Le but de notre travail est d'exposer une théorie de Galois pour les équations aux différences due à SINGER [17].

Dans la théorie de Galois des équations différentielles, l'objet principal est d'étudier les extensions de Picard-Vessiot d'un corps différentiel (I.KAPLANSKY [10], H.M.LEVELT [13]). On rappelle qu'une extension de Picard-Vessiot d'un corps différentiel k, est un corps K engendré par une base de solutions, et possédant le même corps des constantes que k. Dans le cas où le corps des constantes est algébriquement clos de caractéristique nulle, l'extension de Picard-Vessiot existe pour toute équation différentielle linéaire. Elle est unique. Son groupe G des k-automorphismes différentiels possède une structure de groupe algébrique linéaire. Il y a une correspondance entre les sous groupes fermé de G et les sous extensions de K. Tous ces résultats avec tous les rappels nécessaires sont énoncés dans le chapitre I.

Si on essaie de copier ce qui a été fait aux équations différentielles, aux cas des équations aux différences, nous serons confrontés au problème d'existence, dont voici un exemple:

<u>Exemple</u>: [9]

Soit K un corps aux différences, d'opérateurs σ. Si le corps des constantes $C(K)=\{c\in K/\ \sigma c=c\}$ est algébriquement clos, alors l'équation $\sigma x+x=0$ ne possède pas de solution dans K. En effet: soit $y\in K$, vérifiant $\sigma y+y=0$ donc $\sigma y^2=y^2$ d'où $y^2\in C(K)$. Par suite $y\in C(K)$. Contradiction avec le fait que $\sigma y=-y$.

Une théorie des extension de corps de Picard-Vessiot a été développée par C.H.FRANKE [9] et BIALYNICKI-BIRULA [4], dont la défaillance est qu'on ne peut associer à toute équation aux différences une extension de Picard-Vessiot. LEVELT [13] montre que la théorie de GALOIS pour les équations différentielles, peut être basée sur des anneaux. C'est à dire qu'il n'exige plus des extensions de Picard-Vessiot qu'elles soient un corps, mais seulement un anneau unitaire intègre simple (ne contenant pas d'idéaux différentiels propres).