N^{0} d'ordre : 25/2018-C/MT

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

Thèse

Présenté pour l'obtention du diplôme de Doctorat 3e cycle (LMD)

En MATHEMATIQUES

Spécialité : Etude Probabiliste et Statistiques de Modèles Econométriques et Financiers

Par

Billel ALIAT

Sujet

Sur les modèles de séries chronologiques à changement de régime Markovien

Soutenue publiquement, le 16/04/2018, devant le jury composé de :

M. Mohamed BENTARZI,	Professeur à l'USTHB,	Président
M. Fayçal HAMDI,	Professeur à l'USTHB,	Directeur de Thèse
M. Yacine BELARBI,	Directeur de recherche au CREAD,	Examinateur
M. Abdelouahab BIBI,	Professeur à l'ULBM, Oum El Bouaghi,	Examinateur
Mme. Hafida GUERBYENNE,	Professeur à l'USTHB,	Examinatrice
M. Khaled KHALDI,	Professeur à l'UMB Boumerdes,	Examinateur

Sur les modèles de séries chronologoques à changement de régime Markovien

Billel ALIAT
Département de Recherche Opérationnelle
Faculté de Mathématiques,
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene,
(USTHB)

01 Décembre 2017

Table des matières

على بركة الله

Remerciements

J'aimerai tout d'abord remercier mon directeur de thèse et mon enseignant depuis la graduation, le Professeur Fayçal Hamdi pour m'avoir proposé ce sujet qui s'émane de mon sujet de Master qu'il m'a proposé en 2012. Je lui suis reconnaissant de m'avoir fait bénéficier tout au long de ce travail de sa grande compétence, de sa rigueur intellectuelle, de son dynamisme, et de son efficacité certaine que je n'oublierai jamais. Soyez assuré de mon attachement et de ma profonde gratitude.

Je tiens à remercier vivement mon enseignant le Professeur Mohamed Bentarzi pour m'avoir honoré de son aimable acceptation à présider le jury de cette thèse. Je le remercie encore une fois pour toute l'énergie qu'il a fournie pour nous transmettre son savoir et ses connaissances durant les deux années de Master. Qu'il trouve ici ma profonde admiration.

J'exprime mes sincères remerciements aux Professeurs Abdelouahab Bibi, Hafida Guerbyenne et Khaled Khaldi ainsi qu'au directeur du centre de recherche CREAD monsieur Yacine Belarbi pour l'immense honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membres à mon jury de thèse. Je tiens à leurs présenter ma profonde reconnaissance pour l'intérêt qu'ils portent à ce travail et pour le temps qu'ils consacrent à la lecture de cette thèse.

Je renouvelle mes remerciements et ma gratitude à mon enseignante madame Hafida Guerbyenne. Je voudrais lui témoigner ma profonde reconnaissance pour tous ce qu'elle nous a appris au cours des années de Master, pour sa patience, ses encouragements et ses précieux conseils. Qu'elle trouve ici ma plus profonde estime.

Je remercie chaleureusement mes deux collègues Fares Ouzzani et Mohamed Sadoun pour leur immense aide, pour leurs suggestions et remarques judicieuses qu'ils m'ont indiqué.

Je n'oublie pas de remercier tous les collègues de notre équipe STEP, en particulier Abderraouf Khalfi et Nadia Bousaha, ainsi que tous les collègues de notre laboratoire RECITS.

Enfin, Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé de loin ou de près dans l'élaboration de ce travail.

Cette thèse est didiée

A *mon très cher père .*

A *ma très chère mère.*

A *mon épouse.*

A *mon frère.*

A *tous ceux qui me sont chers,...*

Résumé

Les modèles à changement de régimes, en particulier les modèles à changement de régimes Markovien (MS), sont considéré comme un moyen prometteur pour capturer les non-linéarités dans les séries chronologiques. Ils peuvent expliquer les changements soudains dans la structure de la moyenne ou la variance d'un processus et donner une interprétation directe de ces changements.

Combiner les modèles MS avec des modèles périodiques permet d'obtenir des modèles plus flexibles et aptes à capturer plusieurs caractéristiques empiriques des séries chronologiques, notamment, la périodicité des structures d'autocovariances et les changements structurels de régime. L'objectif de cette thèse est l'étude de quelques modèles périodiques de séries chronologiques à changement de régimes Markovien, à savoir, le modèle $ARMA$ périodique à changement de régimes Markovien ($MS-PARMA$), le modèle $GARCH$ périodique à changement de régimes Markovien ($MS-GARCH$) et le modèle espace d'état périodique à changement de régimes Markovien. Nous procédons à l'étude de quelques propriétés probabilistes et à l'élaboration de méthodes d'estimation pour ce genre de modèles.

Introduction

L'analyse des séries chronologiques constitue l'objet de nombreuses recherches, notamment, après la parution des fameux travaux de Box et Jenkins (1970) et le développement des modèles autorégressifs moyennes mobiles ($ARMA$). La littérature des séries temporelles a été submergée de travaux concernant ces modèles et leur évolution. En effet, en proposant une méthodologie intéressante et d'usage simple, Box et Jenkins ont popularisé la modélisation $ARMA$ classique. Cette méthodologie permet la construction du modèle adéquat en passant par le choix du modèle (identification du modèle), l'estimation de ses paramètres et sa validation, de façon à aider les praticiens.

Cependant, plusieurs chercheurs ont constaté que les marchés financiers réagissent nerveusement aux désordres et désaccords politiques, aux crises économiques, aux guerres et aux catastrophes naturelles. Par conséquent, les séries financières exhibent certaines régularités statistiques dites faits stylisés telles que, le regroupement de volatilité, l'excès de kurtosis, l'asymétrie, l'effet de levier, la périodicité dans la structure d'autocovariance, le changement de régime, la multimodalité de la distribution marginale, et bien d'autres. Ces faits stylisés illustrent la difficulté de la modélisation des séries financières. Les modèles linéaires classiques de type $ARMA$ qui supposent une variance des erreurs constante, ont vite montré leurs limites dans la modélisation des séries chronologiques macroéconomiques et financières. Ils ont montré également leur limite dans la modélisation des séries chronologiques présentant des dynamiques périodiques qui ne peuvent pas être prises en charge par ce genre de modèles (voir par exemple Tiao et Grupe, 1980 ; Bentarzi, 1995). De plus, l'importance croissante motivée par les considérations sur le risque et sur l'incertitude dans la théorie économique a nécessité le développement de nouvelles techniques pour les séries économiques et financières permettant à la variance et la covariance de dépendre du temps. A cet effet et depuis quelques décennies, les modèles non linéaires, tels que les modèles bilinéaires, les modèles à changement de régimes, les modèles conditionnellement hétéroscédastique (de type $ARCH$) et les modèles à volatilité stochastique, ont été introduits dans la littérature, afin de reproduire les caractéristiques empiriques des séries chronologiques économétriques (Engle, 1982 ; Bollerslev, 1986 ; Hamilton, 1989 ; Granger et Andersen, 1978 ; Tong, 1990 ; Nicholls et Quinn, 1982 ; Ding et *al.*, 1993).

Les modèles économétriques introduits dans la littérature, afin de prendre en compte les propriétés particulières des séries financières se présentent généralement sous la forme multiplicative $\epsilon_t = \sqrt{h_t}\eta_t$, où la variable aléatoire h_t est appelée volatilité. Le fait que les grandes valeurs des carrés des rendements soient généralement précédées par de grandes valeurs est difficilement compatible avec une variance conditionnelle constante. Ce phénomène est connu sous le nom d'hétéroscédasticité conditionnelle. Les modèles de type $GARCH$, par exemple, viennent apporter une réponse à quelques faits empiriques répertoriés ci-dessus, en autorisant une dépendance linéaire de la volatilité avec ses valeurs historiques, et en ajustant cette volatilité avec le carré des rendements observés. Cette aptitude permet donc de mettre en évidence plusieurs caractéristiques observées telles que le regroupement de volatilité et la lourdeur des queues. Mais d'autres traits tels que les changements récurrents de régime, la multimodalité et la périodicité de la structure d'autocovariance, restent non capturés par les modèles de type $GARCH$ à coefficients constants.

Il est de plus en plus évident que les modèles empiriques de nombreuses séries chronologiques économiques, en particulier les séries macroéconomiques et financières, sont caractérisées par l'instabilité des paramètres. Cela a déclenché une explosion d'intérêt pour les modèles à coefficients dépendants du temps. Deux classes remarquables de ces modèles ont été introduites à savoir les modèles à coefficients périodiques dans le temps et les modèles à changement de régimes.

Dans la modélisation des phénomènes stochastiques, exhibant une structure d'autocorrélation périodique, l'importance des modèles à coefficients périodiques n'est plus à démontrer. En effet, ces derniers ont été largement utilisés au cours de ces dernières décennies, pour décrire de nombreuses séries chronologiques à dynamique périodique, rencontrées dans différents domaines, tels que l'économie et la finance (Cleveland et Tiao, 1979 ; Osborn, 1992 ; Bollerslev et Ghysels, 1996 ; Franses, 1996 ; Franses et Paap, 2000 ; Franses et Paap, 2004 ; Guerbyenne et Hamdi, 2015), l'environnement (Salas et *al.*, 1983 ; Vecchia 1985*a*,*b* ; Jymenez et *al.*, 1989 ; Vecchia et Ballerini, 1991 ; Tesfaye et *al.*, 2006) et l'ingénierie (Bittanti et De Nicolao, 1993 ; Adams et Goodwin, 1995). Notons que dans cette catégorie de modèles, les paramètres sont des fonctions périodiques non aléatoires. Notons également que nous pouvons considérer ces modèles comme des modèles à changement de régime où les paramètres changent à travers le temps, selon les différentes périodes. Cependant, ce changement est connu à l'avance et avec certitude. Tandis que dans les modèles à changement de régimes Markovien, les paramètres changent à travers le temps entre un nombre fixe de régimes. Ces changements sont gouvernés par un processus d'état inobservable, qui est supposé être une chaîne de Markov. A chaque période de temps, il existe donc une certaine probabilité d'appartenir à un régime et une probabilité de transition d'un régime à un autre.

Les modèles à changement de régimes Markovien, Markov switching (MS) en anglais, ont attiré beaucoup d'attention depuis l'article fondateur d'Hamilton (1989). De nombreux travaux de prospection et d'analyse des modèles autorégressifs et moyennes mobiles à changement de régimes Markoviens (MS-$ARMA$) ont constitué jusqu'à présent le centre d'intérêt de plusieurs chercheurs dont Hamilton (1994), Kim (1994), Krolzig (1997), Francq et Zakoïan (2001, 2002), Zhang and Stine (2001), Psaradakis et Spagnolo (2003, 2006), Douc et *al.* (2004), Lee (2005), Chen et Tsay (2011), Yao (2001) Cavicchioli (2014a, c, 2016, 2017) et bien d'autres. Cai (1994) et Hamilton et Susmel (1994) ont introduit les modèles $ARCH$ à changement de régime Markovien (MS-$ARCH$) en combinant le modèle $ARCH$ avec le modèle à changement de régimes Markovien. Les modèles $GARCH$ à changement de régimes Markovien (MS-$GARCH$) ont été proposés par Gray (1996), en se basant sur l'hypothèse que la variance conditionnelle, sachant le régime en cours, dépend de l'espérance des variances conditionnelles antérieures, plutôt que de leurs valeurs. Klaasen (2002) a proposé de modifier ce modèle en manipulant le régime actuel et toutes les observations disponibles, tout en évaluant l'espérance des variances conditionnelles précédentes. Une formulation différente pour réduire la dépendance de la variance conditionnelle sur les régimes passés a été proposée par Haas et *al.* (2004a). Une condition de stationnarité des modèles MS-$GARCH$ a été donnée par Francq et *al.* (2001). Une analyse approfondie de la structure probabiliste du modèle MS-$GARCH$ est établie par Francq et Zakoïan (2005). D'autres travaux concernant les modèles MS-$GARCH$ ont été publiés. Citons par exemple, Dueker (1997), Marcucci (2005), Abramson et Cohen (2007), Francq et Zakoïan (2008), Augustyniak (2013), Augustyniak et *al.* (2017), Billio et *al.* (2016), Billio et Cavicchioli (2017) et bien d'autres.

Une autre classe de modèles à changement de régimes Markovien qui a suscité moins d'intérêt par rapport aux deux classes MS-$ARMA$ et MS-$GARCH$, est la classe des modèles espace d'états à changement de régimes Markovien, malgré son importance et sa flexibilité. Ce manque d'intérêt est dû à sa complexité d'analyse. Quelques travaux de recherche concernant cette classe ont été effectués. Harrison et Stevens (1976) ont proposé un modèle multirégimes où le changement de régime est gouverné par une chaîne de Markov, mais ils supposent que les paramètres du modèle ainsi que les probabilités de transition d'un régime à l'autre sont connues. Shumway et Stoffer (1991) ont considéré un modèle espace d'état dans lequel les matrices dans l'équation d'observation changent d'un régime à un autre selon un processus indépendant. Kim (1994) a considéré un modèle espace d'état à changement de régimes Markovien dans lequel tous les paramètres que ce soit dans l'équation d'observation ou dans l'équation d'état dépendent d'une chaîne de Markov. Il a proposé des algorithmes de filtrage et de lissage pour ce type de modèles ce qui permet d'estimer les paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance. Billio et Monfort (1998) ont présenté un modèle espace d'état à changement de régimes Markovien et ont proposé de combiner le filtre de Kalman partiel avec des techniques d'échantillonnage d'importance afin d'évaluer la fonction de vraisemblance. Frühwirth-Schnatter (2001a) a proposé plusieurs méthodes bayésiennes pour l'estimation des modèles espace d'état à changement de régimes. D'autres travaux concernant cette classe de modèle ont été élaborés, tels que Bar-Shalom et Li (1993), Kim et Nelson (1999), Ghahramani et Hinton (2000), Nagy et Suzdaleva (2013) entres autres.

La combinaison des modèles MS avec des modèles à coefficients périodiques permet d'obtenir des modèles plus flexibles et aptes à capturer plusieurs caractéristiques empiriques des séries chronologiques, notamment, la périodicité dans la structure d'autocorrélation et les changements structurels de régime. L'objectif de cette thèse est d'étudier quelques modèles de séries chronologiques périodiques et à changement de régimes Markovien, à savoir les modèles $ARMA$ périodiques et à changement de régimes Markovien (MS-$PARMA$), les modèles $GARCH$ périodiques et à changement de régimes Markovien (MS-$GARCH$) et enfin les modèles espace d'états périodiques et à changement de régimes Markovien. Dans ce travail, nous étudions leurs structures probabilistes et nous élaborons des méthodes d'estimation de leurs paramètres.

Apport et présentation de la thèse

La présente thèse intitulée "**Sur les modèles de séries chronologiques à changement de régime Markovien**" porte essentiellement sur l'étude de quelques modèles de séries chronologiques périodiques à changement de régimes Markovien et est constituée de quatre chapitres qui sont organisés de la manière suivante.

Chapitre 1 : Aperçu sur les modèles à changement de régimes Markovien

Ce chapitre, qui se compose de cinq sections, porte sur quelques travaux existants dans la littérature des modèles à changement de régimes Markovien. En effet, la première section est dédiée aux concepts fondamentaux des modèles à changement de régimes ; des notations et des hypothèses nécessaires y sont présentées ainsi que l'inférence sur ces modèles. La seconde section comporte des résultats concernant le modèle de régression à changement de régimes Markovien. La troisième section traite des premiers modèles introduits dans la littérature des séries chronologiques à changement de régimes Markovien, à savoir, les modèles autorégressifs à changement de régimes Markovien (MS-AR). L'importance de ces modèles y est expliquée, quelques propriétés probabilistes y sont données et quelques méthodes d'estimation de ces modèles y sont également exposées. Une généralisation importante dans le but de satisfaire le principe de parcimonie, à savoir les modèles $ARMA$ à changement de régimes Markovien ($MS-ARMA$) forme l'objet de la quatrième section. Des travaux concernant les propriétés probabilistes de ces modèles ainsi que leur estimation y sont brièvement exposés. La dernière section est consacrée aux modèles MS-$GARCH$ qui offrent l'opportunité de modéliser les variances évolutives dans le temps présentant des changements soudains dans leurs comportements. Nous présentons un aperçu sur les travaux qui ont été effectués par plusieurs chercheurs, à la fois pour l'étude des propriétés probabilistes des modèles MS-$GARCH$ et pour l'estimation de leurs paramètres.

Chapitre 2 : Modèles $PARMA$ à changement de régimes Markovien

L'importance des deux formulations MS et $PARMA$, nous a fourni la motivation pour combiner ces deux approches pour obtenir un nouveau modèle apte à capturer, non seulement, les changements de régimes, mais aussi la périodicité cachée dans la structure d'autocovariance ainsi que d'autres caractéristiques des séries économiques. Le nouveau modèle que nous proposons est un modèle $PARMA$ à changement de régimes Markovien (MS-$PARMA$) et nous le définissons comme un processus bivarié $\{(y_t, \Delta_t)\,; t \in \mathbb{Z}\}$ dans lequel le processus (Δ_t), qui gouverne le changement de régime, est une chaîne de Markov à espace d'états fini, homogène et ergodique, et (y_t) est un processus $PARMA$.

