

N° d'ordre : 06/2018-D/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène
Faculté des Mathématiques



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences

En : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle : Génie Mathématiques

Par : **YAHY Zahra**

THÈME

**INTERACTION DES PARTITIONS D'UN ENTIER AVEC
CERTAINS PROBLÈMES COMBINATOIRES**

Soutenue publiquement le 10/05/2018, devant le jury composé de :

M ^r A. BERRACHEDI	Professeur à l' USTHB	Président
M ^r F. BENCHERIF	Professeur à l' USTHB	Invité
M ^{me} I. BOUCHEMAKH	Professeur à l' USTHB	Invitée
M ^r S. BOUROUBI	Professeur à l' USTHB	Directeur de thèse
M ^r A. DERBAL	Professeur à l' ENS, Kouba	Examineur
M ^r A. EL SAHILI	Professeur à l' U. Libanaise, Liban	Examineur
M ^r O. KIHHEL	Professeur à l' U. Borock, Canada	Invité

Table des matières

1	Les partitions d'un entier	7
1.1	Définitions et notations	8
1.2	Représentation graphique d'une partition	8
1.3	A propos de $p(n)$	10
2	Sur les m-uplets diophantiens	16
2.1	Les m -uplets diophantiens	17
2.2	Quelques bornes relatives aux quintuplets	21
2.3	Généralisation des m -uplets diophantiens	22
2.3.1	Les $D(-1)$ - m -uplets diophantiens	23
3	Les m-uplets diophantiens et les partitions d'un entier	24
3.1	Résultats préliminaires	25
3.2	Position du problème	30
3.3	Contributions	31
3.3.1	Borne inférieure de $q_D(36 + 130k, 2)$	32
3.3.2	Borne supérieure de $q_D(n, 2)$	33

3.3.3	Principaux résultats	34
3.4	Quelques exemples	38
3.4.1	A propos de la primalité de $q_D(n, 2)$	39
4	Quadrilatères inscrits dans un n-gone régulier et partitions d'un entier	41
4.1	Le nombre de triangles non isométriques inscrits dans un n -gone régulier	42
4.2	Problème de Reis	42
4.3	Position du Problème	44
4.4	Quadrilatères ordonnés	44
4.5	Quadrilatères non ordonnés	46
4.6	Principaux résultats	47
4.7	Quadrilatères impropres	52
4.8	Relation entre $\Delta(n)$ et $R_O(n, 4)$	55
5	Les Δ-systèmes et les partitions d'un entier	56
5.1	Définitions et notations	57
5.2	Sur la théorie des codes équidistants	57
5.3	Quelques propriétés	58
5.4	Principaux résultats	58
5.5	La démonstration de la conjecture d'Erdős-Lovász	60
5.6	Les partitions d'un entier, les Δ -systèmes faibles et les Δ -systèmes forts	62

Liste des tableaux

1.1	Les valeurs de $p(n, k)$ pour $n \leq 15$	11
1.2	Les valeurs de $q(n, k)$ pour $n \leq 20$	13
1.3	Les valeurs de $P(n, k)$ pour $n \leq 11$	14
3.1	La primalité de $q_D(n, 2)$	40
4.1	Quelques valeurs de $R(n, k)$	43

Table des figures

1.1	Diagramme de Ferrer des partitions de l'entier 5.	8
1.2	Diagramme de Ferrer d'une partition et son dual.	9
1.3	Diagramme de Ferrer d'une partition autoduale.	9
1.4	Diagramme de Ferrer d'une partition non autoduale.	9
4.1	Convexité des quadrilatères.	44
4.2	Quadrilatère ordonné et partition d'un entier.	45
4.3	Quadrilatères ordonnés.	46
4.4	Quadrilatères non ordonnés.	46
4.5	Quadrilatères non ordonnés générés par la partition $5 + 4 + 2 + 1$	50
4.6	Un quadrilatère non ordonné généré par la partition $7 + 3 + 1 + 1$	50
4.7	Quadrilatères impropres.	52
4.8	Les quadrilatères impropres ordonnés de l'entier 12.	53
4.9	Les quadrilatères impropres non ordonnés de l'entier 12.	54
5.1	$(m + 1, 2k)$ code.	60

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout Puissant et Miséricordieux, qui m'a donné la santé, le courage, la force et la patience pour mener ce travail à terme.

En second lieu, je tiens à remercier mon Directeur de thèse, le Professeur Sadek BOUROUBI, pour m'avoir proposé le sujet. Ses précieux conseils, sa confiance et sa patience ont constitué un apport considérable pour mener ce travail au bon port. Je lui suis reconnaissante de m'avoir fait bénéficier de sa grande compétence. Qu'il trouve dans cette thèse, un hommage vivant à sa haute personnalité. Comme je l'ai déjà dit, il est pour moi un enseignant de mathématiques exemplaire.

Je suis extrêmement honorée de compter le Professeur BERRACHEDI Abdelhafid, parmi les membres du jury et pour avoir accepté d'en être le président.

Un grand Merci pour le Professeur BENCHERIF Farid d'avoir accepté de faire partie de mon jury et pour sa collaboration.

J'adresse mes remerciements au Professeur BOUCHEMAKH Isma pour l'honneur qu'elle me fait en participant à ce jury.

Je suis honorée à remercier le Professeur DERBAL Abdallah, qui a accepté de rapporter ce document et d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier le Professeur El SAHILI Amine en acceptant de rapporter ce document et de faire partie de mon jury.

Merci au Professeur KIHIL Omar, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de participer à mon jury et qui a répondu favorablement à nos sollicitations.

J'adresse également tous mes remerciements et ma reconnaissance à mon mari qui a toujours été à mes côtés, qui a su croire en moi. Son soutien quotidien et son enthousiasme m'ont beaucoup encouragé. Je tiens à le remercier pour ses précieux conseils, sa compréhension et sa patience tout au long de ces années.

J'associe à tous ces remerciements, mes chers enfants, Amine et Adem que j'aime beaucoup, qu'ils me pardonnent les nombreuses absences, quand j'étais plongée dans l'ordinateur et pendant mes déplacements, je leurs dis, vous êtes la source de mon bonheur.

Enfin, mais non des moindres, tous mes remerciements à mes parents et à ma famille, leurs encouragements et leur assistance morale, m'ont permis de résister et de mener ce travail à terme.

Je remercie ma belle mère pour son aide en gardant mes enfants pendant mes absences.

Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Interaction des Partitions d'un Entier avec Certains Problèmes Combinatoires

Résumé : Un ensemble à m entiers positifs a_1, \dots, a_m est appelé un m -uplet diophantien si, $a_i a_j + 1$ est un carré parfait, pour tout $1 \leq i < j \leq m$. L'étude de ces ensembles a fasciné plusieurs chercheurs (voir [7], [35] et [43]). Une grande partie de notre travail, s'est focalisée sur l'étude de $q_D(n, m)$, désignant le nombre de partitions de l'entier n en m parts formant un m -uplet diophantien. Parmi nos principaux résultats obtenus dans ce cadre, nous présentons une borne inférieure de $q_D(n, 2)$, n est un entier de la forme $36 + 130k$. Nous présentons aussi une borne supérieure de $q_D(n, 2)$, ainsi qu'une formule explicite de $q_D(n, 2)$ en fonction du nombre de diviseurs de $n^2 + 4$. Nous énonçons aussi une conjecture renforcée par des résultats numériques. Le nombre de k -gones inscrits dans un n -gone régulier est un des problèmes étudié dans la littérature. Dans notre travail, nous nous sommes intéressés, particulièrement, au nombre de quadrilatères inscrits dans un n -gone régulier. Les travaux réalisés dans [5], [45] et [49] et sont à l'origine de notre motivation. En effet, nous présentons une formule explicite qui compte le nombre de quadrilatères non-ordonnés, un résultat qui complète l'étude dans [9]. Quelques identités seront aussi établies. Nous précisons que la théorie des partitions d'un entier, particulièrement les fonctions génératrices, nous ont été d'un grand apport. Enfin, nous introduisons la notion de Δ -systèmes (forts et faibles) et l'appliquons sur les partitions d'un entier en parts distinctes. Nous soulignons que derrière notre motivation, se trouve la conjecture d'Erdős-Lovász, résolue par Michel Deza [24]. Nous présentons une preuve détaillée de la dite conjecture avec quelques résultats.

Mots clés : Partition d'un entier, m -uplets diophantiens, quadrilatère, convexité, Δ -systèmes

Interaction of an Integer Partitions with some Combinatorial Problems

Abstract : A set of m positive integers a_1, \dots, a_m is called a Diophantine m -tuples if, $a_i a_j + 1$ is a perfect square, for all $1 \leq i < j \leq m$. The study of these sets fascinated several researchers (see [7], [35] and [43]). A major part of our work was focused on the study of the number of partitions of an integer n into m parts forming Diophantine m -tuples, denoting $q_D(n, m)$. Among our main results obtained in this framework are : a lower bound of $q_D(n, 2)$, with n is of the form $36 + 130k$, an upper bound of $q_D(n, 2)$ as well as an explicit formula of $q_D(n, 2)$ depending on the number of divisors of $n^2 + 4$. We also state a conjecture strengthened by numerical results. The number of k -gone inscribed in a regular n -gone is one of the problems studied in the literature. In our work we were particularly interested in the number of quadrilaterals inscribed in a regular n -gone. The works presented in [5], [45] and [49] and were at the origin of our motivation. Indeed, we give an explicit formula that counts the number of non ordered quadrilaterals, a result that completes the study in [9], some identities are also established. We specify that the theory of the partitions of an integer, particularly the generating functions, have been of a great contribution to us. Finally, motivated by Erdős-Lovász's conjecture (solved by Michel Deza [24]), we introduce the notion of Δ -systems (strong and weak) and apply it to the partitions of an integer into distinct parts, we present a detailed proof of this conjecture with some results.

Keywords : Integer Partitions, Diophantine m -tuples, quadrilateral, convex, Δ -systems.

Introduction générale

La combinatoire est la branche des mathématiques qui étudie des ensembles finies ou dénombrables d'objets. Lorsqu'on cherche à compter ou à dénombrer ces ensembles, on parle de la combinatoire énumérative.

Pour résoudre des questions combinatoires, on peut se servir de la combinatoire algébrique qui cherche à structurer les ensembles finis ou dénombrables d'objets, à l'aide des outils algébriques.

La combinatoire permet de prouver des résultats dans de très nombreux domaines, comme, la théorie des nombres et la théorie des graphes. Elle propose des méthodes algorithmiques effectives pour réaliser les calculs.

Cette thèse se situe dans le domaine de la combinatoire énumérative et porte sur l'étude de quelques problèmes relatifs à la théorie des partitions d'un entier.

Notre motivation principale est de contribuer au développement de la théorie des partitions d'un entier dont l'histoire remonte à Leibnitz.

Diophante d'Alexandrie, est le premier à avoir introduit les ensembles diophantiens. Dans nos recherches, nous nous sommes intéressés à l'étude de la propriété de Diophante sur les partitions d'un entier. Aussi, le calcul du nombre de k -gones inscrits dans un n -

gone régulier est un problème connu dans la littérature.

Dans ce manuscrit, nous allons nous intéresser particulièrement au nombre de quadrilatères inscrits dans un n -gone régulier.

Pour une meilleure présentation, nous avons élaboré le plan suivant :

Après un premier chapitre comportant les concepts de base et les principaux résultats concernant la théorie des partitions, vient le deuxième dans lequel nous présentons des généralités sur les m -uplets diophantiens.

Nos contributions sont rassemblées dans les chapitres 3, 4 et 5. Dans le chapitre 3, nous introduisons la propriété de Diophante sur les partitions d'un entier. Une formule qui compte les partitions d'un entier en parts formant un 2-uplet diophantien est donnée. Pour ce faire, un recours à la théorie des nombres nous a été d'une nécessité incontournable.

Nous consacrons le quatrième chapitre à l'énumération des quadrilatères. En effet, une formule qui compte des quadrilatères dénommés, non ordonnés, sera donnée. Le nombre de quadrilatères non ordonnés impropres sera calculé et quelques identités seront établies. Nous précisons que les résultats obtenues dans ce chapitre font intervenir les partitions d'un entiers.

Une étude sur les Δ -systèmes au sens faible (respectivement fort) et les partitions d'un entier sera l'objectif du dernier chapitre. Nous précisons, que cette recherche est un travail en cours, nous allons nous contenter de les introduire à travers certains résultats.

Nous terminons notre thèse par une conclusion générale et quelques perspectives en listant les plus importants ouvrages et articles mathématiques, grâce, auxquels, le lecteur pourra, pousser plus loin ses connaissances.

CHAPITRE 1

Les partitions d'un entier

Introduction

Les partitions d'un entier est un sujet d'intérêt durable et la plupart des recherches dans ce domaine trouvent des applications numériques, c'est ce qu'affirme Andrews dans son livre intitulé "Integer partitions". A noter que cet ouvrage est l'un de nos références principales [4], ainsi que [52] et [58] .

Leibniz est le premier à avoir considéré le partitionnement d'un entier, en envoyant une lettre à J. Bernoulli en 1674, lui demandant s'il a étudié le nombre des partitions d'un entier. Les premières découvertes vraiment profondes dans la théorie des partitions d'un entier sont dues à Euler, ensuite J. J. Sylvester a apporté des contributions majeures. Avec les travaux de Rogers, Hardy, MacMahon, Ramanujan et Rademacher, les recherches dans ce domaine ont connu une période fructueuse.

Dans ce présent chapitre, nous présenterons les pré-requis nécessaires auxquels ce document aura constamment recours.

1.1 Définitions et notations

Un entier positif peut se décomposer de plusieurs façons comme somme d'entiers positifs, en ne tenant pas compte de l'ordre des parts intervenant dans la somme.

Définition 1.1.1. Une partition de n en k parts est une suite d'entiers strictement positifs (n_1, n_2, \dots, n_k) , telle que $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 1$ et $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Exemple 1.1.1. Les partitions de 5 sont représentées comme suit :

$$5, 4 + 1, 3 + 2, 3 + 1 + 1, 2 + 2 + 1, 2 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

1.2 Représentation graphique d'une partition

Les partitions d'un entier sont souvent représentées à l'aide de diagrammes de Ferrer, du nom du mathématicien Norman Ferrer. Ce diagramme est conçu comme suit :

Dessiner un tableau de cellules ou de points, dans lequel on place sur chaque ligne le nombre de cellules (ou points) correspondant à une part, par ordre décroissant. Ces diagrammes sont généralisés en combinatoire par les tableaux de Young. Les différentes partitions de 5 sont représentées ci-dessous :

5	4+1	3+2	3+1+1	2+2+1	2+1+1+1	1+1+1+1+1

FIGURE 1.1 – Diagramme de Ferrer des partitions de l'entier 5.

