alors  $u$  est un sommet isolé. Si  $d(u) = 1$ ,  $u$  est un sommet pendant. Le plus petit degré d'un graphe est noté  $\delta$ , et le plus grand degré est noté  $\Delta$ . On appelle séquence de degrés d'un graphe  $G$  la suite décroissante des degrés des sommets de  $G$  :

$$d(u_1) \geq d(u_2) \geq \cdots \geq d(u_n), \quad \text{où : } u_1, \cdots, u_n \in V.$$

Pour chaque sommet  $v \in V$ , l'ensemble des sommets qui lui sont voisins forme un sous-ensemble appelé voisinage de  $v$ , que l'on note  $N(v)$ . Le voisinage fermé du sommet  $v$  est le sous-ensemble :  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ . Deux sommets  $u, v \in V$  sont dit jumeaux s'ils admettent le même voisinage, i.e.  $N(u) \setminus \{v\} = N(v) \setminus \{u\}$ . Si  $uv \in E$  alors  $u$  et  $v$  sont dits "vrai jumeaux", dans le cas contraire, ils sont dit "faux jumeaux". Soit  $S \subset V$ , le voisinage de  $S$  noté  $N(S)$ , est l'ensemble défini comme



suit :

$$N(S) = S \cup \{u \in V \setminus S : \exists v \in S, uv \in E\}.$$

On définit le voisinage d'ordre  $i$  d'un ensemble  $S$  de la manière suivante :

$$N^i(S) = N(N^{i-1}(S)) \text{ où } N^1(S) = N(S).$$

On appelle sommet simplicial tout sommet  $v$  tel que les éléments de  $N(v)$  sont tous deux à deux adjacents. Un sommet est dit universel s'il est adjacent à tous les sommets de  $V$ .

### 1.2.1 Graphe complémentaire et graphe adjoint

**Définition 1.2.** Le graphe complémentaire  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  de  $G = (V, E)$  est le graphe défini par le même ensemble de sommets  $V$  et l'ensemble d'arêtes :

$$\bar{E} = \{uv : u, v \in V, u \neq v \text{ et } uv \notin E\}$$

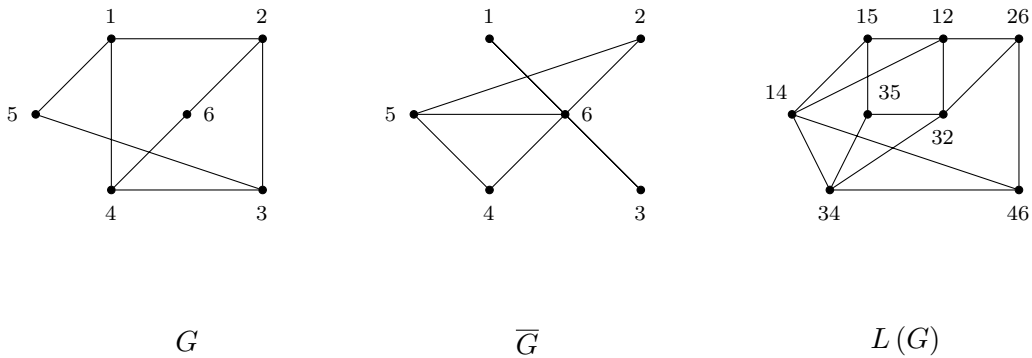


FIGURE 1.3 – Graphe complémentaire et graphe adjoint.

Le graphe adjoint d'un graphe  $G$  est le graphe dont l'ensemble des sommets correspond à l'ensemble des arêtes de  $G$ , et deux sommets du graphe adjoint sont voisins si leurs arêtes correspondantes dans  $G$  sont adjacentes. Formellement, le graphe adjoint est défini comme suit :

**Définition 1.3.** Le graphe adjoint ou le Line graph noté  $L(G)$  d'un graphe  $G = (V, E)$ , est défini par :

- L'ensemble des sommets  $V(L(G)) = E$  : tel que chaque sommet de  $V(L(G))$  représente une arête de  $G$ .

- L'ensemble d'arêtes  $E(L(G))$  : tel que  $e_L = u_L v_L \in E(L(G))$  ( $u_L, v_L \in V(L(G))$ ) si et seulement si  $u_L \cap v_L \neq \emptyset$ .

### 1.2.2 Sous-graphes

**Définition 1.4.** Un sous-graphe de  $G = (V, E)$ , est un graphe  $G' = (V', E')$  tel que :  $V' \subseteq V$  et  $E' \subseteq E$ .

**Définition 1.5.** Le graphe partiel du graphe  $G = (V, E)$  est un graphe  $G' = (V, E')$  où  $E' \subseteq E$ . En d'autres termes,  $G'$  est obtenu à partir de  $G$  en supprimant les arêtes de l'ensemble  $E \setminus E'$ .

**Définition 1.6.** Le sous-graphe induit ou engendré par l'ensemble  $V' \subseteq V$ , noté  $G[V']$  est le sous-graphe ayant pour ensemble de sommets  $V'$  et pour ensemble d'arêtes  $E' \subseteq E$  tel que :

$$uv \in E' \quad \text{si et seulement si} \quad u, v \in V'$$

## 1.3 Connexité dans les graphes

### 1.3.1 Chaîne et cycle

Une chaîne reliant deux sommets  $u$  et  $v$  de  $V$ , est une séquence de sommets  $P = v_1 v_2 \cdots v_k$ , où  $v_1 = u, v_k = v$  et  $\forall 1 \leq i < k$  les sommets  $v_i, v_{i+1}$  sont adjacents. On appelle également  $P$  une  $uv$ -chaîne. On note  $P_k$ , une chaîne à  $k$  sommets. La longueur d'une chaîne est mesurée par le nombre d'arêtes reliant ses sommets, la longueur de  $P$  est donc égale à  $k - 1$ . Les éléments de l'ensemble  $\{v_2, \cdots, v_{k-1}\}$  sont appelés sommets internes de  $P$ . On dit que  $P$  est simple si  $P$  ne passe pas deux fois par une même arête, de même si  $P$  ne contient pas deux fois le même sommet, on dit qu'elle est élémentaire.

Un cycle est une chaîne fermée simple, il est défini par une séquence de sommets  $C = v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ , on note  $C_k$  un cycle à  $k$  sommets, la longueur du cycle est égale à  $k$ . Un cycle est dit cycle impair (cycle pair) si  $k$  est impair (respectivement pair). La maille d'un graphe notée  $g$  est la longueur du plus petit cycle contenu dans  $G$ . La circonférence d'un graphe est le cycle le plus long du graphe  $G$ .

Une corde est une arête reliant deux sommets non consécutifs d'une chaîne ou d'un cycle. La chaîne  $P$  (le cycle  $C$ ) est dite chaîne induite (respectivement cycle induit) si le sous-graphe engendré par ses sommets ne contient pas de corde.

### 1.3.2 Connexité

**Définition 1.7.** Un graphe  $G = (V, E)$  est connexe si et seulement si pour toute paire de sommets  $u, v$  :

- Soit  $uv \in E$ , ou bien,
- il existe une chaîne reliant  $u$  à  $v$ .

Si  $G$  n'est pas connexe, alors  $G$  est l'union disjointe de deux ou plusieurs sous-graphes connexes appelés composantes connexes de  $G$ .

**Définition 1.8.** Dans un graphe  $G = (V, E)$  un point d'articulation est un sommet  $u$  dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes d'au moins une unité.

**Définition 1.9.** Un isthme est une arête dont la suppression déconnecte le graphe. Le nombre de composantes connexes augmente dans ce cas d'exactly une unité.

## 1.4 Graphes particuliers

### 1.4.1 Graphe complet

Un graphe complet à  $n$  sommets, que l'on note  $K_n$ , est un graphe tel que tous les sommets sont deux à deux adjacents. Il possède donc  $n(n-1)/2$  arêtes. Une clique est un sous-graphe complet.

Notons que le graphe  $H = (V, E \cup \bar{E})$  est un graphe complet.

### 1.4.2 Graphe biparti

Un stable est un ensemble de sommets  $S \subseteq V$  deux à deux non adjacents. I.e.  $\forall u, v \in S, uv \notin E$ . Soulignons que si  $S \subseteq V$  est un stable de  $G$  alors  $S$  est une clique de  $\bar{G}$  et inversement.

**Définition 1.10.** Un graphe biparti est un graphe tel que son ensemble de sommets  $V$  peut être partitionné en deux ensembles disjoints non vides  $V = X \cup Y$ , où  $X$  et  $Y$  sont des stables.

**Théorème 1.1.** *Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle impair.*

**Définition 1.11.** Un graphe  $G = (V, E)$  est dit cobiparti (complémentaire du graphe biparti) s'il existe une partition de l'ensemble des sommets  $V$  en  $A \cup B$  telle que  $A$  (resp.  $B$ ) engendre un sous-graphe complet.

Les graphes multipartis sont une généralisation des graphes bipartis. Un graphe  $G = (V, E)$  est dit multiparti ou  $k$ -parti si l'ensemble de ses sommets admet une partition  $V = \{V_1, \dots, V_k\}$  telle que  $\forall i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j$  :

- $V_i \cap V_j = \emptyset$ ;
- $V_i$  est un stable;
- et  $|V_i| = n_i$ , où :  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ .

Un graphe multiparti complet, qu'on note  $K_{1, \dots, k}$ , est un graphe multiparti, de plus :

$$\forall u \in V_i, \forall v \in V_j : uv \in E, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j.$$

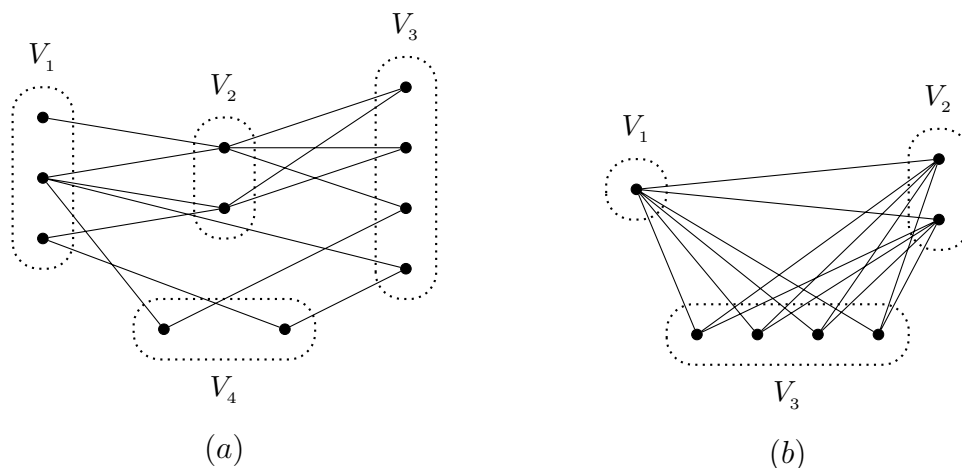


FIGURE 1.4 – (a) graphe 4-parti - (b) graphe triparti complet.

### 1.4.3 Arbre

Un arbre est un graphe connexe sans cycle. Une forêt est un graphe non connexe où chacune de ses composantes connexes est sans cycle.

**Proposition 1.1.** *Étant donné un graphe  $T = (V, E)$  d'ordre  $n \geq 2$ , les assertions suivantes sont équivalentes et définissent un arbre à  $n$  sommets :*

- (a)  $T$  est connexe et sans cycle ;
- (b)  $T$  est sans cycle et admet  $n - 1$  arêtes ;
- (c)  $T$  est connexe et admet  $n - 1$  arêtes ;
- (d)  $T$  est sans cycle et si on ajoute une arête, on crée un unique cycle ;
- (e)  $T$  est connexe, et chaque arête est un isthme ;
- (f) tout couple de sommets est relié par une unique chaîne.

Les sommets pendants de l'arbre sont appelés feuilles. Dans la figure 1.5 le sommet  $r$  (resp.  $r'$ ) est appelé racine de l'arbre  $T$  (resp.  $T'$ ), on dit que les sommets 1 et 2 sont les successeurs ou les fils de  $r$  et que  $r$  est le prédécesseur ou le parent des sommets 1 et 2. Deux sommets appartiennent au même niveau si les longueurs des chaînes qui les relient à la racine sont égales. L'arbre  $T$  de la figure 1.5 admet trois niveaux et  $T'$  en admet quatre.

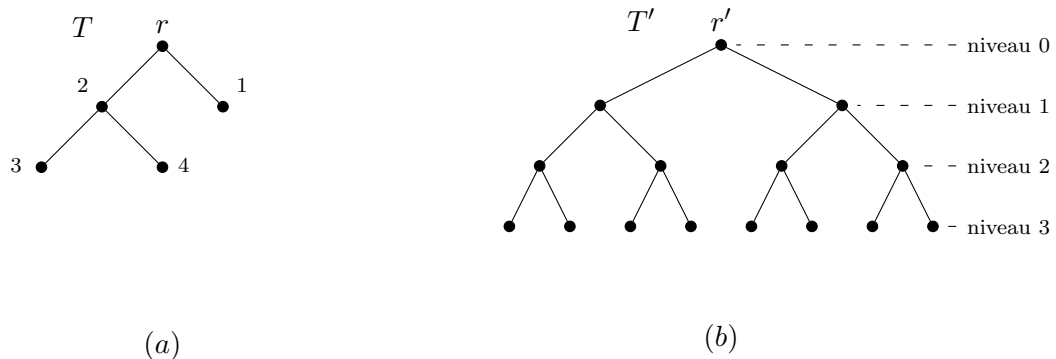


FIGURE 1.5 – (a) Arbre binaire à 5 sommets et de racine  $r$  - (b) Arbre binaire complet à 8 feuilles et de racine  $r'$ .

**Définition 1.12.** Un arbre binaire  $T$  est un arbre muni d'une racine où chaque sommet possède au plus deux successeurs.  $T$  est dit arbre binaire complet si  $T$  est un arbre binaire et de plus si les chaînes qui relient chaque feuille à la racine sont de longueur égale.

**Proposition 1.2.** *Un arbre  $T$  à  $n$  sommets où  $n \geq 2$  admet au moins deux feuilles.*

**Remarque 1.1.** Un arbre ne possède pas de cycle, et en particulier de cycle impaire, il est donc par définition un graphe biparti.

**Définition 1.13.** La hauteur d'un sommet  $v \in V$  notée  $h(v)$ , dans un arbre binaire complet est la longueur de la chaîne reliant  $v$  à n'importe quel sommet de ces successeurs qui soit une feuille.

#### 1.4.4 Graphe régulier

Un graphe régulier est un graphe où tous les sommets ont le même degré,  $\forall u, v \in V, d(u) = d(v) = k$ . Un tel graphe est souvent appelé graphe  $k$ -régulier. Lorsque  $k = 3$  on dit que  $G$  est un graphe cubique. Le graphe de Petersen de la figure 1.2 est un graphe 3-régulier ou cubique.

#### 1.4.5 Hypercube :

**Définition 1.14.** L'hypercube  $Q_n$  de dimension  $n$ , est le graphe dont l'ensemble des sommets est formé par les  $n$ -uplets d'éléments binaires et deux sommets sont adjacents si et seulement s'ils diffèrent en une seule composante.

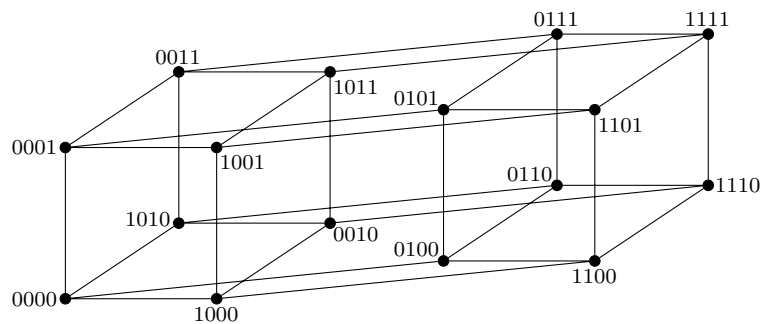


FIGURE 1.6 – Hypercube  $Q_4$

Un hypercube  $Q_n$  admet  $2^n$  sommets et  $n \cdot 2^{n-1}$  arêtes.

## 1.5 Quelques classes de graphes

Dans cette section, nous définissons seulement les classes de graphes utilisées dans cette thèse, les cographes, les graphes triangulés, les graphes d'intervalles et les

graphes scindés qui sont également des graphes triangulés. Nous proposons les ouvrages [15, 48], pour ceux qui désirent approfondir leur recherche sur les classes de graphes.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe et  $\mathcal{F}$  une classe de graphes. On dit que  $G$  est “ $\mathcal{F}$ -libre” ou “sans  $\mathcal{F}$ ”, s’il ne contient aucun des graphes de  $\mathcal{F}$  comme sous-graphe induit.

### 1.5.1 Cographe

Le nom “cographe” signifie complement reducible graph. Les cographes sont exactement les graphes sans  $P_4$ , ils sont décrits par la définition suivante :

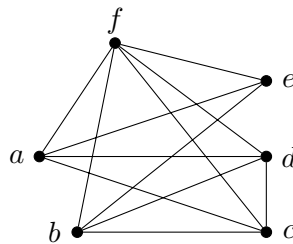


FIGURE 1.7 – Cographe à 6 sommets, exemple extrait de [27].

**Définition 1.15.** Un cographe est un graphe obtenu récursivement comme suit :

- Le graphe à un sommet est un cographe.
- L’union disjointe de deux cographes est un cographe.
- Le complémentaire d’un cographe est un cographe.

### 1.5.2 Graphe Triangulé

**Définition 1.16.** Un graphe  $G = (V, E)$  est dit graphe triangulé, s’il n’admet pas de cycle de longueur supérieure ou égale à quatre qui soit sans corde.

**Proposition 1.3** [31]. *Un graphe triangulé possède au moins deux sommets simpliciaux.*

Un schéma d’élimination simplicial ou ordre canonique est un ordonnancement sur l’ensemble des sommets  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , tel que  $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$  le sommet  $x_i$  est simplicial dans le sous-graphe induit par l’ensemble des sommets  $\{x_{i+1}, \dots, x_n\}$ .

**Théorème 1.2** [43]. *Un graphe est triangulé si et seulement s’il admet un schéma d’élimination simplicial.*

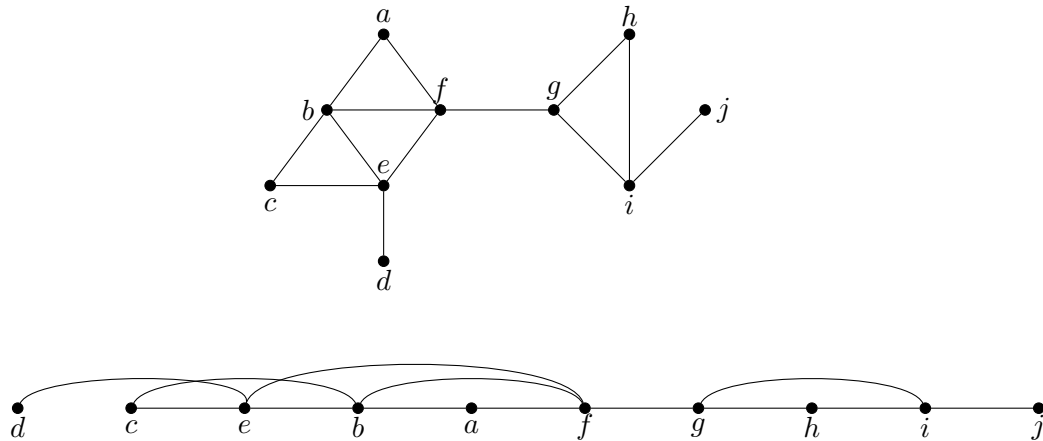


FIGURE 1.8 – Graphe triangulé et un ordre d’élimination simplicial :  $x_1 = d, x_2 = c, x_3 = e, x_4 = b, x_5 = a, x_6 = f, x_7 = g, x_8 = h, x_9 = i, x_{10} = j$ .