Dans ce chapitre, nous proposons en premier lieu la définition de notre modèle $MS-PARMA$. Nous étudions par la suite, quelques propriétés probabilistes, à savoir, la stationnarité périodique stricte, la stationnarité périodique au second ordre et l'existence des moments, en se basant sur l'écriture Markovienne de notre modèle. Nous donnons, sous la condition d'existence, l'expression explicite des moments d'ordres supérieurs. Nous étudions la structure d'autocovariance de notre modèle en utilisant deux méthodes différentes. Dans la première méthode, nous utilisons l'écriture Markovienne du modèle, tandis que la deuxième méthode est basée sur les équations de Yule-Walker périodiques. Cette dernière méthode permet de calculer les premières autocovariances de démarrage comme étant la solution d'un système linéaire. Par la suite, nous proposons une procédure pour l'estimation des paramètres du modèle $MS-PARMA$, via la méthode du quasi-maximum de vraisemblance, tout en adaptant la méthode de Chen et Tsay (2011) au cas périodique. Enfin, nous terminons ce chapitre par une étude de simulation qui permet de tester la performance de la méthode d'estimation proposée.

Chapitre 3 : Modèles $PGARCH$ à changement de régimes Markovien

En nous appuyant sur l'idée du Chapitre 2, nous avons donc combiné, dans ce chapitre, les modèles MS avec les modèles $GARCH$ périodiques ($PGARCH$), nous obtenons une nouvelle classe de modèles $GARCH$ périodiques à changement de régimes Markovien ($MS-PGARCH$). En d'autres termes, le modèle que nous étudions est un modèle $GARCH$ dont les paramètres sont des fonctions périodiques dans le temps, et dépendent d'une chaîne de Markov à espace d'états discret et fini. Cette classe de modèles que nous proposons, constitue une classe très flexible de modèles de séries chronologiques non linéaires de volatilité instantanée. Elle permet de capturer non seulement le regroupement de volatilité, l'excès de kurtosis, la multimodalité, le changement de régime mais aussi la périodicité cachée dans la structure d'autocorrélation des carrés des rendements.

Nous commençons ce chapitre par la définition d'un modèle $MS-PGARCH$. Ensuite, nous réécrivons le modèle sous forme d'une représentation Markovienne, qui permet d'étudier la structure probabiliste du modèle, telle que, la stationnarité périodique stricte, la stationnarité périodique au second-ordre ainsi que l'existence des moments. Vue la très grande importance des modèles $GARCH(1,1)$ dans la modélisation des séries économiques, nous présentons une analyse détaillée des propriétés du cas particulier $MS-PGARCH(1,1)$. Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des moments de ce modèle et nous établissons également des expressions simples et explicites des moments d'ordres pairs. Nous proposons un algorithme permettant de calculer les autocovariances de cette classe de modèles. D'autre part, en se basant sur l'écriture Markovienne du modèle général, nous établissons l'expression explicite des moments d'ordres pairs d'un processus MS-$PGARCH$. Enfin, nous élaborons un algorithme permettant de calculer les autocovariances.

Chapitre 4 **Modèles espaces d'états périodiques à changement de régimes Markovien**

Le chapitre présent, est dévoué à l'étude des modèles espace d'états périodiques à changement de régimes Markovien. Dans ce genre de modèles, les paramètres de l'équation d'état et l'équation d'observation sont périodiques dans le temps et dépendent d'une chaîne de Markov à espace d'état fini. Bien que les modèles espaces d'états qui incorporent des chaînes de Markov, afin de prendre en compte les changements de régimes, aient de nombreuses applications potentielles, leur estimation a posé de sérieux problèmes calculatoires. Cependant, face à ces difficultés, Kim (1994) a développé un algorithme pour faire des inférences sur l'état non observable et évaluer la fonction de vraisemblance afin d'estimer les paramètres inconnus du modèle. Récemment, Nagy et Suzdaleva (2013) ont proposé un autre algorithme pour l'estimation de la variable d'état. Notre but, dans ce chapitre, est d'établir un filtre adapté aux modèles espace d'états périodiques à changement de régimes Markovien, en s'appuyant sur les travaux de Kim (1994), Hamilton (1994) , Kim et Nelson (1999) et Nagy et Suzdaleva (2013) . Nous proposons, alors, un algorithme permettant d'évaluer la fonction de vraisemblance du modèle et par la suite estimer ses paramètres inconnus.

Chapitre 1

Aperçu sur les modèles à changement de régimes Markovien

1.1 Introduction

Quandt (1958) est à l'origine des premiers principes de la représentation par des modèles à changement de régime. Depuis, plusieurs travaux de recherche ont complété les travaux de Quandt et ont posé un formalisme complet d'une telle représentation (Goldfeld et Quandt, 1973 ; Baum et Petrie, 1966 ; Tong, 1978 ; Hamilton, 1989, 1990). Les propriétés de ces modèles permettent d'autoriser une série chronologique, à posséder une dynamique différente suivant les régimes ou les états du monde dans laquelle elle se trouve. Dans le cadre des modèles markoviens, le mécanisme de transition repose sur un processus d'état inobservable (latent) qui est supposé être une chaîne de Markov. A chaque instant du temps, il existe donc une certaine probabilité d'appartenir à un régime de dépendance et une probabilité de transition d'un régime à un autre (Voir Frühwirth-Schnatter, 2006 pour plus de détails).

Les modèles à changements de régime Markovien (MS) ont connu un fort développement depuis leur redécouverte par James Hamilton à la fin des années 80. A cette époque, les macro-économètres disposaient de peu d'outils de modélisation des séries temporelles hors des modèles $ARMA$. Hamilton (1989), en reprenant et améliorant les travaux de Quandt, a proposé un modèle non-linéaire mais stationnaire pour la série du produit national brut (PIB) des États-Unis d'Amérique. Il a développé le cadre théorique et il a proposé d'estimer les paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance. Il a exposé également l'impact de ce nouveau modèle sur la croissance à long-terme, ce qui sera de façon étrange, le point le moins repris de ce papier fondateur. A l'inverse, la capacité de ces modèles à fournir une datation du cycle économique a été particulièrement reprise par la suite. La fin des années 90 a vu un développement très important de l'emploi de ces modèles, dans les domaines macroéconomiques et financiers.

L'introduction par Hamilton (1989) de la classe des modèles autorégressifs à changement de régimes Markovien ($MS-AR$), a été suivie par plusieurs travaux de généralisation. En effet, la classe des modèles $ARMA$ multivarié à changement de régimes Markovien ($MS-VARMA$) a été étudiée par Francq et Zakoïan (2001), où certaines propriétés probabiliste du modèle ont été analysées. Stelzer (2009) a établi des conditions pour la stationnarité, l'existence des moments ainsi que l'ergodicité géométrique pour le modèle $MS-VARMA$, en utilisant une nouvelle définition de celui-ci. Chen et Tsay (2011) ont utilisé le modèle $MS-ARMA$ pour modéliser des indices boursiers et ont proposé une méthode d'estimation basée sur les idées d'Hamilton (1994) et Gray (1996).

Cai (1994) et Hamilton et Susmel (1994) ont introduit les modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques à changement de régime Markovien ($MS-ARCH$) tout en combinant le modèle $ARCH$ avec le modèle à changement de régimes Markovien de Hamilton (1989). Les modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques généralisés à changement de régimes Markovien ($MS-GARCH$) ont été proposés par Gray (1996), comptant sur l'hypothèse que la variance conditionnelle sachant le régime en cours, dépend de l'espérance des variances conditionnelles antérieures, plutôt que de leurs valeurs. Klaasen (2002) a proposé de modifier ce modèle, en tenant compte dans sa nouvelle formulation, du régime actuel et toutes les observations disponibles tout en évaluant l'espérance des variances conditionnelles précédentes. Une méthode différente pour réduire la dépendance de la variance conditionnelle sur les régimes passés a été proposée par Haas et *al.* (2004a). Une condition de stationnarité d'un modèle $MS-GARCH$ est établie dans Francq et *al.* (2001). Une analyse profonde des propriétés probabilistes d'un modèle $MS-GARCH$ est présentée dans Francq et Zakoïan (2005). D'autres travaux ont été élaborés sur les modèles $MS-GARCH$, nous citons par exemple, Dueker (1997), Bollen et *al.* (2000), Marcucci (2005), Rossi et Gallo (2006), Abramson et Cohen (2007), Francq et Zakoïan (2008), et Bauwens et *al.* (2010), Augustyniak (2013) et bien d'autres.

Kim (1994) a introduit les modèles espace d'états à changement de régimes Markovien et a proposé une modification du filtre de Kalman afin d'estimer les paramètres du modèle via la méthode du maximum de vraisemblance (MV). D'autres travaux concernant cette classe de modèles ont été élaborés. Nous citons par exemple Kim et Nelson (1999), Nagy et Suzdaleva (2013) entre autres.

Dans ce chapitre, nous allons donner un aperçu sur les modèles de séries chronologiques à changement de régimes Markovien, tout en présentant quelques modèles appartenant à cette classe. Nous rappelons quelques résultats connus dans la littérature concernant les modèles $MS-AR$, les modèle

$MS-ARMA$ et les modèles $MS-GARCH$.

1.2 Généralités sur les modèles à changement de régimes Markovien

1.2.1 Définitions, hypothèses et notations

Dans les modèles MS, nous considérons $y=(y_1,y_2,\ldots,y_T)$ comme une réalisation d'un processus stochastique $\{Y_t;t\in\mathbb{Z}\}$. Il est supposé que la distribution de probabilité du processus générateur dépend de la réalisation d'un processus stochastique discret caché (Δ_t). Le processus stochastique (Y_t) est directement observable, tandis que (Δ_t) est un processus aléatoire latent, qui n'est observable qu'à travers son effet sur la réalisation de (Y_t). Un simple exemple de ce genre de modèles, est le modèle, dit, à chaîne de Markov cachée (HMM), qui est défini par $y_t=\mu_{\Delta_t}+\epsilon_t$, où ϵ_t est un processus bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2. Donc, on peut définir un modèle MS comme un processus stochastique bivarié $\{(Y_t,\Delta_t);t\in\mathbb{Z}\}$, où le processus latent (Δ_t) satisfait l'hypothèse suivante :

Hypothèses H1. Le processus (Δ_t) est une chaîne de Markov définie sur un espace d'états discret et fini $\mathcal{E}=\{1,2,\ldots,d\}$. Elle est homogène, irréductible, apériodique et de distribution stationnaire $\pi=(\pi(1),\ldots,\pi(d))'$, telle que $\pi(k)=P(\Delta_0=k)$. Notons $\mathbb{P}$ la matrice dont les coefficients sont les probabilités de transition

$$p(i,j)=P(\Delta_t=j\mid\Delta_{t-1}=i)\,,\ \text{pour tout } i,j\in\mathcal{E},$$

i.e., la probabilité de transition de l'état i à l'état j, en une seule étape. Tous les éléments de la matrice $\mathbb{P}$ sont positifs, et la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1, en d'autres termes, $\mathbb{P}$ est une matrice stochastique. Les probabilités de transition en k étapes sont données par $p^{(k)}(i,j)=P(\Delta_t=j\mid\Delta_{t-k}=i)$, pour tout $i,j\in\mathcal{E}$ et $k\geq 1$.

Il existe plusieurs cas qui caractérisent la dépendance qui existent entre (Y_t) et (Δ_t). Soit $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$ une famille de lois paramétriques, avec une densité de probabilité $p(y|\,\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta}\in\Theta$, indexée par l'ensemble de paramètres Θ.

Hypothèses H2. Soit $\{Y_t\}_{t=1}^T$ une suite de variables aléatoires qui ne dépendent que de l'état de la chaîne de Markov (Δ_t), pour $t=0,\ldots,T$. Connaissant l'état de cette dernière à chaque instant t, $(\Delta_0,\Delta_1,\ldots,\Delta_T)$, les variables aléatoires $Y_1,\ldots,Y_T$ sont conditionnellement indépendantes. Pour chaque instant $t\geq 1$, la distribution de Y_t conditionnellement à l'état de Δ_t, provient d'une distribution parmi d distributions $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_1),\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_2),\ldots,\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_d)$, i.e., $Y_t\mid\Delta_t=k\sim\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_k)$.

Pour un processus stochastique bivarié $\{(Y_t, \Delta_t)\,; t \in \mathbb{Z}\}$, satisfaisant les deux hypothèses **H1** et **H2**, la distribution marginale de Y_t est donnée par

$$p\left(y_t \middle| \boldsymbol{\theta}\right) = \sum_{k=1}^{d} p\left(y_t \middle| \Delta_t = k, \boldsymbol{\theta}\right) P\left(\Delta_t = k \middle| \boldsymbol{\theta}\right), \; \boldsymbol{\theta} \in \Theta.$$

Puisque (Δ_t) est une chaîne de Markov stationnaire et la densité conditionnelle de Y_t sachant $\Delta_t = k$ est donnée par $p\left(y_t \mid \boldsymbol{\theta}_k\right)$, alors la distribution marginale de Y_t sera écrite sous la forme

$$p\left(y_t \middle| \boldsymbol{\theta}\right) = \sum_{k=1}^{d} p\left(y_t \middle| \boldsymbol{\theta}_k\right) \pi\left(k\right).$$

Nous constatons donc que le processus Y_t est généré par un mélange de distributions $\mathcal{L}\left(\boldsymbol{\theta}\right)$. Les propriétés mathématiques, pour différents types de processus satisfaisant les hypothèse **H1** et **H2**, ont été étudiées par plusieurs chercheurs (e.g., Blackwell et Koopmans (1957) et Heller (1965), pour le cas d'un modèle à chaîne de Markov cachée, Francq et Roussignol (1997) pour le cas d'un processus bruit blanc à chaîne de Markov cachée et Timmermann (2000) pour le cas d'un modèle à chaîne de Markov cachée général, où $Y_t = \mu_{\Delta_t} + \sigma_{\Delta_t}\epsilon_t$, avec ϵ_t est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(i.i.d.)$).

En général, l'hypothèse **H2**, n'est vérifiée que pour certains cas de processus MS. Dans le cas général, un modèle MS est obtenu en définissant la distribution conjointe

$$\begin{aligned} p\left(y, \Delta_T^{\star} = (i_0, i_1, \ldots, i_T) \middle| \boldsymbol{\theta}\right) \\ &= p\left(\Delta_0 = i_0 \middle| \boldsymbol{\theta}\right) \\ &\times \prod_{t=1}^{T} p\left(y_t \middle| \mathcal{F}_{t-1}, \Delta_t^{\star} = (i_0, i_1, \ldots, i_t)\right) p\left(\Delta_t = i_t \middle| \Delta_{t-1}^{\star} = (i_0, i_1, \ldots, i_{t-1}), \mathcal{F}_{t-1}\right). \end{aligned}$$

où $\mathcal{F}_{t-1} = (y_1, y_2, \ldots, y_{t-1}; \boldsymbol{\theta})$ et $\Delta_t^{\star} = (\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_t)$. Nous remarquons, donc, que la distribution conditionnelle de y_t dépend de toute la trajectoire des régimes jusqu'à l'instant t, ce qui rend le calcul de la log-vraisemblance du modèle impossible en pratique, et donc l'estimation des paramètres très difficile. Par conséquent, plusieurs modèles à changement de régimes, considérés dans les applications empiriques, font partie d'une sous classe, et satisfont l'hypothèse suivante :

Hypothèse H3. La densité de probabilité conditionnelle de y_t dépend seulement de l'état de la chaîne de Markov à l'instant t, plutôt que de l'historique de tous les régimes, i.e.,

$$p\left(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}, \Delta_t^{\star} = (i_0, i_1, \ldots, i_t)\right) = p\left(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}, \Delta_t = i_t\right),$$

(e.g. Goldfeld et Quandt, 1973 ; McCulloch et Tsay, 1994).

Par ailleurs, pour d'autres modèles MS, tels que le modèle autorégressif à changement de régimes Markovien ($MS-AR$), proposé par Hamilton (1989), la distribution conditionnelle de y_t dépend seulement du passé des régimes jusqu'à un certain retard donné, i.e.,

$$p\left(y_t\left|\mathcal{F}_{t-1}, \Delta_t^{\star}=\left(i_0, i_1, \ldots, i_t\right)\right.\right)=p\left(y_t\left|\mathcal{F}_{t-1}, \Delta_t=i_t, \ldots, \Delta_{t-p}=i_{t-p}\right.\right).$$

Notons que cette dernière hypothèse est trop restrictive dans le cas des modèles $MS-ARMA$ et les modèles $MS-GARCH$. Ce genre de modèles satisfait l'hypothèse générale suivante :

Hypothèse H4. La densité de probabilité conditionnelle de y_t, $p\left(y_t\left|\mathcal{F}_{t-1}, \Delta_t^{\star}=\left(i_0, i_1, \ldots, i_t\right)\right.\right)$, dépend de $\mathcal{F}_{t-1}$ et de tout le passé de la chaîne de Markov jusqu'à l'instant t.

1.2.2 Inférence statistique

L'inférence statistique des modèles MS requiert la connaissance du nombre d'états d de la chaîne de Markov, l'estimation des paramètres du modèle $\boldsymbol{\theta}_k$, $k=1,\ldots,d$, l'estimation des probabilités de transition ainsi que la probabilité d'appartenance à un régime k, $P\left(\Delta_t=k\right)$, pour chaque instant t, $t=1,\ldots,T$. Les approches les plus couramment utilisées pour estimer les paramètres sont le filtre de Hamilton, l'algorithme Espérance-Maximisation (EM) ou l'approche bayésienne.