En échangeant les lignes en colonnes d'un diagramme de Ferrer d'une partition π de n , le nouveau diagramme décrit une partition dite, la partition duale de π .

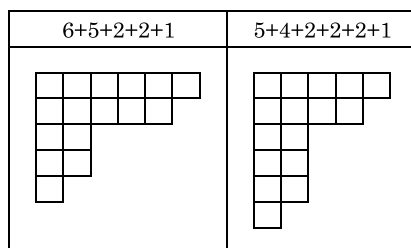


FIGURE 1.2 – Diagramme de Ferrer d'une partition et son dual.

Une partition est dite autoduale, si son diagramme de Ferrer est symétrique par rapport à la diagonale.

Le diagramme de Ferrer d'une partition autoduale de l'entier 36 est donnée par la figure suivante :

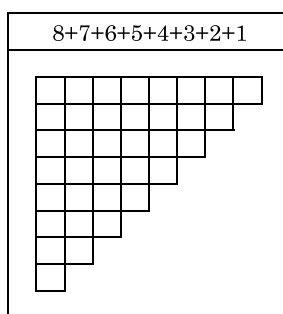


FIGURE 1.3 – Diagramme de Ferrer d'une partition autoduale.

La partition $5 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1$ de l'entier 17 n'est pas autoduale. Comme le montre la figure suivante :

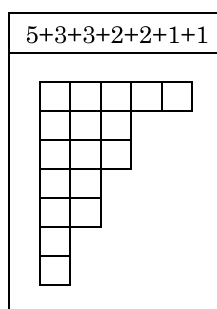


FIGURE 1.4 – Diagramme de Ferrer d'une partition non autoduale.

Compter $p(n)$ revient à énumérer les différents diagrammes de Ferrer possibles. Il est

clair que cette méthode n'est pas efficace, pour n assez grand.

Remarque 1.2.1. *Le diagramme de Ferrer nous donne une représentation visuelle d'une partition, il a été utilisé comme outil de preuve de certains résultats, par exemple, le nombre de partitions à parts impaires distinctes est égale au nombre de partitions auto-duales [4].*

La seule partition autoduale de l'entier 10 est la partition $4 + 3 + 2 + 1$, on déduit que le nombre de partitions à parts impaires distinctes est égale à 1.

1.3 A propos de $p(n)$

Compter le nombre de partitions d'un entier est l'une des préoccupations des chercheurs, fascinés par la théorie des partitions d'un entier. Aucune formule simple n'est connue à nos jours.

Dans cette section, nous présentons une formule de récurrence permettant le calcul de $p(n)$, illustrée par un tableau de valeurs, sa fonction génératrice ainsi que son estimation asymptotique.

Notons $p(n, k)$, le nombre de partitions de n en k parts, où n et k sont deux entiers strictement positifs. On a alors :

$$p(n) = \sum_{k=1}^n p(n, k).$$

La fonction $p(n)$ est récursive et vérifie la relation suivante pour tous $n > k > 1$:

$$p(n, k) = p(n - 1, k - 1) + p(n - k, k),$$

avec $p(n, k) = 0$ si $n < k$ et $p(n, n) = p(n, 1) = 1$.

Les premières valeurs de $p(n)$ sont présentées dans le tableau suivant :

	k															
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	p(n)
1	1															1
2	1	1														2
3	1	1	1													3
4	1	2	1	1												5
5	1	2	2	1	1											7
6	1	3	3	2	1	1										11
7	1	3	4	3	2	1	1									15
8	1	4	5	5	3	2	1	1								22
9	1	4	7	6	5	3	2	1	1							30
10	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1						42
11	1	5	10	11	10	7	5	3	2	1	1					56
12	1	6	12	15	13	11	7	5	3	2	1	1				77
13	1	6	14	18	18	14	11	7	5	3	2	1	1			101
14	1	7	16	23	23	20	15	11	7	5	3	2	1	1		135
15	1	7	19	27	30	26	21	15	11	7	5	3	2	1	1	176

TABLE 1.1 – Les valeurs de $p(n, k)$ pour $n \leq 15$.

L'étude de l'accroissement de $p(n)$ est l'un des problèmes posé dans la littérature. La fonction $p(n)$ croit rapidement pour n impair, c'est l'une des remarques faite sur $p(n)$. Une des questions demeurant sans réponse à ce jour, posée initialement par Euler, est la suivante : Existe t-il un nombre infini d'entiers n pour lesquels $p(n)$ est un nombre premier ?

La série génératrice de $p(n)$ est :

$$\sum_{n \geq 0} p(n)z^n = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - z^n}.$$

La fonction génératrice du nombre de partitions en k parts est donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty} p(n, k)z^n = \frac{z^k}{(1 - z) \dots (1 - z^k)}.$$

En 1918, Hardy et Ramanujan ont présenté une estimation asymptotique de $p(n)$, à savoir :

$$p(n) \sim A_n e^{\pi \sqrt{\frac{2}{3}(n - \frac{1}{24})}},$$

avec

$$A_n = \frac{1}{2n\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{\sqrt{6\binom{n-1}{24}}} - \frac{1}{2\binom{n-1}{24}^{\frac{3}{2}}} \right).$$

En affinant la méthode employée par Hardy et Ramanujan, Hans Rademacher démontra en 1937 la formule suivante :

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \sqrt{k} \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh \left(\frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3} \left(n - \frac{1}{24} \right)} \right)}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right),$$

avec

$$A_k(n) = \sum_{0 \leq h \leq k, (h,k)=1} e^{\pi i s(h,k) - 2\pi i n h/k},$$

où $s(h, k)$ est la somme de Dedekind¹.

Les recherches menées sur les restrictions faites sur $p(n)$ ont enrichi le domaine des partitions d'un entier, notamment, les partitions à parts impairs, les partitions dans la plus grande part est bornée et les partitions à parts distinctes.

L'objectif de cette section est d'introduire quelques restrictions fortement liées à notre étude ainsi que les résultats auxquels on fera recours dans la suite du document.

Notons $q(n, k)$, le nombre de partitions de n en k parts distinctes. On a :

$$q(n) = \sum_{k=1}^n q(n, k).$$

Les partitions en parts distinctes de 10 sont en nombre de 10 :

4 + 3 + 2 + 1, 5 + 3 + 2, 5 + 4 + 1, 6 + 3 + 1, 6 + 4, 7 + 2 + 1, 7 + 3, 8 + 2, 9 + 1 et 10.

Les premières valeurs de $q(n)$, qui sont également le nombre de partitions en parts impairs distinctes, sont données dans le tableau suivant :

1. $s(h, k) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k} \left(\frac{hr}{k} - \left[\frac{hr}{k} \right] - \frac{1}{2} \right).$

	k					
n	1	2	3	4	5	q(n)
1	1					1
2	1					1
3	1	1				2
4	1	1				2
5	1	2				3
6	1	2	1			4
7	1	3	1			5
8	1	3	2			6
9	1	4	3			8
10	1	4	4	1		10
11	1	5	5	1		12
12	1	5	7	2		15
13	1	6	8	3		18
14	1	6	10	5		22
15	1	7	12	6	1	27
16	1	7	14	9	1	32
17	1	8	16	11	2	38
18	1	8	19	15	3	46
19	1	9	21	18	5	54
20	1	9	24	23	7	64

TABLE 1.2 – Les valeurs de $q(n, k)$ pour $n \leq 20$.

La fonction génératrice du nombre de partitions de n en k parts distinctes est donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty} q(n, k) z^n = \frac{z^{k(k+1)/2}}{\prod_{i=1}^k (1 - z^i)}.$$

Le nombre de partitions en k parts distinctes peut être calculé via la formule suivante :

$$q(n, k) = p(n - k(k - 1)/2, k).$$

Le lecteur intéressé pourra se référer à [4].

Notons $P(n, k)$, le nombre de partitions de n , dont la plus grande part est k .

Exemple 1.3.1. Les partitions de 10, dont la plus grande part est 3 sont en nombre de 14 :

1+1+1+1+1+1+1+1+1+1, 2+1+1+1+1+1+1+1+1, 3+1+1+1+1+1+1+1,

$2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1,$
 $3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1, 3 + 2 + 2 + 2 + 1,$
 $2 + 2 + 2 + 2 + 2, 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1, 3 + 3 + 2 + 1 + 1, 3 + 3 + 3 + 1, 3 + 3 + 2 + 2.$

Le tableau suivant illustre les premières valeurs de $P(n, k)$,

	k										
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1										
2	1	2									
3	1	2	3								
4	1	3	4	5							
5	1	3	5	6	7						
6	1	4	7	9	10	11					
7	1	4	8	11	13	14	15				
8	1	5	10	15	18	20	21	22			
9	1	5	12	18	23	26	28	29	30		
10	1	6	14	23	30	35	38	40	41	42	
11	1	6	16	27	37	44	49	52	54	55	56

TABLE 1.3 – Les valeurs de $P(n, k)$ pour $n \leq 11$.

Une relation qui lie le nombre de partitions en k parts avec le nombre des partitions dont la plus grande part est égale à k est donnée par :

$$p(n, k) = P(n - k, k).$$

Notons $c_m(n, k)$, le nombre de partitions de n en k parts, telle qu'au moins une part est de fréquence m .

Exemple 1.3.2. Les partitions de 12 en 4 parts telles qu'au moins une est de fréquence 2 sont au nombre de 10, il s'agit des partitions :

$1 + 1 + 2 + 8, 1 + 1 + 3 + 7, 1 + 1 + 4 + 6, 1 + 1 + 5 + 5, 1 + 2 + 2 + 7,$
 $1 + 3 + 3 + 5, 1 + 3 + 4 + 4, 2 + 2 + 3 + 5, 2 + 2 + 4 + 4, 2 + 3 + 3 + 4.$

Les partitions d'un entier ont fait l'objet d'une bibliographie très riche et laborieuse, nous nous sommes contentés de présenter juste les résultats qui nous ont été nécessaires pour la suite de nos recherches.

CHAPITRE 2

Sur les m -uplets diophantiens

Introduction

La première partie de ce chapitre sera consacrée à l'introduction des m -uplets diophantiens, sur lesquels, il existe une littérature abondante et dont le fondateur est le mathématicien grec, Diophante d'Alexandrie.

Pour ce qui est de la deuxième partie, nous récapitulerons les travaux réalisés dans ce contexte où nous exposerons avec détail le premier ensemble rationnel trouvé par Diophante et le premier quadruplet d'entiers de Fermat. Ensuite, nous aborderons l'extensibilité de quelques ensembles, conditions d'existence et quelque bornes relatives aux quintuplets.

A noter, q'un survey à ce sujet est publié sur la page web de A. Dujella [35], notre référence de base.

2.1 Les m -uplets diophantiens

Dans cette section, nous introduisons les m -uplets diophantiens, illustrés par quelques exemples qui permettront au lecteur de se familiariser avec cette notion, objet indispensable dans notre étude.

Définition 2.1.1. Un ensemble à m entiers positifs a_1, \dots, a_m est appelé un m -uplet diophantien si, $a_i a_j + 1$ est un carré parfait, pour $1 \leq i < j \leq m$.

Exemple 2.1.1. Le couple $1, 3$ est un 2-uplet diophantien : $1 \cdot 3 + 1 = 2^2$.

Exemple 2.1.2. Les entiers $1, 3, 5$ ne forment pas un 3-uplet diophantien car $1 \cdot 5 + 1 = 6$ n'est pas un carré parfait.

Quelques détails historiques des travaux ayant marqué la théorie des m -uplets diophantiens feront l'objet de la partie suivante.

Le premier ensemble des nombres rationnels qui fut trouvé par Diophante est :

$$\left\{ \frac{1}{16}, \frac{33}{16}, \frac{17}{4}, \frac{105}{16} \right\}.$$

Il est facile de voir que :

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{33}{16} + 1 = \left(\frac{17}{16} \right)^2, \quad \frac{1}{16} \cdot \frac{17}{4} + 1 = \left(\frac{9}{8} \right)^2, \quad \frac{1}{16} \cdot \frac{105}{16} + 1 = \left(\frac{19}{16} \right)^2, \quad \frac{33}{16} \cdot \frac{17}{4} + 1 = \left(\frac{25}{8} \right)^2,$$

$$\frac{33}{16} \cdot \frac{105}{16} + 1 = \left(\frac{61}{16} \right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{17}{4} \cdot \frac{105}{16} + 1 = \left(\frac{43}{8} \right)^2.$$

Son point de départ est la famille $\{x, x + 2, 4x + 4\}$, qui constitue une famille infinie de 3-uplets diophantiens. En posant, $\{a_1, a_2, a_3\} = \{x, x + 2, 4x + 4\}$,

$$x(x + 2) + 1 = (x + 1)^2,$$

$$x(4x + 4) + 1 = (2x + 1)^2,$$

$$(x + 2)(4x + 4) + 1 = (2x + 3)^2.$$

Puis, il rajoute $a_4 = 9x + 6$, qui vérifie :

$$x.(9x + 6) + 1 = (3x + 1)^2,$$

$$(4x + 4)(9x + 6) + 1 = (6x + 5)^2.$$

Il ne lui restait qu'à chercher une valeur positive de x , telle que

$$(x + 2)(9x + 6) + 1 = \square^1,$$

En d'autres termes

$$9x^2 + 24x + 13 = \square,$$

ou bien

$$(3x + 4)^2 - 3 = \square.$$

Pour ce faire, il posa $\square = (3x - 4)^2$ et il trouva enfin :

$$x = \frac{1}{16}.$$

La question que nous nous sommes posée est la suivante :

Quelles sont les valeurs de a vérifiant $\square = (3x + a)^2, a \neq 4$?

En d'autres termes :

$$(3x + 4)^2 - 3 = (3x + a)^2,$$

ou bien

$$(4 - a)(6x + 4 + a) = 3,$$

il vient

$$x = \frac{a^2 - 13}{6(4 - a)}.$$

1. \square : Carré parfait

Il suffit donc de choisir $a \leq -4$ pour en construire une infinité.