### Graphes scindés

**Définition 1.17.** Un graphe  $G = (V, E)$  est dit graphe scindé, si son ensemble de sommets peut être partitionné en deux ensembles  $V = S \cup C$ , tel que les sommets de  $S$  engendrent un stable et ceux de  $C$  une clique.

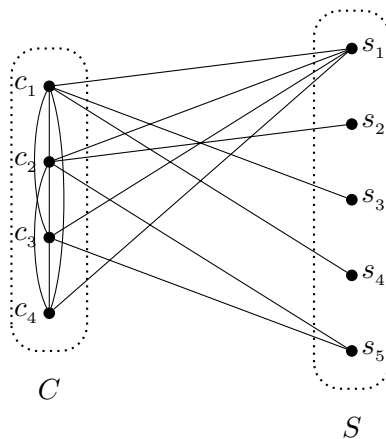


FIGURE 1.9 – Graphe scindé avec la partition  $S$  et  $C$

### Remarque 1.2.

La partition d’un graphe scindé n’est pas unique. Prenons l’exemple du graphe scindé illustré par la figure 1.9, les partitions suivantes définissent également un graphe scindé :

- $S \setminus \{s_1\}$  et  $C \cup \{s_1\}$ .



- $(S \setminus \{s_1\}) \cup \{c_4\}$  et  $(C \setminus \{c_4\}) \cup \{s_1\}$ .

### Graphes d'intervalles

**Définition 1.18.** Un graphe d'intervalle  $G = (V, E)$  est une représentation d'une famille d'intervalles  $I_1, \dots, I_n$  où chaque intervalle  $I_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) est identifié par un sommet  $u_i$  et deux sommets sont adjacents si et seulement si leurs intervalles respectifs s'intersectent :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad i \neq j, u_i, u_j \in V : u_i u_j \in E \text{ ssi } I_i \cap I_j \neq \emptyset.$$

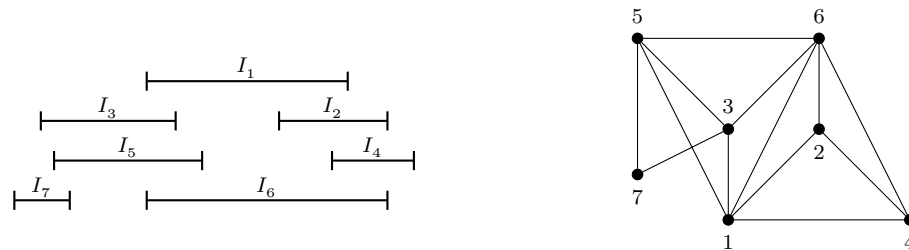


FIGURE 1.10 – Graphe d'intervalle

Lorsque les intervalles  $I_1, \dots, I_n$  sont tous de longueur égale, le graphe  $G$  associé est appelé graphe d'intervalle unitaire.

## 1.6 Isomorphismes de graphe

**Définition 1.19.** Un isomorphisme entre deux graphes simples  $G = (V, E)$  et  $H = (V', E')$  est une bijection  $f : V \rightarrow V'$  telle que  $uv \in E$  si et seulement si  $f(u)f(v) \in E'$ . On dit que  $G$  est isomorphe à  $H$  si une telle bijection existe et on écrit  $G \cong H$ .

## 1.7 Représentation des graphes

Lorsqu'on désire résoudre certains problèmes de la théorie des graphes de taille conséquente, on fait appel aux machines. Dès lors, il est nécessaire de représenter les données du problème, en particulier celles d'un graphe, de manière à ce qu'elles soient exploitables. Les matrices semblent être un outil mathématique adéquat pour représenter un graphe, nous avons alors le choix entre mettre en évidence la relation d'adjacence des sommets ou la relation d'incidence entre les arêtes du graphe et

ses sommets. Seulement, lorsque le graphe est creux, i.e. lorsque  $|E|$  est considérablement plus petit que  $|V|^2$ , la représentation par matrice n'est plus optimale, une autre alternative se présente dans ce cas, celle de représenter un graphe par une liste d'adjacence.

Afin de faciliter la représentation, il est nécessaire de donner des étiquettes à chaque sommet de  $V$ . On attribue sans perte de généralité, à chaque sommet une étiquette de l'ensemble suivant  $L = \{1, \dots, n\}$ .

### 1.7.1 Matrice d'adjacence sommets-sommets

Chaque ligne et chaque colonne de la matrice d'adjacence représente un sommet. Les éléments de la matrice représentent la relation d'adjacence entre les sommets.

**Définition 1.20.** La matrice d'adjacence associée au graphe  $G = (V, E)$  est une matrice carrée, notée  $A$ , de taille  $n \times n$ , telle que :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } ij \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

#### Exemple 1.1.

La matrice qui suit représente la matrice d'adjacence relative à l'arbre binaire de la figure 1.5. On attribue au sommet  $r$  l'étiquette 5.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

### 1.7.2 Matrice d'incidence

La matrice d'incidence détermine un graphe. Les colonnes représentent les arêtes et les lignes les sommets.

**Définition 1.21.** La matrice d'incidence (sommets - arêtes) du graphe  $G = (V, E)$

est une  $n \times m$  (où  $m = |E|$ ) matrice qu'on note  $B$ , telle que :

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } i \text{ est incident à l'arête } e_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exemple 1.2.**

Matrice d'incidence relative à l'arbre binaire de la figure 1.5.

$$B = \begin{matrix} & \{1,5\} & \{2,5\} & \{2,3\} & \{2,4\} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

**Remarque 1.3.**

Dans le cas où le graphe n'est pas simple, les éléments  $b_{ij}$  de la matrice  $B$  sont égaux au nombre de fois où le sommet  $i$  est incident à l'arête  $e_j$ .

### 1.7.3 Liste d'adjacence

**Définition 1.22.** [49] La liste d'adjacence d'un graphe  $G$ , est un tableau de  $n$  listes, une pour chaque sommet de  $V$ .  $\forall i \leq n$ , il y a un pointeur  $P_i$  dirigé vers la liste qui contient l'ensemble des sommets adjacents à  $i$ .

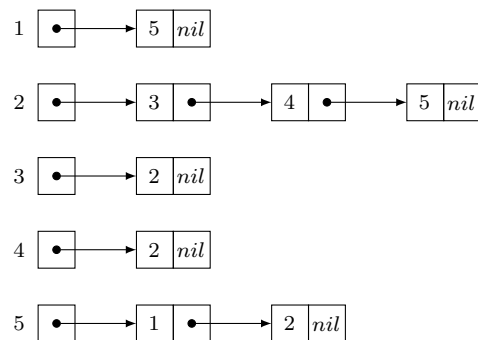


FIGURE 1.11 – Représentation du graphe 1.5, par liste d'adjacence.

## 1.8 Algorithmes et complexité

Résoudre un problème nécessite la mise en œuvre de procédés de calculs bien définis qu'on appelle algorithme. Pour certains problèmes, les algorithmes associés sont considérés comme efficaces, on entend par là, que non seulement ils fournissent une solution au problème, mais aussi une solution est obtenue en un temps et un espace raisonnables. Tandis que pour d'autres problèmes, nous pouvons citer comme exemple le problème de tournées de véhicules, le temps de résolution croît considérablement en fonction de la taille du problème, nous ne connaissons pas, d'algorithmes qui permettent de résoudre ce type de problème en un temps et un espace raisonnables.

La théorie de la complexité s'intéresse à étudier la difficulté d'un problème et le classe en conséquence. Dans ce qui suit, nous faisons un bref aperçu sur les définitions et les notations associées à la théorie de la complexité, et nous présentons quelques classes de complexité. Pour plus de détails sur ce sujet, nous proposons les ouvrages suivants : [5, 9, 12, 25, 45, 54, 62, 66].

### 1.8.1 Problèmes, instance et algorithme

Un problème  $\Pi$  est une question donnée par : une description générale de tous les paramètres de  $\Pi$ , et l'énoncé des propriétés que doit satisfaire une réponse, ou une solution. Une instance d'un problème  $\Pi$  est obtenue en spécifiant des valeurs particulières pour tous les paramètres de  $\Pi$ .

On distingue deux types de problèmes, selon la nature ainsi que le résultat possible. Les problèmes d'optimisation combinatoire qui produisent comme résultat une ou plusieurs valeurs correspondant à la meilleure parmi toutes celles qui vérifient les conditions du problème, et les problèmes de reconnaissance communément appelés problèmes de décision. Leurs définitions respectives sont données ci-dessous.

**Définition 1.23.** Soient un ensemble fini  $S$  et une fonction  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Un problème d'optimisation combinatoire consiste à déterminer une solution  $\hat{s} \in S$  qui vérifie  $f(\hat{s}) = \min_{s \in S} f(s)$  ( $\max_{s \in S} f(s)$ ).

**Définition 1.24.** Un problème de reconnaissance est un problème dont le résultat ne peut prendre que l'une des deux valeurs vrai ou faux.

Le problème de reconnaissance le plus étudié est sans doute le problème de satisfiabilité, que nous définissons ci-après. Pour cela, on se donne un ensemble de variables booléennes  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

**Problème 1.1** Problème de satisfiabilité SAT.

Soit  $E_1 = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$ , une expression booléenne en termes de variables de  $X$ , où chaque  $C_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , s'écrit sous la forme suivante :

$$C_j = \mu_{j_1} \vee \mu_{j_2} \vee \dots \vee \mu_{j_p}, \quad \text{tel que } \mu_{j_q} = \begin{cases} x \\ \bar{x} \end{cases}, \quad x \in X, \quad \forall q \in \{1, \dots, p\}$$

**Question :** Existe-t-il une affectation des variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en  $\{0, 1\}$ , telle que  $E_1 = 1$  ?

Une variante du problème de satisfiabilité est le problème appelé problème 3-SAT, dont la différence réside dans le nombre de littéraux  $q$  de chaque clause, qui est au plus égale à 3. Le problème 3-SAT est défini ci-dessous.

**Problème 1.2** Problème satisfiabilité 3-SAT.

$E_2 = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$  ensemble de clauses définies sur l'ensemble  $X$ .

Tel que  $\forall j = \overline{1, m}$  :

$$C_j = \mu_{j_1} \vee \dots \vee \mu_{j_q}, \quad q \text{ est au plus égal à } 3.$$

**Question :** Existe-t-il une affectation des variables de  $X$  en  $\{0, 1\}$  de sorte que  $E_2 = 1$  ?

Une deuxième variante du problème SAT est le problème SAT-AM3. Dont la description est donnée par :

**Problème 1.3** Problème satisfiabilité SAT-AM3.

Soit l'expression booléenne suivante :

$$E_3 = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$$

Où  $\forall j = \overline{1, m}$  :

$$C_j = \mu_{j_1} \vee \dots \vee \mu_{j_q}, \quad q \text{ est au plus égal à } 3.$$

De plus, Chaque variable de  $X$  apparaît au plus trois fois.

**Question :** Existe-t-il une affectation des variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en  $\{0, 1\}$  de sorte que  $E_3$  soit vraie ?

**Remarque 1.4.**

Il est possible de se ramener à partir d'un problème d'optimisation combinatoire à un problème de reconnaissance, et ce en attribuant à la fonction objectif une borne, de la sorte :

Soient  $S$  un ensemble fini,  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $k \in \mathbb{R}$ .

“Existe-t-il  $s \in S$ , tel que  $f(s) \leq k$  ( $f(s) \geq k$ )”.

Un algorithme est une suite d'instructions mathématiques et logiques menant à une solution d'un problème  $\Pi$ . Il est dit correct s'il résout  $\Pi$  quelque soit l'instance  $I$  de  $\Pi$ . On dira alors qu'il résout le problème  $\Pi$ . Réellement, un algorithme transforme les paramètres du problème  $\Pi$ , dits données d'entrée, en solution ou réponse au problème  $\Pi$ , dite données de sortie, en appliquant une série de calculs bien définis. On dira qu'un algorithme est non déterministe, s'il contient parmi ses instructions une instruction dite “choix” qui permet à chaque fois de faire le bon choix sans préciser pour autant comment ce choix est effectué.

Dans une optique d'optimisation, il est commode d'étudier l'efficacité d'un algorithme d'un point de vue temporel, i.e. le temps nécessaire à la résolution d'un problème donné par un algorithme bien défini et ce pour n'importe quelle instance de ce problème. On mesure ainsi l'efficacité en fonction de la taille d'une instance, qui reflète la quantité de cases mémoires nécessaires pour coder les données de l'instance.

## 1.8.2 Complexité

La complexité d'un algorithme peut être étudiée sous deux aspects différents. L'aspect temporel qui exprime ses besoins en termes de temps nécessaire à l'algorithme pour résoudre une instance du problème. L'aspect spatial, dont l'intérêt est porté à l'espace mémoire occupé par les données d'entrée de l'algorithme.

Nous présentons dans cette partie, quelques définitions sur la théorie de la complexité, où seule la complexité temporelle est considérée.

**Définition 1.25.** Soient deux fonction  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On dira que  $f = \mathcal{O}(g)$  s'il existe une constance  $c > 0$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ , tels que  $\forall x \geq x_0, |f(x)| \leq c|g(x)|$ .

Si la fonction  $g$  est un polynôme en  $n$  et que  $f = \mathcal{O}(g)$ , on dira que  $f$  est polynomiale.

**Exemple 1.3.** Considérons la fonction  $f(x) = 4x^6 + x^4 - 2x^3 + 2$ , et prenons  $x_0 = 4$ , nous avons alors :

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |4x^6| + |x^4| + |2x^3| + 2 \leq 4x^6 + x^6 + 2x^6 + 2x^6 \\ &\leq 9x^6 \\ &\leq 9|x^6|. \end{aligned}$$

Posons  $c = 9$  et  $g(x) = x^6$ , ainsi,  $\forall x \geq 4, |f(x)| \leq 9|g(x)|, f = \mathcal{O}(x^6)$ .

**Définition 1.26.** La complexité temporelle d'un algorithme est une fonction qui indique, pour chaque taille d'entrée possible  $n$ , le nombre d'opérations élémentaires dont l'algorithme a besoin pour résoudre une instance de cette taille dans le cas le plus défavorable.

Les opérations élémentaires dont il est question sont les opérations arithmétiques, telles que la multiplication, la soustraction, la division et l'addition, ainsi que les opérations d'affectation, de comparaison .... Un algorithme est dit polynomial si sa complexité temporelle est bornée par un polynôme en  $n$ . Si l'algorithme de résolution d'un problème  $\Pi$  est polynomial on dira qu'il est efficace.

### Classe P

**Définition 1.27.** Un problème  $\Pi$  appartient à la classe P s'il peut être résolu par un algorithme polynomial.

Les problèmes de la classe P sont considérés comme des problèmes faciles à résoudre. La théorie de la complexité n'est cependant pas en mesure de dire formellement si un problème admet ou non un algorithme polynomial, mais elle permet de dire s'il est facile à résoudre et le classe en fonction de cela.

### Classe NP

Le terme NP signifie "non deterministic polynomial". La classe NP contient les problèmes dont on est en mesure de vérifier en un temps polynomial la faisabilité d'une solution donnée. Prenons, à titre d'exemple, le problème 1.1 de satisfiabilité sur  $n$  variables et supposons que l'on dispose d'une affectation  $A$  en  $\{0, 1\}^n$ ,  $A$  est un vecteur de taille polynomiale, pour vérifier si  $A$  satisfait  $E_1$  il suffit d'évaluer  $E_1$  avec  $A$ , cette opération se fait en temps polynomial. Le problème 1.1 appartient donc à la classe NP.

**Définition 1.28.** Un problème  $\Pi$  de la classe NP, est un problème qui peut être résolu par un algorithme non déterministe polynomial.

**Remarque 1.5.**

Il est évident que les problèmes de la classe P appartiennent à la classe NP, il s'ensuit que  $P \subset NP$ . Mais alors la classe NP serait-elle incluse dans la classe P ? On ne pourrait affirmer cela, car il existe des problèmes, comme le problème du stable maximum ou encore le problème du voyageur de commerce, qu'on ne sait pas résoudre par un algorithme polynomial.

La question  $P \neq NP$  ? est à ce jour une question ouverte, c'est une conjecture considérée comme l'une des plus importantes de ce siècle. Mais au vu des travaux qui ont été faits dans ce cadre, les théoriciens optent plus pour une réponse affirmative à cette question ( $P \neq NP$ ).

### Classe NP-complet

Les problèmes NP-complets sont des problèmes de NP considérés comme les plus difficiles. Un bon nombre de problèmes appartient à cette classe. Pour la définir, nous avons besoin d'introduire le concept de réduction polynomiale.

**Définition 1.29** Réduction polynomiale.

Soient  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  deux problèmes. On dit que  $\Pi_1$  se réduit polynomialement à  $\Pi_2$  s'il existe un algorithme pour  $\Pi_1$  qui fait appel (comme à un sous programme), à un algorithme de résolution de  $\Pi_2$  et si cet algorithme de résolution de  $\Pi_1$  est polynomial lorsque la résolution de  $\Pi_2$  est comptabilisée comme une opération élémentaire.

**Théorème 1.3.** *Si un problème  $\Pi_1$  se réduit en temps polynomial à  $\Pi_2$  et si  $\Pi_2$  peut être résolu par un algorithme polynomial, il en est de même pour  $\Pi_1$ .*

**Définition 1.30.** Un problème de décision  $\Pi \in NP$ , est NP-complet si tout problème de NP se réduit polynomialement à  $\Pi$ .

**Théorème 1.4.** *Si un problème  $\Pi_1$  est NP-complet et si on peut mettre en évidence une réduction polynomiale de  $\Pi_1$  à  $\Pi_2$ , alors  $\Pi_2$  est NP-complet.*

**Théorème 1.5** [26, 55]. *Les problèmes de satisfiabilité SAT et 3-SAT sont NP-complets.*



### Classe NP-difficile

**Définition 1.31.** Un problème  $\Pi$  est difficile pour la classe de problèmes  $NP$ , ou  $NP$ -difficile, si tout problème de  $NP$  se réduit polynomialement à  $\Pi$ .

En fait, un problème  $NP$ -difficile n'est pas nécessairement dans  $NP$ , mais nous savons qu'il est au moins aussi difficile que n'importe quel problème  $NP$ -complet. Plus particulièrement, un problème de décision est  $NP$ -complet si et seulement s'il est  $NP$ -difficile et il appartient à  $NP$ .

## 1.9 Parcours d'un graphe

Lors de la résolution d'un problème donné sur un graphe, il arrive parfois que l'on ait besoin d'explorer l'ensemble de ses sommets (ou bien arêtes). Deux stratégies de parcours d'un graphe ont alors été mises au point. Le parcours en largeur (en anglais Bread-first search BFS) et le parcours en profondeur (en anglais Depth-first search DFS). Les deux méthodes procèdent en sélectionnant initialement un sommet  $v_0$  à partir duquel on visite ses voisins et les voisins de ses voisins ainsi de suite jusqu'à parcourir tous les sommets du graphe. Les deux méthodes reposent sur le marquage des sommets du graphe  $G$ . On utilise pour cela trois couleurs :

- Blanc : tous les sommets sont initialement marqués en "blanc";
- Gris : les sommets qui sont en cours de traitement;
- Noir : les sommets traités.

La différence entre le parcours en profondeur et le parcours en largeur réside principalement dans le choix du parcours des sommets ainsi que dans les structures de données utilisées.

Dans ce qui suit nous proposons une description ainsi que les algorithmes des deux méthodes.