Dans son article de 1989, Hamilton a développé une méthode itérative pour estimer les probabilités des états de la chaîne de Markov à chaque instant t, sachant toute l'information disponible jusqu'à cet instant. Par la suite, la fonction de vraisemblance peut être évaluée comme résultat de cette procédure et par conséquent nous pouvons estimer les paramètres inconnus du modèle.

Supposons que y_t dépend seulement de Δ_t et Δ_{t-1}. Cette procédure consiste en les étapes suivantes.

Étape 1 **:** Calculer la distribution conjointe de (Δ_t, Δ_{t-1}) sachant toute l'information disponible jusqu'à l'instant $t-1$:

$$\begin{aligned} P\left(\Delta_t=i, \Delta_{t-1}=j \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) &= P\left(\Delta_t=i \mid \Delta_{t-1}=j, \mathcal{F}_{t-1}\right) P\left(\Delta_{t-1}=j \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) \\ &= P\left(\Delta_t=i \mid \Delta_{t-1}=j\right) P\left(\Delta_{t-1}=j \mid \mathcal{F}_{t-1}\right). \end{aligned}$$

Étape 2 **:** Calculer la distribution conjointe de y_t, Δ_t et Δ_{t-1} sachant toute l'information disponible jusqu'à l'instant $t-1$:

$$\begin{aligned} f\left(y_t, \Delta_t=i, \Delta_{t-1}=j \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) &= f\left(y_t \mid \Delta_t=i, \Delta_{t-1}=j, \mathcal{F}_{t-1}\right) \\ &\quad \times P\left(\Delta_t=i, \Delta_{t-1}=j \mid \mathcal{F}_{t-1}\right). \end{aligned}$$

Étape 3 **:** Calculer la distribution marginale de y_t sachant toute l'information disponible jusqu'à l'instant $t-1$ et tous les paramètres du modèle :

$$f\left(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} f\left(y_t, \Delta_t = j, \Delta_{t-1} = i \mid \mathcal{F}_{t-1}\right).$$

Étape 4 **:** Mettre à jours la distribution conjointe de Δ_t, Δ_{t-1}, en utilisant la règle de Bayes

$$\begin{aligned} P\left(\Delta_t = i, \Delta_{t-1} = j \mid \mathcal{F}_t\right) &= \frac{f\left(y_t, \Delta_t = i, \Delta_{t-1} = j \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)}{f\left(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)} \\ &= \frac{f\left(y_t \mid \Delta_t = i, \Delta_{t-1} = j, \mathcal{F}_{t-1}\right) P\left(\Delta_t = i, \Delta_{t-1} = j \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)}{f\left(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)}. \end{aligned}$$

Étape 5 **:** Calculer les probabilités filtrées de Δ_t, pour réitérer l'algorithme à l'instant suivant

$$P\left(\Delta_t = i \mid \mathcal{F}_t\right) = \sum_{j=1}^{d} P\left(\Delta_t = i, \Delta_{t-1} = j \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Pour démarrer l'algorithme, nous devons fournir une valeur initiale $P\left(\Delta_0 = j\right), \forall j = 1, ..., d$, qui est donnée par la distribution ergodique, π, si la chaîne de Markov vérifie l'hypothèse **H1**. Nous pouvons, aussi, considérer comme une distribution initiale la distribution uniforme discrète, i.e., $P\left(\Delta_0 = j\right) = \frac{1}{d}$, pour tout $j = 1, \ldots, d$.

En itérant cet algorithme pour $t = 1, \ldots, T$, nous pouvons évaluer la fonction de log-vraisemblance comme suit

$$\mathcal{L}\left(\boldsymbol{\theta}\right) = \sum_{t=1}^{T} f\left(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right).$$

Cette dernière peut être maximisée numériquement afin de déterminer les estimations des paramètres du modèle.

Par ailleurs, une méthode alternative permettant d'estimer les paramètres d'un modèle MS est l'algorithme EM. Celui-ci a été proposé par Dempster et *al.* (1977), qui ont montré sa large applicabilité en statistique en général, ensuite, Hamilton (1990) a étendu son application dans le cadre des modèles MS. L'algorithme EM est une technique d'estimation itérative permettant d'obtenir l'estimateur du maximum de vraisemblance (MV) du vecteur des paramètres du modèle. Il est utile dans les situations où la log-vraisemblance est difficile à évaluer à cause de la présence de données manquantes ou de variables non observables. Dans la formulation habituelle de l'algorithme EM, le vecteur de données complètes se compose des données observables y et des données inobservables Δ.

L'algorithme EM débute avec un choix initial du vecteur des paramètres, noté $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$, et permet de générer une suite $\left\{\boldsymbol{\theta}^{(i)}\right\}_{i\geq 1}$, en alternant les deux étapes suivantes :

Algorithme 1.1 (Algorithme EM)

Étape espérance *: Calculer* $Q\left(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}^{(i-1)}\right)$*, où*

$$\begin{aligned} Q\left(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}^{(i-1)}\right) &= \mathbb{E}\left[\log f\left(y, \Delta \mid \boldsymbol{\theta}\right) \mid y, \boldsymbol{\theta}^{(i-1)}\right] \\ &= \sum_{k} \log f\left(y, \Delta = k \mid \boldsymbol{\theta}\right) P\left(\Delta = k \mid y, \boldsymbol{\theta}^{(i-1)}\right). \end{aligned}$$

Étape maximisation *: Déterminer l'optimum*

$$\boldsymbol{\theta}^{(i)} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} Q\left(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}^{(i-1)}\right).$$

L'exposant i utilisé, indique qu'il se rattache à l'itération i de l'algorithme, et les étapes E et M sont itérées jusqu'à la convergence. L'utilité de cet algorithme repose sur une propriété de monotonie, prouvée par Dempster et *al.* (1977), i.e., $f\left(y \mid \boldsymbol{\theta}^{(i)}\right) \geq f\left(y \mid \boldsymbol{\theta}^{(i-1)}\right)$. En d'autres termes, chaque itération nous procure une meilleure estimation du paramètre.

D'autre part, les méthodes bayésiennes sont devenues également populaires et intéressantes pour estimer les modèles MS. Elles sont aussi faciles à mettre en œuvre et à implémenter. Les conjugués des distributions à priori existent pour très peu de modèles, d'où, la plupart des analyses des distributions à postériori reposent sur les méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov ($MCMC$). Plusieurs auteurs ont utilisé des approches bayésiennes basées sur la méthode d'échantillonnage de Gibbs, pour estimer des modèles MS (e.g. Albert et Chib, 1993 ; McCulloch et Tsay, 1994 ; Chib, 1996).

Dans cette section, nous avons donné des concepts généraux des modèles MS. Il est à noter que dans la littérature des modèles de séries chronologiques, il existe différentes variantes du modèle MS qui sont liées à la nature du processus stochastique $\{Y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ et à la structure de dépendance entre (Y_t) et (Δ_t). Dans le reste de ce chapitre, nous allons donner un panorama sur les travaux qui ont été élaborés sur différents modèles de séries chronologiques à changement de régimes Markovien, tels que les modèles de régression, les modèles $MS-AR$, les modèle $MS-ARMA$ ainsi que les modèles $MS-GARCH$.

1.3 Modèle de régression à changement de régimes Markovien

Une tentative précoce d'introduire les modèles MS dans l'économétrie, afin de traiter les séries temporelles qui dépendent des variables exogènes, est le modèle de régression à changement de régime. Ce dernier a été proposé par Goldfeld et Quandt (1973) et est une extension du modèle introduit par Quandt (1972) , qui suppose que (Δ_t) est une suite de variables aléatoires $i.i.d.$. Goldfeld et Quandt (1973) ont modélisé le processus latent (Δ_t) par une chaîne de Markov à deux états. Le modèle général de régression à changement de régimes Markovien est donné par

$$y_t = x_t \beta_{\Delta_t} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2_{\Delta_t}\right),$$

où (Δ_t) est une chaîne de Markov cachée et x_t est un vecteur de variables explicatives. Les paramètres β_{Δ_t} et les variances $\sigma^2_{\Delta_t}$ dépendent de l'état de la chaine de Markov (Δ_t). Goldfeld et Quandt (1973) ont proposé une méthode MV, afin d'estimer les paramètres inconnus du modèle proposé. Cosslett et Lee (1985) ont signalé que la maximisation de la fonction de vraisemblance présentée par Goldfeld et Quandt (1973) donne des estimateurs consistants mais pas efficaces. Ils ont présenté, à leur tour, une procédure itérative d'estimation, qui donne des estimateurs efficaces. Les travaux qui ont été effectués durant cette période, commençant par Goldfeld et Quandt (1973), ont constitué les premiers concepts de l'utilisation des modèles MS dans l'économétrie, et particulièrement dans la modélisation des séries temporelles. Par la suite, Hamilton (1988, 1989) a souligné que plusieurs séries chronologiques économiques peuvent être décrites par des modèles MS. Il a proposé, ainsi, en 1989, un modèle $MS-AR$ afin de modéliser la croissance du produit national brut (PIB) des Etats Unis d'Amérique.

1.4 Modèle AR à changement de régimes Markovien

Plusieurs chercheurs ont essayé d'analyser le PIB des Etats Unis d'Amérique. Ils ont remarqué la présence d'une autocorrélation dans cette série, qui ne peut pas être capturée par les modèles de régression. De plus, l'histogramme des données empiriques montre que la distribution marginale est bimodale et ne peut donc pas être ajustée par la distribution d'un modèle autorégressif classique. En outre, certaines séries économiques et financières, notamment la série du PIB, montrent l'existence de ruptures causées par des crises ou des changements de politiques économiques qui peuvent influer fortement sur l'évolution des variables. Suite de ce constat, Hamilton (1989) a introduit un modèle autorégressif à changement de régimes Markovien $(MS-AR)$ avec ruptures structurelles endogènes afin d'analyser la dynamique du PIB des Etats Unis d'Amérique. Plus précisément, le modèle proposé par Hamilton (1989), spécifie que la croissance du PIB suit un processus $AR(4)$ avec un changement de régimes dans la moyenne, entre les états de forte croissance et de faible croissance. Ces changements discrets ont leur propre dynamique, définie comme étant une chaîne de Markov à deux états. Ce modèle $MS - AR$ peut être écrit de façon générale, sous forme d'une équation aux différences stochastiques, comme suit

$$y_t - \mu(\Delta_t) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i (y_{t-i} - \mu(\Delta_{t-i})) + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où (Δ_t) est une chaine de Markov qui satisfait l'hypothèse **H1**, (ϵ_t) est une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de moyenne nulle et de variance σ^2 et les deux processus (Δ_t) et (ϵ_t) sont indépendants.

Une deuxième version du modèle $MS - AR$ a été proposée par McCulloch et Tsay (1994), où leur modèle admet l'écriture suivante

$$y_t = \phi_0(\Delta_t) + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Dans ce dernier modèle, l'intercept seulement dépend de l'état de la chaîne de Markov (Δ_t). Une spécification plus générale du modèle $MS - AR$, dans laquelle même les paramètres et la variance de (ϵ_t) dépendent de l'état de la chaîne de Markov, s'écrit comme suit

$$y_t = \phi_0(\Delta_t) + \sum_{i=1}^{p} \phi_i(\Delta_t) y_{t-i} + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où $\epsilon_t = \sigma(\Delta_t)\eta_t$, et (η_t) est une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de moyenne nulle et de variance unitaire. Les deux processus (η_t) et (Δ_t) sont indépendant et (Δ_t) satisfait les hypothèses **H1**. Cette spécification permet de modéliser une série chronologique avec un mélange de différents modèles et elle permet aussi à la variance conditionnelle de changer au fil du temps.

Plusieurs études des propriétés probabilistes des modèle $MS-AR$ ont été effectuées. Divers résultats sur la stationnarité ont été établis par différents chercheurs (e.g. Holst et *al.*, 1994 ; Krolzig, 1997; Yao et Attali, 2000). Timmermann (2000) a donné, sous l'hypothèse de stationnarité, l'expression explicite de la variance et des moments d'ordres supérieurs. Francq et Roussignol (1998) ont établi des conditions pour l'existence d'une solution stationnaire et ergodique. Le calcul explicite de la fonction d'autocovariance a été présenté par Timmermann (2000), sous l'hypothèse de stationnarité au second ordre. Psaradakis et Spagnolo (2003) se sont intéressés au problème de détermination du nombre de régimes dans les modèles $MS-AR$.

L'estimation des modèles $MS-AR$ par la méthode MV est généralement effectuée via l'algorithme EM (e.g. Hamilton, 1990 ; Holst et *al.*, 1994). Les propriétés asymptotiques de l'estimateur MV sont établies par Francq et Roussignol (1998), Krishnamurthy et Rydén (1998) et Douc et *al.* (2004). D'autre part, l'approche bayésienne a été également utilisée pour estimer les paramètres d'un modèle $MS-AR$, tout en se basent soit sur les méthodes dites *data augmentation*, soit sur les méthodes Monte Carlo à chaînes de Markov ($MCMC$) (Albert et Chib, 1993 ; McCulloch et Tsay, 1994; Chib, 1996 ; Frühwirth-Schnatter, 2001*b*). Xie et *al.* (2008) ont proposé d'estimer un modèle $MS-AR$, sous une nouvelle formulation, via la méthode MV. Ils ont établi la consistance de leur estimateur sous certaines conditions de régularité. Finalement, Cavicchioli (2014*b*) a établi une procédure permettant de calculer la fonction de vraisemblance d'un modèle $MS-AR$, ce qui permet d'estimer ses paramètres. De plus, elle a étudié la consistance de l'estimateur obtenu et elle a déterminé explicitement sa matrice de variance-covariance asymptotique.

Une extension importante des modèles $MS-AR$, qui sera présentée dans la section suivante, est le modèle $ARMA$ à changement de régimes Markovien.

1.5 Modèle $ARMA$ à changement de régimes Markovien

Depuis leur introduction en économétrie, par Hamilton (1989), les modèles $ARMA$ à changement de régimes Markovien ($MS-ARMA$) ont attiré l'attention de beaucoup de chercheurs. En effet, plusieurs travaux concernant ces modèles ont été effectués. Nous citons à titre d'exemple, les travaux de Francq et Zakoïan (2001), Lee (2005), Stelzer (2009), Chen et Tsay (2011) parmi d'autres.

Rappelons qu'un processus stochastique $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est représenté par un modèle $MS-ARMA$ d'ordres (p,q), s'il vérifie

$$y_t = c(\Delta_t) + \sum_{i=1}^{p} \phi_i(\Delta_t) y_{t-i} + \epsilon_t(\Delta_t) + \sum_{j=1}^{q} \theta_j(\Delta_t) \epsilon_{t-j}(\Delta_{t-j}), \tag{1.1}$$

où $\epsilon_t(\Delta_t) = \sigma(\Delta_t)\eta_t$ et (η_t) est une suite de variables aléatoires $i.i.d.$ centrées réduites. Le processus (Δ_t) est une chaîne de Markov satisfaisant l'hypothèse **H1**. Nous supposons aussi que les processus (η_t) et (Δ_t) sont indépendants. Il est clair que lorsque $q=0$, nous obtenons la représentation $MS-AR$ que nous avons présenté dans la section précédente.

Plusieurs propriétés probabilistes des modèles MS-$ARMA$ ont été étudiées par différents chercheurs. Pour dériver les conditions d'existence d'une solution strictement stationnaire, il est souhaitable de réécrire (1.1) sous la forme vectorielle suivante, dite aussi représentation Markovienne

$$z_t = \Phi_t z_{t-1} + b_t,$$

où

$$\begin{aligned}
z_t &= \left(y_t, ..., y_{t-p+1}, \epsilon_t\left(\Delta_t\right), ..., \epsilon_{t-q+1}\left(\Delta_{t-q+1}\right)\right)', \\
\Phi_t &= \begin{pmatrix} \phi_{1:p-1}\left(\Delta_t\right) & \phi_p\left(\Delta_t\right) & \theta_{1:q-1}\left(\Delta_t\right) & \theta_q\left(\Delta_t\right) \\ \mathbf{I}_{p-1} & \mathbf{0}_{(p-1)\times 1} & \mathbf{0}_{(p-1)\times(q-1)} & \mathbf{0}_{(p-1)\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times(p-1)} & 0 & \mathbf{0}_{1\times(q-1)} & 0 \\ \mathbf{0}_{(q-1)\times(p-1)} & \mathbf{0}_{(q-1)\times 1} & \mathbf{I}_{q-1} & \mathbf{0}_{(q-1)\times 1} \end{pmatrix}, \\
\phi_{1:p-1}\left(\Delta_t\right) &= \left(\phi_1\left(\Delta_t\right), ..., \phi_{p-1}\left(\Delta_t\right)\right), \\
\theta_{1:q-1}\left(\Delta_t\right) &= \left(\theta_1\left(\Delta_t\right), ..., \theta_{q-1}\left(\Delta_t\right)\right),
\end{aligned}$$

et

$$b_t = \left(c\left(\Delta_t\right) + \epsilon_t\left(\Delta_t\right), \mathbf{0}_{1\times(p-1)}, \epsilon_t\left(\Delta_t\right), \mathbf{0}_{1\times(q-1)}\right)',$$

où $\mathbf{I}_n$ et $\mathbf{0}_{n\times n'}$ sont respectivement, la matrice identité d'ordres $n \times n$ et la matrice nulle d'ordres $n \times n'$. Notons que ce type de représentations a été étudié par plusieurs chercheurs (cf. Brandt, 1986 ; Tjøstheim, 1986, Karlsen, 1990 ; Bougerol et Picard, 1992).

