

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumediène



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة هواري بومدين للعلوم والتكنولوجيا

Faculté de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par : KERDJOUDJ Samia

Thème

Groupes d'automorphismes associés aux colorations de graphes

Soutenue publiquement le 25/11/2017, devant le jury composé de :

M. AIT HADDADENE Hacène	Professeur, à l'U.S.T.H.B	Président
M. BERRACHEDI Abdelhafid	Professeur, à l'U.S.T.H.B	Directeur de thèse
M. CHELLALI Mustapha	Professeur, à l'Université de Blida 1	Examineur
M. RASPAUD André	Professeur, à l' Université de Bordeaux	Examineur
M. SADI Bachir	Maître de Conférences/ A, à l'Université de Tizi-Ouzou	Examineur
Mme. AFFIF CHAOUICHE Fatima	Maître de Conférences/ A , à l'U.S.T.H.B	Invitée

A mes parents

A mes sœurs : Halima, Fadhela et Fella

Avec toute ma reconnaissance et ma profonde affection.

Remerciements

Le présent travail a été réalisé au Laboratoire d'Informatique Fondamentale, de Recherche Opérationnelle, de Combinatoire et d'Économétrie (L'IFORCE) à l'USTHB, sous la direction du Professeur Abdelhafid Berrachedi. Je tiens à lui exprimer ma gratitude pour m'avoir accueillie dans son équipe et mis à ma disposition tous les moyens pour mener à bien ce travail.

Je remercie particulièrement Monsieur André Raspaud, Professeur émérite à l'Université de Bordeaux, pour m'avoir accueillie durant 13 mois au Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique (LaBRI), il m'a fait bénéficier de son expérience et de sa rigueur scientifique. Ses remarques et ses suggestions ont constitué un précieux apport. Je suis fière de le compter parmi les membres du jury.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Hacène Ait Haddadene, Professeur à l'USTHB pour avoir accepté d'examiner mon travail et de présider le jury de soutenance.

Monsieur Mustapha Chellali, Professeur à l'Université de Blida 1 et Monsieur Bachir Sadi, Maître de conférences classe A, à l'Université de Tizi Ouzou ont bien voulu examiner mon travail. Leurs remarques et suggestions me seront sans doute très utiles pour la suite de mes travaux. Je tiens à leur exprimer toute ma gratitude.

Je souhaite également remercier Madame Fatima Affif Chaouche, Maître de conférences classe A, à l'USTHB, pour avoir accepté de participer à mon jury et de m'avoir encouragée et conseillée durant ces années de thèse.

Je remercie enfin tous mes amis et collègues pour leur soutien et leur aide pendant toutes ces années de recherches.

Groupes d'automorphismes associés aux colorations des graphes

Résumé : Cette thèse porte sur l'étude de trois problèmes de colorations dans les graphes : la coloration d'incidences, la coloration étoilée des arêtes et la b -coloration des sommets.

La coloration d'incidences d'un graphe G a été introduite par Brualdi et Massey (1993), notion étudiée depuis par de nombreux chercheurs. Nous avons établi plusieurs majorations du nombre chromatique d'incidences pour la famille des graphes planaires et des graphes peu denses. Liu et Deng (2008) ont proposé d'étudier une variation naturelle du problème de la coloration étoilée, dite coloration étoilée d'arêtes. Nous avons étudié la version liste de ce problème pour les graphes subcubiques, les graphes subcubiques peu denses et les graphes k -dégénérés. Dans le but d'évaluer les performances de certains algorithmes de coloration, Irving et Manlove (1999), ont introduit la notion de la b -coloration. Pour cette notion, nous avons obtenu les valeurs du nombre b -chromatique du produit cartésien d'un graphe complet par un graphe complet biparti, puis nous avons étudié la b -continuité de ce type de graphe.

Mots-clé : Graphe planaire - Degré moyen maximum - Méthode de déchargement - Coloration d'incidences - Coloration par liste - Coloration étoilée d'arêtes - b -coloration - b -continuité.

Automorphisms groups associated with graphs coloring

Abstract : In this thesis, we studied three problems of graph coloring : incidence coloring, star-edge coloring and vertex b -coloring.

The incidence coloring of a graph G was introduced by Brualdi and Massey (1993) and has been studied by several authors. We gave some upper bounds for the chromatic incidence number of planar graphs and several sparse graphs classes (graphs with a low maximal average degree). Liu and Deng (2008) proposed to study a natural variation of the star coloring problem, called star-edge coloring. We considered the list version of this problem for some graphs classes such as subcubic graphs, subcubic sparse graphs and k -degenerate graphs. In order to evaluate the performance of some coloring algorithms, Irving and Manlove, in 1999, introduced the concept of the b -coloring. In this work, we were interested in the b -coloring and b -continuity of the cartesian product of graphs. Specifically, we considered the cartesian product of a complete graph with a complete bipartite graph.

Keywords : Planar graph - Discharging method- Maximum average degree- Incidence coloring- List coloring - Star edge coloring - b -coloring - b -continuity.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	4
1.1 Définitions générales	5
1.1.1 Graphe	5
1.1.2 Sous-graphe	5
1.1.3 Degré d'un sommet	6
1.1.4 Stabilité et couplage	7
1.1.5 Chaîne, cycle et connexité	8
1.1.6 Contraction et mineur	8
1.2 Quelques classes de graphes	9
1.2.1 Graphe complet	9
1.2.2 Graphe biparti et graphe biparti complet	9
1.2.3 Arbre et forêt	10
1.2.4 Graphe planaire et graphe planaire extérieur	10
1.2.5 Graphe k -dégénéré	11
1.2.6 Graphe représentatif des arêtes	12
1.2.7 Graphe p -puissance	12
1.2.8 Graphe orienté	12
1.3 Coloration de graphes	13
1.3.1 Coloration propre des sommets	13
1.3.2 Coloration propre des arêtes	13
1.3.3 Coloration par listes	14
1.4 Méthode de déchargement	15
1.4.1 Description de la méthode de déchargement	15
1.4.2 Exemples d'applications	16
1.4.3 Méthode de déchargement appliquée aux problèmes de coloration	20

2	Coloration d'incidences	22
2.1	Introduction	23
2.2	(k, ℓ) -coloration d'incidences	25
2.3	Coloration d'incidences et coloration forte d'arêtes	26
2.4	Coloration d'incidences et étoile-arboricité dirigée	27
2.5	Coloration d'incidences et coloration à distance 2	28
2.6	Graphes planaires sans cycles de longueurs données	29
2.6.1	Preuve du Théorème 2.16.1	30
2.6.2	Preuve du Théorème 2.16.2	41
2.7	Graphes de degré moyen maximum borné	45
2.7.1	Preuve du Théorème 2.35.1	50
2.7.2	Preuve du Théorème 2.35.2	56
2.7.3	Preuve du Théorème 2.35.3	59
2.7.4	Preuve du Théorème 2.35.4	63
3	Coloration étoilée d'arêtes	67
3.1	Introduction	68
3.2	Coloration acyclique d'arêtes	70
3.3	Coloration étoilée d'arêtes	70
3.4	Coloration étoilée d'arêtes par listes des graphes subcubiques	74
3.4.1	Coloration étoilée d'arêtes par liste	74
3.4.2	Preuve du Théorème 3.18	75
3.5	Coloration étoilée d'arêtes par listes des graphes subcubiques peu denses	79
3.5.1	Preuve du Théorème 3.23.1	81
3.5.2	Preuve du Théorème 3.23.2	88
3.6	Coloration étoilée d'arêtes par liste des graphes k -dégénérés	91
4	b-coloration des sommets	95
4.1	Introduction	96
4.2	Quelques résultats connus sur le nombre b -chromatique	97
4.3	b -continuité et b -monotonie de graphes	98
4.4	Le nombre b -chromatique du produit cartésien de graphes	100
4.5	La b -coloration du graphe $K_n \square K_p$	101
4.6	Nombre b -chromatique du graphe $K_n \square K_{1,p}$	103
4.7	Nombre b -chromatique du graphe $K_n \square K_{2,p}$	105
4.8	Nombre b -chromatique du graphe $K_n \square K_{p,p}$	114
	Conclusion et perspectives	120

Table des figures

1	Préliminaires	4
1.1	Exemple de graphe G	5
1.2	Exemples de sous graphes de G	6
1.3	Graphe de Petersen	7
1.4	Exemple de graphes complets	9
1.5	Exemples de Graphes bipartis	10
1.6	Exemple d'arbre	10
1.7	Le graphe $K_{2,3}$ est un graphe planaire	10
1.8	Exemple de graphe planaire extérieur	11
1.9	Exemple de graphe représentatif des arêtes	12
1.10	Exemple de carré d'un graphe	12
1.11	$ch(K_{3,3}) \geq 3 > \chi(K_{3,3})$	14
2	Coloration d'incidences	22
2.1	L'incidence (u, e) est adjacente à l'incidence (v, f)	23
2.2	$\chi_i(G) = 4$	23
2.3	$(5, 2)$ -coloration d'incidences	26
2.4	$\chi_i(G) = \chi'_s(G')$	27
2.5	$\chi_i(G) = dst(D)$	28
2.6	$\chi_i(G) = \chi(G^2)$	28
2.7	Configurations réductibles du Lemme 2.21	31
2.8	$ F_H^\phi(u, uv) = 9$	33
2.9	Configurations réductibles du Lemme 2.26	42
2.10	$ F_H^{\phi'}(u, uv) \leq 7$	43
2.11	Configurations réductibles du Lemme 2.37	50
2.12	Configurations réductibles du Lemme 2.40	57
2.13	$(\Delta - 1, \Delta, \Delta)$ -sommet	58

2.14	Configurations réductibles du Lemme 2.42	60
2.15	Configurations réductibles du Lemme 2.44	64
3	Coloration étoilée d'arêtes	67
3.1	Exemples de graphes qui ne sont pas acycliquement 4-colorable.	68
3.2	$\chi'_s(G) = 4\Delta(G) - 4$	72
3.3	Exemples de graphes subcubiques qui ne sont pas arêtes étoilées 5-colorable.	74
3.4	Le graphe G_1	77
3.5	Le graphe de Petersen	78
3.6	Exemples de Graphes subcubiques avec $\text{mad}(G) = 2$ et $ch'_{st}(G) \leq 5$	80
3.7	Configuration réductible du Lemme 3.29 dans H	86
3.8	Configuration réductible du Lemme 3.32	90
3.9	Configuration réductible du Lemme 3.33 dans H	90
3.10	Illustration de la structure locale d'un graphe 2-dégénéré	92
4	b-colorations des sommets	95
4.1	b -coloration de G utilisant 4 couleurs	97
4.2	Le graphe Q_3 n'admet pas de b -coloration utilisant 3 couleurs	99
4.3	Exemple de graphe qui n'est pas b -monotone	99
4.4	b -coloration du graphe $K_n \square K_{2,p}$ avec $n + 2$ couleurs.	107
4.5	$\varphi(K_{10} \square K_{2,8}) = 13$	111
4.6	$\varphi(K_{11} \square K_{2,7}) = 14$	113
4.7	b -coloration $K_{10} \square K_{2,4}$ utilisant 11 couleurs.	114

Introduction

La théorie des graphes et la combinatoire constituent deux branches importantes des mathématiques discrètes. Elles représentent l'un des instruments les plus courants et les plus efficaces pour résoudre des problèmes que l'on rencontre en sciences appliquées, en particulier l'informatique fondamentale, l'algorithmique et la recherche opérationnelle.

De manière générale, un graphe est un dessin géométrique défini par la donnée d'un ensemble de points, appelés *sommets*, reliés entre eux par un ensemble de lignes ou de flèches, appelées *arêtes* ou *arcs*. Les graphes peuvent être utilisés pour modéliser plusieurs situations courantes, leurs applications sont par conséquent aussi nombreuses que diverses. Nous pouvons citer à titre d'exemples : la chimie (modélisation de structures), la biologie (génomique), les sciences sociales (modélisation des relations entre les populations) ou les applications industrielles (problème du voyageur de commerce).

L'un des domaines le plus étudié en théorie des graphes est celui de *la coloration des graphes*. En effet, de nombreux problèmes réels tels que les problèmes d'ordonnements ou encore d'allocations de fréquences se traduisent comme une partition d'ensemble d'objets (sommets, arêtes, faces, ...) en plusieurs classes suivant certaines contraintes. La contrainte la plus courante est celle de la *propreté*, qui consiste à affecter à deux éléments voisins des couleurs différentes. Il existe une grande variété de problèmes de colorations où il est question de rechercher des structures optimales particulières telles que le nombre minimum de couleurs d'une coloration propre des sommets d'un graphe. Ce dernier problème figure, à ce jour, parmi les paramètres fondamentaux dont l'origine remonte au problème des quatre couleurs, posé par Francis Guthrie en 1852 :

"Est-il possible de colorer toute carte géographique avec au plus quatre couleurs de sorte que deux régions qui ont une frontière en commun aient des couleurs différentes ?"

En 1977, Appel, Haken et Kock [9, 10] ont apporté la première preuve à ce problème, devenu par la suite *Théorème des quatre couleurs*. Ainsi, ils ont prouvé, à l'aide d'un ordinateur, que tout graphe planaire admet une coloration propre de ses sommets en au plus quatre couleurs. En 1996, Robertson, Sanders, Seymour et Thomas [116] ont proposé une autre preuve plus simple et plus courte, mais toujours assistée par ordinateur. Bien que le problème des quatre couleurs ait été résolu, il continue de susciter l'intérêt de nombreux chercheurs qui

tentent d'en obtenir une preuve mathématique sans l'aide d'ordinateurs.

Dans ce présent mémoire, nous nous intéresserons à l'étude de la coloration d'incidences, la coloration étoilée d'arêtes et la b -coloration des sommets de graphes. Il comportera quatre chapitres :

Chapitre 1 : Préliminaires

Ce chapitre sera consacré à la présentation des concepts fondamentaux, à l'énoncé des définitions ainsi qu'aux notations utilisées au cours de cette thèse.

Chapitre 2 : Coloration d'incidences

Une incidence d'un graphe G est un couple (u, e) où u est un sommet de G et e une arête de G incidente au sommet u . Deux incidences (u, e) et (v, f) sont adjacentes si elles sont distinctes et que $u = v$ ou $e = f$ ou $uv = e$ ou $uv = f$. Une k -coloration d'incidences d'un graphe G est une application de l'ensemble des incidences de G dans l'ensemble C de k couleurs telles que deux incidences adjacentes aient des couleurs différentes. Le *nombre chromatique d'incidences*, noté $\chi_i(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration d'incidences.

Le nombre chromatique d'incidences a été introduit par Brualdi et Massey en 1993 [28]. Ces auteurs ont conjecturé que pour tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$, son nombre chromatique d'incidences est d'au plus $\Delta(G) + 2$. En 1997, Guiduli [70] a montré que cette conjecture est fautive, même si plusieurs classes de graphes vérifient cette relation.

Après avoir donné une définition complète de cette coloration et son intérêt pratique, nous nous intéresserons dans ce chapitre au problème de la coloration d'incidences des graphes planaires et des graphes de densité bornée.

Chapitre 3 : Coloration étoilée d'arêtes

Une coloration étoilée d'arêtes d'un graphe G est une coloration propre d'arêtes tel qu'il n'existe pas de chaînes ou de cycles de longueur 4 bicolorés dans G . L'*indice chromatique étoilé* de G , noté $\chi'_{st}(G)$, est le minimum de couleurs nécessaires pour avoir une telle coloration dans G .

La notion de coloration étoilée d'arêtes a été étudiée pour la première fois par Liu et Deng [101] en 2008. Dvořák, Mohar et Šámal [46] montrent que tout graphe subcubique est 7-arêtes étoilées colorable. Ils conjecturent que 6 couleurs peuvent suffire.

Un graphe G est dit k -listes-arêtes étoilées colorable, si pour toute assignation de listes L telle que pour toute arête e , $|L(e)| \geq k$, il existe une coloration étoilée d'arêtes G telle que la couleur assignée à e appartient à sa liste. L'*indice chromatique étoilé par listes* d'un graphe G , noté $ch'_{st}(G)$, est défini comme le plus petit entier k pour lequel G est k -liste-arêtes étoilées

colorable.

Tout au long de ce chapitre nous nous intéresserons à la majoration de l'indice chromatique étoilé par listes des graphes subcubiques et des graphes k -dégénérés.

Chapitre 4 : b -Coloration des sommets

Une b -coloration d'un graphe G est une coloration propre des sommets de G utilisant k couleurs de telle sorte que pour chaque couleur i , $1 \leq i \leq k$, il existe un sommet de couleur i pour lequel toutes les autres couleurs apparaissent dans son voisinage. Un tel sommet est appelé *sommet b -dominant*. Le *nombre b -chromatique*, noté $\varphi(G)$, est défini comme étant le nombre maximum de couleurs utilisables parmi toutes les b -colorations d'un graphe G .

Le nombre b -chromatique a été introduit par Irving et Manlove [84] en 1999. Ces auteurs ont montré que la détermination de $\varphi(G)$ est un problème NP-complet qui peut être polynomial pour certains cas comme par exemple les arbres. Nous nous intéresserons dans ce chapitre principalement aux problèmes de la b -coloration du produit cartésien de graphes. Nous déterminerons la valeur exacte à ce paramètre pour les graphes $K_n \square K_{1,p}$, $K_n \square K_{2,p}$ et $K_n \square K_{p,p}$ et nous étudierons la b -continuité des b -colorations de ces graphes.

Nous terminerons ce mémoire par une conclusion générale et nous dégagerons quelques perspectives pour la suite des travaux.

Chapitre 1

Préliminaires

Sommaire

1.1 Définitions générales	5
1.1.1 Graphe	5
1.1.2 Sous-graphe	5
1.1.3 Degré d'un sommet	6
1.1.4 Stabilité et couplage	7
1.1.5 Chaîne, cycle et connexité	8
1.1.6 Contraction et mineur	8
1.2 Quelques classes de graphes	9
1.2.1 Graphe complet	9
1.2.2 Graphe biparti et graphe biparti complet	9
1.2.3 Arbre et forêt	10
1.2.4 Graphe planaire et graphe planaire extérieur	10
1.2.5 Graphe k -dégénéré	11
1.2.6 Graphe représentatif des arêtes	12
1.2.7 Graphe p -puissance	12
1.2.8 Graphe orienté	12
1.3 Coloration de graphes	13
1.3.1 Coloration propre des sommets	13
1.3.2 Coloration propre des arêtes	13
1.3.3 Coloration par listes	14
1.4 Méthode de déchargement	15
1.4.1 Description de la méthode de déchargement	15
1.4.2 Exemples d'applications	16
1.4.3 Méthode de déchargement appliquée aux problèmes de coloration	20

Dans ce chapitre, nous introduisons les différentes notions et terminologie adoptées dans l'ensemble de ce document. Pour plus d'informations sur ces notions, nous renvoyons le lecteur vers les ouvrages classiques de la théorie des graphes [13, 21, 43].

1.1 Définitions générales

1.1.1 Graphe

Un graphe G est défini par une paire $(V(G), E(G))$ (ou simplement (V, E) s'il n'y a pas d'ambiguïté sur G), où $V(G)$ est un ensemble non vide dont les éléments sont appelés *sommets* et $E(G)$ est un ensemble de paires non-ordonnées de sommets dont les éléments sont appelés *arêtes*. Le nombre de sommets (respectivement, arêtes) de G est appelé *ordre* (respectivement, *taille*) du graphe. On note $m = |E(G)|$ et $n = |V(G)|$. Une arête reliant deux sommets u et v est notée uv au lieu de $\{u, v\}$.

Soit $e = uv$ une arête d'un graphe. Les sommets u et v sont appelés *extrémités* de e , l'arête e est dite *incidente* à u et v . Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues. Un ensemble d'arêtes ayant les mêmes extrémités est appelé une *multi-arête* (ou une *arête multiple*). Le graphe G , donné en exemple dans la Figure 1.1, est d'ordre 3. Il a pour ensemble de sommets $V(G) = \{u, v, w\}$, pour ensemble d'arêtes $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ et possède une boucle e_5 en u et une arête multiple vw .

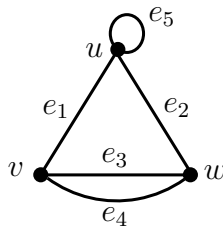


FIGURE 1.1 – Exemple de graphe G

Un graphe G est dit *simple* s'il est sans boucle et sans arête multiple. Il est dit *fini* si $V(G)$ et $E(G)$ sont des ensembles finis. Dans ce qui suit, nous considérerons uniquement des graphes simples et finis.

Deux sommets u et v d'un graphe sont dit *adjacents* (ou *voisins*) dans le graphe G si uv est une arête de G . Deux arêtes e et f sont dites *adjacentes* (ou *voisines*) si elles partagent une extrémité. L'ensemble des sommets adjacents à un sommet u est appelé le voisinage de u et est noté $N_G(u)$.

1.1.2 Sous-graphe

Un graphe $G' = (V(G'), E(G'))$ est un *sous-graphe* du graphe $G = (V(G), E(G))$ si $V(G') \subseteq V(G)$ et $E(G') \subseteq E(G)$ et si pour toute arête $e \in E(G')$, les extrémités de e sont dans $V(G')$. On note alors $G' \subseteq G$. De la même manière, on peut définir le graphe induit

par un sous-ensemble de sommets. Étant donné $S \subseteq V(G)$, on appelle *sous graphe induit* (ou *sous graphe engendré*) par S et on note $G[S]$, le graphe $G' = (S(G), E(G'))$ où $E(G')$ est l'ensemble des arêtes de $E(G)$ ayant leurs deux extrémités dans S .

Un graphe $G' = (V(G'), E(G'))$ est un *graphe partiel* du graphe $G = (V(G), E(G))$ si $V(G') = V(G)$ et $E(G') \subseteq E(G)$. Un graphe partiel d'un sous-graphe est dit *sous-graphe partiel* de G . Des exemples de sous graphes d'un graphe G sont illustrés dans la Figure 1.2.

Le sous graphe obtenu à partir de G en supprimant un sommet v (respectivement, une arête e) est noté $G \setminus \{v\}$ (respectivement, $G \setminus \{e\}$).

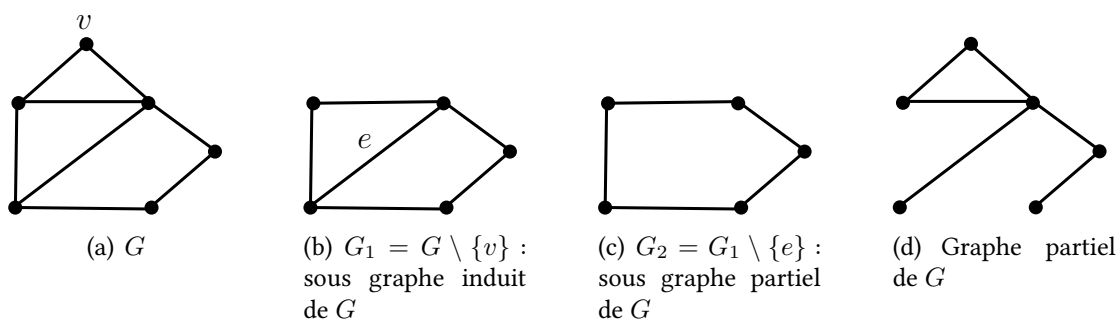


FIGURE 1.2 – Exemples de sous graphes de G

1.1.3 Degré d'un sommet

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe et v un sommet de ce graphe. Le *degré* de v , noté $d_G(v)$ (ou $d(v)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté), est le nombre d'arêtes incidentes à v . Un sommet de degré k (respectivement, au plus k , au moins k) est appelé un k -sommet (respectivement, un k^- -sommet, un k^+ -sommet).

Lemme 1.1 (Lemme des poignées de mains). *Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe, alors*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

En effet, chaque arête uv de $E(G)$ est comptée deux fois, une fois pour $d(v)$ et une seconde fois pour $d(u)$.

Lorsque $d(v) = 0$, on dit que le sommet v est *isolé*. Si $d(v) = 1$, il est dit *pendant*. Un graphe est dit *d -régulier*, si tous ses sommets sont de degré d . Par exemple, le graphe de Petersen représenté dans la Figure 1.3 est un graphe 3-régulier.

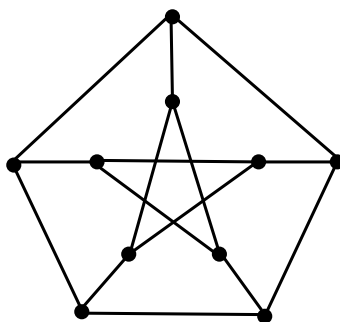


FIGURE 1.3 – Graphe de Petersen

Le *degré minimum* de G , noté $\delta(G)$, est le minimum des degrés des sommets de G , autrement dit $\delta(G) = \min\{d(v); v \in V(G)\}$. Le *degré maximum* de G , noté $\Delta(G)$, est le maximum des degrés des sommets de G , autrement dit $\Delta(G) = \max\{d(v); v \in V(G)\}$.

Le *degré moyen* d'un graphe G , noté $ad(G)$, est égal à la moyenne des degrés de G , d'après le Lemme 1.1, on a $ad(G) = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|}$.

Le *degré moyen maximum* de G , noté $mad(G)$, est le maximum parmi les degrés moyens de tous les sous-graphes de G , c'est-à-dire

$$mad(G) = \max \left\{ \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}, H \subseteq G \right\}.$$

où $V(H)$ et $E(H)$ sont les ensembles de sommets et d'arêtes de H , respectivement.

En 1995, Jensen et Toft dans [88] proposent un algorithme qui permet de calculer le degré moyen maximum d'un graphe en un temps polynomial.

1.1.4 Stabilité et couplage

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe. Un *stable* (ou *indépendant*) d'un graphe G est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents. La *stabilité* (ou *le nombre de stabilité*) du graphe G , notée $\alpha(G)$, est le cardinal d'un plus grand stable dans G .

Une *clique* d'un graphe G est un sous ensemble de sommets $C \subseteq V$ tel que deux sommets quelconques sont adjacents. La *taille maximum d'une clique* de G , notée $\omega(G)$, est la taille de la plus grande clique de G .

Un *couplage* d'un graphe G est un sous ensemble d'arêtes $M \subseteq E$ deux à deux non adjacents. Un couplage M est dit *parfait* si tout sommet de G est une extrémité d'une arête de M .

1.1.5 Chaîne, cycle et connexité

Une *chaîne* dans un graphe G , est une séquence $P = v_0, v_1, \dots, v_k$ de sommets distincts, telle que deux sommets consécutifs v_i et v_{i+1} sont reliés par une arête. Les sommets v_0 et v_k sont les *extrémités* de P et v_1, \dots, v_{k-1} sont ses *sommets internes*. La *longueur* d'une chaîne est égale à son nombre d'arêtes. Une chaîne est dite *simple* si chaque arête apparaît au plus une fois.

Une chaîne simple C est appelée *cycle* si les extrémités de C sont confondues ($v_0 = v_k$). Une arête reliant deux sommets non adjacents dans un cycle est appelée une *corde*. La *maille* d'un graphe G , notée $g(G)$, est la longueur minimale d'un cycle contenu dans G . La maille peut être infinie si le graphe considéré est sans cycle.

Une chaîne (respectivement, un cycle) qui passe par toutes les arêtes, une et une seule fois, est appelée *chaîne eulérienne* (respectivement, *cycle eulérien*). Une chaîne (respectivement, un cycle) qui passe par tous les sommets, une et une seule fois, est appelée *chaîne hamiltonienne* (respectivement, *cycle hamiltonien*).

On appelle *distance* entre deux sommets u et v dans G , notée $d_G(u, v)$ (ou $d(u, v)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté), la longueur de la plus courte chaîne joignant ces deux sommets. L'*excentricité* d'un sommet u , notée $e(u)$, est la distance maximum de u à tous les sommets v de G ($e(u) = \max\{d(u, v), v \text{ appartenant à } V(G)\}$). Le *diamètre* de G , noté $diam(G)$, est l'excentricité maximum de G ($diam(G) = \max\{e(u), u \text{ appartenant à } V(G)\}$).

Un graphe $G = (V(G), E(G))$ est dit *connexe* si pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$, il existe une chaîne reliant u à v .

Notons que la relation de connexité : $u \mathcal{R} v$ ssi $\{u = v \text{ ou il existe une chaîne reliant } u \text{ et } v\}$ est une relation d'équivalence. Chaque classe d'équivalence de cette relation, appelée *composante connexe*, est un sous ensemble $S \subset V(G)$ tel que tout sous-graphe induit $G[S]$ est connexe. Autrement dit, une composante connexe d'un graphe G est un sous graphe connexe maximal. Ainsi, lorsque G contient au moins deux composantes connexes, il est dit non connexe.

Un *point d'articulation* d'un graphe G est un sommet v de G tel que $G \setminus \{v\}$ augmente le nombre de composantes connexes. De la même manière, un *isthme* de G est une arête e telle que $G \setminus \{e\}$ a plus de composantes connexes que G .

Un graphe G est dit *k-connexe*, si le nombre minimum de sommets dont la suppression rend G non connexe ou le réduit à un sommet unique est au moins k .

1.1.6 Contraction et mineur

La *contraction* d'une arête $e = uv$ d'un graphe G est l'opération qui consiste à transformer G en un graphe G/e , en remplaçant les deux sommets u et v par un unique sommet w et à relier ce dernier à l'ensemble des voisins de u et de v . En d'autres termes, le graphe G/e est

le graphe dont l'ensemble des sommets est $V(G/e) = (V(G) \setminus \{u, v\}) \cup \{w\}$ et l'ensemble des arêtes est $E(G/e) = \{xy \in E(G) \mid xy \in V(G) \setminus \{u, v\}\} \cup \{wx \mid ux \in E(G) \setminus \{e\} \text{ ou } vx \in E(G) \setminus \{e\}\}$.

Un graphe H est appelé *un mineur* d'un graphe G , noté $H \preceq G$, s'il peut être obtenu à partir de G par une série de suppressions de sommets, de suppressions d'arêtes et de contractions d'arêtes. Notons que, si I est un mineur de H et H un mineur de G , alors I est un mineur de G . Un graphe G est *sans mineur* H , s'il ne contient pas H comme mineur.

1.2 Quelques classes de graphes

Dans cette partie, nous nous intéressons à quelques classes de graphes spécifiques qui nous seront utiles par la suite.

1.2.1 Graphe complet

Un graphe $G = (V(G), E(G))$ est dit *complet* si pour deux sommets quelconques u et v de $V(G)$, $uv \in E(G)$. Un graphe complet d'ordre n , noté K_n , est appelé une *n-clique*. Les graphes complets K_4 et K_5 sont représentés dans la Figure 1.4.

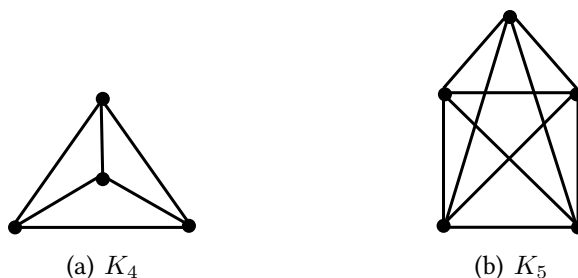


FIGURE 1.4 – Exemple de graphes complets

1.2.2 Graphe biparti et graphe biparti complet

Un graphe $G = (V(G), E(G))$ est dit *biparti* s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles V_1 et V_2 (dit *stable*) telle que chaque arête possède une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2 . Un exemple de graphes bipartis est donné dans la Figure 1.5.

Un graphe biparti est dit *biparti complet* si tout sommet de V_1 est relié à tout sommet de V_2 . Il est noté dans ce cas K_{n_1, n_2} où $n_1 = |V_1|$ et $n_2 = |V_2|$. Le graphe donné dans la Figure 1.5(b) est le graphe biparti complet $K_{2,3}$.

Un graphe biparti complet dont une partition contient un seul sommet est appelé *étoile*. Le graphe donné dans la Figure 1.5(c) est l'étoile $K_{1,3}$ appelée *griffe*.

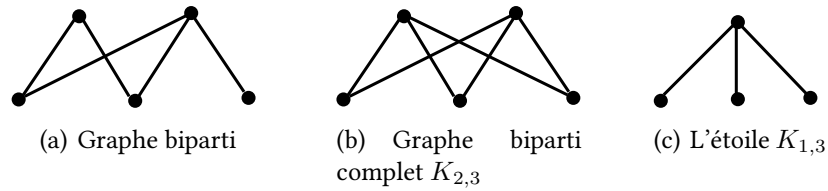


FIGURE 1.5 – Exemples de Graphes bipartis

1.2.3 Arbre et forêt

Une *forêt* est un graphe ne contenant aucun cycle (acyclique). Chaque composante connexe d'une forêt est un arbre. On note F la classe des forêts et T la classe des arbres, on observe que $T \subset F$. Les sommets d'un arbre sont appelés *nœuds*. Les sommets de degré 1 sont appelés *feuilles*. Un exemple d'arbre est donné dans la Figure 1.6.

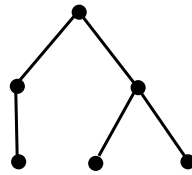
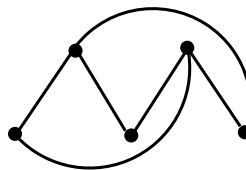


FIGURE 1.6 – Exemple d'arbre

1.2.4 Graphe planaire et graphe planaire extérieur

Un graphe est dit *planaire* s'il existe au moins une façon de le représenter dans un plan, sans que deux arêtes ne se croisent. Par exemple, le graphe biparti complet $K_{2,3}$ représenté dans la Figure 1.7 est planaire.

FIGURE 1.7 – Le graphe $K_{2,3}$ est un graphe planaire

Une face f est une région du plan délimitée par un ensemble d'arêtes de G , et qui n'en contient aucune. L'ensemble des faces de G est noté $F(G)$. Pour chaque face f de $F(G)$,

la *frontière* de f est l'ensemble des sommets et des arêtes qui forment sa délimitation. Les sommets et les arêtes sur la frontière de f sont dits incidents à f , tout comme f leur est incidente. Deux faces différentes incidentes à la même arête sont dites *adjacentes*.

Le *degré* (ou le *rang* ou la *taille*) d'une face f , noté $r(f)$, est le nombre d'arêtes de G qui bordent f . Une et une seule des faces d'un graphe planaire a une surface d'aire infinie, elle est appelée *face infinie* (ou *face extérieure*) de G . Une face de degré k (respectivement, au plus k , au moins k) est appelée une k -face (respectivement, k^- -face, k^+ -face).

Lemme 1.2. Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe planaire, alors
$$\sum_{f \in F(G)} r(f) = 2|E(G)|.$$

En 1752, Euler propose une formule établissant une relation entre le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un graphe planaire.

Théorème 1.3. [Formule d'Euler] Soit G un graphe planaire connexe d'ordre n , de taille m et ayant f faces. Alors,

$$n - m + f = 2$$

Subdiviser une arête uv dans un graphe revient à remplacer uv par une chaîne uvw en ajoutant un sommet w . On dit qu'un graphe H est une *subdivision* d'un graphe G s'il peut être obtenu à partir de G en subdivisant des arêtes de G .

Kuratowski [100] a établi la caractérisation suivante des graphes planaires :

Théorème 1.4. Un graphe fini est planaire si et seulement s'il ne contient pas de subdivision de K_5 ou de $K_{3,3}$.

Un graphe *planaire extérieur* est un graphe ayant une représentation planaire tel que tous les sommets soient sur la frontière de la face extérieure. Une forêt est un graphe planaire extérieur, un autre exemple de graphe planaire extérieur est donné dans la Figure 1.8.

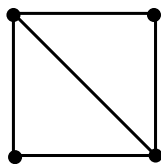


FIGURE 1.8 – Exemple de graphe planaire extérieur

1.2.5 Graphe k -dégénéré

Un graphe G est k -dégénéré si tout sous-graphe H de G contient un sommet de degré au plus k . Par exemple, une forêt est 1-dégénérée. De même, nous verrons plus tard, en utilisant la formule d'Euler, que tout graphe planaire est 5-dégénéré.

1.2.6 Graphe représentatif des arêtes

Le graphe *représentatif des arêtes*⁽¹⁾ d'un graphe G , noté $L(G)$, est le graphe dont l'ensemble des sommets représente l'ensemble des arêtes de G ($V(L(G)) = E(G)$) et deux sommets de $V(L(G))$ sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes dans $E(G)$ le sont aussi. La Figure 1.9 montre un exemple d'un graphe représentatif des arêtes.

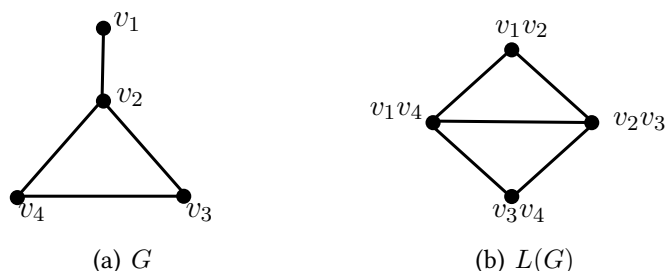


FIGURE 1.9 – Exemple de graphe représentatif des arêtes

La notion de graphe représentatif des arêtes a largement été étudiée dans la littérature, pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à l'article de Hemminger et Beineke [75].

1.2.7 Graphe p -puissance

Un graphe p -puissance, noté G^p , de G est le graphe obtenu à partir de G en reliant par une arête toute paire de sommets à distance p ou moins, avec $p \geq 1$.

Le graphe 2-puissance de G , noté G^2 , est appelé *le carré* de G (Voir Figure 1.10).



FIGURE 1.10 – Exemple de carré d'un graphe

1.2.8 Graphe orienté

Un graphe orienté D est défini par une paire $(V(D), A(D))$, où $V(D)$ est un ensemble non vide fini de sommets et $A(D)$ est un ensemble fini de paires ordonnées de sommets dont les éléments sont appelés *arcs*. On note \vec{uv} le couple de sommets (u, v) . Un graphe orienté est dit *symétrique* si pour tout arc \vec{uv} , le graphe contient également l'arc \vec{vu} . À l'inverse, un

(1). Line graph en anglais

graphe orienté est *antisymétrique* si pour tout arc \vec{uv} existant dans le graphe, l'arc \vec{vu} n'existe pas. Pour éviter toute confusion, lorsque le graphe considéré ne sera pas nécessairement antisymétrique, nous parlerons de *digraphe*.

On note $d_D^+(v)$ (respectivement, $d_D^-(v)$) le degré sortant (respectivement, entrant) du sommet v , c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant v comme extrémité initiale (respectivement, finale) dans D . Un sommet v tel que $d_D^+(v) = 0$ est appelé *sommet puits* (ou simplement *puits*). Inversement, un sommet v tel que $d_D^-(v) = 0$ est appelé *sommet source* (ou simplement *source*).

1.3 Coloration de graphes

1.3.1 Coloration propre des sommets

Étant donné un graphe $G = (V(G), E(G))$ et un entier k , une *k-coloration propre des sommets* de G est une application $\phi : V(G) = \{v_1, \dots, v_n\} \rightarrow C = \{1, 2, \dots, k\}$ telle que deux sommets adjacents quelconques ne reçoivent pas la même couleur. Autrement dit, pour toute arête uv , $\phi(u) \neq \phi(v)$. Notons que pour toute *k-coloration propre* de G , chaque ensemble de sommets correspondant à une couleur donnée est un stable. Ainsi, une *k-coloration propre* de G n'est autre qu'une partition de $V(G)$ en k stables, appelés *classes de couleurs*. Le graphe est dit *k-colorable* s'il admet une *k-coloration propre*.

Le plus petit entier k pour lequel G est *k-colorable* est appelé *nombre chromatique* de G et est noté $\chi(G)$.

Une borne supérieure classique du nombre chromatique est celle donnée par Brooks [27].

Théorème 1.5 (Brooks [27]). *Pour tout graphe connexe G de degré maximum $\Delta(G)$, si G n'est ni un cycle d'ordre impair, ni un graphe complet, alors $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Il est bien connu que la taille maximum d'une clique est une borne inférieure du nombre chromatique. En effet, si G contient une clique de taille k , alors il faut au moins k couleurs pour le colorer. Donc, tout graphe G vérifie $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Le nombre chromatique a été largement étudié et de nombreux résultats le concernant peuvent être trouvés dans la littérature. Pour plus de résultats sur les bornes de nombre chromatique, nous renvoyons le lecteur aux références suivantes [9, 10, 35]

1.3.2 Coloration propre des arêtes

Étant donné un graphe $G = (V(G), E(G))$ et un entier k , une *k-coloration propre des arêtes* de G est une application $\phi : E(G) \rightarrow C = \{1, 2, \dots, k\}$ telle que deux arêtes adjacentes ne portent pas la même couleur. Autrement dit, pour tout $u, v, w \in V(G)$ tel que $uv, vw \in E(G)$, $\phi(uv) \neq \phi(vw)$.

Le plus petit entier k pour lequel G admet une k -coloration propre d'arêtes est appelé l'*indice chromatique* de G et est noté $\chi'(G)$.

Une coloration des arêtes d'un graphe G correspond à la coloration propre des sommets du graphe représentatif des arêtes $L(G)$ de G . Nous avons donc $\chi'(G) = \chi(L(G))$.

Le résultat le plus important concernant ce paramètre est dû à Vizing en 1964 :

Théorème 1.6. [123] *Pour tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$ on a :*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Les graphes sont donc classifiés suivant leur indice chromatique : la *classe 1* contient les graphes tels que $\chi'(G) = \Delta(G)$ et la *classe 2* contient ceux qui vérifient $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Les graphes bipartis (théorème de König [91]) et les graphes planaires de degré maximum au moins 8 (Vizing [124]) font partie de la classe 1.

1.3.3 Coloration par listes

La *coloration par listes* des sommets d'un graphe est une version plus générale de la coloration propre des sommets : on affecte toujours une couleur aux sommets du graphe, mais celle-ci est choisie dans une liste de couleurs associée au sommet. La notion de la coloration par liste a été introduite par Vizing [125] en 1976 et Erdős, Rubin et Taylor [56] en 1979.

Dans un graphe $G = (V(G), E(G))$, une *k -assignation de listes* est une fonction L qui associe à chaque sommet $v \in V(G)$ une liste $L(v)$ de k entiers.

Soit L une k -assignation du graphe G . On dit que le graphe G est *L -liste colorable* s'il existe une coloration propre des sommets ϕ de G telle que $\phi(v) \in L(v)$ pour tout $v \in V(G)$. Si G est L -liste colorable pour toute assignation de listes L avec $|L(v)| \geq k$ pour tout $v \in V(G)$, alors G est dit *k -liste-colorable* (ou *k -choisissable*). Le plus petit entier k tel que G est k -liste-colorable est appelé *nombre chromatique par listes* de G et est noté $ch(G)$.

Il est clair qu'une k -coloration propre revient à choisir, pour tout sommet $v \in V(G)$, $L(v) = \{1, 2, \dots, k\}$. Donc, $ch(G) \geq \chi(G)$ mais $ch(G)$ peut être arbitrairement plus grand que $\chi(G)$. Par exemple, le graphe $K_{3,3}$ est 2-colorable (c'est un graphe biparti), mais le choix des listes indiquées dans la Figure 1.11 montre que $ch(K_{3,3}) \geq 3 > \chi(K_{3,3})$.

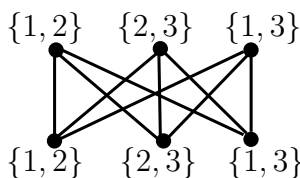


FIGURE 1.11 – $ch(K_{3,3}) \geq 3 > \chi(K_{3,3})$

De la même manière, nous pouvons définir la notion de coloration par listes des arêtes. On notera $ch'(G)$ l'*indice chromatique par listes*.

De nombreux chercheurs tels que Vizing, Albertson, Collins, Tucker ou encore Gupta ont proposé, en 1985, la conjecture de la coloration des arêtes par listes suivante :

Conjecture 1.7. *Tout graphe simple G vérifie $ch'(G) = \chi'(G)$.*

Cette conjecture a été prouvée pour quelques classes de graphes tels que les graphes bipartis [66], les graphes complets [71] et les graphes planaires k -réguliers d'indice chromatique k [53]. Un survey concernant cette conjecture est disponible dans [6].

1.4 Méthode de déchargement

Une des techniques de démonstration qui intervient et qui joue un rôle décisif dans les preuves du théorème des quatre couleurs est la *méthode de déchargement*. Cette dernière, est apparue pour la première fois en 1904, lorsque Wernicke [130] a prouvé un lemme structurel sur les graphes planaires. La méthode de déchargement permet de résoudre de nombreux problèmes en théorie des graphes. Elle est le plus souvent utilisée pour prouver des assertions structurelles, et intervient plus particulièrement, dans les problèmes de coloration des graphes planaires et des graphes de densité faible (les graphes de degré moyen maximum borné).

Dans ce qui suit, nous expliquons les principes de la méthode de déchargement, puis nous l'illustrons par quelques exemples. Pour plus d'exemples d'applications, nous renvoyons le lecteur aux références [38, 115, 74].

1.4.1 Description de la méthode de déchargement

Supposons que l'on veuille montrer que la classe de graphe \mathcal{G} satisfait une propriété P . La méthode de déchargement s'effectue selon les 5 étapes suivantes :

Étape 1 : On suppose que $G \in \mathcal{G}$ est un graphe qui ne satisfait pas la propriété P . Soit S un ensemble associé aux éléments de ce graphe (cela peut être les sommets, les arêtes ou les faces), qui vérifie certaines propriétés.

Étape 2 : On assigne à chaque élément a de S un poids initial $\omega(a)$.

Étape 3 : On définit des règles de déchargement appropriées, puis on effectue le processus de déchargement, autour de S , qui laisse le poids total constant et inchangé. À la fin de cette étape, on obtient une nouvelle fonction ω^* pour tout élément a de S .

Étape 4 : On calcule le nouveau poids $\omega^*(a)$ pour tout $a \in S$.

Étape 5 : On montre que la somme totale des nouveaux poids est différente de la somme totale des poids initiaux : $\sum_{a \in S} \omega^*(a) \neq \sum_{a \in S} \omega(a)$. Cette contradiction montre que le contre-

exemple G ne peut pas exister. Par conséquent, tout graphe dans \mathcal{G} possède la propriété P .

Pour résumer, la méthode de déchargement repose sur des arguments de comptage plus ou moins locaux qui permettent d'obtenir des informations sur le graphe dans sa globalité. L'idée est d'associer à chaque élément du graphe un poids, puis de définir, via des règles de déchargements, comment ces poids vont être échangés entre les différents éléments de notre graphe, de telle façon que la somme totale des poids ne soit pas modifiée.

1.4.2 Exemples d'applications

Afin d'illustrer la méthode de déchargement, nous proposons quelques exemples de propriétés des graphes planaires, pour lesquels cette méthode peut être utilisée.

1. Dans l'Exemple 1, nous prouvons un corollaire concernant la relation entre la maille d'un graphe planaire G et son degré moyen maximum $\text{mad}(G)$.
2. Nous démontrons dans l'Exemple 2, que tout graphe planaire est 5-dégénéré.
3. Enfin, l'Exemple 3 concerne la preuve du lemme structurel de Wernicke.

1.4.2.1 Exemple 1 : Lien entre le degré moyen maximum et la maille d'un graphe planaire

Proposition 1.8. *Si G est un graphe planaire de maille g et de degré moyen maximum $\text{mad}(G)$, alors,*

$$\text{mad}(G) < \frac{2g}{g-2}$$

Démonstration. Soit G un graphe planaire de maille g . Étant donné que tout graphe sans cycle est de maille infinie et a un degré moyen inférieur à 2, alors sans perte de généralité, on suppose que G possède au moins un cycle, par conséquent sa maille g est finie.

On définit une fonction poids $\omega : V(G) \cup F(G) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\omega(v) = \frac{g-2}{2}d(v) - g$ si $v \in V(G)$ et $\omega(f) = r(f) - g$ si $f \in F(G)$.