Si on choisit à titre d'exemple $a = -5$, on trouve le quadruplet :

$$\left\{ \frac{2}{9}, \frac{20}{9}, \frac{44}{9}, 8 \right\}.$$

Pour trouver un quadruplet d'entiers positifs, Fermat, démarra du triplet $\{1, 3, 8\}$, en posant $x = 1$, auquel il rajouta un quatrième élément d .

En considérant le système d'équations :

$$\begin{cases} d + 1 = \square, \\ 3d + 1 = \square, \\ 8d + 1 = \square, \end{cases}$$

et en posant $d = x^2 - 1$, il trouva le système :

$$\begin{cases} 3x^2 - 2 = \square, \\ 8x^2 - 7 = \square, \end{cases}$$

qui admet $x = 11$ comme solution évidente, d'où le premier quadruplet d'entiers :

$$\{1, 3, 8, 120\}.$$

Depuis, une des questions s'est posée : Est-il possible d'étendre l'ensemble de Fermat $\{1, 3, 8, 120\}$ à un quintuplet d'entiers positifs ?

La réponse est négative, elle fut donnée par Baker et Davenport en 1969 [7].

En fait, l'ensemble de Fermat n'est qu'un exemple de la famille infinie de quadruplets $\{k - 1, k + 1, 4k, 16k^3 - 4k\}$, prouvée non extensible à une famille de quintuplets, par A. Dujella, en 1997 [27]. A. Dujella prouva, de plus, que la famille de quadruplets $\{k - 1, k + 1, 4k, 16k^3 - 4k\}$ est la seule extension de $\{k - 1, k + 1, 4k\}$.

En 1998, A. Dujella et Petho [28], ont prouvé que l'ensemble $\{1, 3\}$ ne peut s'étendre

à un quintuplet.

Un résultat plus général fut démontré par Fujita [43] en 2008, il stipule que l'ensemble $\{k-1, k+1\}$ est non extensible à un quintuplet.

Bien sur, Euler fut le premier à avoir essayé, de répondre à la question. Il commença par généraliser la famille des quadruplets diophantiens, en montrant simplement le résultat suivant :

Si $\{a, b\}$ est un 2-uplet diophantien, alors :

$$\{a, b, a + b + 2r, 4r(r + a)(r + b)\}, \quad r = \sqrt{ab + 1}$$

est un quadruplet diophantien.

Il est clair que si $a = k-1$ et $b = k+1$, on retrouve la famille $\{k-1, k+1, 4k, 16k^3 - 4k\}$ qui ne contient pas, par exemple, le quadruplet diophantien $\{2, 12, 24, 2380\}$, correspondant à $r = 5$.

Il proposa enfin une extension du quadruplet de Fermat à un cinquième élément mais dans \mathbb{Q}^+ ,

$$\left\{ 1, 3, 8, 120, \frac{777480}{8288641} \right\}.$$

En 2006, Gibbs [44] a pu trouver un sextuplet dans \mathbb{Q}^+ :

$$\left\{ \frac{11}{192}, \frac{35}{192}, \frac{155}{27}, \frac{512}{27}, \frac{1235}{48}, \frac{180873}{16} \right\}.$$

Conjecture 2.1.1. *Il n'existe pas de quintuplet diophantien !*

En 2004, A. Dujella énonça la conjecture suivante :

Conjecture 2.1.2. *Si $\{a, b, c, d\}$ est un quadruplet diophantien, tel que $d > \max\{a, b, c\}$, alors*

$$d = a + b + c + 2abc + 2\sqrt{(ab + 1)(ac + 1)(bc + 1)}.$$

Si on reprend par exemple le quadruplet de A. Dujella :

$$(a, b, c, d) = (k - 1, k + 1, 4k, 16k^3 - 4k),$$

il s'avère que :

$$a + b + c + 2abc + 2\sqrt{(ab + 1)(ac + 1)(bc + 1)} = 16k^3 - 4k.$$

En vertu de la conjecture de A. Dujella, il convient de noter :

$$d^+ = a + b + c + 2abc + 2\sqrt{(ab + 1)(ac + 1)(bc + 1)}.$$

En 2004, Fujita renforça la conjecture de A. Dujella, en énonçant le théorème suivant :

Théorème 2.1.1. *Si $\{a, b, c, d, e\}$ est un quintuplet diophantien, alors $d = d^+$.*

2.2 Quelques bornes relatives aux quintuplets

Soit $\{a, b, c, d, e\}$ un quintuplet diophantien. Plusieurs travaux ont été menés sur les bornes des éléments b et d , ainsi que le nombre de quintuplets.

En 2004, A. Dujella a montré que $b < 10^{1086}$ et $d < 10^{2171}$. En 2010, Fujita a prouvé que $b < 10^{166}$ et $d < 10^{830}$. Trois ans plus tard, Filipin et Fujita affirment que $b < 5 \times 10^{49}$ et $d < 10^{100}$. Une amélioration de ces bornes est faite par Elsholtz, Filipin et Fujita, en 2014 en montrant qu'une borne de b vaut $1.03 \cdot 10^{38}$ et une borne de d vaut 3.5×10^{94} . Enfin, au cours de la même année, Wu-He affirment que $d < 10^{74}$, $b < 5 \times 10^{36}$ et Cipu a prouvé que $b < 6.209 \times 10^{35}$.

Notons Q , le nombre de quintuplets diophantiens. En 2004, A. Dujella affirme qu'il existe un nombre fini de Q et en 2008, il a prouvé que $Q < 10^{1930}$. Deux ans plus tard, Fujita a montré que $Q < 10^{276}$. En 2013, avec la collaboration de Filipin, ils ont prouvé que $Q < 10^{96}$. Enfin, en 2014, Elsholtz, Filipin et Fujita, ont montré que $Q < 6.8 \times 10^{32}$ et Cipu a affirmé que $Q < 10^{31}$. Le lecteur peut se référer à [17], [34], [36], [39] et [57] pour plus de détails.

Remarque 2.2.1. *Il semble qu'il reste beaucoup à faire en vue d'améliorer les bornes de b , d et Q !!*

2.3 Généralisation des m -uplets diophantiens

Il existe plusieurs généralisations naturelles du problème original de Diophante, comme le précise A. Dujella dans [35].

Définition 2.3.1. *Soit n un entier naturel. Un ensemble à m entiers positifs $\{a_1, \dots, a_m\}$ est dit un $D(n)$ - m -uplet diophantien si, $a_i a_j + n$ est un carré parfait, pour $1 \leq i < j \leq m$.*

Exemple 2.3.1. *La famille $\{1, 9, 20, 105\}$ est un $D(16)$ -quadruplet diophantien puisque*

$$1.9 + 16 = 5^2, \quad 1.20 + 16 = 6^2, \quad 1.105 + 16 = 11^2, \quad 9.20 + 16 = 14^2, \\ 9.105 + 16 = 31^2, \quad 20.105 + 16 = 46^2.$$

La famille infinie $\{k - 4, k + 4, 4k, k^3 - 4k\}$ est un $D(16)$ -quadruplet diophantien. En 2007, cette famille est prouvée non extensible à un $D(16)$ -quintuplet diophantien par Filipin [37].

Remarque 2.3.1. *La famille $\{1, 9, 20, 105\}$ est obtenue en remplaçant k par 5.*

L'existence de quadruplets diophantiens, avec la propriété de $D(n)$, est un problème qui a fasciné plusieurs chercheurs. La réponse à ce problème, est donnée en 1985 par E. Brown [15], H. Gupta, A. Singh [46] et S .P. Mohanty, A. M. Samasamy [48], en montrant que si n est un entier de la forme $n = 4k + 2$, alors il n'existe pas de quadruplets diophantiens avec la propriété $D(n)$.

En 1993, A. Dujella a prouvé que si un entier n n'est pas de la forme $4k + 2$ et $n \notin S = \{-4, -3, -1, 3, 5, 8, 12, 20\}$, alors il existe au moins un quadruplet diophantien avec la propriété $D(n)$ [26].

Remarque 2.3.2. *Pour $n \in S$, la question de l'existence de quadruplets diophantiens avec la propriété $D(n)$ est toujours posée.*

2.3.1 Les $D(-1)$ - m -uplets diophantiens

Parmi les $D(-1)$ -triplets diophantiens non extensibles à des $D(-1)$ -quadruplets diophantiens $\{1, 2, 5\}$. Ce résultat est due à Brown [15]. O. Kihel [47] a redémontré ce résultat, en utilisant la théorie des nombres élémentaire. Le lecteur peut consulter concernant l'extensibilité de $D(-1)$ -triplet diophantien $\{1, 5, c\}$.

N. C. Bonciocat et al ont conjecturé que $D(-1)$ -quadruplets n'existent pas [12]. A. Dujella, C. Fuchs [31] ont prouvé que si $\{a, b, c, d\}$ est un $D(-1)$ -quadruplet avec $a < b < c < d$, donc $a = 1$. Dujella, Filipin et Fuchs [33] ont prouvé qu'il existe un nombre fini de $D(-1)$ -quadruplets, en donnant une borne supérieure estimée à 10^{903} . Cette borne a été améliorée à 10^{356} par Filipin et Fuchs [38] et à 4.10^{70} par Bonciocat, Cipu et Mignotte [12]. Une amélioration est faite en 2013, par Christian Elsholtz, Alan Filipin et Yasutsugu Fujita [36] en affirmant que le nombre de $D(-1)$ -quadruplets est inférieure à 5.10^{60} .

Les m -uplets diophantiens et les partitions d'un entier

Introduction

Pour contribuer au développement de la théorie des partitions d'un entier, nous nous sommes intéressés à l'étude du nombre des partitions de n en m parts, formant un m -uplet diophantien, noté, $q_D(n, m)$. Selon la conjecture de A. Dujella énoncée dans le chapitre 2, $q_D(n, m) = 0$, pour $n > m \geq 5$, les seuls cas qui restent à étudier sont ceux pour lesquels $m \in \{2, 3, 4\}$.

Dans ce chapitre, nous présenterons les résultats de nos recherches sur $q_D(n, 2)$. Il y'a lieu de préciser que, la décomposition d'un entier en somme de deux carrés parfaits est l'un des résultats clefs utilisés dans notre étude. Aussi, nous avons jugé utile de présenter les outils les plus utilisés dans cette décomposition.

Dans tout ce qui suit notons :

- $r_2^{\mathbb{N}}(n)$ (resp. $r_2^{\mathbb{Z}}(n)$), le nombre de solutions de l'équation $x^2 + y^2 = n$ dans \mathbb{N} (resp. \mathbb{Z}).
- $\tau(n) = \sum_{d/n} 1$, le nombre de diviseurs de l'entier n .
- $\tau_{1[4]}(n) = \sum_{\substack{d/n \\ d \equiv 1 \pmod{4}}} 1$, le nombre de diviseurs de n congrus à 1 modulo 4 et
- $\tau_{3[4]}(n) = \sum_{\substack{d/n \\ d \equiv 3 \pmod{4}}} 1$, le nombre de diviseurs de n congrus à 3 modulo 4.
- $v_2(n) = \max\{q \in \mathbb{N} / 2^q \mid n\}$, l'exposant de 2 dans la décomposition canonique de l'entier n en produit de nombres premiers.

3.1 Résultats préliminaires

Commençons par le théorème de Fermat sur les nombres impairs premiers :

Théorème 3.1.1. *Soit p un nombre impair premier,*

$$\exists(x, y) \in \mathbb{N}^2 / p = x^2 + y^2 \iff p \equiv 1 \pmod{4}.$$

Cette décomposition, quand elle existe, est unique.

Lemme 3.1.1. *Si n n'est pas un carré parfait, alors :*

$$4r_2^{\mathbb{N}}(n) = r_2^{\mathbb{Z}}(n).$$

Exemple 3.1.1. *Les solutions de $x^2 + y^2 = 20$, dans \mathbb{Z} sont :*

$$(2, 4), (4, 2), (-2, -4), (-4, 2), (-2, 4), (-4, -2), (2, -4), (4, -2).$$

On a :

$$r_2^{\mathbb{N}}(n) = \frac{1}{4}r_2^{\mathbb{Z}}(n).$$

Les solutions de $x^2 + y^2 = 9$, dans \mathbb{Z} sont :

$$(0, 3), (3, 0), (0, -3), (-3, 0).$$

Il est clair que

$$r_2^{\mathbb{N}}(n) \neq \frac{1}{4}r_2^{\mathbb{Z}}(n).$$

Le nombre de décompositions d'un entier n en somme de deux carrés est donné par Charles Gustave jacob Jacobi.

Théorème 3.1.2. Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$r_2^{\mathbb{Z}}(n) = 4(\tau_{1[4]}(n) - \tau_{3[4]}(n)).$$

Théorème 3.1.3. Soit n un entier positif, tel que

$$n = 2^r p_1^{s_1} \dots p_k^{s_k} q_1^{t_1} \dots q_l^{t_l},$$

où $p_i \equiv 1 \pmod{4}$ et $q_i \equiv 3 \pmod{4}$. Alors $r_2^{\mathbb{N}}(n)$ est la partie entière de δ , avec

$$\delta = \frac{1}{2} \left(\prod_{j=1}^k (s_j + 1) \right) \left(\prod_{j=1}^l \frac{(-1)^{t_j} + 1}{2} \right).$$

En particulier, n est une somme de deux carrés, si et seulement si, $q_1^{t_1} \dots q_l^{t_l}$ est un carré parfait.

Lemme 3.1.2. [8] Soit n un entier strictement positif, $n^2 + 4$ et $n^2 + 1$ ne sont jamais des carrés parfaits.

Preuve :

Supposons que n est un carré parfait, $\exists a \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 + 4 = a^2$.

On a alors :

$$a^2 - n^2 = (a + n)(a - n) = 4.$$

Puisque $(a - n)$ et $(a + n)$ sont de même parité, il s'ensuit :

$(a - n) = 2$ et $(a + n) = 2$, ce qui engendrait, $n = 0$, ce qui est absurde.

Raisonnement identique pour montrer que $n^2 + 1$ n'est jamais un carré parfait.

Parmi les théorèmes les plus célèbres en arithmétique, on trouve le petit théorème de Fermat, énoncé comme suit :

Théorème 3.1.4. *Soit p un entier premier, alors :*

$$\text{Pour tout entier } a, 1 < a < p : a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Plusieurs preuves ont été établies, le lecteur peut se référer à [53].

Le théorème de Wilson a joué un rôle très important dans notre étude.

