Conclusion

Le but de ce travail était de résoudre le problème de Bolza, sous l'hypothèse de superquadraticité de l'Hamiltonien H et sous les conditions aux limites non homogènes

$$q(0) = q_0 \qquad p(0) = 0$$

$$q(T) = q_1 \qquad p(T) = 0 \qquad (q_0 \neq q_1)$$

Cette résolution étant basée sur l'application du théorème d'Ambrosetti-Rabinowitz. Le premier cas $q_0 = q_1$ ayant été résolu, nous nous sommes donc intéressés au second cas, en l'occurrence $q_0 \neq q_1$.

La théorie de la dualité nous a permis de reformuler ce problème sous l'aspect suivant :

$$\begin{cases} L'(\dot{y},\dot{x}) = 0 \\ (\dot{y},\dot{x}) \in L_0^\beta \times L_0^\beta \end{cases}$$

$$\text{avec } L(\dot{y},\dot{x}) = \int_0^T \{-x(\dot{y}+(q_1 - q_0)/T) + G(-\dot{x}, \dot{y} + (q_1 - q_0)/T)\} dt$$

Nous avons montré que la fonctionnelle intégrale L vérifiant toutes les conditions du théorème d'ambosetti-Rabinowitz d'où l'existence d'au moins un point critique de L et par conséquent d'au moins une solution du problème de Bolza.

Ce travail devrait faire l'objet de prolongements ultérieurs puisqu'il restera à traiter le cas 1 $p_0 \neq p(T)$.

Pour ce, il s'agira d'étudier la fonctionnelle suivante :

$$\Psi(y,x) = \int_0^T -x(\dot{y}+(q_1 - q_0)/T) + G(-\dot{x}, \dot{y} + (q_1 - q_0)/T)dt + q_1x(T) - q_0x(0)$$

et d'établir l'existence d'au moins un point critique de Ψ.

C'est un problème ouvert dont la résolution clôturera l'étude du problème de Bolza dans le cas de superquadraticité de l'Hamiltonien.