Lorsque le plus grand exposant de Lyapunov γ défini par

$$\gamma = \inf_{t\in\mathbb{N}^*}\left\{\mathbb{E}\frac{1}{t}\log\left\|\Phi_t\Phi_{t-1}\cdots\Phi_1\right\|\right\},$$

est strictement négatif, le modèle $MS-ARMA$, défini par (1.1), admet une unique solution strictement stationnaire. Cette condition a été établie par Francq et Zakoïan (2001) . Ces deux auteurs ont montré que la stationnarité des modèles $MS-ARMA$ dépend seulement de la partie autorégressive, tel qu'il est le cas des modèles $ARMA$ classique. Ils ont proposé de décomposer la matrice Φ_t en blocs comme suit

$$\Phi_t = \begin{pmatrix} \widetilde{\Phi}_t & \Theta_t \\ \mathbf{0}_{q\times p} & J \end{pmatrix},$$

où

$$\widetilde{\Phi}_t = \begin{pmatrix} \phi_{1:p-1}\left(\Delta_t\right) & \phi_p\left(\Delta_t\right) \\ \mathbf{I}_{p-1} & \mathbf{0}_{(p-1)\times 1} \end{pmatrix}, \ \Theta_t = \begin{pmatrix} \theta_{1:q-1}\left(\Delta_t\right) & \theta_q\left(\Delta_t\right) \\ \mathbf{0}_{(p-1)\times(q-1)} & \mathbf{0}_{(p-1)\times 1} \end{pmatrix},$$

et

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{1\times(q-1)} & 0 \\ \mathbf{I}_{q-1} & \mathbf{0}_{(q-1)\times 1} \end{pmatrix}.$$

À l'aide de cette décomposition, ils ont obtenu une condition alternative assurant la stationnarité stricte des modèles $MS-ARMA$. D'autre part, Francq et Zakoïan (2001) ont établi une condition nécessaire et suffisante pour l'existence des moments d'ordre supérieur. En outre, ces chercheurs ont donné des formules explicites pour le calcul de l'espérance et de la variance non conditionnelles d'un processus $MS-ARMA$. Ils ont également élaboré un système permettant de calculer les autocovariances d'un tel processus de façon récursive. Francq et Zakoïan (2002) se sont intéressés au calcul des autocovariances des puissances d'un processus $MS-ARMA$, où ils ont réussi à établir des représentations $ARMA$ pour les puissances d'un $MS-ARMA$. Lee (2005) a proposé une nouvelle définition des modèles $MS-ARMA$ dans laquelle le processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est une fonction non linéaire de son passé et du passé du bruit blanc, telle que

$$y_t = \phi_{\Delta_t}(y_{t-1}, \ldots, y_{t-p}, \epsilon_{t-1}, \ldots, \epsilon_{t-q}) + \epsilon_t,$$

où (Δ_t) est une chaîne de Markov qui obéisse aux hypothèses **H1** et (ϵ_t) est une suite de variables aléatoires *i.i.d.* Les deux processus (ϵ_t) et (Δ_t) sont supposés être indépendants. Lee (2005) a donné des conditions suffisantes pour la stationnarité stricte, pour l'existence des moments et pour l'ergodicité géométrique de ce type de processus. En 2009, Stelzer a présenté une autre formulation des processus $MS-ARMA$, dans laquelle il suppose que les paramètres du modèle sont aléatoires et sont modélisés comme une chaîne de Markov. Cette nouvelle formulation est donnée par

$$y_t = \mu_t + \sum_{i=1}^{p} \phi_{it} y_{t-i} + \epsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \theta_{jt} \epsilon_{t-i},$$

où $\epsilon_t = \sigma_t \eta_t$, (η_t) est une suite de variables aléatoires *i.i.d.*, $\Delta_t = (\mu_t, \sigma_t, \phi_{1t}, \ldots, \phi_{pt}, \theta_{1t}, \ldots, \theta_{qt})$ est une chaine de Markov stationnaire et ergodique et (η_t) et (Δ_t) sont deux processus indépendants. Stelzer (2009) a établi des conditions pour la stationnarité stricte, l'existence des moments ainsi que l'ergodicité géométrique de son modèle. Pataracchia (2011) et Cavicchioli (2013), ont établi la densité spectrale des modèles $MS-ARMA$, en utilisant la transformée de Fourier de la fonction d'autocovariance, dans le cas univarié pour le premier auteur et dans le cas multivarié pour le deuxième auteur. Cavicchioli (2014*c*) a proposé une méthode pour le calcul des autocovariances des modèles MS-$ARMA$ dans le cas multivarié, en se basant sur les travaux de Krolzig (1997). Dans le même papier, elle a donné la représentation $VARMA$ des processus $MS-VARMA$. Trois ans plus tard, cet auteur a établi des formules pour le calcul explicite des moments d'ordre 3 et 4 d'un processus $MS-VAR$.

Le problème d'estimation des modèles $MS-ARMA$ a préoccupé plusieurs chercheurs. Billio et *al.* (1999) ont adopté une approche bayésienne basée sur le principe du *data augementation* dans l'estimation d'un modèle $MS-ARMA$ à deux régimes. Ces auteurs ont proposé deux algorithmes d'estimation, dont l'un d'entre eux est basé sur la méthode de Gibbs et l'autre sur la méthode de Metropolis-Hasting. Francq et Gautier (2004) ont conçu deux méthodes d'estimation pour les modèles $MS-ARMA$, la première est basée sur la méthode des moindres carrés tandis que la deuxième est basée sur la méthode des moindres carrés quasi-généralisés. Ils ont aussi donné de façon explicite les conditions qui assurent la consistance ainsi que la normalité asymptotique de ces estimateurs. Des années plus tard, Chen et Tsay (2011) ont présenté une méthode d'estimation permettant de calculer la fonction de vraisemblance du modèle $MS-ARMA$ de manière récursive. Cette méthode se base essentiellement sur le filtre de Hamilton exposé dans la première section de ce chapitre, et l'approche de Gray (1996).

Il est connu que les rendements des données économiques et en particulier financières ne sont pas corrélées et montrent des caractéristiques difficiles à reproduire par des modèles de séries chronologiques classiques. Le but donc, est de concevoir des modèles qui expliquent d'avantage le comportement de ce type de données. Pour cette raison, plusieurs chercheurs ont pensé à combiner les modèles $GARCH$ avec les modèles MS pour obtenir un modèle plus flexible et permettant de capturer plusieurs faits stylisés. Dans la section suivante, nous donnerons une idée générale sur ce type de processus.

1.6 Modèle $GARCH$ à changement de régimes Markovien

La volatilité des marchés financiers a fait l'objet de nombreux développements et applications au cours des trois dernières décennies, que ce soit théoriquement ou empiriquement. À cet égard, la classe de modèles la plus largement utilisée est certainement celle de modèles $GARCH$. Ces modèles indiquent généralement une forte persistance de la variance conditionnelle. Diebold (1986) et Lamoureux et Lastrapes (1990), entre autres, ont souligné que cette persistance de la variance conditionnelle peut provenir des changements structurels dans le processus de la variance qui ne sont pas pris en compte par les modèles $GARCH$ standard. Par conséquent, l'incorporation des modèles $GARCH$ avec des chaînes de Markov cachées, où chaque état de la chaîne implique un comportement $GARCH$ différent, étend la formulation classique à une dynamique plus flexible. Elle permet un meilleur ajustement des données avec une structure de volatilité plus complexe et variante dans le temps.

Il existe diverses formulations des modèles MS-$GARCH$. La particularité commune de ces formulations est que les coefficients du modèle ainsi que la variance conditionnelle à l'instant t dépendent du régime en cours Δ_t. Les spécifications des modèles MS-$GARCH$ diffèrent dans la manière avec laquelle le passé de la variance conditionnelle dépend des régimes. Dans une première version qui a été considérée par Cai (1994) et Hamilton et Susmel (1994), ils proposent un modèle $MS-GARCH$ d'ordres $p=q=1$, dans lequel le passé de la variance conditionnelle dépend des régimes antérieurs, tel que

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t\left(\Delta_t\right)\eta_t, \\ \sigma_t^2\left(\Delta_t\right) = \omega\left(\Delta_t\right) + \alpha\left(\Delta_t\right)\epsilon_{t-1}^2 + \beta\left(\Delta_t\right)\sigma_{t-1}^2\left(\Delta_{t-1}\right), \end{cases}$$

où (Δ_t) est une chaîne de Markov définie sur un espace d'états fini $\mathcal{E}=\{1,2,\ldots,d\}$ et $\omega(k)>0$, $\alpha(k)$, $\beta(k)\geq 0$, pour $k=1,\ldots,d$. Cependant, Cai (1994) et Hamilton et Susmel (1994) ont constaté que l'estimation par la méthode MV de ce type de modèle avec une telle formulation n'est pas faisable en raison de la structure de dépendance des régimes antérieurs. Ceci impose la connaissance de toute la trajectoire des régimes. Ce problème apparait car Δ_{t-1} n'est pas observable et par conséquent $\sigma_{t-1}^2\left(\Delta_{t-1}\right)$ aussi n'est pas observable. Vue la nature récursive de l'équation de la variance conditionnelle, cela nécessite la connaissance de tout le passé de la chaîne de Markov (Δ_t) jusqu'à l'instant t. Face à ces difficultés, Cai (1994) et Hamilton et Susmel (1994) ont utilisé un modèle particulier $MS-ARCH$ au lieu du modèle général $MS-GARCH$. Pour contourner le problème qui a été constaté par ces chercheurs, Gray (1996) a proposé de remplacer $\sigma_{t-1}^2\left(\Delta_{t-1}\right)$ par la variance de ϵ_{t-1} conditionnellement à l'information disponible jusqu'à l'instant $t-2$, noté h_{t-1} est définie par

$$h_{t-1} := \mathbb{V}\left(\epsilon_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-2}\right) = \sum_{k=1}^{d} P\left(\Delta_{t-1}=k \mid \mathcal{F}_{t-2}\right)\sigma_{t-1}^2(k),$$

où $\mathcal{F}_{t-2}$ est l'information disponible jusqu'à l'instant $t-2$ et $P\left(\Delta_{t-1}=k \mid \mathcal{F}_{t-2}\right)$, $k=1,\ldots,d$, sont des probabilités conditionnelles qui peuvent être calculées à l'aide du filtre d'Hamilton. Par suite, le modèle $MS-GARCH$ sera réécrit, dans ce cas, comme suit

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sqrt{h_t}\eta_t, \\ h_t = \omega\left(\Delta_t\right) + \alpha\left(\Delta_t\right)\epsilon_{t-1}^2 + \beta\left(\Delta_t\right)h_{t-1}. \end{cases}$$

Cette spécification permet de calculer la fonction de vraisemblance de façon très simple. Des solutions similaires ont également été proposées par Dueker (1997) et Klaassen (2002). Haas et *al.* $(2004a,b)$

ont proposé une autre spécification du modèle $MS-GARCH$ dans laquelle ils supposent que la volatilité à l'instant t pour chaque régime, dépend seulement des valeurs antérieurs de la volatilité du même régime. Cette formulation peut être vue comme une généralisation directe du modèle $GARCH$ classique, i.e.,

$$\sigma_t^2\left(\Delta_t\right)=\omega\left(\Delta_t\right)+\alpha\left(\Delta_t\right)\epsilon_{t-1}^2+\beta\left(\Delta_t\right)\sigma_{t-1}^2\left(\Delta_t\right).$$

Un modèle $MS-GARCH$ d'ordre p et q peut être défini, dans un cadre général, de la manière suivante

$$\left\{\begin{array}{l}\epsilon_t=\sqrt{h_t}\eta_t,\\ h_t=\omega\left(\Delta_t\right)+\sum\limits_{i=1}^{q}\alpha_i\left(\Delta_t\right)\epsilon_{t-i}^2+\sum\limits_{j=1}^{p}\beta_j\left(\Delta_t\right)h_{t-j},\end{array}\right. \tag{1.2}$$

où les paramètres sont des fonctions d'une chaîne de Markov (Δ_t) qui satisfait l'hypothèse **H1**. Les paramètres du modèle satisfont les contraintes $\omega\left(k\right)>0$, $\alpha_i\left(k\right)\geq 0$, et $\beta_j\left(k\right)\geq 0$ pour $k\in\{1,\ldots,d\}$, $i\in\{1,\ldots,q\}$ et $j\in\{1,\ldots,p\}$. La suite (η_t) est une suite de variables aléatoires *i.i.d.* supposée être indépendante de (Δ_t). Cette dernière formulation $MS-GARCH$ a été adoptée par plusieurs auteurs, parmi lesquels nous citons Francq et *al.* (2001) , Francq et Zakoïan (2005, 2008), Bauwens et *al.* (2010) ainsi que Augustyniak (2014).

Les propriétés probabilistes des modèles $MS-GARCH$ ont été étudiées par plusieurs chercheurs. D'abord, Francq et *al.* (2001) ont établi des conditions nécessaires et suffisantes assurant l'existence d'une solution strictement stationnaire en réécrivant (1.2) sous forme d'un modèle autorégressif généralisé. Ces auteurs ont aussi établi des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution stationnaire au second-ordre. Francq et Zakoïan (2005) ont donné des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des moments de ϵ_t^2, où ils exigent que le rayon spectral d'une certaine matrice obtenue à travers la représentation Markovienne associée au modèle (1.2) , soit strictement inférieur à 1. Dans ce même travail, ils ont montré que ϵ_t^2 ainsi que ses puissances admettent des représentations $ARMA$ dont les ordres sont obtenus en fonction des ordres du modèle $MS-GARCH$. Ces représentations permettent donc de calculer les autocovariances du modèle (1.2). Liu (2006) a présenté des conditions nécessaires et suffisantes pour la stationnarité stricte et l'existence des moments d'un processus $MS-GARCH$ en adoptant la même définition de Hass et *al.* (2004). Bauwens et *al.* (2010) ont présenté des conditions suffisantes pour l'ergodicité géométrique et l'existence des moments dans le cas d'un processus $MS-GARCH\,(1,1)$.

L'estimation des modèles $MS-GARCH$ est une tâche difficile, car la fonction de vraisemblance dépend de toute la trajectoire des régimes de la chaîne de Markov. Cette difficulté a mené à des méthodes d'estimation basées sur une simplification du modèle ou à des techniques qui ne se basent pas sur l'évaluation de la fonction de vraisemblance. Gray (1996) , Dueker (1997) , Klaassen (2002) et Haas et *al.* (2004*b*) ont tous proposé d'estimer des versions modifiées du modèle $MS-GARCH$ via la méthode MV, afin de contourner le problème de dépendance de la trajectoire des régimes. Francq et Zakoïan (2008) ont proposé d'estimer les paramètres d'un modèle $MS-GARCH$ via la méthode des moments généralisée. Bauwens et *al.* (2010) ont adopté l'approche bayésienne en utilisant un algorithme d'échantillonnage de Gibbs dans le but d'estimer les paramètres d'un modèle $MS-GARCH(1,1)$ ainsi que les états de la chaîne de Markov. Augustyniak (2014) a développé une approche basée sur l'algorithme de Monte Carlo EM et sur l'échantillonnage préférentiel permettant d'obtenir l'estimateur MV et sa matrice de variance-covariance asymptotique. Récemment, Augustyniak et *al.*, (2017) ont proposé une méthode d'estimation MV basée sur une approximation du modèle, connue sous le nom de *collapsing procedure*. Finalement, Billio et Cavicchioli (2017) ont développé une autre méthode d'estimation MV basée sur les travaux de Kim (1994) , tout en écrivant le modèle sous forme espace d'états adéquate.

Depuis leur introduction en économétrie, les modèles MS, ont offert un outil puissant pour la modélisation des séries temporelles qui montrent des changements structurels. Ces modèles ont permis de donner un meilleur ajustement aux données, notamment les données financières, et reflètent mieux leurs dynamiques. Par ailleurs, plusieurs séries de données ont une structure d'autocorrélation périodique, ce qui nécessite d'introduire des processus périodiquement corrélés afin de modéliser ce type de séries, ce qui fera l'objet des chapitres suivants.

Chapitre 2

Modèles $PARMA$ à changement de régimes Markovien

2.1 Introduction

Dans la modélisation des phénomènes stochastiques, exhibant une structure d'autocorrélation périodique, l'importance des modèles périodiques n'est plus à démontrer. En effet, plusieurs modèles de séries chronologiques périodiques ont été introduits dans la littérature. Parmi lesquels on retrouve les modèles autorégressifs moyennes mobiles périodiques ($PARMA$). Ces derniers ont fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. Nous citons à titre d'exemple les travaux de Pagano (1978), Sakai (1982), Vecchia (1985a et b), Bentarzi et Hallin (1994), Boshnakov (1996), Ula et Smadi (1997), Lund et Basawa (2000), Basawa et Lund (2001), Shao et Lund (2004), Anderson et Meerschaert (2005), Bentarzi et Aknouche (2005), Bentarzi et *al.* (2008), Aknouche et *al.* (2008), Aknouche et Hamdi (2009), Hamdi (2012), Guerbyenne et Hamdi (2015) et bien d'autres. Le succès des modèles $PARMA$ est dû à leur adéquation et leur efficacité dans la modélisation de plusieurs phénomènes stochastiques qui affichent une structure d'autocorrélation périodique qui ne peut être exprimée de manière adéquate par les modèles saisonniers classiques ($SARIMA$). Une autre raison importante de ce succès, est que les modèles $PARMA$ peuvent être exploités dans l'analyse des modèles $ARMA$ vectoriels ($VARMA$), afin de réduire le nombre de paramètres du modèle de manière remarquable.