Ce théorème apparaît dans un livre en latin de "Méditations Algebraicae" publié en 1770 par E Waring. Celui-ci attribue le résultat à un de ses élèves, John Wilson. Mais bien avant, autour de l'an mil, le mathématicien Ibn al-Haytham (965-1040) avait déjà publié un cours "Opuscule" dans lequel il énonçait le résultat, et où il apparaît clairement qu'il possédait la justification (extrait de [11]).

Théorème 3.1.5. *Un entier $p \geq 2$ est premier, si et seulement si, $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.*

Preuve :

Soit p un nombre premier.

D'après le petit théorème de Fermat, on a :

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \text{ pour tout } a = \overline{1, 2, \dots, p-1}.$$

Donc, le polynôme $x^{p-1} - 1$ est scindé sur \mathbb{Z}_p :

$$x^{p-1} - 1 = (x - 1)(x - 2)\dots(x - p + 1).$$

Si on pose $x = p$, il vient

$$(p - 1)! = p^{p-1} - 1 \equiv -1 \pmod{p}.$$

D'autre part, supposons $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, $p \geq 2$. Il existe donc un entier relatif a tel que $(p-1)! + 1 = a.p$ ou encore $a.p - (p-1)! = 1$.

Le théorème de Bezout permet alors d'affirmer que k et p sont premiers entre eux pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$ et donc, p est premier. Ce qu'il fallait démontrer.

Lemme 3.1.3. *Pour tout nombre premier impair p , on a :*

$$\exists x \in \mathbb{Z} / -1 \equiv x^2 \pmod{p} \iff p \equiv 1 \pmod{4}.$$

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{Z}$, tel que :

$$-1 \equiv x^2 \pmod{p}, \tag{3.1}$$

alors x est premier avec p , d'après le théorème de Bezout.

En élevant à la puissance $\frac{p-1}{2}$ chacun des membres de (3.1), on a :

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

Il vient,

$$p \equiv 1 \pmod{4}.$$

Prouvons maintenant le sens inverse :

Supposons $p \equiv 1 \pmod{4}$ et posons $\frac{p-1}{2} = 2n$, on a alors :

$$\begin{aligned} (p-1)! &= (4n)! \\ &= (2n)!(2n+1)(2n+2)\dots(4n-1)(4n) \\ &= (2n)!(4n)(4n-1)\dots(2n+2)(2n+1) \\ &= (2n)!(p-1)(p-2)\dots(p-(2n-1))(p-2n) \\ &\equiv (2n)!(-1)(-2)\dots(-(2n-1))(-2n) \pmod{p} \\ &\equiv ((2n)!)^2 \pmod{p}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Wilson, on a :

$$(p-1)! = -1 \pmod{p}.$$

Puisque

$$(p-1)! \equiv ((2n)!)^2 \pmod{p},$$

on a :

$$-1 \equiv ((2n)!)^2 \pmod{p}.$$

Donc, il existe $x = (2n)!$, vérifiant $-1 \equiv x^2 \pmod{p}$.

Lemme 3.1.4. [8] *Tous les diviseurs premiers impairs de $n^2 + 4$ sont congrus à 1 modulo 4, pour tout $n \geq 1$.*

Preuve :

Soit p un nombre premier impair divisant $n^2 + 4$, alors on a :

$$n^2 + 4 \equiv 0 \pmod{p}. \tag{3.2}$$

Comme 2 est premier avec p , il existe $b \in \mathbb{Z}$, tel que :

$$2b \equiv 1 \pmod{p}.$$

Donc

$$4b^2 \equiv 1 \pmod{p}. \tag{3.3}$$

De (3.2) et de (3.3), on trouve :

$$(bn)^2 + 4b^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

D'où

$$-1 \equiv (bn)^2 \pmod{p},$$

On déduit, grâce au lemme 3.1.3, que p est congru à 1 modulo 4.

Lemme 3.1.5. [8] Pour tout entier naturel impair n , tout diviseur de $n^2 + 4$ est congru à 1 modulo 4.

Preuve :

On a, d'après le lemme 3.1.4, $\tau_{3[4]}(n^2 + 4) = 0$, il en résulte qu'on a, pour n impair :

$$\tau_{1[4]}(n^2 + 4) = \tau(n^2 + 4).$$

Grâce au théorème de Jacobi 3.1.2, pour n impair, on a :

$$\tau(n^2 + 4) = r_2^{\mathbb{N}}(n^2 + 4).$$

Un des résultats qui nous a servi, le théorème des restes chinois énoncé comme suit :

Théorème 3.1.6. Soit p et q deux entiers positifs premiers entre eux, tels que :

$$x \equiv a \pmod{p} \quad \text{et} \quad x \equiv b \pmod{q}.$$

On a alors,

$$x = a \cdot q^{-1} \pmod{p} \cdot q + b \cdot p^{-1} \pmod{q} \cdot p + k \cdot p \cdot q.$$

3.2 Position du problème

Une partition d'un entier n en deux parts formant un 2-uplet diophantien, est une solution du système :

$$\begin{cases} n = a + b, \\ ab + 1 = s^2, \\ a > b \geq 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Notons $q_D(n, 2)$, le nombre de solutions de ce système.

Exemple 3.2.1. Les seules partitions de 24 en 2 parts formant un 2-uplet diophantien

sont :

$$\begin{aligned} 24 &= 3 + 21, \\ &= 4 + 20, \\ &= 11 + 13, \end{aligned}$$

Il est clair que :

$$\begin{aligned} 3 \cdot 21 + 1 &= 8^2, \\ 4 \cdot 20 + 1 &= 9^2, \\ 11 \cdot 13 + 1 &= 12^2. \end{aligned}$$

Exemple 3.2.2. Parmi les 49 partitions de 100 en deux parts distinctes, les partitions :

$$\begin{aligned} 100 &= 51 + 49, \\ &= 60 + 40, \\ &= 99 + 1, \end{aligned}$$

sont les seules partitions en 2 parts formant un 2-uplet diophantien.

$$\begin{aligned} 51 \cdot 49 + 1 &= 50^2, \\ 60 \cdot 40 + 1 &= 49^2, \\ 99 \cdot 1 + 1 &= 10^2. \end{aligned}$$

Observation 3.2.1. Si n est un carré parfait, il admet au moins une partition en deux parts formant un 2-uplet diophantien. Il suffit de poser $a = 1$ et $b = n - 1$.

Observation 3.2.2. Si n est pair, il admet au moins une partition en deux parts formant un 2-uplet diophantien. Il suffit de poser $a = k - 1$ et $b = k + 1$, avec $n = 2k$.

3.3 Contributions

Après avoir bien posé le problème et préparé les outils de travail à utiliser, nous présentons les résultats de notre étude en commençant par les propositions suivantes.

Proposition 3.3.1. Soit $n \geq 15$,

$$q_D(n, 5) \leq 10^{31} \quad \text{et} \quad q_D(n, k) = 0, \quad k \geq 6.$$

La preuve se base sur les résultats de Cipu [17].

Proposition 3.3.2. *Soit $n \geq 6$,*

1. *Si $n \equiv 0 \pmod{6}$, alors n admet au moins une partition en 3 parts formant un 3-uplet diophantien .*
2. *Si $n \equiv 0 \pmod{16k^3 + 2k}$, alors n admet au moins une partition en 4 parts formant un 4-uplet diophantien , pour tout $k \geq 1$.*

La preuve repose sur la famille infinie de 3-uplets diophantiens $\{k - 1, k + 1, 4k\}$ et la famille infinie de 4-uplets diophantiens $\{k - 1, k + 1, 4k, 16k^3 - 4k\}$.

Proposition 3.3.3. *Soit $n \geq 4$,*

Si $n \in \{2k, k^3, k^3 - 3k + 4, k^3 - 3k - 4\}$, alors n admet au moins une partition en deux parts formant un $D(16) - 2$ -uplet diophantien.

La preuve repose essentiellement sur la famille infinie $\{k - 4, k + 4, 4k, k^3 - 4k\}$, qui est un $D(16)$ -quadruplet diophantien.

3.3.1 Borne inférieure de $q_D(36 + 130k, 2)$

Proposition 3.3.4. *Soient n et k deux entiers positifs tels que, $n = 36 + 130k$, alors :*

$$q_D(n, 2) \geq 4.$$

Les partitions sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 n &= \binom{n}{2} - 1 + \binom{n}{2} + 1, \\
 &= \binom{n-6}{10} + \binom{9n+6}{10}, \\
 &= \left(\frac{1}{5}(n-6) + 2 \right) + \left(\frac{4}{5}(n-6) + 4 \right), \\
 &= \left(\frac{4}{13}(n-10) + 4 \right) + \left(\frac{9}{13}(n-10) + 6 \right).
 \end{aligned}$$

Ce résultat est établi en utilisant la famille infinie de 3-uplets diophantiens $\{k, k+2, 4k+4\}$, les deux familles infinies des 2-uplets diophantiens $\{k, (9k+6)\}$, $\{(4k+4), (9k+6)\}$ et le théorème des restes des chinois.

Exemple 3.3.1.

$$\begin{aligned}
 36 &= 17 + 19, \\
 &= 3 + 33, \\
 &= 8 + 28, \\
 &= 12 + 24,
 \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que :

$$\begin{aligned}
 17 \cdot 19 + 1 &= 18^2, \\
 3 \cdot 33 + 1 &= 10^2, \\
 8 \cdot 28 + 1 &= 15^2, \\
 12 \cdot 24 + 1 &= 17^2.
 \end{aligned}$$

3.3.2 Borne supérieure de $q_D(n, 2)$

Une borne supérieure de $q_D(n, 2)$ est donnée par le théorème suivant.

Théorème 3.3.1. [8] Pour $n \geq 3$, on a :

$$q_D(n, 2) \leq \left\lfloor \frac{\sqrt{n^2 + 4}}{2} \right\rfloor - \lceil \sqrt{n} \rceil + 1,$$

où $\lfloor w \rfloor$ et $\lceil w \rceil$ désignent la partie entière inférieure de w et la partie entière supérieure respectivement.

Preuve :

De (3.4), on a,

$$-b^2 + nb + 1 = s^2. \quad (3.5)$$

Puisque $f : t \mapsto -t^2 + nt + 1$ est croissante dans l'intervalle $\left[1, \frac{n}{2}\right]$ et $b \in \left[1, \frac{n}{2}\right]$, alors :

$$n \leq -b^2 + nb + 1 < \frac{n^2 + 4}{4}.$$

Donc,

$$\sqrt{n} \leq s < \frac{\sqrt{n^2 + 4}}{2}.$$

Le nombre de valeurs de s représente la borne supérieure de $q_D(n, 2)$. Cette borne est atteinte pour $n = 5$ et la borne est loin d'être atteinte pour n assez grand.

3.3.3 Principaux résultats

Soit S_n l'ensemble de toutes les solutions de l'équation diophantienne¹.

$$(n - 2x)^2 + (2y)^2 = n^2 + 4,$$

où $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ avec $n - 2x > 0$.

Lemme 3.3.1. [8] On a :

$$q_D(n, 2) = \text{card}(S_n).$$

Preuve :

De (3.5), on obtient

$$(n - 2b)^2 + (2s)^2 = n^2 + 4.$$

1. Une équation polynomiale à une ou plusieurs inconnues dont les solutions sont cherchées parmi les nombres entiers, éventuellement rationnels.

Ce qui montre qu'on a une correspondance entre S_n et l'ensemble de toutes les solutions de système (3.4).

Rappelons que si n n'est pas un carré parfait, on a :

$$r_2^{\mathbb{N}}(n) = \frac{r_2^{\mathbb{Z}}(n)}{4}, \quad (3.6)$$

et

$$r_2^{\mathbb{Z}}(n) = 4(\tau_{1[4]}(n) - \tau_{3[4]}(n)). \quad (3.7)$$

Puisque $n^2 + 4$ ne peut jamais être un carré parfait, de (3.6) et (4.2), on a :

$$r_2^{\mathbb{N}}(n^2 + 4) = \tau_{1[4]}(n^2 + 4) - \tau_{3[4]}(n^2 + 4). \quad (3.8)$$

Le corollaire suivant est une conséquence directe de (3.8) et le lemme 3.1.4.

Corollaire 3.3.1. [8] *Pour tout entier positif $n \geq 1$, nous avons*

$$r_2^{\mathbb{N}}(n^2 + 4) = \frac{\tau(n^2 + 4)}{1 + v_2(n^2 + 4)}.$$

On est maintenant prêt à formuler notre résultat principal.

Théorème 3.3.2. [8] *Pour $n \geq 1$, on a :*

$$q_D(n, 2) = \frac{2\tau(n^2 + 4)}{3 + (-1)^{n+1} + 2v_2(n^2 + 4)} - 1.$$

Preuve :

Soit $T_n = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a^2 + b^2 = n^2 + 4\}$. On distingue deux cas :

Premier cas : n est impair, posons :

$$T_n^1 = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a^2 + b^2 = n^2 + 4, a \text{ impair et } b \text{ pair}\},$$

$$T_n^2 = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a^2 + b^2 = n^2 + 4, a \text{ pair et } b \text{ impair}\}.$$

Du corollaire 3.3.1, on a :

$$\text{card}(T_n) = \tau(n^2 + 4). \quad (3.9)$$

Il est clair que $T_n^1 \cap T_n^2 = \emptyset$ et $T_n = T_n^1 \cup T_n^2$.