Calculons maintenant, la somme totale des poids.

$$\begin{aligned} \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} \omega(x) &= \sum_{v \in V(G)} \omega(v) + \sum_{f \in F(G)} \omega(f) \\ &= \sum_{v \in V(G)} \left(\frac{g-2}{2}d(v) - g \right) + \sum_{f \in F(G)} (r(f) - g) \\ &= \left(\frac{g-2}{2} \right) \sum_{v \in V(G)} d(v) - ng + \sum_{f \in F(G)} r(f) - fg \\ &= \left(\frac{g-2}{2} \right) 2m - ng + 2m - fg \\ &= gm - ng - fg \end{aligned}$$

En appliquant la formule d'Euler, on obtient :

$$\sum_{x \in V(G) \cup F(G)} \omega(x) = g(m - n - f) = -2g < 0.$$

Le poids total est strictement négatif. Comme le graphe est de maille g alors, le poids de chaque face est positif. On en déduit que la somme des poids des sommets est strictement négative :

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(G)} \left(\frac{g-2}{2} d(v) - g \right) &< 0 \\ \frac{g-2}{2} \sum_{v \in V(G)} d(v) - ng &< 0 \\ \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} d(v) &< \frac{2g}{g-2}, \text{ soit } ad(G) < \frac{2g}{g-2}. \end{aligned}$$

De même, pour tout sous graphe H de G , de maille g' , nous avons $ad(H) < \frac{2g'}{g'-2}$. Comme $g' \geq g > 2$ alors $\frac{2g'}{g'-2} \leq \frac{2g}{g-2}$, nous pouvons donc conclure que

$$mad(G) < \frac{2g}{g-2}$$

□

Dans la Table 1.1, sont cités des exemples de relations entre la maille et le degré moyen maximum d'un graphe planaire. Ces relations nous seront utiles tout au long de cette thèse. Notons que lorsque la maille augmente, le degré moyen maximum tend vers 2.

maille $g(G) \geq$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	$+\infty$
$mad(G) <$	6	4	$\frac{10}{3}$	3	$\frac{14}{5}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{22}{9}$	$\frac{12}{5}$...	2

TABLE 1.1 – Relation entre la maille g et le mad dans un graphe planaire G

Pour pouvoir utiliser efficacement la méthode de déchargement, une bonne assignation de poids aux sommets et aux faces du graphe est nécessaire. Dans le cas des graphes planaires, les poids sont assignés de manière à pouvoir évaluer facilement leur somme totale en utilisant la formule de la Proposition 1.9 :

Proposition 1.9. Soient $V(G)$ et $F(G)$ l'ensemble des sommets et des faces d'un graphe planaire connexe G . Pour tout $a, b \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{v \in V(G)} (a \cdot d(v) - 2(a + b)) + \sum_{f \in F(G)} (b \cdot r(f) - 2(a + b)) = -4(a + b).$$

Démonstration. D'après la formule d'Euler, pour tout graphe planaire connexe G , on a :

$$-n + m - f = -2 \quad (1.1)$$

avec n (respectivement, m , f) le nombre de sommets (respectivement, d'arêtes, de faces) de G .

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, en multipliant la formule (1.1) par $2(a + b)$, il en résulte :

$$(-2(a + b)n + a \cdot 2m) + (b \cdot 2m - 2(a + b)f) = -4(a + b).$$

Comme $\sum_{v \in V(G)} d(v) = \sum_{f \in F(G)} r(f) = 2m$, on obtient notre conclusion. \square

Corollaire 1.10. *Soit G un graphe planaire connexe. On a :*

1. $\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (2r(f) - 6) = -12.$ ($a = 1$ et $b = 2$)
2. $\sum_{v \in V(G)} (2d(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (r(f) - 6) = -12.$ ($a = 2$ et $b = 1$)
3. $\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F(G)} (r(f) - 4) = -8.$ ($a = 1$ et $b = 1$)

1.4.2.2 Exemple 2 : Un graphe planaire est 5-dégénéré

Proposition 1.11. *Tout graphe planaire a un sommet de degré au plus 5.*

Démonstration. Soit G un graphe planaire. Assignons à chaque sommet de v un poids $d(v) - 6$ et à chaque face un poids $2r(f) - 6$. D'après le Corollaire 1.10.1, la somme totale des poids des faces et des sommets est strictement négative. Étant donné que les faces d'un graphe planaire sont de degré au moins 3, alors leur poids est positif. Par conséquent, il existe au moins un sommet qui a un poids négatif et donc de degré au plus 5. On peut alors conclure que tout graphe planaire est 5-dégénéré. \square

Notons que dans les exemples 1 et 2, nous n'utilisons pas de déchargement, mais juste une bonne assignation de poids aux sommets et aux faces du graphe. L'exemple suivant est moins trivial, il s'agit du premier lemme structurel énoncé par Wernicke [130], utilisant la méthode de déchargement.

1.4.2.3 Exemple 3 : Lemme structurel de Wernicke

Lemme 1.12. [130] Si G est un graphe planaire triangulé⁽²⁾ de degré minimum au moins 5, alors l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1. G contient un sommet de degré 5 adjacent à un sommet de degré 5.
2. G contient un sommet de degré 5 adjacent à un sommet de degré 6.

Démonstration. On procède par contradiction. Supposons que G est un graphe planaire triangulé de degré minimum 5 et telles que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. G ne contient pas de sommet de degré 5 adjacent à un sommet de degré 5.
2. G ne contient pas de sommet de degré 5 adjacent à un sommet de degré 6.

On définit une fonction poids ω par $\omega(v) = d(v) - 6$ si $v \in V$ et $\omega(f) = 2r(f) - 6$ si $f \in F$.

Par le Corollaire 1.10.1, on a :

$$\sum_{x \in V(G) \cup F(G)} \omega(x) = \sum_{v \in V(G)} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (2r(f) - 6) = -12 \quad (1.2)$$

D'où, la somme totale des poids est strictement négative. L'étape suivante consiste à redistribuer les poids du graphe, de telle sorte que le poids final de chaque sommet et de chaque arête soit positif, ce qui constitue une contradiction.

On définit la règle de déchargement suivante :

(R) Chaque sommet v de degré au moins 7 donne $\frac{1}{5}$ à chacun de ses sommets voisins de degré 5.

Une fois la procédure de déchargement terminée, un nouveau poids ω^* est obtenu sur les sommets et les faces de G . Évaluons à présent le nouveau poids de chaque face et de chaque sommet de G .

Toutes les faces de G sont de degré 3. Par conséquent, le poids de chaque face f est égal à 0. Après l'application de (R), f ne donne et ne reçoit aucun poids. D'où, pour toute face $f \in F(G)$, $\omega^*(f) = \omega(f) = 2 \times 3 - 6 = 0$.

Il est facile de voir que seuls les sommets de degré 5 ont un poids négatif et que chaque sommet de degré au moins 7 a un poids positif.

Soit u un sommet de G :

1. Si u est un sommet de degré 5. Par hypothèse, tous les voisins de u sont de degré au moins 7. Le poids initial de u est $\omega(u) = -1$. En appliquant la règle de déchargement (R), u reçoit $5 \times \frac{1}{5}$ et donc finit avec un poids nul : $\omega^*(u) = -1 + 5 \times \frac{1}{5} = 0$.

(2). Un graphe G est dit triangulé ou cordal si tout cycle de longueur au moins 4 possède une corde.

2. Si u est un sommet de degré 6, par définition, la règle (R) n'est pas appliquée et donc $\omega(u) = \omega^*(u) = 0$.
3. Si u est un sommet de degré au moins 7, dans ce cas, u a un poids initial $\omega(u) = d(u) - 6 \geq 1$. Par hypothèse, toutes les faces incidentes à u sont des triangles. De plus, u ne peut pas appartenir à un triangle ayant deux sommets de degré 5. Par conséquent, au plus $\frac{d(u)}{2}$ voisins de u peuvent être de degré 5. En appliquant la règle de déchargement (R), u donne au plus $\frac{d(u)}{2} \times \frac{1}{5}$ et donc finit avec un poids : $\omega^*(u) = d(u) - 6 - \frac{d(u)}{2} \times \frac{1}{5} \geq \frac{9d(u)-60}{10} > 0$.

Conclusion : $0 \leq \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} \omega(x) < 0$. Ce qui est impossible. □

1.4.3 Méthode de déchargement appliquée aux problèmes de coloration

Dans les problèmes de coloration, lorsqu'une proposition est prouvée en utilisant la méthode de déchargement, avant de définir les règles de déchargement, il est utile de prouver certaines propriétés structurelles du graphe. Dans ce cas, on procède comme suit : on suppose que le théorème que l'on veut prouver est faux, puis on considère un contre-exemple minimal G .

- Dans un premier temps, on prouve que G ne peut pas contenir un ensemble de structures, $\{C_1, C_2, \dots, C_p\}$, sur ses sommets, ses arêtes ou ses faces, compte tenu de sa minimalité. De telles structures sont appelées *configurations réductibles*. Généralement, pour prouver que ces configurations n'existent pas, on procède par l'absurde. On suppose que si G contient la configuration C_i , alors il existe un plus petit graphe G' qui est un contre-exemple au théorème, puis on prouve une contradiction due à la minimalité de G .
- Durant la deuxième étape, dite phase de déchargement, on montre que les configurations réductibles décrites dans la première étape sont inévitables. Pour ce faire, on utilise la procédure de déchargement : on attribue des poids aux éléments de G de manière à ce que le poids total soit un entier strictement négatif, puis on définit les règles de déchargement de telle sorte que le poids total reste inchangé. Enfin, on montre que si aucune des configurations n'existe alors tous les éléments de G ont un poids positif ou nul. Ainsi, le poids total est positif ou nul, ce qui constitue une contradiction.

Remarque

Une preuve utilisant la méthode de déchargement est dite locale si les configurations et les règles de déchargement utilisées sont de taille finie. Dans tous les exemples que nous avons traité, les preuves sont locales, les règles de déchargement sont assez simples, seulement les

sommets voisins peuvent échanger leurs poids. En 2007, Borodin, Ivanova et Kostochka [23] ont introduit la notion de *déchargement global*. Le principe de cette méthode est de considérer des configurations de tailles infinies, puis de définir des règles de déchargement qui permettent de faire voyager des poids arbitrairement loin le long de ces configurations. Pour plus de détails concernant cette technique, nous renvoyons le lecteur aux références [18, 37].

Chapitre 2

Coloration d'incidences

Sommaire

2.1	Introduction	23
2.2	(k, ℓ) -coloration d'incidences	25
2.3	Coloration d'incidences et coloration forte d'arêtes	26
2.4	Coloration d'incidences et étoile-arboricité dirigée	27
2.5	Coloration d'incidences et coloration à distance 2	28
2.6	Graphes planaires sans cycles de longueurs données	29
2.6.1	Preuve du Théorème 2.16.1	30
2.6.2	Preuve du Théorème 2.16.2	41
2.7	Graphes de degré moyen maximum borné	45
2.7.1	Preuve du Théorème 2.35.1	50
2.7.2	Preuve du Théorème 2.35.2	56
2.7.3	Preuve du Théorème 2.35.3	59
2.7.4	Preuve du Théorème 2.35.4	63

Dans ce chapitre, nous étudions la coloration d'incidences des graphes, introduite en 1993 par Brualdi et Massey [28] dans le but d'étudier l'indice chromatique fort des graphes bipartis.

2.1 Introduction

Étant donné un graphe $G = (V(G), E(G))$, une incidence de G est un couple (u, e) où, u est un sommet de G et e une arête de G incidente au sommet u . On note $I(G)$ l'ensemble de toutes les incidences de G : $I(G) = \{(u, e) \in V(G) \times E(G) : \text{l'arête } e \text{ est incidente à } u\}$.

Deux incidences (u, e) et (v, f) sont adjacentes si et seulement si elles sont distinctes et que l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- (a) $u = v$ ou
- (b) $e = f$ ou
- (c) $uv = e$ ou f .

Les conditions (a), (b) et (c) sont représentées dans la Figure 2.1. Les incidences notées $*$ sont adjacentes, les incidences notées \diamond ne sont pas adjacentes.

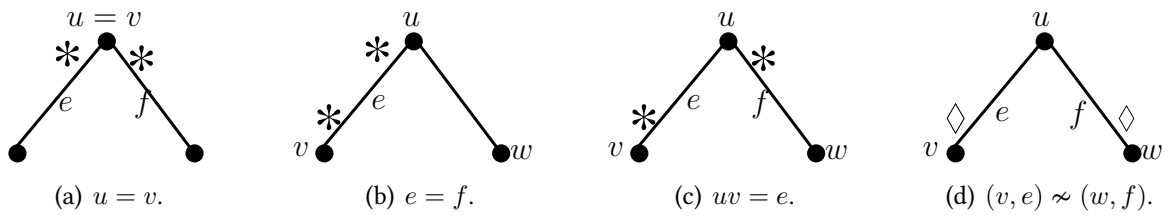


FIGURE 2.1 – L'incidence (u, e) est adjacente à l'incidence (v, f)

Définition 2.1. Une k -coloration d'incidences d'un graphe G est une application ϕ de l'ensemble des incidences $I(G)$ de G dans l'ensemble de couleurs $C = \{1, \dots, k\}$ telles que deux incidences adjacentes reçoivent des couleurs différentes.

Le nombre chromatique d'incidences, noté $\chi_i(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration d'incidences.

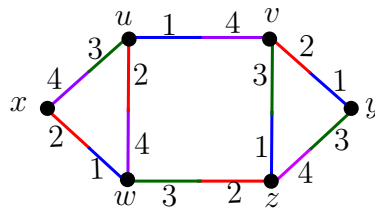


FIGURE 2.2 – $\chi_i(G) = 4$

Dans la Figure 2.2 on donne une 4-coloration d'incidences du graphe G . On peut facilement observer que $\chi_i(G) = 4$. En effet, considérons le sommet u . Nous avons besoin de 3 couleurs distinctes pour colorer les incidences (u, uv) , (u, uw) et (u, ux) , et d'au moins une couleur supplémentaire pour colorer les incidences (v, uv) , (w, uw) et (x, ux) . On obtient donc $\chi_i(G) \geq 4$.

La notion de coloration d'incidences peut être utilisée pour modéliser les problèmes d'assignation de fréquences dans un réseau radio ou téléphone mobile [139]. Supposons que nous ayons un ensemble d'émetteurs-récepteurs, qui communiquent les uns avec les autres sur des fréquences différentes. Afin d'éviter les interférences, pour chaque paire d'émetteurs-récepteurs u et v en communication, les contraintes d'optimisation sont les suivantes :

- La fréquence utilisée par u pour contacter v doit être différente de celle utilisée par v pour contacter u .
- u doit utiliser une fréquence différente pour contacter chacun de ses voisins.
- La fréquence qu'utilise u pour contacter v doit être d'une part, différente de toutes les fréquences qu'utilise v pour émettre, et d'autre part, distincte de toutes celles qui sont utilisées pour communiquer avec u .

On modélise le réseau par le graphe suivant : les sommets du graphe représentent les émetteurs et chaque arête du graphe correspond à une communication entre deux émetteurs. Une incidence (u, uv) correspond à la fréquence qu'utilise u pour communiquer avec v . La résolution de ce problème d'assignation de fréquences est équivalent à la recherche d'une k -coloration d'incidences du graphe.

En introduisant cette nouvelle notion, Brualdi et Massey [28] ont prouvé les bornes générales suivantes :

Théorème 2.2. *Pour tout graphe G , $\Delta(G) + 1 \leq \chi_i(G) \leq 2\Delta(G)$.*

Ils ont également posé la ICC conjecture (*Incidence Coloring Conjecture*) suivante :

Conjecture 2.3. [28] *Pour tout graphe G , $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Cette conjecture fût réfutée, en 1997, par Guiduli [70]. En effet, il a montré que les graphes de Paley⁽¹⁾ ont un nombre chromatique d'incidences d'au moins $\Delta + \Omega(\log \Delta)$. Il a dans le même papier prouvé la majoration suivante :

Théorème 2.4. [70] *Pour tout graph G , $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 20 \log \Delta(G) + 84$.*

(1). Un graphe de Paley est un graphe dont les sommets sont les éléments d'un corps fini, et deux sommets sont adjacents si et seulement si leur différence est un résidu quadratique.

En 2012, Yang [136] a proposé une autre majoration de $\chi_i(G)$ en fonction de l'étoile arboricité.

Définition 2.5 (Akiyama et Kano [2]). *L'étoile arboricité d'un graphe G , notée $st(G)$, est définie comme étant le nombre minimum de forêts d'étoiles⁽²⁾ arêtes-disjointes nécessaires pour couvrir les arêtes de G .*

Théorème 2.6. [136] *Pour tout graphe G , $\chi_i(G) \leq st(G) + \Delta(G) + 1$.*

En effet, si on décompose G en $st(G)$ forêts d'étoiles et qu'on attribue une couleur différente à chaque forêt d'étoiles alors, pour chaque centre d'étoiles a de couleur ϕ , on colore chaque incidence de type (u, ua) dans cette étoile avec la couleur ϕ . On obtient alors pour chaque arête une incidence colorée et une autre incidence non colorée. La coloration des incidences non colorées correspond à une coloration propre des arêtes de G . D'après le Théorème 1.6 de Vizing [123] ceci est possible avec au plus $\Delta(G) + 1$ couleurs.

La coloration d'incidences de graphes a largement été étudiée. De nombreux auteurs ont considéré la valeur de $\chi_i(G)$ pour quelques classes particulières de graphes (les arbres [28], les graphes complets et les graphes complets bipartis [36], les graphes cubiques [103, 119, 132], les graphes de Halin [127], les graphes k -dégénérés [82], les graphes sans mineur K_4 [82], les graphes planaires extérieurs [126], les graphes réguliers et le complément d'un graphe [122], les graphes pseudo-Halin [104] et les graphes puissance de cycles [112]). Un résumé en ligne concernant les résultats connus du nombre chromatique d'incidences est disponible dans [121].

2.2 (k, ℓ) -coloration d'incidences

En 2004, Hosseini Dolama, Sopena et Zhu [82] ont défini une notion plus forte de la coloration d'incidences, dite la (k, ℓ) -coloration d'incidences.

Notations : Soient u, v deux sommets du graphe G .

- Une *incidence forte* d'un sommet u est une incidence de type (u, uv) . L'ensemble des incidences fortes d'un sommet u est notée I_u .
- Une *incidence faible* d'un sommet u est une incidence de type (v, uv) . L'ensemble des incidences faibles d'un sommet u est notée A_u .

Dans la Figure 2.3 : $I_u = \{(u, ux), (u, uw), (u, uv)\}$, $I_v = \{(v, vu), (v, vw), (v, vy)\}$, $A_u = \{(x, xu), (w, wu), (v, vu)\}$, $A_v = \{(y, yv), (w, wv), (u, uv)\}$.

(2). Une forêt d'étoiles est une forêt dont toutes les composantes connexes sont des étoiles.

Définition 2.7. [82] Soit G un graphe. Une (k, ℓ) -coloration d'incidences de G est une k -coloration d'incidences ϕ de G telle que pour tout sommet $u \in V(G)$, $|\phi(A_u)| \leq \ell$, où, $\phi(A_u)$ est l'ensemble des couleurs utilisées pour colorer les incidences de A_u .

On note par $\chi_{i,\ell}(G)$, le plus petit entier k tel que G admet une (k, ℓ) -coloration d'incidences.

Autrement dit, pour tout graphe G , on peut construire une coloration d'incidences telle que pour tout sommet u , le nombre de couleurs utilisé pour les incidences de la forme (v, vu) est borné par une constante indépendante du degré maximum du graphe. Une $(5, 2)$ -coloration d'incidences ϕ est donnée dans la Figure 2.3 où, $\phi(A_u) = \{4, 5\}$, $\phi(A_v) = \{1, 2\}$, $\phi(A_w) = \{3, 4\}$, $\phi(A_z) = \{2, 5\}$, $\phi(A_x) = \{1\}$, $\phi(A_y) = \{3, 4\}$.

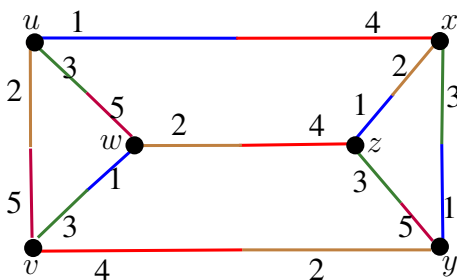


FIGURE 2.3 – $(5, 2)$ -coloration d'incidences

Remarque 2.8. Il n'est pas difficile de voir que toute (k, ℓ) -coloration d'incidences est aussi une (k', ℓ) -coloration d'incidences pour tout $k' > k$.

L'observation suivante sera utilisée implicitement tout au long de ce chapitre.

Observation 2.9. D'après le Théorème 2.2 et la Définition 2.7, tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$, admet une $(2\Delta(G), \Delta(G))$ -coloration d'incidences.

2.3 Coloration d'incidences et coloration forte d'arêtes

Définition 2.10 (Fouquet et Jolivet [64]). Une k -coloration forte d'arêtes (ou coloration à distance 2 des arêtes) d'un graphe G est une coloration propre des arêtes de G telle qu'il n'existe pas de chaîne de longueur 3 bi-colorable dans G .

L'indice chromatique fort de G , noté $\chi'_s(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une coloration forte d'arêtes utilisant k couleurs.

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On considère le graphe biparti $G' = (X \cup Y, E')$, obtenu à partir de G tel que, $X = V$, $Y = E$ et $E' = \{(v, e), v \in V, e \in E, v \text{ est incident à } e\}$ (*i.e* toute arête de G' correspond à une incidence de G). Si ϕ est une coloration d'incidences, alors l'application ϕ' définie pour toute arête ve dans G' par $\phi'(ve) = \phi(v, e)$ est une coloration forte

d'arêtes de G' . On en déduit qu'une coloration d'incidences de G correspond à une coloration forte d'arêtes de G' . De même, si ϕ' est une coloration forte d'arêtes de G' , alors l'application ϕ définie pour toute incidence (v, e) de G par $\phi(v, e) = \phi'(ve)$ est une coloration d'incidences de G . On en déduit qu'une coloration forte d'arêtes G' correspond à une coloration d'incidences de G (voir Figure 2.4). On a alors :

$$\chi_i(G) = \chi'_s(G').$$

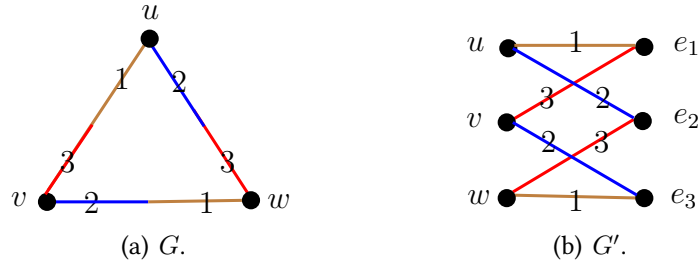


FIGURE 2.4 – $\chi_i(G) = \chi'_s(G')$

2.4 Coloration d'incidences et étoile-arboricité dirigée

Définition 2.11 (Algor et Alon [5]). Soit $D = (V, A)$ un digraphe. L'étoile arboricité dirigée de D , notée $dst(D)$, est le nombre minimum de forêts d'étoiles sources arc-disjointes nécessaires pour couvrir les arcs de D où, une étoile source est une étoile dont les arcs sont orientés du centre vers les feuilles.

Guiduli [70] a montré que le concept de la coloration d'incidences correspond à un cas particulier de l'étoile arboricité dirigée.

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $D = (V, A)$ le digraphe obtenu à partir de G en remplaçant toute arête de $E(G)$ par deux arcs opposés. Toute incidence (u, e) de $I(G)$ avec $e = uw$, peut être associée à un arc \vec{uw} dans $A(D)$. Donc, une coloration d'incidences de G peut être vue comme étant une coloration ϕ des arcs de D satisfaisant les propriétés suivantes :

- pour tout $u, v, w \in V(D)$ tels que $\vec{uw}, \vec{vw} \in A(D)$, $\phi(\vec{uw}) \neq \phi(\vec{vw})$,
- pour tout $u, v, w \in V(D)$ tels que $\vec{uw}, \vec{uv} \in A(D)$, $\phi(\vec{uw}) \neq \phi(\vec{uv})$.

D'où, pour toute couleur c , le sous graphe de D induit par les arcs de couleur c est une forêt d'étoiles, pour laquelle tous ses arcs sont dirigés vers le centre. Ainsi, le nombre chromatique d'incidences de G correspond à l'étoile arboricité dirigée de D et inversement (voir Figure 2.5). On a alors :

$$\chi_i(G) = dst(D).$$



FIGURE 2.5 - $\chi_i(G) = dst(D)$

2.5 Coloration d'incidences et coloration à distance 2

Définition 2.12. La coloration à distance 2 d'un graphe G est une coloration des sommets de G telle que deux sommets u et v ont des couleurs différentes si $dist(u, v) \leq 2$. On note $\chi(G^2)$ le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorer à distance 2 le graphe G .

Si ϕ est une $(k, 1)$ -coloration d'incidences d'un graphe G , alors pour tout sommet $v \in V(G)$ on a $|\phi(A_v)| = 1$. Par conséquent, l'application c définie par $c(v) = \phi(u, uv)$ pour tout sommet v est bien définie. De plus, il n'est pas difficile de voir que $c(u) \neq c(v)$ pour tous deux sommets u et v qui sont à distance 1 ou 2 dans G . Donc, c est une k -coloration à distance 2 de G . Inversement, pour toute k -coloration à distance 2 c de G , on obtient une $(k, 1)$ -coloration ϕ de G et donc une k -coloration d'incidences de G , en posant $\phi(u, uv) = c(v)$ pour toute incidence (u, uv) de G (voir Figure 2.6). D'où, pour tout graphe G :

$$\chi_{i,1}(G) = \chi(G^2) \text{ et } \chi_i(G) \leq \chi(G^2)$$

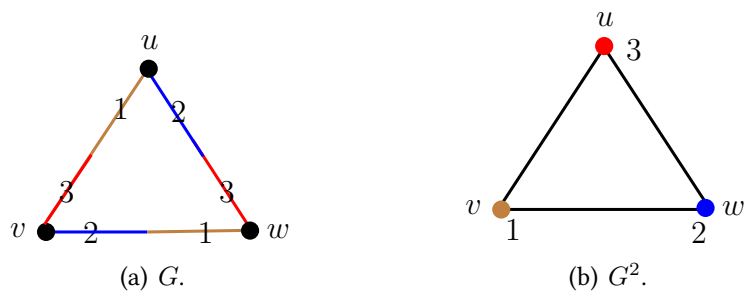


FIGURE 2.6 - $\chi_i(G) = \chi(G^2)$

2.6 Graphes planaires sans cycles de longueurs données

Le premier résultat concernant le nombre chromatique d'incidences des graphes planaires a été démontré, en 2004, par Hosseini Dolama, Sopena et Zhu [82] :

Théorème 2.13. [82] *Pour tout graphe planaire G , $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 7$.*

Hakimi et al. [72] ont prouvé que si G est un graphe planaire alors $st(G) \leq 5$ et que cette borne est optimale. Ainsi, en utilisant le Théorème 2.6, Yang [136] a obtenu une meilleure majoration pour le nombre chromatique d'incidences d'un graphe planaire.

Théorème 2.14. [136] *Pour tout graphe planaire G , $\chi_i(G) \leq \begin{cases} \Delta(G) + 5 & \text{si } \Delta(G) \neq 6 \\ 12 & \text{si } \Delta(G) = 6 \end{cases}$*

En présence de ces bornes, il paraît intéressant d'étudier la coloration d'incidences des graphes planaires de maille donnée. Dans la proposition suivante, nous recueillons des résultats connus dans la littérature concernant le nombre chromatique d'incidences des graphes planaires :

Proposition 2.15.

1. $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 4$ pour tout graphe planaire G sans triangle. [81]
2. $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 3$ pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 6$. [81]
3. $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 6$ et $\Delta(G) \geq 5$. [81]
4. $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 11$. [81]
5. $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 14$ et $\Delta(G) \geq 4$. [20]
6. $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 12$ et $\Delta(G) \geq 5$. [85]
7. $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 10$ et $\Delta(G) \geq 6$. [85]
8. $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 9$ et $\Delta(G) \geq 8$. [20]
9. $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 8$ et $\Delta(G) \geq 10$. [85]
10. $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$ pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 7$ et $\Delta(G) \geq 16$. [85]

Par le Théorème 2.16, nous améliorons les bornes du Théorème 2.13 et du Théorème 2.14. On note par C_k un cycle de longueur k ($k \in \mathbb{N}, k \geq 3$). On montre ce qui suit :

Théorème 2.16. [78] *Soit G un graphe planaire de degré maximum $\Delta(G)$.*

1. Si G est sans C_3 adjacent à un C_4 alors $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 4$.

$$2. \text{ Si } G \text{ est sans } C_4 \text{ et } C_5 \text{ alors } \chi_i(G) \leq \begin{cases} \Delta(G) + 3 & \text{si } \Delta(G) \neq 4 \\ 8 & \text{si } \Delta(G) = 4 \end{cases}$$

Du Théorème 2.16 nous pouvons déduire le corollaire suivant :

Corollaire 2.17. [78] *Si G est un graphe planaire sans C_4 alors $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 4$.*

Avant de démontrer le Théorème 2.16, commençons par introduire quelques notations, nécessaires à la compréhension de nos preuves.

Notations. Soit G un graphe planaire. Un (l_1, \dots, l_k) -*sommet* est un k -sommet ayant k voisins x_1, \dots, x_k tels que $d(x_i) = l_i$, pour $i \in \{1, \dots, k\}$. Nous utilisons également la notation l_i^+ (respectivement, l_i^-), si x_i est un sommet de degré au moins l_i (respectivement, au plus l_i). Une k -face ayant les sommets x_1, x_2, \dots, x_k comme frontière dans cet ordre cyclique est notée par $[x_1x_2\dots x_k]$. Une (l_1, \dots, l_k) -*face* est une k -face $[x_1x_2 \dots x_k]$ avec $d(x_i) = l_i$, pour $i \in \{1, \dots, k\}$. Nous utilisons également la notation l_i^+ (respectivement, l_i^-), si x_i est un sommet de degré au moins l_i (respectivement, au plus l_i). Un (k_1, k_2, k_3) -*triangle* est une 3-face $[xyz]$ avec $d(x) = k_1$, $d(y) = k_2$ et $d(z) = k_3$. Comme précédemment, nous utilisons pour k_i , la notation k_i^+ (respectivement k_i^-), si x_i est un sommet de degré au moins k_i (respectivement, au plus k_i). Pour un sommet $v \in V(G)$, $n_i(v)$ représente le nombre de i -sommets adjacents à v pour $i \geq 1$, et $m_i(v)$ le nombre de i -faces incidentes à v pour $i \geq 1$.

Si ϕ est une coloration d'incidences de G et S un ensemble d'incidences de G , alors on note par $\phi(S)$ l'ensemble de couleurs utilisées pour colorer les incidences appartenant à S .

Dans toutes les figures et pour chaque configuration que nous présentons dans ce document, nous utilisons la convention graphique suivante : les sommets en noir ont un degré fixe et les sommets en blanc ont un degré quelconque. S'il y a une étiquette à l'intérieur d'un sommet blanc, cette étiquette donne une indication sur le nombre de voisins de ce sommet.

Définition 2.18. [82] *Une coloration d'incidences partielle ϕ' de G , est une coloration d'incidences définie uniquement pour quelques sous ensembles I de $I(G)$. Pour chaque incidence non colorée $(u, uv) \in I(G) \setminus I$, on définit l'ensemble $F_G^{\phi'}(u, uv)$ comme étant l'ensemble des couleurs interdites pour colorer l'incidence (u, uv) . Autrement dit :*

$$F_G^{\phi'}(u, uv) = \phi'(A_u) \cup \phi'(I_u) \cup \phi'(I_v).$$

2.6.1 Preuve du Théorème 2.16.1

On prouve une version plus forte du Théorème 2.16.1 :

Théorème 2.19. *Tout graphe planaire G sans C_3 adjacent à C_4 admet une $(k + 4, 4)$ -coloration d'incidences, pour tout $k \geq \Delta(G)$, $k \in \mathbb{N}$. Donc, $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 4$.*

Preuve.

Observation 2.20. *On peut supposer que $k \geq \Delta(G) \geq 5$, sinon par le Théorème 2.2 on obtient : $\chi_i(G) \leq 2\Delta(G) \leq \Delta(G) + 4 \leq k + 4$.*

On procède par contradiction. Soit H un contre-exemple au Théorème minimisant $|E(H)| + |V(H)|$. Par hypothèse, il existe $k \geq \max\{\Delta(G), 5\}$ tel que H n'admet pas une $(k + 4, 4)$ -coloration d'incidences. Soit $k \geq \max\{\Delta(G), 5\}$ le plus petit entier tel que H n'admet pas une $(k + 4, 4)$ -coloration d'incidences. En utilisant la Remarque 2.8, on a $k = \max\{\Delta(G), 5\}$. Par minimalité de H , on peut supposer que H est connexe.

Propriétés structurelles de H :

Lemme 2.21. *Le contre-exemple H ne contient pas de :*

1. 1-sommet,
2. 2-sommet,
3. 3-sommet adjacent à 4^- -sommet,
4. $(4^-, 4^-, \Delta^-)$ -triangle,
5. $(3, 3, 3, 3, \Delta^-)$ -sommet.

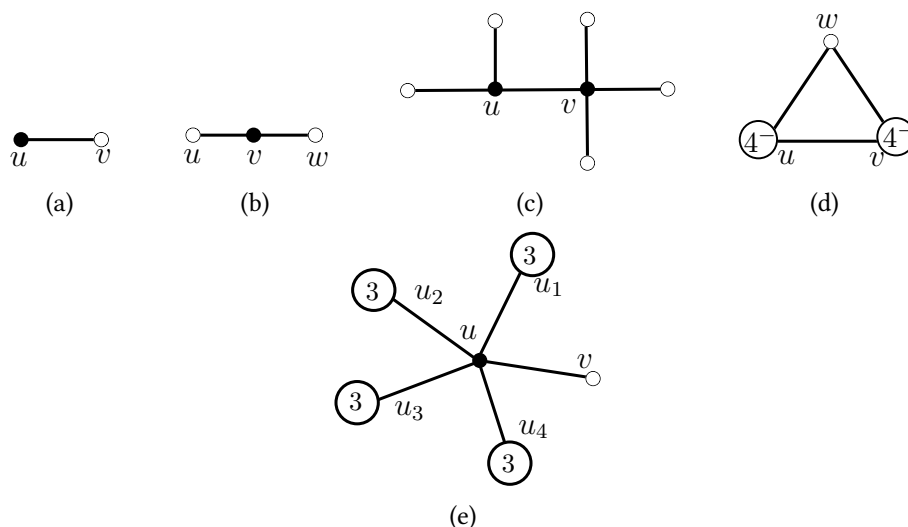


FIGURE 2.7 – Configurations réductibles du Lemme 2.21

Pour prouver le Lemme 2.21, nous supposons que la configuration décrite existe dans H . Ensuite, nous construisons un graphe H' obtenu à partir de H en supprimant un certain

nombre d'arêtes et de sommets. Par minimalité de H , le graphe H' admet une $(k' + 4, 4)$ -coloration d'incidences ϕ' pour tout $k' \geq \max\{\Delta(H'), 5\}$. Comme $\Delta(H) \geq \Delta(H')$, l'ensemble des entiers k' contient l'ensemble des entiers k . Donc, pour la valeur $k' = k$, H' admet une $(k + 4, 4)$ -coloration d'incidences ϕ' . Enfin, pour chaque cas, on prouve une contradiction en étendant la coloration ϕ' à une $(k + 4, 4)$ -coloration d'incidences ϕ de H .

Démonstration. Rappelons que $k \geq 5$, ceci implique que le nombre minimum de couleurs que nous pouvons utiliser est 9.

1. Supposons que H contient un 1-sommet u et soit v son unique voisin dans H (Voir Figure 2.7(a)). Considérons le graphe $H' = H \setminus \{u\}$. Par minimalité de H , H' admet une $(k + 4, 4)$ -coloration d'incidences ϕ' . Nous étendons ϕ' à une $(k + 4, 4)$ -coloration d'incidences ϕ de H comme suit :

Comme pour tout $w \in V(H)$, $|\phi'(A_w)| \leq 4$, alors $|F_H^\phi(v, vu)| = |\phi'(I_v) \cup \phi'(A_v) \cup \phi'(I_u)| \leq \Delta(H) - 1 + 4 + 0 = \Delta(H) + 3 \leq k + 3$. D'où, il existe au moins une couleur $\alpha \notin F_H^\phi(v, vu)$. On pose $\phi(v, vu) = \alpha$ et nous pouvons observer que $|\phi'(A_u)| = 1 \leq 4$. Sachant que $|\phi'(A_v)| \leq 4$, alors il suffit de poser $\phi(u, uv) = \beta$ pour n'importe quelle couleur $\beta \in \phi'(A_v)$. De cette façon, nous avons étendu la coloration à H , ce qui constitue une contradiction.

2. Supposons que H contient un 2-sommet v . Soient u et w les deux voisins de v dans H (Voir Figure 2.7(b)). Considérons $H' = H \setminus \{uv\}$. Par minimalité de H , H' admet une $(k + 4, 4)$ -coloration d'incidences ϕ' . Nous étendons ϕ' à une $(k + 4, 4)$ -coloration d'incidences ϕ de H comme suit : on commence par décolorer l'incidence (v, vw) et supposer que $\phi'(w, wv) = \beta$. Par un argument de comptage, il existe au moins une couleur $\alpha \notin F_H^{\phi'}(u, uv)$. Alors, on colore (u, uv) avec α et $|\phi(A_v)| \leq 2 \leq 4$. Nous colorons maintenant l'incidence (v, vu) . Considérons les deux cas suivants :

- (a) Si $|\phi'(A_u)| = 4$ alors on colore (v, vu) avec une couleur $\gamma \in \phi'(A_u) \setminus \{\beta\}$ (notons que $\alpha \notin \phi'(A_u)$).
- (b) Si $|\phi'(A_u)| \leq 3$ alors on colore (v, vu) avec une couleur $\gamma \notin F_H^{\phi'}(v, vu)$ (notons que nous avons au moins trois choix possibles). Nous pouvons voir que $|\phi(A_u)| \leq 4$.

Enfin, nous colorons l'incidence (v, vw) comme suit :

- (a) Si $|\phi'(A_w)| = 4$ alors on colore (v, vw) avec une couleur $\zeta \in \phi'(A_w) \setminus \{\alpha, \gamma\}$ et on a $|\phi(A_w)| = 4$.
- (b) Si $|\phi'(A_w)| \leq 3$ alors on colore (v, vw) avec une couleur $\zeta \notin F_H^{\phi'}(v, vw)$ et on a $|\phi(A_w)| \leq 3 \leq 4$ (notons que nous avons deux choix possibles).

De cette manière, nous avons étendu la coloration ϕ' à H , ce qui est une contradiction.

3. Supposons que H contient un 3-sommet u adjacent à un 4^- -sommet v (Voir Figure 2.7(c)). Considérons $H' = H \setminus \{uv\}$. Par minimalité de H , H' admet une $(k+4, 4)$ -coloration d'incidences ϕ' . Nous étendons ϕ' à une $(k+4, 4)$ -coloration d'incidences ϕ de H comme suit : comme précédemment, par un argument de comptage, il est facile de voir qu'il existe au moins une couleur $\alpha \notin F_H^{\phi'}(v, vu)$. On pose $\phi(v, vu) = \alpha$ et on a $|\phi(A_u)| \leq 3 \leq 4$. Ensuite, on colore l'incidence (u, uv) avec une couleur $\beta \notin F_H^{\phi'}(u, uv) \cup \{\alpha\}$ ($|F_H^{\phi'}(u, uv)| \leq 7$) et on a $|\phi'(A_u)| \leq 4$. De cette manière nous pouvons étendre la coloration à H , contradiction.
4. Supposons que H contient une 3-face $[uvw]$ tel que $d(u) \leq 4$, $d(v) \leq 4$ et $d(w) \leq \Delta$ (Voir Figure 2.7(d)). Par minimalité de H , le graphe $H' = H \setminus \{uv\}$ admet une $(k+4, 4)$ -coloration d'incidences. Nous étendons ϕ' à une $(k+4, 4)$ -coloration d'incidences ϕ de H comme suit : commençons par colorer l'incidence (u, uv) . On a :

$$|F_H^{\phi}(u, uv)| = |\phi'(I_u) \cup \phi'(A_u) \cup \phi'(I_v)| \leq 3 + 3 + 3 = 9$$

Considérons les deux cas suivants :

Cas 1 : Si $|F_H^{\phi}(u, uv)| = 9$, alors nous sommes dans la situation décrite dans la Figure 2.8. Il est facile de voir que $7 \notin \phi'(I_w)$. On remplace 2 par 7 et on pose $\phi(u, uv) = 2$. Pour colorer l'incidence (v, vu) , on considère $\phi'(A_u)$ et $\phi'(A_v)$.

- (a) Si $\phi'(A_u) \neq \phi'(A_v)$ alors il existe une couleur $a \in (\phi'(A_u) \setminus \phi'(A_v))$. On pose $\phi(v, vu) = a$ et on obtient une contradiction.
- (b) Si $\phi'(A_u) = \phi'(A_v)$, soit b la couleur de (w, wv) , on permute entre les couleurs de (w, wu) et (w, wv) , puis on pose $\phi(v, vu) = b$ et on obtient une contradiction.

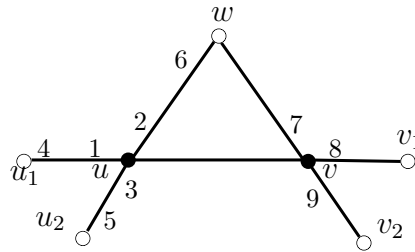


FIGURE 2.8 - $|F_H^{\phi}(u, uv)| = 9$

Cas 2 : Supposons que $|F_H^{\phi}(u, uv)| < 9$ et $|F_H^{\phi}(v, vu)| < 9$. S'il existe deux couleurs libres pour l'une des deux incidences, on peut alors étendre ϕ à H , ce qui est une contradiction. Donc, $|F_H^{\phi}(u, uv)| = 8$ et $|F_H^{\phi}(v, vu)| = 8$ et que les deux incidences ont la même couleur libre. On a alors deux cas :

Cas 2.1 : $|\phi'(A_u)| = 2$, dans ce cas :

Cas 2.1.1 : Si $\phi'(u_1, u_1u) = \phi'(u_2, u_2u)$ alors, sans perte de généralité, dans notre figure, supposons que $\phi'(u_1, u_1u) = \phi'(u_2, u_2u) = 4$. Dans ce cas, la seule couleur libre est la couleur 5.

- (a) Si on peut remplacer 7 par 2, alors on colore (u, uv) avec 7 et (v, vu) avec 5, et on obtient une contradiction. D'où, on ne peut pas remplacer 7 par 2, comme $2 \notin \phi(I_w)$ alors ceci revient à dire que $2 \in \phi'(A_v) \setminus \{\phi'(w, wv)\}$. Sans perte de généralité soit $\phi'(v_1, v_1v) = 2$.
- (b) Si on peut colorer (v, vu) avec 6, alors on colore (u, uv) avec 5 et on obtient une contradiction. Donc, $6 \in \phi'(A_v)$ plus précisément $\phi'(v_2, v_2v) = 6$.
- (c) Si on peut colorer (v, vu) avec 4, alors on colore (u, uv) avec 5 et on obtient une contradiction. Donc, $4 \in \phi'(A_v)$ et plus précisément $\phi'(w, wv) = 4$. Dans ce cas, on permute entre 6 et 4 au tour de w puis on colore (v, vu) avec 4 et (u, uv) avec 5, ce qui constitue une contradiction.

Cas 2.1.2 : Si $\phi'(u_1, u_1u) \neq \phi'(u_2, u_2u)$, Sans perte de généralité, dans la Figure 2.8, nous pouvons supposer que $\phi'(w, wu) = 4$. Dans ce cas, la seule couleur libre est la couleur 6.

- (a) Si on peut remplacer 7 par 2, alors on colore (u, uv) avec 7 et (v, vu) avec 6 et on obtient une contradiction. Donc, on ne peut pas remplacer 7 par 2. Comme $2 \notin \phi(I_w)$, on en déduit que $2 \in \phi'(A_v)$. Sans perte de généralité, soit $\phi'(v_1, v_1v) = 2$.
- (b) Si on peut colorer (v, vu) avec 4, alors on colore (u, uv) avec 6 et on obtient une contradiction. Donc, $4 \in \phi'(A_v)$ et $\phi'(v_2, v_2v) = 4$.
- (c) Si on peut colorer (v, vu) avec 5, alors on colore (u, uv) avec 6 et on obtient une contradiction. Donc, $5 \in \phi'(A_v)$ et $\phi'(w, wv) = 5$. On permute entre 4 et 5 autour w et on colore (v, vu) avec 5 et (u, uv) avec 6. Il s'ensuit que ϕ est une $(k + 4, 4)$ -coloration d'incidences de H , contradiction.

Cas 2.2 : $|\phi'(A_u)| = 3$. Dans ce cas, une des couleurs de (u_1, u_1u) ou (u_2, u_2u) est dans $\phi'(I_v)$ ou bien la couleur de (w, wu) est dans $\phi'(I_v)$.

Cas 2.2.1 : Une des couleurs de (u_1, u_1u) ou (u_2, u_2u) est dans $\phi'(I_v)$. Dans notre Figure 2.8, sans perte de généralité, supposons que $4 \in \phi'(I_v)$.

- (i) Si $\phi'(v, vw) = 4$, alors la couleur libre est 7. De plus, $\phi'(w, wv) = 5$ (car (u, uv) et (v, vu) ont la même couleur libre). Dans ce cas, on permute entre 5 et 6 autour de w puis on pose $\phi(u, uv) = 6$ et $\phi(v, vu) = 7$, ce qui constitue une contradiction.
- (ii) Si $\phi'(v, vv_1) = 4$ ou $\phi'(v, vv_2) = 4$, sans perte de généralité, supposons que $\phi'(v, vv_1) = 4$ alors la couleur libre est 8.
 - (a) Si on peut remplacer 7 par 2, alors on colore (u, uv) avec 7 et (v, vu) avec 8, et on obtient une contradiction. Si on ne peut pas remplacer 7 par 2, ceci revient à dire que $2 \in \phi'(A_v)$. Sans perte de généralité, supposons que $\phi'(v_1, v_1v) = 2$.

- (b) Si on peut colorer (v, vu) avec 6, alors on colore (u, uv) par la couleur 8 et on a notre contradiction. Donc, $6 \in \phi'(A_v)$ et $\phi'(v_2, v_2v) = 6$.
- (c) Si on peut colorer (v, vu) par 5, alors on pose $\phi(u, uv) = 8$, contradiction. D'où : $5 \in \phi'(A_v)$ et $\phi'(w, wv) = 5$, dans ce cas, on permute 6 et 5 autour w et on pose $\phi(v, vu) = 5$ et $\phi(u, uv) = 8$ et on obtient une contradiction.

Cas 2.2.2 : La couleur de (w, wu) est dans $\phi'(I_v)$. Dans notre Figure 2.8, supposons que $\phi'(v, vv_1) = 6$. Alors, la couleur libre est 8.

- (a) Si on peut remplacer 7 par 2, alors on colore (u, uv) avec 7 et (v, vu) avec 8, contradiction. Donc on ne peut pas remplacer 7 par 2 et $2 \in \phi'(A_v)$. Sans perte de généralité, supposons que $\phi'(v_1, v_1v) = 2$.
- (b) Si on peut colorer (v, vu) avec 4, alors on colore (u, uv) avec 8, contradiction. Sinon, on a $4 \in \phi'(A_v)$. Soit $\phi'(v_2, v_2v) = 4$.
- (c) Si on peut colorer (v, vu) avec 5, alors on colore (u, uv) avec 8, contradiction. Donc $5 \in \phi'(A_v)$ avec $\phi'(w, wv) = 5$ (respectivement, $\phi'(v_2, v_2v) = 5$) si $\phi'(v_2, v_2v) = 4$ (respectivement, $\phi'(w, wv) = 4$). On remplace maintenant 2 par 7 ($7 \notin \phi(I_w)$), puis on colore (u, uv) avec 2 et (v, vu) par 8, contradiction. Ceci complète la preuve.