Cependant, les séries financières exhibent des dynamiques statistiques complexes qui sont difficiles à reproduire à travers des modèles stochastiques linéaires. Ces dynamiques sont souvent dites faits stylisés des séries financières, tels que le regroupement de volatilité, la lourdeur des queues des distributions, l'excès de kurtosis, le changement de régime et la multimodalité. Ces propriétés illustrent la difficulté de la modélisation des séries financières où les hypothèses de linéarité et d'homoscédasticité se révèlent restreintes et souvent inadéquates en présence de ces faits stylisés et devraient donc être abandonnées. Pour cette raison, plusieurs modèles non linéaires ont été introduits dans la littérature pour prendre en charge ce genre de séries.

Les modèles à changement de régimes Markoviens (MS) ont attiré beaucoup d'attention depuis l'article fondateur d'Hamilton (1989). Dans les modèles MS, il existe un mécanisme de transition qui repose sur un processus d'état latent qui est supposé être une chaîne de Markov. A chaque période de temps, il existe donc une certaine probabilité d'appartenir à un régime et une probabilité de transition d'un régime à un autre. De nombreux travaux de prospection et d'analyse des modèles autorégressifs moyennes mobiles à changement de régimes Markoviens (MS-$ARMA$) ont constitué jusqu'à présent le centre d'intérêt de plusieurs chercheurs dont Hamilton (1994), Kim (1994), Krolzig (1997), Francq et Zakoïan (2001, 2002), Zhang and Stine (2001), Yao (2001), Psaradakis et Spagnolo (2003, 2006), Douc et *al.* (2004), Lee (2005), Chen et Tsay (2011) et bien d'autres.

Vue l'importance des deux formulations MS et $PARMA$, nous proposons de combiner ces deux approches pour obtenir un nouveau modèle afin de capturer, non seulement, les changements de régimes, mais aussi la périodicité cachée dans la structure d'autocovariance ainsi que d'autres traits des séries financières. Le nouveau modèle que nous proposons est un modèle $PARMA$ à changement de régimes Markovien (MS-$PARMA$) et nous le définissons comme un processus bivarié $\{(y_t, \Delta_t)\,; t \in \mathbb{Z}\}$ dans lequel le processus Δ_t, qui gouverne le changement de régime est une chaîne de Markov à espace d'états fini, homogène et ergodique, et y_t est un processus $PARMA$.

Ce chapitre sera organisé de la manière suivante. Dans la Section 2, nous rappelons la définition des processus périodiquement corrélés ainsi que les processus $PARMA$. Dans la Section 3, nous présentons la classe des modèles MS-$PARMA$ et nous définissons quelques hypothèses à propos de ces modèles. Par la suite, nous allons établir, dans la Section 4, quelques propriétés probabilistes du modèle proposé, tels que la stationnarité périodique stricte et l'existence des moments d'ordre supérieur. Nous établissons également, l'expression explicite de ces moments sous la condition d'existence établie. Nous proposons dans la même section une procédure de calcul des autocovariances du modèle MS-$PARMA$ basée sur les équations de Yule-Walker périodiques. Cette procédure permet de calculer les premières autocovariances de démarrage comme étant la solution d'un système linéaire. Dans la section 5, nous exposons une méthode d'estimation pour les paramètres de notre modèle. Nous présentons, enfin dans la Section 6, une étude de simulation qui permet de tester la performance de la méthode d'estimation proposée.

2.2 Processus périodiquement corrélés et modèles $PARMA$

2.2.1 Processus périodiquement strictement stationnaire

Définition 2.1 *Un processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dit périodiquement strictement stationnaire (p.s.s.) (ou périodique au sens fort) de période $S \in \mathbb{N}^*$, si pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\tau \in \mathbb{Z}$ et $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$, la distribution conjointe de $(y_{t_1}, y_{t_2}, \ldots, y_{t_n})$ est la même que celle de $(y_{t_1+\tau S}, y_{t_2+\tau S}, \ldots, y_{t_n+\tau S})$.*

Il est évident que, si $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus *p.s.s.* les distributions fini-dimensionnelles sont périodiquement invariantes par translation dans le temps. Comme sous-classe, particulière et importante, de la classe des processus *p.s.s.* est celle des variables aléatoires indépendantes et périodiquement distribuées.

Définition 2.2 *Une suite de variables aléatoires $\{\epsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dite indépendante et périodiquement distribuée (i.p.d.) de période S, si :*

1. *$\{\epsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes,*
2. *la distribution de ϵ_t est la même que celle de $\epsilon_{t+\tau S}$, pour tout $t, \tau \in \mathbb{Z}$.*

Une suite *i.p.d.* de période S est un processus *p.s.s.* de période S. De plus, si $S = 1$, elle coïncide avec une suite de variables aléatoires *i.i.d.*

2.2.2 Processus périodiquement corrélés

Définition 2.3 *Un processus du second ordre $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dit périodiquement corrélé (faiblement périodique), s'il existe un entier strictement positif S, tel que la moyenne et la fonction d'autocovariance sont S-périodiques dans le temps, i.e.*

$$\begin{aligned} \mu_{t+\tau S} &= \mu_t, \ \forall t, \tau \in \mathbb{Z}, \\ \gamma_h^{(t+\tau S)} &= \gamma_h^{(t)}, \ \forall t, \tau, h \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

où $\mu_t = \mathbb{E}(y_t)$ est la moyenne du processus et $\gamma_h^{(t)} = \mathbb{E}(y_t y_{t+h})$ est la fonction d'autocovariance à l'instant t pour un retard h. En prenant compte de la périodicité de cette dernière, nous avons

$$\gamma_h^{(s+\tau S)} = \gamma_h^{(s)},$$

et

$$\gamma_{-h}^{(s)} = \gamma_h^{(s+h)}.$$

Le concept de corrélation périodique a été introduit par Gladyshev (1961) . Dans cet article fondateur, Gladyshev a établi une relation bijective entre les processus périodiquement corrélés univariés de période S et les processus S-variés stationnaires au second ordre. Cette relation permet d'étudier quelques propriétés d'un processus périodiquement corrélé de période S, à travers le processus S-varié stationnaire qui lui est associé.

Théorème 2.1 (Gladyshev, 1961) *Soit $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ un processus périodiquement corrélé de période S. Pour tout $t, \tau \in \mathbb{Z}$ et $1 \leq s \leq S$ tels que $t = s + \tau S$, on définit le processus S-varié $\{Y(\tau); \tau \in \mathbb{Z}\}$ par*

$$Y(\tau) = (Y_1(\tau), Y_2(\tau), \ldots, Y_S(\tau))' = (y_{1+\tau S}, y_{2+\tau S}, \ldots, y_{S+\tau S})'.$$

Alors, le processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est périodiquement corrélé si et seulement si le processus $\{Y(\tau); \tau \in \mathbb{Z}\}$ correspondant est stationnaire au second ordre.

Une classe simple et importante de processus périodiquement corrélés est celle des processus *bruit blanc périodiques.*

Définition 2.4 *Un processus $\{\epsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dit processus bruit blanc périodique, s'il vérifie les propriétés suivante :*

1. *Le processus $\{\epsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est centré, i.e., $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$.*
2. *Sa variance est S-périodique, i.e., $\mathbb{E}\left(\epsilon^2_{s+\tau S}\right) = \mathbb{E}\left(\epsilon^2_s\right)$, pour $s = 1, 2, \ldots, S$ et $t \in \mathbb{Z}$.*
3. *Le processus $\{\epsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est non corrélé, i.e., $\mathbb{E}(\epsilon_t \epsilon_s) = 0$, pour tout $t, s \in \mathbb{Z}$, tel que $t \neq s$.*

2.2.3 Modèles $ARMA$ périodiques

Les techniques standards d'analyse des séries chronologiques ont longtemps reposé sur les propriétés fondamentales de linéarité et de stationnarité. Cependant, de nombreuses recherches ont démontré que ces deux hypothèses n'étaient qu'un moyen fictif apportant un confort appréciable dans l'étude probabiliste et statistique du modèle. Le recours à des modèles plus flexibles est alors apparu comme une nécessité pour la modélisation de certaines séries temporelles. Par exemple, la structure périodique de nombreuses séries chronologiques et l'insuffisance des modèles saisonniers $ARMA$ ($SARMA$) à coefficients constants ont imposé la nécessité d'introduire des formulations avec des paramètres dépendant du temps (e.g. Tiao et Grupe, 1980). Parmi ces formulations, nous retrouvons celle des modèles dont les paramètres sont périodiques dans le temps. Cette classe de modèles permet de représenter les processus du second ordre, dont les fonctions d'autocovariance sont périodiques dans le temps. Elle a été largement utilisée pour décrire plusieurs séries temporelles avec des dynamiques périodiques, que nous rencontrons dans différents domaines, notamment en environnement (Salas et *al.*, 1983 ; Vecchia, 1985a, b ; Jyménez et *al.*, 1989), en économie (Cleveland et Tiao, 1979 ; Franses, 1996 ; Franses et Paap ; 2004) et bien d'autres.

Nous rappelons qu'un processus périodiquement corrélé $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ de période S, admet une représentation autorégressive moyenne mobile périodique d'ordres p_t et q_t, notée $PARMA_S\left(p_t, q_t\right)$, s'il est solution d'une équation aux différences stochastique linéaire de la forme

$$y_t - \sum_{i=1}^{p_t} \phi_{t,i} y_{t-i} = \epsilon_t - \sum_{j=1}^{q_t} \theta_{t,j} \epsilon_{t-j}, \tag{2.1}$$

où $\{\epsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus bruit blanc périodique de variance σ_t^2. Les paramètres $\phi_{t,i}$, $i = 1, \ldots, p_t$ et $\theta_{t,j}$, $j = 1, \ldots, q_t$, la variance du bruit blanc σ_t^2 et les ordres p_t et q_t sont des fonctions S-périodiques dans le temps. Le modèle $PARMA$ est généralement écrit sous la forme suivante

$$\phi_t\left(L\right) y_t = \theta_t\left(L\right) \epsilon_t,$$

où $\phi_t\left(L\right) = 1 - \sum_{i=1}^{p_t} \phi_{t,i} L^i$, $\theta_t\left(L\right) = 1 - \sum_{j=1}^{q_t} \theta_{t,j} L^j$ et L est l'opérateur de retard.

Notons que lorsque $q_t = 0$, le modèle précédent, se réduit à un modèle autorégressif S-périodique d'ordre p_t, noté $PAR_S\left(p_t\right)$

$$y_t - \sum_{i=1}^{p_t} \phi_{t,i} y_{t-i} = \epsilon_t. \tag{2.2}$$

De même, si $p_t = 0$, nous obtenons un modèle moyenne mobile S-périodique d'ordre q_t, noté $PMA_S\left(q_t\right)$

$$y_t = \epsilon_t - \sum_{j=1}^{q_t} \theta_{t,j} \epsilon_{t-j}. \tag{2.3}$$

Plusieurs chercheurs se sont intéressés à l'étude des propriétés probabilistes des modèles $PARMA$. Tiao et Grupe (1980) ont obtenu une condition nécessaire et suffisante pour la causalité du modèle $PARMA$ à partir du modèle $ARMA$ multivarié qui lui est associé, en utilisant l'approche de Gladyshev. Vecchia (1985b) a exprimé le même résultat sous une forme plus explicite. Ula (1990) a donné des conditions explicites pour la stationnarité périodique du modèle $PARMA\left(1, 1\right)$ multivarié, qui peuvent aussi être appliquées dans la cas d'un modèle $PARMA\left(1, q\right)$, vue que la stationnarité périodique implique seulement la partie autorégressive du modèle.

Bentarzi et Hallin (1994) ont obtenu une condition nécessaire et suffisante pour l'inversibilité d'un modèle $PMA_S(q)$ m-varié en utilisant l'approche dite *order-span lumping*. Cette approche consiste à représenter le modèle m-varié $PMA_S(q)$ par un modèle mq-varié moyenne mobile $\mathbb{S}$-périodique d'ordre 1 ($PMA_{\mathbb{S}}(1)$), où $\mathbb{S}$ est un entier tel que $q\mathbb{S}$ est le plus petit multiplicateur commun de q et S. Ula et Smadi (1997) ont adopté cette approche pour établir une condition nécessaire et suffisante de causalité du modèle $PARMA$ multivarié ($PVARMA$). Une autre condition nécessaire et suffisante équivalente pour la causalité d'un modèle PAR multivarié a été établie par Aknouche (2007) en écrivant le modèle sous forme d'une représentation espace d'état. Shao et Lund (2004) ont présenté des algorithmes pour le calcul des autocovariances et des autocorrélations partielles, basés sur l'algorithme de Durbin-Levinson et l'algorithme des innovations. Aknouche et *al.* (2008) ont proposé une procédure qui permet de calculer les autocovariances d'un modèle $PARMA$ basée sur des équations similaires aux équations de Yule-Walker, dite équations de Yule-Walker périodiques. Aknouche et Hamdi (2009) ont proposé une procédure pour calculer les autocovariances d'un modèle $PVARMA$ en se basant sur la représentation espace d'état de celui-ci. Cette méthode permet de calculer les autocovariances pour différentes saisons séparément et elle généralise la méthode proposée par Aknouche (2007) dans le cadre des modèles $PVAR$.

En ce qui concerne l'inférence statistique des modèles $PARMA$, plusieurs chercheurs se sont intéressés à différents problèmes durant ces trois dernières décennies. Parmi ces problèmes, nous citons l'estimation des paramètres en proposant diverses méthodes, l'évaluation de la fonction de vraisemblance, les propriétés asymptotiques des estimateurs ainsi que le calcul de la matrice d'information de Fisher. Plusieurs chercheurs ont proposé des solutions à ces problèmes statistiques, parmi lesquels Pagano (1978) qui a été le premier qui a considéré l'estimation des paramètres des modèles autorégressifs périodiques en utilisant la méthode des moments. Salas et *al.* (1982) ont suggéré d'estimer les paramètres des modèles $PARMA$ en utilisant les équations dites de Yule-Walker périodiques. Vecchia (1985a, b) a développé une procédure qui permet d'évaluer la fonction de vraisemblance des modèles $PARMA$ avec un bruit blanc gaussien de façon approximative. Cette procédure peut être utilisée seulement pour des petits ordres ou pour de petite période. Cipra (1985) a proposé une procédure d'estimation des modèles PMA en se basant sur la méthode de Durbin et sur les résultats de Pagano (1978). Li et Hui (1988) ont proposé une méthode pour évaluer la fonction de vraisemblance exacte du modèle $PARMA$. Cependant, leur procédure requiert la décomposition de Cholesky d'une matrice carrée de dimension égale à la taille de la série, ce qui est très couteux pour des séries de grande taille. Jimenez et *al.* (1989) ont proposé un algorithme récursif plus efficace pour l'estimation des modèles $PARMA$ en écrivant ces modèles sous forme d'une représentation espace d'état et en utilisant le filtre de Kalman. Toutefois, cette méthode nécessite un nombre important d'opérations préliminaires pour démarrer la récursion. Adams et Goodwin (1995) ont proposé une méthode d'estimation en-ligne basée sur des méthodes de contrôle automatique. Boshnakov (1996) a donné un algorithme récursif pour estimer les paramètres des modèles $PARMA$ en se basant sur les travaux de Durbin (1960) , Sakai (1982) et Franke (1985). Anderson et *al.* (1999) ont développé un algorithme des innovations pour estimer les paramètres d'un $PARMA$. D'autre part, Lund et Basawa (2000) ont combiné la méthode de Ansley (1979), qui permet l'évaluation de la fonction de vraisemblance des processus $ARMA$ classiques, et l'algorithme des innovations afin d'obtenir un algorithme efficace permettant d'évaluer la fonction de vraisemblance des modèles $PARMA$. En adoptant la méthode d'innovation, Aknouche et Hamdi (2009) ont proposé deux algorithmes pour l'évaluation de la fonction de vraisemblance des modèles $PVARMA$ Gaussiens. Dans le premier, les innovations empiriques sont obtenues par le filtre de Kalman alors que dans le deuxième, elles sont obtenues par les équations de Chandrasekhar périodiques. Ainsi, ils ont considéré une représentation espace d'états périodique du modèle sous-jacent, pour lequel la fonction de vraisemblance est efficacement dérivée en utilisant la procédure proposée par les mêmes auteurs, pour calculer les autocovariances dont on a besoin, pour évaluer les valeurs initiales des deux filtres Kalman et Chandrasekhar. Guerbyenne et Hamdi (2015) ont adapté la méthode MV proposée par Stoffer et Wall (1991), basée sur la technique bootstrap, au cas périodique et ils ont étudié la performance de cette procédure dans le cadre des séries de petites tailles et pour des erreurs non gaussiennes. Anderson et Meerschaert (2005) ont établi la distribution asymptotique des estimateurs obtenus par Anderson et *al.* (1999), sous l'hypothèse de la finitude du moment d'ordre 4 des innovations. Ces résultats asymptotiques permettent de déterminer la significativité des paramètres estimés. Bentarzi et Aknouche (2005) ont proposé un algorithme pour calculer la matrice d'information de Fisher asymptotique associé à un modèle $PARMA$. L'algorithme établi est une extension de l'algorithme proposé par Klein et Mélard (1989) dans le cas des modèles $ARMA$ classiques. Hamdi (2012) a proposé deux algorithmes pour calculer la matrice exacte d'information de Fisher d'un modèle $PARMA$ en utilisant deux approches différentes. Le premier algorithme est un algorithme récursif relativement simple permettant de calculer les éléments de la matrice exacte d'information de Fisher sans faire appel à des différentiations numériques. Le second algorithme permet de déterminer les dérivées de la fonction de vraisemblance et par conséquent la matrice exacte d'information de Fisher en tant que matrice et non pas élément par élément.