Par conséquent

$$\text{card}(T_n) = 2 \text{card}(T_n^1). \quad (3.10)$$

Notons que $(x, y) \in S_n$, si et seulement si, $(x, y) \in T_n^1 \setminus \{(n, 2)\}$. Ce qui implique

$$\text{card}(S_n) = \text{card}(T_n^1) - 1. \quad (3.11)$$

Il en découle de (3.9), (3.10) et (3.11)

$$\text{card}(S_n) = \frac{\tau(n^2 + 4)}{2} - 1.$$

Deuxième cas : n est pair, soit $n = 2m$,

S_n devient l'ensemble de toutes les solutions de l'équation Diophantienne suivante :

$$(m - x)^2 + y^2 = m^2 + 1,$$

où $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ avec $m - x > 0$. Soit alors,

$$T_m = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a^2 + b^2 = m^2 + 1\}.$$

Puisque $m^2 + 1$ n'est jamais un carré parfait, on a :

$$\text{card}(T_m) = \frac{\tau(m^2 + 1)}{1 + v_2(m^2 + 1)}.$$

Notons que $(x, y) \in S_n$, si et seulement si, $(x, y) \in T_m \setminus \{(m, 1)\}$. Donc,

$$\begin{aligned} \text{card}(S_n) &= \text{card}(T_m) - 1 \\ &= \frac{\tau(m^2 + 1)}{1 + v_2(m^2 + 1)} - 1. \end{aligned}$$

Puisque $n^2 + 4 = 4(m^2 + 1)$, il existe M , un entier positif impair, tel que :

$$n^2 + 4 = 2^{v_2(n^2+4)} M \quad \text{et} \quad m^2 + 1 = 2^{v_2(m^2+1)} M,$$

et donc

$$\frac{\tau(m^2 + 1)}{1 + v_2(m^2 + 1)} = \frac{\tau(n^2 + 4)}{1 + v_2(n^2 + 4)}.$$

Ainsi que

$$\text{card}(S_n) = \frac{\tau(n^2 + 4)}{1 + v_2(n^2 + 4)} - 1.$$

Remarque 3.3.1. [8] Sachant que :

$$v_2(n^2 + 4) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2 \nmid n, \\ 3 & \text{si } 2 \parallel n, \\ 2 & \text{si } 4 \mid n, \end{cases}$$

le théorème 3.3.2 peut être reformulé comme suit :

Théorème 3.3.3. [8] Pour $n \geq 1$, on a :

$$q_D(n, 2) = \begin{cases} \frac{\tau(n^2 + 4)}{2} - 1 & \text{si } 2 \nmid n, \\ \frac{\tau(n^2 + 4)}{4} - 1 & \text{si } 2 \parallel n, \\ \frac{\tau(n^2 + 4)}{3} - 1 & \text{si } 4 \mid n, \end{cases}$$

Comme conséquence immédiate du théorème 3.3.3, on obtient le Corollaire suivant :

Corollaire 3.3.2. [8] Pour tout entier positif $n \geq 1$, on a :

$$\tau(n^2 + 4) \equiv 0 \begin{cases} (\text{mod } 2) & \text{si } 2 \nmid n, \\ (\text{mod } 4) & \text{si } 2 \parallel n, \\ (\text{mod } 3) & \text{si } 4 \mid n. \end{cases}$$

3.4 Quelques exemples

Exemple 3.4.1. Soit $n = 1000$. On a $n^2 + 4 = 2^2 \cdot 53^2 \cdot 89$ et $\tau(n^2 + 4) = 18$. Du théorème 3.3.3, on obtient :

$$q_D(1000, 2) = 5.$$

Les partitions sont :

$$\begin{aligned} 1000 &= 501 + 499, \\ &= 720 + 280, \\ &= 765 + 235, \\ &= 924 + 76, \\ &= 949 + 51, \end{aligned}$$

Bien sûr, toutes ces partitions vérifient la propriété de Diophante :

$$\begin{aligned} 501 \cdot 499 + 1 &= 500^2, \\ 720 \cdot 280 + 1 &= 449^2, \\ 765 \cdot 235 + 1 &= 424^2, \\ 924 \cdot 76 + 1 &= 265^2, \\ 949 \cdot 51 + 1 &= 220^2. \end{aligned}$$

Exemple 3.4.2. Soit $n = 2039$, un nombre premier. Puisque $n^2 + 4 = 5^2 \cdot 166301$, on obtient $\tau(n^2 + 4) = 6$. Par conséquent, d'après le théorème 3.3.3, on obtient :

$$q_D(2039, 2) = 2.$$

Les partitions sont :

$$\begin{aligned} 2039 &= 1304 + 735, \\ &= 1632 + 407, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} 1304 \cdot 735 + 1 &= 979^2, \\ 1632 \cdot 407 + 1 &= 815^2. \end{aligned}$$

3.4.1 A propos de la primalité de $q_D(n, 2)$

Nous précisons, que la question de primalité de $q_D(n, 2)$ est motivée par celle d'Euler énoncée en page 13.

Conjecture 3.4.1. *Soit $n \geq 4$, alors si $q_D(n, 2) \notin \{0, 1, 15\}$, $q_D(n, 2)$ est premier impair.*

Nous illustrons notre conjecture par les résultats numériques donnés par le tableau suivant :

n	$q_D(n, 2)$	n	$q_D(n, 2)$	n	$q_D(n, 2)$	n	$q_D(n, 2)$	n	$q_D(n, 2)$
4	1	100	3	1050	3	5300	3	11700	1
5	0	101	3	1051	3	5301	3	11701	3
6	1	102	1	1052	3	5302	3	11702	1
7	0	103	0	1053	1	5303	3	11703	7
8	1	104	3	1054	3	5304	7	11704	15
9	1	105	1	1055	0	5305	1	11705	3
10	1	106	3	1056	7	5306	7	11706	15
11	1	107	1	1057	0	5307	7	11707	0
12	1	108	1	1058	1	5308	1	11708	7
13	0	109	1	1059	3	5309	3	11709	3
14	2	110	3	1060	3	5310	3	11710	7
15	0	111	5	1061	5	5311	5	11711	5
16	3	112	1	1062	3	5312	15	11712	1
17	0	113	1	1063	3	5313	1	11713	0
18	1	114	7	1064	5	5314	11	11714	5
19	1	115	0	1065	1	5315	0	11715	1
20	1	116	3	1066	3	5316	7	11716	7
21	1	117	0	1067	1	5317	1	11717	3
22	1	118	1	1068	3	5318	1	11718	1
23	1	119	1	1069	3	5319	3	11719	7
24	3	120	3	1070	1	5320	3	11720	3
25	1	121	3	1071	1	5321	1	11721	7
26	3	122	1	1072	1	5322	1	11722	7
27	0	123	1	1073	0	5323	0	11723	1
28	1	124	3	1074	3	5324	7	11724	3
29	2	125	0	1075	0	5325	0	11725	1
30	1	126	3	1076	15	5326	3	11726	3
31	1	127	3	1077	1	5327	1	11727	3
32	1	128	3	1078	3	5328	1	11728	3
33	0	129	1	1079	3	5329	7	11729	7
34	3	130	1	1080	5	5330	3	11730	3
35	0	131	1	1081	1	5331	3	11731	3
36	5	132	1	1082	3	5332	1	11732	1
37	0	133	1	1083	0	5333	3	11733	1
38	1	134	3	1084	7	5334	7	11734	15
39	2	135	0	1085	1	5335	0	11735	0
40	1	136	7	1086	5	5336	5	11736	2
41	1	137	0	1087	0	5337	1	11737	1
42	3	138	1	1088	1	5338	3	11738	7
43	1	139	2	1089	11	5339	2	11739	7
44	3	140	5	1090	1	5340	7	11740	3
45	0	141	3	1091	3	5341	7	11741	3

TABLE 3.1 – La primalité de $q_D(n, 2)$

Quadrilatères inscrits dans un n -gone régulier et partitions d'un entier

Introduction

Compter le nombre de k -gones inscrits dans un n -gone régulier est un problème étudié par plusieurs chercheurs (voir [5], [9], [49]).

Dans la première partie de ce chapitre, nous présenterons brièvement quelques travaux réalisés qui sont à l'origine de notre motivation, notamment les travaux réalisés par Norman Anning relatifs au nombre de triangles inscrits dans un n -gone régulier, ainsi que le problème de Reis qui est une généralisation du problème de Norman Anning.

La deuxième partie de ce chapitre aura pour objet d'exposer nos résultats concernant le nombre de quadrilatères, non isométriques, inscrits dans un n -gone régulier. Plus précisément, nous présenterons une formule qui compte les quadrilatères non ordonnés, en utilisant l'outil des partitions d'un entier, un résultat qui complète l'étude dans [9].

4.1 Le nombre de triangles non isométriques inscrits dans un n -gone régulier

Le nombre de triangles non isométriques¹ inscrits dans un n -gone régulier a été posé par Norman Anning de l'université de Michigan en 1830 [49].

Pour tout entier positif donné $n \geq 3$, $\Delta(n)$, dénote le nombre de tels triangles.

La solution proposée par J.S. Frame, de l'université de Brown est :

$$\Delta(n) = \{n^2/12\},$$

où $\{x\}$ est l'entier le plus proche de x .

Par la suite, d'autres solutions ont été proposées par certains auteurs, comme F. C. Auluck, du collège Dyal Singh [5].

N. Benyahia et al. [9], en utilisant les partitions d'un entier ont montré que :

$$\Delta(n) = p(n, 3).$$

Utilisant la fonction génératrice de $p(n, k)$ (voir chapitre 1) pour $k = 3$, le résultat de Frame est retrouvé et une interprétation combinatoire du nombre $p(n, 3)$ a été donnée.

4.2 Problème de Reis

En 1978, Richard H. Reis, de l'université du Sud-Est du Massachusetts, posa le problème suivant : k sommets d'un n -gone régulier sont choisis pour être les sommets d'un k -gone. Combien d'incongrus k -gones convexes existe-t-il ?

Précisons d'abord que deux k -gones sont considérés congrus s'ils coïncident modulo une rotation ou une réflexion, c'est ce que nous appelons k -gones isométriques.

Pour tout entier positif donné $2 \leq k \leq n$, $R(n, k)$ dénote le nombre de tels k -gones. En 1979, Hansraj Gupta [45] a donné la solution du problème de Reis en utilisant la formule

1. Deux triangles sont considérés isométriques, s'ils coïncident modulo une rotation ou une réflexion.

d'inversion de Möbius.

Théorème 4.2.1. [45] On a :

$$R(n, k) = \frac{1}{2} \binom{\lfloor \frac{n-h_k}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} + \frac{1}{2k} \sum_{d/\gcd(n,k)} \varphi(d) \binom{\frac{n}{d} - 1}{\frac{k}{d} - 1},$$

où $h_k \equiv k \pmod{2}$ et $\varphi(n)$ la fonction d'Euler.

On peut trouver les premières valeurs de $R(n, k)$ dans, Online Encyclopedia de Integer Sequences (OEIS) [50].

$n \backslash k$	2	3	4	5
1	0	1	1	0
2	1	2	3	0
3	1	3	4	0
4	2	4	8	0
5	2	5	10	1
6	3	7	16	1
7	3	8	20	3
8	4	10	29	5
9	4	12	35	10
10	5	14	47	16
11	5	16	56	26
12	6	19	72	38
13	6	21	84	57

TABLE 4.1 – Quelques valeurs de $R(n, k)$.

La conséquence immédiate du théorème de Gupta et de Frame est, l'identité suivante :

$$\left\{ \frac{n^2}{12} \right\} = \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \frac{1}{6} \binom{n-1}{2} + \frac{\chi(3/n)}{3},$$

où $\chi(3/n) = 1$ si $n \equiv 0 \pmod{3}$, 0 sinon.

4.3 Position du Problème

Soient les figures suivantes.

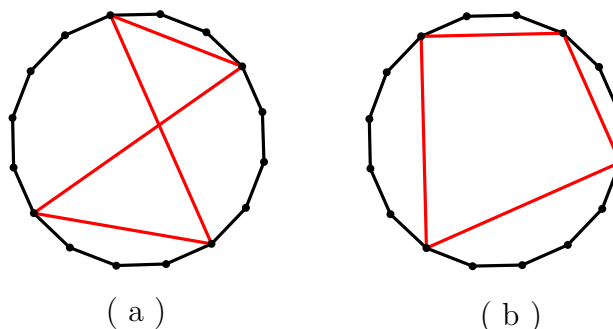


FIGURE 4.1 – Convexité des quadrilatères.

Le quadrilatère présenté par la figure (a) est un quadrilatère non convexe, tandis que celui présenté par la figure (b) est convexe.

Dans tout ce qui suit, notons G_n , le polygone régulier à n sommets.

Remarque 4.3.1. *Chaque quadrilatère convexe génère un seul quadrilatère non convexe en joignant ses sommets opposés deux à deux. C'est pour cette raison qu'on s'intéressera seulement aux quadrilatères convexes.*

Selon la nature de la suite du nombre de sommets générée par les arrêtes du quadrilatère, on distingue deux types de quadrilatères : ordonnés et non ordonnés.

Si les arrêtes du quadrilatère génèrent une suite ordonnée, en démarrant d'un sommet donné, et en suivant le sens trigonométrique ou de l'aiguilles d'une montre, on dit que le quadrilatère est ordonné, dans le cas contraire, il est dit non ordonné.

4.4 Quadrilatères ordonnés

Tout quadrilatère ordonné génère une partition de l'entier n en quatre parts. En effet, chaque quadrilatère convexe ordonné $ABCD$ inscrit dans G_n peut être vu comme un

quadruplet d'entiers (x, y, z, t) , abrégé, $xyzt$, tel que :

$$\begin{cases} n - 4 = x + y + z + t; \\ 0 \leq x \leq y \leq z \leq t, \end{cases} \quad (4.1)$$

où x , y , z et t représentent le nombre de sommets délimités par les arrêtes AB , BC , CD et DA , respectivement (voir la figure suivante.)

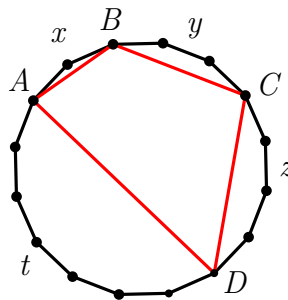


FIGURE 4.2 – Quadrilatère ordonné et partition d'un entier.

Lemme 4.4.1. [10] Pour $n \geq 4$, on a :

$$R_O(n, 4) = p(n, 4).$$

Preuve :

En posons $x' = x + 1$, $y' = y + 1$, $z' = z + 1$ et $t' = t + 1$, dans le système 4.1, on obtient la suite x', y', z', t' qui constitue les parts de la partition de n .

Remarque 4.4.1. La non isométries des quadrilatères ordonnés est traduite comme suit : deux quadrilatères sont non isométriques, si et seulement si, ils génèrent deux partitions différentes.

La figure ci-dessous montre ce qu'on vient d'affirmer.

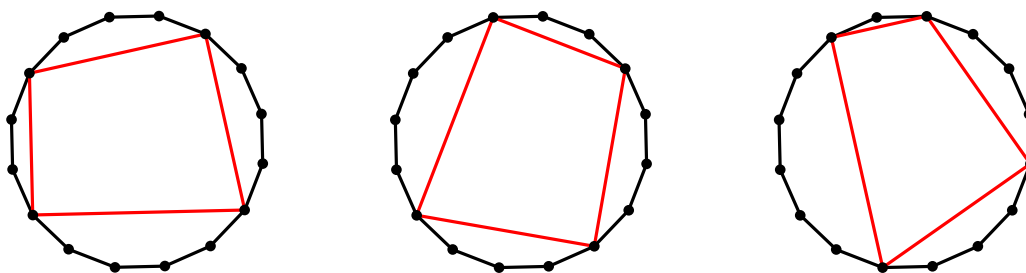


FIGURE 4.3 – Quadrilatères ordonnés.