5. Supposons que H contient un $(3, 3, 3, 3, \Delta^-)$ -sommet u . Soient u_i , pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, les voisins de u ayant un degré égal à 3 et v le cinquième voisin de u de degré au plus Δ (Voir Figure 2.7(e)). Par minimalité de H , le graphe $H' = H \setminus \{u\}$ admet une $(k+4, 4)$ -coloration d'incidences ϕ' . Nous étendons ϕ' à une $(k+4, 4)$ -coloration d'incidences ϕ de H comme suit :

On a $|F_H^\phi(v, vu)| = |\phi'(I_v) \cup \phi'(A_v) \cup \phi'(I_u)| \leq \Delta(H) - 1 + 4 = \Delta(H) + 3 \leq k + 3$. D'où, il existe au moins une couleur libre pour colorer (v, vu) . Sans perte de généralité, on pose $\phi(v, vu) = 1$. Notons que pour colorer (u, uv) on dispose d'au plus 4 couleurs libres (les couleurs de $\phi'(A_v)$). On note par :

- L_i la liste des couleurs libres de (u_i, u_iu) , pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
- L'_i la liste des couleurs disponibles pour (u, uu_i) , pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
- L_u la liste des couleurs libres pour (u, uv) .

Par le même argument de comptage précédent, il est facile de voir que $|L'_i| \geq k + 1 \geq 6$ et $|L_i| \geq k \geq 5$ (rappelons que (v, vu) est coloré avec la couleur 1). D'où, il existe une couleur α appartenant à au moins 3 listes parmi les listes L_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Sans perte de généralité, supposons que α appartient à L_i , $i \in \{1, 2, 3\}$.

- (a) Si $\alpha = 1$, on pose $\phi(u_i, u_iu) = 1$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$, puis on colore (u, uv) avec une couleur de $\phi(A_v)$ et (u_4, u_4u) avec une couleur de L_4 . Enfin, on colore chaque (u, uu_i) pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ l'une après l'autre et dans cet ordre, nous pouvons donc étendre la coloration à H ce qui est une contradiction.

- (b) Si $\alpha \neq 1$. Sans perte de généralité, soit $\alpha = 2$. On pose $\phi(u_i, u_i u) = 2$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Ensuite, on colore (u, uv) avec une couleur appartenant à $\phi'(A_v)$ et différente de 2 et 1. On pose $\phi(u, uv) = 3$, puis on colore chaque (u, uu_i) pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ l'une après l'autre et dans cet ordre. Nous avons suffisamment de couleurs dans chaque liste de chaque incidence (u, uu_i) , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Sans perte de généralité, on pose $\phi(u, uu_i) = i + 3$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Si on peut colorer proprement l'incidence $(u_4, u_4 u)$ alors on obtient une contradiction. Sinon, ceci revient à dire que $L_4 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. D'où, on peut supposer, sans perte de généralité, que $\phi'(A_{u_4}) = \{1, 2\}$ et $\phi'(I_{u_4}) = \{8, 9\}$. Si on peut remplacer une des couleurs de (u, uu_i) , $i \in \{1, 2, 3\}$ par 8 ou 9, sans perturber la coloration d'incidences (par exemple avec 8), alors on colore l'incidence correspondante avec 8 (supposons $\phi(u, uu_1) = 8$) et $(u_4, u_4 u)$ avec 4, ainsi, on obtient une contradiction. Sinon, cela signifie que $\phi(I_{u_i}) = \{2, 8, 9\}$. Rappelons que $|L_i| \geq 5$, par l'argument précédent, $L_i \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, for $i \in \{1, 2, 3\}$.
- S'il existe une autre couleur $\beta \notin \{1, 2\}$ appartenant à $\cap_{i=1}^{i=3} L_i$, cette couleur appartient aussi à L_4 . Alors, on pose $\phi(u_i, u_i u) = \beta$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, et on colore (u, uv) avec une couleur différente de β . Enfin, on colore (u, uu_i) , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ l'une après l'autre et dans cet ordre. De cette manière, on aura étendu la coloration, contradiction.
 - S'il n'existe pas de d'autres couleurs $\beta \notin \{1, 2\}$ appartenant à $\cap_{i=1}^{i=3} L_i$, alors il est facile de voir que chaque élément de $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ appartient à exactement deux listes L_i . Sans pertes de généralité, supposons que $1 \in L_1 \cap L_2$. On colore $(u_1, u_1 u)$ et $(u_2, u_2 u)$ avec 1. Rappelons que $|L_i| \geq 5$, on peut donc prendre n'importe qu'elle couleur de $L_3 \cap L_4$ pour colorer $(u_3, u_3 u)$ et $(u_4, u_4 u)$, soit 3 cette couleur. Alors, on colore (u, uv) avec une couleur différente de 3. Enfin, on colore (u, uu_i) , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ l'une après l'autre et on obtient une contradiction.

□

Procédure de déchargement :

D'après la Proposition 1.9 du Chapitre 1, pour $a = 3$ et $b = 2$, on obtient :

$$\sum_{v \in V(H)} (3d(v) - 10) + \sum_{f \in F(H)} (2r(f) - 10) = -20 \quad (2.1)$$

Considérons la fonction poids $\omega : V(H) \cup F(H) \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\omega(v) = 3d(v) - 10$ si $v \in V(H)$ et $\omega(f) = 2r(f) - 10$ si $f \in F(H)$. On déduit de l'équation (2.1) que la somme totale des poids est égale à -20 . Dans ce qui suit, nous définissons les règles de déchargement (R1) à (R8) puis redistribuons les poids suivant ces règles. Une fois la procédure de déchargement terminée, une nouvelle fonction poids ω^* est créée. Cependant, la somme totale des poids reste

fixe et inchangée. Nous allons alors montrer que $\omega^*(x) \geq 0$ pour tout $x \in V(H) \cup F(H)$. Ce qui nous conduit à la contradiction suivante :

$$0 \leq \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} \omega(x) = -20 < 0$$

Ainsi nous aurons montré qu'aucun contre-exemple n'existe.

Les règles de déchargements sont définies comme suit :

- (R1) Chaque d -sommet, pour $d \geq 5$, donne $\frac{1}{3}$ à chaque 3-sommet adjacent.
- (R2) Chaque 4-sommet donne 1 à chaque 3-face incidente.
- (R3) Chaque d -sommet, pour $d \geq 5$, donne 2 à chaque 3-face incidente.
- (R4) Chaque 4-sommet donne $\frac{1}{2}$ à chaque 4-face incidente.
- (R5) Chaque d -sommet, pour $d \geq 5$, donne 1 à chaque $(5^+, 3, 5^+, 3)$ -face incidente.
- (R6) Chaque d -sommet, pour $d \geq 5$, donne $\frac{3}{4}$ à chaque $(5^+, 3, 5^+, 4)$ -face incidente.
- (R7) Chaque d -sommet, pour $d \geq 5$, donne $\frac{2}{3}$ à chaque $(5^+, 5^+, 5^+, 3)$ -face incidente.
- (R8) Chaque d -sommet, pour $d \geq 5$, donne $\frac{1}{2}$ à chaque $(5^+, 4^+, 4^+, 4^+)$ -face incidente.

Par hypothèse, H ne contient pas de C_4 adjacent à C_3 , l'observation suivante est facile à vérifier et sera utilisée implicitement dans la suite de notre preuve.

Observation 2.22. H ne contient pas les structures suivantes :

1. 3-cycles adjacents,
2. un 4-cycle adjacent à 3-cycle.

On peut aussi facilement déduire l'observation suivante

Observation 2.23. Soit v un d -sommet avec $d \geq 3$ alors $m_3(v) \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ et on a les cas suivants à partir de l'Observation 2.22 :

- Si $m_3(v) = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ alors $m_4(v) = 0$.
- Si $1 \leq m_3(v) < \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ alors $m_4(v) \leq d(v) - 2 \times m_3(v) - 1$.
- Si $m_3(v) = 0$ alors $m_4(v) \leq d(v)$.

Soit $v \in V(H)$ un d -sommet. D'après le Lemme 2.21.1 et le Lemme 2.21.2, $d \geq 3$. Considérons les cas suivants :

Cas $d = 3$. Notons que $\omega(v) = -1$. D'après le Lemme 2.21.3, v a trois voisins de degré au moins 5. D'après (R1), $\omega^*(v) = -1 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$.

Cas $d = 4$. Notons que $\omega(v) = 2$. D'après le Lemme 2.21.3, v a quatre voisins de degré au moins 4. D'après l'Observation 2.23, on considère les cas suivants :

- Si $m_3(v) = 2$ alors $m_4(v) = 0$. D'après (R2), $\omega^*(v) \geq 2 - 2 \times 1 = 0$.
- Si $m_3(v) = 1$ alors $m_4(v) \leq 1$. D'après (R2) et (R4), $\omega^*(v) \geq 2 - 1 \times 1 - 1 \times \frac{1}{2} > 0$.
- Si $m_3(v) = 0$ alors $m_4(v) \leq 4$. D'après (R4), $\omega^*(v) \geq 2 - 4 \times \frac{1}{2} = 0$.

Cas $d = 5$. Notons que $\omega(v) = 5$. D'après le Lemme 2.21.5, v a au plus 3 voisins de degré 3 chacun. D'après l'Observation 2.23, on considère les cas suivants :

- Si $m_3(v) = 2$ alors $m_4(v) = 0$. D'après (R1) et (R3), $\omega^*(v) \geq 5 - 2 \times 2 - 3 \times \frac{1}{3} = 0$.
- Si $m_3(v) = 1$ alors $m_4(v) \leq 2$. Dans le pire cas, v est incident à deux $(5, 3, 5^+, 3)$ -faces. D'après (R1), (R3) et (R5), $\omega^*(v) \geq 5 - 1 \times 2 - 2 \times 1 - 3 \times \frac{1}{3} = 0$.
- Si $m_3(v) = 0$ alors $m_4(v) \leq 5$. On doit considérer les cas suivants :

(a) Si $n_3(v) = 3$, on a alors trois cas (dans chacun, on considère le pire cas qui correspond à celui où, v donne la plus grande quantité de charge) :

(i) v est incident à deux $(5, 3, 5^+, 3)$ -faces, deux $(5, 3, 5^+, 4^+)$ -faces et une $(5, 4^+, 4^+, 4^+)$ -face.

$$\text{D'après (R1), (R5), (R6) et (R8), } \omega^*(v) \geq 5 - 2 \times 1 - 2 \times \frac{3}{4} - 3 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = 0.$$

(ii) v est incident à deux $(5, 3, 5^+, 3)$ -faces et trois $(5^+, 5^+, 5^+, 3)$ -faces.

$$\text{D'après (R1), (R5) et (R7), } \omega^*(v) \geq 5 - 1 \times 2 - 3 \times \frac{2}{3} - 3 \times \frac{1}{3} = 0.$$

(iii) v est incident à une $(5, 3, 5^+, 3)$ -face et quatre $(5, 3, 5^+, 4^+)$ -faces.

$$\text{D'après (R1), (R5) et (R6), } \omega^*(v) \geq 5 - 1 \times 1 - 4 \times \frac{3}{4} - 3 \times \frac{1}{3} = 0.$$

(b) Si $n_3(v) = 2$, alors on considère les cinq cas suivants :

(i) v est incident à une $(5, 3, 5^+, 3)$ -face, deux $(5, 3, 5^+, 4^+)$ -faces et deux $(5, 4^+, 4^+, 4^+)$ -faces.

$$\text{D'après (R1), (R5), (R6) et (R8), } \omega^*(v) \geq 5 - 1 \times 1 - 2 \times \frac{3}{4} - 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \geq 0.$$

(ii) v est incident à quatre $(5, 3, 5^+, 4^+)$ -faces et une $(5, 4^+, 4^+, 4^+)$ -face.

$$\text{D'après (R1), (R6) et (R8), } \omega^*(v) \geq 5 - 4 \times \frac{3}{4} - 1 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \geq 0.$$

(iii) v est incident à deux $(5, 3, 5^+, 4^+)$ -faces et trois $(5, 5^+, 5^+, 3)$ -faces.

$$\text{D'après (R1), (R6) et (R7), } \omega^*(v) \geq 5 - 2 \times \frac{3}{4} - 3 \times \frac{2}{3} - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \geq 0.$$

(iv) v est incident à deux $(5, 3, 5^+, 5^+)$ -faces, une $(5, 3, 5^+, 3)$ -face, une $(5, 5^+, 4^+, 4^+)$ -face et une $(5, 3, 5^+, 4^+)$ -face.

$$\text{D'après (R1), (R5), (R6), (R7) et (R8), } \omega^*(v) \geq 5 - 2 \times \frac{1}{3} - 2 \times \frac{2}{3} - 1 \times 1 - 1 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \geq 0.$$

(v) v est incident à quatre $(5, 3, 5^+, 5^+)$ -faces, une $(5, 3, 5^+, 3)$ -face.

$$\text{D'après (R1), (R5) et (R7), } \omega^*(v) \geq 5 - 2 \times \frac{1}{3} - 4 \times \frac{2}{3} - 1 \times 1 = \frac{2}{3} \geq 0.$$

(c) Si $n_3(v) = 1$, on considère les quatre cas suivants :

(i) v est incident à cinq $(5, 5^+, 5^+, 3)$ -faces.

$$\text{D'après (R1) et (R7), } \omega^*(v) \geq 5 - 5 \times \frac{2}{3} - 1 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \geq 0.$$

(ii) v est incident à deux $(5, 3, 5^+, 4^+)$ -faces, deux $(5, 4^+, 5^+, 4)$ et une $(5, 5^+, 5^+, 3)$ -face.

$$\text{D'après (R1), (R6), (R7) et (R8), } \omega^*(v) \geq 5 - 2 \times \frac{3}{4} - 2 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{2}{3} - 1 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{2} \geq 0.$$

(iii) v est incident à trois $(5, 4^+, 4^+, 4^+)$ -faces et deux $(5, 3, 5^+, 4^+)$ -faces.

$$\text{D'après (R1), (R6) et (R8), } \omega^*(v) \geq 5 - 2 \times \frac{3}{4} - 3 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \geq 0.$$

(iv) v est incident à trois $(5, 5^+, 5^+, 3)$ -faces, une $(5, 4^+, 4^+, 4^+)$ -face et une $(5, 3, 5^+, 4)$ -face.

$$\text{D'après (R1), (R6), (R7) et (R8), } \omega^*(v) \geq 5 - 3 \times \frac{2}{3} - 1 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{3}{4} - 1 \times \frac{1}{3} = \frac{17}{12} \geq 0.$$

(d) Si $n_3(v) = 0$, dans le pire cas, v peut être incident à cinq $(5, 5^+, 5^+, 3)$ -faces.

$$\text{D'après (R7), } \omega^*(v) \geq 5 - 5 \times \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \geq 0.$$

Cas $d = 6$. Notons que $\omega(v) = 8$. D'après l'Observation 2.23, on considère les cas suivants :

- Si $m_3(v) = 3$ alors $m_4(v) = 0$. D'après le Lemme 2.21.3 et le Lemme 2.21.4, v est adjacent à au plus trois 3-sommets.

$$\text{D'après (R1) et (R3), } \omega^*(v) \geq 8 - 3 \times 2 - 3 \times \frac{1}{3} = 1 > 0.$$

- Si $m_3(v) = 2$ alors $m_4(v) \leq 1$. D'après le Lemme 2.21.3 et le Lemme 2.21.4, v est adjacent à au plus quatre 3-sommets et incident à au plus une $(5^+, 3, 5^+, 3)$ -face.

$$\text{D'après (R1), (R3) et (R5), } \omega^*(v) \geq 8 - 2 \times 2 - 1 \times 1 - 4 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} > 0.$$

- Si $m_3(v) = 1$ alors $m_4(v) \leq 3$. D'après le Lemme 2.21.3 et le Lemme 2.21.4, v est adjacent à au plus cinq 3-sommets et incident à au plus trois $(5^+, 3, 5^+, 3)$ -faces.

$$\text{D'après (R1), (R3) et (R5), } \omega^*(v) \geq 8 - 1 \times 2 - 3 \times 1 - 5 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3} > 0.$$

- Si $m_3(v) = 0$ alors $m_4(v) \leq 6$. v peut être incident à six $(5^+, 3, 5^+, 3)$ -faces.

$$\text{D'après (R1) et (R5), } \omega^*(v) \geq 8 - 6 \times 1 - 6 \times \frac{1}{3} = 0.$$

Cas $d = 7$. Notons que $\omega(v) = 11$. D'après l'Observation 2.23, on a les cas suivants :

- Si $m_3(v) = 3$ alors $m_4(v) = 0$. D'après le Lemme 2.21.3 et le Lemme 2.21.4, v est adjacent à au plus quatre 3-sommets. D'après (R1) et (R3), $\omega^*(v) \geq 11 - 3 \times 2 -$

$$4 \times \frac{1}{3} = \frac{11}{3} > 0.$$

- Si $m_3(v) = 2$ alors $m_4(v) \leq 2$. D'après le Lemme 2.21.3 et le Lemme 2.21.4, v est adjacent à au plus cinq 3-sommets et incident à au plus deux $(5^+, 3, 5^+, 3)$ -faces. D'après (R1), (R3) et (R5), $\omega^*(v) \geq 11 - 2 \times 2 - 2 \times 1 - 5 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3} > 0$.
- Si $m_3(v) = 1$ alors $m_4(v) \leq 4$. D'après le Lemme 2.21.3 et le Lemme 2.21.4, v est adjacent à au plus six 3-sommets et incident à au plus quatre $(5^+, 3, 5^+, 3)$ -faces. D'après (R1), (R3) et (R5), $\omega^*(v) \geq 11 - 1 \times 2 - 4 \times 1 - 6 \times \frac{1}{3} = 3 > 0$.
- Si $m_3(v) = 0$ alors $m_4(v) \leq 7$. v peut être incident à sept $(5^+, 3, 5^+, 3)$ -faces et sept 3-sommets. D'après (R1) et (R5), $\omega^*(v) \geq 11 - 7 \times 1 - 7 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} > 0$.

Cas $d \geq 8$. Notons que $\omega(v) = 3d - 10$. D'après l'Observation 2.23, on obtient les cas suivants :

- Si $m_3(v) = 0$ alors $m_4(v) \leq d$. D'après (R1) et (R5), $\omega^*(v) \geq 3d - 10 - d \times 1 - d \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}d - 10 > 0$.
- Si $1 \leq m_3(v) \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1$ alors $m_4(v) \leq d - 3$. D'après (R1), (R3) et (R5),

$$\begin{aligned} \omega^*(v) &= 3d - 10 - 2 \times m_3(v) - 1 \times m_4(v) - \frac{1}{3} \times n_3(v) \\ &\geq 3d - 10 - 2 \times (\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1) - (d - 3) \times 1 - \frac{1}{3} \times d \\ &\geq \frac{2}{3}d - 5 > 0 \end{aligned}$$

- Si $m_3(v) = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ alors $m_4(v) = 0$. D'après (R1) et (R3) :

$$\begin{aligned} \omega^*(v) &= 3d - 10 - 2 \times m_3(v) - \frac{1}{3} \times n_3(v) \\ &\geq 3d - 10 - 2 \times \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor - \frac{1}{3} \times d \\ &\geq \frac{5}{3}d - 10 > 0. \end{aligned}$$

Soit $f \in F(H)$ une d -face.

Cas $d = 3$. Notons que $\omega(f) = -4$. Supposons que $f = [rst]$. On considère les cas suivants :

1. Supposons que $d(r) = 3$. Alors, d'après le Lemme 2.21.3, r est l'unique 3-sommet et $d(s) \geq 5$ et $d(t) \geq 5$. D'après (R3), $\omega^*(f) = -4 + 2 \times 2 = 0$.
2. Supposons maintenant que $d(r) \geq 4$, $d(s) \geq 4$ et $d(t) \geq 4$. D'après le Lemme 2.21.4, au moins deux des trois r , s et t sont des 5^+ -sommets. Supposons que $d(s) \geq 5$ et $d(t) \geq 5$. Alors, par (R2) et (R3), on a $\omega^*(f) \geq -4 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 1 \geq 0$.

Cas $d = 4$. Le poids initial de f est $\omega(f) = -2$. D'après le Lemme 2.21.3, au plus deux 3-sommets sont incidents à une 4-face. Supposons que $f = [rstu]$. On considère les cas suivants :

1. Supposons que $d(r) = d(t) = 3$. Alors, d'après le Lemme 2.21.3, $d(s) \geq 5$ et $d(u) \geq 5$. D'après (R5), $\omega^*(f) = -2 + 2 \times 1 = 0$.
2. Supposons maintenant que $d(r) = 3$. Alors, par le Lemme 2.21.3, $d(s) \geq 5$ et $d(u) \geq 5$. De plus, supposons que $d(t) = 4$. D'après (R4) et (R6), $\omega^*(f) \geq -2 + 2 \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{1}{2} = 0$. Si $d(t) \geq 5$, par (R7) on a $\omega^*(f) \geq -2 + 3 \times \frac{2}{3} = 0$.
3. Supposons que $d(r) \geq 4$, $d(s) \geq 4$, $d(t) \geq 4$ et $d(u) \geq 4$. D'après (R4), $\omega^*(f) \geq -2 + 4 \times \frac{1}{2} = 0$.

Cas $d \geq 5$. Le poids initial de f est $\omega(f) = 2d - 10 \geq 0$ et il reste inchangé durant le processus de déchargement. D'où : $\omega(v) = \omega^*(v) = 2d - 10 \geq 0$.

Une fois la procédure de déchargement terminée, les nouveaux poids de toutes les faces et tous les sommets sont positifs. On conclut que H ne peut pas exister. Ceci achève la preuve du Théorème 2.6.1. □

2.6.2 Preuve du Théorème 2.16.2

On prouve une version plus forte du Théorème 2.16.2 :

Théorème 2.24. *Tout graphe planaire G sans C_4 et C_5 admet une $(k + 3, 3)$ -coloration d'incidences, pour tout $k \geq \Delta(G) \geq 5$, $k \in \mathbb{N}$. D'où, $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 3$.*

Preuve.

Observation 2.25. *Nous considérons uniquement le cas où, $k \geq \Delta(G) \geq 5$. Si $\Delta(G) \leq 4$, alors du Théorème 2.2 on obtient $\chi_i(G) \leq 2\Delta(G) \leq \Delta(G) + 3 \leq k + 3$.*

Soit H un contre-exemple du théorème minimisant $|E(H)| + |V(H)|$. Par hypothèse, il existe $k \geq \max\{\Delta(G), 5\}$ tel que H n'admet pas une $(k + 3, 3)$ -coloration d'incidences. Soit $k \geq \max\{\Delta(G), 5\}$ le plus petit entier tel que H n'admet pas une $(k + 3, 3)$ -coloration d'incidences. En utilisant la Remarque 2.8, on a $k = \max\{\Delta(G), 5\}$. De plus, par minimalité, on peut supposer que H est connexe.

Propriétés structurelles de H

Lemme 2.26. *Le contre-exemple H ne contient pas de :*

1. 1-sommet,
2. 2-sommet,
3. 3-sommet adjacent à un 3-sommet,
4. $(3, 4, 4)$ -triangle.

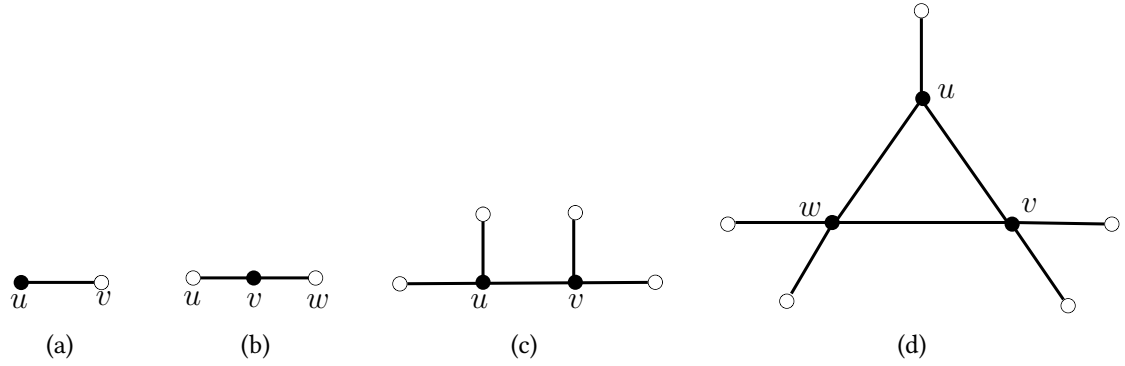


FIGURE 2.9 – Configurations réductibles du Lemme 2.26

Pour prouver le Lemme 2.26, nous supposons par contradiction que les configurations décrites dans H existent. Puis, nous construisons un graphe H' obtenu à partir de H en supprimant une arête ou un sommet de H . Le graphe H' ne contient pas de C_4 ni de C_3 . Par minimalité de H , le graphe H' admet une $(k' + 3, 3)$ -coloration d'incidences pour tout $k' \geq \max\{\Delta(H'), 5\}$. Comme $\Delta(H) \geq \Delta(H')$, l'ensemble des entiers k' contient l'ensemble des entiers k . D'où, pour la valeur $k' = k$, H' admet une $(k + 3, 3)$ -coloration d'incidences ϕ' . Finalement, pour chaque cas, on prouve une contradiction en étendant ϕ' à une $(k + 3, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H .

- Démonstration.*
1. En utilisant le même raisonnement que dans la preuve du Théorème 2.16.1, Lemme 2.21.1, il est facile de prouver le Lemme 2.26.1.
 2. En utilisant le même raisonnement que dans la preuve du Théorème 2.16.1, Lemme 2.21.2, il est facile de prouver le Lemme 2.26.2.
 3. Supposons que H contient un 3-sommet u adjacent à un 3-sommet v (Voir Figure 2.9(c)). Par minimalité de H , le graphe $H' = H \setminus \{uv\}$ admet une $(k + 3, 3)$ -coloration d'incidences ϕ' . Rappelons que l'on dispose d'au moins 8-couleurs et $|\phi'(A_u)| \leq 2$ et $|\phi'(A_v)| \leq 2$. Notons que :

$$|F_H^{\phi'}(u, uv)| = |\phi'(I_u) \cup \phi'(A_u) \cup \phi'(I_v)| \leq 2 + 2 + 2 = 6$$

D'où, au moins $k - 3 \geq 2$ couleurs sont libres pour colorer (u, uv) . On colore (u, uv) avec l'une d'entre elles. Pour (v, uv) , en utilisant le même calcul, au plus 7 couleurs sont interdites pour colorer cette incidence. D'où, il existe au moins $k - 4 \geq 1$ couleurs libres pour colorer (v, uv) . Ainsi, nous pouvons étendre la coloration à H , contradiction.

4. Supposons que H contient une 3-face $[uvw]$ telle que $d(u) = 3$ et $d(v) = d(w) = 4$. Soit t un voisin de u différent de v et w (Voir Figure 2.9(d)). Par minimalité de H , le graphe $H' = H \setminus \{uv, uw\}$ admet une $(k + 3, 3)$ -coloration d'incidences. On étend ϕ' à une $(k + 3, 3)$ -

coloration d'incidences ϕ de H comme suit : Rappelons que nous disposons d'au moins 8 couleurs. Notons que :

- $|F_H^{\phi'}(v, vu)| = |\phi'(I_v) \cup \phi'(A_v) \cup \phi'(I_u)| \leq 3 + 3 + 1 = 7$. D'où, on a une couleur disponible pour colorer (v, vu) .
- De la même manière, on a une couleur disponible pour (w, wu) .
- On a 3 couleurs, appartenant à $\phi'(A_v)$, disponibles pour colorer (u, uv) et 3 couleurs, appartenant à $\phi'(A_w)$, disponibles pour colorer (u, uw) .

Sans perte de généralité, supposons que nous sommes dans la configuration décrite dans la Figure 2.10.

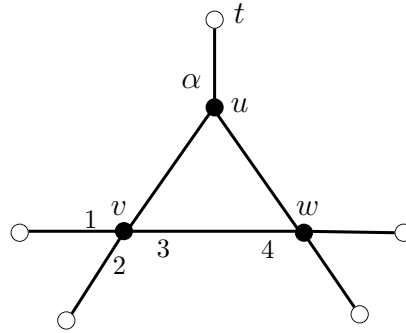


FIGURE 2.10 - $|F_H^{\phi'}(u, uv)| \leq 7$

Premièrement, si $\phi'(u, ut) = 3$ ou $\phi'(u, ut) = 4$, alors on recolore (u, ut) avec une couleur α différente de 3 et 4 (il est possible de le faire car on a 3 couleurs, appartenant à $\phi'(A_t)$, disponibles pour colorer (u, ut)).

On colore (v, vu) avec sa couleur disponible, dite a , et (w, wu) avec une de ses couleurs disponibles, dite b , puis on considère les deux cas suivants :

- Supposons que nous pouvons colorer (u, uv) avec 4. Si on peut colorer (u, uw) avec 3, alors on obtient une contradiction. Si on ne peut pas colorer (u, uw) avec 3, alors ceci signifie que $\phi'(t, tu) = 3$ (notons que $\alpha \neq 3$). Si nous ne pouvons pas colorer (u, uw) avec une autre couleur de $\phi'(A_w)$, alors $\phi'(A_w) = \{3, a, \alpha\}$. Dans ce cas, on permute entre 3 et a dans $\phi'(I_v)$ puis on colore (u, uw) avec une couleur a , ce qui constitue une contradiction.
- Supposons que nous ne pouvons pas colorer (u, uv) avec 4, ceci signifie que $\phi'(t, tu) = 4$ (notons $\alpha \neq 4$). Si nous ne pouvons pas colorer (u, uv) avec une autre couleur de $\phi'(A_v)$ (sinon on peut colorer (u, uv) avec 3, et on obtient une contradiction) ceci revient à dire que $\phi'(A_v) = \{4, b, \alpha\}$. Alors on permute entre 4 et b dans $\phi'(I_w)$ et on colore (u, uv) avec une couleur b et (u, uw) avec la couleur 3, contradiction.

□

Procédure de déchargement :

D'après le Corollaire 1.10.2 du Chapitre 1, on a

$$\sum_{v \in V(H)} (2d(v) - 6) + \sum_{f \in F(H)} (r(f) - 6) = -12 \quad (2.2)$$

On définit une fonction poids $\omega : V(H) \cup F(H) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\omega(v) = 2d(v) - 6$ si $x \in V(H)$ et $\omega(f) = r(f) - 6$ si $f \in F(H)$. D'après l'équation (2.2) la somme totale des poids est égale à -12. Dans ce qui suit, nous définissons les règles de déchargement (R1) et (R2) puis, redistribuons les poids suivant ces règles. Une fois la procédure de déchargement terminée, une nouvelle fonction poids ω^* est créée. Cependant, la somme totale des poids reste fixe et inchangée. Nous allons alors montrer que $\omega^*(x) \geq 0$ pour tout $x \in V(H) \cup F(H)$. Ce qui nous conduit à la contradiction suivante :

$$0 \leq \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} \omega(x) = -12 < 0$$

Ainsi, aucun contre-exemple n'existe.

Les règles de déchargements sont définies comme suit :

(R1) Chaque 4-sommet, donne 1 à chaque 3-face incidente.

(R2) Chaque d -sommet, pour $d \geq 5$, donne 2 à chaque 3-face incidente.

Soit $v \in V(H)$ un d -sommet. D'après le Lemme 2.26.1 et Lemme 2.26.2, $d \geq 3$. Comme H ne contient pas de C_4 , alors il n'existe pas de 3-faces adjacentes dans H . Considérons les cas suivants :

Cas $d = 3$. On a $\omega(v) = 0$. v ne donne et ne reçoit rien. D'où : $\omega^*(v) = \omega(v) = 0$.

Cas $d = 4$. $\omega(v) = 2$. Il est facile de voir que v est incident à au plus deux 3-faces. D'après

(R1) on a $\omega^*(v) \geq 2 - 2 \times 1 = 0$.

Cas $d \geq 5$. On a $\omega(v) = 2d - 6$. Il est facile de voir que $m_3(v) \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$. D'après (R2), $\omega^*(v) \geq 2d - 6 - 2 \times \lfloor \frac{d}{2} \rfloor \geq 0$.

Soit $f \in F(H)$ une d -face.

Cas $d = 3$. On a $\omega(f) = -3$. Soit $f = [rst]$. Considérons les cas suivants :

1. Si $d(r) = 3$. D'après le Lemme 2.26.3, r est l'unique 3-sommet et par le Lemme 2.26.4, $d(s) \geq 4$ et $d(t) \geq 5$. D'après (R1) et (R2), on $\omega^*(f) \geq -3 + 1 \times 1 + 1 \times 2 = 0$.
2. Si $d(r) \geq 4$, $d(s) \geq 4$ et $d(t) \geq 4$. Par (R1) et (R2), $\omega^*(f) \geq -3 + 3 \times 1 = 0$.

Cas $d \geq 6$. La face ne donne et ne reçoit rien, $\omega^*(f) = \omega(f) \geq 0$.

Une fois la procédure de déchargement terminée, les nouveaux poids de toutes les faces et de tous les sommets sont positifs. On conclut que H ne peut pas exister. Ceci achève la preuve du Théorème 2.24. \square

2.7 Graphes de degré moyen maximum borné

Hosseini Dolama et al. [82], se sont intéressés au problème de la coloration d'incidences des graphes k -dégénérés. Ils ont démontré le théorème suivant :

Théorème 2.27. [82] *Soient k un entier et G un graphe k -dégénéré. Alors G admet une $(\Delta(G) + 2k - 1, k)$ -coloration d'incidences.*

Comme pour tout entier k , un graphe G avec $\text{mad}(G) < k$ est $(k - 1)$ -dégénéré, le Corollaire 2.28 découle directement du Théorème 2.27

Corollaire 2.28. *Soient k un entier et G un graphe. Si $\text{mad}(G) < k$ alors G admet une $(\Delta(G) + 2k - 3, k - 1)$ -coloration d'incidences.*

En attribuant une borne inférieure au degré maximum $\Delta(G)$ de G , nous avons réduit le nombre de couleurs nécessaires pour avoir une coloration d'incidences ; nous avons prouvé le théorème suivant :

Théorème 2.29. [19] *Soient k un entier, et G un graphe de degré maximum $\Delta(G)$ et de degré moyen maximum $\text{mad}(G) < k$.*

1. *Si $\Delta(G) \geq \frac{k^2}{2} + \frac{3k}{2} - 2$, alors G admet une $(\Delta(G) + k - 1, k - 1)$ -coloration d'incidences.*
2. *Pour tout $\alpha > 0$, si $\Delta(G) \geq \frac{3\alpha+1}{2\alpha}k - 2$, alors G admet une $(\Delta(G) + (1 + \alpha)k - 1, (1 + \alpha)k - 1)$ -coloration d'incidences.*

Preuve. Soient $d \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$. On considère \mathcal{G}_d la classe de graphes de degré maximum au plus d , et $\mathcal{H}_{d,\alpha} \subseteq \mathcal{G}_d$ le sous-ensemble de graphes n'admettant pas une $(d + (1 + \alpha)k - 1, (1 + \alpha)k - 1)$ -coloration d'incidences.

Propriétés structurelles :

Lemme 2.30. *Si G est un graphe minimal dans $\mathcal{H}_{d,\alpha}$, alors tout $u \in V(G)$ avec $d(u) \leq k - 1$ a plus que $(1 + \alpha)k - d(u)$ voisins de degré au moins $d - k + 2$.*

Démonstration. Soient G dans $\mathcal{H}_{d,\alpha}$ un contre-exemple minimal du Théorème 2.29, et u un sommet de G ne vérifiant pas la propriété du Lemme 2.30. Soient $d(u) = p$ et v_1, \dots, v_p les p voisins de u , triés par ordre décroissant des degrés.

Par hypothèse, pour tout $p \geq i > (1 + \alpha)k - p$, on a $d(v_i) \leq d - k + 1$. Par minimalité de G , le graphe $G' = G \setminus \{u\}$ admet une $(d + (1 + \alpha)k - 1, (1 + \alpha)k - 1)$ -coloration d'incidences. Montrons que nous pouvons étendre cette coloration à G .

Soient :

- $e_i = (u, uv_i)$, pour tout $1 \leq i \leq p$,
- $f_i = (v_i, uv_i)$, pour tout $1 \leq i \leq (1 + \alpha)k - p$,
- $g_i = (v_i, uv_i)$, pour tout $p \geq i > (1 + \alpha)k - p$.

Lorsqu'on parle des f_i , nous faisons référence à l'ensemble $\{f_i/1 \leq i \leq (1 + \alpha)k - p\}$.

Notons que $(1 + \alpha)k - p \geq 1$. Les e_i et les g_i sont définis de la même manière.

Évaluons maintenant le nombre de couleurs disponibles, dans le pire cas, pour colorer chacune des incidences e_i , f_i et g_i .

- Si $1 \leq i \leq p$, considérons les incidences e_i . Nous devons nous assurer qu'au plus $(1 + \alpha)k - 1$ différentes couleurs apparaissent sur les incidences faibles de v_i . Soit S_i l'ensemble de couleurs apparaissant sur les incidences fortes de v_i . On a $|S_i| = d(v_i) - 1 \leq d - 1$. Comme il y a $d + (1 + \alpha)k - 1$ couleurs différentes, et que par hypothèse, il existe un ensemble W_i de $(1 + \alpha)k - 1$ différentes couleurs, où $W_i \cap S_i = \emptyset$, pour lequel les incidences faibles de v_i sont coloriées. Alors, les incidences e_i peuvent être coloriées avec n'importe quelle couleur de W_i , ce qui nous donne $(1 + \alpha)k - 1$ couleurs disponibles pour colorer les incidences e_i .
- Si $i \leq (1 + \alpha)k - p$, considérons les incidences f_i . Pour les $d + (1 + \alpha)k - 1$ couleurs initiales, on supprime W_i (soit $(1 + \alpha)k - 1$ couleurs) pour les incidences faibles de v_i , et au plus $d(v_i) - 1 \leq d - 1$ couleurs pour les incidences fortes de v_i . Donc, f_i a au moins une couleur libre, qui par construction n'appartient pas à W_i .
- Si $i > (1 + \alpha)k - p$, considérons les incidences g_i . Des $d + (1 + \alpha)k - 1$ couleurs initiales, on élimine W_i (soit $(1 + \alpha)k - 1$ colors) pour les incidences faibles de v_i , et $d(v_i) - 1 \leq d - k$ pour les incidences fortes de v_i . Donc, g_i a au moins k couleurs disponibles.

Nous allons étendre la coloration à G en coloriant les incidences f_i , e_i et g_i , dans cet ordre, comme suit : comme tous les v_i sont des sommets distincts alors, chaque deux incidences de type (v_i, uv_i) ne peuvent pas être adjacentes. On commence par colorer indépendamment toutes les incidences de f_i par une couleur qui n'apparait pas dans W_i . Pour tout $i > (1 + \alpha)k - p$, e_i a au moins $(1 + \alpha)k - 1 - ((1 + \alpha)k - p) = p - 1$ couleurs disponibles. Pour tout $i \leq (1 + \alpha)k - p$, on refait la même analyse, sauf que f_i a été coloré par une couleur qui n'était pas disponible pour e_i , ce qui lui permet d'avoir une couleur de plus : e_i a au moins $(1 + \alpha)k - 1 - ((1 + \alpha)k - p - 1) = p$ couleurs disponibles. Par conséquence, on peut colorer les e_i par indice décroissant. Enfin, chaque g_i a au moins $k - p \geq 1$ couleurs disponibles, on colore les incidences de g_i indépendamment. Comme $p = d(u) \leq k - 1 \leq (1 + \alpha)k - 1$, la

coloration obtenue pour G est une $(d + (1 + \alpha)k, (1 + \alpha)k)$ -coloration d'incidences, ce qui est une contradiction. □

Remarque 2.31. *Le Lemme 2.30 implique que G ne contient pas de sommets de degré au plus $\frac{(1+\alpha)k}{2}$.*

Procédure de déchargement :

Essayons de trouver des conditions suffisantes pour d qui assurent que tous les graphes minimaux dans $\mathcal{H}_{d,\alpha}$ ont un degré moyen d'au moins k . Pour ce faire, nous utilisons la procédure de déchargement. Soit G un graphe minimal dans $\mathcal{H}_{d,\alpha}$. On assigne un poids $\omega(u) = d(u) - k$ à tout sommet u de G . Si on arrive à redistribuer les poids de telle sorte que tout sommet ait un poids positif, alors $ad(G) \geq k$. Notons que seuls les sommets de degré $k - 1$ ou moins ont un poids négatif. La règle de déchargement évidente pour assurer notre résultat est la suivante : Soient $M, c \in \mathbb{R}$.

R : Chaque sommet de degré au moins M donne un poids c à chaque sommet incident de degré au plus $(k - 1)$.

Nous essayons de trouver une bonne valeur pour M et c tel qu'aucun sommet n'ait un poids négatif après la procédure de déchargement.

Pour que R soit bien définie et que on puisse appliquer le Lemme 2.30, nous devons nous assurer que tout sommet de degré au plus $k - 1$ a suffisamment de voisins de degré au moins M , on a besoin de (2.3).

$$k \leq M \leq d - k + 2 \tag{2.3}$$

Pour que tout sommet de degré au moins M ait un poids positif après l'application de R , il suffit de satisfaire $M - k - c \times M \geq 0$, dans le cas où, tous les voisins de degré inférieur à k ont besoin de recevoir c . D'où l'inégalité (2.4),

$$M \geq \frac{k}{1 - c} \tag{2.4}$$

Supposons que (2.3) et (2.4) soient vérifiées. Tout sommet de degré inférieur à M et d'au moins k n'est pas concerné par R et a un poids positif. Nous devons alors établir une condition suffisante pour que les sommets de degré au plus $k - 1$ aient un poids positif. D'après la Remarque 2.31, G ne contient pas de sommet de degré $\frac{(1+\alpha)k}{2}$ ou moins. Comme k est un entier, alors que $(1 + \alpha)k$ ne l'ait pas toujours, on distingue le cas pour $\alpha = 0$ du reste. Soit u un sommet de degré p d'au plus $k - 1$.

1. Supposons que $\alpha = 0$. D'après le Lemme 2.30, u a plus que $k - p$ (ainsi au moins $k - p + 1$) voisins de degré au moins $d - k + 2 \geq M$. Donc u reçoit au moins $(k - p + 1) \times c$. Pour

que u ait un poids final positif, il suffit d'avoir $p - k + c \times (k - p + 1) \geq 0$, d'où :

$$c \geq 1 - \frac{1}{k + 1 - p} \quad (2.5)$$

La plus forte contrainte provient de la plus petite valeur possible de p , i.e. $\frac{k+1}{2}$ (si k est impair, sinon p est d'au moins $\frac{k}{2} + 1 > \frac{k+1}{2}$). On peut donc remplacer (2.5) par (2.6).

$$c \geq 1 - \frac{2}{k + 1} \quad (2.6)$$

On sait que si d , M et c satisfont (2.3), (2.4) et (2.6), alors $\text{ad}(G) \geq k$ (où, $\text{ad}(G)$ est le degré moyen de G). On prend alors $c = 1 - \frac{2}{k+1}$, $M = \frac{k(k+1)}{2}$. Il en résulte que tout $d \geq \frac{k(k+3)}{2} - 2$ garanti la conclusion.

2. Supposons que $\alpha > 0$. D'après le Lemme 2.30, u a plus que $(1 + \alpha)k - p$ voisins de degré au moins $d - k + 2 \geq M$. Par conséquent, u reçoit au moins $((1 + \alpha)k - p) \times c$. Pour que u ait un poids final positif, il suffit d'avoir $p - k + c \times ((1 + \alpha)k - p) \geq 0$, c'est à dire $c \geq 1 - \frac{\alpha k}{(1+\alpha)k-p}$. La plus grande contrainte est quand p est le plus petit possible, i.e. $\frac{(1+\alpha)k}{2}$. D'où, (2.7).

$$c \geq 1 - \frac{2\alpha k}{(1 + \alpha)k} = 1 - \frac{2\alpha}{1 + \alpha} \quad (2.7)$$

On sait que d , M et c satisfont (2.3), (2.4) et (2.7), alors $\text{ad}(G) \geq k$. On peut prendre $c = 1 - \frac{2\alpha}{1+\alpha}$, $M = \frac{(\alpha+1)k}{2\alpha}$. Il en résulte que tout $d \geq \frac{k(3\alpha+1)}{2\alpha} - 2$ garanti la conclusion. \square

Lorsqu'on considère de petites valeurs pour k , le Théorème 2.29.1 ne peut pas rivaliser avec des résultats spécifiques. Dans la Proposition 2.32, nous recueillons les résultats connus dans la littérature et qui concernent la coloration d'incidences des graphes de degré moyen maximum borné par des petites valeurs.

Proposition 2.32. *Soit G est un graphe de degré maximum Δ et de degré moyen maximum $\text{mad}(G)$. Si*

1. $\text{mad}(G) < 3$, alors $\chi_i(G) \leq \Delta + 3$. [81]
2. $\text{mad}(G) < 3$ et $\Delta \geq 5$, alors $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$. [81]
3. $\text{mad}(G) < \frac{22}{9}$, alors $\chi_i(G) \leq \Delta + 2$. [81]
4. $\text{mad}(G) < \frac{7}{3}$ et $\Delta \geq 4$, alors $\chi_i(G) = \Delta + 1$. [20]
5. $\text{mad}(G) < \frac{12}{5}$ et $\Delta \geq 5$, alors $\chi_i(G) = \Delta + 1$. [20]
6. $\text{mad}(G) < \frac{5}{2}$ et $\Delta \geq 6$, alors $\chi_i(G) = \Delta + 1$. [20]
7. $\text{mad}(G) < \frac{18}{7}$ et $\Delta \geq 8$, alors $\chi_i(G) = \Delta + 1$. [20]

Pour le cas des graphes 3-dégénérés, on a

Théorème 2.33 (Hosseini Dolama et Sopena [81]). *Tout graphe 3-dégénéré G admet une $(\Delta(G) + 4, 3)$ -coloration d'incidences. Ainsi, $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 4$.*

Comme tout graphe G ayant un degré moyen maximum $\text{mad}(G) < 4$ est 3-dégénéré, le corollaire suivant découle directement du Théorème 2.33 :

Corollaire 2.34. *Si G est un graphe avec $\text{mad}(G) < 4$, alors G admet une $(\Delta(G) + 4, 3)$ -coloration d'incidences.*

Par le Théorème 2.35, nous améliorons les résultats précédents en donnant de nouvelles bornes pour un degré moyen maximum faible.

Théorème 2.35. [19] *Soit G un graphe de degré maximum $\Delta(G)$ et de degré moyen maximum $\text{mad}(G)$, si*

1. *$\text{mad}(G) < 4$ et $\Delta(G) \geq 7$, alors $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 3$.*
2. *$\text{mad}(G) < \frac{9}{2}$ et $\Delta(G) \geq 9$, alors $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 4$.*
3. *$\text{mad}(G) < 6$ et $\Delta(G) \notin \{7, 8, 9, 10, 11\}$, alors $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 6$.*
4. *$\text{mad}(G) < 6$ et $7 \leq \Delta(G) \leq 11$, alors $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 7$.*

Notations. Un (l_1, \dots, l_k) -sommet est un k -sommet ayant k -voisins x_1, \dots, x_k tel que pour $i \in \{1, \dots, k\}$, $d(x_i) = l_i$. Nous utilisons la notation l_i^+ (respectivement, l_i^-), si x_i est un sommet de degré au moins l_i (respectivement, au plus l_i).