Par ailleurs, il est bien connu que dans la modélisation $PARMA$, nous supposons que les observations de chacune des périodes peuvent être décrites par un modèle différent (les paramètres autorégressifs et moyennes mobiles changent périodiquement dans le temps). Une telle propriété peut être utile pour décrire de nombreuses données de séries temporelles économiques qui sont caractérisées par une structure d'autocorrélation périodique, car on peut parfois s'attendre à ce que les agents économiques se comportent différemment selon les périodes. Par exemple, il a été largement démontré que les moyennes et les autocorrélations des rendements et des rendements au carré du taux de change varient au cours de la semaine (e.g. Franses et Van Dijk, 2000). Par conséquent, nous pouvons dire que chaque jour de la semaine constitue un régime différent. Cet effet saisonnier peut être interprété comme un comportement déterministe de changement de régime. En effet, le régime qui survient à un moment donné est connu avec certitude à l'avance. D'autre part, on peut observer que les autocorrélations des rendements des taux de change tendent à être plus importantes pendant les périodes de faible volatilité et plus faibles pendant les périodes de forte volatilité (e.g. Franses et Van Dijk, 2000). Par conséquent, les périodes de volatilité faible et élevée peuvent être interprétées comme des régimes distincts. Ainsi, le niveau de volatilité peut être considéré comme un processus déterminant du régime. Contrairement à la périodicité, le niveau de volatilité à l'avenir n'est pas connu avec certitude.

Au cours des dernières années, plusieurs modèles de séries temporelles ont été proposés, dans la littérature économétrique, qui formalisent l'idée de l'existence de différents régimes générés à partir d'un processus stochastique. Un volet important de cette littérature se base sur l'hypothèse d'un mélange de distributions. Le mélange de modèles de séries chronologiques consiste généralement en plusieurs modèles et un processus de transition latent. Selon la structure de cette transition, nous pouvons classer les modèles de changement de régime en plusieurs catégories : modèles à seuil de Tong (1978), modèles à changement de régimes Markovien de Hamilton (1989) et modèles à changement de régimes *i.i.d.* de Wong et Li (2000).

Afin d'ajouter plus de flexibilité à la famille des modèles $PARMA$, nous proposons dans ce qui suit, une nouvelle formulation qui peut être vu comme un mélange de modèles $PARMA$. Le mécanisme de transition d'un régime à l'autre repose sur un processus d'état latent qui est supposé être une chaîne de Markov homogène définie sur un espace d'états fini. Ainsi, cette nouvelle formulation est capable de reproduire non seulement le changement de régime stochastique, mais aussi la périodicité (le changement de régime déterministe) caché dans la structure d'autocovariance des séries économiques en général, et des séries financières en particulier.

2.3 Modèles $PARMA$ à changement de régimes Markovien

Plusieurs modèles de séries chronologiques MS ont été introduits dans la littérature, afin de capturer les faits stylisés caractérisant les séries financières telles que les changements brusques de régimes, l'excès de kurtosis, l'asymétrie et la multimodalité des distributions marginales. Notre attention est ici centrée sur les formulations qui sont capables de modéliser des séries temporelles non linéaires avec une structure d'autocorrélation périodique. Nous nous intéressons aux modèles $PARMA$ à changement de régimes Markovien. Dans ces modèles, les paramètres sont des fonctions périodiques et peuvent changer dans le temps selon une chaîne de Markov.

Définition 2.5 (Aliat et Hamdi, 2017a**)** *On dit qu'un processus stochastique* $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ *est représenté par un modèle* $ARMA$ *périodique à changement de régimes Markovien d'ordres* (p, q) *et de période* S*, s'il vérifie*

$$y_t = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{d} \phi_{t,i}^{(k)} \mathbf{1}_{(\Delta_t = k)} y_{t-i} + \sum_{k=1}^{d} \sigma_t^{(k)} \mathbf{1}_{(\Delta_t = k)} \eta_t + \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{d} \sum_{l=1}^{d} \theta_{t,j}^{(k)} \sigma_{t-j}^{(l)} \mathbf{1}_{(\Delta_t = k)} \mathbf{1}_{(\Delta_{t-j} = l)} \eta_{t-j}, \tag{2.4}$$

où $\mathbf{1}_{(\cdot)}$ *désigne la fonction indicatrice,* (Δ_t) *est une chaîne de Markov homogène à espace d'états fini* $\mathcal{E} = \{1, 2, \ldots, d\}$*, et* $\{\eta_t; t \in \mathbb{Z}\}$ *est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) telles que* $\mathbb{E}(\eta_t) = 0$ *et* $\mathbb{E}(\eta_t^2) = 1$*. Les paramètres* $\phi_{t,i}^{(k)}$*, pour* $1 \leq i \leq p$*,* $\theta_{t,j}^{(k)}$*, pour* $1 \leq j \leq q$*, et* $\sigma_t^{(k)}$ *sont des fonctions périodiques de période* S *(i.e.,* $\phi_{t+\tau S,i}^{(k)} = \phi_{t,i}^{(k)}$*,* $\theta_{t+\tau S,j}^{(k)} = \theta_{t,j}^{(k)}$ *et* $\sigma_{t+\tau S}^{(k)} = \sigma_t^{(k)}$*).*

Cela nous permet de dire qu'un modèle $PARMA$ à changement de régimes Markovien est un processus $PARMA$ dont les paramètres périodiques dépendent, à chaque instant, d'une chaîne de Markov non observable (Δ_t). Nous notons ce modèle $MS - PARMA_S(p, q)$. Si p (resp. q) est nul, il est implicitement compris que les termes de la partie autorégressive (resp. moyenne mobile) disparaissent.

Posons

$$\begin{aligned} \phi_{t,i}(\Delta_t) &:= \sum_{k=1}^{d} \phi_{t,i}^{(k)} \mathbf{1}_{(\Delta_t = k)}, \\ \theta_{t,j}(\Delta_t) &:= \sum_{k=1}^{d} \theta_{t,j}^{(k)} \mathbf{1}_{(\Delta_t = k)}, \end{aligned}$$

et

$$\epsilon_t(\Delta_t) := \sum_{k=1}^{d} \sigma_t^{(k)} \mathbf{1}_{(\Delta_t=k)} \eta_t.$$

Par conséquent, le modèle (1) peut être réécrit sous la forme suivante

$$y_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_{t,i}(\Delta_t) y_{t-i} + \epsilon_t(\Delta_t) + \sum_{j=1}^{q} \theta_{t,j}(\Delta_t) \epsilon_{t-j}(\Delta_{t-j}). \tag{2.5}$$

De l'équation (2.5), on voit bien que le modèle $MS-PARMA$ est une extension d'un $MS-ARMA$ en permettant aux coefficients autorégressifs et moyennes mobiles ainsi que la variance du bruit blanc dans chaque régime d'être périodique. En effet, si $S=1$, on aura la représentation $MS-ARMA$ proposé et analysée par Francq et Zakoïan (2001).

Tout au long du reste de ce chapitre, nous allons utiliser les hypothèses suivantes : les processus $\{\eta_t\}$ et (Δ_t) sont supposés indépendants. En outre, (Δ_t) est une chaîne de Markov homogène, stationnaire, irréductible et apériodique à espace d'état fini $\mathcal{E}=\{1,2,\ldots,d\}$.

Les probabilités stationnaires de (Δ_t) sont notées par $\pi(k) = P(\Delta_1 = k)$, et la matrice de probabilités de transition est notée par $\mathbb{P}$ et elle est écrite sous la forme suivante

$$\mathbb{P} = (p(k,l))_{k,l=1,\ldots,d} = \begin{pmatrix} p(1,1) & p(2,1) & \cdots & p(d,1) \\ p(1,2) & p(2,2) & \cdots & p(d,2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(1,d) & p(2,d) & \cdots & p(d,d) \end{pmatrix},$$

où $p(k,l) = P(\Delta_t = l \mid \Delta_{t-1} = k)$, et les probabilités de transition en i étapes sont notées $p^{(i)}(k,l) = P(\Delta_t = l \mid \Delta_{t-i} = k)$, pour $k,l \in \mathcal{E}$ et $i \geq 1$.

2.4 Propriétés probabilistes d'un modèle $MS-PARMA$

2.4.1 Stationnarité périodique stricte

Dans cette section, nous allons donner une condition suffisante sous laquelle le modèle $MS-PARMA$ (2.4) admet une unique solution *p.s.s.* Comme pour de nombreux modèles de séries chronologiques périodiques (e.g., Aknouche et Bentarzi (2008) pour le cas d'un modèle $GARCH$ périodique, Aknouche et Guerbyenne (2009a) pour le modèle autorégressif double périodique, Aknouche et Guerbyenne (2009b) pour le modèle autorégressif périodique à coefficients aléatoires), il est utile de réécrire

(2.5) sous la forme d'une représentation markovienne équivalente, également appelée autorégressive à coefficients aléatoires, comme suit

$$z_t = A_t z_{t-1} + b_t, \tag{2.6}$$

où

$$\begin{aligned}
z_t &= \left(y_t, ..., y_{t-p+1}, \epsilon_t\left(\Delta_t\right), ..., \epsilon_{t-q+1}\left(\Delta_{t-q+1}\right)\right)', \\
A_t &= \begin{pmatrix} \phi_{t,1:p-1}\left(\Delta_t\right) & \phi_{t,p}\left(\Delta_t\right) & \theta_{t,1:q-1}\left(\Delta_t\right) & \theta_{t,q}\left(\Delta_t\right) \\ \mathbf{I}_{p-1} & \mathbf{0}_{(p-1)\times 1} & \mathbf{0}_{(p-1)\times(q-1)} & \mathbf{0}_{(p-1)\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times(p-1)} & 0 & \mathbf{0}_{1\times(q-1)} & 0 \\ \mathbf{0}_{(q-1)\times(p-1)} & \mathbf{0}_{(q-1)\times 1} & \mathbf{I}_{q-1} & \mathbf{0}_{(q-1)\times 1} \end{pmatrix}, \\
\phi_{t,1:p-1}\left(\Delta_t\right) &= \left(\phi_{t,1}\left(\Delta_t\right), ..., \phi_{t,p-1}\left(\Delta_t\right)\right), \\
\theta_{t,1:q-1}\left(\Delta_t\right) &= \left(\theta_{t,1}\left(\Delta_t\right), ..., \theta_{t,q-1}\left(\Delta_t\right)\right),
\end{aligned}$$

et

$$b_t = \left(\epsilon_t\left(\Delta_t\right), \mathbf{0}_{1\times(p-1)}, \epsilon_t\left(\Delta_t\right), \mathbf{0}_{1\times(q-1)}\right)'.$$

Ainsi, l'étude de la stationnarité périodique de la solution de (2.5) se déduit immédiatement de l'étude de la solution de (2.6) qui diffère de la formulation standard avec des coefficients stationnaires et ergodiques (cf. Bougerol et Picard, 1992 ; Francq et Zakoïan, 2001). Les coefficients (A_t, b_t) sont plutôt périodiquement stationnaires et périodiquement ergodiques. Notons qu'une équation similaire à (2.6) a été étudiée par Aknouche et Guerbyenne $(2009a, b)$. L'outil clé dans l'étude de la stationnarité périodique stricte est le plus grand exposant de Lyapunov associé à la suite des matrices aléatoires $i.p.d.$ définies par Aknouche et Guerbyenne $(2009a)$.

Si n, m sont deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{k})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{k}$. Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur l'espace des matrices de dimension r, $\mathcal{M}_{r\times r}(\mathbb{R})$, où $r = p+q$. Alors, l'exposant de Lyapunov associé à la suite des matrices aléatoires périodiquement stationnaires et périodiquement ergodiques $A = \{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est défini par

$$\gamma^S(A) := \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \mathbb{E}\left\{\log \|A_{nS} A_{nS-1} \dots A_1\|\right\}, \tag{2.7}$$

lorsque $\sum_{s=1}^{S} \mathbb{E}\left(\log^+ \|A_s\|\right) < \infty$ où pour $x > 0$ $\log^+(x) = \max(\log(x), 0)$.

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour l'existence d'une unique solution $p.s.s.$ de (2.5) qui est aussi périodiquement ergodique.

Théorème 2.2 (Aliat et Hamdi, 2017a**)** *Le modèle* (2.5) *admet une solution nonanticipative et p.s.s. donnée par la première composante de*

$$z_t = b_t + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{l=0}^{k-1} A_{t-l} \right) b_{t-k}, \tag{2.8}$$

si $\gamma^S(A)$ est strictement négatif, où la série (2.8) *converge presque sûrement pour tout $t \in \mathbb{Z}$. De plus, la solution est unique et périodiquement ergodique.*

Preuve. La preuve est similaire à celle d'Aknouche et Guerbyenne (2009b, Theorem 2.1 and Remark 2.1) et donc elle sera omise. ■

Comme dans Francq et Zakoïan (2001), nous pouvons montrer que seule la partie PAR

$$\Phi_t = \begin{pmatrix} \phi_{t,1:p-1}(\Delta_t) & \phi_{t,p}(\Delta_t) \\ \mathbf{I}_{p-1} & \mathbf{0}_{(p-1)\times 1} \end{pmatrix},$$

de la matrice A_t détermine si $\gamma^S(A)$, donné par (2.7), est strictement négatif ou non.

Ecrivons A_t comme suit

$$A_t = \begin{pmatrix} \Phi_t & \Theta_t \\ \mathbf{0}_{q\times p} & J \end{pmatrix},$$

où

$$\Theta_t = \begin{pmatrix} \theta_{t,1:q-1}(\Delta_t) & \theta_{t,q}(\Delta_t) \\ \mathbf{0}_{(p-1)\times(q-1)} & \mathbf{0}_{(p-1)\times 1} \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{1\times(q-1)} & 0 \\ \mathbf{I}_{q-1} & \mathbf{0}_{(q-1)\times 1} \end{pmatrix}.$$

Francq et Zakoïan (2001, p. 343), ont montré que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{Z}$

$$\prod_{l=0}^{k-1} A_{t-l} = \begin{pmatrix} \prod_{l=0}^{k-1} \Phi_{t-l} & \sum_{i=0}^{k-1} \left(\prod_{l=0}^{k-i-2} \Phi_{t-l} \right) \Theta_{t-k+i+1} J^i \\ \mathbf{0}_{q\times p} & J^k \end{pmatrix},$$

et si $k \geq q$, $J^k = 0$. En outre, ils ont montré que pour tout $k \geq q$ et $t \in \mathbb{Z}$, on a

$$\prod_{l=0}^{k-1} A_{t-l} = \left(\prod_{l=0}^{k-q-1} \widetilde{A}_{t-l} \right) \left(\prod_{l=k-q}^{k-1} A_{t-l} \right) = \left(\prod_{l=0}^{k-q-1} A_{t-l} \right) \left(\prod_{l=k-q}^{k-1} \widetilde{A}_{t-l} \right),$$

où $\widetilde{A}_t$ est la matrice obtenue en remplaçant Θ_t et J par, respectivement, $\mathbf{0}_{p\times q}$ et $\mathbf{0}_q$ dans A_t.

D'autre part, la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_{r\times r}(\mathbb{R})$ induit une norme sur $\mathcal{M}_{p\times p}(\mathbb{R})$,en définissant

$$\left\| \widetilde{A}_t \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \Phi_t & \mathbf{0}_{p\times q} \\ \mathbf{0}_{q\times p} & \mathbf{0}_q \end{pmatrix} \right\| = \|\Phi_t\|.$$

Donc,

$$\|A_{nS}A_{nS-1}\dots A_1\| = \|\Phi_{nS}\Phi_{nS-1}\dots\Phi_1\|.$$

Ce qui montre que,

$$\gamma^S(A) = \gamma^S(\Phi) := \inf_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}\mathbb{E}\{\log\|\Phi_{nS}\Phi_{nS-1}\dots\Phi_1\|\}.$$

et donc le plus grand exposant de Lyapunov associé à la suite de matrices $A = \{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ peut être remplacé par celui associé à la suite des matrices $\Phi = \{\Phi_t, t \in \mathbb{Z}\}$, dans la condition suffisante pour l'existence d'une solution nonanticipative *p.s.s.* de (2.5).