Le premier et le deuxième quadrilatère génèrent la partition $4 + 3 + 3 + 2$, ils sont donc isométriques, par contre le troisième génère une partition différente, il s'agit de la partition $5 + 3 + 3 + 1$, il leur est non isométriques.

4.5 Quadrilatères non ordonnés

Toute partition de l'entier n en 4 parts génère un seul quadrilatère ordonné et chaque partition de l'entier n en 4 parts avec au moins 2 parts différentes, génère au moins un quadrilatère non ordonné.

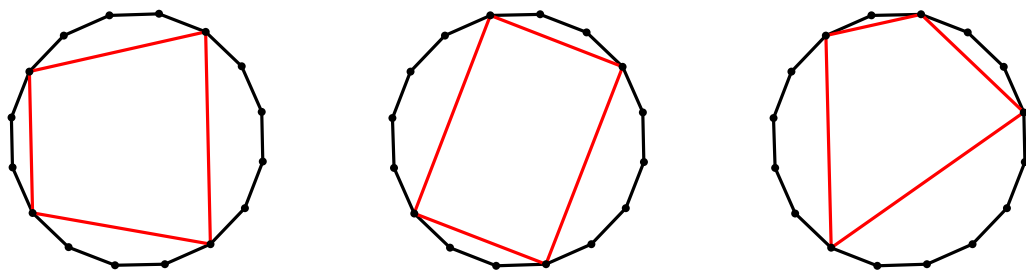


FIGURE 4.4 – Quadrilatères non ordonnés.

Il est clair que les trois quadrilatères présentés ci-dessus sont non ordonnés et non isométriques.

Notons $R_O(n, 4)$, le nombre de quadrilatères ordonnés et $R_{\overline{O}}(n, 4)$, le nombre de quadrilatères non ordonnés.

4.6 Principaux résultats

Dans cette section, nous présentons une formule qui compte, le nombre de du quadri-latères ordonnés à travers le théorème suivant :

Théorème 4.6.1. [10] *On a :*

$$R_O(n, 4) = \left\{ \frac{n^3}{144} + \frac{n^2}{48} - \frac{n\delta(n)}{16} \right\},$$

où $\delta(n) = n \pmod{2}$.

Preuve :

La fonction génératrice de $p(n, 4)$ est définie par :

$$g(z) = \frac{z^4}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)}.$$

Par décomposition en fractions partielles, on obtient :

$$g(z) = \frac{1}{32(1+z)^2} - \frac{13}{288(1-z)^2} - \frac{1}{24(1-z)^3} + \frac{1}{24(1-z)^4} + \frac{1-z^2}{8(1-z^4)} - \frac{1-z}{9(1-z^3)}.$$

Ce qui engendre

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{(-1)^n (n+1)}{32} - \frac{13(n+1)}{288} - \frac{(n+1)(n+2)}{48} + \frac{(1 + \frac{11}{6}n + n^2 + \frac{1}{6}n^3)}{24} + \epsilon(n) \right) z^n,$$

où $\epsilon(n) \in \left\{ -\frac{17}{72}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{72}, 0, \frac{1}{72}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{17}{72} \right\}$.

Ainsi, nous avons

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{n^3}{144} + \frac{n^2}{48} + \frac{((-1)^n - 1)n}{32} + \beta(n) \right) z^n,$$

avec $\beta(n) \in \left\{ -\frac{5}{16}, -\frac{1}{4}, -\frac{29}{144}, -\frac{3}{16}, -\frac{5}{36}, -\frac{1}{8}, -\frac{13}{144}, -\frac{11}{144}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{36}, -\frac{1}{72}, 0, \frac{5}{144}, \frac{7}{144}, \frac{1}{9}, \frac{23}{144}, \frac{2}{9}, \frac{7}{72} \right\}$.

Puisque $p(n, 4)$ est un entier et $|\beta(n)| < 1/2$, on a :

$$p(n, 4) = \left\{ \frac{n^3}{144} + \frac{n^2}{48} + \frac{((-1)^n - 1)n}{32} \right\}. \quad (4.2)$$

Le résultat s'en découle via le lemme (4.4.1).

Remarque 4.6.1. *G.E. Andrews et K. Eriksson ont dit que la méthode utilisée dans la preuve du théorème ci-dessus remonte à Cayley et MacMahon [4, p. 58]. En utilisant la même méthode [4, p. 60], ils ont prouvé la formule suivante pour $P(n, 4)$:*

$$P(n, 4) = \left\{ \frac{(n+1)(n^2 + 23n + 85)}{144} - \frac{(n+4) \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}{8} \right\}.$$

Car $p(n, k) = P(n-k, k)$ (voir à titre d'exemple [23]), alors :

$$p(n, 4) = \left\{ \frac{n^3}{144} + \frac{n^2}{12} - \frac{n}{8} - \frac{n \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}{8} \right\}. \quad (4.3)$$

Notons que la formule (4.2) semble être assez simple par rapport à (4.3).

Afin de donner une formule explicite de $R_{\overline{0}}(n, 4)$, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.6.1. [10] *On a :*

$$c_2(n, 4) = p(n, 4) - q(n, 4) - \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor.$$

Preuve :

De la définition $c_m(n, k)$ (voir page 16), il en résulte que

$$c_2(n, 4) = p(n, 4) - (q(n, 4) + c_3(n, 4) + \chi(4/n)),$$

où

$$\chi(4/n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En outre, $c_3(n, 4)$ peut être considéré comme le nombre de solutions entières de l'équation $3x + y = n$, avec $1 \leq y \neq x \leq 1$.

Lorsque 4 divise n , la solution $x = y = n/4$ est rejetée.

En prenant $y = 1$, $c_3(n, 4) = \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor - \chi(4|n)$.

Théorème 4.6.2. [10] *Pour $n \geq 4$, on a :*

$$R_{\overline{O}}(n, 4) = \left\{ \frac{n^3}{144} + \frac{n^2}{48} - \frac{n\delta(n)}{16} \right\} + \left\{ \frac{(n-6)^3}{144} + \frac{(n-6)^2}{48} - \frac{(n-6)\delta(n)}{16} \right\} - \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor.$$

Preuve :

Notons que $q(n, k) = p(n - k(k-1)/2, k)$ [4]. Donc de (4.2), on a :

$$q(n, 4) = p(n - 6, 4) = \left\{ \frac{(n-6)^3}{144} + \frac{(n-6)^2}{48} - \frac{(n-6)\delta(n)}{16} \right\}.$$

Par conséquent, il suffit de prouver que

$$R_{\overline{O}}(n, 4) = p(n, 4) + q(n, 4) - \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor. \quad (4.4)$$

En fait, chaque quadrilatère convexe non ordonné peut être obtenu en permutant exactement deux parts d'une partition de n en quatre parts. Évidemment, les partitions de n , ayant trois parts égales ou quatre parts égales ne peuvent pas générer de quadrilatères convexes non ordonnés.

Chaque partition de n en quatre parts distinctes $xyzt$ génère deux quadrilatères convexes non ordonnés, chacun correspond à l'une des deux permutations suivantes $xytz$ et $xzyt$.

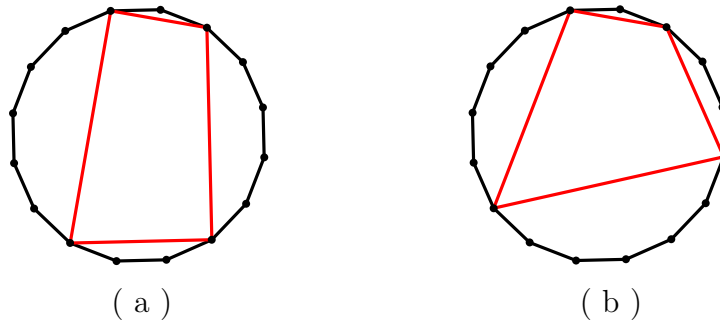


FIGURE 4.5 – Quadrilatères non ordonnés générés par la partition $5 + 4 + 2 + 1$.

D'autre part, chaque partition de n en deux parts égales, xyz , génère un seul quadrilatère convexe non ordonné, correspondant à la permutation unique $xyxz$.

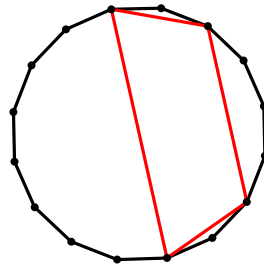


FIGURE 4.6 – Un quadrilatère non ordonné généré par la partition $7 + 3 + 1 + 1$.

On a alors :

$$R_{\overline{O}}(n, 4) = 2q(n, 4) + c_2(n, 4), \quad (4.5)$$

Par conséquent, via le lemme 4.6.1, le résultat est obtenu.

Remarque 4.6.2. *En posant $k = 4$ dans le théorème 4.2.1, on a :*

$$R(n, 4) = \frac{1}{2} \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} + \frac{1}{8} \binom{n-1}{3} + \frac{n(1-\delta(n))}{16} + \alpha,$$

où

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ -\frac{1}{8} & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sachant de plus

$$R(n, 4) = R_O(n, 4) + R_{\overline{O}}(n, 4),$$

l'identité suivante a lieu selon le théorème 4.2.1 et le théorème 4.6.2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} + \frac{1}{8} \binom{n-1}{3} + \frac{n(1-\delta(n))}{16} + \alpha &= 2 \left\{ \frac{n^3}{144} + \frac{n^2}{48} - \frac{n\delta(n)}{16} \right\} + \\ &+ \left\{ \frac{(n-6)^3}{144} + \frac{(n-6)^2}{48} - \frac{(n-6)\delta(n)}{16} \right\} - \\ &- \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Proposition 4.6.1. [10] Pour $n \geq 4$,

$$R(n, 4) = \left\{ \frac{(n-6)^3}{144} + \frac{(n-6)^2}{48} - \frac{(n-6)\delta(n)}{16} \right\} + 2 \left\{ \frac{n^3}{144} + \frac{n^2}{48} - \frac{n\delta(n)}{16} \right\} - \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor.$$

Notons $Q(n, 4)$, le nombre de quadrilatères non isométriques.

Proposition 4.6.2. Pour $n \geq 4$, on a :

$$Q(n, 4) = 2 \left(\left\{ \frac{(n-6)^3}{144} + \frac{(n-6)^2}{48} - \frac{(n-6)\delta(n)}{16} \right\} + 2 \left\{ \frac{n^3}{144} + \frac{n^2}{48} - \frac{n\delta(n)}{16} \right\} - \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right).$$

En effet, chaque quadrilatère convexe inscrit dans un n -gone régulier génère un quadrilatère non convexe et vis-versa.

4.7 Quadrilatères impropres

Lorsqu'un quadrilatère utilise les arêtes de G_n , il est dit impropre sinon, il est dit propre.

Dans cette présente section nous allons nous intéresser à énumérer deux types de quadrilatères : quadrilatères impropres ordonnés et quadrilatères impropres non ordonnés.

La figure suivante illustre ces deux types de quadrilatères.

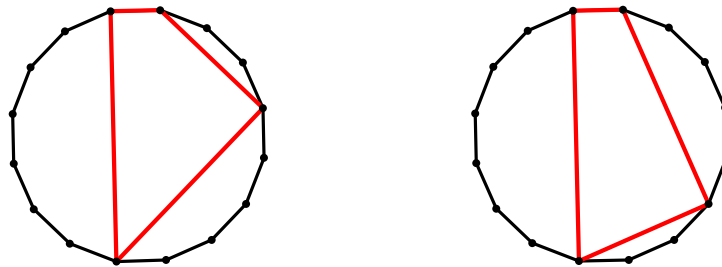


FIGURE 4.7 – Quadrilatères impropres.

Le premier quadrilatère est impropre ordonné, tandis que le deuxième est impropre non ordonné.

Notons $R_O^P(n, 4)$, le nombre de quadrilatères ordonnés propres et $R_O^{\bar{P}}(n, 4)$, le nombre de quadrilatères ordonnés impropres.

$R_O^P(n, 4)$, $R_O^{\bar{P}}(n, 4)$ désignent, le nombre de quadrilatères propres non ordonnés, le nombre de quadrilatères impropres non ordonnés, respectivement.

Proposition 4.7.1. [10] *Pour $n \geq 7$, on a :*

$$R_O^{\bar{P}}(n, 4) = 1 + \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor + \left\{ \frac{(n-4)^2}{12} \right\}.$$

Preuve :

Pour $n = 4$, un seul quadrilatère impropre ordonné peut être obtenue avec les quatre arêtes du polygone.

Un seul quadrilatère impropre ordonné utilisant trois arêtes du polygone peut être

formé pour $n \geq 5$.

Le nombre de quadrilatères impropres ordonnés utilisant deux arêtes du polygone sont au nombre de $p(n - 4, 2)$ pour $n \geq 6$.

Le nombre de quadrilatères impropres ordonnés utilisant une arête du polygone sont au nombre de $p(n - 4, 3)$ pour $n \geq 7$.

Comme $p(n - 4, 2) = \lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor$ et $p(n - 4, 3)$ représente le nombre de triangles inscrits dans G_{n-1} , le résultat est établi.

Exemple 4.7.1. Les 10 quadrilatères impropres ordonnés de l'entier 12 sont donnés par la figure suivante :

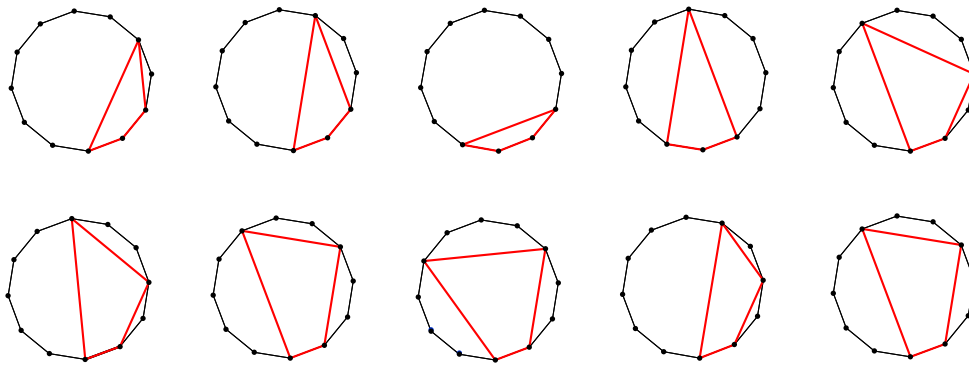


FIGURE 4.8 – Les quadrilatères impropres ordonnés de l'entier 12.