Pour prouver le Théorème 2.35, nous utilisons une procédure de déchargement. On procède par contradiction. Pour chacun des cas, nous considérons un contre-exemple H minimisant $|E(H)| + |V(H)|$ tel que $\text{mad}(H) < m$ où, $m \in \{4, \frac{9}{2}, 5, 6\}$. Puis nous exhibons un ensemble de configuration réductibles que H ne peut pas contenir. On définit une fonction poids $\omega : V(H) \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\omega(x) = d(x) - m$. D'après l'hypothèse émise sur le degré moyen maximum, la somme totale des poids est strictement négative. Dans la prochaine étape, on définit les règles de déchargement puis on redistribue les poids, une fois le déchargement terminé, on obtient une nouvelle fonction poids ω^* . Durant la procédure de déchargement la somme totale des poids reste fixe. Néanmoins, nous pouvons montrer que $\omega^*(x) \geq 0$ pour tout $x \in V(H)$. Ce qui nous donne la contradiction suivante :

$$0 \leq \sum_{x \in V(H)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(H)} \omega(x) < 0$$

et nous pouvons conclure qu'aucun contre-exemple ne peut exister.

2.7.1 Preuve du Théorème 2.35.1

On prouve une version plus forte du Théorème 2.35.1

Théorème 2.36. *Soit k un entier. Tout graphe G avec $\text{mad}(G) < 4$ et $k \geq \Delta(G) \geq 7$, admet une $(k + 3, 3)$ -coloration d'incidences. Donc, $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 3$.*

Preuve. On procède par contradiction. Soit H un contre-exemple au Théorème 2.36 minimisant $|E(H)| + |V(H)|$. Par hypothèse, il existe un $k \geq \max\{\Delta(H), 7\}$ tel que H n'admet pas une $(k + 3, 3)$ -coloration d'incidences. Soit $k \geq \max\{\Delta(H), 7\}$ le plus petit entier tel que H n'admet pas une $(k + 3, 3)$ -coloration d'incidences. En utilisant la Remarque 2.8, nous avons $k = \max\{\Delta(H), 7\}$. De plus, par minimalité, on peut supposer que H est connexe, sinon on peut colorer indépendamment chaque composante connexe.

Propriétés structurelles de H :

Lemme 2.37. *Le contre-exemple H ne contient pas les configurations (C1) à (C6) (voir Figure 2.11) suivantes :*

- (C1) un 1-sommet,
- (C2) un 2-sommet,
- (C3) un 3-sommet adjacent à un 3-sommet,
- (C4) un $((\Delta - 2)^-, (\Delta - 1)^-, \Delta^-)$ -sommet,
- (C5) un $(3, 3, (\Delta - 1)^-, \Delta^-)$ -sommet,
- (C6) un $(3, 4^-, 4^-, 4^-)$ -sommet.

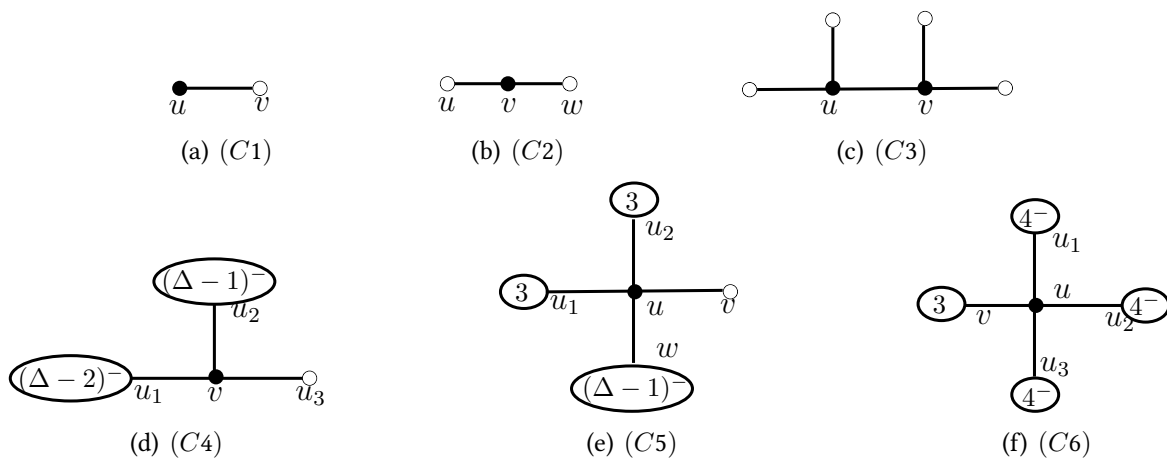


FIGURE 2.11 – Configurations réductibles du Lemme 2.37

Démonstration. Pour prouver le Lemme 2.37, nous supposons par contradiction que H contient l'une des configurations (C 1) à (C 6). Puis nous construisons un graphe H' obtenu à partir de H en supprimant une arête ou un sommet de H . Le graphe H' a un $\text{mad}(H') \leq \text{mad}(H) < 4$. Par minimalité de H , le graphe H' admet une $(k' + 3, 3)$ -coloration d'incidences pour tout $k' \geq \max\{\Delta(H'), 7\}$. Comme $\Delta(H) \geq \Delta(H')$, l'ensemble des entiers k' contient l'ensemble des entiers k . Donc pour la valeur $k' = k$, H' admet une $(k + 3, 3)$ -coloration d'incidences ϕ' . Pour chaque cas, on prouve une contradiction en étendant la coloration ϕ' à une $((k + 3, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H .

1. Supposons que H contient la configuration (C1). Autrement dit, H contient un 1-sommet u et v l'unique voisin u dans H (voir Figure 2.11(a)). On considère $H' = H \setminus \{u\}$. Par minimalité de H , H' admet une $(k + 3, 3)$ -coloration d'incidences ϕ' . Afin d'étendre ϕ' à une $(k + 3, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H on procède comme suit :

Comme pour tout $w \in V(H')$, $|\phi'(A_w)| \leq 3$, on a

$$|F_H^{\phi'}(v, vu)| = |\phi'(I_v) \cup \phi'(A_v) \cup \phi'(I_u)| \leq \Delta(H) - 1 + 3 + 0 = \Delta(H) + 2 \leq k + 2.$$

Alors il existe au moins une couleur, dite α , tel que $\alpha \notin F_H^{\phi'}(v, vu)$. On pose $\phi(v, vu) = \alpha$ et on peut observer que $|\phi'(A_u)| = 1 \leq 3$. Comme $|\phi'(A_v)| \leq 3$, il suffit de poser $\phi(u, uv) = \beta$ pour toute couleur β appartenant à $\phi'(A_v)$. De cette manière nous avons étendu la coloration ϕ' à H , contradiction.

2. Supposons que H contient la configuration (C2). Autrement dit, H contient un 2-sommet v et soient u, w les deux voisins de v dans H (voir Figure 2.11(b)). Par minimalité de H , $H' = H \setminus \{v\}$ admet une $(k + 3, 3)$ -coloration d'incidences ϕ' . Nous étendons ϕ' à une $(k + 3, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H comme suit :

$$|F_H^{\phi'}(w, wv)| = |\phi'(I_w) \cup \phi'(A_w) \cup \phi'(I_v)| \leq \Delta(H) - 1 + 3 + 0 = \Delta(H) + 2 \leq k + 2.$$

Donc, il existe au moins une couleur, dite β , tel que $\beta \notin F_H^{\phi'}(w, wv)$. On pose $\phi(w, wv) = \beta$. En refaisant le même calcul, il est facile de voir qu'il existe au moins une couleur, dite α , tel que $\alpha \notin F_H^{\phi'}(u, uv)$. On pose $\phi(u, uv) = \alpha$. On a alors $|\phi(A_v)| = 2 \leq 3$. Considérons les deux cas suivants :

- (i) Si $|\phi'(A_u)| = 3$ alors on colore (v, vu) avec la couleur $\gamma \in \phi(A_u) \setminus \{\beta\}$
- (ii) Si $|\phi'(A_u)| \leq 2$ alors on colore (v, vu) avec une couleur $\gamma \notin (F_H^{\phi'}(v, vu) \cup \{\beta\})$ (notons que nous avons deux choix possibles).

Pour chacun des deux cas, nous pouvons voir que $|\phi(A_u)| \leq 3$.

- (i) Si $|\phi'(A_w)| = 3$ alors on colore (v, vw) avec la couleur $\zeta \in \phi(A_w) \setminus \{\alpha, \gamma\}$ et on a $|\phi(A_w)| = 3$.
- (ii) Si $|\phi'(A_w)| \leq 2$ alors on colore (v, vw) avec une couleur $\zeta \notin (F_H^{\phi'}(v, vw) \cup \{\alpha, \gamma\})$ et on a $|\phi(A_w)| \leq 3$.

Nous pouvons donc étendre la coloration à H , contradiction.

3. Supposons que H contient la configuration (C3). Autrement dit, H contient un 3-sommet u adjacent à 3-sommet v (voir Figure 2.11(c)). Par minimalité de H , $H' = H \setminus \{uv\}$ admet une $(k + 3, 3)$ -coloration d'incidences ϕ' . Nous étendons ϕ' à une $(k + 3, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H comme suit : On a

$$|\phi'(A_u)| \leq 2 \text{ et } |\phi'(A_v)| \leq 2$$

$$|F_H^{\phi'}(u, uv)| = |\phi'(I_u) \cup \phi'(A_u) \cup \phi'(I_v)| \leq 2 + 2 + 2 = 6$$

Il existe au moins $k - 3 \geq 4$ couleurs libres pour colorer (u, uv) . On choisit alors une couleur pour colorer (u, uv) . De la même manière, au plus 7 couleurs sont interdites pour colorer l'incidence (v, vu) . D'où, il existe au moins $k - 4 \geq 3$ couleurs libres pour colorer (v, vu) . Ce qui suffit pour étendre la coloration à H , contradiction.

4. Supposons que H contient la configuration (C4). Autrement dit, H contient une $((\Delta - 2)^-, (\Delta - 1)^-, \Delta^-)$ -sommet v . Soient u_1, u_2 et u_3 les trois voisins de v dans H tel que $d(u_1) \leq \Delta - 2$, $d(u_2) \leq \Delta - 1$ et $d(u_3) \leq \Delta$ (voir Figure 2.11(d)). Considérons $H' = H \setminus \{vu_1\}$. Par minimalité de H , H' admet une $(k + 3, 3)$ -coloration d'incidences ϕ' . Nous étendons ϕ' à une $(k + 3, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H comme suit :

- (1) Si $|\phi'(A_{u_1})| \leq 2$, alors $|F_H^{\phi'}(v, vu_1)| = |\phi'(I_v) \cup \phi'(A_v) \cup \phi'(I_{u_1})| \leq 2 + 2 + \Delta(H) - 3 = \Delta(H) + 1 \leq k + 1$, donc il existe au moins une couleur, dite α , tel que $\alpha \notin F_H^{\phi'}(v, vu_1)$. On pose $\phi(v, vu_1) = \alpha$ et on a $|\phi(A_{u_1})| \leq 2 + 1 = 3$. Pour l'incidence (u_1, u_1v) , on a $|F_H^{\phi'}(u_1, u_1v)| = |\phi'(I_{u_1}) \cup \phi'(A_{u_1}) \cup \phi'(I_v)| \leq \Delta(H) - 3 + 3 + 2 = \Delta(H) + 2 \leq k + 2$. Alors, il existe au moins une couleur $\beta \notin F_H^{\phi'}(u_1, u_1v)$. On pose $\phi(u_1, u_1v) = \beta$, contradiction.

- (2) Si $|\phi'(A_{u_1})| = 3$. On distingue deux cas :

Cas 1 : Supposons que $\phi'(A_{u_1}) \not\subseteq \phi'(I_v) \cup \phi'(A_v)$, alors il existe une couleur $\alpha \in \phi'(A_{u_1}) \setminus \{\phi'(I_v) \cup \phi'(A_v)\}$. On pose $\phi(v, vu_1) = \alpha$. Comme

$$|F_H^{\phi'}(u_1, u_1v)| = |\phi'(I_v) \cup \phi'(A_{u_1}) \cup \phi'(I_{u_1})| \leq 2 + 3 + \Delta(H) - 3 = \Delta(H) + 2 \leq k + 2$$

Alors, il existe au moins une couleur disponible $\beta \notin F_H^{\phi'}(u_1, u_1v)$, on pose $\phi(u_1, u_1v) = \beta$ et on a $|\phi'(A_v)| \leq 3$, contradiction.

Cas 2 : Supposons que $\phi'(A_{u_1}) \subseteq \phi'(I_v) \cup \phi'(A_v)$, dans ce cas, seuls les couleurs de $\phi'(A_{u_1})$ sont autorisées pour colorer (v, vu_1) . Sans perte de généralité, on suppose que

$\phi'(A_{u_1}) = \{1, 2, 3\}$. Notons que nous avons deux couleurs disponibles pour colorer (u_2, u_2v) . On considère les deux cas suivants :

Cas 2.1 : Si $\phi'(v, vu_2) = 1$, $\phi'(v, vu_3) = 2$ et $\phi'(u_2, u_2v) = 3$. Alors,

- (i) Si on peut changer la couleur de (u_2, u_2v) dans ϕ' et $\phi'(u_3, u_3v) \neq 3$, alors on recolore l'incidence (u_2, u_2v) et on a $3 \notin \phi'(I_v) \cup \phi'(A_v)$, puis on procède exactement comme dans le Cas 1.
- (ii) Si on peut changer la couleur de (u_2, u_2v) et $\phi'(u_3, u_3v) = 3$, alors on recolore l'incidence (u_2, u_2v) avec une couleur a et il est facile de voir que $a \neq 1$ et 2. La liste des couleurs disponibles de (v, vu_2) est $L = \phi'(A_{u_2}) = \{1, \alpha, \beta\}$ où 3 et a n'appartiennent pas à L . On recolore (v, vu_2) avec une couleur différente de 1, 2 et on a $1 \notin \phi'(I_v) \cup \phi'(A_v)$, puis on procède exactement comme pour le Cas 1.
- (iii) Si on ne peut pas changer la couleur de (u_2, u_2v) , ça revient à dire que les couleurs disponibles pour (u_2, u_2v) sont 3 et 2. La liste des couleurs disponibles pour (v, vu_2) est $L = \phi'(A_{u_2}) = \{1, \alpha, \beta\}$ où 3, 2 n'appartiennent pas à L . On colore (v, vu_2) avec une couleur différente de 1 et $\phi'(u_3, u_3v)$. On a $1 \notin \phi'(I_v) \cup \phi'(A_v)$, puis on procède de la même manière que le Cas 1.

Cas 2.2 : Si $\phi'(v, vu_2) = 1$, $\phi'(u_2, u_2v) = 2$, $\phi'(u_3, u_3v) = 3$ et $\phi'(v, vu_3) = b_3$ avec $b_3 \notin \{1, 2, 3\}$. Alors,

- (i) Si on peut changer la couleur de (u_2, u_2v) , alors on recolore l'incidence (u_2, u_2v) et on a $2 \notin \phi'(I_v) \cup \phi'(A_v)$, puis on procède exactement comme pour le Cas 1.
- (ii) Si on ne peut pas changer la couleur de (u_2, u_2v) , ça revient à dire que les couleurs disponibles pour (u_2, u_2v) sont 2 et b_3 . La liste des couleurs disponibles pour (v, vu_2) est $L = \phi'(A_{u_2}) = \{1, \alpha, \beta\}$ et $b_3, 2$ n'appartiennent pas à L . On colore (v, vu_2) avec une couleur différente de 1 et 3, et on a $1 \notin \phi'(I_v) \cup \phi'(A_v)$, puis on procède de la même manière que dans le Cas 1.

Pour chacun des cas, on a réussi à étendre la coloration, contradiction.

5. Supposons que H contient la configuration (C5). Autrement dit, H contient un $(3, 3, (\Delta - 1)^-, \Delta^-)$ -sommet u . Soient u_1, u_2, v et w les voisins de u tel que $d(u_1) = d(u_2) = 3$, $d(v) \leq \Delta$ et $d(w) \leq \Delta - 1$ (voir Figure 2.11(e)). Considérons $H' = H \setminus \{u\}$. Par minimalité de H , H' admet une $(k + 3, 3)$ -coloration d'incidences ϕ' . En utilisant le même calcul que précédemment, on a

- (a) au moins une couleur libre pour colorer (v, vu) .
- (b) au moins 2 couleurs libres pour colorer (w, wu) .
- (c) au moins $k - 1 \geq 6$ couleurs libres pour colorer (u_i, u_iu) , $i \in \{1, 2\}$. On note par L_i la liste des couleurs disponibles de (u_i, u_iu) , $i \in \{1, 2\}$.

- (d) au moins $k + 1 \geq 8$ couleurs libres pour colorer (u, uu_i) , $i \in \{1, 2\}$.
- (e) Un ensemble de 3 couleurs libres pour colorer (u, uv) et un ensemble de 3 couleurs libres pour colorer (u, uw) ($\phi'(A_v)$ et $\phi'(A_w)$).

Nous allons étendre ϕ' à une $(k+3, 3)$ -coloration d'incidences ϕ de H comme suit. Soit α la couleur libre pour colorer (v, vu) . On pose $\phi(v, vu) = \alpha$. Comme $|L_1| = |L_2| = k - 1$, alors il existe une couleur $\beta \in L_1 \cap L_2$. On colore (u_i, u_iu) avec β pour $i \in \{1, 2\}$. Il est facile de voir que dans la nouvelle coloration on a $|\phi(A_u)| \leq 3$. Nous colorons les incidences non encore colorées dans l'ordre suivant :

- (a) On colore (u, uw) avec une couleur $\phi(u, uw)$ différente de α et β .
- (b) On colore (u, uv) avec une couleur $\phi(u, uv)$ différente de β et $\phi(u, uw)$.
- (c) On colore (w, wu) avec une couleur $\phi(w, wu)$ différente de $\phi(u, uv)$.
- (d) On colore (u, uu_1) avec une couleur $\phi(u, uu_1)$ différente de α , $\phi(u, uw)$, $\phi(u, uv)$ et $\phi(w, wu)$.
- (e) On colore (u, uu_2) avec une couleur $\phi(u, uu_2)$ différente de α , $\phi(u, uw)$, $\phi(u, uv)$, $\phi(w, wu)$ et $\phi(u, uu_1)$.

Nous avons donc étendu la coloration à H , contradiction.

6. Supposons que H contient la configuration (C6). Autrement dit, H contient un $(3, 4^-, 4^-, 4^-)$ -sommet u . Soit v son voisin de degré 3, u_1, u_2, u_3 les 3 voisins de degré 4^- (voir Figure 2.11(f)). On considère $H' = H \setminus \{u\}$. Par minimalité de H , H' a une $(k+3, 3)$ -coloration d'incidences ϕ' . En faisant le même calcul que précédemment, on a :

- (a) Soit $L(v)$ la liste des couleurs libres pour colorer (v, vu) . Alors $|L(v)| = k - 1 \geq 6$.
- (b) On note par L_i la liste des couleurs disponibles pour chaque incidence (u_i, u_iu) ($i \in \{1, 2, 3\}$). Alors $|L_i| = k - 3 \geq 4$.
- (c) Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ on a un ensemble des 3 couleurs disponibles pour colorer (u, uu_i) ($\phi'(A_{u_i})$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$).
- (d) On a $k + 1 \geq 8$ couleurs disponibles pour colorer (u, uv) .

Comme $|L_i| = k - 3$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Il existe au moins deux listes ayant un élément commun. Sans perte de généralité, supposons que $\alpha \in L_1 \cap L_2$. On colore (u_1, u_1u) et (u_2, u_2u) avec α . Dans chacun des cas on a $|\phi(A_v)| \leq 3$.

Nous étendons la coloration dans l'ordre suivant :

- (a) $\phi(u, uu_3)$ aura une couleur différente de α .
- (b) $\phi(u, uu_2)$ aura une couleur différente de $\phi(u, uu_3)$.
- (c) $\phi(u, uu_1)$ aura une couleur différente de $\phi(u, uu_2)$ et $\phi(u, uu_3)$.

- (d) $\phi(u_3, u_3u)$ aura une couleur différente de $\phi(u, uu_2)$ et $\phi(u, uu_1)$.
- (e) $\phi(v, vu)$ aura une couleur différente de $\phi(u, uu_1)$, $\phi(u, uu_2)$ et $\phi(u, uu_3)$.
- (f) $\phi(u, uv)$ aura une couleur différente de α , $\phi(v, vu)$, $\phi(u_3, u_3u)$ et $\phi(u, uu_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Nous avons donc étendu la coloration à H , ce qui est une contradiction.

Ceci achève la preuve du Lemme 2.37. □

Procédure de déchargement :

On définit une fonction poids $\omega : V(H) \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\omega(x) = d(x) - 4$.

Les règles de déchargement sont définies comme suit :

- (R1) Tout d -sommet, pour $d \geq 5$, donne $\frac{d-4}{d}$ à chaque 3-sommet adjacent.
- (R2) Tout d -sommet, pour $d \geq 5$, donne $\frac{d-4}{d}$ à chaque 4-sommet adjacent ayant un voisin de degré 3.
- (R3) Tout 4-sommet donne uniformément (à part égale) son nouveau poids à son voisin de degré 3.

Soit $v \in V(H)$ un d -sommet. Puisque H ne contient pas les configurations (C1) et (C2) alors $d \geq 3$. Considérons les cas suivants :

Cas $d = 4$. Observons que $\omega(v) = 0$. Comme H ne contient pas la configuration (C5), alors v a au plus deux voisins de degrés 3. Si v n'a aucun voisin de degré 3, donc v ne donne rien et ne reçoit rien et $\omega^*(v) = 0$. Considérons maintenant les deux cas suivants :

1. Si v a exactement un seul voisin de degré 3, dans ce cas, v a au moins un voisin de degré au moins 5, car H ne contient pas la configuration (C6). Donc, par (R2), v prend au moins $\frac{1}{5}$ et donne, par (R3), ce poids à ses voisins de degré 3. On a $\omega^*(v) = 0$.
2. Si v a deux voisins de degré 3. Puisque H ne contient pas la configuration (C5), alors v a deux voisins de degré au moins 7. Dans ce cas, par (R2), v reçoit au moins $2 \times \frac{3}{7}$, et donne au moins $\frac{3}{7}$ à chacun de ses voisins de degré 3 par (R3). D'où : $\omega^*(v) = 0$.

Cas $d = 3$. Observons que $\omega(v) = -1$.

1. Si v a au plus un voisin de degré 4, comme H ne contient pas la configuration (C4), ses deux autres voisins ont un degré d'au moins 7. D'après (R1) et (R3), $\omega^*(v) \geq -1 + \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{7} = \frac{2}{35} > 0$.
2. Si v a un voisin de degré 5. H ne contient pas la configuration (C4), donc ses deux autres voisins ont un degré d'au moins 7. D'après (R1), $\omega^*(v) \geq -1 + \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{7} = \frac{2}{35} > 0$.

3. Si v n'a pas de voisin de degré inférieur ou égal à 5. D'après (R1), $\omega^*(v) \geq -1 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$.

Cas $d \geq 5$. Par (R1) le sommet v satisfait $\omega^*(v) \geq d - 4 - d \times \frac{d-4}{d} \geq 0$.

à la fin de la procédure de déchargement, les nouveaux poids de tous les sommets sont positifs, nous avons bien la contradiction suivante :

$$0 \leq \sum_{x \in V(H)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(H)} \omega(x) < 0$$

D'où, le contre-exemple H ne peut pas exister, ce qui conclut la preuve du Théorème 2.35.1.

□

Remarque 2.38. Dans tout ce qui suit nous supposons, si nous en avons besoin, que $|\phi'(A_v)| = 3$. Si ce n'est pas le cas, il est facile de voir que nous pouvons compléter $\phi'(A_v)$ par une couleur qui n'apparaît pas dans $\phi'(A_v) \cup \phi'(I_v)$ afin d'avoir $|\phi'(A_v)| = 3$.

2.7.2 Preuve du Théorème 2.35.2

On prouve une version plus forte de Théorème 2.35.2

Théorème 2.39. Soit k un entier. Tout graphe G avec $\text{mad}(G) < \frac{9}{2}$ et $k \geq \Delta(G) \geq 9$, admet une $(k+4, 4)$ -coloration d'incidences. Donc, $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 4$.

Preuve. On procède par contradiction. Nous utilisons le même raisonnement que dans le Théorème 2.36. Soit H un contre-exemple du Théorème 2.39 qui minimise $|E(H)| + |V(H)|$: il existe $k \geq \max\{\Delta(H), 9\}$. Par hypothèse, il existe un $k \geq \max\{9, \Delta(H)\}$ tel que H n'admet pas une $(k+4, 4)$ -coloration d'incidences. Soit $k \geq \max\{9, \Delta(H)\}$ le plus petit entier pour lequel H n'admet pas une $(k+4, 4)$ -coloration d'incidences. En utilisant la Remarque 2.8, nous avons $k = \max\{\Delta(H), 9\}$. De plus, par minimalité, il est facile de voir que H est connexe.

Propriétés structurelles de H :

Lemme 2.40. Le contre-exemple H ne contient pas les configurations (D1) à (D5) (voir Figure 2.12) suivantes :

- (D1) un 1-sommet,
- (D2) un 2-sommet,
- (D3) un $((\Delta - 1)^-, \Delta^-, \Delta^-)$ -sommet,
- (D4) un 4-sommet adjacent à un 4^- -sommet,
- (D5) un $(5^-, 5^-, 5^-, 5^-)$ -sommet.

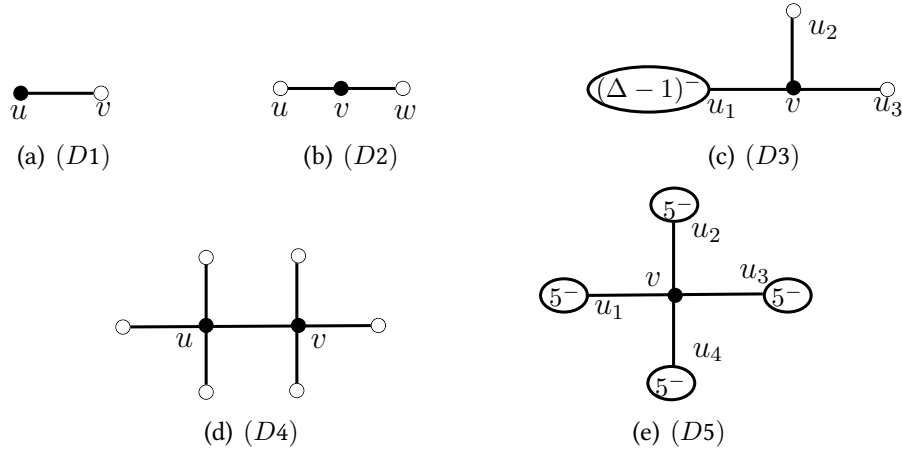


FIGURE 2.12 – Configurations réductibles du Lemme 2.40

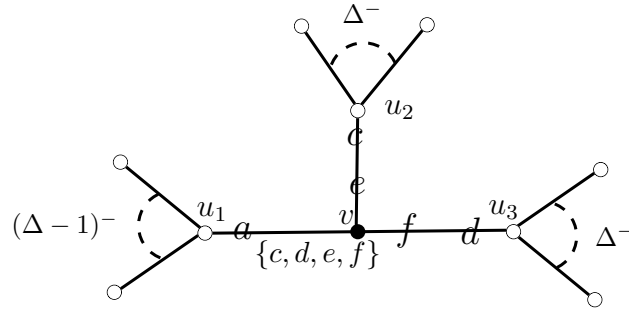
Démonstration.

1. En utilisant le même raisonnement que pour la preuve du Lemme 2.37.1, il est facile de montrer que H ne contient pas de 1-sommet.
2. En utilisant le même raisonnement que pour la preuve du Lemme 2.37.2, il est facile de montrer que H ne contient pas de 2-sommet.
3. Supposons H contient la configuration $(D3)$. Autrement dit, il existe un $((\Delta-1)^-, \Delta^-, \Delta^-)$ -sommet v dans H . Soient u_1, u_2 et u_3 les trois voisins de v dans H tel que $d(u_1) \leq \Delta - 1$, $d(u_2) \leq \Delta$ et $d(u_3) \leq \Delta$ (voir Figure 2.12(c)). Considérons $H' = H \setminus \{v\}$. Par minimalité de H , H' admet une $(k+4, 4)$ -coloration d'incidences ϕ' . Nous étendons ϕ' à une $(k+4, 4)$ -coloration d'incidences ϕ de H comme suit. On a :

$$|F_H^{\phi'}(u_1, u_1v)| = |\phi'(I_{u_1}) \cup \phi'(A_{u_1}) \cup \phi'(I_v)| \leq \Delta(H) - 2 + 4 + 0 = \Delta(H) + 2 \leq k + 2.$$

D'où, il existe au moins 2 couleurs libres a et b pour colorer (u_1, u_1v) . Pour les incidences (u_i, u_iv) , $i \in \{2, 3\}$, on a au moins une couleur libre pour chaque incidence. Sans perte de généralité, on pose $\phi(u_2, u_2v) = c$ et $\phi(u_3, u_3v) = d$. Pour tout (v, vu_i) , $i \in \{1, 2, 3\}$, on a 4 couleurs disponibles : Les couleurs de $\phi'(A_{u_i})$.

On commence par colorer (u_1, u_1v) avec la couleur a . Puis on colore (v, vu_2) avec une couleur différente de a et d , on pose $\phi(v, vu_2) = e$. On colore (v, vu_3) avec une couleur différente de a, c et e , on pose $\phi(v, vu_3) = f$. Si on peut colorer (v, vu_1) , alors on obtient notre contradiction. D'où, on ne peut pas colorer (v, vu_1) , alors $\phi'(A_{u_1}) = \{c, d, e, f\}$ (Voir Figure 2.13). Si on peut changer la couleur de (v, vu_2) alors on attribue la couleur e à (v, vu_1) et on obtient une contradiction. Si on ne peut pas changer la couleur de (v, vu_2) , alors $\phi'(A_{u_2}) = \{a, d, e, f\}$. Dans ce cas, on pose $\phi(u_1, u_1v) = b$ ($b \notin \phi'(A_{u_1}) = \{c, d, e, f\}$), $\phi(v, vu_2) = a$ et $\phi(v, vu_1) = e$, contradiction.


 FIGURE 2.13 – $(\Delta - 1, \Delta, \Delta)$ -sommets

4. On suppose que H contient la configuration $(D4)$. Autrement dit, il existe deux 4-sommets adjacents u et v dans H (voir Figure 2.12(d)). Considérons $H' = H \setminus \{uv\}$. Par minimalité de H , H' admet une $(k+4, 4)$ -coloration d'incidences ϕ' . Nous étendons ϕ' à une $(k+4, 4)$ -coloration d'incidences ϕ de H comme suit : On a

$$|F_H^{\phi'}(u, uv)| = |\phi'(I_u) \cup \phi'(A_u) \cup \phi'(I_v)| \leq 3 + 3 + 3 = 9 \leq k$$

et

$$|F_H^{\phi'}(v, vu)| = |\phi'(I_v) \cup \phi'(A_v) \cup \phi'(I_u)| \leq 3 + 3 + 3 = 9 \leq k$$

Pour chacune des incidences, on dispose de 4 couleurs libres pour les colorer. On peut alors facilement étendre la coloration à H , contradiction.

5. Supposons que H contient la configuration $(D5)$. Autrement dit, il existe un $(5^-, 5^-, 5^-, 5^-)$ -sommets v dans H . Soient u_1, u_2, u_3 et u_4 les 4 voisins de v dans H tel que $d(u_i) = 5$, pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (voir Figure 2.12(e)). Considérons $H' = H \setminus \{v\}$. Par minimalité de H , H' admet une $(k+4, 4)$ -coloration d'incidences ϕ' . Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a :

$$|F_H^{\phi'}(u_i, u_i v)| = |\phi'(I_{u_i}) \cup \phi'(A_{u_i}) \cup \phi'(I_v)| \leq 4 + 4 = 8 \leq k - 1$$

Donc il existe au moins 5 couleurs libres pour colorer chaque incidence $(u_i, u_i v)$. De plus, tout incidence (v, vu_i) a 4 couleurs disponibles pour la colorer (les couleurs de $\phi'(A_{u_i})$). Nous étendons ϕ' à une $(k+4, 4)$ -coloration d'incidences ϕ de H comme suit :

Commençons par colorer les incidences (v, vu_i) , pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, l'une après l'autre, puis on colore les incidences $(u_i, u_i v)$. Ceci est possible car on dispose de 5 couleurs libres pour colorer chaque $(u_i, u_i v)$ et de 3 nouvelles couleurs interdites, contradiction.

Ceci achève la preuve du Lemme 2.40. □

Procédure de déchargement :

On définit une fonction poids $\omega : V(H) \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\omega(x) = d(x) - \frac{9}{2}$. La règle de décharge-

ment est définie comme suit :

(R) Chaque d -sommets ($d \geq 5$) donne $\frac{2d-9}{2d}$ à chacun de ses voisins ayant un degré au plus 4.

Notons que d'après **(R)**, un d -sommets ne donne pas plus que ce qu'il possède. Soit $v \in V(H)$ un d -sommets. Comme H ne contient pas les configurations $(D1)$ et $(D2)$, alors $d \geq 3$. Considérons les cas suivants :

Cas $d = 3$. H ne contient pas la configuration $(D3)$ donc v a des voisins de degré $\Delta \geq 9$. D'où : $\omega^*(v) \geq -\frac{3}{2} + 3 \times \frac{1}{2} = 0$.

Cas $d = 4$. H ne contient pas les configurations $(D4)$ et $(D5)$, donc le sommets v a au plus 3 voisins de degré 5. D'où : $\omega^*(v) \geq -\frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{10} + \frac{3}{12} = \frac{1}{20} \geq 0$.

Cas $d \geq 5$. Le sommets v satisfait $\omega^*(v) \geq d - \frac{9}{2} - d \times \frac{2d-9}{2d} \geq 0$.

Après avoir effectué la procédure de décharge les nouvelles charges de tous les sommets sont positives et, par conséquent, H ne peut pas exister. Ceci achève la preuve du Théorème 2.35.2.

□

2.7.3 Preuve du Théorème 2.35.3

On prouve une version plus forte du Théorème 2.35.3.

Théorème 2.41. *Soit k un entier. Tout graphe G avec $mad(G) < 6$ et $k \geq \Delta(G) \geq 12$, admet une $(k + 6, 6)$ -coloration d'incidences. Donc, $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 6$.*

Preuve. On procède par contradiction. Nous utilisons le même raisonnement que précédemment. Soit H un contre-exemple du Théorème 2.41 qui minimise $|E(H)| + |V(H)|$. Par hypothèse, il existe un $k \geq \max\{\Delta(H), 12\}$, tel que H n'admet pas une $(k + 6, 6)$ -coloration d'incidences. Soit $k \geq \max\{\Delta(H), 12\}$ le plus petit entier tel que H n'admet pas une $(k + 6, 6)$ -coloration d'incidences. En utilisant la Remarque 2.8, nous avons $k = \max\{\Delta(H), 12\}$. De plus, par minimalité, il est facile de voir que H est connexe.

Propriétés structurelles de H :

Lemme 2.42. *Le contre-exemple H ne contient pas les configurations $(E1)$ à $(E5)$ (voir Figure 2.14) suivantes :*

$(E1)$ un 1-sommets,

$(E2)$ un 2-sommets,

$(E3)$ un 3-sommets,

$(E4)$ un $((\Delta - 1)^-, \Delta^-, \Delta^-, \Delta^-)$ -sommets,

$(E5)$ un $(8^-, 8^-, 8^-, \Delta^-, \Delta^-)$ -sommets.

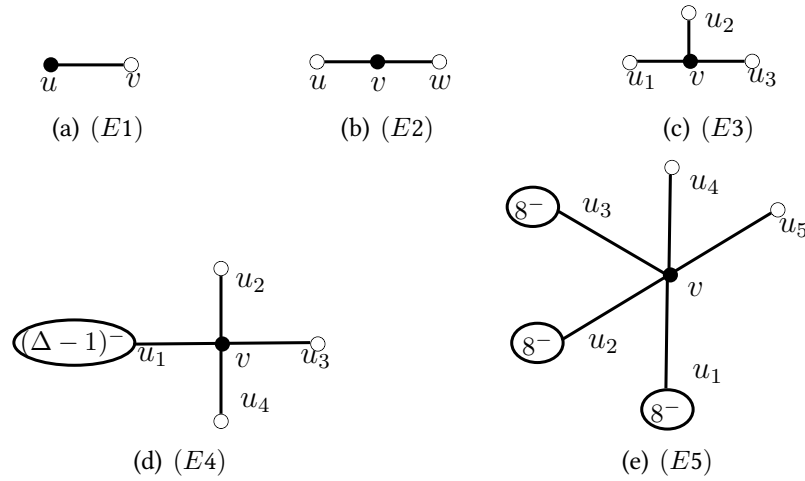


FIGURE 2.14 – Configurations réductibles du Lemme 2.42

Démonstration.

1. En utilisant le même raisonnement que pour la preuve du Lemme 2.37.1, il est facile de montrer que H ne contient pas de 1-sommet.
2. En utilisant le même raisonnement que pour la preuve du Lemme 2.37.2, il est facile de montrer que H ne contient pas de 2-sommet.
3. Supposons que H contient la configuration (E3). Autrement dit, il existe 3-sommet v et soient u_1, u_2 et u_3 les voisins de v (voir Figure 2.14(c)). Considérons $H' = H \setminus \{v\}$. Par minimalité de H , H' admet une $(k + 6, 6)$ -coloration d'incidences ϕ' . Nous étendons ϕ' à une $(k + 6, 6)$ -coloration d'incidences ϕ de H comme suit. Par un argument de comptage, il est facile de voir que chaque incidence $(u_i, u_i v)$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, a une couleur libre pour la colorer. On colore alors chacune d'entre elle avec sa couleur disponible. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, chaque incidence $(v, v u_i)$ a 6 couleurs disponibles pour la colorer (les couleurs de $\phi'(A_{u_i})$). D'où, nous pouvons étendre la coloration à H en colorant les incidences $(v, v u_i)$ l'une après l'autre, contradiction.
4. On suppose que H contient la configuration (E4). Autrement dit, H contient un $((\Delta - 1)^-, \Delta^-, \Delta^-, \Delta^-)$ -sommet v . Soient u_1, u_2, u_3 et u_4 les quatre voisins de v dans H tel que $d(u_1) \leq \Delta - 1$, $d(u_i) \leq \Delta$ pour $i \in \{2, 3, 4\}$ (voir Figure 2.14(d)). Considérons $H' = H \setminus \{v\}$. Par minimalité de H , H' admet une $(k + 6, 6)$ -coloration d'incidences ϕ' . Nous étendons ϕ' à une $(k + 6, 6)$ -coloration d'incidences ϕ de H comme suit :
 En utilisant le même calcul que précédemment, on a :
 - (a) Chaque incidence $(u_i, u_i v)$, $i \in \{2, 3, 4\}$, dispose d'au moins d'une couleur libre pour la colorer.
 - (b) L'incidence $(u_1, u_1 v)$ a au moins deux couleurs disponibles pour la colorer.

- (c) Il existe au moins 6 couleurs libres pour colorer (v, vu_i) , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (les couleurs de $\phi'(A_{u_i})$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$).

Nous étendons la coloration comme suit :

- (a) On colore chaque incidence (u_i, u_iv) , $i \in \{2, 3, 4\}$ avec sa couleur disponible. On pose : $\phi(u_2, u_2v) = a$, $\phi(u_3, u_3v) = b$ et $\phi(u_4, u_4v) = c$.
- (b) Sans perte de généralité, supposons que $\{d, e\}$ sont les couleurs disponibles pour (u_1, u_1v) . On pose $\phi(u_1, u_1v) = d$.
- (c) On colore (v, vu_2) avec une couleur différente de b, c et d , on pose $\phi(v, vu_2) = 1$.
- (d) On colore (v, vu_3) avec une couleur différente de a, c, d et $\phi(v, vu_2) = 1$. On pose $\phi(v, vu_3) = 2$.
- (e) On colore (v, vu_4) avec une couleur différente de a, b, d , $\phi(v, vu_2) = 1$ et $\phi(v, vu_3) = 2$. On pose $\phi(v, vu_4) = 3$.
- (f) S'il existe une couleur libre pour (v, vu_1) parmi les 6 couleurs qui lui sont disponibles, alors on peut étendre la coloration à H , contradiction.
- (g) Si on ne peut pas colorer (v, vu_1) , ceci signifie que la liste des couleurs libres de (v, vu_1) est $\{1, 2, 3, a, b, c\} = \phi'(A_{u_1})$. Si on peut affecter une autre couleur libre à (v, vu_2) , sans détruire notre coloration d'incidences, dans ce cas, on change la couleur de (v, vu_2) et on colore (v, vu_1) avec la couleur 1. Si on ne peut pas changer la couleur de (v, vu_2) . Alors l'ensemble des couleurs libres de (v, vu_2) est $\{1, 2, 3, b, c, d\} = \phi'(A_{u_2})$.
- (h) On pose $\phi(u_1, u_1v) = e \notin \{1, 2, 3, a, b, c\} = \phi'(A_{u_1})$, $\phi(v, vu_2) = d$ et $\phi(v, vu_1) = 1$.

De cette manière, nous étendons la coloration à H , contradiction.

5. On suppose que H contient la configuration $(E4)$. Autrement dit, H contient un $(8^-, 8^-, 8^-, \Delta^-, \Delta^-)$ -sommet v . Soient u_1, u_2, u_3 les 3 voisins de v dans H ayant un degré égal à 8, soient u_4 et u_5 les deux voisins de v dans H tel que $d(u_4) \leq \Delta$, $d(u_5) \leq \Delta$ (voir Figure 2.14(e)). Considérons $H' = H \setminus \{v\}$. Par minimalité de H , H' admet une $(k+6, 6)$ -coloration d'incidences ϕ' . On étend ϕ' à une $(k+6, 6)$ -coloration d'incidences ϕ de H comme suit : En utilisant le même calcul que précédemment, on a :

- (a) Pour chaque incidence (u_i, u_iv) , $i \in \{1, 2, 3\}$, $|F_H^{\phi'}(u_i, u_iv)| = |\phi'(I_{u_i}) \cup \phi'(A_{u_i}) \cup \phi'(I_v)| \leq 7 + 6 + 0 = 13$. Ceci implique que nous avons au moins 5 couleurs libres pour colorer chaque incidence (u_i, u_iv) , $i \in \{1, 2, 3\}$.
- (b) Pour chaque (u_i, u_iv) , $i \in \{4, 5\}$, il existe au moins une couleur disponible pour la colorer.
- (c) Au moins 6 couleurs sont disponibles pour colorer (v, vu_i) , $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (les couleurs de $\phi'(A_{u_i})$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$).

Nous étendons la coloration d'incidences à H comme suit :

- (a) On commence par colorer les incidences (u_i, u_iv) , $i \in \{4, 5\}$ par leur couleur libre, on pose $\phi(u_4, u_4v) = a$ et $\phi(u_5, u_5v) = b$.
- (b) On colore (v, vu_1) avec une couleur $\phi(v, vu_1)$ différente de a et b .
- (c) On colore (v, vu_2) avec une couleur $\phi(v, vu_2)$ différente de a, b et $\phi(v, vu_1)$.
- (d) On colore (v, vu_3) avec une couleur $\phi(v, vu_3)$ différente de $a, b, \phi(v, vu_1)$ et $\phi(v, vu_2)$.
- (e) On colore (v, vu_4) avec une couleur $\phi(v, vu_4)$ différente de $b, \phi(v, vu_1), \phi(v, vu_2)$ et $\phi(v, vu_3)$.
- (f) On colore (v, vu_5) avec une couleur $\phi(v, vu_5)$ différente de $a, \phi(v, vu_1), \phi(v, vu_2), \phi(v, vu_3)$ et $\phi(v, vu_4)$.
- (g) On colore chaque incidence (u_i, u_iv) , $i \in \{1, 2, 3\}$ avec une couleur différente des 4 nouvelles couleurs interdites à v .

De cette façon, nous avons étendu la coloration d'incidences à H , contradiction.

Ceci achève la preuve du Lemme 2.42.

□

Procédure de déchargement :

On définit une fonction poids $\omega : V(H) \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\omega(x) = d(x) - 6$. La règle de déchargement est définie comme suit :

- (R) Chaque d -sommet ($d \geq 7$) donne $\frac{d-6}{d}$ à chacun de ses voisins ayant un degré égal à 4 ou 5.

Notons qu'un d -sommet ($d \geq 7$) ne donne pas plus que ce qu'il possède. Soit $v \in V(H)$ un d -sommet. Comme H ne contient pas les configurations $(E1)$, $(E2)$ et $(E2)$, alors $d \geq 4$. Considérons les cas suivants :

Cas $d = 4$. H ne contient pas la configuration $(E4)$ ceci implique que v a quatre voisins de degré égal à $\Delta \geq 12$. D'où : $\omega^*(v) \geq -2 + 4 \times \frac{1}{2} = 0$.

Cas $d = 5$. Notons que $\omega(v) = -1$. Étant donné que la configuration $(E5)$ est interdite, v a au moins 3 voisins de degré égal à 9. D'où : $\omega^*(v) \geq -1 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$.

Cas $d \geq 6$. Le sommet v satisfait $\omega^*(v) \geq d - 6 - d \times \frac{d-6}{d} \geq 0$.

Après avoir effectué la procédure de déchargement, les nouveaux poids de tous les sommets sont positifs et par conséquent, H ne peut pas exister, Ceci achève la preuve du Théorème 2.35.3.

□

2.7.4 Preuve du Théorème 2.35.4

On prouve une version plus forte du Théorème 2.35.4

Théorème 2.43. *Soit k un entier. Tout graphe G avec $\text{mad}(G) < 6$ et $k \geq \Delta(G) \geq 8$, admet une $(k + 7, 7)$ -coloration d'incidences. Donc, $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 7$.*

Preuve. On procède par contradiction. Soit H un contre-exemple du Théorème 2.43 qui minimise $|E(H)| + |V(H)|$. Par hypothèse, il existe un $k \geq \max\{\Delta(H), 8\}$ tel que H n'admet pas une $(k + 7, 7)$ -coloration d'incidences. Soit $k \geq \max\{\Delta(H), 8\}$ le plus petit entier tel que H n'admet pas une $(k + 7, 7)$ -coloration d'incidences. En utilisant la Remarque 2.8, nous avons $k = \max\{\Delta(H), 8\}$. De plus, par minimalité, il est facile de voir que H est connexe.

Propriétés structurelles de H :

Lemme 2.44. *Le contre-exemple H ne contient pas les configurations (F1) à (F6) (voir Figure 2.15) suivantes :*

- (F1) un 1-sommet,
- (F2) un 2-sommet,
- (F3) un 3-sommet,
- (F4) un 4-sommet,
- (F5) un 5-sommet adjacent à un 6^- -sommet,
- (F6) un $(5, 5, 5, 5, 5, 5, \Delta^-)$ -sommet.

Démonstration.