### 1.9.1 Parcours en profondeur

Le parcours en profondeur consiste, comme son nom l'indique, à explorer les sommets du graphe en profondeur. i.e. qu'à partir d'un sommet initial  $v_0$ , on visite un de ses voisins disant  $v_1$  et on le marque "gris", on visite ensuite un voisin de  $v_1$  marqué "blanc", qu'on marque "gris", on continue ainsi jusqu'au sommet  $v_k$  qui n'admet pas

de voisin marqué "blanc", on marque  $v_k$  "noir" et on remonte le long de ses prédécesseurs marqués "gris", en vérifiant pour le prédécesseur le plus proche s'il admet un voisin marqué "blanc". Si tel est le cas, on répète l'opération en prenant le sommet prédécesseur le plus proche comme sommet initial, sinon il est marqué "noir" et on reprend à partir du sommet qui le précède. On continue de la sorte, jusqu'à ce que tous les sommets soient marqués noirs.

Notons que les sommets visités en dernier par l'algorithme décrit précédemment, sont les premiers à être traités, tels une pile. On utilisera donc, comme structure de données pour ce cas, une pile  $P$ , pour laquelle on définit les opérations suivantes :

- *initpile* ( $P$ ) initialise la pile  $P$  à vide ;
- *empiler* ( $P, s$ ) ajoute  $s$  au sommet de la pile  $P$  ;
- *pilevide* ( $P$ ) retourne vrai si la pile  $P$  est vide, faux sinon ;
- *sommet* ( $P$ ) retourne la valeur contenue dans le sommet de  $P$  ;
- et *depiler* ( $P, s$ ) supprime la valeur contenue dans le sommet de la pile  $P$ , et la renvoie dans  $s$ .

On utilise également un tableau *couleur* qui associe à chaque sommet sa couleur (blanc, gris ou noir).

Soulignons que lors de l'application de l'algorithme DFS sur un graphe, ce dernier fournit non seulement un ordre sur les sommets, mais aussi, les arêtes parcourues dans ce sens engendrent un arbre couvrant. L'algorithme permet également, de déterminer si un graphe est connexe, et si ce n'est pas le cas, il permet de donner le nombre de composantes connexes du graphe, en appliquant plusieurs fois l'algorithme jusqu'à ce que tous les sommets soient visités.

### Complexité

On considère un graphe  $G = (V, E)$ , avec  $|V| = n$ , et  $|E| = m$  et on suppose que  $G$  est représenté par une liste d'adjacence. Chaque sommet est ajouté, puis enlevé, une fois dans la pile, donc l'opération totale d'empilement et de dépilement se déroule en  $\mathcal{O}(n)$ . De plus l'exploration de chaque sommet  $v$  nécessite  $d(v)$  opérations, et donc le nombre total d'opérations est proportionnel au nombre d'arêtes. On en conclut que la complexité en temps de l'algorithme DFS est de  $\mathcal{O}(n + m)$ .

---

**algorithme 1.1** Parcours DFS

---

**Entrée(s)**  $G = (V, E)$  un graphe simple,  $|V| = n$  et sommet initial  $v_0$ .**Sortie(s)** Ordre sur les sommets dans le sens du parcours.

```

1: initpile ( $P$ );
2: pour chaque sommet  $v \in V$  faire
3:   couleur [ $v$ ]  $\leftarrow$  blanc;
4: fin pour
5: empiler ( $P, v_0$ );
6: couleur [ $v_0$ ]  $\leftarrow$  gris;
7: tant que pilevide ( $P$ ) = faux faire
8:    $u \leftarrow$  sommet ( $P$ );
9:   si ( $\exists v \in N(u)$ ) and (couleur [ $v$ ] = blanc) alors
10:    empiler ( $P, v$ );
11:    couleur [ $v$ ]  $\leftarrow$  gris;
12:   sinon
13:    depiler ( $P, u$ );
14:    couleur [ $u$ ]  $\leftarrow$  noir;
15:   fin si
16: fin tant que

```

---

**1.9.2 Parcours en largeur**

Le parcours en largeur est lié à la notion de plus courte chaîne. Puisque l'algorithme BFS engendre les plus courtes chaînes entre un sommet  $v$  et tout autre sommet accessible par un chemin issu de  $v$ . Le principe de la méthode est le suivant :

Soit un sommet initial  $v_0$  qu'on marque "gris", on visite tous ses voisins et on le marque "noir". Soit  $v_1$  le premier sommet voisin de  $v_0$  à avoir été visité, on marque  $v_1$  "gris", on visite tous ses voisins marqués "blanc" et on marque  $v_1$  "noir". On continue de la sorte en sélectionnant à chaque fois le sommet le plus anciennement visité, jusqu'à marquer "noir" tous les sommets du graphe.

A l'encontre de la méthode précédente, le premier sommet visité est le premier à être traité. Le parcours en largeur utilise le même principe que les files d'attente. De ce fait, une file d'attente est la structure de données qui se propose le plus naturellement pour stocker les données du problème. On procède alors en enlevant à chaque fois le plus vieux sommet gris dans la file d'attente, et en introduisant tous ses successeurs marqués "blancs" dans la file, qui sont par la suite marqués "gris".

Soit une file d'attente  $Q$ . On définit les opérations suivantes :

- *initfile* ( $Q$ ) qui initialise la file  $Q$  à vide ;
- *enfiler* ( $Q, s$ ) qui ajoute le sommet  $s$  à la fin de la file  $Q$  ;

- $filevide(Q)$  qui retourne vrai si la file  $Q$  est vide, faux sinon ;
- et  $defiler(Q, s)$  supprime la valeur au début de la file  $Q$ , et la renvoie dans  $s$ .

On utilise également, un tableau *couleur* qui associe à chaque sommet sa couleur (blanc, gris ou noir).

#### Exemple 1.4.

La figure 1.12 décrit le déroulement de l'algorithme BFS. Les sommets sont initialement "blanc". Un sommet en cours de traitement passe de la couleur "blanc" à la couleur "gris", il correspond au premier sommet de la file  $Q$ , on place alors tous ses voisins de couleur "blanc" dans la file et ainsi le sommet "gris" passe à la couleur "noir", on le supprime de la file  $Q$ . On recommence l'opération en prenant le sommet au début de la file, l'algorithme se termine lorsque  $Q$  est vide.

---

#### algorithme 1.2 Parcours BFS

---

**Entrée(s)**  $G = (V, E)$  un graphe simple,  $|V| = n$  et sommet initial  $v_0$ .

**Sortie(s)** Ordre sur les sommets dans le sens du parcours.

```

1: initfile ( $Q$ ) ;
2: pour chaque sommet  $v \in V$  faire
3:    $couleur[v] \leftarrow$  blanc ;
4: fin pour
5: enfiler ( $Q, v_0$ ) ;
6:  $couleur[v_0] \leftarrow$  gris ;
7: tant que  $filevide(Q) =$  faux faire
8:   defiler ( $Q, u$ ) ;
9:   pour chaque  $v \in N(u)$  faire
10:    si  $couleur[v] =$  blanc alors
11:      enfiler ( $Q, v$ ) ;
12:       $couleur[v] \leftarrow$  gris ;
13:    fin si
14:   fin pour
15:    $couleur[u] \leftarrow$  noir ;
16: fin tant que

```

---

En plus de l'ordre sur les sommets du graphe, résultant de l'application de l'algorithme défini ci-dessus, nous obtenons, en considérant les arêtes visitées lors du parcours en largeur, un arbre couvrant sur le graphe en question.

De même que l'algorithme DFS, l'algorithme de parcours en largeur, permet d'identifier si un graphe est connexe, et dans le cas contraire il détermine le nombre de

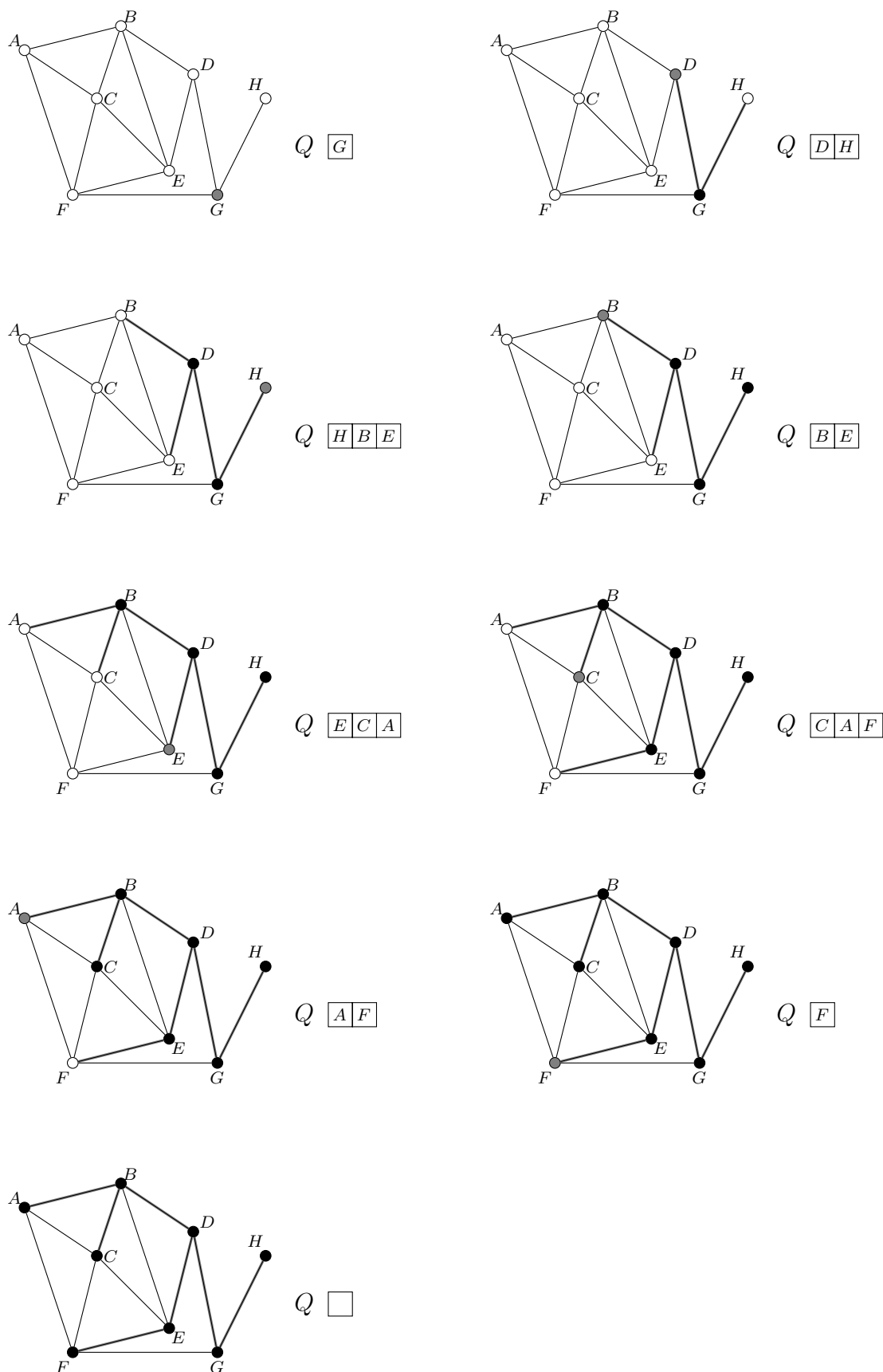


FIGURE 1.12 – Les étapes de l'algorithme BFS appliqué à un graphe non orienté.

composantes connexes. Mais pas seulement, l'algorithme BFS est utilisé dans la résolution de certains problèmes de cheminement (en terme de plus courte distance), puisque son application à un graphe à partir d'un sommet initiale  $u$ , fournit tous les plus courts chemins qui relient  $u$  à n'importe quel sommet du graphe.

### Complexité

On considère un graphe  $G = (V, E)$ , avec  $|V| = n$  et  $|E| = m$ . On suppose que  $G$  est représenté par une liste d'adjacence. Chaque sommet est ajouté, puis enlevé, une fois dans la file, donc l'opération totale se déroule en  $\mathcal{O}(n)$ . De plus l'exploration de chaque sommet  $v$  nécessite  $d(v)$  opérations, et donc le nombre total d'opérations est proportionnel au nombre d'arêtes. On en conclut que la complexité en temps de l'algorithme BFS est de  $\mathcal{O}(n + m)$ .

# Chapitre 2

## Propriétés métriques et Convexité dans les graphes

### 2.1 Introduction

Le présent chapitre est dédié aux notions d'espace métrique et de convexité adaptés au cas discret, particulièrement aux cas des graphes. Nous passons en revue les définitions et les théorèmes les plus importants dans ce contexte.

### 2.2 $\Phi$ -chaîne et chaîne géodésique

Soient un graphe  $G = (V, E)$ ,  $\mathcal{P}$  l'ensemble de toutes les chaînes de  $G$  et  $\Phi$  une propriété sur  $\mathcal{P}$ . On dit qu'une chaîne  $P \in \mathcal{P}$  est une  $\Phi$ -chaîne ou chaîne  $\Phi$ , si  $P$  vérifie la propriété  $\Phi$ . Prenons par exemple, le cas où  $\Phi$  est la propriété "sans corde", si  $P$  ne contient pas de corde on dira que  $P$  est une chaîne sans corde ou que  $P$  est une chaîne monophonique. La propriété  $\Phi$  est dite réalisable sur le graphe  $G$ , si quelque soit deux sommets  $u, v \in V$  ( $u \neq v$ ), il existe une chaîne qui relie  $u$  à  $v$  et qui vérifie  $\Phi$ .

#### 2.2.1 Chaîne géodésique

Une chaîne  $P$  qui relie  $u$  à  $v$  est dite géodésique, si  $P$  vérifie la propriété de la plus courte chaîne. Un sommet  $w$  est dit géodominé par les sommets  $u$  et  $v$ , si  $w$  appartient à une chaîne géodésique reliant  $u$  et  $v$ , on utilise également le terme  $w$  "est entre"  $u$  et  $v$ .

**Proposition 2.1.** *Si  $P$  est une chaîne géodésique alors le sous-graphe induit par les sommets de  $P$  ne contient pas de corde.*

*Preuve.* Soit  $\rho = v_1 v_2 \cdots v_i v_{i+1} \cdots v_l v_{l+1} v_{l+2} \cdots v_j v_{j+1} \cdots v_{k-1} v_k$  une  $uv$ -chaîne géodésique, telle que  $u = v_1, v = v_k$  et supposons que le sous-graphe induit par  $\rho$  possède une corde  $e = v_{i+1} v_j$ . Considérons la chaîne  $\rho' = v_1 v_2 \cdots v_i v_{i+1} v_j v_{j+1} \cdots v_k v_{k+1}$  extraite de  $\rho$  qui relie également  $u, v$  et qui passe par  $e$  (voir la figure 2.1). Indéniablement, la longueur de  $\rho'$  est plus petite que la longueur de  $\rho$ . Ce qui contredit le fait que  $\rho$  soit une chaîne géodésique.  $\square$

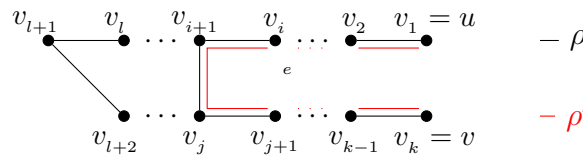


FIGURE 2.1 – Chaîne avec corde.

Notons qu’une chaîne géodésique est une chaîne monophonique, l’inverse n’est pas toujours vrai.

## 2.3 Propriétés métriques

Nous mettons en évidence dans cette section, les notions de distance, diamètre, rayon et d’intervalle dans un graphe. Nous considérons le long de ce chapitre, ainsi que des chapitres qui suivent, un graphe  $G = (V, E)$  simple fini et connexe, où  $|V| = n$  et  $|E| = m$ .

### 2.3.1 Distance

La distance entre deux sommets quelconques d’un graphe, est la longueur d’une chaîne géodésique qui les relie. La fonction distance est quant à elle définie comme suit :

$$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$(u, v) \longmapsto d(u, v)$$

Où  $d$  satisfait pour tout  $u, v, w \in V$  les propriétés suivantes :

1.  $d(u, v) \geq 0$ , l’égalité est atteinte si et seulement si  $u$  et  $v$  se confondent ( $u = v$ ) ;



2.  $d(u, v) = d(v, u)$ ;
3.  $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$  (l'inégalité triangulaire).

Le couple  $(V, d)$ , tel que  $d$  est une distance sur  $V$ , définit un espace métrique sur le graphe  $G$ .

Soit  $H$  un sous-graphe induit de  $G$ .  $\forall u, v \in V$ ,  $d_G(u, v) \leq d_H(u, v)$ , où  $d_G(u, v)$  ( $d_H(u, v)$ ) désigne la distance entre  $u$  et  $v$  dans  $G$  (resp.  $H$ ).

**Définition 2.1.** Un sous-graphe  $G' = (V', E')$  de  $G$  est dit sous-graphe isométrique si :

$$\forall u, v \in V', \quad d_{G'}(u, v) = d_G(u, v)$$

L'excentricité d'un sommet  $v$  notée  $e(v)$  est la distance maximum entre  $v$  et tout autre sommet de  $G$  :

$$\forall v \in V, \quad e(v) = \max \{d(u, v), u \in V\}$$

Le rayon d'un graphe, noté  $r$ , est la valeur minimum de l'excentricité de ses sommets :

$$r = \min \{e(v), v \in V\}$$

Soulignons que  $r = 1$  si et seulement si le graphe  $G$  admet un sommet universel. On appelle sommet central tout sommet  $v \in V$ , qui vérifie  $e(v) = r$ . Le centre est le sous-graphe engendré par les sommets centraux de  $G$ .

Le diamètre, qu'on note  $D$ , d'un graphe  $G$ , est la plus grande distance reliant deux sommets quelconques de  $G$ , ce qui correspond à la valeur maximum de l'excentricité des sommets de  $G$ .

$$D = \max \{d(u, v), (u, v) \in V^2\} = \max \{e(v), v \in V\}$$

Un sommet  $v \in V$ , dont l'excentricité est égale au diamètre  $e(v) = D$ , est dit sommet périphérique. Le sous-graphe engendré par les sommets périphériques de  $G$  est appelé périphérie de  $G$ .

**Proposition 2.2** [47]. *Soit  $G$  un graphe, le diamètre ainsi que le rayon de  $G$  vérifient les propriétés suivantes :*

- $r \leq D \leq 2r$  ;
- $D \leq n - \Delta + 1$  ;
- $r \leq \frac{n-\Delta}{2} + 1$  ;
- Si  $\delta \geq \frac{n}{2}$ , alors  $D \leq 2$ .

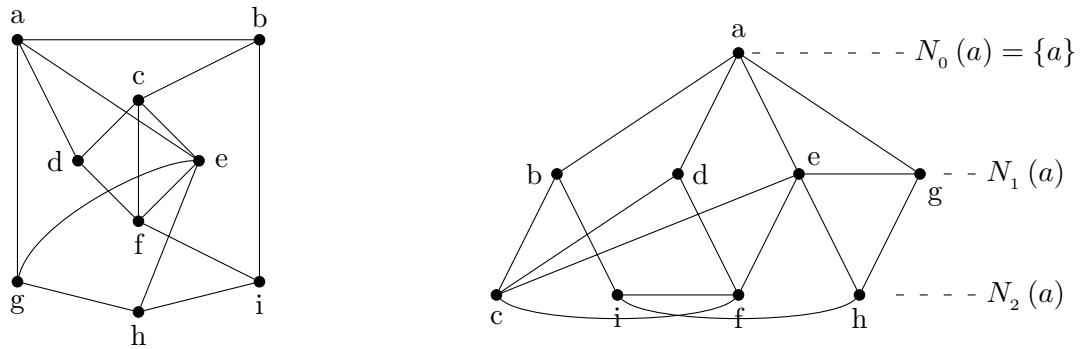


FIGURE 2.2 – Décomposition en couches à partir du sommet  $a$  d'un graphe de diamètre  $D = 3$  et de rayon  $r = 2$ .

