Le théme principal de cette thése est l'établissement d'une formule de trace pour le cas des anneaux des vecteurs de Witt de longueur 2 à coéfficients dans $\mathbf{F}_q$ où $q = p^f$ et p est un nombre premier impair. D'emblée, un bref historique à propos de la génése de cette modeste recherche se présente comme nécessaire.

En 1960, dans l'article [8] B. Dwork démontra une première partie des conjectures de Weil en prouvant que la fonction zeta $\zeta(X;t) = \exp(\sum_{s=1}^{\infty} N_s \frac{t^s}{s})$ de la variété X définie sur un corps fini était rationnelle. Il obtint ce résultat en utilisant entre autres, l'identité:

$$\sum_{y \in \mathbb{F}_q}^{\infty} \Psi(ya) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq 0 \\ q & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

où Ψ est un caractére additif défini sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ $(q = p^f)$, $y \in \mathbb{F}_q$. En fait, Dwork a réussi d'une part à exprimer ce caractère sous forme analytique, grâce à sa fonction scindante i.e. une série analytique de rayon de convergence p-adique > 1, et d'autre part, à exprimer cette somme de caractéres comme étant la trace d'un opérateur complètement continu défini sur un espace de fonctions adéquat. C'est une telle identité entre une somme de caractéres définie sur corps fini et la trace d'un opérateur, qu'on appelle formule de trace.

Dans cette thése, et partant du fait que l'anneau de Witt $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$ pour le cas $\ell = 1$ coincide avec $\mathbb{F}_q$, on généralise cette formule de trace au cas où la somme de caractéres, sera déormais prise sur un anneau de Witt de longueur 2 défini sur un corps fini.

Cette thése est structurée en quatre chapitres :

Le chapitre premier est consacré aux anneaux de Witt : On abordera en premier lieu les principales définitions, les propriétés générales de ce type d'anneaux, ensuite, et pour les besoins de la suite du travail on a dû énoncer puis prouver quelques propositions surtout celles en lien avec les idéaux et la topologie des anneaux des vecteurs de Witt.

Le chapitre deuxiéme est déstiné aux morphismes d'Artin Hasse, plus spécialement aux exponentielles d'Artin Hasse, aux exponentielles de Pulita et à la généralisation de ces exponentielles de Pulita; un bon nombre de leurs propriétes y apparaissent aussi.

Le chapitre troisiéme traite respectivement la représentation analytique des caractéres additifs de $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$, et multiplicatifs de $\mathbf{W}_2(\mathbb{F}_q)$.

Le chapitre quatriéme est réservé à l'expression analytique d'une somme de Gauss dfinie sur $\mathbf{W}_2(\mathbb{F}_q)$ et à l'introduction de certains opérateurs définis sur des espaces de fonctions adéquats et ce dans l'objectif de démontrer une formule de trace reliant cette somme de Gauss à la trace de l'opérateur cité .