1. En utilisant le même raisonnement que pour la preuve du Lemme 2.37.1, il est facile de montrer que H ne contient pas de 1-sommet.
2. En utilisant le même raisonnement que pour la preuve du Lemme 2.37.2, il est facile de montrer que H ne contient pas de 2-sommet.
3. En utilisant le même raisonnement que pour la preuve du Lemme 2.42.3, il est facile de montrer que H ne contient pas de 3-sommet.
4. Supposons que H contient la configuration (F4). Autrement dit, H contient un 4-sommet v et soient u_1, u_2, u_3 et u_4 les quatre voisins de v . Considérons $H' = H \setminus \{v\}$. Par minimalité de H , H' admet une $(k + 7, 7)$ -coloration d'incidences ϕ' . On étend ϕ' à une $(k + 7, 7)$ -coloration d'incidences ϕ de H comme suit :
Chaque incidence $(u_i, u_i v)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, a au moins une couleur disponible pour la colorer. On colore chaque incidence $(u_i, u_i v)$ avec cette couleur libre. Chaque incidence $(v, v u_i)$

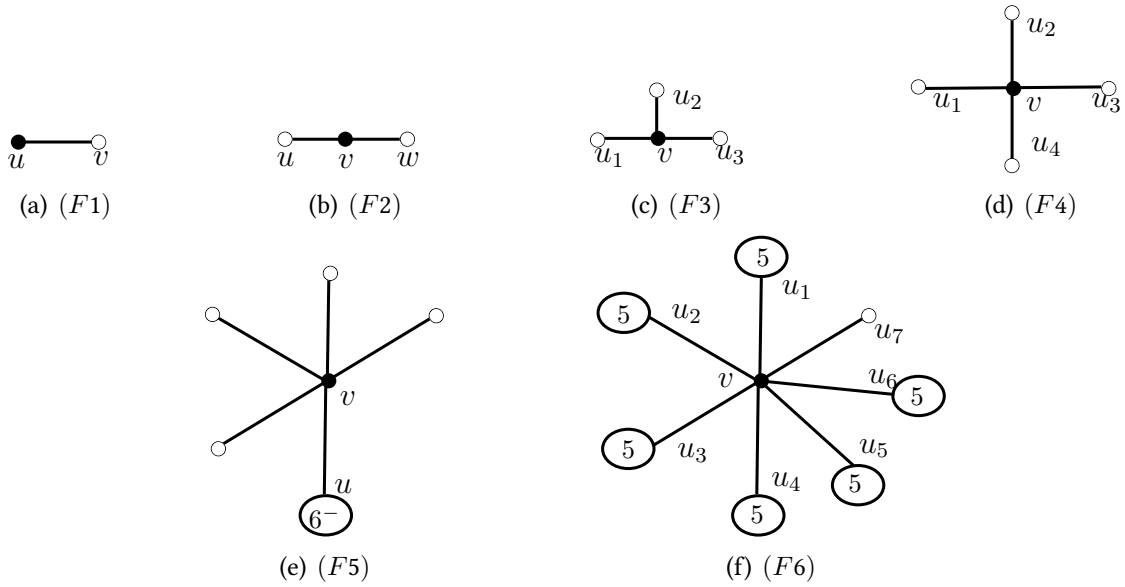


FIGURE 2.15 – Configurations réductibles du Lemme 2.44

a 7 couleurs disponibles (les couleurs de $\phi'(A_{u_i})$). On colore chaque incidence (v, vu_i) l'une après l'autre pour obtenir une coloration d'incidences. D'où, on arrive à étendre la coloration, contradiction.

5. Supposons que H contient la configuration (F5). Autrement dit, H contient un 5-sommet v adjacent à un 6^- -sommet u (voir Figure 2.15(d)). Considérons $H' = H \setminus \{uv\}$. Par minimalité de H , H' admet une $(k + 7, 7)$ -coloration d'incidences ϕ' . On étend ϕ' à une $(k + 7, 7)$ -coloration d'incidences ϕ de H comme suit :

On a : $|F_H^{\phi'}(u, uv)| = |\phi'(I_u) \cup \phi'(A_u) \cup \phi'(I_v)| \leq 5 + 5 + 4 = 14$. Comme on dispose d'au moins 15 couleurs, on a alors au moins une couleur pour colorer (u, uv) . De plus, par hypothèse, on a au plus 7 couleurs pour $\phi(A_v)$ et $|\phi'(A_v)| \leq 4$. D'où, on peut colorer (u, uv) avec sa couleur libre. Comme $|\phi'(A_v)| \leq 5$, il y a au moins une couleur libre pour colorer l'incidence (v, vu) . On peut donc étendre facilement la coloration à H , contradiction.

6. Supposons que H contient la configuration (F6). Autrement dit, il existe un $(5, 5, 5, 5, 5, 5, \Delta^-)$ -sommet v dans H . Soient $u_i, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, les 6 voisins de v dans H ayant un degré égal à 5 et u_7 le voisin de v dans H tel que $d(u_7) \leq \Delta$. Considérons $H' = H \setminus \{v\}$. Par minimalité de H , H' admet une $(k + 7, 7)$ -coloration d'incidences ϕ' . On étend ϕ' à une $(k + 7, 7)$ -coloration d'incidences ϕ de H comme suit. En utilisant le même calcul que précédemment, on obtient :

- (a) Pour toute incidence $(u_i, u_iv), i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $|F_H^{\phi'}(u_i, u_iv)| = |\phi'(I_{u_i}) \cup \phi'(A_{u_i}) \cup \phi'(I_v)| \leq 4 + 4 + 0 = 8$. Ceci implique que nous avons au moins 7 couleurs libres pour colorer chaque incidence $(u_i, u_iv), i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- (b) Pour colorer (u_7, u_7v) , il y a au moins une couleur libre.

- (c) Au moins 7 couleurs libres pour colorer (v, vu_i) , $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ($\phi'(A_{u_i})$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$).

on peut alors étendre la coloration d'incidences comme suit :

- (a) On commence par colorer (u_7, u_7v) , avec sa couleur libre, on pose $\phi(u_7, u_7v) = a$.
- (b) On colore (v, vu_1) avec une couleur $\phi(v, vu_1)$ différente de a .
- (c) On colore (v, vu_2) avec une couleur $\phi(v, vu_2)$ différente de a , $\phi(v, vu_1)$.
- (d) On colore (v, vu_3) avec une couleur $\phi(v, vu_3)$ différente de a , $\phi(v, vu_1)$ et $\phi(v, vu_2)$.
- (e) On colore (v, vu_4) avec une couleur $\phi(v, vu_4)$ différente de a , $\phi(v, vu_1)$, $\phi(v, vu_2)$ et $\phi(v, vu_3)$.
- (f) On colore (v, vu_5) avec une couleur $\phi(v, vu_5)$ différente de a , $\phi(v, vu_1)$, $\phi(v, vu_2)$, $\phi(v, vu_3)$ et $\phi(v, vu_4)$.
- (g) On colore (v, vu_6) avec une couleur $\phi(v, vu_6)$ différente de a , $\phi(v, vu_1)$, $\phi(v, vu_2)$, $\phi(v, vu_3)$, $\phi(v, vu_4)$ et $\phi(v, vu_5)$.
- (h) On colore (v, vu_7) avec une couleur $\phi(v, vu_7)$ différente de $\phi(v, vu_1)$, $\phi(v, vu_2)$, $\phi(v, vu_3)$, $\phi(v, vu_4)$, $\phi(v, vu_5)$ et $\phi(v, vu_6)$.
- (i) Enfin, on colore chaque incidence (u_i, u_iv) , $i \in \{1, 2, 3, 5, 6\}$ avec une couleur différente des 6 nouvelles couleurs interdites à v (les couleurs interdites sont $\phi(v, vu_j)$, $i \neq j$).

Pour chacun des cas, nous avons étendu la coloration à H , contradiction.

Ceci achève la preuve du Lemme 2.44. □

Procédure de déchargement :

On définit une fonction poids $\omega : V(H) \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\omega(x) = d(x) - 6$. Rappelons que seuls les sommets de degré 5, ont un poids négatif.

Les règles de déchargements sont définies comme suit :

(R1) Chaque 7-sommet donne $\frac{1}{5}$ à chacun de ses voisins ayant un degré égal à 5.

(R2) Chaque d -sommet ($d \geq 8$) donne $\frac{d-6}{d}$ à chacun de ses voisins ayant un degré égal à 5.

Notons qu'un d -sommet ($d \geq 8$) ne donne pas plus que ce qu'il possède. De plus, un 7-sommet a au plus 5 voisins de degré égal à 5. Soit $v \in V(H)$ un d -sommet. H ne contient pas les configurations (F1), (F2), (F3) et (F4), donc $d \geq 5$. Considérons les cas suivants :

Cas $d = 5$. On a $\omega(v) = -1$. Comme H ne contient pas la configuration (F5), v a 5 voisins de degré supérieur ou égal à 7. D'où : $\omega^*(v) \geq -1 + 5 \times \frac{1}{5} = 0$.

Cas $d = 6$. On a $\omega(v) = 0$, v a un poids égal à 0 et v ne donne rien. $\omega^*(v) = 0$.

Cas $d = 7$. On a $\omega(v) = 1$, v a au plus 5 voisins de degré 5 car H ne contient pas la configuration $(F6)$. Donc $\omega^*(v) \geq 1 - 5 \times \frac{1}{5} = 0$.

Cas $d \geq 8$. v ne donne pas plus que ce qu'il possède donc $\omega^*(v) \geq 0$.

Après avoir effectué la procédure de déchargement, tous les nouveaux poids des sommets sont positifs et donc H ne peut pas exister. Ce qui achève la preuve du Théorème 2.35.3.

□

Étant donné que tout graphe planaire de maille g vérifie $\text{mad}(G) < \frac{2g}{g-2}$, les deux corollaires suivants peuvent dériver du Théorème 2.35.1 et du Théorème 2.35.2. Ainsi, nous améliorons la borne donnée dans le Théorème 2.6 pour les graphes planaires sans triangle.

Corollaire 2.45. *Soit G un graphe planaire sans triangle avec $\Delta(G) \geq 7$. Alors, $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 3$.*

Corollaire 2.46. *Soit G un graphe planaire de maille $g \geq 5$ et $\Delta(G) \geq 9$. Alors, $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 4$.*

De plus, si G est un graphe planaire, alors $\text{mad}(G) < 6$. On en déduit une nouvelle preuve du Théorème 2.13.

Chapitre 3

Coloration étoilée d'arêtes

Sommaire

3.1	Introduction	68
3.2	Coloration acyclique d'arêtes	70
3.3	Coloration étoilée d'arêtes	70
3.4	Coloration étoilée d'arêtes par listes des graphes subcubiques	74
3.4.1	Coloration étoilée d'arêtes par liste	74
3.4.2	Preuve du Théorème 3.18	75
3.5	Coloration étoilée d'arêtes par listes des graphes subcubiques peu denses	79
3.5.1	Preuve du Théorème 3.23.1	81
3.5.2	Preuve du Théorème 3.23.2	88
3.6	Coloration étoilée d'arêtes par liste des graphes k -dégénérés	91

Dans ce chapitre, nous étudions la coloration étoilée d'arêtes par liste. Cette notion a été introduite en 2008 par Liu et Deng [101] .

3.1 Introduction

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe. Une k -coloration propre des sommets de G est dite *acyclique*, s'il n'existe pas de cycle bi-coloré dans G . Autrement dit, le graphe induit par l'union de deux classes de couleurs est une forêt. Le *nombre chromatique acyclique*, noté $\chi_a(G)$, d'un graphe G est le plus petit entier k pour lequel G admet une k -coloration acyclique.

La coloration acyclique a été introduite par Grünbaum [68], en 1973, dans le but de prouver le théorème des quatre couleurs. De nombreux auteurs, tels que Mitchem [105], Albertson et Berman [3] et Kostochka [92] ont essayé de déterminer le nombre chromatique acyclique des graphes planaires. En 1979, Borodin [25] a confirmé la conjecture de Grünbaum concernant les graphes planaires en montrant que :

Théorème 3.1 (Borodin [25]). *Tout graphe planaire est acycliquement 5-colorable.*

La borne du Théorème 3.1 est la meilleure possible, puisque Grünbaum [68] a proposé un exemple de graphe planaire 4-régulier qui n'est pas acycliquement 4-colorable (voir Figure 3.1(a)). De plus, en 1976, Kostochka et Mel'nikov [93] ont montré qu'il existe un graphe planaire biparti 2-dégénéré qui n'est pas acycliquement 4-colorable (voir Figure 3.1(b)).

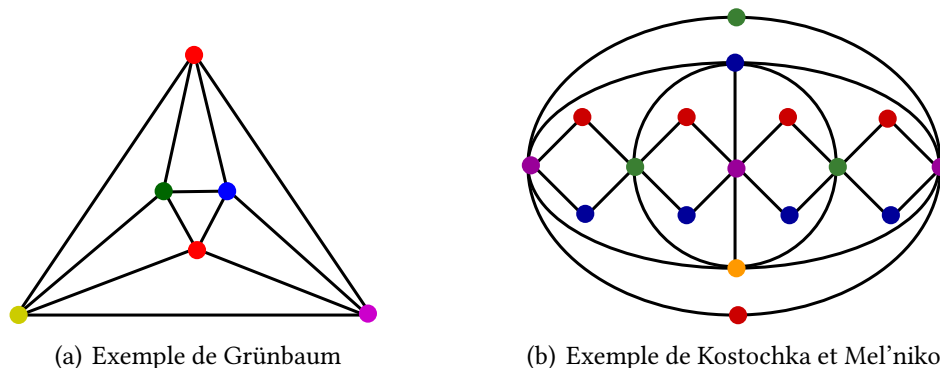


FIGURE 3.1 – Exemples de graphes qui ne sont pas acycliquement 4-colorable.

La coloration acyclique des graphes de degré maximum faible a été largement étudiée [30, 42, 61, 63, 77, 95, 133, 134, 135]. Pour ce qui est du cas général, Alon, McDiarmid et Reed [7] ont montré, en utilisant les méthodes probabilistes, notamment le Lemme Local de Lovász [55], que tout graphe de degré maximum Δ , $\chi_a(G) \leq \lceil 50\Delta^{\frac{4}{3}} \rceil$. De plus, ils ont prouvé l'existence de graphes pour lesquels $\chi_a(G) = \Omega\left(\frac{\Delta^{\frac{4}{3}}}{(\log \Delta)^{\frac{4}{3}}}\right)$. Ndreca et al. [113] ont réduit le nombre de couleurs à $\lceil 6.59\Delta^{\frac{4}{3}} + 3.3\Delta \rceil$, puis Sereni et Volec [117] à $\lceil 2.835\Delta^{\frac{4}{3}} + \Delta \rceil$. Récemment, en utilisant la compression d'entropie [108, 69, 45], Gonçalves, Montassier et Pinlou [67] ont montré que :

Théorème 3.2. [67] Si G est un graphe de degré maximum Δ alors $\chi_a(G) \leq \lceil \frac{3}{2}\Delta^{\frac{4}{3}} + O(\Delta) \rceil$.

En introduisant la notion de coloration acyclique, Grünbaum [68] a noté que la condition de l'union de deux classes de couleurs induisant une forêt, peut être généralisée à d'autres graphes bipartis. Parmi d'autres problèmes, l'auteur a suggéré d'étudier celui de la coloration propre des sommets qui exige que le graphe induit par l'union de toute paires de classes de couleurs soit une forêt d'étoiles, *i.e* chaque composante de cette union est une étoile. Une telle coloration est appelée : *coloration étoilée*.

Coloration étoilée

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe. Une k -coloration propre des sommets de G est dite *étoilée* s'il n'existe pas de chaîne de longueur 3⁽¹⁾ bi-colorée dans G . Le *nombre chromatique étoilé*, noté $\chi_s(G)$, d'un graphe G est le plus petit entier k pour lequel G admet une k -coloration étoilée.

Bien que cette notion ait été définie en 1973, les premiers résultats la concernant, remontent à seulement 2001 et sont dûs à Fertin, Raspaud et Reed [62]. Ils ont noté que pour tout graphe G , une coloration étoilée de G est aussi une coloration acyclique de G . En effet, un cycle dans G peut être bi-coloré si et seulement si il est de longueur paire supérieure ou égale à 4. Cependant, d'après la définition de la coloration étoilée, aucune chaîne de longueur 3 dans G ne peut être 2-colorable. D'où :

$$\chi_a(G) \leq \chi_s(G)$$

Ces auteurs [62] ont apporté une preuve à l'observation de Grünbaum [68], qui concerne le lien entre la coloration acyclique et la coloration étoilée.

Théorème 3.3. [68] Pour tout graphe G , si $\chi_a(G) = k$ alors $\chi_s(G) \leq k \cdot 2^{k-1}$.

En 2003, Nešetřil et Ossona de Mendez [114] ont démontré que le nombre chromatique étoilé des graphes planaires est au plus 30. Un an plus tard, Albertson et *al.* [4] ont réduit ce nombre à 20 couleurs ; et donné un exemple de graphe planaire pour lequel $\chi_s(G) = 10$. Ils ont aussi amélioré la borne du Théorème 3.3.

Théorème 3.4. [4] Pour tout graphe G , si $\chi_a(G) = k$ alors $\chi_s(G) \leq k \cdot (2k - 1)$.

Comme pour la coloration acyclique, en utilisant le Lemme local de Lovász, Fertin, Raspaud et Reed [62] ont montré que pour tout graphe G de degré maximum Δ , $\chi_s(G) \leq \lceil 20\Delta^{\frac{3}{2}} \rceil$. De plus, ils ont prouvé l'existence de graphes pour lesquels $\chi_s(G) \geq \epsilon \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{(\log \Delta)^{\frac{1}{2}}}$, où

(1). Une chaîne de longueur 3 est une chaîne contenant 4 sommets.

ϵ est une constante absolue. Ndreca et *al.* [113] ont amélioré ce résultat en prouvant que pour tout graphe G , $\lceil 4.34\Delta^{\frac{3}{2}} + 1.5\Delta \rceil$ couleurs suffisent pour obtenir une coloration étoilée. En 2013, en utilisant la compression d'entropie, Esperet et Parreau [57] ont donné une meilleure majoration au nombre chromatique étoilé.

Théorème 3.5. [57] *Soit $G = (V, E)$ un graphe de degré maximum Δ , alors $\chi_s(G) \leq 2\sqrt{2}\Delta^{\frac{3}{2}} + \Delta$.*

Compte tenu de tous ces résultats, il semble intéressant d'étudier le nombre chromatique acyclique et le nombre chromatique étoilé du graphe représentatif des arêtes $L(G)$ de G .

3.2 Coloration acyclique d'arêtes

Une k -coloration acyclique d'arêtes d'un graphe G est une k -coloration propre d'arêtes de G telle qu'il n'existe pas de cycle bi-coloré. Le nombre minimum de couleurs k nécessaires pour une coloration acyclique d'arêtes de G est appelé l'*indice chromatique acyclique* de G et est noté $\chi'_a(G)$.

L'indice chromatique acyclique a largement été étudié au cours de ces vingt dernières années. La première majoration de $\chi'_a(G)$ est due à Alon et *al.* [7], qui ont montré que pour tout graphe G de degré maximum Δ , $\chi'_a(G) \leq 64\Delta$. Ce nombre de couleurs a été réduit à 16Δ par Molloy et Reed [107], puis à $\lceil 9.62(\Delta(G) - 1) \rceil$ couleurs par Ndreca et *al.* [113], en utilisant une version plus forte du Lemme Local de Lovász [15]. C'est finalement, Esperet et Parreau [57] en 2013, qui en utilisant la compression d'entropie, ont établi la meilleure majoration, ils ont ainsi prouvé que $4\Delta - 4$ couleurs suffisent pour colorer acycliquement les arêtes de G .

Ces majorations semblent particulièrement éloignées de la borne optimale, mais aussi très difficile à améliorer. En 2001, Alon, Sudakov et Zaks [8] ont conjecturé que pour tout graphe G , $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$. Cette dernière a été prouvée vraie pour certaines classes de graphes [120, 110, 109].

3.3 Coloration étoilée d'arêtes

Une k -coloration étoilée d'arêtes d'un graphe G est une k -coloration propre d'arêtes telle que chaque sous-graphe connexe bi-coloré de G est une chaîne de longueur au plus 3. Autrement dit, il n'existe pas de 4-chaîne ou de 4-cycle bi-coloré dans G . Le graphe est dit arêtes étoilées k -colorable s'il admet une k -coloration étoilée d'arêtes. L'indice chromatique étoilé de G , noté $\chi'_{st}(G)$, est le minimum de couleurs nécessaires pour toute coloration étoilée d'arêtes de G .

Il n'est pas difficile de voir que toute coloration étoilée d'arêtes d'un graphe G est aussi une coloration acyclique d'arêtes de G , d'où l'observation suivante :

Observation 3.6. *Pour tout graphe G , $\chi'_a(G) \leq \chi'_{st}(G)$*

La notion de coloration étoilée d'arêtes a été étudiée pour la première fois par Liu et Deng [101] en 2008. Ils ont prouvé, en utilisant le Lemme Local de Lovász, la majoration suivante :

Théorème 3.7. [101] *Tout graphe G de degré maximum $\Delta(G) \geq 7$, $\chi'_{st}(G) \leq \lceil 16(\Delta(G) - 1)^{\frac{3}{2}} \rceil$.*

Une autre majoration naturelle de l'indice chromatique étoilé est donnée par l'indice chromatique fort⁽²⁾. En d'autres termes, Pour tout graphe $G = (V, E)$, toute coloration forte d'arêtes, de G est une coloration étoilée d'arêtes de G . En effet, si c est une coloration forte d'arêtes de G alors, pour toute chaîne de longueur 3, $uvwz$ dans G , les arêtes uv , vw et wz ont trois couleurs différentes par c . Par conséquent, aucune chaîne ou cycle de longueur 4 n'est bi-colorable, ceci implique que c est une coloration étoilée d'arêtes de G . D'où,

$$\chi'_{st}(G) \leq \chi'_s(G).$$

Une borne supérieure évidente de l'indice chromatique fort d'un graphe G est donnée en fonction de son degré maximum Δ par $\chi'_s(G) \leq 2\Delta(\Delta - 1) + 1$. En effet, si nous voulons colorer une arête quelconque uv d'un graphe G , il faut éviter les $\Delta(\Delta - 1)$ couleurs des arêtes incidentes aux voisins de v et les $\Delta(\Delta - 1)$ couleurs des arêtes incidentes aux voisins de u . Ce qui nous donne un totale de $2\Delta(\Delta - 1)$ couleurs interdites.

En 1988, Erdős et Nešetřil [54], puis Faudree et al. [59] ont posé la conjecture suivante :

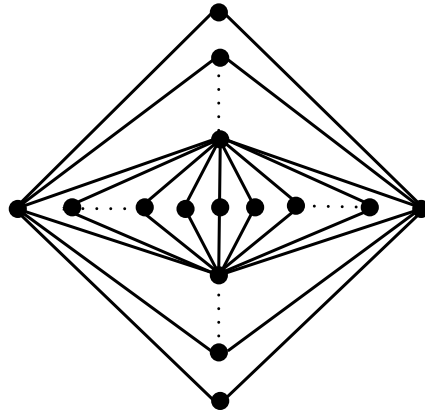
Conjecture 3.8. [54] *Soit G un graphe de degré maximum Δ ,*

$$\chi'_s(G) \leq \begin{cases} \frac{5}{4}\Delta^2 & \text{si } \Delta \text{ est pair} \\ \frac{1}{4}(5\Delta^2 - 2\Delta + 1) & \text{si } \Delta \text{ est impair} \end{cases}$$

De plus, ces bornes sont optimales car les auteurs ont proposé une construction de graphes qui les atteint. En 1997, Molloy et Reed [106] ont prouvé la Conjecture 3.8 en montrant que pour un graphe G de degré maximum Δ assez grand, $1.998\Delta^2$ couleurs suffisent pour obtenir une coloration forte d'arêtes de G . Récemment, Bruhn et Joos [29] ont réduit ce nombre de couleurs à $1.93\Delta^2$, toujours pour Δ assez grand.

Faudree et al. [60] se sont intéressés à la classe des graphes planaires, ils ont montré que tout graphe planaire G admet une $(4\Delta+4)$ -coloration forte d'arêtes. De plus, pour tout $\Delta \geq 2$, ils ont proposé une construction d'un graphe planaire G tel que $\chi'_s(G) = 4\Delta - 4$ (voir Figure 3.2).

(2). Voir Chapitre 2, Définition 2.10


 FIGURE 3.2 - $\chi'_s(G) = 4\Delta(G) - 4$

En 2013, Hudáka et al. [83] ont montré que si le graphe G est planaire de degré maximum Δ et de maille $g \geq 6$, alors $\chi'_s(G) \leq 3\Delta + 6$. En 2014, Bensmail et al. [12] ont amélioré ce résultat en prouvant que $3\Delta + 1$ couleurs suffisent si le graphe est de maille au moins 6, et que 4Δ couleurs suffisent si $\Delta \geq 7$ ou la maille est d'au moins 5. Indépendamment, Borodin et Ivanova [26] ont montré que si G est planaire de degré maximum $\Delta \geq 3$ et de maille $g \geq 40\lfloor \frac{\Delta}{2} \rfloor$ alors G admet une $(2\Delta - 1)$ -coloration forte d'arêtes. Chang et al. [33] ont réduit cette maille à au moins $10\Delta + 46$ pour $\Delta \geq 4$. Le meilleur résultat connu à ce jour est dû à Wang et Zhao [129].

Théorème 3.9. [129] *Tout graphe planaire G de maille au moins $10\Delta - 4$ admet une $(2\Delta - 1)$ -coloration forte d'arêtes, pour tout $\Delta \geq 4$.*

De nombreux auteurs se sont également intéressés à l'étude de l'indice chromatique fort de plusieurs autres classes de graphes, nous pouvons citer par exemple, les graphes bipartis [59, 111], les graphes planaires extérieurs [80]. Pour plus de détails concernant cet invariant, nous renvoyons le lecteur à la référence [131].

Indice chromatique étoilé de quelques classes de graphes

La coloration étoilée d'arêtes a récemment été étudiée par de nombreux auteurs. Deng et Liu [41], puis Bezegová et al. [14] ont donné une borne supérieure à l'indice chromatique étoilé des arbres,

Théorème 3.10. [41, 14] *L'indice chromatique étoilé d'un arbre G de degré maximum Δ est au plus $\lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor$. De plus, cette borne est optimale.*

Bezegová et al. [14] ont considéré la classe de graphes planaires extérieurs, ils ont montré à l'aide du Théorème 3.10 ce qui suit :

Théorème 3.11. [14] Soit G un graphe planaire extérieur de degré maximum Δ . Alors,

$$\chi'_{st}(G) \leq \begin{cases} 5 & \text{si } \Delta \leq 3 \\ \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor + 12 & \text{si } \Delta > 3 \end{cases}$$

Ils ont posé la conjecture suivante :

Conjecture 3.12. [14] Soit G un graphe planaire extérieur de degré maximum $\Delta \geq 3$. Alors, $\chi'_{st}(G) \leq \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor + 1$.

Ils notent que pour $\Delta = 2$, i.e pour les chaînes et les cycles, il existe une coloration étoilée d'arêtes utilisant au plus 3 couleurs, excepté pour le C_5 où 4 couleurs sont nécessaires. Pour le cas des graphes planaires extérieurs de degré au plus 3, la Conjecture 3.12 est vérifiée par le Théorème 3.11.

En ce qui concerne le cas des graphes complets, Dvořák, Mohar et Šámal [46] ont montré que déterminer l'indice chromatique étoilé d'un graphe complet K_n est un problème difficile. Ils ont donné les bornes suivantes :

Théorème 3.13. [46] L'indice chromatique étoilé d'un graphe complet K_n satisfait

$$2n(1 + o(1)) \leq \chi'_{st}(K_n) \leq n \frac{2^{2\sqrt{2}(1+o(1))\sqrt{\log n}}}{\log n^{\frac{1}{4}}}.$$

En particulier, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante c telle que $\chi'_{st}(K_n) \leq cn^{1+\epsilon}$, pour tout $n \geq 1$.

À partir de ce théorème, ils ont proposé aussi une borne supérieure quasi linéaire en fonction du degré maximum d'un graphe.

Théorème 3.14. [46] Soit G un graphe de degré maximum Δ . Alors,

$$\chi'_{st}(G) \leq \chi'_{st}(K_{\Delta+1}) O\left(\frac{\log \Delta}{\log \log \Delta}\right)^2.$$

Par conséquent, $\chi'_{st}(G) \leq \Delta \cdot 2^{O(1)\sqrt{\log \Delta}}$.

Un graphe G est dit *subcubique* si son degré maximum est au plus 3 (i.e, $\Delta(G) \leq 3$). Un graphe G couvre un graphe H s'il existe une application $f : V(G) \rightarrow V(H)$ telle que pour toute arête uv dans G , l'image $f(u)f(v)$ est une arête de H , et pour tout sommet $v \in V(G)$, f réalise une bijection entre les voisins de v et les voisins de $f(v)$.

Dvořák, Mohar et Šámal [46] se sont aussi intéressés à l'étude de l'indice chromatique étoilé des graphes subcubiques :

Théorème 3.15. [46]

1. Si G est un graphe subcubique, alors $\chi'_{st}(G) \leq 7$.
2. Si G est un graphe cubique, alors $\chi'_{st}(G) \geq 4$, et l'égalité est atteinte si et seulement si G couvre le graphe 3-cube.

Puisqu'il existe des graphes subcubiques qui ne sont pas arêtes étoilées 5-colorable (voir Figure 3.3), et qu'aucun exemple de graphe subcubique nécessitant 7 couleurs est connu, ils ont énoncé la conjecture suivante :

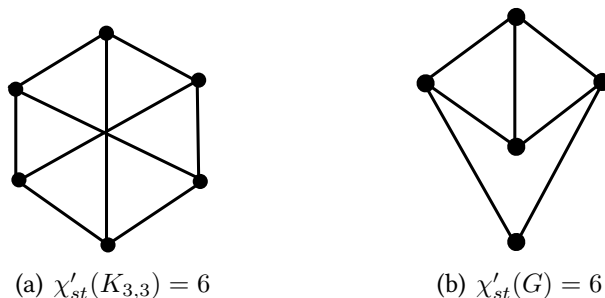


FIGURE 3.3 – Exemples de graphes subcubiques qui ne sont pas arêtes étoilées 5-colorable.

Conjecture 3.16. [46] Si G est un graphe subcubique, alors $\chi'_{st}(G) \leq 6$.

3.4 Coloration étoilée d'arêtes par listes des graphes subcubiques

Dans cette section, nous étudions la coloration étoilée d'arêtes par liste des graphes subcubiques. Ce problème a été suggéré par Dvořák, Mohar et Šámal, à la Question 3 dans [46].

3.4.1 Coloration étoilée d'arêtes par liste

Étant donnée L une affectation de listes aux arêtes de G . On dit que G est arête étoilée L -colorable s'il admet une coloration étoilée d'arêtes c telle que $c(e) \in L(e)$ pour toute arête e de G . L'indice chromatique étoilé par listes, noté $ch'_{st}(G)$, d'un graphe G est le minimum k pour lequel toute affectation de listes L aux arêtes de G avec $|L(e)| = k$, pour tout $e \in E(G)$, G est arête étoilée L -colorable.

On peut remarquer que pour tout graphe G ,

$$ch'_{st}(G) \leq \chi'_{st}(G).$$

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes :

Notations. Un k -voisin d'un sommet v dans G est un k -sommet adjacent à v . Une arête uv est dite *faible* si u ou v est une feuille. Un sommet v est dit *faible* si au moins une des arêtes incidentes à v est faible. On dit que deux arêtes sont à distance au plus 2 si elles sont adjacentes ou adjacentes à une même arête.

Une coloration partielle d'arêtes d'un graphe G est une coloration d'arêtes d'un sous graphe G' de G . Pour une coloration partielle d'arêtes ϕ d'un graphe G et un sommet $v \in V(G)$, $\phi(v)$ est l'ensemble de couleurs utilisées sur les arêtes incidentes à v .

Notons que le lemme suivant sera fortement utilisé dans toutes nos preuves.

Lemme 3.17. *Soient ϕ une coloration partielle étoilée d'arêtes d'un graphe G et uv une arête non colorée. Si α est une couleur satisfaisant au moins une des deux propriétés ci-dessous, alors la coloration ϕ' obtenue à partir de ϕ en colorant uv avec α est aussi une coloration étoilée d'arêtes partielle de G .*

- (a) *Pour tout $x \in N[u] \cup N[v]$, $\alpha \notin \phi(x)$.*
- (b) *$\phi(u) \cap \phi(v) = \emptyset$, $\alpha \notin \phi(u) \cup \phi(v)$, et parmi les arêtes incidentes aux voisins de v ou u , seulement les arêtes pendantes peuvent avoir la couleur α .*

Démonstration. Supposons que l'une des deux conditions (a) ou (b) est vérifiée, mais que ϕ' n'est pas une coloration étoilée d'arêtes partielle de G . Alors, il existe une couleur β et une chaîne $z_1 z_2 z_3 z_4 z_5$ ou un cycle $z_1 z_2 z_3 z_4 z_1$ contenant l'arête uv et dont les arêtes sont colorées avec α et β . Par symétrie, on peut supposer que $u = z_i$ et $v = z_{i+1}$ pour $i \in \{1, 2\}$. Alors, $\phi(z_{i+2} z_{i+3}) = \alpha$. Donc, (a) ne peut pas être vérifiée. Par conséquent, (b) est vérifiée. Si $i = 2$, alors on obtient une contradiction avec $\phi(u) \cap \phi(v) = \emptyset$. D'où, $i = 1$. Mais $z_3 z_4$ n'est pas une arête faible ceci contredit (b). □

Théorème 3.18. [90] *Pour tout graphe subcubique G , $ch'_{st}(G) \leq 8$.*

3.4.2 Preuve du Théorème 3.18

Soit G un graphe subcubique avec le plus petit nombre d'arêtes et de sommets, tel qu'il existe une liste L pour l'ensemble des arêtes de G avec $|L(e)| = 8$, pour tout $e \in E(G)$, pour lequel G n'admet pas une L -coloration étoilée d'arêtes. Clairement G est connexe.

Lemme 3.19. *G est 3-régulier.*

Démonstration. Si G contient un 1-sommet u adjacent à un sommet v , alors par minimalité de G , le graphe $G' = G \setminus \{u\}$ admet une coloration étoilée d'arêtes ϕ par L . ϕ est une coloration étoilée d'arêtes partielle de G . Soit W l'ensemble des voisins de v différents de u . Nous étendons ϕ à G en colorant uv par une couleur $\alpha \in L(uv)$ différente des couleurs

des arêtes incidentes aux sommets appartenant à W (il y a au plus six arêtes), ce qui est une contradiction. D'où, $\delta(G) \leq 2$.

Supposons maintenant que G contient un 2-sommet v adjacent à deux sommets u et w . Soient $N_G(u) \subseteq \{v, u_1, u_2\}$ et $N(w) \subseteq \{v, w_1, w_2\}$. Par minimalité de G , le graphe $G \setminus \{v\}$ admet une coloration étoilée d'arêtes ϕ par L . ϕ est une coloration étoilée d'arêtes partielle de G . Soient $A(uv) = L(uv) \setminus (\phi(u_1) \cup \phi(u_2))$ et $A(vw) = L(vw) \setminus (\phi(w_1) \cup \phi(w_2))$. Par définition, $|A(uv)| \geq 2$ et $|A(vw)| \geq 2$.

S'il existe une couleur $\alpha \in A(uv) \setminus \phi(w)$, alors en colorant vw avec une couleur $\beta \in A(vw) \setminus \{\alpha\}$ et uv avec α , on obtient une coloration étoilée d'arêtes de G . En effet, à chaque étape, les conditions du Lemme 3.17.(a) sont vérifiées, ce qui nous donne une contradiction. Sinon, cela signifie que $d(u) = d(w) = 3$, $d(u_1) = d(u_2) = d(w_1) = d(w_2) = 3$, $uw \notin E(G)$,

$$\begin{aligned} L(uv) &= \{\phi(uw_1), \phi(uw_2)\} \cup \phi(u_1) \cup \phi(u_2) \text{ et} \\ L(vw) &= \{\phi(vu_1), \phi(vu_2)\} \cup \phi(w_1) \cup \phi(w_2). \end{aligned} \tag{3.1}$$

En particulier, pour $i = \{1, 2\}$, le sommet u_i (respectivement, w_i) a deux voisins u'_i et u''_i (respectivement, w'_i et w''_i) différents de u (respectivement, w). Nous allons essayer de colorer vw avec $\phi(uu_2)$ et uv avec $\phi(u_1u'_1)$ ou bien $\phi(u_1u''_1)$. Si, nous n'obtenons pas une coloration étoilée d'arêtes de G , alors chaque 4-chaîne 2-colorable dans G contient les arêtes uv et uu_1 , où chaque sommet u'_1 et u''_1 est incident à une arête de couleur $\phi(uu_1)$. Il s'ensuit que $|\phi(u'_1) \cup \phi(u''_1)| \leq 5$. De la même manière, chaque sommet u'_2 et u''_2 est incident à une arête de couleur $\phi(uu_2)$ et $|\phi(u'_2) \cup \phi(u''_2)| \leq 5$.

S'il existe $\gamma_1 \in L(uu_1) \setminus (\phi(u'_1) \cup \phi(u''_1) \cup \phi(u_2))$, alors on colore uv avec $\phi(uu_1)$, vw avec $\phi(uu_2)$ et on recolorise uu_1 avec γ_1 . En appliquant (3.1) et la définition de γ_1 , on obtient une coloration étoilée d'arêtes de G par L , ce qui est une contradiction. Donc,

$$L(uu_1) = \phi(u'_1) \cup \phi(u''_1) \cup \phi(u_2) \tag{3.2}$$

De la même façon, on a $L(uu_2) = \phi(u'_2) \cup \phi(u''_2) \cup \phi(u_1)$. En particulier, $\phi(uu_2) \in L(uu_1)$ et $\phi(uu_1) \in L(uu_2)$. Alors, en permutant les couleurs de uu_1 et uu_2 on obtient une nouvelle coloration étoilée d'arêtes ϕ' du graphe $G \setminus v$. En répétant le même raisonnement pour ϕ' à la place de ϕ , on obtient que chaque sommet u'_1 et u''_1 est incident à une arête de couleur $\phi'(uu_1) = \phi(uu_2)$. D'où, $|\phi(u'_1) \cup \phi(u''_1)| = 4$, ce qui constitue une contradiction avec (3.2). \square

Soit $C = (v_1, \dots, v_t)$ le plus petit cycle dans G . Donc C ne contient pas de cordes. Par conséquent, pour $i \in \{1, \dots, t\}$, un sommet v_i a un unique voisin v'_i dans $V(G) \setminus V(C)$. Soit $G_1 = G \setminus E(C)$ (voir Figure 3.4). Une coloration étoilée d'arêtes ϕ de G_1 par L est dite *stable*,

si pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, $\phi(v_i v'_i)$ est différente de $\phi(v_{i-1} v'_{i-1})$, $\phi(v_{i+1} v'_{i+1})$, et des couleurs des arêtes de G_1 qui sont à distance au plus 2 de $v_i v'_i$ dans G_1 (notons que G_1 a au plus six arêtes de ce type : deux incidentes à v'_i et au plus 4 autres incidentes aux voisins de v'_i).

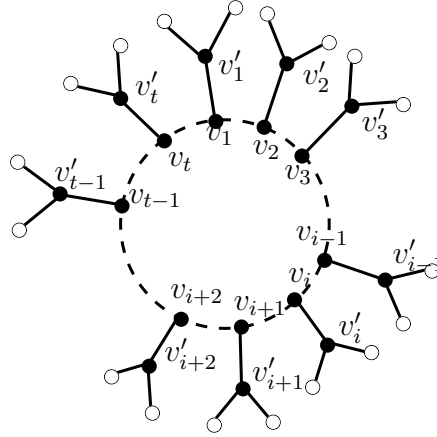


FIGURE 3.4 – Le graphe G_1

Lemme 3.20. G_1 ne contient pas une coloration étoilée d'arêtes stable par L .

Démonstration. Supposons que G_1 contient une coloration étoilée d'arêtes stable ϕ par L . Soit $L'(v_i v_{i+1}) = L(v_i v_{i+1}) \setminus \{\phi(v_{i-1} v'_{i-1}), \phi(v_i v'_i), \phi(v_{i+1} v'_{i+1}), \phi(v_{i+2} v'_{i+2})\}$, $i \in \{1, \dots, t\}$ (les indices sont pris modulo t).

Alors, $|L'(v_i v_{i+1})| \geq 4$ pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$. On sait que tout cycle admet une coloration étoilée d'arêtes pour toute liste 4-uniforme. (En effet, le carré de n'importe quel cycle de longueur $t \neq 5$ admet une 4-coloration par liste, et si $t = 5$, alors on peut colorer deux arêtes non adjacentes par une couleur, dite α , et les 3 autres arêtes avec des couleurs distinctes et différentes de α). Soit ϕ' une coloration étoilée d'arêtes de C par L' . Donc, $\phi \cup \phi'$ est une coloration étoilée d'arêtes de G par L . En effet, d'après la définition de la coloration stable et la définition de L' , pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, $\phi(v_i v'_i)$ diffère de toutes les autres couleurs des arêtes à distance au plus 2. Ainsi, on commence par décolorer toutes ces arêtes, puis leur retourner leurs couleurs une par une tout en appliquant Lemme 3.17 à chaque étape. Nous obtenons une coloration étoilée d'arêtes de G , ce qui est une contradiction. \square

Dans la suite de la preuve, nous allons tenter de construire une coloration étoilée d'arêtes stable de G_1 par L . Pour cela, on fixe une coloration étoilée d'arêtes ψ de $G_2 = G_1 \setminus V(C)$ par L (cette coloration existe par minimalité de G). On construit un graphe auxiliaire H où $V(H) = \{v_i v'_i : i \in \{1, \dots, t\}\}$ et le sommet $v_j v'_j$ est adjacent à $v_i v'_i$ dans H si $j \in \{i-1, i+1\}$, ou $v'_j = v'_i$ ou $v'_j v'_i \in E(G_2)$. De plus, tout sommet $v_i v'_i \in V(H)$ admet une liste $L_1(v_i v'_i)$ obtenue à partir de $L(v_i v'_i)$ en supprimant les couleurs dans ψ des arêtes incidentes à v'_i ou à

ses voisins. Comme $|L(v_i v'_i)| = 8$ et au plus six arêtes dans G_2 sont incidentes à v'_i ou à ses voisins,

$$|L_1(v_i v'_i)| \geq d_H(v_i v'_i) \text{ pour } i \in \{1, \dots, t\}. \quad (3.3)$$

Par définition, si H admet une L_1 -coloration ψ' , alors l'union $\psi \cup \psi'$ forme une coloration étoilée d'arêtes stable de G_1 , ce qui contredit le Lemme 3.20. Par conséquent, H n'admet pas de L_1 -coloration. D'après (3.3), L_1 est une sorte de *liste de degré* pour H . Comme H a un cycle Hamiltonien, alors il est 2-connexe. En utilisant le résultat connu de Borodin [24] (pour une preuve courte, voir [94]), pour tout graphe 2-connexe H et une liste L_1 satisfaisant (3.3), si H n'admet pas de L_1 -coloration, alors :

- (i) $|L_1(v_i v'_i)| = d_H(v_i v'_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$;
- (ii) toutes les listes sont identiques ; et
- (iii) H est un graphe complet ou un cycle impair.

Comme $|V(H)| = t$, on considère trois cas :

Cas 1 : $H = K_t$ pour $t \geq 5$. Si les sommets v'_i ne sont pas distincts, par exemple $v'_1 = v'_r$, puisque C est le plus petit cycle, alors $r \leq 3$ et $t - r \leq 1$. Par conséquent, $t \leq 4$, contradiction. D'où, tous les v'_i sont distincts. Mais tout v'_i est adjacent à au plus deux autres sommets v'_j . Donc, pour avoir $H = K_t$, pour $t \geq 5$, il est nécessaire que $t = 5$ et $N_G(v'_i) = \{v_i, v'_{i-2}, v'_{i+2}\}$, pour tout $i \in \{1, \dots, 5\}$. Ce qui signifie que G est le graphe de Petersen (voir Figure 3.5), et ψ colore les arêtes du 5-cycle $C_1 = (v'_1, v'_3, v'_5, v'_2, v'_4)$ de sorte que les listes de $L_1(v_i v'_i)$, pour $i \in \{1, \dots, 5\}$ restent les mêmes. Puisque $|L(v'_1 v'_3)| = 8$, on peut recolorer $v'_1 v'_3$ par une autre couleur de $L(v'_1 v'_3)$ différente des couleurs des autres arêtes de C_1 . Alors, la liste $L_1(v_2 v'_2)$ ne change pas, mais les listes de toutes les autres arêtes $v_i v'_i$ changent. D'où, dans la nouvelle coloration la condition (ii) n'est pas vérifiée. Ainsi, nous obtenons une coloration étoilée d'arêtes stable de G_1 , contradiction.

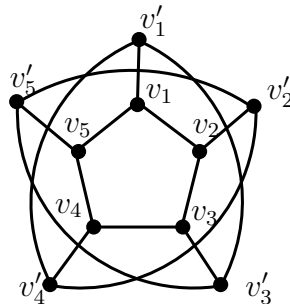


FIGURE 3.5 – Le graphe de Petersen

Cas 2 : $H = K_4$. Si les sommets v'_i ne sont pas distincts, par exemple $v'_1 = v'_r$, puisque C est le plus petit cycle, alors $r = 3$. Par conséquent, au plus 3 arêtes colorées sont incidentes

à v'_1 ou à ses voisins. Donc, $|L_1(v_1v'_1)| \geq 5$, contradiction avec la condition (i). D'où, tous les v'_i sont distincts et $v'_1v'_3, v'_2v'_4 \in E(G)$. Comme au plus 6 arêtes colorées sont à distance au plus 2 de $v'_1v'_3$ dans G_2 , on peut les recolorer par une autre couleur de leur liste, différente des couleurs de ces au plus 6 arêtes. Si après cette recoloration, la liste $L_1(v_2v'_2)$ ou $L_1(v_4v'_4)$ ne change pas, alors la condition (ii) n'est pas satisfaite et nous pouvons obtenir une coloration étoilée d'arêtes stable de G_1 . Si les deux listes $L_1(v_2v'_2)$ et $L_1(v_4v'_4)$ changent, alors deux arêtes lient $\{v'_1, v'_3\}$ à $\{v'_2, v'_4\}$. Comme G est 3-régulier, ceci signifie que G a seulement 8 sommets, et donc $|L_1(v_iv'_i)| \geq 4$ pour tout i , ce qui contredit la condition (i).

Cas 3 : H est un cycle de t sommets et t est impair. En raisonnant de la même manière que dans le Cas 2, on peut supposer que tous les v'_i sont distincts et non adjacents entre eux. De plus, d'après la condition (ii), $L_1(v_iv'_i) = \{\alpha, \beta\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$. On colore $v_iv'_i$ avec la couleur α pour $i \in \{1, 3, 5, \dots, t\}$ et par la couleur β pour $i \in \{2, 4, 6, \dots, t-1\}$. Puis, on colore v_1v_t avec $\gamma_0 \in L(v_1v_t) \setminus (\psi(v'_1) \cup \psi(v'_t) \cup \{\alpha, \beta\})$ et v_1v_2 avec $\gamma_1 \in L(v_1v_2) \setminus \{\alpha, \beta, \gamma_0\}$. Maintenant, pour $i = \{2, \dots, t-1\}$, nous colorons gloutonnement v_iv_{i+1} avec une couleur $\gamma_i \in L(v_iv_{i+1}) \setminus \{\alpha, \beta, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_{i-2}, \gamma_{i-1}\}$. De la même façon que dans la fin de la preuve du Lemme 3.20, la nouvelle coloration est une coloration étoilée d'arêtes de G . En effet, les couleurs α et β ne sont pas utilisées pour les arêtes différentes de $v_1v'_1, \dots, v_tv'_t$ à distance au plus 2 de l'une d'entre elles, ce qui constitue une contradiction. Ceci achève la preuve du Théorème 3.18.

□

3.5 Coloration étoilée d'arêtes par listes des graphes subcubiques peu denses

Dans cette section, nous donnons des conditions suffisantes pour que l'indice chromatique étoilé par listes des graphes subcubiques soit au plus 5 et 6 en termes de degré moyen maximum. Notons que si $\text{mad}(G) < 2$ alors G est acyclique et d'après le Théorème 3.10, pour $\Delta(G) = 3$, on a $\chi'_{st}(G) \leq 4$. D'autre part, cette borne est optimale, chacun des graphes G_1 et G_2 de la Figure 3.6 a un degré moyen maximum égal à 2 et $ch'_{st}(G_i) \geq \chi'_{st}(G_i) = 5$, pour $i \in \{1, 2\}$.

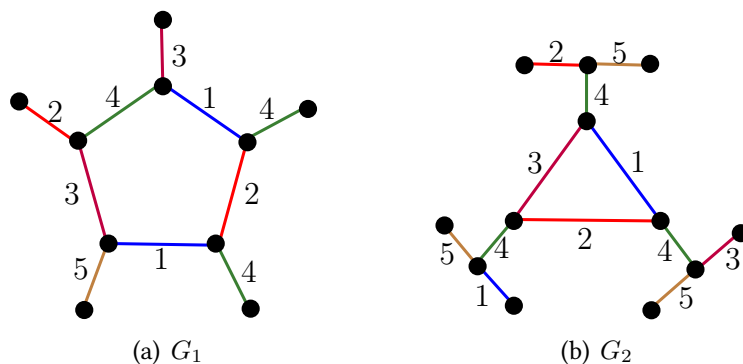


FIGURE 3.6 – Exemples de Graphes subcubiques avec $\text{mad}(G) = 2$ et $ch'_{st}(G) \leq 5$.