Corollaire 2.1 (Aliat et Hamdi, 2017a**)** *Si $\gamma^S(\Phi)$ est strictement négatif, alors le modèle* (2.5) *admet une solution nonanticipative et p.s.s. donnée par la première composante de* (2.8)*, qui converge presque sûrement pour tout $t \in \mathbb{Z}$. De plus, le processus solution est unique et périodiquement ergodique.*

Remarque 2.1 *Si $S = 1$, alors le modèle* (2.5) *admet une solution strictement stationnaire, si*

$$\gamma(A) = \inf_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{E}\left\{\frac{1}{t}\|\Phi_t\Phi_{t-1}\dots\Phi_1\|\right\} < 0.$$

Cette dernière condition est la même que celle obtenue par Francq et Zakoïan (2001) *(Theorem* 1*, p.* 343*) dans le cas d'un modèle non-périodique $MS-ARMA$ univarié.*

2.4.2 Existence des moments et stationnarité périodique au second ordre

Nous cherchons, maintenant, des conditions pour lesquelles le modèle (2.5) admet des moments d'ordre m, où m est un entier positif. Notons $\rho(A)$ le rayon spectral de toute matrice carrée A. Soit $\otimes$ le produit tensoriel ou produit de Kronecker, et rappelons qu'il est défini de la manière suivante : pour deux matrices quelconques $A = (a_{i,j})$ et B, on a $A \otimes B = (a_{i,j}B)$. Pour toute matrice A, soit $A^{[m]} = A \otimes A \otimes \dots \otimes A$, le produit de Kronecker de m fois la matrice A. Pour tout $m \geq 1$, $\mathcal{L}^m$ désigne l'espace de Hilbert des variables aléatoires X définies sur un espace de probabilité, tel que $\|X\|_{\mathcal{L}^m} = (\mathbb{E}\|X\|^m)^{1/m} < +\infty$.

Considérons aussi les matrices suivantes dont nous aurons besoin par la suite

$$\mathbb{P}_{f_t} = \begin{pmatrix} p(1,1)f_t(1) & \cdots & p(d,1)f_t(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p(1,d)f_t(d) & \cdots & p(d,d)f_t(d) \end{pmatrix} \text{ et } \Pi_{f_t} = \begin{pmatrix} \pi(1)f_t(1) \\ \vdots \\ \pi(d)f_t(d) \end{pmatrix},$$

pour toute fonction périodique $f_t : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}_{n\times n'}(\mathbb{R})$, où $\mathcal{M}_{n\times n'}(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices réelles de dimension $n \times n'$ et pour tout entier strictement positif n et n'. En utilisant ces notations, nous commençons par donner le résultat préliminaire suivant qui sera utile dans l'étude de certaines propriétés des processus $MS-PARMA$ ainsi que les processus $MS-PGARCH$ qui font l'objet du Chapitre 3 de cette thèse.

Lemme 2.1 (Aliat et Hamdi, 2017a) *Soient $f_t : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}_{n\times n'}(\mathbb{R})$ et $g_t : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}_{n\times n'}(\mathbb{R})$ deux fonctions périodiques, dans le temps t, de période S (i.e., pour tout $i \in \mathcal{E}$, $f_t(i) = f_{t+\tau S}(i)$ et $g_t(i) = g_{t+\tau S}(i)$, $\forall t, \tau \in \mathbb{Z}$). Alors, pour tout $k > 0$,*

$$\mathbb{E}\left\{f_t(\Delta_t)\ldots f_{t-k+1}(\Delta_{t-k+1})\, g_{t-k}(\Delta_{t-k})\right\} = \mathbb{I}_n\left(\prod_{l=0}^{k-1}\mathbb{P}_{f_{t-l}}\right)\Pi_{g_{t-k}}, \tag{2.9}$$

où $\mathbb{I}_n = (\mathbf{I}_n, \ldots, \mathbf{I}_n)$ est une matrice de dimension $n \times nd$.

Pour mettre l'accent sur la périodicité des fonctions f_t et g_t, ce même résultat peut être réécrit sous la forme équivalente suivante

$$\mathbb{E}\left\{f_t(\Delta_t)\ldots f_{t-k+1}(\Delta_{t-k+1})\, g_{t-k}(\Delta_{t-k})\right\} = \mathbb{I}_n\left(\prod_{l=0}^{S-1}\mathbb{P}_{f_{s-l}}\right)^{\delta}\left(\prod_{l=0}^{\nu-1}\mathbb{P}_{f_{s-l}}\right)\Pi_{g_{s-\nu}}, \tag{2.10}$$

où $t = s + S\tau$ et $k = \nu + S\delta$ tel que $\tau \in \mathbb{Z}$, $\delta \in \mathbb{N}$ et $s, \nu \in \{1, 2, \ldots, S\}$.

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left\{f_t(\Delta_t)\ldots f_{t-k+1}(\Delta_{t-k+1})\, g_{t-k}(\Delta_{t-k})\right\} \\
= \; & \sum_{i_0=1}^{d}\cdots\sum_{i_{k-1}=1}^{d}\sum_{i_k=1}^{d}\left(\prod_{j=0}^{k-1} f_{t-j}(i_j)\right) g_{t-k}(i_k)\, P\left(\Delta_t = i_0, ..., \Delta_{t-k+1} = i_{k-1}, \Delta_{t-k} = i_k\right) \\
= \; & \sum_{i_0=1}^{d}\sum_{i_1=1}^{d}\cdots\sum_{i_{k-1}=1}^{d}\sum_{i_k=1}^{d}\left(\prod_{j=0}^{k-1} f_{t-j}(i_j)\right) g_{t-k}(i_k)\left(\prod_{j=0}^{k-1} p(i_{j+1}, i_j)\right)\pi(i_k).
\end{aligned}$$

La relation (2.9) peut être vérifiée en écrivant le (i,j)-bloc de la matrice $\left(\prod_{l=0}^{k-1}\mathbb{P}_{f_{t-l}}\right)$ comme suit

$$\left(\prod_{l=0}^{k-1}\mathbb{P}_{f_{t-l}}\right)_{i,j} = \sum_{i_1=1}^{d}\sum_{i_2=1}^{d}\cdots\sum_{i_{k-1}=1}^{d} f_t(i)\left(\prod_{l=1}^{k-1} f_{t-l}(i_l)\right) p(i_1, i)\left(\prod_{l=1}^{k-2} p(i_{l+1}, i_l)\right) p(j, i_{k-1}).$$

Cela peut être démontré facilement par récurrence sur k. Par conséquent, le $(i,1)$-bloc de la matrice

$\left(\prod_{l=0}^{k-1}\mathbb{P}_{f_{t-l}}\right)\Pi_{g_{t-k}}$ est donné par

$$\begin{aligned}&\left(\left(\prod_{l=0}^{k-1}\mathbb{P}_{f_{t-l}}\right)\Pi_{g_{t-k}}\right)_{i,1}\\&\quad=\sum_{i_1=1}^{d}\sum_{i_2=1}^{d}\cdots\sum_{i_k=1}^{d}f_t\left(i\right)\left(\prod_{l=1}^{k-1}f_{t-l}\left(i_l\right)\right)p\left(i_1,i\right)\left(\prod_{l=1}^{k-1}p\left(i_{l+1},i_l\right)\right)\pi\left(i_k\right)g_{t-k}\left(i_k\right).\end{aligned}$$

A partir de la périodicité de la fonction f_t, il est facile de voir que $\mathbb{P}_{f_t}$ est une matrice périodique en t. Ce qui achève la preuve. ■

Dans le résultat suivant nous établissons une condition suffisante assurant l'existence de $\mathbb{E}\left(y_t^m\right)$, $m\geq 1$, d'une solution nonanticipative de (2.5). Ceci est équivalent, comme nous l'avons mentionné précédemment, à examiner l'existence d'une solution dans $\mathcal{L}^m$ du processus $\{z_t;\ t\in\mathbb{Z}\}$, défini par (2.8).

Théorème 2.3 (Aliat et Hamdi, 2017a**)** *Supposons que $\mathbb{E}\left(\left|\eta_t\right|^m\right)<\infty$, et que le rayon spectral*

$$\rho\left(\prod_{s=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(\left.\Phi_{S-s}^{[m]}\right|\Delta_{S-s}=\cdot\right)}\right)<1, \tag{2.11}$$

où m est un entier positif. Alors le modèle (2.5) admet une solution unique $\{y_t;\ t\in\mathbb{Z}\}$ nonanticipative et p.s.s. Cette solution est également périodiquement ergodique et satisfait $\mathbb{E}\left(y_t^m\right)<\infty$.

Preuve. Soit

$$z_{t,k}:=\left(\prod_{l=0}^{k-1}A_{t-l}\right)b_{t-k},\text{ pour }k\geq 1,$$

avec la convention $\prod_{k=x}^{y}A_k=\mathbf{I}_r$, pour $x>y$, i.e., $z_{t,0}=b_t$.

De l'indépendance des matrices et du vecteur $A_t,...,A_{t-k+1},b_{t-k}$ conditionnelle à Δ_t, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(z_{t,k}^{[m]}\right)&=\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left(\left.\left(\prod_{l=0}^{k-1}A_{t-l}^{[m]}\right)b_{t-k}^{[m]}\right|\Delta_t,\ldots,\Delta_{t-k}\right)\right\}\\&=\mathbb{E}\left\{\left(\prod_{l=0}^{k-1}\mathbb{E}\left(\left.A_{t-l}^{[m]}\right|\Delta_{t-l}\right)\right)\mathbb{E}\left(\left.b_{t-k}^{[m]}\right|\Delta_{t-k}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Posons $t=s+S\tau$ *et* $k=\nu+S\delta$ *tel que* $\tau\in\mathbb{Z}$, $\delta\in\mathbb{N}$ *et* $s,\nu\in\{1,2,\ldots,S\}$. En utilisant l'équation (2.10) donnée dans le lemme précédent, nous obtenons

$$\mathbb{E}\left(z_{t,k}^{[m]}\right)=\mathbb{I}_r\left(\prod_{l=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(\left.A_{s-l}^{[m]}\right|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}\right)^{\delta}\left(\prod_{l=0}^{\nu-1}\mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(\left.A_{s-l}^{[m]}\right|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}\right)\Pi_{\mathbb{E}\left(\left.b_{s-v}^{[m]}\right|\Delta_{s-v}=\cdot\right)}.$$

Soit $\|\cdot\|$ la norme matricielle telle que $\|X\| = \sum_{i,j} |x_{i,j}|$, où $x_{i,j}$ désigne l'élément générique de la matrice X. En utilisant certaines propriétés du produit de Kronecker, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|z_{t,k}\|_{\mathcal{L}^m} &\leq \left\|\mathbb{E}\left(z_{t,k}^{[m]}\right)\right\|^{1/m} \\
&\leq \|\mathbb{I}_r\|^{1/m} \left\|\left(\prod_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{s-l}^{[m]}\middle|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}\right)^{\delta}\right\|^{1/m} \\
&\quad \times \left\|\prod_{l=0}^{\nu-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{s-l}^{[m]}\middle|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}\right\|^{1/m} \left\|\Pi_{\mathbb{E}\left(b_{s-v}^{[m]}\middle|\Delta_{s-v}=\cdot\right)}\right\|^{1/m}.
\end{aligned}$$

Si le rayon spectral de la matrice $\prod_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{s-l}^{[m]}\middle|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}$ (qui est le même de la matrice $\prod_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(\Phi_{s-l}^{[m]}\middle|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}$ comme l'ont montré Francq et Zakoïan (2001, Appendix A)) est strictement inférieur à 1, alors $\left\|\left(\prod_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{s-l}^{[m]}\middle|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}\right)^{\delta}\right\|$ converge vers zéro à vitesse exponentielle quand $\delta \longrightarrow \infty$. Puisque pour tout s, $\left\|\prod_{l=0}^{\nu-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{s-l}^{[m]}\middle|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}\right\|$ est uniformément bornée par $\max_{1\leq s\leq S} \left\|\prod_{l=0}^{\nu-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{s-l}^{[m]}\middle|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}\right\|$, qui est fini, alors $z_{t,k}$converge vers zéro dans $\mathcal{L}^m$, à une vitesse exponentielle, lorsque $\delta \longrightarrow \infty$. Par conséquent, $z_t = \sum_{k=0}^{\infty} z_{t,k}$ est dans $\mathcal{L}^m$. En outre, par la propriété circulaire du rayon spectral, on voit facilement que

$$\rho\left(\prod_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(\Phi_{s-l}^{[m]}\middle|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}\right) = \rho\left(\prod_{s=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(\Phi_{S-s}^{[m]}\middle|\Delta_{S-s}=\cdot\right)}\right), \text{ pour tout } s,\ 1 \leq s \leq S,$$

ceci implique qu'une condition suffisante pour l'existence de $\mathbb{E}\left(y_t^m\right)$ est alors

$$\rho\left(\prod_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(\Phi_{s-l}^{[m]}\middle|\Delta_{s-l}=\cdot\right)}\right) < 1.$$

De plus, pour tout K, $\sum_{k=0}^{K} z_{t,k}$ est une fonction mesurable, $S-$périodique, d'une suite périodiquement strictement stationnaire et périodiquement ergodique $\{(A_t, b_t)\,; t \in \mathbb{Z}\}$. Alors la solution z_t est $p.s.s.$ et périodiquement ergodique (e.g. Aknouche et Guerbyenne, 2009a). ■

En utilisant le Théorème 2.3, on peut établir une condition d'existence d'une solution périodiquement stationnaire au second ordre, également appelée solution périodiquement faiblement stationnaire ($p.f.s.$).

Corollaire 2.2 (Aliat et Hamdi, 2017a) *Supposons que*

$$\rho\left(\prod_{s=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(\Phi_{S-s}^{[2]}\middle|\Delta_{S-s}=\cdot\right)}\right)<1. \tag{2.12}$$

Alors, pour tout $t\in\mathbb{Z}$, *la série* $z_t=b_t+\sum_{k=1}^{\infty}A_tA_{t-1}\dots A_{t-k+1}b_{t-k}$ *converge dans* $\mathcal{L}^2$ *et le processus* $\{y_t;\ t\in\mathbb{Z}\}$, *défini comme la première composante de* z_t, *est l'unique nonanticipative p.f.s. solution de* (2.5).

Remarque 2.2 *Lorsque* $S=1$, *la condition* (2.12) *coïncide avec la condition suffisante donnée par Francq et Zakoïan (*2001, *Theorem* 2, *pp.346-347) dans le cas d'un modèle* $MS-ARMA$ *univarié.*

2.4.3 Calcul des moments

Les chercheurs sont particulièrement intéressés par la variance, la skewness et la kurtosis des données, de ce fait nous établissons ces moments explicitement pour le modèle $MS-PARMA$ (2.4). Supposons que la condition (2.11) est satisfaite et que $\mathbb{E}\left(|\eta_t|^m\right)<\infty$. Considérons les vecteurs S-périodiques de dimension $dr^m\times 1$ suivants

$$M_{t,m}=\begin{pmatrix}M_{t,m}(1)\\ \vdots\\ M_{t,m}(d)\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}\pi(1)\,\mathbb{E}\left(z_t^{[m]}\middle|\Delta_t=1\right)\\ \vdots\\ \pi(d)\,\mathbb{E}\left(z_t^{[m]}\middle|\Delta_t=d\right)\end{pmatrix}\text{ et }C_{t,m}=\begin{pmatrix}c_m(1)\\ \vdots\\ c_m(2)\end{pmatrix},$$

où les quantités $c_m(k)$ seront définies en fonction de la valeur de m. Alors, les moments inconditionnels $\mathbb{E}\left(z_t^{[m]}\right)$ peuvent être obtenus comme suit

$$\mathbb{E}\left(z_t^{[m]}\right)=\sum_{k=1}^{d}\pi(k)\,\mathbb{E}\left(z_t^{[m]}\middle|\Delta_t=k\right)=\sum_{k=1}^{d}M_{t,m}(k).$$

Il est important de noter que lorsque $m=1$, la condition (2.11) est satisfaite et le processus $\{y_t;\ t\in\mathbb{Z}\}$ est un processus périodiquement stationnaire en moyenne avec des moyennes conditionnelles nulles. Par conséquent, c'est un processus centré.