L'objectif de cette section est de compter le nombre de quadrilatères impropres non ordonnés.

Théorème 4.7.1. On a :

$$\overline{R}_O^P(n, 4) = p(n - 4, 2) + 2q(n - 4, 3) + \left\lfloor \frac{n - 5}{2} \right\rfloor - \chi(3|n - 4).$$

Preuve :

Un quadrilatère utilisant trois arêtes du polygone ne peut pas être impropre non ordonné.

Un quadrilatère impropre utilisant deux arêtes du polygone sera non ordonné, si et

seulement si, ces deux arrêtes ne sont pas consécutives. Dans ce cas, le nombre de quadrilatères impropres non ordonnés est égale à $p(n - 4, 2)$.

Si une seule arrête du quadrilatère est utilisée, on peut avoir deux quadrilatères impropres non ordonnés, si le nombre de sommets délimités par les arrêtes restantes sont différents deux à deux, sinon un seul quadrilatère impropre non ordonné est obtenu.

Proposition 4.7.2. *On a :*

$$R_{\overline{O}}(n, 4) = \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor + 2 \left\{ \frac{13}{24} - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{12} \right\} + \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor - \chi(3|n-4).$$

Preuve :

La preuve découle de ces deux identités :

$$q(n-4, 3) = \left\{ \frac{13}{24} - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{12} \right\},$$

et

$$p(n-4, 2) = \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor.$$

Exemple 4.7.2. *Les 11 quadrilatères impropres non ordonnés de l'entier 12 sont donnés par la figure suivante :*

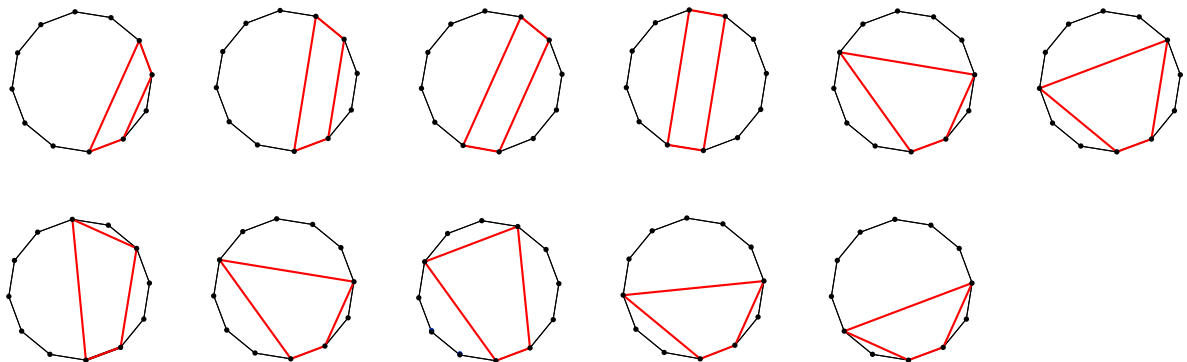


FIGURE 4.9 – Les quadrilatères impropres non ordonnés de l'entier 12.

4.8 Relation entre $\Delta(n)$ et $R_O(n, 4)$

Cette section a pour objectif de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.8.1. [10] Pour $n \geq 4$, on a :

$$\Delta(n) = R_O(n+1, 4) - R_O(n-3, 4).$$

Preuve :

On a :

$$R_O^{\bar{P}}(n, 4) = \Delta(n-1).$$

Aussi :

$$R_O^P(n, 4) = p(n-4, 4).$$

Du lemme 4.4.1, on obtient

$$R_O^P(n, 4) = R_O(n-4, 4).$$

Puisque

$$R_O(n, 4) = R_O^P(n, 4) + R_O^{\bar{P}}(n, 4).$$

Il vient

$$R_O(n, 4) = R_O(n-4, 4) + \Delta(n-1).$$

Donc, le théorème est complètement prouvé en remplaçant n par $n+1$.

Remarque 4.8.1. De la relation de récurrence bien connue [23, p. 373],

$$p(n, k) = p(n+1, k+1) - p(n-k, k+1),$$

pour $k \leq n$, nous avons la généralisation suivante, en utilisant les mêmes arguments pour prouver le théorème 4.8.1.

Théorème 4.8.2. Pour $n \geq k$,

$$R_O(n, k) = R_O(n+1, k+1) - R_O(n-k, k+1).$$

La formule du théorème 4.8.2 peut être considérée comme une interprétation combinatoire de la formule de récurrence (4.8.1).

Les Δ -systèmes et les partitions d'un entier

Introduction

Parmi les nombreuses conjectures d'Erdős et ses collaborateurs, dans divers domaines de la combinatoire, la conjecture d'Erdős-Lovász, relative au Δ -systèmes, reste une des plus intéressantes conjectures à nos jours. Cette dernière, est résolue par Michel Deza, en utilisant la théorie des codes, connue dans la littérature par ses différentes applications, en recherche opérationnelle ou encore en algèbre.

Nous précisons, que c'est cette dite conjecture qui a motivé nos recherches sur les Δ -systèmes dans le domaine des partitions d'un entier que nous définissons plus loin. Quelques nouveaux résultats seront présentés à ce sujet.

5.1 Définitions et notations

Définition 5.1.1. Une famille d'ensembles $A = \{A_1, \dots, A_m\}$ est dite un Δ -système au sens faible, si

$$|A_i \cap A_j| = c, \quad 1 \leq i < j \leq m.$$

Cette famille est un Δ -système au sens fort, si

$$A_i \cap A_j = \bigcap_{1 \leq k \leq m} A_k, \quad 1 \leq i < j \leq m.$$

En d'autres termes, l'intersection de deux ensembles quelconques de la famille A , engendre le même ensemble.

Observation 5.1.1. Un Δ -système au sens fort est un Δ -système au sens faible.

Exemple 5.1.1. La famille $A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ est un Δ -système au sens faible mais elle n'est pas un Δ -système au sens fort.

Au séminaire de C. Berge, du 8 janvier 1973, Erdős a posé la conjecture suivante :

Conjecture 5.1.1. [24] Soit $A = \{A_1, \dots, A_m\}$ un Δ -système au sens faible et soit $n = \max |A_i|$. Alors, Si $m \geq n^2 - n + 2$, A est aussi un Δ -système au sens fort.

5.2 Sur la théorie des codes équidistants

Nous présentons dans cette partie, l'outil principal, utilisé dans la résolution de la conjecture Erdős-Lovász, les codes équidistants. Soient :

$X = [x_{ij}]$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, une matrice binaire à m lignes et n colonnes ($m \geq 2$),

$r_{pq} = \sum_{j=1}^n |x_{pj} - x_{qj}|$, la distance de Hamming des lignes p et q de X ,

$t_s = \min(\sum_{i=1}^m x_{is}, m - \sum_{i=1}^m x_{is})$, le poids généralisé de la s -ième colonne.

Définition 5.2.1. On dit qu'une matrice binaire à m lignes et n colonnes est un $(m, 2k)$ -code si la distance de Hamming de chaque paire de lignes est égale à $2k$.

Définition 5.2.2. Un $(m, 2k)$ -code est trivial, si pour chaque ligne $i \in [1, m]$, il existe exactement k colonnes s_l , $(x_{1s_l}, \dots, x_{ms_l})^t$, $1 \leq s_l \leq n$, telles que :

$$x_{1s_l} = \dots = x_{(i-1)s_l} = 1 - x_{is_l} = \dots = x_{ms_l}.$$

La longueur minimale d'un $(m, 2k)$ -code, $N(m, k)$ est la plus petite valeur de n pour laquelle un $(m, 2k)$ -code existe.

5.3 Quelques propriétés

Un $(m, 2k)$ -code trivial existe toujours.

A chaque ligne correspond k colonnes, aucune n'est commune aux k colonnes des autres lignes.

La longueur minimale d'un $(m, 2k)$ -code trivial est égale à mk .

Un $(m, 2k)$ -code trivial possédant une ligne $(0, \dots, 0)$ est tel que, chaque ligne différente de la ligne $(0, \dots, 0)$ contient $2k$ unités, deux lignes quelconques différentes de la ligne $(0, \dots, 0)$ contiennent k unités communes.

5.4 Principaux résultats

Il y'a lieu de souligner que les résultats que nous énonçons ici, sont des résultats de l'article [23], utilisés pour la résolution de la conjecture.

Lemme 5.4.1. *Tout $(m, 2k)$ -code, avec $m \notin [4, k^2 + k + 2]$ est tel que $t_s \leq 1$ pour $1 \leq s \leq n$.*

Lemme 5.4.2. *Un $(m, 2k)$ -code est trivial, si et seulement si, $t_s \leq 1$, pour $1 \leq s \leq n$.*

Corollaire 5.4.1. *Tout $(m, 2k)$ -code, tel que $m \notin [4, k^2 + k + 2]$ est un $(m, 2k)$ -code trivial.*

Corollaire 5.4.2. *Tout $(m, 2k)$ -code, tel que $m > k^2 + k + 2$ est un $(m, 2k)$ -code trivial.*

Lemme 5.4.3. *S'il existe un $(m, 2k)$ -code non trivial, alors $m \geq 4$ et pour tout $m' \in [4, m]$, il existe un $(m', 2k)$ -code non trivial.*

Preuve :

Comme le $(m, 2k)$ -code est supposé non trivial, il existe d'après le lemme 5.4.2 une colonne s telle que $t_s \geq 2$. Cette colonne contient au moins 2 zéros et 2 unités. En effet,

$$t_s \geq 2 \Rightarrow \sum_{i=1}^m x_{is} \geq 2 \Rightarrow \exists 2 \text{ unités.}$$

$$t_s \geq 2 \Rightarrow m - \sum_{i=1}^m x_{is} \geq 2 \Rightarrow m \geq \sum_{i=1}^m x_{is} + 2 \Rightarrow \exists 2 \text{ zéros.}$$

D'où $m \geq 4$.

Si $m = 4$ ou $m' = m$, il n'y a rien à démontrer.

Sinon, en supprimant $(m - m')$ lignes du $(m, 2k)$ -code, parmi $(m - 4)$ lignes choisies de manière à garder les quatre lignes du $(m, 2k)$ -code, pour lesquelles la colonne s contient deux zéros, et deux unités. De cette façon, on obtient un $(m', 2k)$ -code non trivial, car $t_s \geq 2$.

Théorème 5.4.1. *Pour tout entier k , $1 \leq k < m$, il existe un entier $f(k)$, $4 \leq f(k) \leq k^2 + k + 2$, tel que pour $m \geq f(k)$, tout $(m, 2k)$ -code est trivial.*

Preuve :

D'après le lemme 5.4.1 et le lemme 5.4.2, pour $m \notin [4, k^2 + k + 2]$, il n'existe pas de $(m, 2k)$ -code non trivial.

Si un $(m, 2k)$ -code non trivial existe, on doit le chercher dans l'intervalle $[4, k^2 + k + 2]$.

Du lemme 5.4.3, si un $(m, 2k)$ -code non trivial existe, $(m', 2k)$ -code existe pour tout $m' < m$.

Appelons $f(k)$ le plus grand m pour que le $(m, 2k)$ -code existe, $4 \leq f(k) \leq k^2 + k + 2$.

Du lemme 5.4.3, si $m' < f(k)$, le $(m', 2k)$ -code est non trivial.

Comme $f(k)$ est le grand élément, $m > f(k)$, tous les $(m, 2k)$ -codes sont triviaux.

5.5 La démonstration de la conjecture d'Erdős-Lovász

Théorème 5.5.1. Soit $A = \{A_1, \dots, A_m\}$ un Δ -système au sens faible et soit $n = \max |A_i|$. Alors,

Si $m \geq n^2 - n + 2$, A est aussi un Δ -système au sens fort.

Posons $t = |A_i \cap A_j|$, ($1 \leq i < j \leq m$), $k = \max(t, n - t)$.

$T(A)$ une matrice binaire construite de la manière suivante :

Aux ensembles A_i correspond des lignes.

Adjoignons $k - t$ fois une colonne $(1, \dots, 1)$,

Adjoignons $k - (n - t)$ matrices d'identité d'ordre m et $n - |A_i|$ colonnes, avec 1 uniquement à la i ème position.

Enfin, adjoignons une ligne $(0, \dots, 0)$.

$T(A)$ est un $(m + 1, 2k)$ -code.

La construction de $T(A)$ est illustrée par la figure suivante :

$$T(A) = \begin{pmatrix}
 & \cup A_i & n-|A_1| & n-|A_2| & \dots & n-|A_m| & k-(n-t) \text{ Identité} \\
 A_1 & 10 \dots 0 & 11 \dots 1 & 00 \dots 0 & \dots & 00 \dots 0 & 10 \dots 00 \\
 A_2 & 11 \dots 0 & 00 \dots 0 & 11 \dots 1 & \dots & 00 \dots 0 & 01 \dots 00 \\
 A_3 & 10 \dots 0 & 00 \dots 0 & 00 \dots 0 & \dots & 00 \dots 0 & 001 \dots 0 \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 A_m & \dots & \dots & \dots & \dots & 11 \dots 1 & 00 \dots 01 \\
 A_{m-1} & 00 \dots 0 & 00 \dots 0 & 00 \dots 0 & 00 \dots 0 & 00 \dots 0 & 00 \dots 00
 \end{pmatrix}$$

FIGURE 5.1 – $(m + 1, 2k)$ code.

Par construction, le nombre de lignes est $m + 1$.

Chaque ligne contient $2k$ unités.

Si A_i est une ligne, soit l , son nombre d'unités. $l = |A_i| + (n - |A_i|) + (k - (n - t)) = 2k$, si $k = t$.

Par construction, si A_i et A_j sont deux lignes quelconques de $T(A)$, elles se coïncident exactement en k positions.

Proposition 5.5.1. *$T(A)$ est un $(m + 1, 2k)$ -code trivial, si et seulement si, A est un Δ -système au sens fort.*

Conséquence : Montrer que A est un Δ -système au sens fort pour $m \geq n^2 + n - 2$ revient à montrer que $T(A)$ est un $(m, 2k)$ -code trivial pour $m \geq n^2 + n - 2$.