En 2013, Hocquard et *al.* [79] se sont intéressés à l'étude de l'indice chromatique fort des graphes subcubiques. Ils ont prouvé le théorème suivant :

Théorème 3.21. [79] *Soit G un graphe subcubique.*

1. Si $\text{mad}(G) < \frac{7}{3}$ alors $\chi'_s(G) \leq 6$.
2. Si $\text{mad}(G) < \frac{5}{2}$ alors $\chi'_s(G) \leq 7$.
3. Si $\text{mad}(G) < \frac{8}{3}$ alors $\chi'_s(G) \leq 8$.
4. Si $\text{mad}(G) < \frac{20}{7}$ alors $\chi'_s(G) \leq 9$.

La version liste de ce théorème a été prouvée par Zhu et Miaos [138]. Soit L une affectation de listes aux arêtes de G . Un graphe G est dit L -arête forte colorable s'il existe une coloration forte d'arêtes c de G telle que $c(e) \in L(e)$, pour tout $e \in E(G)$. L'indice chromatique fort par listes, noté $ch'_s(G)$, est le plus petit entier k pour lequel toute affectation de listes L aux arêtes de G avec $|L(e)| = k$, pour tout $e \in E(G)$, G est k -arêtes fortes colorable.

Théorème 3.22. [138] *Soit G un graphe subcubique.*

1. Si $\text{mad}(G) < \frac{5}{2}$ alors $ch'_s(G) \leq 7$.
2. Si $\text{mad}(G) < \frac{8}{3}$ alors $ch'_s(G) \leq 8$.
3. Si $\text{mad}(G) < \frac{14}{5}$ alors $ch'_s(G) \leq 9$.

Ces bornes constituent elles aussi des bornes supérieures pour l'indice chromatique étoilé par liste de G . Dans ce qui suit, nous améliorons ces bornes pour $ch'_{st}(G)$ en prouvant le théorème suivant :

Théorème 3.23. [90] *Soit G un graphe subcubique et $\text{mad}(G)$ son degré moyen maximum.*

1. Si $\text{mad}(G) < \frac{7}{3}$ alors $ch'_{st}(G) \leq 5$.
2. Si $\text{mad}(G) < \frac{5}{2}$ alors $ch'_{st}(G) \leq 6$.

Étant donné que tout graphe planaire de maille g , vérifie $\text{mad}(G) < \frac{2g}{g-2}$, alors du Théorème 3.23 découle le corollaire suivant :

Corollaire 3.24. [90] *Soit G un graphe subcubique planaire de maille g*

1. *Si $g \geq 14$ alors $ch'_{st}(G) \leq 5$.*
2. *Si $g \geq 10$ alors $ch'_{st}(G) \leq 6$.*

3.5.1 Preuve du Théorème 3.23.1

Considérons un contre-exemple H au Théorème 3.23.1 minimisant le nombre d'arêtes : H un graphe subcubique avec $\text{mad}(H) < \frac{7}{3}$, tel que pour une liste L avec $|L(e)| = 5$, pour tout $e \in E(H)$, H n'admet pas une coloration étoilée d'arêtes par L . Alors, H est connexe.

Lemme 3.25. *H ne contient pas de 2-sommet faible.*

Démonstration. Supposons que H contient un 2-sommet u adjacent à un 1-sommet u_1 . Soit u_2 le second voisin de u . Par minimalité de H , le graphe $H' = H \setminus \{u_1u\}$ admet une coloration étoilée d'arêtes ϕ par L . ϕ est une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . Comme $|\phi(u_2)| \leq 3$, il existe une couleur $\alpha \in L(u_1u) \setminus \phi(u_2)$. D'après le Lemme 3.17.(a), si on colore u_1u avec la couleur α , alors on obtient une coloration étoilée d'arêtes de H par L , ce qui est une contradiction. □

Lemme 3.26. *H ne contient pas un 3-sommet adjacent à deux 1-sommets .*

Démonstration. Supposons que H contient un 3-sommet u avec $N(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$, où $d(u_1) = d(u_2) = 1$. Par minimalité de H , le graphe $H' = H \setminus \{u_1u\}$ admet une coloration étoilée d'arêtes ϕ par L . ϕ est une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . Puisque $|\phi(u_3)| \leq 3$ et $|\phi(u_2)| = 1$, alors il existe une couleur $\alpha \in L(u_1u) \setminus (\phi(u_2) \cup \phi(u_3))$. D'après le Lemme 3.17.(a), si on colore u_1u avec la couleur α , on obtient alors une coloration étoilée d'arêtes de H par L , ce qui est une contradiction. □

Soit H^* le graphe obtenu à partir de H en supprimant tous les sommets de degré 1. Autrement dit, $H^* = H \setminus \{v : v \in V(H), d_H(v) = 1\}$. D'après le Lemme 3.25 et le Lemme 3.26, $\delta(H^*) \geq 2$.

Lemme 3.27. *Le graphe H^* ne contient pas de 3-cycle $C = xvwx$ tel que $d_{H^*}(v) = d_{H^*}(w) = 2$.*

Démonstration. Supposons que H contient un cycle $xvwx$ tel que $d_{H^*}(v) = d_{H^*}(w) = 2$. Si $z \in \{v, w\}$ a un 1-voisin dans $H \setminus \{v, w\}$, notons ce voisin par z' . Si x a un voisin dans H différent de v et w , on le note par t .

Cas 1 : $H^* = C$. Soit ϕ une coloration d'arêtes par liste de C tel que les trois couleurs sont distinctes. Par définition, ϕ est une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . Pour tout $z \in \{x, v, w\}$, on colore consécutivement, l'arête zz' (si elle existe) avec une couleur appartenant à $L(zz') \setminus \{\phi(xv), \phi(vw), \phi(wx)\}$. D'après le Lemme 3.17.(b), à chaque étape, on obtient une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . D'où, à la dernière étape, on obtient une coloration étoilée d'arêtes de H par L , ce qui est une contradiction.

Cas 2 : Le sommet t existe et $d_H(t) \geq 2$. Soit $H_0 = H \setminus \{v, v', w, w'\}$. Par minimalité de H , le graphe H_0 admet une coloration étoilée d'arêtes ϕ par L . ϕ est une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . On colore vx avec une couleur $\alpha_1 \in L(vx) \setminus \phi(t)$ et wx avec une couleur $\alpha_2 \in L(wx) \setminus (\phi(t) \cup \{\alpha_1\})$. D'après le Lemme 3.17.(a), la nouvelle coloration partielle d'arêtes ϕ' est une coloration étoilée d'arêtes de H . Maintenant, on colore vw avec une couleur $\alpha_3 \in L(vw) \setminus \phi'(x)$. D'après le Lemme 3.17.(a), la nouvelle coloration partielle d'arêtes ϕ'' est une coloration étoilée d'arêtes. Alors, consécutivement pour $z \in \{v, w\}$, on colore l'arête zz' (si elle existe) avec une couleur de $L(zz') \setminus (\{\alpha_3\} \cup \phi(x))$. D'après le Lemme 3.17.(b), à chaque étape, on obtient encore une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . Ainsi, à la dernière étape, on obtient une coloration étoilée d'arêtes de H par L , ce qui est une contradiction. \square

Lemme 3.28. *Le graphe H^* ne contient pas de 4-cycle $xuvwx$ tel que $d_{H^*}(u) = d_{H^*}(v) = d_{H^*}(w) = 2$. Par ailleurs, si H^* contient une chaîne $xuvwxy$ telle que $d_{H^*}(u) = d_{H^*}(v) = d_{H^*}(w) = 2$, alors $d_{H^*}(x) = d_{H^*}(y) = 3$. De plus, si $N_{H^*}(x) = \{u, x_1, x_2\}$ et $N_{H^*}(y) = \{w, y_1, y_2\}$, alors $d_{H^*}(x_1) = d_{H^*}(x_2) = d_{H^*}(y_1) = d_{H^*}(y_2) = 3$.*

Démonstration. Supposons que H contient une chaîne $xuvwxy$ ou un cycle $xuvwx$ tel que $d_{H^*}(u) = d_{H^*}(v) = d_{H^*}(w) = 2$. Si u admet un 1-voisin dans H , alors notons ce voisin par u' . Les sommets v' et w' sont définis de la même manière.

Montrons que le sommet v' n'existe pas. Autrement, considérons le graphe $H' = H \setminus \{v'\}$. Par minimalité de H , le graphe H' admet une coloration étoilée d'arêtes ϕ par L . ϕ est une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . En appliquant le Lemme 3.17.(b), la coloration ϕ' obtenue à partir de ϕ en colorant vv' avec une couleur de $L(vv') \setminus \{\phi(xu), \phi(uv), \phi(vw), \phi(wy)\}$ est une coloration étoilée d'arêtes de H par L . Ce qui est une contradiction. D'où :

$$d_H(v) = 2 \tag{3.4}$$

Cas 1 : H^* contient un cycle $C = xuvwx$ tel que $d_{H^*}(u) = d_{H^*}(v) = d_{H^*}(w) = 2$. Soit t le troisième voisin de x dans H , s'il existe.

Cas 1.1 : $H^* = C$. Soit ϕ une coloration par liste d'arêtes de C telles que les quatre couleurs utilisées sont distinctes. Par définition, ϕ est une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . Maintenant, consécutivement, pour tout $z \in \{u, v, w\}$, on colore l'arête zz' (si elle existe) avec une couleur appartenant à $L(zz') \setminus \{\phi(xu), \phi(uv), \phi(vw), \phi(wx)\}$. Si l'arête xt existe, alors la colore avec une couleur appartenant à $L(xt) \setminus \{\phi(xu), \phi(uv), \phi(vw), \phi(wx)\}$. D'après le Lemme 3.17.(b), à chaque étape, on obtient une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . D'où, à la fin de la dernière étape on obtient une coloration étoilée d'arêtes de H par L , ce qui est une contradiction.

Cas 1.2 : Le sommet t existe et $d_H(t) \geq 2$. Soit $H_0 = H \setminus \{u, v, w, u', w'\}$. Par minimalité de H , le graphe H_0 admet une coloration étoilée d'arêtes ϕ par L . ϕ est une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . On colore ux avec une couleur $\alpha_1 \in L(ux) \setminus \phi(t)$ et wx avec une couleur $\alpha_2 \in L(wx) \setminus \phi(t) \cup \{\alpha_1\}$. D'après le Lemme 3.17(a), la nouvelle coloration partielle d'arêtes ϕ' est une coloration étoilée d'arêtes de H . Maintenant, on colore vw avec une couleur $\alpha_3 \in L(vw) \setminus \phi'(x)$ et uv avec une couleur $\alpha_4 \in L(uv) \setminus \phi'(x) \cup \{\alpha_3\}$. D'après le Lemme 3.17(a), la nouvelle coloration partielle d'arêtes ϕ'' est une coloration étoilée d'arêtes de H . Consécutivement, pour $z \in \{u, w\}$, on colore l'arête zz' (si elle existe) avec une couleur dans $L(zz') \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$. D'après le Lemme 3.17(b), à chaque étape, on obtient une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . D'où, à la fin de la dernière étape on obtient une coloration étoilée d'arêtes de H par L , ce qui est une contradiction.

Cas 2 : H^* contient une chaîne $P = xuvwxy$ tel que $d_{H^*}(u) = d_{H^*}(v) = d_{H^*}(w) = 2$. Soit $N_H(y) \subseteq \{w, y_1, y_2\}$ (peut-être seulement l'un de y_1, y_2 existe) et $N_H(x) \subseteq \{u, x_1, x_2\}$. Soit $H_1 = H \setminus \{v, u', w'\}$. Par minimalité de H , le graphe H_1 admet une coloration étoilée d'arêtes ϕ par L . ϕ est une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . Soient $A(wv) = L(wv) \setminus \phi(y)$, $A(ww') = L(ww') \setminus \phi(y)$, $A(uv) = L(uv) \setminus \phi(x)$ et $A(uu') = L(uu') \setminus \phi(x)$. Puisque pour tout $z \in V(H)$, $|\phi(z)| \leq 3$ alors,

$$\text{tout } A(wv), A(ww'), A(uv) \text{ et } A(uu') \text{ contient au moins deux couleurs.} \quad (3.5)$$

Cas 2.1 : $|A(wv) \cup A(ww')| + |A(uv) \cup A(uu')| \geq 5$. Par (3.5) et par symétrie, on peut supposer que $|A(uv) \cup A(uu')| \geq 3$. On colore wv avec une couleur $\alpha_1 \in A(wv) \setminus \{\phi(xu)\}$ et ww' avec une couleur $\alpha_2 \in A(ww') \setminus \{\alpha_1\}$. Comme l'arête uv est non colorée. D'après le Lemme 3.17(b), la nouvelle coloration partielle d'arêtes ϕ_1 est une coloration étoilée d'arêtes. Par (3.5) et le fait que $|A(uv) \cup A(uu')| \geq 3$, on peut choisir deux couleurs distinctes $\alpha_3 \in A(uv) - \{\alpha_1\}$ et $\alpha_4 \in A(uu') \setminus \{\alpha_1\}$. Soit ϕ_2 la coloration obtenue à partir de ϕ_1 en colorant uv avec α_3 , On obtient que

$$\phi_2 \text{ est une coloration étoilée d'arêtes partielle de } H. \quad (3.6)$$

En effet, supposons qu'il existe une couleur β et une chaîne $z_1 z_2 z_3 z_4 z_5$ ou bien un cycle $z_1 z_2 z_3 z_4 z_1$ contenant l'arête uv et dans laquelle les arêtes sont colorées avec α_3 et β . Par symétrie, on peut supposer que $\{u, v\} = \{z_i, z_{i+1}\}$, pour $i \in \{1, 2\}$. Alors $\phi(z_{i+2} z_{i+3}) = \alpha_3$. Comme $\alpha_3 \in A(uv) = L(uv) \setminus \phi(x)$, ceci implique que $z_{i+2} = w$ et donc $u = z_i, v = z_{i+1}$. Puisque $\phi_1(vw) = \alpha_1 \neq \phi_1(xu), \beta = \alpha_1, i = 1$, on ne peut pas avoir un cycle bi-coloré. Comme $i = 1, z_4 \neq w'$. Alors $z_4 = y$ et $z_5 \in \{y_1, y_2\}$. Mais $\alpha_1 \notin \phi(y)$. Cette contradiction prouve (3.6).

Soit ϕ_3 la coloration obtenue à partir de ϕ_2 en colorant uw' avec la couleur α_4 . Par (3.6) et le Lemme 3.17(b), ϕ_3 est une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . Mais d'après (3.4) ϕ_3 colore toutes les arêtes de H . Cette contradiction prouve le Cas 2.1.

Si le Cas 2.1 n'est pas vérifié, alors d'après (3.5), on peut supposer que $A(uv) = A(uw') = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ et $A(wv) = A(ww') = \{\beta_1, \beta_2\}$. Ce qui signifie que :

$$L(uv) = L(uw') = \{\alpha_1, \alpha_2\} \cup \phi(x) \text{ et } L(wv) = L(ww') = \{\beta_1, \beta_2\} \cup \phi(y). \quad (3.7)$$

En particulier $d_H(x) = d_H(y) = 3$.

Cas 2.2 : $\{\alpha_1, \alpha_2\} \cap \{\beta_1, \beta_2\} = \emptyset$. Par symétrie, on peut supposer que $\alpha_1 \neq \phi(wy)$ et $\beta_1 \neq \phi(xu)$. Soit ϕ_1 la coloration obtenue à partir de ϕ en colorant uv avec α_1 et vw avec β_1 . D'après le Lemme 3.17(a), ϕ_1 est une coloration étoilée d'arêtes de H . Soit ϕ_2 la coloration obtenue à partir de ϕ_1 en colorant uw' avec α_2 et ww' avec β_2 . D'après le Lemme 3.17(a), ϕ_2 est une coloration étoilée d'arêtes de H . Par (3.4), ϕ_2 colore toutes les arêtes de H , ce qui contredit le choix de H .

Cas 2.3 : $|\{\alpha_1, \alpha_2\} \cap \{\beta_1, \beta_2\}| = 1$. D'après (3.7), on peut supposer que $L(wv) = L(ww') = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \alpha_1 = \beta_1 = 1, \beta_2 = 2, \phi(wy) = 3, \phi(yy_1) = 4$ et $\phi(yy_2) = 5$. Par hypothèse du cas, $\alpha_2 \neq 2$. Soit ϕ_1 la coloration obtenue à partir de ϕ en posant $\phi_1(vw) = 2$ et $\phi_1(uv) = 1$ (dans cet ordre). Alors, d'après le Lemme 3.17(a), comme $1 \notin \phi(y) \cup \phi(x)$, après ces deux étapes, on obtient une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . Soit ϕ_2 la coloration obtenue à partir de ϕ_1 en posant $\phi_2(uw') = \alpha_2$. Si ϕ_2 contient une chaîne bi-colorée $z_1 z_2 z_3 z_4 z_5$ avec $z_1 z_2 = u'u$, alors la seconde arête de la chaîne est uv , car $\alpha_2 \notin \phi(x)$, et donc la troisième arête est nécessairement vw avec $\phi_1(vw) = 2$ et $\alpha_2 \neq 2$. D'où, aucune chaîne bi-colorée ne peut exister. Donc, ϕ_2 est une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . Par conséquent, si $3 \notin \phi(y_1)$, alors en colorant ww' avec 4, on obtient que ϕ_2 est une coloration étoilée d'arêtes de H , ce qui est une contradiction. D'où, $3 \in \phi(y_1)$. En utilisant le même raisonnement on obtient, $3 \in \phi(y_2)$.

Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in L(wy) \setminus \{3, 4, 5\}$. On reconsidère la coloration ϕ . Supposons que $\gamma_1 \notin \phi(y_1) \cup \phi(y_2)$. On recolore wy avec γ_1 , on colore vw avec la couleur γ_2 , uv avec la couleur $\alpha \in \{1, \alpha_2\} \setminus \{\gamma_1\}$ et uw' avec la couleur $\alpha' \in \{1, \alpha_2\} \setminus \{\alpha\}$ (dans cet ordre). Après chaque

étape, d'après le Lemme 3.17(a), on obtient une coloration étoilée d'arêtes partielle ϕ_3 de H où seulement l'arête ww' n'est pas colorée. Finalement, on colore ww' avec une couleur $\lambda \in \{4, 5\} \setminus \phi_3(uv)$ et on obtient une coloration étoilée d'arêtes de H par L , ce qui est une contradiction. Par conséquent, par symétrie entre γ_1 et γ_2 , $\{\gamma_1, \gamma_2\} \subset \phi(y_1) \cup \phi(y_2)$. En particulier, cela signifie que $d_H(y_1) = d_H(y_2) = 3$. Soient $N_H(y_1) = \{y, y_3, y_4\}$ et $N_H(y_2) = \{y, y_5, y_6\}$. On peut supposer que $\phi(y_1y_3) = \phi(y_2y_5) = 3$, $\phi(y_1y_4) = \gamma_1$ et $\phi(y_2y_6) = \gamma_2$.

Si $4 \notin \phi(y_4)$, on considère la coloration étoilée d'arêtes ϕ_3 du paragraphe précédent, mais en colorant cette fois-ci ww' avec 5. Comme $\gamma_1 \notin \phi(y_2)$ et $2 \notin \{\alpha_1, \alpha_2\}$, la seule chaîne bi-colorée de longueur 4 possible est $w'wvux$. Cela signifie que $\phi(xu) = 2$ et $\alpha_2 = \phi_3(uv) = 5$. Dans ce cas, on recolore vw avec la couleur 3. D'où, $4 \in \phi(y_4)$, et plus particulièrement, $d_H(y_4) \geq 2$, donc $y_4 \in V(H^*)$. Similairement, $5 \in \phi(y_6)$, et donc $y_6 \in V(H^*)$. On déduit que

$$\{y_3, y_5\} \subset V(H^*). \quad (3.8)$$

Supposons que (3.8) est fautive et que $d_H(y_5) = 1$. Considérons encore une fois la coloration étoilée d'arêtes partielle ϕ_2 . On recolore y_5y_2 avec $\lambda \in L(y_5y_2) \setminus \{3, 5\} \cup \phi(y_6)$ (comme $5 \in \phi(y_6)$, cet ensemble est non vide) et on colore ww' avec 5. S'il existe une 4-chaîne $z_1z_2z_3z_4z_5$ bi-colorée, avec $z_1 = y_5$ et $z_2 = y_2$, alors $\lambda \notin \phi(y_6)$, $z_3 = y_2$. Comme $\lambda \neq 3$, alors $z_4 = y_1$ et $\lambda = 4$. Or $5 \notin \phi(y_1)$ car $\gamma_1 \notin \{3, 4, 5\}$. Donc, on obtient une coloration étoilée d'arêtes de H par L , ce qui contredit le choix de H et prouve (3.8). Le fait que $y_4, y_6 \in V(H^*)$ montre que $d_{H^*}(y) = d_{H^*}(y_1) = d_{H^*}(y_2) = 3$. Par symétrie, nous avons aussi $d_{H^*}(x) = d_{H^*}(x_1) = d_{H^*}(x_2) = 3$, d'où le lemme est vérifié pour ce cas.

Cas 2.4 : $\{\alpha_1, \alpha_2\} = \{\beta_1, \beta_2\}$. D'après (3.7), on peut supposer que $L(wv) = L(ww') = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\alpha_2 = \beta_2 = 2$, $\phi(wy) = 3$, $\phi(yy_1) = 4$ et $\phi(yy_2) = 5$. On considère la coloration étoilée d'arêtes partielle ϕ_1 définie dans le Cas 2.3. Soit ϕ_4 la coloration obtenue à partir de ϕ_1 en colorant uu' avec 2. S'il existe une 4-chaîne $z_1z_2z_3z_4z_5$ bi-colorée avec $z_1 = u'$ et $z_2 = u$, alors comme $2 \notin \phi(x)$, $z_3 = v$ et donc $z_4 = w$. Mais $\phi(wy) = 3 \neq 1$. Donc ϕ_4 est une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . En répétant l'argument de la fin du premier paragraphe du Cas 2.3, on conclue que $3 \in \phi(y_1)$ et $3 \in \phi(y_2)$.

Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in L(wy) \setminus \{3, 4, 5\}$. On considère la coloration ϕ . Supposons que $\gamma_1 \notin \phi(y_1) \cup \phi(y_2)$. On décolore wy , on colore dans cet ordre, vw avec la couleur $\lambda \in \{4, 5\} \setminus \{\phi(xu)\}$, ww' avec la couleur $\lambda' \in \{4, 5\} \setminus \{\lambda\}$, uv avec la couleur $\alpha \in \{1, 2\} \setminus \{\gamma_1\}$, uu' avec une couleur $\alpha' \in \{1, 2\} \setminus \{\alpha\}$ et enfin wy avec la couleur γ_1 . À la fin de chaque étape, d'après le Lemme 3.17(a), on obtient une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . La coloration finale obtenue ϕ_5 est une coloration étoilée d'arêtes de H par L , ce qui est une contradiction. D'où, par symétrie entre γ_1 et γ_2 , $\{\gamma_1, \gamma_2\} \subset \phi(y_1) \cup \phi(y_2)$. Plus particulièrement, ceci signifie que $d_H(y_1) = d_H(y_2) = 3$. Soient $N_H(y_1) = \{y, y_3, y_4\}$ et $N_H(y_2) = \{y, y_5, y_6\}$. On peut supposer

que $\phi(y_1y_3) = \phi(y_2y_5) = 3$, $\phi(y_1y_4) = \gamma_1$ et $\phi(y_2y_6) = \gamma_2$.

Si $4 \notin \phi(y_4)$, on considère la coloration étoilée d'arêtes ϕ_5 du paragraphe précédent, dans laquelle on recolore les arêtes $e \in \{wv, ww'\}$ de couleur 4 avec la couleur 3. On obtient une coloration étoilée d'arêtes de H par L , sauf si $e = wv$ et $\phi(xu) = 3$. Dans ce cas, on recolore wv avec 5 et ww' avec 3 (i.e, on permute les couleurs de wv et ww'). Par conséquent, $4 \in \phi(y_4)$. De la même façon, $5 \in \phi(y_6)$. Comme dans le Cas 2.3, on obtient aussi que (3.8) est vérifiée. On reprend la preuve du Cas 2.3 mot à mot et on obtient encore $d_{H^*}(y) = d_{H^*}(y_1) = d_{H^*}(y_2) = 3$. Par symétrie, nous avons aussi $d_{H^*}(x) = d_{H^*}(x_1) = d_{H^*}(x_2) = 3$, ce qui achève la preuve du lemme. □

Lemme 3.29. H^* ne contient pas un 3-sommet adjacent à trois 2-sommets tel que deux de ces sommets aient des 2-voisins dans H^* .

Démonstration. Supposons que H^* contient un 3-sommet u adjacent à trois 2-sommets x , y et z tel que y (respectivement z) ait un 2-voisin y_1 (respectivement z_1). D'après le Lemme 3.27, $y_1, z_1 \notin \{x, y, z\}$. Par le Lemme 3.28 $y_1 \neq z_1$. Soit w (respectivement t) le second voisin de y_1 (respectivement, z_1) dans H^* . Pour chaque $r \in \{y, y_1, z, z_1, x\}$, si r admet un 1-voisin (unique) dans H , alors on note ce voisin par r' (voir Figure 3.7).

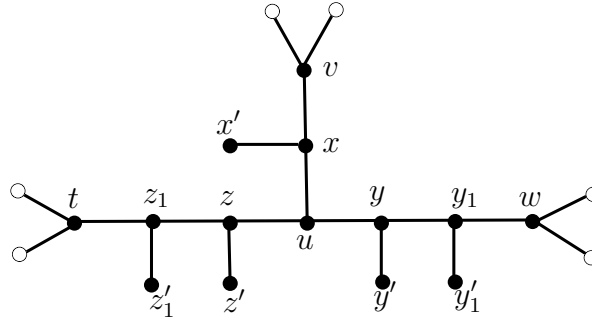


FIGURE 3.7 – Configuration réductible du Lemme 3.29 dans H

Soit $H_1 = H \setminus \{u, x', y, y', z, z', y_1, z_1\}$. Par minimalité de H , le graphe H_1 admet une coloration étoilée d'arêtes ϕ par L . ϕ est une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . Soient $A(xu) = L(xu) \setminus \phi(v)$, $A(xx') = L(xx') \setminus \phi(v)$, $A(yy_1) = L(yy_1) \setminus \phi(w)$, $A(y_1y'_1) = L(y_1y'_1) \setminus \phi(w)$, $A(zz_1) = L(zz_1) \setminus \phi(t)$ et $A(z_1z'_1) = L(z_1z'_1) \setminus \phi(t)$. De la même manière que (3.5), on a :

$$\text{tout } A(xu), A(xx'), A(yy_1), A(y_1y'_1), A(zz_1) \text{ et } A(z_1z'_1) \quad (3.9)$$

contient au moins deux couleurs.

Cas 1 : Il existe un $\alpha \in A(yy_1) \cap A(zz_1)$. Dans ce cas, on colore dans l'ordre, yy_1 et zz_1 avec α , puis xu avec une couleur $\beta \in A(xu) \setminus \{\alpha\}$, $y_1y'_1$ avec une couleur $\alpha_1 \in A(y_1y'_1) \setminus$

$\{\alpha\}$, $z_1z'_1$ avec une couleur $\alpha_2 \in A(z_1z'_1) \setminus \{\alpha\}$ et xx' avec une couleur $\beta' \in A(xx') \setminus \{\beta\}$. Comme les arêtes uz et uy ne sont pas colorées, d'après le Lemme 3.17(a), la nouvelle coloration partielle d'arêtes ϕ_1 de H est une coloration étoilée d'arêtes. Soit ϕ_2 une nouvelle coloration obtenue à partir de ϕ_1 , en colorant uy avec $\gamma_1 \in L(uy) \setminus \{\alpha, \beta, \phi(xv)\}$ et uz avec $\gamma_2 \in L(uz) \setminus \{\alpha, \beta, \phi(xv), \gamma_1\}$. Si le Lemme 3.17(b) ne peut pas être appliqué à $\phi_2(zu)$, cela signifie que $\phi_2(zu) = \phi_1(tz_1)$. Or, par définition, la couleur α de z_1z n'appartient pas à $\phi_2(u) \cup \phi_2(t)$. Donc, aucune 4-chaîne bi-colorée dans ϕ_2 ne contient zu . De même, aucune 4-chaîne bi-colorée dans ϕ_2 ne contient uy . Par conséquent, ϕ_2 est une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . Enfin, on colore yy' avec une couleur $\lambda_1 \in L(yy') \setminus \{\alpha, \beta, \phi_2(uy), \phi_2(uz)\}$ et zz' avec une couleur $\lambda_2 \in L(zz') \setminus \{\alpha, \beta, \phi_2(uy), \phi_2(uz)\}$. Soit ϕ_3 la nouvelle coloration obtenue. Comme précédemment, si le Lemme 3.17(b) ne peut pas être appliqué à $\phi_3(zz')$, alors $\phi_3(zz') = \phi_1(tz_1)$. Or, par définition, la couleur α de z_1z n'appartient pas à $\phi_3(t)$. Donc, aucune 4-chaîne bi-colorée dans ϕ_3 ne contient zz' . De même, aucune 4-chaîne bi-colorée dans ϕ_3 ne contient yy' . Par conséquent, ϕ_3 est une coloration étoilée d'arêtes de H par L , ce qui est une contradiction.

Cas 2 : $A(yy_1) \cap A(zz_1) = \emptyset$. On colore xu avec une couleur $\beta \in A(xu)$, puis on colore yy_1 avec une couleur $\alpha_1 \in A(yy_1) \setminus \{\beta\}$, zz_1 avec une couleur $\alpha_2 \in A(zz_1) \setminus \{\beta\}$, $y_1y'_1$ avec une couleur $\alpha'_1 \in A(yy'_1) \setminus \{\alpha_1\}$, $z_1z'_1$ avec une couleur $\alpha'_2 \in A(z_1z'_1) \setminus \{\alpha_2\}$ et xx' avec $\beta' \in A(xx') \setminus \{\beta\}$. D'après le Lemme 3.17(a), la nouvelle coloration partielle d'arêtes ϕ_1 de H est une coloration étoilée d'arêtes. Alors, on colore uy avec une couleur $\gamma_1 \in L(uy) \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \beta, \phi(xv)\}$ et uz avec une couleur $\gamma_2 \in L(uz) \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma_1\}$. Soit ϕ_2 la nouvelle coloration obtenue. Si le Lemme 3.17(b) ne peut pas être appliqué à $\phi_2(zu)$, alors $\phi_2(zu) \in \{\phi_1(tz_1), \phi_1(xv)\}$. Mais, par définition, la couleur α_2 de z_1z n'appartient pas à $\phi_2(u) \cup \phi_2(t)$, et la couleur β de xu n'appartient pas à $\phi_2(v) \cup \phi_2(z)$. D'où, aucune 4-chaîne bi-colorée dans ϕ_2 ne contient uz . De même, aucune 4-chaîne bi-colorée dans ϕ_2 ne contient uy . Par conséquent, ϕ_2 est une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . Enfin, on colore yy' avec une couleur $\lambda_1 \in L(yy') \setminus \{\alpha_1, \beta, \phi_2(uy), \phi_2(uz)\}$ et zz' avec une couleur $\lambda_2 \in L(zz') \setminus \{\alpha_2, \beta, \phi_2(uy), \phi_2(uz)\}$. Soit ϕ_3 la nouvelle coloration. Comme précédemment, si le Lemme 3.17(b) ne peut pas être appliqué à $\phi_3(zz')$, alors $\phi_3(zz') = \phi_1(tz_1)$. Mais la couleur α_2 de z_1z n'appartient pas à $\phi_2(t)$, par définition. D'où, aucune 4-chaîne bi-colorée dans ϕ_3 ne contient zz' . De même, aucune 4-chaîne bi-colorée dans ϕ_3 ne contient yy' . Par conséquent, ϕ_3 est une coloration étoilée d'arêtes de H par L , ce qui est une contradiction.

□

Montrons maintenant que $|E(H^*)| \geq \frac{7}{6}|V(H^*)|$, ce qui va contredire le fait que $\text{mad}(H) < \frac{7}{3}$. Pour ce faire, nous utiliserons la méthode de déchargement. Premièrement, rappelons que par les Lemme 3.25 et Lemme 3.26, $\delta(H^*) \geq 2$. De plus, par le Lemme 3.28, pour toute chaîne uvw dans H^* , si $d_{H^*}(u) = d_{H^*}(v) = d_{H^*}(w) = 2$, alors u et w ont des 3-voisins distincts dans

H^* .

Pour chaque sommet v de H^* , on définit le poids de v comme suit : $w(v) = d(v) - \frac{7}{3}$.

Donc :

$$\sum_{v \in V(H^*)} \omega^*(v) = \sum_{x \in V(H)} (d_{H^*}(v) - \frac{7}{3}|V(H^*)|) = 2|E(H^*)| - \frac{7}{3}|V(H^*)|. \quad (3.10)$$

Durant le processus de déchargement, nous allons modifier w par un autre poids w^* telle que la somme totale des poids reste inchangée. D'autre part, nous montrerons que $w^*(v) \geq 0$ pour tout $v \in V(H^*)$. D'après (3.10), on aura $|E(H^*)| \geq \frac{7}{6}|V(H^*)|$ ce qui est en contradiction avec $\text{mad}(H) < \frac{7}{3}$.

Les règles de déchargements sont définies comme suit :

- (R1) Chaque 2-sommet dans H^* adjacent à deux 3-sommets reçoit $\frac{1}{6}$ de chacun de ses deux voisins.
- (R2) Chaque 2-sommet dans H^* adjacent à exactement un 3-sommet reçoit $\frac{1}{3}$ de ce 3-sommet.
- (R3) Chaque 2-sommet dans H^* adjacent à deux 2-sommets, x et y , reçoit $\frac{1}{6}$ de l'autre voisin de x et $\frac{1}{6}$ de l'autre voisin de y . Rappelons que ces "autres voisins", sont des 3-sommets distincts dans H^* .

D'après (R1) - (R2) un 2-sommet de H^* ne donne aucun poids, mais reçoit un poids d'exactly $\frac{1}{3}$ des autres sommets. Donc, $w^*(v) = 0$ pour tout 2-sommet v de H^* .

Soit maintenant, v un 3-sommet dans H^* .

- Si v n'a pas de 2-sommets voisins, donc v garde son poids $\frac{2}{3}$.
- Si v a exactement un 2-voisin, alors par (R1) et (R3), v donne au plus $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ et fini avec un poids d'au moins $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.
- Si v a exactement deux 2-voisins, donc d'après le Lemme 3.28, la règle (R3) ne peut pas être appliquée à v . Dans ce cas, v donne au plus $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ et termine avec un poids d'au moins 0.
- Si v a trois 2-voisins, d'après le Lemme 3.28, la règle (R3) ne peut pas être appliquée à v . De plus, d'après le Lemme 3.29, au plus un 2-voisin de v a aussi un 2-voisin. Ceci signifie que (R2) est appliquée à v au plus une fois. Donc, v fini avec un poids d'au moins $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$.

Ceci achève la preuve du Théorème 3.23.1. □

3.5.2 Preuve du Théorème 3.23.2

Considérons un contre-exemple H au Théorème 3.23.2 minimisant le nombre d'arêtes : H un graphe subcubique avec $\text{mad}(H) < \frac{5}{2}$, tel que pour une liste L avec $|L(e)| = 6$, pour

tout $e \in E(H)$, H n'admet pas un coloration étoilée d'arêtes par L . Alors H est connexe. En répétant les mêmes preuves des Lemmes 3.25 et 3.26, on obtient les deux lemmes suivants :

Lemme 3.30. *H ne contient pas de 2-sommet faible.*

Lemme 3.31. *H ne contient pas un 3-sommet adjacent à deux 1-sommetts .*

Comme pour la preuve du Théorème 3.23.1, on considère H^* le graphe obtenu à partir de H en supprimant tous les sommets de degré 1.

Autrement dit, $H^* = H \setminus \{v : v \in V(H), d_H(v) = 1\}$. D'après le Lemme 3.30 et le Lemme 3.31, $\delta(H^*) \geq 2$.

Lemme 3.32. *H^* ne contient pas de 2-sommet adjacent à un 2-sommet.*

Démonstration. Supposons que H contient une chaîne $xuvy$ ou une cycle $xuvx$ tel que $d_{H^*}(u) = d_{H^*}(v) = 2$. Si u (respectivement, v) admet un 1-voisin dans H , on note ce voisin par u' (respectivement, v'), autrement il n'existe pas.

Cas 1 : H^* contient un cycle $C = xuvx$ tel que $d_{H^*}(u) = d_{H^*}(v) = 2$. Soit w le troisième voisin de x dans H , s'il existe. Si $H^* = C$, alors H a au plus 6 arêtes, et on peut colorer chacune d'entre elles avec des couleurs différentes. Donc, $H^* \neq C$, et le sommet w existe avec $d_H(w) \geq 2$. Soit $H_0 = H \setminus \{u, v, v', u'\}$. Par minimalité de H , le graphe H_0 admet une coloration étoilée d'arêtes ϕ par L . ϕ est une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . On colore, dans l'ordre, ux avec une couleur $\alpha_1 \in L(ux) \setminus \phi(w)$, puis vx avec une couleur $\alpha_2 \in L(vx) \setminus \phi(w) \cup \{\alpha_1\}$ et enfin uv avec une couleur $\alpha_3 \in L(uv) \setminus \phi(w) \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$. D'après le Lemme 3.17(a), on obtient une nouvelle coloration étoilée d'arêtes partielle ϕ' de H par L . Maintenant, consécutivement, pour $z \in \{u, v\}$, on colore l'arête zz' (si elle existe) avec une couleur dans $L(zz') \setminus \phi'(z) \cup \{\alpha_3\}$. D'après le Lemme 3.17(b), à chaque étape, on obtient une coloration étoilée d'arêtes partielle de H par L . Donc, à la dernière étape on obtient une coloration étoilée d'arêtes de H par L , ce qui est une contradiction.

Cas 2 : H^* contient une chaîne $P = xuvy$ tel que $d_{H^*}(u) = d_{H^*}(v) = 2$. Soient $N_H(y) \subseteq \{v, y_1, y_2\}$ (peut-être seulement l'un des y_1, y_2 existe) et $N_H(x) \subseteq \{u, x_1, x_2\}$. Soit $H_1 = H \setminus \{u', v'\} \setminus \{uv\}$. Par minimalité de H , H_1 admet une coloration étoilée d'arêtes ψ par L . ψ est une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . On commence par étendre ψ à uv .

S'il existe une couleur $\alpha_1 \in L(uv) \setminus \psi(x) \cup \psi(y)$, alors on colore uv avec la couleur α_1 , ce qui nous donne, par le Lemme 3.17.a, une nouvelle coloration étoilée d'arêtes partielle de H . Sinon, cela signifie que, $d_H(x) = d_H(y) = 3$, $L(uv) \subseteq \psi(x) \cup \psi(y)$, avec $\psi(x)$ et $\psi(y)$ des ensembles disjoints de taille 3. Sans pertes de généralités, soient :

$$\begin{aligned} L(uv) &= \{1, \dots, 6\} \text{ où } \psi(xu) = 1, \psi(xx_1) = 2, \\ \psi(xx_2) &= 3, \psi(yy_1) = 4, \psi(yy_2) = 5, \psi(vy) = 6. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Pour $i = \{1, 2\}$, soient $N_H(y_i) = \{y, z_i, t_i\}$. (voir Figure 3.8).

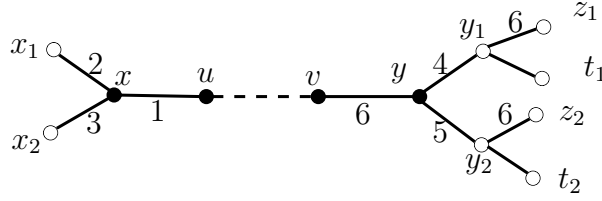


FIGURE 3.8 – Configuration réductible du Lemme 3.32

Si en colorant uv avec la couleur 4 on crée une 4-chaîne bi-colorée, alors les couleurs de cette chaîne sont 4 et 6, et donc $6 \in \psi(y_1)$. De la même façon, si on ne peut pas colorer uv avec la couleur 5, on conclue que $6 \in \psi(y_2)$ et donc $|\psi(y_1) \cup \psi(y_2)| \leq 5$. D'où, on peut recolorer vy avec la couleur $\alpha_2 \in L(vy) \setminus (\psi(y_1) \cup \psi(y_2))$, puis on colore uv avec la couleur 6. Par définition de α_2 et le fait que toutes les couleurs $1, \dots, 6$ soient différentes, la nouvelle coloration d'arêtes ψ' est une coloration étoilée d'arêtes partielle de H par L .

Maintenant, on colore simplement uu' (si elle existe) avec la couleur $\alpha_3 \in L(uu') \setminus \psi'(x) \cup \psi'(v)$ et vv' (si elle existe) avec une couleur $\alpha_4 \in L(vv') \setminus \psi'(u) \cup \psi'(y)$ (on note qu'on peut avoir $\alpha_3 = \alpha_4$). D'après le Lemme 3.17(b), on obtient une coloration étoilée d'arêtes de H par L . Ce qui est une contradiction. □

Lemme 3.33. H^* ne contient pas de 3-sommet adjacent à trois 2-sommets.

Démonstration. Supposons que H^* contient un 3-sommet v adjacent à trois 2-sommets x_1, x_2 et x_3 où leurs seconds voisins dans H^* sont y_1, y_2 et y_3 , respectivement. D'après le Lemme 3.32, $d_{H^*}(y_i) = 3$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. Donc, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, soit $N_H(y_i) = \{x_i, u_i, w_i\}$ (quelques uns de ses sommets peuvent coïncider). Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, soit x'_i le voisin de degré 1 de x_i dans H , s'il existe. (voir Figure 3.9)

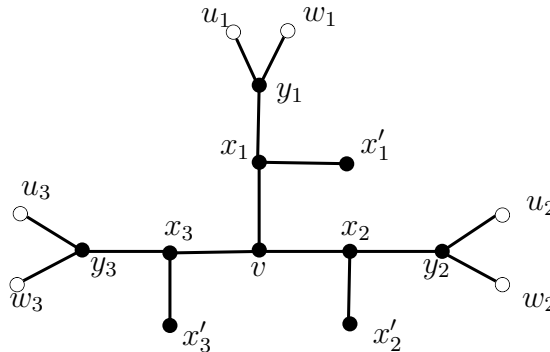


FIGURE 3.9 – Configuration réductible du Lemme 3.33 dans H

Par minimalité de H , le graphe $H_0 = H \setminus \{v, x'_1, x'_2, x'_3\}$ admet une coloration étoilée d'arêtes ϕ par L . ϕ est une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . Si pour $i \in \{1, 2, 3\}$, la

couleur $\phi(x_i y_i)$ est présente dans $\phi(u_i)$ et $\phi(w_i)$, alors on peut recolorer $x_i y_i$ avec une couleur de $L(x_i y_i) \setminus (\phi(u_i) \cup \phi(w_i))$. D'où, par symétrie entre u_i et w_i , on peut supposer que

$$\phi(x_i y_i) \notin \phi(u_i) \text{ pour tout } i \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.12)$$

Nous allons étendre ϕ au graphe H en deux étapes.

Étape 1 : On étend ϕ aux arêtes incidentes à v . On colore vx_1 avec une couleur $\beta_1 \in L(vx_1) \setminus \phi(y_1) \cup \{\phi(y_2 x_2), \phi(y_3 x_3)\}$, puis on colore vx_2 avec une couleur $\beta_2 \in L(vx_2) \setminus \phi(y_2) \cup \{\phi(y_3 x_3), \beta_1\}$ et enfin on colore vx_3 avec une couleur $\beta_3 \in L(vx_3) \setminus \phi(y_3) \cup \{\beta_1, \beta_2\}$. On obtient alors une coloration d'arêtes ϕ' , qui est une coloration étoilée d'arêtes partielle de H . En effet, si ϕ' n'est pas une coloration étoilée d'arêtes partielle de H alors, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, l'arête vx_i appartient à une chaîne ou un cycle P bi-coloré ayant 4 arêtes. Puisque $\beta_i \notin \phi(y_i)$, alors la deuxième arête de couleur β_i dans P est nécessairement $x_j y_j$ pour tout $i \neq j$. Par conséquent, l'arête vx_j appartient aussi à P . Par symétrie entre i et j on peut supposer que $i < j$, on conclue que $x_i y_i$ appartient à P . Or, par définition la couleur β_i est différente de $\phi(x_j y_j)$, ce qui est contradiction.

Étape 2 : On étend ϕ' aux arêtes $x_i x'_i$ si elles existent. Pour tout $i = \{1, 2, 3\}$, on colore $x_i x'_i$ avec une couleur $\gamma_i \in L(x_i x'_i) \setminus \phi'(v) \cup \{\phi'(x_i y_i), \phi'(y_i w_i)\}$. Si la coloration ϕ'' obtenue n'est pas une coloration étoilée d'arêtes de H par L , alors pour $i \in \{1, 2, 3\}$ il existe une 4-chaîne bi-colorée P commençant par x'_i . Comme $\gamma_i \notin \phi'(v)$, la seconde arête de couleur γ_i dans P est incidente à y_i . Puisque γ_i a été choisie différente de $\phi'(y_i w_i)$, la seconde arête de P est $y_i u_i$. Ce qui contredit (3.12). □

Pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, Soit V_j l'ensemble des sommets de degré j dans H^* . Comme il a été mentionné précédemment, d'après les Lemmes 3.30 et 3.31, $V_1 = \emptyset$. Du Lemme 3.32, tout sommet $v \in V_2$ admet deux voisins dans V_3 , et par le Lemme 3.33, tout sommet $v \in V_3$ a au plus deux voisins dans V_2 . Il s'en suit que $|V_3| \geq |V_2|$, ce qui nous donne $\text{mad}(H^*) \geq \frac{5}{2}$, contradiction. Ce qui achève la preuve du Théorème 3.23.2. □

3.6 Coloration étoilée d'arêtes par liste des graphes k -dégénérés

En 2012, Chang et Narayanan [34] ont montré que tout graphe 2-dégénéré, de degré maximum Δ , a un indice chromatique fort d'au plus $10\Delta - 10$. Ils ont aussi conjecturé que tout graphe k -dégénéré G admet la borne linéaire $\chi'_s(G) \leq ck^2\Delta$, où c est une constante positive. Cette conjecture fut d'abord confirmée par Yu [137], qui a prouvé que $\chi'_s(G) \leq$

$(4k - 2)\Delta - k(2k - 1) + 1$. Ensuite, par Dębski et *al.* [39], qui ont prouvé que $\chi'_s(G) \leq (4k - 1)\Delta - k(2k + 1) + 1$. Très récemment, Wang a montré que :

Théorème 3.34. [128] *L'indice chromatique fort de tout graphe k -dégénéré de degré maximum Δ est au plus $(4k - 2)\Delta - k^2 + 2$.*

Il s'ensuit, que tout graphe k -dégénéré de degré maximum Δ est $((4k - 2)\Delta - k^2 + 2)$ -arêtes étoilées colorable. Nos améliorons cette borne en prouvant que :

Théorème 3.35. *L'indice chromatique étoilé de tout graphe k -dégénéré de degré maximum Δ est au plus $(3k - 2)\Delta - k^2 + 2$.*

Avant de prouver le Théorème 3.35, rappelons le lemme structurel suivant donné par Chang et Narayanan :

Lemme 3.36. [34] *Soit G un graphe k -dégénéré. Il existe un sommet $v \in V(G)$ pour lequel v est adjacent à au plus k sommets de degré plus que k . De plus, si $\Delta(G) > k$, alors le sommet v peut être parmi ceux de degrés plus que k .*

Dans la Figure 3.10, nous illustrons la structure d'un graphe 2-dégénéré.