On définit l'ensemble  $N_i(v)$  comme l'ensemble de tous les sommets à distance  $i$  de  $v$ .

$$N_i(v) = \{u \in V, d(u, v) = i\}$$

Pour tout sommet  $v \in V$  la séquence :  $\{v\}, N_1(v), \dots, N_{e(v)}(v)$ , définit une partition sur l'ensemble des sommets  $V$ , dite décomposition en niveaux (ou couches), où chaque sous-ensemble  $N_i(v)$ , qu'on appelle  $i^{\text{ème}}$  niveau, contient des sommets qui sont à distance égale de  $v$ , voir figure 2.2.

Il importe de rappeler que l'algorithme BFS, décrit au chapitre 1.9.2, permet d'obtenir toutes les chaînes géodésiques qui relient un sommet  $v$  aux sommets de  $V \setminus \{v\}$ . Il est donc approprié d'appliquer cet algorithme pour partitionner l'ensemble des sommets en niveaux à partir d'un sommet initial  $v$ . Il suffit pour cela, d'ajouter une instruction qui renvoie la distance entre chaque sommet de  $V \setminus \{v\}$  et  $v$ .

On considère le tableau  $C$  qui fait correspondre à chaque sommet  $u \in V$ , la distance  $d(u, v)$ . Les étapes de l'algorithme sont décrites dans la procédure 2.1.

---

**Procédure 2.1** BFS\_ N ( $\mathbf{E} : G = (V, E)$  graphe,  $v_0$  sommet ;  $\mathbf{S} : C$  tableau)

---

```

1: initfile ( $Q$ ) ;
2: pour chaque sommet  $v \in V$  faire
3:   couleur [ $v$ ]  $\leftarrow$  blanc ;
4:    $C$  [ $v$ ]  $\leftarrow$  0 ;
5: fin pour
6: enfiler ( $Q, v_0$ ) ;
7: couleur [ $v_0$ ]  $\leftarrow$  gris ;
8: tant que filevide ( $Q$ ) = faux faire
9:   defiler ( $Q, u$ ) ;
10:  pour chaque  $v \in N(u)$  faire
11:    si couleur [ $v$ ] = blanc alors
12:      enfiler ( $Q, v$ ) ;
13:      couleur [ $v$ ]  $\leftarrow$  gris ;
14:       $C$  [ $v$ ]  $\leftarrow$   $C$  [ $u$ ] + 1 ;
15:    fin si
16:  fin pour
17:  couleur [ $u$ ]  $\leftarrow$  noir ;
18: fin tant que

```

---

### 2.3.2 Fonction intervalle

L'intervalle, noté  $I[u, v]$ ,  $(u, v) \in V^2$ , est un sous-ensemble de sommets qui appartiennent aux chaînes géodésiques reliant  $u$  et  $v$ . La fonction intervalle notée  $I$  est une application, définie par :

$$\begin{aligned}
 I & : V \times V \longrightarrow \mathcal{P}(V) \\
 (u, v) & \longmapsto I[u, v]
 \end{aligned}$$

Où :

$$\begin{aligned}
 I[u, v] & = \{w \in V, \quad w \text{ appartient à une chaîne géodésique}\} \\
 & = \{w \in V, \quad \text{tel que : } d(u, v) = d(u, w) + d(w, v)\}.
 \end{aligned}$$

Soulignons que si le graphe  $G$ , muni d'une fonction intervalle  $I$ , n'est pas connexe alors il existe des intervalles vides, et inversement.

**Proposition 2.3** [60]. *Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe, muni d'une fonction intervalle  $I$ , alors  $\forall u, v, w, z \in V$  :*

1.  $u, v \in I[u, v]$  ;
2.  $I[u, v] = I[v, u]$  ;
3. si  $w \in I[u, v]$ , alors  $I[u, w] \subseteq I[u, v]$  ;

4. si  $w \in I[u, v]$ , alors  $I[u, w] \cap I[w, v] = \{w\}$  ;
5. si  $w \in I[u, v]$  et  $z \in I[u, w]$ , alors  $w \in I[z, v]$ .

**Remarque 2.1.**

La fonction intervalle, peut être généralisée suivant la propriété réalisable  $\Phi$  sur les chaînes de  $G$ , en fonction dite fonction  $\Phi$ -intervalle, qu'on note  $I_\Phi$  :

$$I_\Phi[u, v] = \{w \in V, \quad w \text{ appartient à une chaîne } \Phi\}$$

Si la propriété réalisable étudiée sur l'ensemble  $\mathcal{P}$  est la propriété monophonique, la fonction  $\Phi$ -intervalle est dite fonction intervalle monophonique le plus souvent notée  $J$ , où  $J$  associe à chaque paire de sommets  $\{u, v\}$  le sous-ensemble  $J[u, v]$  qui contient tous les sommets appartenant aux chaînes sans cordes entre  $u$  et  $v$ .

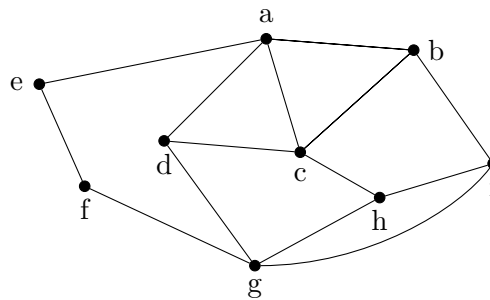


FIGURE 2.3 – Chaîne monophonique  $\{a, e, f, g\}$  et chaîne géodésique  $\{a, d, g\}$

**Exemple 2.1.** Considérons le graphe de la figure 2.3.

- Il existe une unique chaîne géodésique entre  $a$  et  $g$ ,  $P^{(1)} = a d g$ , il s'ensuit que  $I[a, g] = \{a, d, g\}$ .
- Les sommets  $b$  et  $f$  sont reliés par deux chaînes géodésiques,  $P^{(2)} = b a e f$  et  $P^{(3)} = b i g f$ , dans ce cas  $I[b, f] = \{b, a, e, i, g, f\}$ .
- Étudions à présent, le cas où la propriété  $\Phi$ , réalisable sur le graphe de la figure 2.3, est la propriété “sans corde”, et considérons les sommets  $a$  et  $g$ . Les chaînes monophoniques entre ces deux sommets sont :

$$P^{(1)} = a d g, \quad P^{(4)} = a e f g, \quad P^{(5)} = a b i g, \quad P^{(6)} = a c h g.$$

L'intervalle monophonique associé aux sommets  $a$  et  $g$  est :

$$J[a, g] = \{a, d, g, e, f, b, i, c, h\}.$$

## 2.4 Convexité

Le concept de convexité ne concerne pas seulement la convexité dans  $\mathbb{R}^n$ , il est bien plus général. Nous nous proposons de caractériser dans cette partie, la convexité dans un contexte global, en définissant en premier lieu un espace convexe constitué de sous-ensembles convexes qui vérifient trois axiomes principaux. Nous exhibons quelques exemples de convexité, entre autre la convexité géodésique, à laquelle nous nous intéressons plus particulièrement, et de manière plus spécifique, à l'étude de l'un de ses paramètres appelé hull number.

### 2.4.1 Espace Convexe

Un espace convexe est un couple  $(X, \mathcal{C})$ , où  $X$  est non vide et  $\mathcal{C}$  une collection de sous-ensembles convexes de  $X$ , qui vérifie les axiomes suivants :

- (A1)  $\emptyset, X \in \mathcal{C}$  ;
- (A2) Toute intersection d'ensembles convexes est convexe ;
- (A3) Toute réunion d'ensembles emboîtés convexes est convexe.

L'axiome (A2) (resp. (A3)) peut s'interpréter comme suit : l'ensemble  $\mathcal{C}$  est clos par intersection (resp. réunion). En d'autres termes l'ensemble  $\mathcal{C}$  est stable pour ces opérations.

On appelle enveloppe convexe d'un sous-ensemble  $A \subset X$ , le plus petit ensemble convexe qui contient l'ensemble  $A$ . On note  $[A]_{\mathcal{C}}$ , l'enveloppe convexe de  $A$ .

**Théorème 2.1** [37]. *Étant donné  $\mathcal{C}$  une collection de sous-ensembles non vides de  $X$ . Telle que  $\mathcal{C}$  vérifie les axiomes (A2) et (A3). Alors :*

- *L'opérateur de l'enveloppe convexe  $[\ ]_{\mathcal{C}}$  est un opérateur clôt. En effet :*

- $A \subset [A]_{\mathcal{C}}$  ;
- si  $A \subseteq B$ , alors  $[A]_{\mathcal{C}} \subseteq [B]_{\mathcal{C}}$  ;
- $[[A]_{\mathcal{C}}]_{\mathcal{C}} = [A]_{\mathcal{C}}$ .

-  *$\mathcal{C}$  vérifie l'axiome (A3) si et seulement si  $\mathcal{C}$  vérifie l'axiome suivant :*

- (A3') si  $x \in [A]_{\mathcal{C}}$ , alors  $x \in [F]_{\mathcal{C}}$  pour un certain sous-ensemble fini  $A$  de  $F$ .

Comme l'enveloppe convexe d'un ensemble  $A$  est le plus petit ensemble convexe qui contient  $A$ , l'axiome (A2) nous permet donc, de déduire que l'enveloppe convexe de  $A$  peut être obtenue par intersection de tous les éléments de  $\mathcal{C}$  qui contiennent l'ensemble  $A$  :

$$[A]_{\mathcal{C}} = \bigcap_{Y \supset A, Y \in \mathcal{C}} Y$$

### Exemples de convexité

Il existe plusieurs types de convexité, nous en citons trois exemples pour donner un sens plus évident et plus global à un ensemble convexe. Nous conseillons les ouvrages [8, 67] pour ceux qui désirent approfondir leurs connaissances sur ce sujet.

- Convexité standard : qui est donnée par un espace vectoriel  $\mathcal{V}$  sur un corps totalement ordonné  $\mathbb{K}$ . Où un sous-ensemble  $A \subseteq \mathcal{V}$  est dit convexe si :

$$\forall x, y \in A, \forall \lambda \in \mathbb{K}, 0 \leq \lambda \leq 1 : (\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y) \in A.$$

- Convexité d'ordre : connue en littérature anglophone sous le nom de "order convexity". On se donne un poset  $(X, \leq)$ . Le sous-ensemble  $A \subseteq X$  est dit convexe (order convex) si :

$$\forall x, y \in A, \text{ pour tout } x \leq z \leq y, z \in A.$$

L'intervalle fermé  $[a, b] = \{c \in \mathbb{R}, a \leq c \leq b\}$  est un ensemble convexe (order convex).

- Convexité métrique : soit un espace métrique  $(X, d)$ , où  $d$  est la fonction distance définie sur  $X$ . Un sous-ensemble  $A \subseteq X$  est convexe si :

$$\forall x, y \in A : \{z \in X : d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\} \subseteq A.$$

La convexité euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$  définie par l'espace métrique  $(\mathbb{R}^n, d_2)$ , est une convexité métrique. Telle que  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$  est la distance euclidienne.

Un autre type de convexité, qui cette fois-ci est défini sur un ensemble discret, est la convexité sur un graphe. Plus précisément sur l'ensemble des sommets d'un graphe, appelée convexité géodésique, que nous détaillons dans la section 2.5.

### 2.4.2 Convexité dans les graphes

La notion de convexité se généralise donc également en théorie des graphes, où pour un graphe connexe  $G = (V, E)$  et une collection de sous ensembles convexes sur  $V$ , le couple  $(G, \mathcal{C})$  définit une convexité, si  $(V, \mathcal{C})$  forme un espace convexe qui vérifie l'axiome suivant [38] :

(A4) Tout élément de  $\mathcal{C}$  engendre un sous-graphe connexe de  $G$ .

La convexité sur un graphe  $G$  est principalement étudiée sur une famille  $\mathcal{P}_\Phi$  de chaînes de  $G$ .  $\Phi$  étant une propriété réalisable sur  $G$ . On appelle  $\Phi$ -clôture de l'ensemble  $S \subseteq V$ , notée  $I_\Phi[S]$ , le sous-ensemble de sommets qui appartiennent aux  $\Phi$ -chaînes reliant deux sommets quelconques de  $S$  [18, 63].

$$I_\Phi[S] = \bigcup_{u,v \in S} I_\Phi[u, v].$$

Un ensemble  $S$  est dit  $\Phi$ -convexe si la fonction  $\Phi$ -intervalle associée est égale à  $S$ , i.e.  $I_\Phi[S] = S$ .

La convexité dans les graphes inclut donc, divers types de convexité, selon la propriété  $\Phi$  étudiée sur les chaînes du graphe. Nous citons à titre d'exemples [63] :

- *Convexité géodésique* : (geodesic convexity) [41, 40, 42] Connue également sous le nom de convexité ordinaire. La propriété  $\Phi$  concernée est la propriété de la plus courte chaîne. Un sous-ensemble  $S \subseteq V$  est convexe si :

$$\forall u, v \in S, I[u, v] \subseteq S.$$

- *Convexité détour* : (detour convexity) [19, 22] est la convexité de la plus longue chaîne, où un sous-ensemble de sommets  $S \subseteq V$  est convexe, si pour toute paire de sommets  $u, v$  de  $S$ , l'ensemble des sommets qui appartiennent aux plus longues chaînes qui relient  $u$  et  $v$ , est contenu dans  $S$ .
- *Convexité monophonique* : (monophonic convexity) [35, 36]  $\Phi$  est dans ce cas la propriété "sans corde", un sous-ensemble  $S \subseteq V$  est dit convexe si :

$$\forall u, v \in S, J[u, v] \subseteq S.$$

- *Convexité totale* : (total convexity) on considère les chaînes sans triangle, i.e. qui autorise seulement les cordes qui joignent deux sommets de la chaîne à distance au moins supérieure à 3. L'ensemble  $S \subseteq V$  est convexe s'il contient tous les sommets de toutes les chaînes sans triangles qui relient deux sommets  $u, v \in S$ .

## 2.5 Convexité géodésique

La convexité géodésique [41] a fortement été étudiée sous différents aspects. Certains auteurs se sont intéressés à effectuer l'analogie de théorèmes propres à la convexité euclidienne, au cas de la convexité géodésique. D'autres ont plus étudié des paramètres rencontrés en convexité géodésique, tels que le nombre géodétique [21, 51], le hull number [39, 34, 32] ou encore le convexity number d'un graphe [20, 23, 46, 33].

### 2.5.1 Clôture géodésique d'un ensemble et ensemble convexe

On appelle clôture (ou fermeture) géodésique d'un ensemble  $S \subset V$ , notée  $I[S]$ , l'ensemble constitué des sommets appartenant aux chaînes géodésiques qui relient deux sommets quelconques de l'ensemble  $S$ .  $I[S]$  est obtenue de la sorte :

$$I[S] = \bigcup_{u,v \in S} I[u,v].$$

On dira que  $S$  est convexe si  $I[S] = S$ . Notons que, la convexité géodésique est une

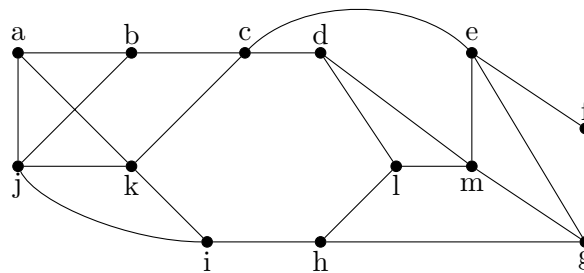


FIGURE 2.4 – Ensembles convexes :  $\{a, b, j\}$ ,  $\{a, b, c, j, k\}$ ,  $\{d, l, m\}$ .

convexité métrique. En effet, l'ensemble  $S \subset V$  est convexe si :

$$\forall u, v \in S : \{w \in V : d(u, w) + d(w, v) = d(u, v)\} \subseteq S.$$



L'enveloppe convexe d'un ensemble  $S \subset V$  peut être obtenue en répétant le processus fini suivant :

$$\begin{aligned} S^0 &= S; \\ S^1 &= I[S]; \\ S^2 &= I[I[S]] = I^2[S]; \\ &\vdots \\ S^k &= I[S^{k-1}] = I^k[S]. \end{aligned}$$

Où  $k$  est le plus petit entier à partir duquel  $S^k = S^{k+1}$ . On appelle  $k$ , nombre d'itération géodétique de  $S$ , noté :  $gin(S)$ . Soulignons que l'enveloppe convexe de  $S$  est égale à  $S^{gin(S)}$ .

---

**Algorithme 2.2** Fermeture géodésique de  $S$ 


---

**Entrée(s)** Un graphe  $G = (V, E)$ , ensemble  $S \subseteq V$ .

**Sortie(s)**  $I[S]$ .

```

1:  $I[S] \leftarrow S$ ;
2:  $S' \leftarrow S$ ;
3: pour chaque sommet  $s \in S$  faire
4:   BFS_N ( $G = (V, E), s; C$ );
5:    $S' \leftarrow S' \setminus \{s\}$ ;
6: pour chaque sommet  $w \in S'$  faire
7:   enfiler ( $Q, w$ );
8:   tant que filevide ( $Q$ ) = faux faire
9:     defiler ( $Q, u$ );
10:    si  $C[u] > 1$  alors
11:      pour chaque sommet  $v \in N(u) \setminus I[S]$  faire
12:        si  $C[v] < C[u]$  alors
13:          enfiler ( $Q, v$ );
14:           $I[S] \leftarrow I[S] \cup \{v\}$ ;
15:        fin si
16:      fin pour
17:    fin si
18:  fin tant que
19: fin pour
20: fin pour

```

---

L'algorithme 2.2 décrit les étapes qui permettent de déterminer la fermeture géodésique  $I[S]$  d'un ensemble  $S$ , en faisant appel à la procédure 2.1 BFS\_N. On pose  $I[S] \leftarrow S$ , et à partir d'un sommet  $s \in S$ , on inclut dans  $I[S]$ , tous les sommets de

$V \setminus S$  qui joignent  $s$  à un sommet de  $S \setminus \{s\}$  par le biais de chaînes géodésiques, i.e. dont les sommets appartiennent à des couches différentes et dans l'ordre croissant en partant de  $s$ . On répète ainsi l'opération pour tous les sommets de  $S$ , ce qui engendre une complexité globale de  $\mathcal{O}(|S| m)$  [32].

L'enveloppe convexe  $[S]$  de  $S$  est obtenue en appliquant de manière itérative l'algorithme 2.2 pour chaque sommet  $v \in I[S]$  récemment généré.

Ainsi, l'algorithme qui génère l'enveloppe convexe d'un ensemble  $S$  est de complexité  $\mathcal{O}(|[S]| m)$  [32].

Soit  $v \in A$  où  $A \subseteq V$  un ensemble convexe.  $v$  est dit sommet extrême de  $A$ , si  $A \setminus \{v\}$  est aussi convexe.

**Théorème 2.2** [39]. *Soit le graphe  $G = (V, E)$ .  $\forall v \in V$ ,  $v$  est un sommet extrême si et seulement si l'ensemble  $N(v)$  est une clique.*

Il s'ensuit que tout sommet simplicial est un sommet extrême de  $G$ .