Proposition 5.5.2. *Si $m \geq n^2 - n + 2$, $T(A)$ est un $(m + 1, 2k)$ -code trivial.*

Preuve :

On a : $k = \max(t, n - t)$, du coup, $k \leq n - 1$.

Du théorème précédent, pour $k = \max(t, n - t)$, il existe $f(k)$, $4 \leq f(k) \leq k^2 + k + 2$, $m > f(k)$, tout $(m, 2k)$ -code est trivial.

Comme $k^2 + k + 2$ est une fonction croissante et $k \leq n - 1$, alors $f(k) \leq f(n - 1) = n^2 + n - 2$.

Puisque $m + 1 > m \geq n^2 + n - 2$, $m + 1 \geq f(k)$.

$T(A)$ est un $(m + 1, 2k)$ -code trivial et donc A est Δ -système au sens fort.

5.6 Les partitions d'un entier, les Δ -systèmes faibles et les Δ -systèmes forts

Notons $\mathbb{Q}(n)$, la famille des sous ensembles de $[n] = \{1, \dots, n\}$ formée par les parts des partitions en parts distinctes de l'entier n .

Exemple 5.6.1. Pour $n = 10$, on a :

$$\mathbb{Q}(n) = \{\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{1, 2, 7\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

Un Δ -système au sens faible issu de cette famille est :

$$\mathbb{A} = \{\{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 2, 7\}\}.$$

Parmi les Δ -systèmes au sens fort issu de cette famille :

$$\mathbb{A} = \{\{2, 8\}, \{1, 2, 7\}, \{2, 3, 5\}\},$$

$$\mathbb{B} = \{\{3, 7\}, \{1, 3, 6\}, \{2, 3, 5\}\}.$$

Exemple 5.6.2. Pour $n = 13$, on a :

$$\mathbb{Q}(n) = \{\{1, 12\}, \{2, 11\}, \{3, 10\}, \{4, 9\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}, \{1, 2, 10\}, \{1, 3, 9\}, \{1, 4, 8\}, \{1, 5, 7\}, \{2, 3, 8\}, \{2, 4, 7\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 7\}, \{1, 2, 4, 6\}, \{1, 3, 2, 7\}, \{1, 3, 4, 5\}\}.$$

Un Δ -système au sens faible issu de cette famille est :

$$\mathbb{A} = \{\{1, 2, 10\}, \{1, 3, 9\}, \{2, 3, 8\}\}.$$

Parmi les Δ -systèmes au sens fort issu de cette famille :

$$\mathbb{A} = \{\{2, 11\}, \{1, 2, 10\}, \{2, 3, 8\}, \{2, 4, 7\}\}.$$

$$\mathbb{C} = \{\{3, 10\}, \{1, 3, 9\}, \{2, 3, 8\}\}.$$

Proposition 5.6.1. Soit $A \subset \mathbb{Q}(n)$, un Δ -système fort, non trivial, de taille maximum,

alors :

$$|A| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1.$$

Preuve :

Pour augmenter la taille de A , on doit l'étendre pour contenir le maximum de partitions en parts distinctes en conservant la propriété d'un Δ -système fort. Ceci peut être réalisé en prenant la partition $\{n-1, 1\}$ avec toutes les partitions de n en trois parts du type $\{a, b, 1\}$ où a et b sont deux parts distinctes de $n-1$ dont le nombre est $\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$.

Comme la partition $\{1, n-2\}$ est exclue, on obtient :

$$A = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - 1 + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1.$$

Il faut noter enfin que cette famille est maximale.

En effet, si on rajoute une partition avec au moins 4 parts distinctes contenant 1, alors cette partition va rencontrer une des partitions à 3 parts en au moins un élément différent de 1.

Exemple 5.6.3. Un Δ -système fort, non trivial, de taille maximum pour $n = 10$,

$$\mathbb{C} = \{\{1, 9\}, \{1, 2, 7\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}\}.$$

$$|\mathbb{A}| = \lfloor 10/2 \rfloor - 1 = 4.$$

Exemple 5.6.4. Pour $n = 13$,

$$\mathbb{B} = \{\{1, 12\}, \{1, 2, 10\}, \{1, 3, 9\}, \{1, 4, 8\}, \{1, 5, 7\}\},$$

est un Δ système fort, non trivial, de taille maximum égale à $\lfloor 13/2 \rfloor - 1 = 5$.

Conclusion générale

Les partitions d'un entier est un sujet très étudié en combinatoire. Parmi ses différentes applications, la théorie de représentation de groupes symétriques.

Le problème de calcul de $p(n)$ a fasciné plusieurs chercheurs. Plus de quatre siècles après leurs introduction par Euler, aucune formule simple n'est connue à ce jour.

Notre motivation principale étant de contribuer au développement de cette théorie, nous nous sommes intéressés dans notre recherche à l'étude de quelques problèmes combinatoires fortement liés à cette théorie.

Nous avons tenté d'énumérer les partitions d'un entier en parts formant, un m -uplet diophantien, nous avons aussi présenté une borne inférieure, une borne supérieure pour $m = 2$ et une formule comptant le nombre de partitions en parts formant un 2-uplet diophantien.

Une formule qui compte le nombre de quadrilatères non-ordonnés inscrits dans un n -gone régulier est donnée.

Quelques résultats, d'une étude en cours, sur les partitions d'un entier et les Δ -systèmes sont présentés.

Perspectives

- Calculer le nombre de partitions formant un m -uplet diophantien pour $m \in \{3, 4\}$.
- Calculer les bornes de $q_D(n, m)$ et améliorer les bornes existantes de $q_D(n, m)$.
- Résoudre notre conjecture relative à la primalité de $q_D(n, 2)$.
- Trouver une formule simple qui calcule le nombre de k -gones inscrits dans un n -gone régulier.
- Trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des Δ -systèmes faibles ou forts formés par des partitions d'un entier n en parts distinctes et les énumérer.
- Répondre à la question : Combien de Δ -systèmes forts peut-on former à partir de la famille $Q(n)$?

Bibliographie

- [1] M. Abramowitz, and I. A. Stegun, (Eds.). "Partitions into Distinct Parts." §24.2.2 in Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing. New York : Dover, pp. 825-826, 1972.
- [2] F. S. Abu Muriefah and A. Al- Rashed, On the extendibility of the Diophantine triple $\{1, 5, c\}$, Internat. J. Math. Math. Sci. 33 (2004),1737-1746.
- [3] C. Aebi and G. Cairns, wilson theorems for double, hyper, sub- and super-factorials, arXiv :1302.3676v1 [math.NT] 15 Feb 2013.
- [4] G. E. Andrews and K. Eriksson, 'Integer Partitions', Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, (2004).
- [5] N. Anning, J. S. Frame and F. C. Auluck, Problems for Solution : 3874-3899', The American Mathematical Monthly, Vol. 47, No. 9, (Nov., 1940), 664-666.
- [6] J. Arkin, V.E. Hoggatt and E.G. Straus, On Euler's solution of a problem of Diophantus, Fibonacci Quart. 17 (1979), 333-339.
- [7] A. Baker and H. Davenport, *The equations $3x^2 - 2 = y^2$ and $8x^2 - 7 = z^2$* , Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 20 (1969), 129-137.

- [8] F. Bencherif, N. Benyahia Tani, O.Kihel, S. Bouroubi, Z. Yahi, Integer partitions into Diophantine pairs in *Quaestiones Mathematicae* 40(4) :1-8 · April 2017 with 39.
- [9] N. Benyahia Tani, *Autour des partitions d'un entier. Thèse de doctorat. 2011.*
- [10] N. Benyahia Tani, Z. Yahi, S. Bouroubi, Ordered and non-ordered non-congruent convex quadrilaterals inscribed in a regular n -gon, in *Rostock. Math. Kolloq.* 68, 71 – 79 (2013)
- [11] [https ://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/ar/node23.html](https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/ar/node23.html).
- [12] N. C. Bonciocat, M. Cipu and M. Mignotte, On $D(-1)$ -quadruples, *Publ. Mat.* 56 (2012), 279–304.
- [13] S. Bouroubi, Integer partitions and convexity, *J. Integer Seq.* **10** (2007), Article 07.6.3.
- [14] S. Bouroubi and N. Benyahia Tani, A new identity for complete Bell polynomials based on a formula of Ramanujan, *J. Integer Seq.* **12** (2009), Article 09.3.5.
- [15] E. Brown, Sets in which $xy + k$ is always a square, *Math. Comp.* 45(1985), 613-620.
- [16] A. Charalambos Charalambides, 'Enumerative Combinatorics', Chapman & Hall /CRC, (2002).
- [17] M. Cipu, Further remarks on Diophantine quintuples, *Acta Arith.* 168 (2015), 201-219.
- [18] M. Cipu, T. Trudgian, Searching for Diophantine quintuples, *Acta Arith.* 173 (2016), 365-382.
- [19] L. Comtet, '*Advanced Combinatorics*', D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, Boston, 1974, 133–175.
- [20] H. Davenport, *The higher arithmetic : an introduction to the theory of numbers*, Hutchinson, London, 1952.
- [21] M. Deza, Réalisabilité des matrices de distance dans des cubes unités, *Problemy Kibernet*, (1962).

- [22] M. Deza, Codes maximum équadistants de grande longueur, Résumés des exposés de la 2^{ème} conférence soviétique sur la théorie du codage, Bakou (1966).
- [23] M. Deza, Une propriété extrémale des plans projectifs finis dans une classe de codes équadistants, *Discrete Math.* 6 (1973), 343-352.
- [24] M. Deza, Solution d'un problème de Erdős-Lovász, *Journal Of Combinatorial Theory (B)* 16, 166-167 (1974).
- [25] L. E. Dickson, *Introduction to the Theory of Numbers*, Dover Publications, Inc., New York, 1929.
- [26] A. Dujella, Generalization of a problem of Diophantus, *Acta Arith.* 65 (1993), 15-27.
- [27] A. Dujella, On Diophantine quintuples, *Acta Arith.* 81 (1997), 69-79.
- [28] A. Dujella and A. Pethoe, A generalization of a theorem of Baker and Davenport, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 49 (1998), 291-306.
- [29] A. Dujella, An extension of an old problem of Diophantus and Euler, *Fibonacci Quart.* 37 (1999), 312-314.
- [30] A. Dujella, There are only finitely many Diophantine quintuples, *J. Reine Angew. Math.* 566 (2004) 183-214.
- [31] A. Dujella, C. Fuchs, Complete solution of a problem of Diophantus and Euler, *J. London Math. Soc.* 71(2005), 33-52.
- [32] A. Dujella, C. Fuchs : Complete solution of a problem of Diophantus and L. Euler. *J. Lond. Math. Soc.* 71, 33-52 (2005) 10.
- [33] A. Dujella, A. Filipin, C. Fuchs, Effective solution of the $D(-1)$ -quadruple conjecture, *Acta Arith.* 128(2007), 319-338.
- [34] A. Dujella, On the number of Diophantine m -tuples, *Ramanujan J.* 15 (2008), 37-46.
- [35] A. Dujella, Diophantine m -tuples, <http://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/dtuples.html>.
- [36] C. Elsholtz, A. Filipin and Y. Fujita, On Diophantine quintuples and $D(-1)$ -quadruples, september 2013.

- [37] A. Filipin, Extensions of some parametric families of $D(16)$ -triples, *Internat. J. Math. Math. Sci.* 2007 (2007), Article ID 63739, 12 pages.
- [38] A. Filipin and Y. Fujita, The number of $D(-1)$ -quadruples, *Math. Commun.* 15 (2010), 387–391.
- [39] A. Filipin, Y. Fujita, The number of Diophantine quintuples II, *Publ. Math. Debrecen* 82 (2013), 293-308.
- [40] Y. Fujita, The extensibility of Diophantine pairs $k - 1, k + 1$, *J.Number Theory* 128 (2008), 322-353.
- [41] Y. Fujita, Any Diophantine quintuple contains a regular Diophantine quadruple. *J. Number Theory* 129, 1678–1697 (2009) 14.
- [42] Y. Fujita, The number of Diophantine quintuples. *Glas. Mat. Ser. III* 45, 15–29 (2010).
- [43] Y. Fujita, The number of $D(-1)$ -quadruples. *Math. Commun.* 15, 387–391 (2010) 12.
- [44] P. Gibbs, Some rational Diophantine sextuples, *Glas. Mat. Ser. III* 41 (2006), 195-203.
- [45] H. Gupta, Enumeration of incongruent cyclic k -gons. *Indian J. Pure Appl. Math.* 10 (1979), No. 8, 964–999.
- [46] H. Gupta and K. Singh, On k -triad sequences, *Internat. J. Math. Math. Sci.* 5 (1985), 799-804.
- [47] O. Kihel, On the extendibility of the P-1-set $\{1,2,5\}$, *Fibonacci Quart.* 38 (2000), 464-466.
- [48] S. P. Mohanty and A. M. S. Ramasamy, On Pr, k sequences, *Fibonacci Quart.* 23 (1985), 36-44.
- [49] J. R. Musselman, George Rutleddge, Norman Anning, Walter Leighhton, V. Thebault, Problems for solution : 3891-3895, *The American Mathematical Monthly*, Vol.45,No.9(Nov.,1938), 631-632.

- [50] OEIS : The online Encyclopedia of Integer sequences. Published electronically at <http://oeis.org>, 2008.
- [51] I. Pak, Partition bijections, a survey, *Ramanujan J.*, **12** (2006), 5–75.
- [52] Partition (number theory), [https://en.wikipedia.org/wiki/Partition_\(number_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Partition_(number_theory)).
- [53] Petit théorème de Fermat, [https://fr.wikipedia.org/wiki/petit théorème de Fermat](https://fr.wikipedia.org/wiki/petit_th%C3%A9or%C3%A8me_de_Fermat).
- [54] H. Rademacher, On the partition function $p(n)$, *Proc. London, Math. Soc.*, **43** (1937), 241–254.
- [55] R. Rashed, Ibn al-Haytham et le théorème de Wilson, *Arch. Hist. Exact Sci.* 22 (1980), no. 4, 305–321.
- [56] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Vol. 1, Wadsworth, 1986.
- [57] T. S. Trudgian, Bounds on the number of Diophantine quintuples, *J. Number Theory* 157 (2015), 233-249.
- [58] Wolfram math word, partition, <http://mathworld.wolfram.com/Partition.html>.

« Certes, il y'a des travaux pénibles ; mais la joie de la réussite
n'a-t-elle pas à compenser nos douleurs ? »

Jean de la bruyère