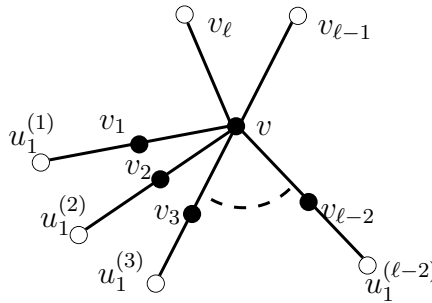


FIGURE 3.10 – Illustration de la structure locale d'un graphe 2-dégénéré

Preuve du Théorème 3.35

Par contradiction, supposons que le théorème est faux et soit G un contre-exemple minimal. On peut supposer sans perte de généralité que G est connexe. On note par Δ le degré maximum de G . Ainsi, pour toute liste L de G , avec $|L(e)| = (3k - 2)\Delta - k^2 + 2$ pour tout $e \in E(G)$, G n'admet pas de coloration étoilée d'arêtes par L .

Par le Lemme 3.36, il existe un sommet v adjacent à au plus $t \leq k$ sommets $\{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ de degré plus que k . Soient $\{u_1, u_2, \dots, u_l\}$ ($l > 0$) les autres voisins de v .

On a $t + l \leq \Delta$ et $l \leq \Delta - 1$, $t \leq k$.

Soit le graphe $G' = G \setminus \{vv_1, vv_2, \dots, vv_{t-k}\}$. Par minimalité de G , il existe une coloration étoilée d'arêtes ϕ de G' par L tel que $L(e) = (3k - 2)\Delta - k^2 + 2$, pour tout $e \in E(G')$. Considérons une arête vu_i . Évaluons le nombre S d'arêtes colorées dans G' qui sont à distance au plus 2 de vu_i dans G . Il est facile de voir que si nous pouvons colorer vu_i avec une couleur différente des couleurs de ces arêtes à distance au plus 2 dans G , alors nous n'allons pas créer de 4-chaîne ou de 4-cycle qui soit bi-coloré. Les couleurs de ces arêtes seront également appelées les couleurs interdites pour vu_i .

Pour tout sommet u_j ($j \neq i$), on a au plus $k - 1$ arêtes incidentes de ce type. Pour u_i , on a au plus $(k - 1)\Delta$ arêtes à distance au plus 2 de vu_i . Et pour v , on compte au plus $t\Delta(G)$ arêtes. Par conséquent, on obtient au total

$$S \leq (k - 1)\Delta + (l - 1)(k - 1) + t\Delta$$

Comme $l \leq \Delta - t$

$$S \leq (k - 1)\Delta + (\Delta - t - 1)(k - 1) + t\Delta$$

Alors :

$$S \leq t(\Delta + 1 - k) + 2k\Delta - k + 1 - 2\Delta$$

Puisque $t \leq k$, on a :

$$S \leq k(\Delta + 1 - k) + 2k\Delta - k + 1 - 2\Delta = k\Delta + k - k^2 + 2k\Delta - k + 1 - 2\Delta = (3k - 2)\Delta - k^2 + 1$$

Supposons que $N_G(u_i) = \{v, u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_{\ell_i}^{(i)}\}$, où $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ et $\ell_i \leq k - 1$.

Nous allons étendre la coloration ϕ à G comme suit (on note ϕ' cette nouvelle coloration). On colore dans l'ordre chaque arête vu_i pour $i \in \{1, \dots, l\}$.

- Pour vu_1 , on interdit les couleurs des arêtes de G' à distance au plus 2 de vu_1 dans G . Comme $|L(vu_1)| \geq (3k - 2)\Delta - k^2 + 2$, alors on a au moins une couleur disponible pour colorer vu_1 telle qu'aucune 4-chaîne ou 4-cycle bi-coloré soit créé.
- Pour vu_j $j \geq 2$, puisque $\phi'(vu_i) \notin \phi(u_m)$ ($i < j, m \geq j$), alors on peut utiliser les couleurs de $\phi(u_h)$ ($h < j$) pour colorer vu_j , si elles n'appartiennent pas à $\phi(v)$. Donc, ces couleurs ne sont pas interdites. Si on compte maintenant les couleurs interdites pour vu_j . Nous faisons le même calcul que ci-dessus, mais nous remplaçons cette fois-ci l'ensemble des couleurs $\phi(u_i)$ ($i < j$) par la couleur de $\phi'(vu_i)$. D'où, nous obtenons au moins le même nombre (qui est ≥ 1) de couleurs disponibles pour colorer vu_j . Nous pouvons donc colorer vu_j sans créer de 4-chaîne ou de 4-cycle bi-coloré.

D'où, nous avons étendu la coloration ϕ à G par L , ce qui constitue une contradiction. \square

Étant donné que tout graphe sans mineur K_4 est 2-dégénéré [44], on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 3.37. *Tout graphe G sans mineur K_4 admet une $(4\Delta - 2)$ -coloration étoilée d'arêtes.*

Chapitre 4

b -coloration des sommets

Sommaire

4.1	Introduction	96
4.2	Quelques résultats connus sur le nombre b -chromatique	97
4.3	b -continuité et b -monotonie de graphes	98
4.4	Le nombre b -chromatique du produit cartésien de graphes	100
4.5	La b -coloration du graphe $K_n \square K_p$	101
4.6	Nombre b -chromatique du graphe $K_n \square K_{1,p}$	103
4.7	Nombre b -chromatique du graphe $K_n \square K_{2,p}$	105
4.8	Nombre b -chromatique du graphe $K_n \square K_{p,p}$	114

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de la b -coloration et de la b -continuité des graphes. Cette notion a été introduite par Irving et Manlove [84] en 1999.

4.1 Introduction

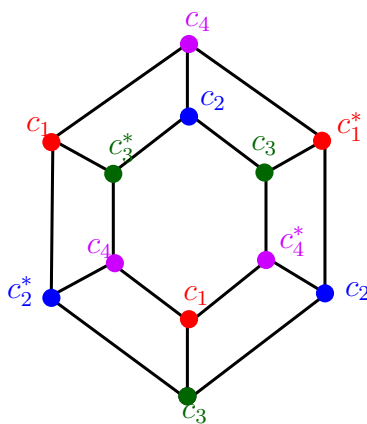
Étant donné un graphe $G = (V, E)$, une des techniques qui permet de trouver une bonne coloration propre de G , consiste à considérer une coloration propre ϕ arbitraire de G , puis d'essayer de réduire le nombre de couleur utilisé par ϕ en fusionnant deux couleurs qui n'ont pas d'arêtes entre elles. À partir de cette approche, Harary et Hedetniemi [73] ont introduit la notion du *nombre a -chromatique* qui est le pire cas pour lequel cette stratégie de recoloration ne peut pas s'appliquer. Plus formellement, *une a -coloration* d'un graphe G est une coloration propre des sommets de G telle que chaque paire de couleurs différentes soit utilisée pour colorer les extrémités d'au moins une arête. Le *nombre a -chromatique* de G est défini comme étant le nombre maximum de couleurs tel que G admet une a -coloration.

En 1999, Irving et Manlove [84] ont suggéré une autre manière d'améliorer une coloration propre ϕ déjà existante en tentant de recolorer, mais cette fois-ci pas nécessairement avec la même couleur, les sommets d'une certaine classe de couleur. Autrement dit, pour une coloration propre ϕ de G , s'il existe une classe de couleur c pour laquelle tout sommet de couleur c n'est pas adjacente à au moins une autre couleur appartenant à ϕ , alors nous pouvons changer séparément la couleur de tous les sommets de couleur c . De cette façon, nous obtenons une nouvelle coloration propre ϕ' utilisant moins de couleurs que la coloration initiale ϕ . Ainsi, Irving et Manlove [84] ont introduit la notion du *nombre b -chromatique*, qui mesure le pire cas pour lequel cette technique de recoloration n'est pas possible.

Définition 4.1. *Une b -coloration de G utilisant k couleurs est une coloration propre des sommets de G satisfaisant la propriété P suivante : Pour chaque couleur c , il existe un sommet u de couleur c ayant toutes les $k - 1$ autres couleurs dans son voisinage. Le sommet u est dit b -dominant de couleur c . L'ensemble des sommets b -dominants est appelé système b -dominant. Le nombre b -chromatique, noté $\varphi(G)$, d'un graphe G est le nombre maximum k pour lequel G admet une b -coloration par k -couleurs.*

Le graphe G de la Figure 4.1 est un exemple de graphe biparti 3-régulier. La coloration c présentée est une b -coloration de G . Le système b -dominant S dans ce cas est donné par l'ensemble des sommets ayant les étiquettes c_1^* , c_2^* , c_3^* et c_4^* .

La notion de b -coloration peut être utilisée pour résoudre les problèmes de routages dans les réseaux [48], de classification des documents [65], des services web [40] et de clustering [49].


 FIGURE 4.1 – b -coloration de G utilisant 4 couleurs

4.2 Quelques résultats connus sur le nombre b -chromatique

Pour tout graphe G , une minoration et majoration naturelle du nombre b -chromatique est donnée par :

$$\chi(G) \leq \varphi(G) \leq \Delta(G) + 1. \quad (4.1)$$

En effet, toute coloration propre utilisant $\chi(G)$ couleurs est une b -coloration. D'autre part, si c est une b -coloration de G avec $\varphi(G)$ couleurs et v_i un sommet b -dominant de couleur i dans c , alors v_i est de degré au moins $\varphi(G) - 1$. Par conséquent $\Delta(G) \geq d(v_i) \geq \varphi(G) - 1$ et donc $\varphi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Kouider et Mahéo [97] ont noté que les bornes inférieures de $\chi(G)$ restent valables pour $\varphi(G)$. A titre d'exemple, nous pouvons citer les bornes suivantes : $\frac{n}{\alpha}$; $\frac{n^2}{n^2-2m}$; $\frac{n}{n-\delta}$, où n (respectivement, α , m , δ) est l'ordre (respectivement, le nombre de stabilité, la taille, le degré minimum) du graphe G .

Pour qu'un graphe G admette une b -coloration utilisant k couleurs, il doit nécessairement avoir au moins k sommets de degré au moins $k - 1$. À partir de cette observation, Irving et Manlove [84] ont défini la notion du m -degré :

Définition 4.2. Soit G un graphe. Considérons les sommets v_1, \dots, v_n de G ordonnés tels que $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$. Le m -degré de G , noté $m(G)$, est défini par

$$m(G) = \max\{i : d(v_i) \geq i - 1\}.$$

Autrement dit, $m(G)$ est le plus grand entier m tel que G ait au moins m sommets de degré au moins $m - 1$, ce qui permet de déduire une meilleure majoration pour le nombre b -chromatique

$$\varphi(G) \leq m(G) \leq \Delta(G) + 1. \quad (4.2)$$

Il est à noter que ces bornes sont atteintes pour certaines classes de graphes, par exemple pour le cas du graphe complet K_n , nous avons $m(K_n) = \varphi(K_n) = n$. Cependant, la différence entre $\varphi(G)$ et $m(G)$ est non bornée, par exemple pour le graphe biparti complet $K_{n,n}$, nous avons $\varphi(K_{n,n}) = 2$ alors que $m(K_{n,n}) = n + 1$.

Irving et Manlove [84] ont prouvé que le problème de décision correspondant à la détermination du nombre b -chromatique est NP-complet dans le cas général. Néanmoins, ils donnent un algorithme polynomial permettant de calculer $\varphi(G)$ pour la classe des arbres. En 2002, Kratochvil, Tuza et Voigt [99], ont montré que décider si $\varphi(G) = m(G)$, est un problème NP-complet même si on se restreint aux graphes bipartis de degré maximum $\Delta(G)$ et $m(G) = \Delta(G) + 1$.

En présence de ces résultats de NP-complétude, de nombreux auteurs se sont intéressés à l'étude du nombre b -chromatique pour plusieurs classes de graphes, dans le but de le borner ou de lui attribuer une valeur exacte. À titre d'exemple, nous pouvons citer : les graphes complets, complets bipartis, les chaînes et les cycles [97], les graphes puissances [47], les graphes amplement réguliers [1], les graphes réguliers [17, 31, 51, 50, 52, 76, 96, 99, 118], les hypercubes [97], les graphes cubiques [86], les graphes planaires extérieures [102], les cactus [32]. D'autres auteurs, ont cherché à trouver des bornes au nombre b -chromatique en fonction de paramètres connus tels que le nombre de stabilités [97], le nombre de cliques [16, 98] ou encore du diamètre de graphe [96].

Kouider [96] a établi une comparaison entre le nombre b -chromatique d'un graphe et un sous graphe H de G .

Proposition 4.3. [96] *Soit G un graphe et H un sous graphe induit de G .*

1. *Si $\varphi(H) = \Delta(G) + 1$, alors $\varphi(G) = \varphi(H)$.*
2. *S'il n'existe pas de sommet de degré au moins $\varphi(H)$ en dehors de H , alors $\varphi(G) \geq \varphi(H)$.*

Proposition 4.4. [96] *Soit G un graphe et H un sous graphe induit de G . Si pour tout sommets x et x' de G , $\min(d_G(x), d_G(x')) \geq \varphi(H) - 1$ implique que $\text{dist}(x, x') \geq 3$, alors $\varphi(G) \geq \varphi(H)$.*

Pour le cas des graphes de maille au moins 5, Kouider démontre le théorème suivant :

Théorème 4.5. [96] *Soient G un graphe de maille au moins 5 et H un sous graphe induit de G . Si H admet un système b -dominant $S = \{x_1, x_2, \dots, x_{\varphi(H)}\}$ tel que tout sommet x_i, x_j de S , $\text{dist}(x_i, x_j) \geq 6$, alors $\varphi(G) \geq \varphi(H)$.*

4.3 b -continuité et b -monotonie de graphes

L'une des particularités intéressantes de la b -coloration est que certains graphes possèdent des b -colorations utilisant respectivement p et q couleurs, avec $p < q$ alors qu'ils n'admettent

pas de b -coloration intermédiaire. Par exemple, le cube Q_3 admet une b -coloration avec 2 et 4 couleurs, mais n'admet aucune b -coloration avec 3 couleurs (voir Figure 4.2).

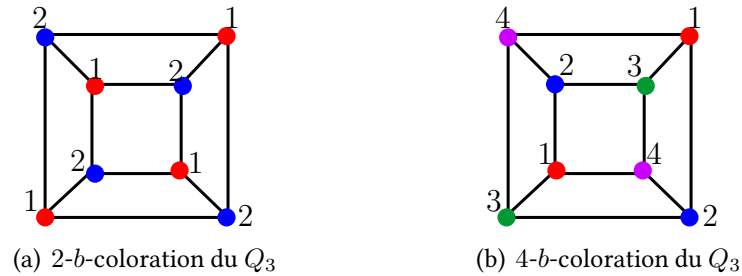


FIGURE 4.2 – Le graphe Q_3 n'admet pas de b -coloration utilisant 3 couleurs

Définition 4.6. Un graphe G est dit b -continu s'il admet une b -coloration, pour tout k , avec :

$$\chi(G) \leq k \leq \varphi(G).$$

Définition 4.7. On appelle b -spectre, noté $S_b(G)$, d'un graphe G , l'ensemble des entiers k , tel qu'il existe une b -coloration avec k couleurs de G .

À titre d'exemple, le b -spectre du cube Q_3 est $\{2, 4\}$. Dans [11], Barth, Cohen et Faik montrent que pour tout ensemble fini I d'entiers, il existe un graphe dont le b -spectre est I .

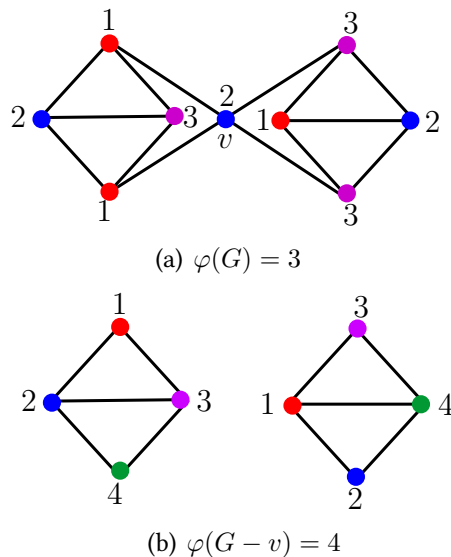


FIGURE 4.3 – Exemple de graphe qui n'est pas b -monotone

Un autre aspect intéressant de la b -coloration, est que le nombre b -chromatique d'un sous graphe induit de G peut être supérieur à celui de G . Par exemple, le graphe de la Figure 4.3(a)

a un nombre b -chromatique égal à 3, mais le sous graphe induit H obtenu à partir de G en supprimant le sommet v (voir Figure 4.3(b)) a un nombre b -chromatique égal à 4. De cette observation, Bonomo et al. [22] ont défini la notion de b -monotonie.

Définition 4.8. *Un graphe G est dit b -monotone si pour tout sous graphe induit H_1 de G et pour tout sous graphe induit H_2 de H_1 on a $\varphi(H_1) \geq \varphi(H_2)$.*

4.4 Le nombre b -chromatique du produit cartésien de graphes

Le produit cartésien de deux graphes G et H est le graphe, noté $G \square H$, dont l'ensemble de ses sommets est $V(G) \times V(H)$ et où le sommet (u, v) est adjacent au sommet (u', v') si et seulement si $uu' \in E(G)$ et $v = v'$ ou $vv' \in E(H)$ et $u = u'$.

De nombreux graphes classiques peuvent être définis en terme de ce produit, nous pouvons citer à titre d'exemple :

- La grille d -dimensionnelle M_{n_1, n_2, \dots, n_d} est le produit cartésien de d chaînes.
- La grille torique d -dimensionnelle $TM_{n_1, n_2, \dots, n_d}$ est le produit cartésien de d cycles.
- Le graphe de Hamming K_n^d est le produit cartésien de K_n par lui même d fois. L'hypercube Q_d est le graphe K_2^d .

Kouider et Mahéo [97] se sont intéressés au problème du nombre b -chromatique de produit cartésien de deux graphes quelconques. Ils montrent :

Proposition 4.9. [97] *Soient deux graphes G et H , alors $\varphi(G \square H) \geq \max(\varphi(G), \varphi(H))$.*

Un ensemble $S \subseteq V$ est dit *stable b -dominant* du graphe $G = (V, E)$, si S est à la fois un ensemble b -dominant et un ensemble stable. Le système b -dominant S donné dans la Figure 4.1, constitue un système stable b -dominant pour ce graphe. En utilisant cette nouvelle notion, la borne de la Proposition 4.9 peut être améliorée selon le théorème suivant :

Théorème 4.10. [97] *Soient G et H deux graphes tels que G et H admettent respectivement, $\varphi(G)$ -système stable b -dominant et $\varphi(H)$ -système stable b -dominant, alors $\varphi(G \square H) \geq \varphi(G) + \varphi(H) - 1$. De plus, le graphe $G \square H$ admet un $(\varphi(G) + \varphi(H) - 1)$ -système stable b -dominant.*

Notons que l'inégalité du Théorème 4.10 reste aussi valable si le système b -dominant de G n'est pas un ensemble stable et $2 \leq \varphi(G) < \varphi(H)$.

De nombreux auteurs se sont intéressés à l'étude du nombre b -chromatique du produit cartésien de quelques classes de graphes, nous pouvons citer les références [58, 97, 87].

Soient deux graphes G et H où $|V(G)| = n$ et $|V(H)| = p$. Dans tout ce qui suit, nous considérons l'ensemble des sommets du graphe $G \square H$, comme étant un tableau $n \times p$, dans

lequel, la case (i, j) correspond au sommet (u_i, v_j) , avec $u_i \in V(G)$ et $v_j \in V(H)$. Toute colonne de ce tableau induit une copie du graphe G et toute ligne induit une copie du graphe H .

Javadi et Omoomi [87], se sont intéressés à la b -coloration d'un graphe complet K_n par un graphe quelconque G :

Proposition 4.11. [87] *Soit c une b -coloration du graphe $K_m \square G$ par φ couleurs, avec $\varphi > m$. Si $v \in V(G)$, alors la colonne correspondant au sommet v , contient au plus $d_G(v)$ sommets b -dominants.*

Démonstration. Si $\varphi > m$ et v est un sommet de G , alors dans la b -coloration c , il y a au moins une couleur qui n'apparaît pas dans la colonne correspondant au sommet v . Notons cette colonne par K_m^v .

Les couleurs manquantes doivent obligatoirement apparaître dans les voisins de tous les sommets b -dominants de K_m^v . Ces couleurs sont nécessairement présentes dans les différentes autres colonnes K_m^u et donc le nombre de sommets b -dominants dans K_m^v est au plus $d_G(v)$. \square

Si $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ est une séquence des degrés du graphe G ayant n sommets, d'après la Proposition 4.11, dans le graphe $K_m \square G$, toute colonne notée $K_m^{(i)}$, $1 \leq i \leq n$, contient au plus d_i sommets b -dominants. Donc tout système b -dominant de G contient au plus $\sum_{i=1}^n d_i$ sommets. Ceci permet d'énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 4.12. [87] *Si $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ est une séquence des degrés du graphe G avec n sommets et e arêtes, alors*

$$\varphi(K_m \square G) \leq \sum_{i=1}^n d_i = 2e.$$

4.5 La b -coloration du graphe $K_n \square K_p$

Dans cette section, nous nous intéressons à la b -coloration du graphe $K_n \square K_p$, avec $n \geq p$. On sait que $\chi(K_n \square K_p) \geq n$ et que $\Delta(K_n \square K_p) = n + p - 2$, alors en appliquant l'inégalité (4.1), on obtient :

$$n \leq \varphi(K_n \square K_p) \leq n + p - 1. \quad (4.3)$$

Omoomi et Javadi [87] ont étudié le nombre b -chromatique du graphes $K_n \square K_n$. Ils ont montré que :

Théorème 4.13. [87] *Si K_n est un graphe complet d'ordre n alors*

$$2n - 3 \leq \varphi(K_n \square K_n) \leq 2n - 2.$$

De plus, ils conjecturent

Conjecture 4.14. *Pour tout entier positif $n \geq 5$, $\varphi(K_n \square K_n) = 2n - 3$.*

Les preuves du lemme et du théorème suivants sont inspirées des preuves données par Ommomi et Javadi [87].

Notons qu'une coloration propre du graphe $K_n \square K_p$, est une coloration qui vérifie les conditions suivantes : Dans le tableau $n \times p$, les couleurs apparaissant dans chaque ligne (respectivement, colonne) sont toutes distinctes.

Lemme 4.15. *Soit c une b -coloration du graphe $K_n \square K_p$ par $n + p - 1$ couleurs. Si les sommets (i, j) et (i, t) sont des sommets b -dominants dans la coloration c , alors les colonnes j et t ne contiennent pas d'autres sommets b -dominants.*

Démonstration. Le graphe $K_n \square K_p$ est un graphe régulier de degré $n + p - 2$. Considérons c une b -coloration du graphe $K_n \square K_p$ par $n + p - 1$ couleurs.

Fait 1. *Si le sommet (x, y) est un sommet b -dominant dans la coloration c , alors tous ses $n + p - 2$ voisins (les sommets de la ligne x et de la colonne y) ont des couleurs différentes.*

Supposons qu'il existe trois sommets b -dominants (i, j) , (i, t) et (i', j) avec $i \neq i'$ dans la coloration c . Sans perte de généralité, posons $c(i', t) = a$. Puisque le sommet (i, t) est b -dominant, alors d'après le Fait 1, aucun sommet de la ligne i n'est coloré avec la couleur a dans c . D'autre part, le sommet (i, j) est b -dominant alors, il existe un sommet appartenant à la colonne j colorée avec la couleur a . Ceci est une contradiction avec le fait que $c(i', t) = a$ et que tous les voisins de (i', j) ont des couleurs distinctes.

□

Théorème 4.16. *Soient n et p des entiers positifs non nuls tels que $n \geq p \geq 2$, on a :*

$$\varphi(K_n \square K_p) \leq n + p - 2$$

Démonstration. On procède par contradiction, supposons que $\varphi(K_n \square K_p) = n + p - 1$ et considérons une b -coloration c avec $n + p - 1$ couleurs.

Il est évident qu'une ligne quelconque du tableau représentant le graphe $K_n \square K_p$ contient au moins deux sommets b -dominants ou bien au plus un sommet b -dominant. Soient s et r deux entiers positifs.

Sans perte de généralité, supposons que :

- i)* les r premières lignes ont au moins deux sommets b -dominants.
- ii)* les lignes de $r + 1$ à n ont au plus un sommet b -dominant.
- iii)* les sommets b -dominants des r premières lignes sont dans les s premières colonnes.

D'après le Lemme 4.15, pour toute colonne j , $1 \leq j \leq s$, il existe au plus un sommet b -dominant. De plus, le nombre de sommets b -dominants S dans la coloration c est d'au plus $s + (n - r)$. Considérons les cas suivants :

- Si $r = 0$, alors il existe au plus n sommets b -dominants dans c . Ceci contredit le fait que $n < n + p - 1$.
- Si $s = p$, alors il existe exactement p sommets b -dominants dans c . Ceci contredit le fait que $n < n + p - 1$.
- Si $r > 0$ et $s < p$, alors $s + (n - r) \leq n + p - 1 - r < n + p - 1$. Ceci contredit le fait que $s + (n - r) \geq n + p - 1$.

On déduit alors que $\varphi(K_n \square K_p) \neq n + p - 1$. Par conséquent : $\varphi(K_n \square K_p) \leq n + p - 2$. □

Kouider et Mahéo [97] ont montré que le nombre b -chromatique du produit cartésien des graphes complets $K_n \square K_p$ vérifie l'inégalité :

$$n \leq \varphi(K_n \square K_p) \leq p(p - 1) \text{ si } p \leq n < p(p - 1)$$

La borne donnée dans le Théorème 4.16 améliore ce résultat dans le cas où $n < (p - 1)^2 + 1$. On peut alors déduire le corollaire suivant :

Corollaire 4.17. *Soient n et p deux entiers positifs non nuls. on a :*

$$\begin{cases} \varphi(K_n \square K_p) \leq n + p - 2 & \text{si } n < (p - 1)^2 + 1 \\ n \leq \varphi(K_n \square K_p) \leq p(p - 1) & \text{si } (p - 1)^2 + 1 \leq n < p(p - 1) \\ \varphi(K_n \square K_p) = n & \text{si } n \geq p(p - 1). \end{cases}$$

4.6 Nombre b -chromatique du graphe $K_n \square K_{1,p}$

Dans cette section, nous déterminerons la valeur exacte de $\varphi(K_n \square K_{1,p})$. L'ensemble des sommets du graphe $K_n \square K_{1,p}$ sera représenté par un tableau $n \times (p + 1)$ où la case (i, j) correspond au sommet (u_i, v_j) , $u_i \in V(K_n)$ et $v_j \in V(K_{1,p})$. Chaque colonne induit une copie du graphe K_n et chaque ligne induit une copie du graphe $K_{1,p}$.

On sait que $\chi(K_n \square K_{1,p}) = n$ et $\Delta(K_n \square K_{1,p}) = n + p - 1$. D'après l'inégalité (4.1), on a :

$$n \leq \varphi(K_n \square K_{1,p}) \leq n + p. \tag{4.4}$$

Théorème 4.18. [89] Soient n et p deux entiers positifs non nuls, tels que $n, p \geq 3$. On a :

$$\varphi(K_n \square K_{1,p}) = \begin{cases} n & \text{si } n \geq 2p \\ n + 1 & \text{si } n < 2p \end{cases}$$

De plus, le graphe $K_n \square K_{1,p}$ est b -continu.

Démonstration. On a : $\chi(K_n \square K_{1,p}) = n$

On propose la b -coloration c par n couleurs du graphe $K_n \square K_{1,p}$ comme suit,

$$c(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } (i, j) = (i, 1), 1 \leq i \leq n \\ i + 1 & \text{si } 1 \leq i \leq n - 1, 2 \leq j \leq p + 1 \\ 1 & \text{si } (i, j) = (n, j), 2 \leq j \leq p + 1 \end{cases}$$

1. Si $n \geq 2p$, alors d'après le Corollaire 4.12 et l'inégalité (4.4),

$$n \leq \varphi(K_n \square K_{1,p}) \leq \sum_{i=1}^{p+1} d_i = 2p \leq n.$$

D'où $\varphi(K_n \square K_{1,p}) = n$ et le graphe $K_n \square K_{1,p}$ est b -continu.

2. Si $n < 2p$. Comme $m(K_n \square K_{1,p}) = n + 1$, alors d'après (4.2) on a,

$$\varphi(K_n \square K_{1,p}) \leq n + 1.$$

Soit c une b -coloration du graphe $K_n \square K_{1,p}$ par $n + 1$ couleurs définie comme suit :

* Si $n > p$:

$$c(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } (i, j) = (i, 1), 1 \leq i \leq n \\ c(i, j - 1) + 1 & \text{si } c(i, j - 1) \leq n, 1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq p \\ 2 & \text{si } c(i, j - 1) = n + 1, 1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq p \\ n + 1 & \text{si } (i, j) = (1, p + 1) \\ i + 1 & \text{si } (i, j) = (i, p + 1), 2 \leq i \leq n - 1 \\ 2 & \text{si } (i, j) = (n, p + 1) \end{cases}$$

La coloration c est bien une b -coloration et l'ensemble $S = \{(1, j) / 1 \leq j \leq p + 1\} \cup \{(i, 1) / p + 1 \leq i \leq n\}$ est son système b -dominant.

* Si $n \leq p$:

$$c(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } (i, j) = (i, 1), 1 \leq i \leq n \\ c(i, j-1) + 1 & \text{si } c(i, j-1) \leq n, 1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq n \\ 2 & \text{si } c(i, j-1) = n+1, 1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq n \\ n+1 & \text{si } (i, j) = (1, j), n+1 \leq j \leq p+1 \\ i+1 & \text{si } 2 \leq i \leq n-1, n+1 \leq j \leq p+1 \\ 2 & \text{si } (i, j) = (n, j), n+1 \leq j \leq p+1 \end{cases}$$

Dans ce cas, $S = \{(1, j) / 1 \leq j \leq n+1\}$ est le système b -dominant.

D'où, pour tout k , $n \leq k \leq n+1$, il existe une b -coloration du graphe $K_n \square K_{1,p}$ par k couleurs. Par conséquent, $K_n \square K_{1,p}$ est b -continu. □

Remarque 4.19.

- Pour $n = 1$ ou $p = 1$, on obtient $\varphi(K_1 \square K_{1,p}) = 2$ et $\varphi(K_n \square K_{1,1}) = n$ si $n \neq 1$.
- Pour $n = 2$ ou $p = 2$, on a $\varphi(K_n \square K_{1,2}) = n$ et $\varphi(K_2 \square K_{1,1}) = 2$.

4.7 Nombre b -chromatique du graphe $K_n \square K_{2,p}$

Dans cette section, nous déterminerons la valeur exacte de $\varphi(K_n \square K_{2,p})$. L'ensemble des sommets du graphe $K_n \square K_{2,p}$ sera représenté par un tableau $n \times (p+2)$ où la case (i, j) correspond au sommet (i, j) , $i \in V(K_n)$ et $j \in V(K_{2,p})$. Chaque colonne induit une copie du graphe K_n et chaque ligne induit une copie du graphe $K_{2,p}$.

On sait que : $\chi(K_n \square K_{2,p}) = n$ et $\Delta(K_n \square K_{2,p}) = n+p-1$. Par l'inégalité (4.1) on obtient :

$$n \leq \varphi(K_n \square K_{2,p}) \leq n+p. \quad (4.5)$$

Lemme 4.20. Soient n et p deux entiers positifs non nuls tels que $n < 4p$. On a

$$\varphi(K_n \square K_{2,p}) \geq n+2.$$

Démonstration. On donne la b -coloration c par $n+2$ couleurs suivante :

1. Si $p \leq n < 4p$, alors

$$c(i, j) = \begin{cases} j & \text{si } (i, j) = (1, j), 1 \leq j \leq p \\ n+1 & \text{si } (i, j) = (1, p+1) \\ n+2 & \text{si } (i, j) \in \{(1, p+2), (n, p+1)\} \\ 2 & \text{si } (i, j) = (2, 1) \\ 1 & \text{si } (i, j) = (2, 2) \\ i & \text{si } 3 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2 \\ c(i-1, j) + 1 & \text{si } 2 \leq i \leq n, 3 \leq j \leq p+2, c(i-1, j) \leq n+1 \\ & \text{et } (i, j) \notin \{(n, p+1), (2, p+1)\} \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le système b -dominant associé à c est : $S = \{(1, j)/1 \leq j \leq p+2\} \cup \{(i, 1)/p+1 \leq i \leq n\}$. Un exemple est donné dans la Figure 4.4(a) où $n = 7$ et $p = 4$. Le système b -dominant associé est $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (5, 1), (6, 1), (7, 1)\}$.

2. Si $n \leq p < 4p$, alors

$$c(i, j) = \begin{cases} n+j & \text{si } (i, j) = (1, j), 1 \leq j \leq 2 \\ j-2 & \text{si } (i, j) = (1, j), 3 \leq j \leq n+2 \\ 1 & \text{si } (i, j) = (1, j), n+3 \leq j \leq p+2 \\ 1 & \text{si } (i, j) = (i, i+2), 2 \leq i \leq n \\ i & \text{si } j \neq i+2, 2 \leq i \leq n, 3 \leq j \leq p+2 \\ n+2 & \text{si } (i, j) = (2, 1) \\ n+1 & \text{si } (i, j) = (2, 2) \\ i-1 & \text{si } 1 \leq j \leq 2, 3 \leq i \leq n \end{cases}$$

Le système b -dominant S associé à c est $S = \{(1, j)/1 \leq j \leq n+2\}$. Un exemple est donné dans la Figure 4.4(b) où $n = 4$ et $p = 5$. Le système b -dominant associé est $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}$.

□

Notons que le graphe $K_n \square K_{2,p}$ a $2n$ sommets, dans les deux premières colonnes, de degré $n+p-1$ et le reste des sommets sont de degré $n+1$, d'où l'observation suivante

Observation 4.21. *Dans toute b -coloration de $\varphi(K_n \square K_{2,p})$ avec au moins $n+3$ couleurs, tous les sommets b -dominants sont dans les deux premières colonnes du tableau représentant les sommets du graphe $K_n \square K_{2,p}$.*

1*	2*	3*	4*	8*	9*
2	1	4	5	3	3
3	3	5	6	4	4
4	4	6	7	5	5
5*	5	7	8	6	6
6*	6	8	9	7	7
7*	7	9	3	9	8

(a) $\varphi(K_7 \square K_{2,4}) \geq 9$

5*	6*	1*	2*	3*	4*	1
6	5	2	1	2	2	2
2	2	3	3	1	3	3
3	3	4	4	4	1	4

(b) $\varphi(K_4 \square K_{2,5}) \geq 6$

 FIGURE 4.4 – b -coloration du graphe $K_n \square K_{2,p}$ avec $n + 2$ couleurs.

Notations : Nous utiliserons les notations suivantes :

- m est le nombre de lignes où les deux premiers sommets sont b -dominants.
- k est le nombre de lignes où seulement le premier sommet est b -dominant.
- k' est le nombre de lignes où seulement le deuxième sommet est b -dominant.
- $n - m - k - k'$ est le nombre de lignes où il n'existe aucun sommet b -dominant dans les deux premières colonnes.

Sans perte de généralité, on suppose que :

- Les lignes de 1 à m ont deux sommets b -dominants.
- Les lignes de $m + 1$ à $m + k$ ont uniquement le premier sommet b -dominant.
- Les lignes de $m + k + 1$ à $m + k + k'$ ont uniquement le deuxième sommet b -dominant.
- Les lignes de $m + k + k' + 1$ à $n - m - k - k'$ n'ont aucun sommet b -dominant.

Lemme 4.22. Soient n et p deux entiers positifs non nuls. Si $m > 0$, $k \geq 0$, $k' = 0$ et $n - m - k - k' \geq 0$ alors $\varphi(K_n \square K_{2,p}) \leq n + 2$.

Démonstration. Soit c une b -coloration du graphe $K_n \square K_{2,p}$ par φ couleurs tel que $\varphi \geq n + 3$. Dans ce cas, tous les sommets b -dominants sont dans les deux premières colonnes (Observation 4.21). Supposons que $m > 0$, $k \geq 0$, $k' = 0$ et $n - m - k - k' \geq 0$. Alors

$$\varphi = 2m + k$$

et donc

$$2m = \varphi - k$$

Toutes les couleurs des sommets b -dominants de la deuxième colonne doivent apparaître dans la première colonne, donc :

$$m \leq n - m - k.$$

Comme $2m = \varphi - k$, on obtient :

$$\varphi - k \leq n - k.$$

Par conséquent, $\varphi \leq n$ ce qui contredit le fait que $\varphi \geq n + 3$. Par conséquent, si $m > 0$, $k \geq 0$, $k' = 0$ et $n - m - k - k' \geq 0$ alors $\varphi \leq n + 2$.

□

Théorème 4.23. [89] Soient n et p deux entiers positifs, tels que $n \geq 9$ et $p \geq 6$.

On a :

$$\varphi(K_n \square K_{2,p}) = \begin{cases} n & \text{si } n \geq 4p \\ \lfloor \frac{4n}{3} \rfloor & \text{si } n < \frac{3p}{2} \\ 2p & \text{si } \frac{3p}{2} \leq n \leq 2p - 3 \\ n + 2 & \text{si } 2p - 2 \leq n < 4p \end{cases}$$

Démonstration. Soient n et p deux entiers positifs, tels que $n \geq 9$ et $p \geq 6$.

Posons $\varphi(K_n \square K_{2,p}) = \varphi$ et considérons les cas suivants :

Cas 1. Si $n \geq 4p$, alors d'après le Corollaire 4.12 et l'inégalité (4.5) on a

$$n \leq \varphi(K_n \square K_{2,p}) \leq 4p \leq n$$

Par conséquent

$$\varphi(K_n \square K_{2,p}) = n.$$

Cas 2. Si $n < 4p$, alors d'après le Lemme 4.20

$$\varphi(K_n \square K_{2,p}) \geq n + 2.$$

Si $\varphi(K_n \square K_{2,p}) \geq n + 3$, alors d'après l'Observation 4.21, il est facile de voir que $m \geq 3$. Ainsi, $m > 0$, $k > 0$, $k' > 0$ et $n - m - k - k' \geq 0$ (sinon, d'après le Lemme 4.20 et le Lemme 4.22, $\varphi = n + 2$ ce qui constitue une contradiction), d'où

$$\varphi = 2m + k + k'$$

et donc

$$k + k' = \varphi - 2m \tag{4.6}$$

Il n'est pas difficile de voir que toutes les couleurs des sommets b -dominants de la première colonne (respectivement, de la deuxième colonne) doivent apparaître dans la deuxième colonne (respectivement, de la première colonne), par conséquent

$$m \leq n - m - k \text{ ainsi } 2m \leq n - k \tag{4.7a}$$

$$m \leq n - m - k' \text{ ainsi } 2m \leq n - k' \tag{4.7b}$$

De (4.7a)+(4.7b), on obtient :

$$4m \leq 2n - (k + k')$$

Alors, par (4.6),

$$2m \leq 2n - \varphi. \quad (4.8)$$

de plus,

$$m + k + k' \leq n$$

par conséquent, en appliquant (4.6), on obtient

$$\varphi - 2m \leq n - m$$

d'où

$$\varphi - n \leq m. \quad (4.9)$$

De (4.8) et (4.9), on obtient

$$\varphi - n \leq \frac{2n - \varphi}{2}.$$

D'où

$$\varphi \leq \frac{4n}{3}. \quad (4.10)$$

De plus, par la Proposition 4.11 on a

$$\varphi \leq 2p. \quad (4.11)$$

De (4.10) et (4.11) , nous pouvons déduire que

$$\varphi(K_n \square K_{2,p}) \leq \min \left\{ \frac{4n}{3}, 2p \right\}.$$

Comme $\varphi \geq n + 3$, on obtient alors

$$\begin{cases} \varphi(K_n \square K_{2,p}) \leq \frac{4n}{3} & \text{si } n < \frac{3p}{2} \\ \varphi(K_n \square K_{2,p}) \leq 2p & \text{si } \frac{3p}{2} \leq n \leq 2p - 3 \\ \varphi(K_n \square K_{2,p}) = n + 2 & \text{si } 2p - 2 \leq n \leq 4p \end{cases}$$

* Si $n < \frac{3p}{2}$:

On propose la b -coloration c par $\lceil \frac{4n}{3} \rceil$ couleurs pour le graphe $K_n \square K_{2,p}$ suivante :

Soient $\alpha = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ et $\beta = p - 2\alpha$

Pour les lignes de 1 à α :

$$c(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } (i, j) = (i, 1) \\ \alpha + i & \text{si } (i, j) = (i, 2) \\ 2\alpha + j - (i + 1) & \text{si } i \leq \beta + 1, i + 2 \leq j \leq i + 2\alpha + 1 \\ 2\alpha + j - (i + 1) & \text{si } i > \beta + 1, i + 2 \leq j \leq p + 2 \\ 2\alpha + p + j - (i + 1) & \text{si } i > \beta + 1, 3 \leq j \leq i - \beta + 1 \\ i + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les lignes de $\alpha + 1$ à 2α :

$$c(i, j) = \begin{cases} \alpha + i & \text{si } (i, j) = (i, 1) \\ i - \alpha & \text{si } (i, j) = (i, 2) \\ 2\alpha + j - (i + 1) & \text{si } i \leq \beta + 1, i + \alpha + 2 \leq j \leq i + 2\alpha + 1 \\ 2\alpha + j - (i + 1) & \text{si } i > \beta + 1, i + \alpha + 2 \leq j \leq p + 2 \\ 2\alpha + p + j - (i + 1) & \text{si } i > \beta + 1, 3 \leq j \leq i - \beta + 1, \\ & \text{et } j - i \geq \alpha - p + 2 \\ i - \alpha + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les lignes de $2\alpha + 1$ à 3α :

$$c(i, j) = \begin{cases} i - \alpha & \text{si } (i, j) = (i, 1) \\ \alpha + i & \text{si } (i, j) = (i, 2) \\ 3\alpha + j - (i + 1) & \text{si } i \leq p + 1, i - \alpha + 2 \leq j \leq i + 1 \\ 3\alpha + j - (i + 1) & \text{si } i > p + 1, i - \alpha + 2 \leq j \leq p + 2 \\ 3\alpha + j + p - (i + 1) & \text{si } i > p + 1, 3 \leq j \leq i - p + 1 \\ 1 & \text{si } (i, j) = (3\alpha, j), 3\alpha - p + 2 \leq j \leq 2\alpha + 1 \\ i - \alpha + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les lignes de $3\alpha + 1$ à n :

$$c(i, j) = \begin{cases} \alpha + i & \text{si } (i, j) = (i, 1), (i, j) = (i, 2) \\ 3\alpha + j - (i + 1) & \text{si } i \leq p + 1, i - \alpha + 2 \leq j \leq i + 1 \\ 3\alpha + j - (i + 1) & \text{si } i > p + 1, i - \alpha + 2 \leq j \leq p + 2 \\ 3\alpha + p + j - (i + 1) & \text{si } i > p + 1, 3 \leq j \leq i - p + \alpha + 1 \\ 3\alpha + j - (i + 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Le système b -dominant associé à cette coloration est : $S = \{(i, 1)/1 \leq i \leq 2\alpha\} \cup \{(i, 2)/2\alpha + 1 \leq i \leq n\}$.

Dans la Figure 4.5, le système b -dominant du graphe $K_{10} \square K_{2,8}$ correspond à l'ensemble des sommets portant les étiquettes $\{1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*, 7^*, 8^*, 9^*, 10^*, 11^*, 12^*, 13^*\}$.

1*	4*	7	8	9	10	11	12	2	2
2*	5*	3	7	8	9	10	11	12	3
3*	6*	4	4	7	8	9	10	11	12
7*	1	12	2	2	2	2	2	10	11
8*	2	11	12	3	3	3	3	3	10
9*	3	10	11	12	4	4	4	4	4
4	10*	5	5	5	7	8	9	5	5
5	11*	6	6	6	6	7	8	9	6
6	12*	1	1	1	1	1	7	8	9
13	13*	9	10	11	12	5	6	7	8

FIGURE 4.5 - $\varphi(K_{10} \square K_{2,8}) = 13$

Remarque 4.24. Si $n < p$, alors on reprend la coloration c précédente, en remplaçant p par n , et en colorant les colonnes $n + 3$ à $p + 2$ de même manière que la colonne $n + 2$.

* Si $\frac{3p}{2} \leq n \leq 2p - 3$:

On propose la b -coloration c par $2p$ couleurs suivante :

Pour les lignes de 1 à $2p - n$:

$$c(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } (i, j) = (i, 1) \\ 2p - n + i & \text{si } (i, j) = (i, 2) \\ 2(2p - n) + j - (i + 1) & \text{si } i + 2 \leq j \leq i + 2p - n + 1 \\ p + j - (i + 1) & \text{si } i \leq 2n - 3p + 1, \\ & i + 2p - n + 2 \leq j \leq i + 2(2p - n) + 1 \\ p + j - (i + 1) & \text{si } i > 2n - 3p + 1, i + 2p - n + 2 \leq j \leq p + 2 \\ 2p + j - (i + 1) & \text{si } i > 2n - 3p + 1, 3 \leq j \leq i + 3p - 2n + 1 \\ i + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les lignes de $2p - n + 1$ à $2(2p - n)$:

$$c(i, j) = \begin{cases} 2p - n + i & \text{si } (i, j) = (i, 1) \\ 2p - n + i & \text{si } (i, j) = (i, 2), 2(2p - n) + 1 \leq i \leq p \\ i - 2p + n & \text{si } (i, j) = (i, 2), 2p - n + 1 \leq i \leq 2(2p - n) \\ p + j - (i + 1) & \text{si } i + 2p - n + 2 \leq j \leq i + 2(2p - n) + 1, \\ & i \leq 2n - 3p + 1 \\ p + j - (i + 1) & \text{si } i > 2n - 3p + 1, i + 2p - n + 2 \leq j \leq p + 2 \\ 2p + j - (i + 1) & \text{si } 2n - 3p + 1 < i \leq j + n - p - 2, \\ & 3 \leq j \leq i + 3p - 2n + 1 \\ i - 2p + n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les lignes de $p + 1$ à n :

$$c(i, j) = \begin{cases} i + p - n & \text{si } (i, j) = (i, 1), p + 1 \leq i \leq 3p - n \\ 2p - n + i & \text{si } (i, j) = (i, 2), p + 1 \leq i \leq n \\ 2p - n + i & \text{si } (i, j) = (i, 1), 3p - n + 1 \leq i \leq n \\ 3p - n + j - (i + 1) & \text{si } i + 2 - (n - p) \leq j \leq p + 2 \\ 4p - n + j - (i + 1) & \text{si } 3 \leq j \leq 2p - 2n + i + 1 \\ 1 & \text{si } i = 3(2p - n), 2 < 8p - 5n + 2 \leq j \leq 7p - 4n + 1 \\ 1 & \text{si } i = 3(2p - n), 8p - 5n \leq 0, \\ & 3 \leq j \leq 7p - 4n + 1, 9p - 5n + 2 \leq j \leq p + 2 \\ n - p + i & \text{si } i - (n - p) - 1 > p, 3 \leq j \leq i - (n - p) + 1, \\ & 3p - 2n + i + 2 \leq j \leq p + 2, \\ & 3(2p - n) + 1 \leq i \leq 3p - n \\ n - p + i & \text{si } i - (n - p) - 1 \leq p, \\ & 3(2p - n) + 1 \leq i \leq 3p - n, \\ & 2p - 2n + i + 2 \leq j \leq i + 2 - (n - p) - 1 \\ 3p - 2n + i & \text{si } i - (n - p) - 1 > p, 3 \leq j \leq i + 2 - (n - p) - 1, \\ & 3p - 2n + i + 2 \leq j \leq p + 2, \\ & 3(2p - n) + 1 \leq i \leq 3p - n \\ 3p - 2n + i & \text{si } i - (n - p) - 1 \leq p, \\ & 2p - 2n + i + 2 \leq j \leq i + 1 - (n - p), \\ & 3p - n + 1 \leq i \leq n \\ i - 2p + n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le système dominant est $S = \{(i, 1) / 1 \leq i \leq p\} \cup \{(i, 2) / p + 1 \leq i \leq n\}$.