**Proposition 2.4** [39]. *Si un graphe connexe ne possède pas de clique  $K$  telle que  $N^{D-1}(K) = V$ , alors le graphe  $G$  ne possède pas de sommets simpliciaux.*

En effet si  $G$  admet un sommet simplicial  $v$ , en vertu du théorème 2.2  $N(v) = K$ , de plus

$$N^D(v) = N^{D-1}(K) = V.$$

**Proposition 2.5** [11]. *Étant donné un graphe  $G = (V, E)$  et  $A \subseteq V$  un ensemble convexe. Le sous-graphe induit par l'ensemble  $A$  est un sous-graphe isométrique de  $G$ .*

Un ensemble convexe contient, par définition, les sommets de toutes les plus courtes chaînes qui relient deux sommets de  $A$ , il s'ensuit alors que la distance entre deux sommets  $u, v \in A$  dans  $G[A]$  est égale à la distance entre  $u$  et  $v$  dans  $G$ .

# Chapitre 3

## Quelques résultats sur le hull number

### 3.1 Introduction

Dans ce qui suit, nous introduisons les principaux paramètres propres à la convexité géodésiques. Nous rappelons également les caractéristiques fondamentales que vérifie un hull set, et nous présentons les différentes bornes obtenues pour le hull number dans le cas d'un graphe quelconque ou pour des sous-classes de graphes.

#### 3.1.1 Ensemble géodétique et nombre géodétique

Un sous-ensemble de sommets  $S \subset V$  est dit ensemble géodétique (geodetic set [63]) si sa fermeture géodésique  $I[S] = V$ . Le nombre géodétique (geodetic number) noté  $g(G)$ , à ne pas confondre avec la maille de  $G$ , représente le cardinal du plus petit ensemble géodétique :

$$g(G) = \min \{|S| : \forall S \subset V, I[S] = V\}.$$

**Exemple 3.1.** Dans le graphe de la figure 2.4, les ensembles  $S_1 = \{b, k, f, h, g, d\}$  et  $S_2 = \{a, l, f\}$  sont des ensembles géodétiques, en effet :

$$I[S_1] = I[S_2] = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m\}.$$

De plus  $S_2$  est un ensemble géodétique minimum, le nombre géodétique de  $G$  est égal à :

$$g(G) = |S_2| = 3.$$

### 3.1.2 Hull set et hull number

On appelle hull set tout sous-ensemble  $S \subset V$ , dont l'enveloppe convexe engendre tous les sommets de  $V$ . On appelle hull vertex un sommet qui appartient à tous les hull sets de  $G$ . Si  $G$  admet un unique hull set, alors  $G$  est dit hull graph.

Le cardinal d'un minimum hull set est appelé hull number du graphe  $G$  [63], noté  $hn(G)$ .

$$hn(G) = \min \{|S| : \forall S \subset V, [S] = V\}.$$

#### Remarque 3.1.

Il est clair que tout ensemble géodétique est un hull set, il s'ensuit que :

$$hn(G) \leq g(G).$$

**Exemple 3.2.** On considère le graphe de la figure 2.4. Soient les ensembles :

$$S_3 = \{a, c, h, f\} \text{ et } S_4 = \{j, f\}.$$

Les enveloppes convexes des ensembles  $S_3, S_4$  sont respectivement :

$$[S_3] = I[S_3] \cup \{j, i, h, g, l, d, m\} = V.$$

$$[S_4] = I[S_4] \cup \{a, l, d, m\} = V.$$

$S_3$  et  $S_4$  sont des hull set. Le hull number du graphe 2.4 est par conséquent :

$$hn(G) = |S_3| = 2.$$

## 3.2 Propriétés d'un hull set

Il est possible de déterminer en temps polynomial si un sous-ensemble de sommets forme un hull set ou non, il suffit pour cela de définir son enveloppe convexe par application de l'algorithme décrit au chapitre précédent, et de voir si celle-ci est égale à  $V$ . Mais construire un hull set dans un graphe s'avère être une tâche plus délicate, du moment qu'on ne connaît pas d'algorithme qui puisse effectuer cette opération en un temps raisonnable. Il est cependant intéressant de recenser les propriétés propres

à un hull set ce qui permet, dans un cas éventuel, de déterminer le cardinal d'un hull set minimum.

**Proposition 3.1** [39]. *Soient un graphe  $G = (V, E)$  et  $S'$  un sous-ensemble de tous les sommets simpliciaux dans  $G$ . Pour tout hull set non vide  $S \subset V$ ,  $S' \subseteq S$ .*

*Preuve.* Par l'absurde, soit  $S$  un hull set de  $G$  et supposons qu'il existe un sommet simplicial  $v \in S'$  tel que  $v \notin S$ .

On rappelle qu'une chaîne géodésique ne contient pas de corde. Comme  $v$  appartient à  $[S]$ , il existe alors deux sommets  $w, z \in S^l, l \leq \text{gin}(S)$ , tel que  $v$  appartient à l'une des chaînes géodésiques qui les relient, on note  $\rho$  une telle chaîne. Soient  $v_1, v_2$  deux sommets internes de  $\rho$ , tels que  $v_1, v_2 \in N(v)$ .  $v_1 v_2 \in E$ ,  $\rho$  contient donc une corde et de ce fait, il ne peut exister de chaîne géodésique qui passe par  $v$ . Contradiction.  $\square$

**Proposition 3.2** [32]. *Soient  $G = (V, E)$  un graphe autre que le graphe complet,  $v \in V$  un sommet universel et  $S$  un minimum hull set de  $G$ . Alors  $v \notin S$ .*

*Preuve.* En effet, soit  $S$  un minimum hull set, on considère que  $v \in S$ .

L'ensemble  $S' = S \setminus v$  est aussi un hull set car  $v$  peut être engendré par deux sommets non reliés de  $[S']$ ,  $|S'| \leq |S|$ , ce qui contredit le fait que  $S$  soit un minimum hull set.  $\square$

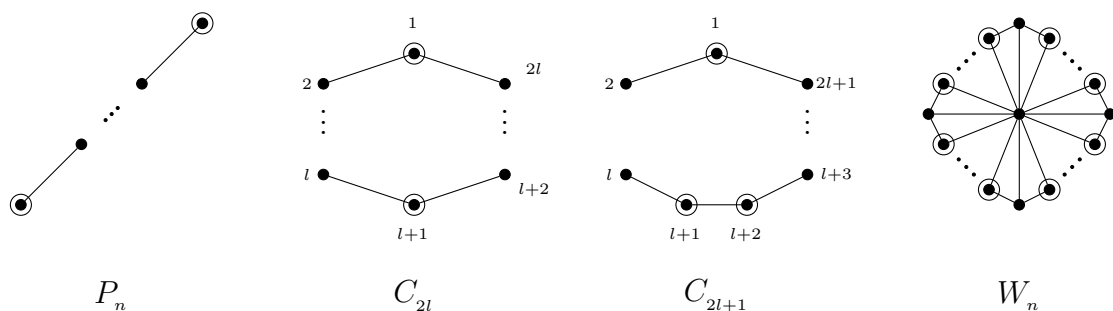


FIGURE 3.1 – Minimum hull set de quelques graphes particuliers. Les sommets entourés par un cercle définissent un minimum hull set.

**Proposition 3.3** [32]. *Soient  $H = (V', E')$  un sous-graphe isométrique de  $G$  et  $S$  un hull set de  $H$ , alors  $V' \subseteq [S]$ , où  $[S]$  est l'enveloppe convexe de  $S$  dans  $G$ .*

**Proposition 3.4** [32]. *Soient  $G = (V, E)$  un graphe et un sous-ensemble  $S \subset V$ . Si  $V \setminus S$  est convexe, alors tout hull set de  $G$  contient au moins un sommet de  $S$ .*

### 3.3 Bornes pour le hull number

Nous avons vu qu'un hull set de  $G$  contenait tous les sommets simpliciaux, en particulier, un minimum hull set. De plus, les sommets internes d'une chaîne géodésique de longueur  $D$  du graphe sont engendrés par les extrémités de celle-ci, il s'ensuit le théorème suivant :

**Théorème 3.1** [39]. *Soit un graphe  $G = (V, E)$ , à  $k$  sommets simpliciaux. On a alors :*

$$k \leq hn(G) \leq n - D + 1.$$

Dans un graphe complet  $K_n$ , tous les sommets sont simpliciaux, le hull number est donc égal à :

$$hn(G) = n.$$

De même, si le hull number du graphe  $G$  est égal à  $n$ , alors  $G$  est un graphe complet.

Nous rappelons qu'un bloc est un sous-graphe connexe maximal de  $G$  qui ne contient pas de point d'articulation.

**Théorème 3.2** [39]. *Soit un graphe  $G = (V, E)$ ,  $n \geq 3$ .  $hn(G) = n - 1$  si et seulement si  $D = 2$ ,  $G$  contient un seul point d'articulation et tous les blocs  $B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , de  $G$  sont de diamètre au plus 1.*

Soit  $K_{1, \dots, k}$  un graphe multiparti complet, où  $|V_i| = n_i$ ,  $\forall i \leq k$  et  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ .

**Théorème 3.3** [39]. *Le hull number d'un graphe  $G$  multiparti complet d'ordre  $n \geq 2$ , est donné par :*

$$hn(G) = \begin{cases} 2 & \text{si } n_i \geq 2 \text{ et } n_j \geq 2 \forall i \neq j; \\ n_j & \text{si } \exists j \ n_j \geq 2 \text{ et } n_i = 1 \forall i \neq j; \\ n & \text{si } n_i = 1, \forall i \leq k. \end{cases}$$

Lorsque  $n_i = 1, \forall i \leq k$ , on retrouve le cas du graphe complet.

Le graphe bloc  $B(G)$  d'un graphe  $G$  possède des sommets qui correspondent aux blocs de  $G$ , deux de ces sommets étant adjacents si les blocs correspondants contiennent un sommet d'articulation en commun.

**Théorème 3.4** [39]. *Soit  $G = (V, E)$  un graphe, et  $B(G)$  un graphe bloc correspondant à  $G$ . Si  $k$  est le nombre de sommets simpliciaux de  $B(G)$ , alors  $hn(G) \geq k$ .*

Soient  $B_1, B_2, \dots, B_q$ , des blocs d'un graphe  $G$ . Supposons qu'un bloc  $B_i$  contienne l'ensemble d'articulation  $C_i$  et l'ensemble des sommets simpliciaux  $S_i$  de  $G$ . On définit la fonction :

$$N(B_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } [S_i \cup C_i] = B_i ; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Théorème 3.5** [39]. *Soient le graphe  $G = (V, E)$  et  $B_1, B_2, \dots, B_q$ ,  $q$  blocs de  $G$ . Si  $G$  possède  $k$  sommets simpliciaux, on a alors :*

$$hn(G) \geq k + \sum_{i=1, q} N(B_i).$$

Le théorème qui suit, généralise le résultat précédent. On introduit pour cela la variante suivante :

Pour un graphe  $G = (V, E)$  et un sous-ensemble de sommets  $A \subseteq V$  : " $hn(G, A)$ " représente le cardinal du plus petit sous-ensemble  $B \subseteq (V \setminus A)$ , tel que  $A \cup B$  est un hull set de  $G$ .

Soient  $B_1, \dots, B_n$ , les blocs de  $G$  et  $\forall i \leq n$ ,  $S_i$  l'ensemble des points d'articulations de  $G$  dans le bloc  $B_i$ .

**Théorème 3.6** [2]. *Le hull number du graphe  $G = (V, E)$  est :*

$$hn(G) = \sum_{i \leq n} hn(B_i, S_i)$$

**Théorème 3.7** [39]. *Soient  $G = (V, E)$  un graphe et  $u, v \in V$  deux sommets non adjacents reliés par  $t$  chaînes induites de sommets distincts et de longueurs :  $l_1, l_2, \dots, l_t$ , alors :*

$$hn(G) \leq n - \sum_{i=1}^t \left\lfloor \frac{l_i}{2} \right\rfloor.$$

On rappelle qu'un graphe  $G$  est dit  $p$ -connexe, si le nombre minimum de sommets à supprimer pour que  $G$  devienne non connexe est égal à  $p$  [50].

**Corollaire 3.1** [39]. *Étant donné un graphe  $G$ ,  $p$ -connexe. Alors :*

$$hn(G) \leq n - p \left\lfloor \frac{D}{2} \right\rfloor.$$

Rappelons que, la connectivité local  $\mathcal{K}(u, v)$ ,  $uv \notin E$ , est égale au plus petit nombre de sommets dont la suppression sépare  $u$  et  $v$ .

**Corollaire 3.2** [39]. *Soit un graphe  $G = (V, E)$ , alors :*

$$hn(G) \leq n - \mathcal{K}(u, v) \left\lfloor \frac{d(u, v)}{2} \right\rfloor.$$

**Théorème 3.8** [39]. *Soit  $G$  un graphe qui possède  $q$  blocs  $B_1, B_2, \dots, B_q$ . Soient  $u_i$  et  $w_i$  deux sommets non adjacents du bloc  $B_i$ , reliés par  $t_i$  chaînes induites de sommets distincts. Soient  $l_1^*, \dots, l_{t_i}^*$  la longueur de telles chaînes, auxquelles on a soustrait le nombre de sommets d'articulations internes à ces chaînes. Si  $c$  est le nombre de points d'articulations dans  $G$ , alors :*

$$hn(G) \leq n - c - \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{t_j} \left\lfloor \frac{l_i^*}{2} \right\rfloor.$$

**Théorème 3.9** [39]. *Soit un graphe  $G = (V, E)$ . Supposons que  $G$  ne possède pas de sous-graphe complet  $K$ , tel que  $N^{D-1}(K) = V$ , alors :*

$$hn(G) \leq \left\lfloor \frac{(n + 3 - D)}{2} \right\rfloor$$

**Corollaire 3.3** [39]. *Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  et de diamètre  $D = 2$ . Si  $G$  ne possède pas de sous-graphe complet  $K$  tel que  $N(K) = V$ , alors :*

$$hn(G) \leq \left\lfloor \frac{(n + 1)}{2} \right\rfloor$$

Dans [34] les auteurs élargissent l'hypothèse du théorème 3.9. En considérant une propriété  $\mathcal{P}$  sur l'ensemble des sommets définie de la sorte :

On dit que  $G$  possède la propriété  $\mathcal{P}$  s'il n'existe pas trois sous-ensembles  $A, B, C$  tels que :

- $A$  est l'ensemble de sommets d'une composante de  $G - C$  ;
- $B$  est une clique, et  $\forall v \in A$ , l'ensemble des voisins de  $v$  dans  $C$  est  $B$  ;
- $C$  est convexe.



**Théorème 3.10** [34]. Soit  $G = (V, E)$  un graphe vérifiant la propriété  $\mathcal{P}$ , alors :

$$hn(G) \leq \left\lfloor \frac{(n+3-D)}{2} \right\rfloor$$

**Corollaire 3.4** [34]. Si  $G$  est un graphe sans triangle d'ordre  $n$ , de diamètre  $D$  et de degré minimum  $\delta$  au moins égal à 2, alors  $G$  possède la propriété  $\mathcal{P}$ , et nous avons :

$$hn(G) \leq \frac{(n-D+3)}{2}$$

**Théorème 3.11** [34]. Soit un graphe  $G = (V, E)$ , d'ordre  $n$  et de diamètre  $D$ . Alors :

- Si  $G$  est sans triangle,  $D \geq 3$  et  $\delta \geq 3$  :

$$hn(G) \leq \frac{(n-D+3)}{3}$$

- Si  $G$  est cubique, sans triangle et de diamètre  $D \geq 3$  :

$$hn(G) \leq \frac{2(n-D+5)}{7}$$

- Si  $G$  est de degré minimum  $\delta \geq 2$ , de diamètre  $D$  et admet une maille  $g \geq 5$ , :

$$hn(G) \leq 2 + \frac{(n-D-1)}{\left\lfloor \frac{g-1}{2} \right\rfloor}$$

**Théorème 3.12** [2]. Soit un graphe  $G = (V, E)$ , d'ordre  $n$  et admettant  $s$  sommets simpliciaux. On a alors les résultats suivants :

1.  $hn(G) \leq \max\{1, s\} + \left\lceil \frac{3(n-\max\{1, s\})}{5} \right\rceil$  ;
2. Si  $G$  possède une maille  $g \geq 6$  :

$$hn(G) \leq \max\{1, s\} + \left\lceil \frac{n - \max\{1, s\}}{3} \right\rceil.$$

Étant donné un graphe  $G = (V, E)$ . Le graphe incidence relatif à  $G$ , noté  $IG(G)$ , est le graphe obtenu par subdivision des arêtes, en rajoutant pour chaque arête  $uv \in E$ , un seul sommet  $s_{uv}$  et en remplaçant l'arête  $uv$  par les deux arêtes  $us_{uv}$  et  $s_{uv}v$ .

**Proposition 3.5** [2]. *Soient un graphe  $G$  et son graphe d'incidence  $IG(G)$ . On a alors :*

$$hn(IG(G)) \leq hn(G) \leq 2hn(IG(G)).$$

### 3.4 Contraction de sommets et hull number

Nous présentons dans cette partie les travaux élaborés par les auteurs [4], où ils proposent trois principales règles de réduction et déterminent pour chacune d'entre elles la conséquence sur le hull number du graphe.

On se donne un graphe  $G' = (V', E')$ , obtenu à partir du graphe  $G = (V, E)$  en contractant les deux sommets  $u, v \in V$ . Tel que :

$$V' = (V \setminus \{u, v\}) \cup \{w\} \text{ et};$$

$$E' = (E \setminus \{uz, z \in N(u)\} \cup \{vz, z \in N(v)\}) \cup \{wz : zu \in E \text{ ou } zv \in E, z \neq u, z \neq v\}.$$

**Proposition 3.6** [4]. *Soient  $G = (V, E)$  un graphe,  $u, v$  deux sommets jumeaux de  $V$  et  $w \in V$ . Soit  $G'$  le graphe obtenu par contraction des sommets  $u, v$ . On a alors les trois résultats suivants :*

- Si  $u, v$  sont des sommets non simpliciaux, alors :

$$hn(G) = hn(G');$$

- Si  $u, v$  sont des sommets vrai jumeaux et simpliciaux, alors :

$$hn(G) = hn(G') + 1;$$

- Si  $u, v, w$  sont des sommets simpliciaux deux à deux faux jumeaux, alors :

$$hn(G) = hn(G') + 1.$$

### 3.5 Produit lexicographique

Le produit lexicographique de deux graphes  $G = (V, E)$ ,  $H = (V', E')$  est le graphe noté :  $G \circ H$  dont l'ensemble de sommets  $V(G \circ H) = V \times V'$ , tel que deux sommets  $(g_1, h_1)$  et  $(g_2, h_2)$  sont adjacents si et seulement si :

i) soit  $g_1 g_2 \in E$ ;

ii) ou  $g_1 = g_2$  et  $h_1 h_2 \in E$ .

**Théorème 3.13** [4]. Soient  $G = (V, E)$  un graphe d'ordre  $n$ ,  $S'$  ensemble de sommets simpliciaux de  $G$  et  $H = (V', E')$  un graphe arbitraire. Alors,

- Si  $n = 1$  :  $hn(G \circ H) = hn(H)$  ;

- Sinon :

$$hn(G \circ H) = \begin{cases} 2 & \text{si } H \text{ n'est pas complet;} \\ (|V'| - 1)|S'| + hn(G) & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 3.6 Hull number des graphes réguliers

Nous consacrons cette section à l'étude du hull number dans le cas des graphes réguliers. Nous présentons en première partie, les propriétés relatives aux graphes réguliers de degré  $k$ , suivi en seconde partie des résultats, en termes de bornes supérieures, obtenues en considérant de tels graphes.

#### 3.6.1 Propriétés des graphes réguliers

Comme nous l'avons précisé auparavant, il est possible de représenter un graphe en niveaux. En particulier un graphe  $G = (V, E)$   $k$ -régulier et de diamètre  $D = 2$ . Soit  $r \in V$ , l'ensemble des sommets  $V$  admet la partition suivante :

$V = \{r\} \cup N(r) \cup N_2(r)$ , tel que :

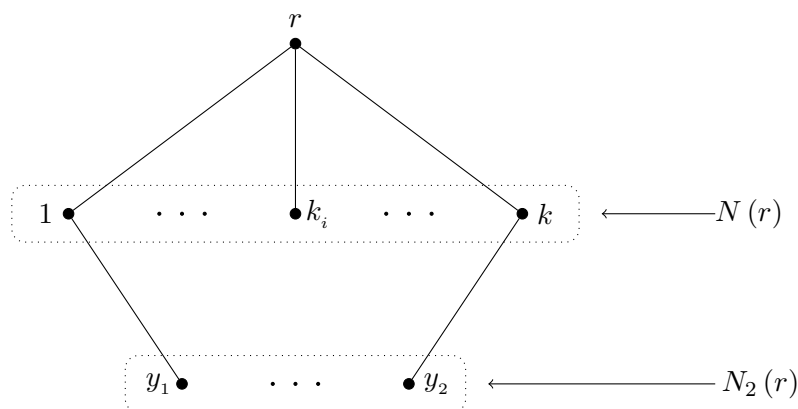


FIGURE 3.2 – Décomposition en couche d'un graphe  $k$ -régulier de diamètre  $D = 2$ .

- niveau 0 : le sommet  $r \in V$  ;
- niveau 1 : les sommets voisins de  $r$ , notés  $N(r) = \{u \in V : ur \in E\}$  ;
- niveau 2 : les sommets non voisins de  $r$ ,  $N_2(r) = \{u \in V : d(u, r) = 2\}$ .

Où  $|N(r)| = k$  et  $|N_2(r)| = n - (k + 1)$ . Voir la figure 3.2.

**Proposition 3.7.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe  $k$ -régulier,  $2 \leq k \leq n - 2$ .  $\forall u \in V$ ,  $\exists v, w \in N(u)$  tels que  $vw \notin E$ .*

*Preuve.* Supposons que  $\exists u \in V$ , tel que  $\forall v, w \in N(u)$ ,  $vw \in E$ . Le sous-graphes  $G[N(u)]$  (engendré par les sommets de  $N(u)$ ) est complet de degrés  $k$ , ceci implique que  $G$  n'est pas connexe, contradiction.  $\square$

### Remarque 3.2.

La proposition précédente signifie qu'un graphe régulier, autre qu'un graphe complet, n'admet pas de sommet simplicial.

**Proposition 3.8.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe régulier de degré  $k$  ( $k \neq n - 1$ ). Si  $|V| \leq 2k + 1$  alors le diamètre de  $G$  est égal à 2.*

*Preuve.* Soit deux sommets non adjacents  $u, v \in V$ .  $|N(u)| = |N(v)| = k$ , où  $k \geq \frac{n-1}{2}$ , les voisins respectifs de  $u$  et  $v$  appartiennent à l'ensemble  $V \setminus \{u, v\}$  de nombre de sommets  $n - 2$ , ceci implique donc que  $|N(u) \cap N(v)| \geq 1$ . D'où  $d(u, v) \leq 2$ ,  $\forall u, v \in V$ .  $\square$

**Proposition 3.9.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe  $k$ -régulier de diamètre  $D = 2$ . Si  $n \geq 2k + 2$  alors l'ensemble des sommets de  $N_2(r)$  n'est pas une clique.*

*Preuve.* En effet, si  $n \geq 2k + 2$  et  $G[N_2(r)]$  est complet, on aura :

$$\forall u \in N_2(r), d_{G[N_2(r)]}(u) = n - k - 2 \geq k$$

Le graphe est donc soit non connexe (dans le cas où  $n = 2k + 2$ ), soit de degré supérieur à  $k$ , contradiction.  $\square$

Nous rappelons que dans un graphe biparti  $G = (A \cup B, E)$ ,  $\forall u, v \in A$  (reps.  $B$ ) la distance  $d(u, v) \geq 2$  est paire. Soit  $G = (A \cup B, E)$  un graphe  $k$ -régulier biparti de diamètre  $D=3$ .  $G$  vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall i \neq j; a_i, a_j \in A, |N(a_i) \cap N(a_j)| \geq 1$ .

- Pour toute paire de sommets  $a \in A$  et  $b \in B$ , tel que  $ab \notin E$  il existe une chaîne de longueur 3 entre  $a$  et  $b$ .
- $|A| = |B| = \frac{n}{2}$ .

**Proposition 3.10.** *Soit  $G = (A \cup B, E)$  un graphe  $k$ -régulier biparti de diamètre  $D=3$ . Soient  $a \in A$  et  $b \in B$  deux sommets tels que  $ab \notin E$ , alors :*

$$I[a, b] = N[a] \cup N[b].$$

*Preuve.* Supposons  $I[a, b] \neq N[a] \cup N[b]$ , sans perte de généralité  $\exists w \in N(b) \subset A$  tel que  $w \notin I[a, b]$ ,  $w$  n'admet pas de sommet en commun avec  $a$ . Dans ce cas,  $a$  et  $w$  sont reliés par au moins une chaîne de longueur  $d(a, w) \geq 4$ . Contradiction.  $\square$

### 3.6.2 Bornes de $hn(G)$ des graphes réguliers

**Théorème 3.14 [2].** *Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  admettant  $s$  sommets simpliciaux. Si  $G$  est  $k$ -régulier  $k \geq 1$  ou sans  $C_3$ , alors :*

$$hn(G) \leq \max\{1, s\} + \left\lceil \frac{n - \max\{1, s\}}{2} \right\rceil.$$

Nous proposons à présent, d'étudier le hull number dans le cas où  $G$ , en plus d'être régulier, est biparti de diamètre  $D \leq 4$ , et lorsque l'ordre  $n \leq 2k + 1$ . Nous pouvons affirmer que pour ces deux cas, les bornes obtenues sont meilleures que celles décrites par le théorème 3.14.

**Théorème 3.15.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe  $k$ -régulier d'ordre  $n \leq 2k + 1$ , alors :*

$$hn(G) \leq n - k.$$

*Preuve.* L'ensemble  $S = N_2(r) \cup \{r\}$  est un hull set. En effet, chaque sommet de  $N_2(r)$  est adjacent à au moins un voisin de  $r$ , ainsi  $I[N_2(r) \cup \{r\}]$  engendre tous les sommets voisins de  $r$  adjacents aux sommets de  $N_2(r)$ . Supposons à présent, qu'il existe un sommet  $z \in N(r)$  tel que  $z$  n'est adjacent à aucun sommet de  $N_2(r)$ , alors  $z$  admet le même voisinage que  $r$  en particulier les deux sommets  $u, v \in N(r)$ , tel que  $uv \notin E$ ,  $z$  est géodominé par  $u$  et  $v$ , par conséquent  $z \in [S]$ .  $\square$

**Théorème 3.16.** *Soit  $G = (A \cup B, E)$  un graphe biparti  $k$ -régulier, d'ordre  $n$  et de diamètre  $D = 3$ , alors :*

$$hn(G) \leq \frac{n}{2} - k + 1.$$

*Preuve.*  $G = (A \cup B, E)$  un graphe biparti  $k$ -régulier et  $D = 3$ . Considérons un sommet  $r \in B$  d'excentricité  $e(r) = 3$ . En appliquant l'algorithme 2.1 à partir de  $r$ , on obtient la partition de l'ensemble des sommets suivante :

$A = N(r) \cup N_3(r)$  et  $B = \{r\} \cup N_2(r)$ , où :

- $N(r) = \{u \in A : ur \in E\}$ ,  $|N(r)| = k$ ;
- $N_2(r) = \{u \in B : d(u, r) = 2\}$ ,  $|N_2(r)| = \frac{n}{2} - 1$ ;
- $N_3(r) = \{u \in A : d(u, r) = D\}$ ,  $|N_3(r)| = \frac{n}{2} - k$ .

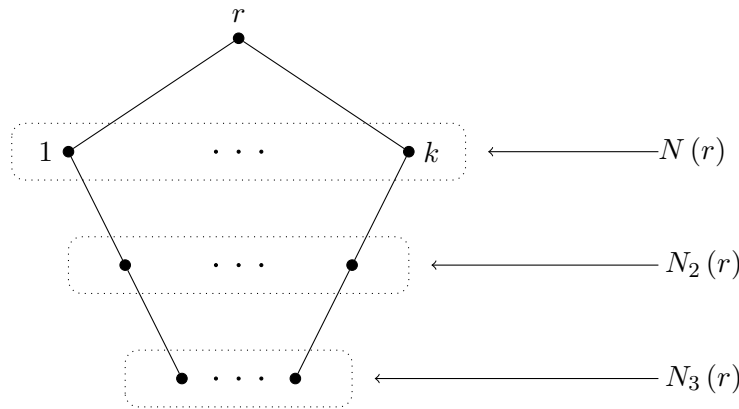


FIGURE 3.3 – graphe  $k$ -régulier de diamètre 3.

Posons  $S = \{r\} \cup N_3(r)$  et montrons que l'ensemble  $S$  est un hull set.

Observons que  $I[S] = N(r) \cup N_3(r) \cup C$  où  $C \subseteq N_2(r)$ . Si  $C \neq N_2(r)$ , alors il existe un sommet  $z \in N_2(r) \setminus C$  tel que  $N(z) \cap N_3(r) = \emptyset$ . Comme  $d(z) = k$  et  $N_2(r)$  est un stable alors  $z$  est adjacent à tous les sommets de  $N(r)$ .  $z$  appartient donc à une plus courte chaîne joignant deux sommets quelconques de  $N(r)$  et il est engendré par ces derniers,  $z \in [S]$ . Par conséquent, on a bien  $[S] = V$ .  $\square$

**Théorème 3.17.** *Soit  $G = (A \cup B, E)$  un graphe biparti  $k$ -régulier, d'ordre  $n$  et de diamètre  $D = 4$ , alors :*

$$hn(G) \leq \frac{n}{2} - k + 1.$$

*Preuve.* Soit le sommet  $r$  d'excentricité  $e(r) = 4$ , supposons que  $r \in A$ . Ainsi en appliquant l'algorithme 2.1 à partir de  $r$ , on obtient la partition sur l'ensemble  $V$  suivante :

$A = \{r\} \cup N_2(r) \cup N_4(r)$ ,  $B = N(r) \cup N_3(r)$ , telle que :

- $N(r) = \{u \in B : ur \in E\}, |N(r)| = k;$
- $N_2(r) = \{u \in A : d(u, r) = 2\}, |N_2(r)| \geq k;$
- $N_3(r) = \{u \in B : d(u, r) = 3\}, |N_3(r)| = \frac{n}{2} - k \geq k;$
- $N_4(r) = \{u \in A : d(u, r) = 4\}, |N_4(r)| = \frac{n}{2} - (k + 1).$

Montrons que l'ensemble  $S = \{r\} \cup N_3(r)$  est hull set.

Observons que,  $N_4(r) \subseteq I[N_3(r)]$  et comme les sommets de  $N(r)$  sont reliés aux sommets de  $N_4(r)$  par des chaînes de longueurs 3, alors  $N(r) \subset I[\{r\} \cup N_4(r)]$ . Notons également que  $I[\{r\} \cup N_3(r)]$  engendre une partie si ce n'est l'ensemble des sommets de  $N_2(r)$ , s'il existe un sommet  $z \in N_2(r)$  qui ne soit adjacent à aucun sommet de  $N_3(r)$  alors  $z$  admet le même voisinage que  $r$ , il est ainsi engendré par ces voisins. Nous avons donc,  $S$  hull set de  $G$ . □

# Chapitre 4

## Complexité du problème du hull number

### 4.1 Introduction

Le problème du hull number noté  $hn(G)$  consiste à déterminer le cardinal du plus petit ensemble de sommets  $S$ , tel que son enveloppe convexe engendre tous les sommets de  $G$ .

Nous présentons dans ce chapitre les différents travaux effectués dans le cadre de l'étude du problème du hull number d'un point de vue de complexité. Nous exhibons également les classes de graphes pour lesquels la détermination du cardinal d'un minimum hull set s'effectue en temps polynomial, accompagné de descriptions des algorithmes qui permettent d'aboutir à la valeur du hull number pour des classes spécifiques de graphes.

$G$	$P_n$	$C_{2l}$	$C_{2l+1}$	$K_n$	$K_{p,q}$	$W_n$
$hn(G)$	2	2	3	$n$	2	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

FIGURE 4.1 – Hull number de quelques graphes particuliers.

### 4.2 NP-Complétude du $hn(G)$

Nous appelons problème du hull number, le problème de décision suivant :

**Problème 4.1 HN.**

- **Instance** :  $G = (V, E)$  un graphe simple connexe, et  $k \in \mathbb{N}$ .



- **Question** : “Le hull number de  $G$  est-il inférieur ou égal à  $k$  ( $hn(G) \leq k$ )?”

Dourado et al [32] montrent que le problème de décision relatif au problème du hull number est **NP-complet**.

**Théorème 4.1** [32]. *Étant donné un graphe  $G$  et un entier  $k$  il est NP-complet de décider si  $hn(G) \leq k$ .*

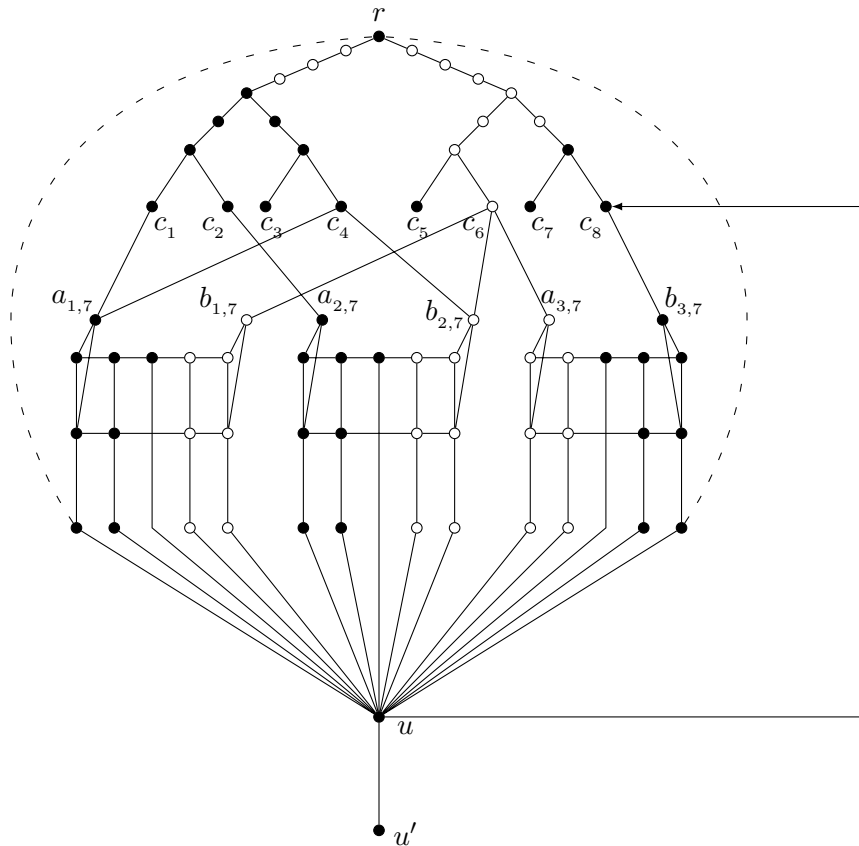


FIGURE 4.2 – Exemple de sous-graphe final extrait de [32].

La démonstration du théorème, s’appuie principalement sur le problème de satisfiabilité SAT-AM3 défini au chapitre 1.

Ils justifient ainsi ce résultat en mettant en évidence une équivalence entre le problème HN et le problème de satisfiabilité SAT-AM3 :

$E_3$  est satisfiable si et seulement si  $hn(G) \leq k$ , où  $k = |S|$  et  $S$  est un hull set du graphe  $G$  construit à partir d’un arbre binaire complet à  $m$  feuilles, chaque feuille représente une clause de  $E_3$ . Le nombre  $m$  est pris comme puissance de 2, on rajoute dans le cas contraire, des clauses et des variables artificielles tout en veillant à ne pas modifier la satisfiabilité de  $E_3$ . Le graphe de la figure 4.2 illustre un exemple du graphe final obtenu pour  $m = 8$ .

### 4.2.1 Graphes bipartis

Dans [2], les auteurs s'intéressent à la complexité du problème HN restreint aux cas des graphes bipartis. On définit pour cela, le problème HN\_B :

**Problème 4.2 HN\_B.**

- **Instance** :  $G = (A \cup B, E)$  un graphe biparti simple connexe, et  $k \in \mathbb{N}$ .
- **Question** : “Le hull number de  $G$  est-il inférieur ou égal à  $k$  ( $hn(G) \leq k$ ) ?”

**Théorème 4.2** [2]. *Le problème HN\_B est NP-difficile.*

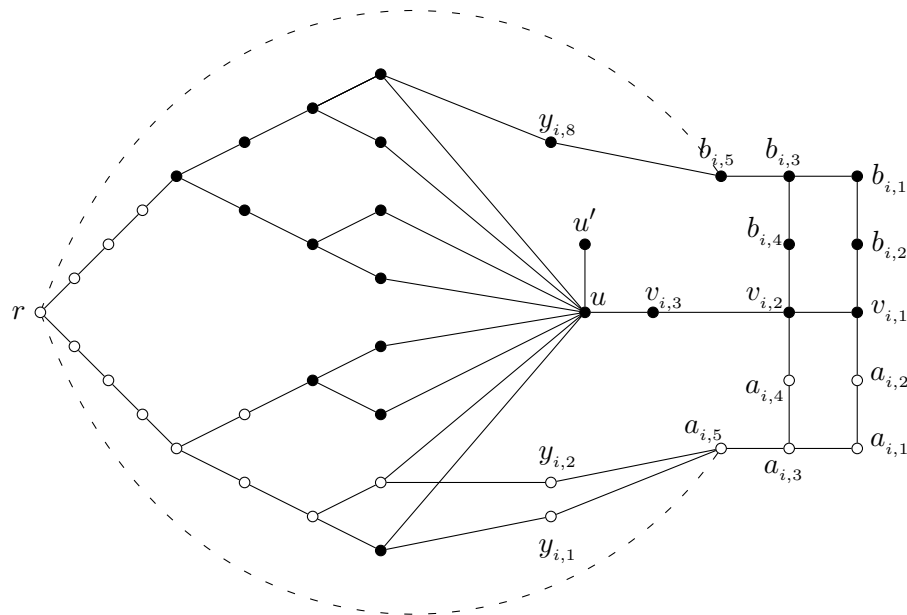


FIGURE 4.3 – Exemple de sous-graphe final extrait de [2].

Pour démontrer ce résultat, les auteurs adoptent une technique analogue à celle utilisée lors de la démonstration du théorème 4.1. Ils utilisent pour ce faire, une réduction du problème de satisfiabilité 3-SAT, qu'on a défini au chapitre 1, au problème HN\_B. Ils prouvent ainsi que :

$$“E_2 \text{ est satisfiable si et seulement si } hn(G) = n + 1”.$$

Où  $n + 1 = |S|$ ,  $S$  est un hull set du graphe biparti  $G$  obtenu en suivant, à quelques détails près, des étapes identiques à celles de la méthode précédente, voir [2]. Un exemple du graphe final ainsi obtenu, est représenté dans la figure 4.3.

### 4.2.2 Graphes partiellement cubiques

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit partiellement cubique, s'il existe une application injective  $\Phi : V \rightarrow V(Q_n)$  telle que  $d_G(v, w) = d_{Q_n}(\Phi(v), \Phi(w))$  pour tout sommet  $v, w \in V$ .