Dans la Figure (4.6) une telle b -coloration est donnée pour le graphe $K_{11} \square K_{2,7}$. Le système dominant est l'ensemble des sommets portant les étiquettes i^* , $i \in \{1, 2, \dots, 14\}$.

1*	4*	7	8	9	11	12	13	2
2*	5*	3	7	8	9	11	12	13
3*	6*	13	4	7	8	9	11	12
7*	1	12	13	2	2	2	2	11
8*	2	11	12	13	3	3	3	3
9*	3	4	11	12	13	4	4	4
10*	10	5	5	11	12	13	5	5
4	11*	6	6	6	7	8	9	6
5	12*	1	1	1	1	7	8	9
6	13*	9	14	14	14	14	7	8
14	14*	8	9	10	10	10	10	7

FIGURE 4.6 - $\varphi(K_{11} \square K_{2,7}) = 14$

□

Remarque 4.25.

- $\varphi(K_1 \square K_{2,1}) = 2$ et $\varphi(K_n \square K_{2,1}) = n$ si $n \neq 1$.

- Si $2 \leq n \leq 8$ ou $2 \leq p \leq 5$ alors $\varphi(K_n \square K_{2,p}) = \begin{cases} n & \text{si } n \geq 4p \\ n + 2 & \text{sinon } < 4p. \end{cases}$

Proposition 4.26. Soient n et p deux entiers positifs non nuls. Si $n \geq 4p$ ou $2p - 2 \leq n < 4p$ alors le graphe $K_n \square K_{2,p}$ est b -continu.

Démonstration. On sait que $\chi(K_n \square K_{2,p}) = n$. on défini la b -coloration c par n couleurs du graphe $K_n \square K_{2,p}$ comme suit :

$$c(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } 1 \leq j \leq 2, 1 \leq i \leq n \\ 1 & \text{si } (i, j) = (n, j), 3 \leq j \leq p + 2 \\ i + 1 & \text{si } 1 \leq i \leq n - 1, 3 \leq j \leq p + 2 \end{cases}$$

1. Si $n \geq 4p$, alors d'après le Théorème 4.23 on peut écrire :

$$\chi(K_n \square K_{2,p}) = \varphi(K_n \square K_{2,p}) = n,$$

Donc le graphe $K_n \square K_{2,p}$ est b -continu.

2. Si $2p - 2 \leq n \leq 4p$ alors d'après le Théorème 4.23,

$$\varphi(K_n \square K_{2,p}) = n + 2,$$

On propose une b -coloration c utilisant $(n + 1)$ couleurs pour le graphe $K_n \square K_{2,p}$ comme suit :

$$c(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } 1 \leq i \leq n, j = \{1, 2\} \\ n + 1 & \text{si } (i, j) = (1, j), 3 \leq j \leq n + 2 \\ 2 & \text{si } (i, j) = (n, j), 3 \leq j \leq n + 2 \\ i + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le système b -dominant S est $S = \{(i, 1) / 1 \leq i \leq n\} \cup \{(2, 3)\}$. Un exemple de coloration est donné dans la Figure 4.7 pour le graphe $K_{10} \square K_{2,4}$.

□

1*	1	11*	11	11	11
2*	2	3	3	3	3
3*	3	4	4	4	4
4*	4	5	5	5	5
5*	5	6	6	6	6
6*	6	7	7	7	7
7*	7	8	8	8	8
8*	8	9	9	9	9
9*	9	10	10	10	10
10*	10	2	2	2	2

FIGURE 4.7 – b -coloration $K_{10} \square K_{2,4}$ utilisant 11 couleurs.

4.8 Nombre b -chromatique du graphe $K_n \square K_{p,p}$

Dans cette section, nous nous intéressons au nombre b -chromatique et à la b -continuité du graphe $K_n \square K_{p,p}$.

Le graphe $K_n \square K_{p,p}$ est régulier de degré $n + p - 1$ et $\chi(K_n \square K_{p,p}) \geq n$. En appliquant l'inégalité (4.11), on obtient :

$$n \leq \varphi(K_n \square K_{p,p}) \leq n + p. \quad (4.12)$$

Théorème 4.27. Soient n et p deux entiers positifs non nuls tels que $n \geq p \geq 3$, on a :

$$\varphi(K_n \square K_{p,p}) = \begin{cases} n & \text{si } n \geq 2p^2 \\ n + p & \text{si } n \leq p(2p - 1) \\ 2p^2 & \text{si } p(2p - 1) \leq n < 2p^2 \end{cases}$$

De plus, le graphe $K_n \square K_{p,p}$ est b -continu.

Démonstration. On a

$$\chi(K_n \square K_{p,p}) = n$$

On donne la b -coloration c par n couleurs du graphe $K_n \square K_{p,p}$ comme suit :

$$c(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } 1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n \\ 1 & \text{si } (i, j) = (n, j), p + 1 \leq j \leq 2p \\ i + 1 & \text{si } 1 \leq i \leq n - 1, p + 1 \leq j \leq 2p \end{cases}$$

Cas 1 : Si $n \geq 2p^2$, alors d'après le Corollaire 4.11 :

$$\varphi(K_n \square K_{p,p}) \leq \sum_{i=1}^{2p} d_i = 2p^2 \leq n.$$

D'où, en utilisant l'inégalité 4.12, on obtient :

$$\varphi(K_n \square K_{p,p}) = n = \chi(K_n \square K_{p,p})$$

on conclut que le graphe $K_n \square K_{p,p}$ est b -continu.

Cas 2 : Si $n < 2p^2$ alors d'après l'inégalité 4.12

$$\varphi(K_n \square K_{p,p}) \leq n + p$$

et le Corollaire 4.11

$$\varphi(K_n \square K_{p,p}) \leq 2p^2$$

D'où,

$$\varphi(K_n \square K_{p,p}) \leq \begin{cases} n + p & \text{si } n \leq p(2p - 1) \\ 2p^2 & \text{si } p(2p - 1) \leq n < 2p^2 \end{cases}$$

Cas 2.1 : Si $n \leq p(2p - 1)$ alors $\varphi(K_n \square K_{p,p}) = n + p$ et le graphe est b -continu.

Pour prouver cela, il suffit de montrer que le graphe admet une b -coloration utilisant k couleurs pour tout $n \leq k \leq n + p$. On définit la coloration c comme suit

Cas 2.1.1 : Si $k > 2p + 1$. Posons

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \alpha = \left\lceil \frac{1}{p} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \right\rceil \quad \text{et} \quad \beta = \left\lceil \frac{1}{p} \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \right\rceil$$

Pour la colonne 1 :

$$c(i, j) = \begin{cases} 2i & \text{si } 1 \leq i \leq p + 1 \\ 2[(i - p)p + 1] & \text{si } p + 2 \leq i \leq p + \alpha - 1 \\ 2rp + 4 & \text{si } i = r(p - 1) + \alpha + 1; 1 \leq r \leq \alpha - 1; 2rp + 4 \leq k \\ k - \gamma & \text{si } (i, j) = (n, 1) \\ c(i + 1, j) - 2 & \text{si } \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq n - 1 \\ c(i - 1, j) + 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les colonnes 2 à p :

$$c(i, j) = \begin{cases} c(i, j - 1) + 2 & \text{si } 1 \leq i \leq p, c(i, j - 1) \leq 2p - 2 \\ 2 & \text{si } 1 \leq i \leq p, c(i, j - 1) = 2p \\ c(i, j - 1) + 2 & \text{si } p + 1 \leq i \leq p + \alpha - 1, c(i, j - 1) < k - 1 + \gamma \\ k - 1 + \gamma & \text{si } p + 1 \leq i \leq p + \alpha - 1, c(i, j - 1) = k - 1 + \gamma \\ c(i, j - 1) + 2 & \text{si } p + \alpha \leq i \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, \\ & c(i, j - 1) \leq k - 3 + \gamma, c(p + \alpha - 1, j) \neq c(i, j - 1) + 2 \\ 2p + 2 & \text{si } p + \alpha \leq i \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, \\ & c(i, j - 1) = k + \gamma - 1 \text{ ou } c(p + \alpha - 1, j) = c(i, j - 1) + 2 \\ c(i, j - 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour la colonne $p + 1$

$$c(i, j) = \begin{cases} 2(i - 1)p + 1 & \text{si } 1 \leq i \leq \beta \\ 3 & \text{si } (i, j) = (\beta + 1, p + 1) \\ c(i - 1, j) + 2 & \text{si } \beta + 2 \leq i \leq p + \beta - 1 \\ 2rp + 3 & \text{si } i = r(p - 1) + \beta + 1; 1 \leq r \leq \beta - 1, i \neq n, 2rp + 3 \leq k \\ k + \gamma - 1 & \text{si } (i, j) = (n, p + 1) \\ c(i + 1, j) - 2 & \text{si } \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq n - 1 \\ c(i - 1, j) + 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les colonnes $p + 2$ à $2p$

$$c(i, j) = \begin{cases} c(i, j-1) + 2 & \text{si } 1 \leq i \leq \beta, c(i, j-1) \leq k - (\gamma + 2) \\ k - \gamma & \text{si } 1 \leq i \leq \beta, c(i, j-1) = k - \gamma \\ c(i, j-1) + 2 & \text{si } \beta + 1 \leq i \leq p + \beta - 1, c(i, j-1) \leq 2p - 3 \\ 1 & \text{si } \beta + 1 \leq i \leq p + \beta - 1, c(i, j-1) = 2p - 1 \\ c(i, j-1) + 2 & \text{si } p + \beta \leq i \leq \lceil \frac{k}{2} \rceil ; \\ & c(i, j-1) \leq k - (\gamma + 2), c(\beta, j) \neq c(i, j-1) + 2 \\ 2p + 1 & \text{si } p + \beta \leq i \leq \lceil \frac{k}{2} \rceil , \\ & c(i, j-1) = k - \gamma \text{ ou } c(\beta, j) = c(i, j-1) + 2 \\ c(i, j-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

$S = \{(1, j) / 1 \leq j \leq 2p\} \cup \{(i, j) / p + 1 \leq i \leq p + \alpha - 1\} \cup \{(i, j) / 2 \leq i \leq \alpha - 1\}$ est le système b -dominant.

Remarque 4.28. Si $n = 3p - 1$ et $k = n + p$ alors

$$c(i, j) = \begin{cases} k - 1 & \text{si } i = \frac{k+1}{2}, p + 2 \leq j \leq 2p \\ 2(p+r) + 1 & \text{si } i = n, p + 2 \leq j \leq 2p \text{ et } 0 \leq r \leq p - 2 \end{cases}$$

Cas 2.1.2 : Si $k \leq 2p + 1$.

• k est pair.

Pour les colonnes 1 et $p + 1$

$$c(i, j) = \begin{cases} 2i & \text{si } 1 \leq i \leq \frac{k}{2}; j = 1 \\ 1 & \text{si } (i, j) = (\frac{k}{2} + 1, 1) \\ 2i - 1 & \text{si } 1 \leq i \leq \frac{k}{2}; j = p + 1 \\ 2 & \text{si } (i, j) = (\frac{k}{2} + 1, p + 1) \\ c(i-1, j) + 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les colonnes 2 à p et les colonnes $p + 2$ à $2p$

$$c(i, j) = \begin{cases} c(i, j-1) + 2 & \text{si } 1 \leq i \leq \frac{k}{2}; c(i, j-1) < k; 2 \leq j \leq \frac{k}{2} \\ 2 & \text{si } 1 \leq i \leq \frac{k}{2}; c(i, j-1) = k; 2 \leq j \leq \frac{k}{2} \\ c(i, j-1) + 2 & \text{si } 1 \leq i \leq \frac{k}{2}; c(i, j-1) \leq k - 3; p + 2 \leq j \leq p + \frac{k}{2} \\ 1 & \text{si } 1 \leq i \leq \frac{k}{2}; c(i, j-1) = k - 1; p + 2 \leq j \leq p + \frac{k}{2} \\ c(i, j-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

• k est impair.

Pour les colonnes 1 et $p + 1$

$$c(i, j) = \begin{cases} 2i & \text{si } 1 \leq i \leq \frac{k-1}{2}; j = 1 \\ k & \text{si } (i, j) = (\frac{k+1}{2}, 1) \\ 1 & \text{si } (i, j) = (\frac{k+3}{2}, 1) \\ 1 & \text{si } (i, j) = (1, p+1) \\ k & \text{si } (i, j) = (2, p+1) \\ 2i - 3 & \text{si } 3 \leq i \leq \frac{k+1}{2}; j = p+1 \\ 2 & \text{si } (i, j) = (\frac{k+3}{2}, p+1) \\ c(i-1, j) + 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les colonnes 2 à p et les colonnes $p + 2$ à $2p$

$$c(i, j) = \begin{cases} c(i, j-1) + 2 & \text{si } 1 \leq i \leq \frac{k-1}{2}; c(i, j-1) < k-1; 2 \leq j \leq \frac{k-1}{2} \\ 2 & \text{si } 1 \leq i \leq \frac{k-1}{2}; c(i, j-1) = k-1; 2 \leq j \leq \frac{k-1}{2} \\ c(i, j-1) + 2 & \text{si } p+2 \leq j \leq p + \frac{k-1}{2}; (i, j) = (1, j) \\ c(i, j-1) + 2 & \text{si } 3 \leq i \leq \frac{k+1}{2}; c(i, j-1) < k-2; p+2 \leq j \leq p + \frac{k-1}{2} \\ 1 & \text{si } 3 \leq i \leq \frac{k+1}{2}; c(i, j-1) = k-2; p+2 \leq j \leq p + \frac{k-1}{2} \\ c(i, j-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Cas 2.2 : Si $p(2p-1) \leq n < 2p^2$ alors $\varphi(K_n \square K_{p,p}) = 2p^2$ et le graphe est b -continu.

Pour prouver cela, il suffit de montrer que le graphe admet b -coloration utilisant k couleurs pour tout, $n \leq k \leq 2p^2$.

Pour $n \leq k \leq 2p^2$, la coloration c proposée précédemment pour le graphe $K_n \square K_{p,p}$ dans le Cas 2.1.1 ($k > 2p+1$) reste valide. D'où, si $p(2p-1) \leq n < 2p^2$ alors le graphe $K_n \square K_{p,p}$ est b -continu. □

Proposition 4.29. Soient n et p deux entiers tels que $n < p$. Si c une b -coloration du graphe $K_n \square K_{p,p}$ utilisant $n + p$ couleurs, alors il n'existe pas de sommets (i, j) et (i, t) , $1 \leq j \leq p$ et $p+1 \leq t \leq 2p$, dans la coloration c telle que (i, j) et (i, t) sont des sommets b -dominants.

Démonstration. Soit c une b -coloration du graphe $K_n \square K_{p,p}$ utilisant $n + p$ couleurs, avec $n < p$. Il est facile de voir que si le sommet (i, j) est b -dominant dans c , alors tous ses $n + p - 1$ sont de couleurs différentes.

Par contradiction, supposons que les sommets (i, j) et (i, t) , $1 \leq j \leq p$ et $p + 1 \leq t \leq 2p$, sont b -dominants. Dans ce cas, tous les sommets ($2p$ sommets) de la ligne i ont des couleurs distinctes. Alors, $2p \leq n + p$ et par conséquent $n \geq p$. Ceci constitue une contradiction car $n < p$.

□

Théorème 4.30. *Pour tout entiers n, p tel que $n < p$, on a*

$$\varphi(K_n \square K_{p,p}) \geq 2n$$

Démonstration. On définit la coloration $c : V(K_n \square K_{p,p}) \longrightarrow \{1, 2, \dots, 2n\}$, comme suit :

$$c(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } 1 \leq i \leq n; j = 1 \\ c(i, j - 1) + 1 & \text{si } 1 \leq i \leq n; 2 \leq j \leq n; c(i, j - 1) \leq n - 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq i \leq n; 2 \leq j \leq n; c(i, j - 1) = n \\ n + i & \text{si } 1 \leq i \leq n; j = p + 1 \\ c(i, j - 1) + 1 & \text{si } 1 \leq i \leq n; p + 2 \leq j \leq p + n; c(i, j - 1) \leq 2n - 1 \\ n + 1 & \text{si } 1 \leq i \leq n; p + 2 \leq j \leq p + n; c(i, j - 1) = 2n \\ c(i, j - 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Le système b -dominant associé à c est $S = \{(1, j) / 1 \leq j \leq n, p + 1 \leq j \leq p + n\}$.

□

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons considéré trois types de colorations à savoir : la coloration d'incidences, la coloration étoilée d'arêtes et la b -coloration des sommets.

Nous nous sommes intéressés à la coloration d'incidences des graphes planaires et des graphes de faibles densités.

Les résultats obtenus par Hussein Dolama et *al.* [82] et Yang [136] concernant les graphes planaires, nous ont amené à considérer le nombre chromatique d'incidences des graphes planaires sans cycles de longueurs données. Dans le Théorème 2.16.2 nous avons montré que pour tout graphe planaire G sans C_4 et C_5 et $\Delta(G) \neq 4$, $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 3$.

Question 1. *Pour tout graphe planaire G sans C_4 et C_5 , peut-on prouver que $\chi_i(G) \leq 7$ pour $\Delta(G) = 4$?*

Nous pouvons aussi poser la question suivante :

Question 2. *Pour quelles valeurs de i et j , peut-on prouver qu'un graphe planaire G sans cycle i à j , est tel que $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ ou $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$?*

Nous avons également étudié la coloration d'incidences des graphes de degré moyen borné. Le Théorème 2.29 a été prouvé avec un argument de déchargement relativement simple (une seule configuration réductible et une seule règle de déchargement). Les résultats obtenus nous laissent espérer que le développement de configurations réductibles plus complexes et le développement de règles de déchargement plus affinées, pourraient débloquent des résultats génériques avec des conséquences au-delà de l'extrémale.

Question 3. *Peut-on prouver que le Théorème 2.29 est vrai pour tout Δ ?*

En utilisant le Théorème 2.2, il est facile de voir que le Théorème 2.35.1 est vrai pour $\Delta \leq 3$.

Question 4. *Pour $\Delta(G) = 4, 5, 6$ et $mad(G) < 4$, peut-on prouver que $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 3$?*

La même question peut être posée pour les autres résultats du Théorème 2.35.

Nous avons abordé la coloration étoilée d'arêtes des graphes subcubiques et des graphes k -dégénérés.

Dvořák, Mohar et Šámal [46] ont montré que tout graphe subcubique G est 7-arêtes-étoilées colorable. Ils ont aussi conjecturé que 6 couleurs pourraient suffire pour avoir une coloration étoilée d'arêtes. Nous nous sommes intéressés au problème de l'indice chromatique étoilé par listes des graphes subcubiques, et avons montré que tout graphe subcubique est 8-listes-arêtes-étoilées colorable. La question posée par Dvořák et *al.* [46] est toujours ouverte.

Question 5. *Peut-on prouver que tout graphe subcubique planaire G est tel que $ch'_{st}(G) \leq 7$?*

Nous avons également considéré les graphes de degré moyen maximum borné et tenté de déterminer, pour un graphe subcubique G , le plus grand entier k tel que si $mad(G) < k$, alors G admet une 5-coloration étoilée d'arêtes ou une 6-coloration étoilée d'arêtes. Nous avons ainsi montré que si G est un graphe subcubique tel que son degré moyen maximum est strictement inférieur à $\frac{7}{3}$ (respectivement, $\frac{5}{2}$), alors $ch'_{st}(G) \leq 5$ (respectivement, $ch'_{st}(G) \leq 6$). En revanche, nous ne savons pas si ces bornes sont optimales.

Question 6. *Peut-on construire un graphe subcubique G avec $mad(G) < \frac{7}{3}$ (respectivement, $mad(G) < \frac{5}{2}$) tel que $\chi'_{st}(G) > 5$ (respectivement, $\chi'_{st}(G) > 6$) ?*

Ces résultats ont permis d'obtenir en corollaire des bornes pour certaines classes de graphes planaires subcubiques de maille donnée. En effet, tout graphe planaire G de maille 10 (respectivement, 14) admet une 5-coloration étoilée d'arêtes (respectivement 6-coloration étoilée d'arêtes).

Enfin, nous avons étudié la coloration étoilée d'arêtes de la classe de graphes k -dégénérés et montré que l'indice chromatique étoilé d'un graphe k -dégénéré est borné par $(3k - 2)\Delta - k^2 + 2$. Puisque tout graphe sans mineur K_4 est 2-dégénéré, nous en avons déduit que tout graphe G , sans mineur K_4 admet une $(4\Delta - 2)$ -coloration étoilée d'arêtes.

Question 7. *Peut-on trouver une meilleure majoration pour $\chi'_{st}(G)$ pour les graphes sans mineur K_4 ?*

Nous avons étudié la b -coloration des sommets. Contrairement à la coloration classique où il est souvent question de rechercher le nombre minimum de couleurs, le problème de la b -coloration consiste à maximiser ce nombre de couleurs.

Nous nous sommes intéressés principalement aux problèmes de la b -coloration du produit cartésien de graphes. Après avoir donné une valeur exacte du nombre b -chromatique pour les graphes $K_n \square K_{1,p}$, $K_n \square K_{2,p}$ et $K_n \square K_{p,p}$, nous avons étudié la b -continuité des b -colorations de ces graphes et déterminé les cas pour lesquels ils sont continus. Cependant, au vu de nos résultats, la question suivante se pose :

Question 8. *Peut-on déterminer la valeur de $\varphi(K_n \square K_{s,p})$?*

La question posée par Ommomi et Javadi [87] est toujours d'actualité :

Question 9. *Pour tout entier positif $n \geq 5$, est-il vrai que $\varphi(K_n \square K_n) = 2n - 3$?*

Un automorphisme ϕ d'un graphe $G = (V, E)$ est une bijection de V dans lui-même telle que pour tout $x, y \in V$: $xy \in E \Leftrightarrow \phi(x)\phi(y) \in E$. L'ensemble des automorphismes d'un graphe G , noté $Aut(G)$, muni de la composition, a naturellement une structure de groupe. Si G est de plus muni d'une coloration c , on dit que ϕ préserve c si et seulement si $c = c \circ \phi$. L'ensemble des automorphismes de G préservant c , noté $Aut_c(G)$, est un sous-groupe de $Aut(G)$. La question naturelle qui se pose est la suivante :

Question 10. *À partir des invariants que nous avons étudiés, peut-on caractériser les groupes d'automorphismes d'un graphe ?*

Bibliographie

- [1] F. Affif Chaouche and A. Berrachedi. Some bounds for the b -chromatic number of a generalized hamming graphs. *Far East Journal of Applied Mathematics*, 26 :375–391, 2007. (Cité en page 98)
- [2] J. Akiyama and M. Kano. Path factors of a graph. In Willy, editor, *Graphs and Applications : Proc. First Colorado Sympos. on Graph Theory*, pages 1–21, New York, 1985. (Cité en page 25)
- [3] M. O. Albertson and D. M. Berman. Every planar graph has an acyclic 7-coloring. *Israel J. Math.*, 28 :169–174, 1977. (Cité en page 68)
- [4] M. O. Albertson, G. G. Chappell, H. A. Kierstead, A. Kündgen, and R. Ramamurthi. Coloring with no 2-colored p_4 's. *Electron. J. Combin.*, 11(1) :R26, 2004. (Cité en page 69)
- [5] I. Algor and N. Alon. The star arboricity of graphs. *Discrete Mathematics*, 75 :11–22, 1989. (Cité en page 27)
- [6] N. Alon. Restricted colorings of graphs. In "Surveys in Combinatorics", *Proc. 14th British Combinatorial Conference*, pages 1–33, 1993. London Mathematical Society Lecture Notes Series 187, edited by K. Walker, Cambridge University Press. (Cité en page 15)
- [7] N. Alon, C. McDiarmid, and B. Reed. Acyclic coloring of graphs. *Random Struct. Algor.*, 2(3) :277–288, 1991. (Cité en pages 68 et 70)
- [8] N. Alon, B. Sudakov, and A. Zaks. Acyclic edge colorings of graphs. *J. Graph Theory*, 37 :157–167, 2001. (Cité en page 70)
- [9] K. Appel and W. Haken. Every planar map is four colorable : Part 1, discharging. *Illinois J. Math.*, 21 :429–490, 1977. (Cité en pages 1 et 13)
- [10] K. Appel, W. Haken, and J. Koch. Every planar map is four colorable : Part 2, reducibility. *Illinois J. Math.*, 21 :491–567, 1977. (Cité en pages 1 et 13)
- [11] D. Barth, J. Cohen, and T. Faik. On the b -continuity property of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 155(13) :1761–1768, 2007. (Cité en page 99)
- [12] J. Bensmail, A. Harutyunyan, H. Hocquard, and P. Valicov. Strong edge-colouring of sparse planar graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 179 :229–234, 2014. (Cité en page 72)

- [13] C. Berge. *Graphes et hypergraphes*. Dunod University, 1973. (Cité en page 4)
- [14] L. Bezegová, B. Lužar, M. Mockovčiaková, R. Soták, and R. Škrekovski. Star-edge coloring of some classes of graphs. *J. of graph Theory*, 81(1) :73–82, 2016. (Cité en pages 72 et 73)
- [15] R. Bissacot, R. Fernández, A. Procacci, and B. Scoppola. An improvement of the Lovász local lemma via cluster expansion. *Combin. Prob. Comput.*, 20(5) :709–719, 2011. (Cité en page 70)
- [16] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, and F. Maffray. b -coloring of some bipartite graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, 53 :67–76, 2012. (Cité en page 98)
- [17] M. Blidia, F. Maffray, and Z. Zemir. On b -colorings in regular graphs. *Discrete Appl. Math.*, 157 :1787–1793, 2009. (Cité en page 98)
- [18] M. Bonamy. *Global discharging methods for coloring problems in graphs*. PhD thesis, Université de Montpellier, 2015. (Cité en page 21)
- [19] M. Bonamy, H. Hocquard, S. Kerdjoudj, and A. Raspaud. Incidence coloring of graphs with high maximum average degree. arXiv :1412. 6803, 2014. (Cité en pages 45 et 49)
- [20] M. Bonamy, B. Lévêque, and A. Pinlou. 2-distance coloring of sparse graphs. (Cité en pages 29 et 48)
- [21] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph theory with Applications*. New York : Macmillan, 1976. (Cité en page 4)
- [22] F. Bonomo, G. Durán, F. Maffray, J. Marenco, and M. Vallencia-Pabon. On the b -coloring of cographs and p_4 -sparse graphs. *Graphs and combinatorics*, 25(2) :153–167, 2009. (Cité en page 100)
- [23] O. Borodin, A. Ivanova, and A. Kostochka. Oriented 5-coloring of sparse plane graphs. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 1(1) :9–17, 2007. (Cité en page 21)
- [24] O. V. Borodin. Criterion of chromaticity of a degree prescription. In *Ab464 stracts of IV All-Union Conf. on Theoretical Cybernetics (Novosibirsk)*, volume 465, pages 127–128. (In Russian), 1977. (Cité en page 78)
- [25] O. V. Borodin. On acyclic coloring of planar graphs. *Discrete Math.*, 25 :211–236, 1979. (Cité en page 68)
- [26] O. V. Borodin and A. O. Ivanova. Precise upper bound for the strong edge chromatic number of sparse planar graphs. *Discuss. Math. Graph Theory*, 33 :759–770, 2013. (Cité en page 72)
- [27] R. L. Brooks. On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 37 :194–197, 1941. (Cité en page 13)

- [28] R. A. Brualdi and J. J. Q. Massey. Incidence and strong edge colorings of graphs. *Discrete Mathematics.*, 122 :51–58, 1993. (Cité en pages 2, 22, 24, et 25)
- [29] H. Bruhn and F. Joos. A stronger bound for the strong chromatic index. <http://arxiv.org/pdf/1504.02583v1.pdf>, 2015. (Cité en page 71)
- [30] M. I. Burstein. Every 4-valent graph has an acyclic 5-colouring. *B. Acad. Sci. Georgian SSR*, 93(1) :21–24, 1979. (Cité en page 68)
- [31] S. Cabello and M. Jakovac. On the b-chromatic number of regular graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 159(13) :1303–1310, 2011. (Cité en page 98)
- [32] V. Campos, C. Linhares, F. Maffray, and A. Silva. b-chromatic number of cacti. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 35 :281–286, 2009. (Cité en page 98)
- [33] G. J. Chang, M. Montassier, A. Pêcher, and A. Raspaud. Strong chromatic index of planar graphs with large girth. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 34 :723–733, 2014. (Cité en page 72)
- [34] G. J. Chang and N. Narayanan. Strong chromatic index of 2-degenerate graphs. *J. Graph Theory*, 73(2) :119–126, 2013. (Cité en pages 91 et 92)
- [35] G. Chartrand and P. Zhang. *Chromatic Graph Theory*, volume 53. New York, 2009. (Cité en page 13)
- [36] D. Chen, X. Liu, and S. Wang. The incidence chromatic number and the incidence coloring conjecture of graph. *Mathematics In Economics*, 15(3) :47–51, 1998. (Cité en page 25)
- [37] N. Cohen and F. Havet. Planar graphs with maximum degree $\Delta \geq 9$ are $(\Delta + 1)$ -edge-choosable - a short proof. *Discrete Mathematics*, 310 :3049–3051, 2010. (Cité en page 21)
- [38] D. W. Cranston and D. B. West. A guide to the discharging method. arXiv :preprint arXiv :1306.4434, 2013. (Cité en page 15)
- [39] M. Dębski, J. rytczuk, and M. Śleszyńska Nowak. Strong chromatic index of sparse graphs. arXiv :1301.1992v1, 2013. (Cité en page 92)
- [40] L. Dekar and H. Kheddouci. A graph b-coloring based method for composition-oriented web services classification. *Lecture Notes in Computer Science*, 4994 :599–604, 2008. (Cité en page 96)
- [41] K. Deng, X. S. Liu, and S. L. Tian. Star edge coloring of trees. *J. Shandong Unive. Nat. Sci.*, 46(8) :84–88, 2011. (Cité en page 72)
- [42] Y. Dieng, H. Hocquard, and R. Naserasr. Acyclic coloring of graphs with maximum degree bounded. In *Proc. of 8FCC*, 2010. (Cité en page 68)
- [43] R. Diestel. Graph theory. In Heidelberg Springer-Verlag, editor, *Graduate Texts in Mathematics*, volume 173, 2005. (Cité en page 4)

- [44] R.J. Duffin. Topology of series-parallel. *J. Math. Anal. Appl.*, 10 :303–318, 1965. (Cité en page 94)
- [45] V. Dujmović, G. Joret, J. Kozik, and D. R. Wood. Nonrepetitive colouring via entropy compression. *Combinatorica*, pages 1–26, 2015. (Cité en page 68)
- [46] Z. Dvořák, B. Mohar, and R. Šámal. Star chromatic index. *J. Graph Theory*, 72 :313–326, 2013. (Cité en pages 2, 73, 74, et 121)
- [47] B. Effantin and H. Kheddouci. The b -chromatic number of some power graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 6 :045–054, 2003. (Cité en page 98)
- [48] B. Effantin and H. Kheddouci. A distributed algorithm for a b -coloring of a graph. *Lecture Notes in Computer Science*, 4330 :430–438, 2006. (Cité en page 96)
- [49] H. El Ghazel, V. Deslandres, M. S. Hacid, A. Dussauchoy, and H. Kheddouci. A new clustering approach for symbolic data and its validation : Application to the healthcare data. *Lecture Notes in Computer Science*, 4203 :473–482, 2006. (Cité en page 96)
- [50] A. El Sahili, H. Kheddouci, M. Kouider, and M. Mortada. The b -chromatic number and f -chromatic vertex number of regular graphs. arXiv :1302. 4214v1, 2013. (Cité en page 98)
- [51] A. El Sahili and M. Kouider. About b -coloring of regular graphs. Rapport de Recherche N : 1432. Unité mixte de recherche 8623. CNRS-Université Paris Sud- LRI, 02/2006. (Cité en page 98)
- [52] A. El Sahili, M. Kouider, and M. Mortada. On the b -chromatic number of regular bounded graphs. arXiv :1302. 4209v1, 2013. (Cité en page 98)
- [53] M. N. Ellingham and L. Goddyn. List edge colourings of some 1-factorable multigraphs. *Combinatorica*, 16(3) :343–352, 1996. (Cité en page 15)
- [54] P. Erdős. Problems and results in combinatorial analysis and graph theory. *Discrete Mathematics*, 72(1–3) :81–92, 1988. (Cité en page 71)
- [55] P. Erdős and L. Lovász. Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. In *In A. Hajnal, R. Rado, and V. T. Sós, eds. Infinite and Finite Sets (to Paul Erdős on his 60th birthday) II. North-Holland*, pages 609–627, 1973. (Cité en page 68)
- [56] P. Erdős, A. L. Rubin, and H. Taylor. Choosability in graphs. *Congr. Numer.*, 26 :125–157, 1979. (Cité en page 14)
- [57] L. Esperet and A. Parreau. Acyclic edge-coloring using entropy compression. *Eur. J. Combin.*, 34(6) :1019–1027, 2013. (Cité en page 70)
- [58] T. Faik. About the b -continuity of graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 17 :151–156, 2004. (Cité en page 100)
- [59] R. J. Faudree, A. Gyárfás, R. H. Schelp, and Z. Tuza. Induced matchings in bipartite graphs. *Discrete Mathematics*, 78(1–2) :83–87, 1989. (Cité en pages 71 et 72)

- [60] R. J. Faudree, R. H. Schelp, A. Gyárfás, and Z. Tuza. The strong chromatic index of graphs. *Ars Combin.*, 29(B) :205–211, 1990. (Cité en page 71)
- [61] G. Fertin and A. Raspaud. Acyclic coloring of graphs of maximum degree five : nine colors are enough. *Inform. Process. Lett.*, 105(2) :65–72, 2008. (Cité en page 68)
- [62] G. Fertin, A. Raspaud, and B. Reed. On star coloring of graphs. *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 2204 :140–153, 2001. (Cité en page 69)
- [63] A. Fiedorowicz. Acyclic 6-colouring of graphs with maximum degree 5 and small maximum average degree. *Discuss. Math. Graph Theor.*, 33(1) :91–99, 2013. (Cité en page 68)
- [64] J. L. Fouquet and J. L. Jolivet. Strong edge-colorings of graphs and applications to multi-k-gons. *Ars Combinatoria A*, 16 :141–150, 1983. (Cité en page 26)
- [65] D. Gaceb, V. Eglin, F. Lebourgeois, and H. Emptoz. Graph b -coloring for automatic recognition of documents. *10th International Conference on Document Analysis and Recognition*, pages 261–265, 2009. (Cité en page 96)
- [66] F. Galvin. The list chromatic index of a bipartite multigraph. *J. Combin. Theory Ser. B*, 63(1) :153–158, 1995. (Cité en page 15)
- [67] D. Gonçalves, M. Montassier, and A. Pinlou. Entropy compression method applied to graph colorings. <http://arxiv.org/pdf/1406.4380v2.pdf>, 2015. (Cité en pages 68 et 69)
- [68] B. Grünbaum. Acyclic colorings of planar graphs. *Israel J. Math.*, 14 :390–408, 1973. (Cité en pages 68 et 69)
- [69] J. Grytczuk, J. Kozik, and P. Micek. New approach to nonrepetitive sequences. *Random Struct. Algor.*, 42, 2013. (Cité en page 68)
- [70] B. Guiduli. On incidence coloring and star arboricity of graphs. *Discrete Mathematics*, 163 :275–278, 1997. (Cité en pages 2, 24, et 27)
- [71] R. Häggkvist and J. Janssen. New bounds on the list-chromatic index of the complete graph and other simple graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 6(3) :295–313, 1997. (Cité en page 15)
- [72] S. L. Hakimi, J. Mitchem, and E. Schmeichel. Star arboricity of graphs. *Discrete Mathematics*, 149 :93–98, 1996. (Cité en page 29)
- [73] F. Harary and S. Hedetniemi. The achromatic number of a graph. *Journal of Combinatorial Theory*, 8 :157–161, 1970. (Cité en page 96)
- [74] F. Havet. Méthode de déchargement. <http://www-sop.inria.fr/members/Frederic.Havet/Cours/decharg.ps>. (Cité en page 15)
- [75] R. L. Hemminger and L. W. Beineke. Selected topics in graph theory, chapter line graphs and line digraphs. *L. W. Beineke and R. J. Wilson, editors. Academic Press, London.*, pages 271–306, 1978. (Cité en page 12)

- [76] C. T. Hoàng and M. Kouider. On the b -dominating coloring of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 152 :176–186, 2005. (Cité en page 98)
- [77] H. Hocquard. Acyclic coloring of graphs with maximum de gree six. *Inform. Process. Lett.*, 111(15) :748–753, 2011. (Cité en page 68)
- [78] H. Hocquard, S. Kerdjoudj, and A. Raspaud. Incidence coloring of planar graphs without adjacent small cycles. *Journal of combinatorics*, 8(1) :167–187, 2017. (Cité en pages 29 et 30)
- [79] H. Hocquard, M. Montassier, A. Raspaud, and P. Valicov. On strong-edge coloring of subcubic graphs. *Discrete Appl. Math.*, 161 :2467–2479, 2013. (Cité en page 80)
- [80] H. Hocquard, P. Ochem, and P. Valicov. Strong edge coloring and induced matching. [http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/60/94/54/PDF/submission version. pdf](http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/60/94/54/PDF/submission_version.pdf). (Cité en page 72)
- [81] M. Hosseini Dolama and E. Sopena. On the maximum average degree and the incidence chromatic number of a graph. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 7 :203–216, 2005. (Cité en pages 29, 48, et 49)
- [82] M. Hosseini Dolama, E. Sopena, and X. Zhu. Incidence coloring of k -degenerate graphs. *Discrete Mathematics*, 283 :121–128, 2004. (Cité en pages 25, 26, 29, 30, 45, et 120)
- [83] D. Hudáka, B. Lužar, R. Soták, and R. Škrekovski. Strong edge-coloring of planar graphs. *Discrete Mathematics*, 324 :41–49, 2014. (Cité en page 72)
- [84] R. W. Irving and D. F. Manlove. The b -chromatic number of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 91 :127–141, 1999. (Cité en pages 3, 95, 96, 97, et 98)
- [85] A. O. Ivanova. List 2-distance $(\Delta + 1)$ -coloring of sparse planar graphs with girth at least 7. *J. Appl. Ind. Math.*, 5 :221–230, 2011. (Cité en page 29)
- [86] M. Jakovac and S. Klavzar. The b -chromatic number of cubic graphs. *Graph Combin.*, 26 :107–118, 2010. (Cité en page 98)
- [87] R. Javadi and B. Omoomi. On b -coloring of cartesian product of graphs. *Ars Combinatoria*, 107 :521–536, 2012. (Cité en pages 100, 101, 102, et 122)
- [88] T. R. Jensen and B. Toft. Choosability versus chromaticity. *Geombinatorics*, 5 :45–64, 1995. (Cité en page 7)
- [89] S. Kerdjoudj, F. Affif Chaouche, and A. Berrachedi. The b -coloring and b -continuity of the cartesian product of some graphs. *accepted in Utilitas Mathematica*. (Cité en pages 104 et 108)
- [90] S. Kerdjoudj, A. V. Kostochka, and A. Raspaud. List star edge coloring of subcubic graphs. *Revised*, 2016. (Cité en pages 75, 80, et 81)

- [91] D. König. Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre. *Math. Ann.*, 77(4) :453–465, 1916. (Cité en page 14)
- [92] A. V. Kostochka. Acyclic 6-coloring of planar graphs. *Metody Diskret. Anal.*, 28 :40–56, 1976. (Cité en page 68)
- [93] A. V. Kostochka and L. S. Mel’nikov. Note to the paper of grünbaum on acyclic colorings. *Discrete Math.*, 14 :403–406, 1976. (Cité en page 68)
- [94] A. V. Kostochka, M. Stiebitz, and B. Wirth. The colour 478 theorems of brooks 479 and gallai extended. *Discrete Math.*, 162 :299–303, 1996. (Cité en page 78)
- [95] A. V. Kostochka and C. Stocker. Graphs with maximum degree 5 are acyclically 7-colorable. *Ars Math. Contemp.*, 4 :153–164, 2011. (Cité en page 68)
- [96] M. Kouider. b -chromatic number of a graph, subgraph and degrees. Technical report, Rapport interne LRI. 1392. (Cité en page 98)
- [97] M. Kouider and M. Mahéo. Some bounds for the b -chromatic number of a graph. *Discrete Mathematics*, 256 :267–277, 2002. (Cité en pages 97, 98, 100, et 103)
- [98] M. Kouider and M. Zaker. Bounds for the b -chromatic number of some families of graphs. *Discrete Math.*, 306(7) :617–623, 2006. (Cité en page 98)
- [99] J. Kratochvil, Z. Tuza, and M. Voigt. On the b -chromatic number of graphs. *Lecture Notes in Computer Science*, 2573 :310–320, 2002. (Cité en page 98)
- [100] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15 :271–283, 1930. (Cité en page 11)
- [101] X. S. Liu and K. Deng. An upper bound on the star chromatic index of graphs with $\delta \leq 7$. *J. Lanzhou Univ. (Nat Sci)*, 44 :94–95, 2008. (Cité en pages 2, 67, et 71)
- [102] F. Maffray and A. Silva. b -colouring outerplanar graphs with large girth. *Discrete Mathematics*, 312(10) :1796–1803, 2012. (Cité en page 98)
- [103] M. Maydanskiy. The incidence coloring conjecture for graphs of maximum degree 3. *Discrete Mathematics*, 292 :131–141, 2005. (Cité en page 25)
- [104] X. Menga, J. Guo, and B. Su. Incidence coloring of pseudo-halin graphs. *Discrete Mathematics*, 312 :3276–3282, 2012. (Cité en page 25)
- [105] J. Mitchem. Every planar graph has an acyclic 8-coloring. *Duke Math. J.*, 41 :177–181, 1974. (Cité en page 68)
- [106] M. Molloy and B. Reed. A bound on the strong chromatic index of a graph. *J. Combin. Theory Ser. B*, 69(2) :103–109, 1997. (Cité en page 71)
- [107] M. Molloy and B. Reed. Further algorithmic aspects of the local lemma. *Proceedings of the 30th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 524–529, 1998. (Cité en page 70)

- [108] R. A. Moser and G. Tardos. A constructive proof of the general Lovász local lemma. *J. ACM*, 57(2) :1–15, 2010. (Cité en page 68)
- [109] R. Muthu, N. Narayanan, and C. R. Subramanian. Optimal acyclic edge colouring of grid like graphs. *Computing and Combinatorics, 12th COCOON, Taipei, Taiwan*, 4112 :360–367, 2006. (Cité en page 70)
- [110] R. Muthu, N. Narayanan, and C. R. Subramanian. Acyclic edge colouring of outerplanar graphs. *Algorithmic Aspects in Information and Management, 3th AAIM, Portland, USA*, 4508 :144–152, 2007. (Cité en page 70)
- [111] K. Nakprasit. A note on the strong chromatic index of bipartite graphs. *Discrete Math.*, 308(16) :3726–3728, 2008. (Cité en page 72)
- [112] K. Nakprasit and K. Nakprasit. Incidence coloring of the powers of cycles. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 76 :143–148, 2012. (Cité en page 25)
- [113] S. Ndreca, A. Procacci, and B. Scoppola. Improved bounds on coloring of graphs. *Eur. J. Combin.*, 33(4) :592–609, 2012. (Cité en pages 68 et 70)
- [114] J. Nešetřil and P. Ossana de Mendez. Colorings and homomorphisms of minor closed classes. *Discrete and Computational Geometry*, 17 :651–664, 2003. (Cité en page 69)
- [115] R. Radoičić and G. Tóth. The discharging method in combinatorial geometry and the Pach-Sharir conjecture. *Contemporary Mathematics*, 453 :319–342, 2008. (Cité en page 15)
- [116] N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour, and R. Thomas. The four-color theorem. *J. Comb. Theory Ser. B*, 70(1) :2–44, 1997. (Cité en page 1)
- [117] J. S. Sereni and J. Volec. A note on acyclic vertex-colorings. <http://arxiv.org/abs/1312.5600>, 2013. (Cité en page 68)
- [118] S. Shaebani. On the b-chromatic number of regular graphs without 4-cycle. *Discrete Applied Mathematics*, 160(10-11) :1610–1614, 2012. (Cité en page 98)
- [119] W. C. Shiu, P. C. B. Lam, and D. L. Chen. On incidence coloring for some cubic graphs. *Discrete Mathematics*, 252 :259–266, 2002. (Cité en page 25)
- [120] S. Skulrattanakulchai. Acyclic colorings of subcubic graphs. *Inform. Process. Lett.*, 92 :161–167, 2004. (Cité en page 70)
- [121] E. Sopena. www.labri.fr/perso/sopena/theincidencecoloringpage. (Cité en page 25)
- [122] P. K. Sun. Incidence coloring of regular graphs and complement graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 16 :2289–2295, 2012. (Cité en page 25)
- [123] V. G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret. Analiz.*, 3 :25–30, 1964. (Cité en pages 14 et 25)

- [124] V. G. Vizing. Critical graphs with given chromatic class. *Diskret. Analiz No.*, 5 :9–17, 1965. (Cité en page 14)
- [125] V. G. Vizing. Vertex coloring with given colors. *Metody Diskret. Anal.*, 29 :3–10, 1976. (Cité en page 14)
- [126] S. Wang, J. Xu, F. Ma, and C. Xu. The $(\Delta + 2, 2)$ -incidence coloring of outerplanar graphs. *Progress in Natural Science*, 18 :575–578, 2008. (Cité en page 25)
- [127] S. D. Wang, D. L. Chen, and S. C. Pang. The incidence coloring number of halin graphs and outerplanar graphs. *Discrete Mathematics*, 252 :259–266, 2002. (Cité en page 25)
- [128] T. Wang. Strong chromatic index of k -degenerate graphs. *Discrete Math.*, 330(6) :17–19, 2014. (Cité en page 92)
- [129] T. Wang and X. Zhao. Odd graphs and its application on the strong edge coloring. arXiv preprint arXiv :1412. 8358, 2014. (Cité en page 72)
- [130] P. Wernicke. Über den kartographischen vierfarbensatz. *Mathematische Annalen*, (in german), 58(3) :413–426, 1904. (Cité en pages 15, 18, et 19)
- [131] D. West. Open problems - graph theory and combinatorics. [http ://www. math. uiuc. edu/ west/ openp/ strongedge. html](http://www.math.uiuc.edu/west/openp/strongedge.html). (Cité en page 72)
- [132] J. Wu. Some results on the incidence coloring number of a graph. *Discrete Mathematics*, 309 :3866–3870, 2009. (Cité en page 25)
- [133] K. Yadav, S. Varagani, K. Kothapalli, and V. Ch. Venkaiah. Acyclic vertex coloring of graphs of maximum degree Δ . *Proc. of Indian Mathematical Society*, 2009. (Cité en page 68)
- [134] K. Yadav, S. Varagani, K. Kothapalli, and V. Ch. Venkaiah. Acyclic vertex coloring of graphs of maximum degree 6. *Electron. Notes Discrete Math.*, 35 :177–182, 2009. (Cité en page 68)
- [135] K. Yadav, S. Varagani, K. Kothapalli, and V. Ch. Venkaiah. Acyclic vertex coloring of graphs of maximum degree 5. *Discrete Math.*, 311(5) :342–348, 2011. (Cité en page 68)
- [136] D. Yang. Fractional incidence coloring and star arboricity of graphs. *Ars Combin.*, 105 :213–224, 2012. (Cité en pages 25, 29, et 120)
- [137] G. Yu. Strong edge-colorings for k -degenerate graphs. *Graphs Combin.*, 31 :815–1818, 2015. (Cité en page 91)
- [138] H. Zhu and Z. Miao. On strong list edge coloring of subcubic graphs. *Discrete Math.*, 333 :6–13, 2014. (Cité en page 80)
- [139] C. Zuo, C. Xiong, H. Zhang, H. Gao, and C. Fang. Incidence coloring-assisted frequency assignment in two-hop ofdma-based cellular networks. *Wireless Pers. Commun.*, 79 :861–876, 2014. (Cité en page 24)