Le problème du hull number relatif aux graphes partiellement cubiques est donné par le problème de décision suivant :

#### Problème 4.3 HN-Q.

- **Instance** :  $G = (V, E)$  un graphe partiellement cubique, et  $k \in \mathbb{N}$ .
- **Question** : "Le hull number de  $G$  est-il inférieur ou égal à  $k$  ( $hn(G) \leq k$ )?"

**Théorème 4.3** [1]. *Soit un graphe  $G$  partiellement cubique. Le problème HN-Q est NP-complet.*

## 4.3 Polynomialité du $hn(G)$

En dépit du fait que la détermination du cardinal d'un minimum hull set d'un graphe quelconque est NP-complet, les recherches élaborées par certains auteurs, prouvent qu'il est possible d'exploiter les propriétés propres à quelques classes de graphes, grace auxquelles le calcul du  $hn(G)$  se fait en temps polynomial.

### 4.3.1 Graphes ( $P_5$ , Triangle)-Libres

Nous rappelons que dans un graphe  $G = (V, E)$ , un sous-ensemble de sommets  $S \subset V$  est dit ensemble dominant si tout sommet de  $V \setminus S$  possède au moins un voisin dans  $S$ . Le théorème suivant caractérise un graphe sans  $P_5$  ([52, 59]).

**Théorème 4.4** [7]. *Un graphe  $G$  est  $P_5$ -libre si et seulement si pour chaque sous-graphe induit  $H = (V', E')$  de  $G$ ,  $V'$  contient soit un  $C_5$  dominant soit une clique dominante.*

**Corollaire 4.1.** *Si  $G$  est biparti  $P_5$ -libre connexe alors il existe une arête dominante dans  $G$ .*

**Théorème 4.5** [4]. *Le hull number d'un graphe biparti  $P_5$ -libre peut être calculé en temps polynomial.*

---

**Algorithme 4.1**  $hn(G)$  d'un graphe biparti  $P_5$ -libre.

---

**Entrée(s)** Un graphe  $G = (A \cup B, E)$  biparti  $P_5$ -libre d'ordre  $n$ ,  $D$  ensemble d'arêtes dominantes et  $S$  ensemble de sommets simpliciaux.

**Sortie(s)**  $hn(G)$ .

```

1: si  $|D| = 1$  alors
2:   construire  $H = G[(A \cup B) \setminus \{u, v\}]$  tel que  $uv \in D$ ;
3:   si  $H$  admet  $k \geq 2$  composantes connexes alors
4:      $hn(G) = k$ ;
5:   sinon
6:      $hn(G) = 2$ ;
7:   fin si
8: sinon
9:   si  $\exists e_1, e_2 \in D$  deux arêtes adjacentes en  $v \in B$  alors
10:    si  $|B| = 1$  alors
11:       $hn(G) = n - 1$ ;
12:    sinon
13:      si  $S = \emptyset$  alors
14:         $hn(G) = 2$ ;
15:      sinon
16:         $hn(G) = |S| + 1$ 
17:      fin si
18:    fin si
19:  sinon
20:     $hn(G) = 2$ ;
21:  fin si
22: fin si

```

---

L'algorithme 4.1 décrit les étapes qui permettent d'obtenir le cardinal d'un minimum hull set d'un graphe  $G = (A \cup B, E)$  biparti sans  $P_5$ , à partir de l'ensemble des arêtes dominantes  $D$ , il est justifié par le corollaire 4.1. Notons qu'une arête dominante  $uv \in E$ , où  $u \in A$ ,  $v \in B$ , est telle que  $d(u) = |B|$  et  $d(v) = |A|$ , et qu'un sommet simplicial  $w$  est un sommet pendant, il est ainsi possible de déterminer l'ensemble des arêtes dominantes et l'ensemble des sommets simpliciaux, ces deux opérations s'effectuent en temps polynomial.

**Corollaire 4.2.** *Si  $G$  est sans  $P_5$  et sans triangle alors  $hn(G)$  peut être calculé en temps polynomial.*

*Preuve.* Étant donné un graphe  $G = (V, E)$  sans  $P_5$  et sans triangle, en vertu du théorème 4.4,  $G$  admet soit un  $C_5$  dominant soit une clique dominante de cardinal au plus 2 puisque  $G$  n'admet pas de triangle.

Si  $G$  possède un  $C_5 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$  dominant, posons  $S = \{a_1, a_3, a_5\}$ . Observons

que  $V'$  l'ensemble des sommets de  $C_5$  est inclus dans  $I[S]$ , de plus comme  $G$  est sans  $P_5$  alors tous sommet  $v \in V \setminus V'$  est dominé par les sommets de  $C_5$ , et comme  $G$  est également sans triangle, chaque sommet  $v \in V \setminus V'$  est non adjacent à deux sommets de  $C_5$ , ainsi  $v$  est engendré par ces deux sommets, l'ensemble  $S$  définit donc un hull set de  $G$ , il s'ensuit alors que  $hn(G) \leq 3$ . Il suffit dans ce cas de vérifier s'il existe ou non un hull set de cardinal 2, cette opération s'effectue en  $\mathcal{O}(n^2.m)$ .

Considérons le cas où  $G$  possède une clique dominante  $K$  :

- Si  $|k| = 1$  alors  $G$  est une étoile, car  $G$  est sans triangle. Ainsi l'unique sommet de  $K$  est un sommet universel et l'ensemble  $V \setminus K$  est un minimum hull set de  $G$ ,  $hn(G) = n - 1$ .
- Si  $|k| = 2$  i.e.  $G$  admet au moins une arête dominante  $uv$ . L'ensemble de sommets dominés par  $u$  ne sont pas reliés à  $v$  car  $G$  est sans triangle, il en est de même pour  $v$ , d'où les sommets dominés par  $u$  et  $v$  forment deux stables disjoints, le graphe  $G$  est alors biparti et d'après le théorème 4.5  $hn(G)$  peut être calculé en temps polynomial.

□

### 4.3.2 Graphes triangulés

Les toutes premières études ont été élaborées pour des sous-classes de graphes triangulé, par la suite le résultat a été généralisé pour cette classe de graphe. Nous présentons en premier lieu, les théorèmes ainsi que les algorithmes qui induisent au calcul du hull number des graphes d'intervalles unitaires et des graphes scindés.

#### Graphes d'intervalles unitaires

On se donne un graphe d'intervalle unitaire  $G = (V, E)$ , tel que  $V$  est ordonné suivant un schéma d'élimination simplicial. Les sommets  $v_1$  et  $v_n$  sont simpliciaux, d'après le lemme 3.1, ils sont contenus dans tous hull set de  $G$ .

**Lemme 4.1** [32]. *Soient  $v_i, v_k, v_j$ ,  $i < k \leq j$ , des sommets de  $V$ . Tels que  $v_k$  est le dernier voisin de  $v_i$  dans l'ordre canonique, alors il existe une plus courte chaîne reliant  $v_i$  à  $v_j$  qui passe par le sommet  $v_k$ .*

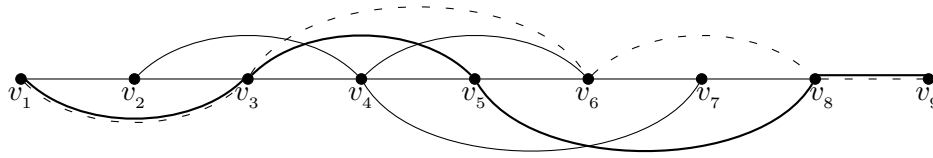


FIGURE 4.4 – Graphe d'intervalle unitaire. Les sommets reliés par des arêtes en tireté (resp. foncé) appartiennent à une plus courte chaîne qui relie les sommets  $v_1, v_9$  (resp.  $v_9, v_1$ ) obtenues par l'algorithme 4.2.

Ce résultat permet de mettre au point un algorithme glouton pour construire une plus courte chaîne de  $v_i$  à  $v_j$ ,  $i < j$ . Le principe consiste à sélectionner le dernier voisin de  $v_i$  dans l'ordre de  $V$ , disant  $v_k$  qu'on inclut dans cette chaîne, et de construire la plus courte chaîne de  $v_k$  à  $v_j$ , en répétant ainsi le processus jusqu'au résultat voulu. Pareillement, si l'on applique cet algorithme de  $v_j$  à  $v_i$ , en choisissant cette fois-ci, le premier voisin de  $v_j$  dans l'ordre de  $V$ , on obtient une chaîne géodésique de  $v_i$  à  $v_j$ .

Les étapes de cette procédure sont décrites par l'algorithme 4.2.

---

**Algorithme 4.2** Plus courte chaîne  $v_i - v_j$

---

**Entrée(s)** Graphe  $G = (V, E)$  d'intervalle unitaire,  $V = v_1, \dots, v_n$  ordre canonique des sommets,  $\forall v_i, v_j$ .

**Sortie(s)**  $P$  ensemble des sommets d'une plus courte chaîne  $v_i - v_j$

```

1: si  $i > j$  alors
2:    $k = i$ ;
3:    $i = j$ .
4:    $j = k$ ;
5: fin si
6:  $P = \{v_i\}$ ;
7:  $l = i + 1$ ;
8: tant que  $l < j$  faire
9:   si  $v_i v_{l+1} \in E$  alors
10:     $l = l + 1$ ;
11:  sinon
12:     $P = P \cup \{v_l\}$ ;
13:     $i = l$ ;
14:     $l = i + 1$ ;
15:  fin si
16: fin tant que
17:  $P = P \cup \{v_j\}$ ;

```

---

**Théorème 4.6** [32]. Soit  $G = (V, E)$  un graphe d'intervalle unitaire.  $hn(G)$  est égale au nombre de composantes couvertes plus 2.

Où une composante est un sous-ensemble de sommets obtenu en suivant les étapes décrites ci-dessous.

**Étape 1 :** On applique l'algorithme 4.2, pour construire deux chaînes géodésiques.

- La première de  $v_1$  à  $v_n$ , qu'on note :  $P = b_1, \dots, b_k$  ;

- La seconde de  $v_n$  à  $v_1$ , qu'on note :  $P' = b'_1, \dots, b'_k$ .

Où  $v_1 = b_1 = b'_1$  et  $v_n = b_k = b'_k$ .

Soulignons que,  $b'_i \leq b_i, \forall i = \overline{1, k}$ , et que tout sommet  $v \in V$ , compris entre  $b'_i$  et  $b_i$  appartient également à une  $v_1 v_n$ -chaîne géodésique.

**Étape 2 :** On définit les sous-ensembles de sommets suivants :

- Pour tout  $1 \leq i \leq k$  :  $B_i = \{b'_i, \dots, b_i\}$ , appelé région noire ;

- Pour tout  $1 \leq i < k$  :  $R_i = \{v \in V, v \text{ est entre } B_{k-i} \text{ et } B_{k-i+1}\}$ , appelé région grise.  
 $R_i$  peut être vide.

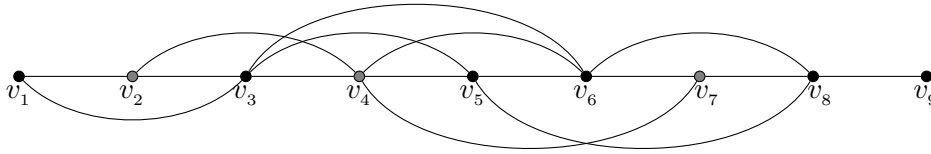


FIGURE 4.5 – La chaîne  $v_2, v_4, v_7$  est une chaîne grise.

**Étape 3 :** Pour tout sommet  $v \in V$ , on applique l'algorithme de marquage suivant :

- si  $v \in R_j, j < k$ ,  $\text{MARQUER}(v) \leftarrow$  gris ;

- sinon  $\text{MARQUER}(v) \leftarrow$  noir.

**Étape 4 :** Pour toute arête  $e = uv$ , où  $u < v$  dans l'ordre canonique sur  $V$ , on applique l'algorithme qui suit :

- si  $u \in R_j$  et  $v \in R_l, j < l < k$ ,  $\text{MARQUER}(e) \leftarrow$  gris.

- Si  $u$  est le premier sommet de  $B_i$  et  $v$  est le dernier sommet de  $B_{i+1}, i < k$ ,  $\text{MARQUER}(e) \leftarrow$  arête longue.

Une chaîne est grise si elle ne contient que des arêtes grises, voir l'exemple illustré par la figure 4.5. On dit qu'un sommet gris est restreint à gauche (resp. à droite) s'il ne contient pas d'arête grise à droite (resp. à gauche). Un sommet gris  $v \in R_j$  est

couvert par une arête longue, s'il y a une arête longue entre le premier sommet de  $B_j$  et le dernier sommet de  $B_{j+1}$ . Il est à présent possible de définir une composante couverte.

Soit  $\mathcal{R} = v_{i_1}, \dots, v_{i_p} = r_1, \dots, r_p$  une séquence de sommets gris.

Une composante de  $V$ , notée  $C$ , est une séquence de sommets consécutifs de  $\mathcal{R}$  telle que le premier sommet est restreint à droite et le dernier sommet est restreint à gauche et elle ne contient pas de sommets consécutifs  $v_{i_j}$  et  $v_{i_{j+1}}$  telle que  $v_{i_j}$  soit restreint à gauche et  $v_{i_{j+1}}$  restreint à droite. En fait, une composante définit une partition sur  $\mathcal{R}$ . Une composante couverte  $C$  est une composante dont tous ses sommets sont couverts par une longue arête. Dans le cas contraire  $C$  est dite non couverte.

Dans un graphe d'intervalle unitaire, la détermination du hull number revient à déterminer le nombre de composantes couvertes dans ce graphes. En appliquant l'algorithme décrit précédemment ceci est obtenu en temps polynomial.

### Graphes scindés

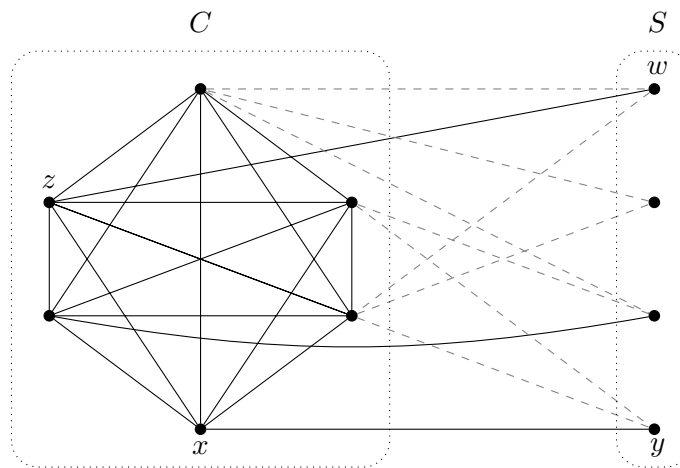


FIGURE 4.6 – Graphe scindé où  $|S| = 4$  et  $|C| = 6$ . On voit bien que  $S$  n'est pas un hull set, les sommets engendrés par l'enveloppe convexe de  $S$  sont les extrémités des arêtes représentées en tireté gris.

**Théorème 4.7** [32]. *Soit  $G = (S \cup C, E)$  un graphe scindé tel que  $S$  est maximal (i.e. chaque sommet de  $C$  a un voisin dans  $S$ ). Alors :*



$$hn(G) = \begin{cases} |S \cup C'| & C' \subset C \text{ est un ensemble de sommets simpliciaux;} \\ |S|; \\ |S| + 1. \end{cases}$$

---

**Algorithme 4.3**  $hn(G)$  – graphe scindé

---

**Entrée(s)**  $G = (S \cup C, E)$  graphe scindé.

**Sortie(s)**  $hn(G)$  le hull number de  $G$

```

1: si il existe un sommet  $y \in S$  voisin de tous les sommets de  $C$  alors
2:    $S' = \emptyset$ 
3:   pour  $\forall x \in C$  faire
4:     si  $|N(x) \cap S| = 1$  alors
5:        $S' = S' \cup \{x\}$ 
6:     fin si
7:   fin pour
8:    $hn(G) = |S| + |S'|$ 
9: sinon
10:  si  $S$  est un hull set alors
11:     $hn(G) = |S|$ ;
12:    Terminer ;
13:  sinon
14:     $hn(G) = |S| + 1$ 
15:  fin si
16: fin si

```

---

*Preuve.* Soit  $G = (S \cup C, E)$  un graphe scindé. Pour tout sommet  $s_i \in S$ ,  $N(s_i) \subseteq C$  est une clique, les sommets de  $S$  sont donc tous simpliciaux. On rappelle que  $\forall c_j \in C, \exists s_i \in S$  tel que  $(s_i, c_j) \in E$ . Deux cas se présente :

Premier cas : Supposons qu'il existe un sommet  $s \in S$  qui soit adjacent à tous les sommets de  $C$ , alors  $S \cup C'$  est un hull set où  $C' = \{c \in C : \forall x \in S \setminus \{s\}, (c, x) \notin E\}$  représente l'ensemble des sommets simpliciaux de  $C$ . En effet, les sommets de  $C$  qui ne sont pas dans  $C'$  appartiennent à au moins une plus courte chaîne reliant deux sommets de  $S$  et sont donc générés par  $S$ .

Deuxième cas : Supposons à présent qu'aucun des sommets de  $S$  ne soit relié à tous les sommets de  $C$ .

- On vérifie si  $S$  est un hull set, i.e. que les sommets de  $C$  appartiennent aux plus courtes chaînes de longueur deux si  $|N(s_i) \cap N(s_j)| \geq 1, \forall s_i, s_j \in S$  ou de longueur trois sinon.

- Si  $S$  n'est pas un hull set, i.e.  $\forall s_i, s_j \in S |N(s_i) \cap N(s_j)| \geq 1$  et  $\exists x \in C$  tel que  $|N(x) \cap S| = 1$ . Soit  $y$  l'unique voisin de  $x$  dans  $S$ , il existe un sommet  $z \in C$  tel que  $z \notin N(y)$ , car  $N(y) \neq C$ . Soit  $w$  le voisin de  $z$  dans  $S$ , on a également  $(w, x) \notin E$ . Alors  $S \cup \{x\}$  est un hull set. En effet, tout sommet de type  $z$  appartient à une plus courte chaîne reliant  $x$  et  $w$ .  $z$  est par conséquent engendré par ces deux sommets (voir la figure 4.6). Quand au sommet  $v \in N(y)$  voisin de  $y$ , s'il est voisin d'un autre sommet  $y' \in S$  alors il est généré par  $y$  et  $y'$ , sinon  $v$  appartient à une plus courte chaîne entre  $y$  et  $z$ .  $v$  est donc généré par ces derniers.

□

L'algorithme 4.3, qui décrit les étapes de calcul du hull number d'un graphe scindé, se déroule en temps polynomial.

### Graphes triangulés

Soient  $G = (V, E)$  un graphe et  $\mathcal{SP}_G$  une relation betweenness sur son ensemble de sommets  $V$ , tels que  $\forall u, v, z \in V$ ,  $\mathcal{SP}_G(u, z, v)$  est vérifiée si et seulement si  $z$  appartient à une plus courte chaîne reliant  $u$  et  $v$ , on dit que  $z$  est entre  $u$  et  $v$ . Les ouvrages suivants [24, 53, 64], traitent sur les relations betweenness dans les graphes et sont recommandés dans la perspective d'appréhender ce sujet. Pour tous sous-ensembles  $S$  de  $V$ , on définit l'ensemble :

$$\mathcal{SP}_G^0(S) = \bigcup_{u, v \in S} \{z \in V : \mathcal{SP}_G(u, z, v)\}.$$

Un sous-ensemble  $S \subseteq V$  est  $\mathcal{SP}_G$ -convexe si  $\mathcal{SP}_G^0(S) = S$ . Son enveloppe convexe est notée  $\mathcal{SP}_G^+(S)$ .  $S$  est un  $\mathcal{SP}_G$ -hull set si  $\mathcal{SP}_G^+(S) = V$ . Le hull number d'un graphe  $G$  correspond, au cardinal d'un minimum  $\mathcal{SP}_G$ -hull set.

**Théorème 4.8** [53]. *Soit  $G$  un graphe triangulé. Il est possible de déterminer un minimum  $\mathcal{SP}_G$ -hull set en temps  $\mathcal{O}(|V|^3)$ .*

### 4.3.3 Graphes distances héréditaires

Un graphe est distance héréditaire si tout sous-graphe  $H$  de  $G$  est isométrique. Dans [32], les auteurs proposent un algorithme polynomial qui permet de déterminer le hull number d'une sous-classe de graphe distance héréditaire, les cographes, par la suite il a été possible de mettre au point un algorithme qui calcul le hull number

de n'importe quel graphe distance héréditaire. Nous présentons ces deux résultats indépendamment.

### Cographe

Nous rappelons que le graphe complémentaire d'un cografe  $G$  est également un cografe, de plus chaque composante connexe est isométrique de diamètre au plus 2.

**Théorème 4.9** [32]. *Soient  $G$  un cografe connexe et  $k$  le nombre de composantes non triviales de  $\bar{G}$ . On a alors :*

- (a) Si  $k = 0$  :  $hn(G) = n$ .
- (b) Si  $k = 1$  :  $hn(G) = hn(G_l)$ , où  $G_l$  est le sous-graphe de  $G$  induit par les sommets de l'unique composante non triviale de  $\bar{G}$ .
- (c) Si  $k = 2$  :  $hn(G) = 2$ .

*Preuve.* (a) Dans le cas où  $\bar{G}$  n'admet aucune composante non triviale, alors  $G$  est un graphe complet, dès lors  $hn(G) = n$ .

(b) Soit  $S$  un hull set de  $G_l = (V_l, E_l)$  de cardinal minimum. Pour tout sommet  $v \in V \setminus V_l, v \in [S]$ , en effet,  $v$  est généré par une paire de sommets non adjacents de  $S$ , car  $G_l$  n'est pas connexe. Considérons un sommet  $v' \in V \setminus S$ , il existe  $w_1, w_2 \in S$  qui génère  $v'$  dans  $G_l$ , comme  $G_l$  est isométrique, alors  $w_1, w_2$  génère aussi  $v'$  dans  $G$ . Par conséquent,  $S$  est un hull set de  $G$ . Notons que, les sommets de  $V \setminus V_l$  sont des sommets universels et ne peuvent appartenir à aucun hull set de  $G$ , en particulier  $S$ , d'où  $S$  est un hull set minimum de  $G$ .

(c) Si  $k = 2$ , on prend deux sommets  $u, v$  d'une composante non triviale  $G_i = (V_i, E_i)$  de  $\bar{G}$ , qui ne sont pas adjacents dans  $G$ . L'intervalle fermé  $I[u, v]$  engendre tous les sommets des autres composantes de  $\bar{G}$ . Et comme, au moins une de ces composantes contient deux sommets qui ne sont pas adjacents dans  $G$ , alors les sommets  $V_i \setminus \{u, v\}$  appartiennent à l'enveloppe convexe de  $\{u, v\}$ . Ainsi,  $\{u, v\}$  est un hull set minimum de  $G$ .

□

La détermination du cardinal d'un minimum hull set d'un cografe  $G$ , s'effectue en temps polynomial, il suffit pour cela d'appliquer la décomposition modulaire,

détaillée dans [57, 58], lorsque le graphe complémentaire de  $G$  admet exactement une composante connexe non trivial.

**Proposition 4.1** [32]. *Si un cografe  $G$  possède  $p$  composantes connexes notées  $G_i$ ,  $i \in \{1, \dots, p\}$  alors :*

$$hn(G) = \sum_{i=1}^p hn(G_i).$$

### Graphes distances héréditaires

Ce résultat s'appuie essentiellement sur la logique monadique du second ordre. Ainsi les auteurs montrent que déterminer si un ensemble  $S$  est un hull set d'un graphe distance héréditaire  $G$ , est équivalent à déterminer si la formule logique monadique du second ordre  $\text{HullSet}(S)$ , qui exprime que  $\mathcal{SP}_G(S)$  est un hull set (défini dans la section 4.3.2), est vraie dans  $G$ . En conséquence du théorème de Courcelle et al. [28], formulant que les propriétés monadiques du second ordre dans un graphe distance héréditaire sont résolues en temps polynomial, il en résulte le théorème suivant :

**Théorème 4.10** [53]. *Soit  $G = (V, E)$  un graphe distance héréditaire. Un minimum  $\mathcal{SP}_G$  hull set peut être calculé en temps  $\mathcal{O}(n + m)$ .*

### 4.3.4 Graphes cobipartis

Un graphe cobiparti est un graphe complémentaire du graphe biparti. On dit ainsi, qu'un graphe  $G = (V, E)$  est cobiparti s'il existe une partition des sommets de  $V$  en  $A \cup B$  telle que  $A$  (respectivement  $B$ ) engendre un sous-graphe complet.

**Théorème 4.11** [2]. *Le hull number d'un graphe cobiparti peut être calculé en temps  $\mathcal{O}(n^7)$ .*

Les auteurs établissent que le hull number d'un graphe cobiparti est borné par :

$$|S| + 1 \leq hn(G) \leq |S| + 4.$$

Où  $S$  est l'ensemble des sommets simpliciaux de  $G$ . Il suffit ainsi de déterminer l'enveloppe convexe de  $\mathcal{O}(n^4)$  sous-ensembles, où la détermination de chacune d'entre elles, nécessite un temps de  $\mathcal{O}(n.m)$ .

### 4.3.5 Graphes $(q, q - 4)$

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit  $(q, q - 4)$ , si pour tout  $q \geq 4$  fixé, et si pour tout sous-ensemble  $S \subseteq V$  tel que  $|S| \leq q$ ,  $S$  engendre au plus  $q - 4$  chaînes  $P_4$ , [6].

Les cographes sont un cas particulier des graphes  $(q, q - 4)$ , obtenus en considérons le paramètre  $q = 4$ . Le théorème suivant généralise le résultat obtenu dans [32].

**Théorème 4.12** [2]. *Soit  $q \geq 0$  et soit  $G = (V, E)$  un graphe  $(q, q - 4)$  d'ordre  $n$ . Le minimum hull set de  $G$  peut être obtenu en  $\mathcal{O}(2^q n^2)$ .*

### 4.3.6 Graphes cactus

Les graphes cactus sont les graphes composés de cycles, de sorte que deux cycles possèdent au plus un sommet en commun. Dans un graphe cactus un bloc est soit une arête soit un cycle.

**Théorème 4.13** [3]. *Le hull number d'un graphe cactus peut être obtenu en temps polynomial.*

# Conclusion

A l'instar d'une grande majorité de problèmes rencontrés en optimisation combinatoire, le problème du "hull number", qu'on note HN, se classe parmi les problèmes NP-difficiles, même si le graphe en question est biparti ou partiellement cubique. Au chapitre 2 nous nous sommes familiarisés avec la notion de convexité géodésique, qui est en lien direct avec la détermination des plus courtes chaînes dans un graphe, ce qui justifie l'utilisation d'un algorithme BFS pour déduire l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble de sommets. Nous avons cependant pu constater en menant cette recherche, que pour certains cas de graphes, tels que les graphes triangulés, graphes  $(P_5, C_3)$ -libres, graphes distances héréditaires, graphes cobipartis, les graphes cactus, ou encore les graphes  $(q, q - 4)$ , il est possible de donner la valeur du  $hn(G)$  en temps polynomial. Ces résultats sont rapportés au chapitre 4.

Il est connu que le hull number d'un graphe est au moins égal à deux, et plus encore si le graphe admet des sommets simpliciaux, la valeur de  $hn(G)$  se voit minorée par le nombre de ces derniers. Au chapitre 3, nous avons indiqué pour des cas de graphes où la valeur du  $hn(G)$  n'est pas encore connue, les meilleures bornes obtenues à ce jour. Ainsi nous avons connaissance que les graphes réguliers de degré  $k$  n'admettent pas de sommets simpliciaux, dans [2], les auteurs montrent que  $hn(G) \leq 1 + \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ . Et si on considère un graphe  $k$ -régulier, tel que  $n \leq 2k + 1$ , ou encore un graphe  $k$ -régulier biparti de diamètre inférieur ou égal à 4? Au cours de notre recherche nous nous sommes intéressés de près à ces deux propositions. Les résultats sont conséquents. Nous montrons en effet, qu'en considérant ces cas, on arrive à obtenir de meilleures bornes, ainsi dans le premier cas  $hn(G) \leq n - k$ , quant au second cas  $hn(G) \leq \frac{n}{2} - k + 1$ .

La question que l'on pourrait encore se poser est la suivante : "est il possible de généraliser le résultat obtenu pour un graphe  $k$ -régulier biparti et de diamètre  $D$ ?" Ou mieux encore : "existe-t-il un algorithme efficace qui puisse donner la valeur du

$hn(G)$ , où  $G$  est un graphe  $k$ -régulier ?

Il est également pertinent de considérer la complexité de ce problème lorsqu'on se restreint à d'autres classes de graphes telles que les :

- Graphes planaires ;
- Graphes sans triangles ;
- Graphes  $k$ -dégénérés.

pour lesquelles, la question reste à ce jour encore ouverte.

Nous souhaitons dans un futur proche contribuer davantage à la recherche dont fait l'objet cette thèse, et étendre également notre étude sur d'autres paramètres de la convexité géodésique, tels que le nombre géodétique, qui représente le cardinal du plus petit ensemble  $S$  pour lequel la fermeture de  $S$  est égale à l'ensemble des sommets de  $G$ , et qui est précisément, un majorant du hull number.

# Bibliographie

- [1] M. Albenque and K. Knauer. Convexity in partial cubes : the hull number. *LATIN 2014 : Theoretical Informatics, Springer*, 57(3) : 421–432, 2014.
- [2] J. Araujo, V. Campos, F. Giroire, N. Nisse, L. Sampaio, R. Soares. On the hull number of some graph classes. *Discrete Mathematics*, 38 : 49–55, décembre 2011.
- [3] J. Araujo, V. Campos, F. Giroire, L. Sampaio, R. Soares. On the hull number of some graph classes. *In Proceedings of the European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, EuroComb'11* Budapest, Hungary, 2011.
- [4] J. Araujo, G. Morel, L. Sampaio, R. Soares, V. Weber. Hull number :  $P_5$ -free graphs and reduction rules. *Discrete Mathematics*, 44 : 67–73, novembre 2013.
- [5] S. Arora, B. Barak. *Computational complexity - A modern approach*. Cambridge University Press, 2009.
- [6] L. Babel and S. Olariu. On the isomorphism of graphs with few p4s. *In Proceedings of the 21st International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, WG '95*, pages 24–36, London, UK, 1995. Springer-Verlag.
- [7] G. Bacsó and Z. Tuza. Dominating cliques in  $P_5$ -free graphs. *Periodica Mathematica Hungarica*, 21 (4) :303 – 308, 1990.
- [8] A. Barvinok. *A Course in Convexity*. American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2002.
- [9] K. Benatchba. *Modèle d'exécution pour l'aide à la résolution du problème MAX-SAT*. Thèse de Doctorat, Institut National d'Informatique, Alger, 2005.
- [10] C. Berge *Graphes et hypergraphes*. Dunod Paris, 1970.
- [11] S. Bernard. *Dimension métrique des graphes*. Mémoire de Maîtrise des sciences, Université de Montréal, Montréal, 2008.



- [12] V. D. Blondel, J. N. Tsitsiklis. A survey of computational complexity results in systems and control. *Automatica*, 36 : 1249–1274, 2000.
- [13] B. Bollobás. *The Art of Mathematics : Coffee Time in Memphis*. Cambridge University Press, 2006.
- [14] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. *Graph theory with applications*. North Holland, 1976.
- [15] A. Brandstädt, V. B. Le, J. P. Spinrad. *Graph Classes A Surve*. Society for Industrial Mathematics, 1987.
- [16] A. Bretto, A. Faisant, F. Hennecart. *Éléments de théorie des graphes*. Springer paris, 2012.
- [17] C.C. Centeno, S. Dantas, M.C. Dourado, D. Rautenbach, and J.L. Szwarcfiter. Convex partitions of graphs induced by paths of order three. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 12 (5) : 175–184, 2010.
- [18] M. Changat, H. M. Mulder, G. Sierksma. Convexities related to path properties on graphs. *Discrete Mathematics*, 290 : 117–131, 2005.
- [19] M. Changat, P. G. Narasimha-Shenoi, I. M. Pelayo. The longest path transit function of a graph and betweenness. *Util. Math.*, 82 : 111–127, 2010.
- [20] G. Chartrand, C. E. Wall, P. Zhang. The Convexity Number of a Graph. *Graphs and Combinatorics*, 18 : 209–217, 2002.
- [21] G. Chartrand, F. Harary, P. Zhang. On the geodetic number of a graph. *Network an international journal*, 39 : 1–6, 2002.
- [22] G. Chartrand, L. Garry, P. Zhang. The detour number of a graph. *Util. Math.*, 64 : 97–113, 2003.
- [23] G. Chartrand, P. Zhang. The forcing convexity number of a graph. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 51 (126) : 847–858, 2001.
- [24] V. Chvátal. Antimatroids, betweenness, convexity. *Cook, W.J., Lovász, L. (eds.) Research Trends in Combinatorial Optimization*. Springer, 57 – 64, 2009.
- [25] S. A. Cook. An overview of computational complexity. *Communications of the ACM*, 26 : 400 – 408, 1983.

- [26] S. A. Cook. The complexity of theorem proving procedures. *In Proc. 3rd Ann. ACM. Symp. Theory of Computing*, 151–158, 1971.
- [27] D. G. Corneil, H. Lerchs, L. S. Burlingham. Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 3 : 163–176, 1981.
- [28] B. Courcelle, J. Engelfriet. *Graph Structure and Monadic Second-Order Logic : a Language Theoretic Approach*. Cambridge University Press, 2012.
- [29] N. Deo. *Graph theory with applications to engineering and computer science*. Prentice Hall, 1974.
- [30] R. Diestel. *Graph theory*. Springer, 2000.
- [31] G. A. Dirac. On rigid circuit graphs. *Abhandlungen Aus Dem Mathematischen Seminare der Universität Hamburg*, 25 (1-2), 71–76, 1961.
- [32] M. C. Dourado, J. G. Gimbel, J. Kratochvíl, F. Protti, J. L. Szwarcfiter. On the computation of the hull number of a graph. *Discrete Mathematics*, 309 : 5668–5674, 2009.
- [33] M. C. Dourado, J. G. Gimbel, J. Kratochvíl, F. Protti, J. L. Szwarcfiter. On the Convexity Number of Graphs. *Graphs and Combinatorics*, 28 : 333–345, 2012.
- [34] M. C. Dourado, F. Protti, D. Rautenbach, J. L. Szwarcfiter. On the Hull Number of Triangle-free Graphs. *SIAM J. Discret. Math.*, 23 : 2163–2172, January 2010.
- [35] M. C. Dourado, F. Protti, J. L. Szwarcfiter. Algorithmic Aspects of Monophonic Convexity. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 30 : 177–182, 2008.
- [36] M. C. Dourado, F. Protti, J. L. Szwarcfiter. Complexity results related to monophonic convexity. *Discrete Applied Mathematics*, 158 : 1268–1274, 2010.
- [37] P. Duchet. Convex Sets in Graphs, II. Minimal Path Convexity. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 44 : 307 – 316, 1988.
- [38] P. Duchet, H. Meyniel. Ensemble convexes dans les Graphes I, Théorème de Helly et de Radon pour Graphes et Surfaces. *Discrete Mathematics*, 309 : 5668–5674, 2009.

- [39] M. G. Everett, S. B. Seidman. The hull number of a graph. *Discrete Mathematics*, 57(3) : 217–223, 1985.
- [40] M. Farber. Bridged graphs and geodesic convexity. *Discrete Mathematics*, 66 : 249–257, 1987.
- [41] M. Farber, R. E. Jamison. Convexity in graphs and hypergraphs. *SIAM. J. on Algebraic and Discrete Methods* 7(3) : 433–444, 1986.
- [42] M. Farber, R. E. Jamison. On local convexity in graphs. *Discrete Mathematics* 66 : 231–247, 1987.
- [43] D. R. Fulkerson, O. A. Gross. Incidence Matrices and Interval Graphs. *Pacific J.Math.* 15 (3), 835 – 855, (1965).
- [44] F. Gardi. *Ordonnancement avec exclusion mutuelle par un graphe d'intervalles ou d'une classe apparentée : complexité et algorithmes*. Thèse de Doctorat, l'Université de la Méditerranée – Aix-Marseille II, Marseille, 2005.
- [45] M. R. Garey, D. S. Johnson. *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979.
- [46] J. Gimbel. Some Remarks on the Convexity Number of a Graph. *Graphs and Combinatorics*, 19 : 357–361, 2003.
- [47] F. Emmert-Streib, M. Dehmer. *Structural Analysis of Complex Networks*. Birkhäuser Basel, 2011.
- [48] M. Ch. Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Butterworth heineman, 2004.
- [49] J. L. Gross, J. Yellen. *Handbook of graph theory*. CRC Press, 2003.
- [50] F. Harary. *Graph theory*. Westview Press, 1969.
- [51] F. Harary. The geodetic number of a graph. *Mathl. Comput. Modelling*, 17 (11) : 89 – 95, 1993.
- [52] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater. *Fundamentals of domination in graphs*. Marcel Dekker, 1998.

- [53] M. M. Kanté, L. Nourine. Polynomial Time Algorithms for Computing a Minimum Hull Set in Distance-Hereditary and Chordal Graphs. *Lecture Notes in Computer Science*, 7741 : 268–279, 2013.
- [54] R. M. Karp. Reducibility among Combinatorial Problems. *Complexity of Computer Computations*, 85 – 103, 1972.
- [55] L. Levin. Problems of Information Transmission. *Universal sequential search problems. PINFTRANS : (translated from Problemy Peredachi Informatsii (Russian))*, 9, 1973.
- [56] R. F. Madani. *Généralisations des hypercubes et de  $(0, 2)$ -graphes*. Thèse de Doctorat, Université Joseph-Fourier, Grenoble I, 1994.
- [57] R. M. McConnell, J. P. Spinrad. Linear-time modular decomposition and efficient transitive orientation of comparability graphs. *Proceedings of the Fifth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 5 : 536 – 545, 1994.
- [58] R. M. McConnell, J. P. Spinrad. Ordered vertex partitioning. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 4 : 45 – 60, 2000.
- [59] G. Morel. *Stabilité et coloration des graphes sans  $P_5$* . Thèse de Doctorat, Université de Grenoble, Grenoble, 2011.
- [60] H. M. Mulder. *The interval function of a graph*. Mathematisch centrum, Amsterdam, 1980.
- [61] M. H. Nielsen, O. R. Oellermann. Helly theorems for 3-Steiner and 3-monophonic convexity in graphs. *Discrete Mathematics*, 311 : 872–880, 2011.
- [62] Ch. H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, 1994.
- [63] I. M. Pelayo. *Geodesic Convexity in Graphs*. Springer briefs in mathematics, 2010.
- [64] I. M. Pelayo. On convexity in graphs. *Technical report*, 2004.
- [65] R. Soares. *Pursuit-Evasion, decompositions and convexity on graphs*. Thèse PHD, Université Nice Sophia Antipolis, Universidade federal do Ceará, 2013.
- [66] R. E. Tarjan. *Data structures and network algorithms*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.

- [67] M. L. J. van de Vel. *Theory of Convex Structures*. North-Holland, 1993.
- [68] D. B. West. *Introduction to graph theory*. Prentice Hall, 2001.
- [69] R. J. Wilson. *Introduction to graph theory*. Addison Wesley, 1996.