Pour $m=2$, il est facile de montrer, à partir de (2.6), que le moment conditionnel vérifie (voir Francq et Zakoïan, 2001, pp. 348-349)

$$\pi(k)\,\mathbb{E}\left(z_t^{[2]}\middle|\Delta_t=k\right)=c_2(k)+\left(A_t^{(k)}\right)^{[2]}\sum_{j=1}^{d}\mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[2]}\middle|\Delta_{t-1}=j\right)p(j,k)\,\pi(j),$$

où $A_t^{(k)} = \mathbb{E}\left(A_t\right|\Delta_t = k)$, $b_t^{(k)} = \left(\sigma_t^{(k)}, \mathbf{0}_{1\times(p-1)}, \sigma_t^{(k)}, \mathbf{0}_{1\times(q-1)}\right)'$ et $c_2(k) = \pi(k)\left(b_t^{(k)}\right)^{[2]}$, pour $k = 1, ..., d$, et par suite, nous avons le système suivant

$$M_{t,2} = C_{t,2} + \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_t^{[2]}\middle|\Delta_t = \cdot\right)} M_{t-1,2}.$$

Après $S-1$ replacement successifs dans ce dernier système et en tenant compte de la périodicité de $M_{t,2}$, nous obtenons

$$M_{t,2} = \sum_{i=0}^{S-1}\left(\prod_{j=0}^{i-1}\mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{t-j}^{[2]}\middle|\Delta_{t-j} = \cdot\right)}\right)C_{t-i,2} + \left(\prod_{j=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{t-j}^{[2]}\middle|\Delta_{t-j} = \cdot\right)}\right)M_{t,2}.$$

Ainsi

$$M_{t,2} = \left[\mathbf{I}_{r^2} - \prod_{j=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{t-j}^{[2]}\middle|\Delta_{t-j} = \cdot\right)}\right]^{-1}\left[\sum_{i=0}^{S-1}\left(\prod_{j=0}^{i-1}\mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{t-j}^{[2]}\middle|\Delta_{t-j} = \cdot\right)}\right)C_{t-i,2}\right].$$

Par conséquent, le moment inconditionnel d'ordre deux de z_t peut être obtenu comme suit

$$\mathbb{E}\left(z_t^{[2]}\right) = \sum_{k=1}^{d} M_{t,2}(k) = \mathbb{I}_{r^2} M_{t,2}.$$

Enfin, si $\{y_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ suit le processus (2.4) et si la condition (2.11) est satisfaite pour $m = 2$, alors la forme explicite de la variance, $var(y_t)$, est donnée par la première composante de $\mathbb{E}\left(z_t^{[2]}\right)$, i.e.,

$$\sigma_y^{(t)2} = var(y_t) = H_{r^2}\mathbb{I}_{r^2} M_{t,2},$$

where $H_n = \left(1, \mathbf{0}_{1\times(n-1)}\right)$ est vecteur ligne de dimension n dont le premier élément égal à 1 et les autres éléments sont nuls.

D'autre part, il est, aussi, possible de dériver une récurrence pour $M_{t,m}$, pour $m = 3, 4$, en utilisant la matrice de commutation, K_{n_2,n_1}, qui nous permet de permuter les deux vecteurs de colonne $A \in \mathbb{R}^{n_1}$ et $B \in \mathbb{R}^{n_2}$, d'un produit de Kronecker, comme suit

$$K_{n_2,n_1}(A \otimes B) = B \otimes A,$$

(voir par exemple Magnus and Neudecker (1999, Chapter 2, Theorem 9). Cette matrice de permutation est particulièrement utile pour manipuler les vecteurs aléatoires et leurs moments. En effet, à partir de (2.6), il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} z_t^{[3]} &= b_t^{[3]} + (A_t z_{t-1})^{[3]} \\ &\quad + [\mathbf{I}_{r^3} + (\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r}) + (K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r)(\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r})] \left(b_t^{[2]} \otimes A_t z_{t-1}\right) \\ &\quad + [\mathbf{I}_{r^3} + (\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r}) + (K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r)(\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r})] \left((A_t z_{t-1})^{[2]} \otimes b_t\right), \end{aligned}$$

et en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\Delta_t = k$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \pi(k)\,\mathbb{E}\left(z_t^{[3]} \middle| \Delta_t = k\right) &= \pi(k)\left(b_t^{(k)}\right)^{[3]} \mathbb{E}\left(\eta_t^3\right) + \pi(k)\left(A_t^{(k)}\right)^{[3]} \mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[3]} \middle| \Delta_t = k\right) \\ &= c_3(k) + \left(A_t^{(k)}\right)^{[3]} \sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[3]} \middle| \Delta_{t-1} = j\right) p(j,k)\,\pi(j) \end{aligned}$$

où $c_3(k) = \pi(k)\left(b_t^{(k)}\right)^{[3]} \mathbb{E}\left(\eta_t^3\right)$. Nous avons alors

$$M_{t,3} = C_{t,3} + \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_t^{[3]} \middle| \Delta_t = \cdot\right)} M_{t-1,3},$$

qui donne après $S-1$ remplacements successifs

$$M_{t,3} = \left[\mathbf{I}_{r^3} - \prod_{j=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{t-j}^{[3]} \middle| \Delta_{t-j} = \cdot\right)}\right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{t-j}^{[3]} \middle| \Delta_{t-j} = \cdot\right)}\right) C_{t-i,3}\right].$$

Maintenant, en utilisant les mêmes techniques, pour $m = 4$, nous obtenons

$$\begin{aligned} z_t^{[4]} &= b_t^{[4]} + (A_t z_{t-1})^{[4]} \\ &\quad + [\mathbf{I}_{r^4} + (\mathbf{I}_{r^2} \otimes K_{r,r}) + (\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r)(\mathbf{I}_{r^2} \otimes K_{r,r}) \\ &\quad + (K_r \otimes \mathbf{I}_{r^2})(\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r)(\mathbf{I}_{r^2} \otimes K_{r,r})] \left(b_t^{[3]} \otimes A_t z_{t-1}\right) \\ &\quad + [\mathbf{I}_{r^4} + (\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r) + (K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_{r^2})(\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r) \\ &\quad + (\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r})(\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r) + (\mathbf{I}_{r^2} \otimes K_{r,r})(K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_{r^2})(\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r) \\ &\quad + (\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r)(\mathbf{I}_{r^2} \otimes K_{r,r})(K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_{r^2})(\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r)] \left((A_t z_{t-1})^{[2]} \otimes b_t^{[2]}\right) \\ &\quad + [\mathbf{I}_{r^4} + (\mathbf{I}_{r^2} \otimes K_{r,r}) + (\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r)(\mathbf{I}_{r^2} \otimes K_{r,r}) \\ &\quad + (K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_{r^2})(\mathbf{I}_r \otimes K_{r,r} \otimes \mathbf{I}_r)(\mathbf{I}_{r^2} \otimes K_{r,r})] \left((A_t z_{t-1})^{[3]} \otimes b_t\right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\pi(k)\,\mathbb{E}\left(z_t^{[4]}\middle|\,\Delta_t=k\right) &= \pi(k)\left(b_t^{(k)}\right)^{[4]}\mathbb{E}\left(\eta_t^4\right)\\
&\quad+\pi(k)\left[\mathbf{I}_{r^4}+\left(\mathbf{I}_r\otimes K_{r,r}\otimes\mathbf{I}_r\right)+\left(K_{r,r}\otimes\mathbf{I}_{r^2}\right)\left(\mathbf{I}_r\otimes K_{r,r}\otimes\mathbf{I}_r\right)\right.\\
&\quad+\left(\mathbf{I}_r\otimes K_{r,r}\right)\left(\mathbf{I}_r\otimes K_{r,r}\otimes\mathbf{I}_r\right)+\left(\mathbf{I}_{r^2}\otimes K_{r,r}\right)\left(K_{r,r}\otimes\mathbf{I}_{r^2}\right)\left(\mathbf{I}_r\otimes K_{r,r}\otimes\mathbf{I}_r\right)\\
&\quad\left.+\left(\mathbf{I}_r\otimes K_{r,r}\otimes\mathbf{I}_r\right)\left(\mathbf{I}_{r^2}\otimes K_{r,r}\right)\left(K_{r,r}\otimes\mathbf{I}_{r^2}\right)\left(\mathbf{I}_r\otimes K_{r,r}\otimes\mathbf{I}_r\right)\right]\\
&\quad\times\left(\left(A_t^{(k)}\right)^{[2]}\otimes\left(b_t^{(k)}\right)^{[2]}\right)\mathbb{E}\left(\eta_t^2\right)\mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[2]}\middle|\,\Delta_t=k\right)\\
&\quad+\left(A_t^{(k)}\right)^{[4]}\sum_{j=1}^{d}\mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[4]}\middle|\,\Delta_{t-1}=j\right)p(j,k)\,\pi(j)\\
&= c_4(k)+\left(A_t^{(k)}\right)^{[4]}\sum_{j=1}^{d}\mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[4]}\middle|\,\Delta_{t-1}=j\right)p(j,k)\,\pi(j),
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
c_4(k) &= \pi(k)\left(b_t^{(k)}\right)^{[4]}\mathbb{E}\left(\eta_t^4\right)\\
&\quad+\pi(k)\left[\mathbf{I}_{r^4}+\left(\mathbf{I}_r\otimes K_{r,r}\otimes\mathbf{I}_r\right)+\left(K_{r,r}\otimes\mathbf{I}_{r^2}\right)\left(\mathbf{I}_r\otimes K_{r,r}\otimes\mathbf{I}_r\right)\right.\\
&\quad+\left(\mathbf{I}_r\otimes K_{r,r}\right)\left(\mathbf{I}_r\otimes K_{r,r}\otimes\mathbf{I}_r\right)+\left(\mathbf{I}_{r^2}\otimes K_{r,r}\right)\left(K_{r,r}\otimes\mathbf{I}_{r^2}\right)\left(\mathbf{I}_r\otimes K_{r,r}\otimes\mathbf{I}_r\right)\\
&\quad\left.+\left(\mathbf{I}_r\otimes K_{r,r}\otimes\mathbf{I}_r\right)\left(\mathbf{I}_{r^2}\otimes K_{r,r}\right)\left(K_{r,r}\otimes\mathbf{I}_{r^2}\right)\left(\mathbf{I}_r\otimes K_{r,r}\otimes\mathbf{I}_r\right)\right]\\
&\quad\times\left(\left(A_t^{(k)}\right)^{[2]}\otimes\left(b_t^{(k)}\right)^{[2]}\right)\mathbb{E}\left(\eta_t^2\right)\mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[2]}\middle|\,\Delta_t=k\right)
\end{aligned}$$

à partir de laquelle nous pouvons facilement montrer que

$$M_{t,4}=\left[\mathbf{I}_{r^4}-\prod_{j=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{t-j}^{[4]}\middle|\Delta_{t-j}=\cdot\right)}\right]^{-1}\left[\sum_{i=0}^{S-1}\left(\prod_{j=0}^{i-1}\mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{t-j}^{[4]}\middle|\Delta_{t-j}=\cdot\right)}\right)C_{t-i,4}\right].$$

De façon plus générale, il est facile de voir, à partir de (2.6), que

$$\left(A_t z_{t-1}+b_t\right)^{[m]}=\sum_{l=0}^{m}D_{m,l}\left(\left(A_t z_{t-1}\right)^{[l]}\otimes b_t^{[m-l]}\right),$$

où les matrices $D_{m,l}$ peuvent être obtenues de manière récursive à travers la récurssion suivante

$$D_{m+1,l}=\begin{cases}\mathbf{I}_{r^{m+1}} & \text{if } l=0 \text{ or } l=m+1,\\ \left(D_{m,l-1}\otimes\mathbf{I}_r\right)\left(\mathbf{I}_{r^{l-1}}\otimes K_{r^{l-1},r^{m-l+2}}\right)+\left(D_{m,l}\otimes\mathbf{I}_r\right) & \text{if } 1\le l\le m,\end{cases}$$

avec des valeurs initiales $D_{1,0} = D_{1,1} = \mathbf{I}_r$.

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\Delta_t = k$, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\pi(k)\,\mathbb{E}\left(z_t^{[m]}\Big|\,\Delta_t = k\right)\\&\quad= \pi(k)\textstyle\sum_{l=0}^{m}\mathbb{E}\left(D_{m,l}\left((A_t z_{t-1})^{[l]}\otimes b_t^{[m-l]}\right)\Big|\,\Delta_t = k\right)\\&\quad= c_m(k) + \left(A_t^{(k)}\right)^{[m]}\textstyle\sum_{j=1}^{d}\mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[m]}\Big|\,\Delta_{t-1} = j\right)p(j,k)\,\pi(j),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}c_m(k) &= \pi(k)\left(b_t^{(k)}\right)^{[m]}\mathbb{E}\left(\eta_t^m\right)\\&\quad+\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{d}D_{m,l}\left(\left(A_t^{(k)}\right)^{[l]}\otimes\left(b_t^{(k)}\right)^{[m-l]}\right)\mathbb{E}\left(\eta_t^{m-l}\right)\mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[l]}\Big|\,\Delta_{t-1} = j\right)p(j,k)\,\pi(j).\end{aligned}$$

Par suite,

$$M_{t,m} = C_{t,m} + \mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_t^{[m]}\middle|\Delta_t=\cdot\right)}M_{t-1,m},$$

qui donne après $S-1$ remplacements successifs

$$M_{t,m} = \left[\mathbf{I}_{r^m} - \prod_{j=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{t-j}^{[m]}\middle|\Delta_{t-j}=\cdot\right)}\right]^{-1}\left[\sum_{i=0}^{S-1}\left(\prod_{j=0}^{i-1}\mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(A_{t-j}^{[m]}\middle|\Delta_{t-j}=\cdot\right)}\right)C_{t-i,m}\right].$$

Le résultat suivant donne les expressions explicites des moments d'ordre supérieur (y compris les moments d'ordre deux, trois et quatre) d'un processus MS-$PARMA$.

Proposition 2.1 (Aliat et Hamdi, 2017a**)** *Pour une solution périodiquement stationnaire* $\{y_t;\ t\in\mathbb{Z}\}$ *du modèle* MS-$PARMA$ *défini par* (2.4) *et sous l'hypothèse que la condition* (2.11) *satisfaite et* $\mathbb{E}\left(|\eta_t|^m\right) < \infty$, *nous avons*

$$\mathbb{E}\left(y_t^m\right) = H_{r^m}\mathbb{I}_{r^m}M_{t,m}.$$

Par conséquent, la variance, le coefficient de skewness et de kurtosis de la distribution de $y_{s+\tau S}$ *sont donnés par*

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(s)2} &= H_{r^2}\mathbb{I}_{r^2}M_{s,2},\ s = 1,2,...,S,\\ sk_y^{(s)} &:= \frac{\mathbb{E}\left(y_{s+\tau S}^3\right)}{\left[\mathbb{E}\left(y_{s+\tau S}^2\right)\right]^{3/2}} = \frac{H_{r^3}\mathbb{I}_{r^3}M_{s,3}}{\left[H_{r^2}\mathbb{I}_{r^2}M_{s,2}\right]^{3/2}},\ s = 1,2,...,S,\end{aligned}$$

et

$$\kappa_y^{(s)} := \frac{\mathbb{E}\left(y_{s+\tau S}^4\right)}{\left[\mathbb{E}\left(y_{s+\tau S}^2\right)\right]^2} = \frac{H_{r^4}\mathbb{I}_{r^4}M_{s,4}}{\left[H_{r^2}\mathbb{I}_{r^2}M_{s,2}\right]^2},\ s = 1,2,...,S.$$

2.4.4 Structure d'autocovariance

Une fois que la stationnarité au second ordre est assurée, il sera utile de dériver une formule explicite pour la fonction d'autocovariance du processus $MS-PARMA$. Une première approche permettant de calculer les autocovariances du modèle $MS-PARMA$, utilise la représentation markovienne (2.6) du modèle (voir par exemple Francq et Zakoïan, 2001 et 2008 ; Bibi et Aknouche, 2008).

De (2.6), nous avons pour tout $h \geq 1$,

$$\begin{aligned} z_t \otimes z_{t-h} &= (A_t z_{t-1} + b_t) \otimes z_{t-h} = A_t z_{t-1} \otimes z_{t-h} + b_t \otimes z_{t-h} \\ &= (A_t \otimes \mathbf{I}_r)(z_{t-1} \otimes z_{t-h}) + (b_t \otimes \mathbf{I}_r) z_{t-h}. \end{aligned}$$

En prenant l'espérance des deux membres conditionnellement à $\Delta_t = k$, pour $k = 1, 2, \ldots, d$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(z_t \otimes z_{t-h} \mid \Delta_t = k) &= \mathbb{E}\left[(A_t \otimes \mathbf{I}_r)(z_{t-1} \otimes z_{t-h}) + (b_t \otimes \mathbf{I}_r) z_{t-h} \mid \Delta_t = k\right] \\ &= \mathbb{E}\left[A_t \otimes \mathbf{I}_r \mid \Delta_t = k\right] \mathbb{E}\left[z_{t-1} \otimes z_{t-h} \mid \Delta_t = k\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[b_t \otimes \mathbf{I}_r \mid \Delta_t = k\right] \mathbb{E}\left[z_{t-h} \mid \Delta_t = k\right] \\ &= \left(A_t^{(k)} \otimes \mathbf{I}_r\right) \mathbb{E}(z_{t-1} \otimes z_{t-h} \mid \Delta_t = k), \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} \pi(k) \mathbb{E}(z_t \otimes z_{t-h} \mid \Delta_t = k) &= \pi(k) \left(A_t^{(k)} \otimes \mathbf{I}_r\right) \mathbb{E}(z_{t-1} \otimes z_{t-h} \mid \Delta_t = k) \\ &= \sum_{j=1}^{d} \left(A_t^{(k)} \otimes \mathbf{I}_r\right) \mathbb{E}(z_{t-1} \otimes z_{t-h} \mid \Delta_{t-1} = j) p(j,k) \pi(j) \\ &= \sum_{j=1}^{d} \xi_t(k) \mathbb{E}(z_{t-1} \otimes z_{t-h} \mid \Delta_{t-1} = j) p(j,k) \pi(j). \end{aligned}$$

où $\xi_t(k) = A_t^{(k)} \otimes \mathbf{I}_r$. Par conséquent, nous obtenons la relation de récurrence suivante

$$W_h^{(t)} = \mathbb{P}_{\xi_t(\cdot)} W_{h-1}^{(t-1)},$$

où

$$W_h^{(t)} := \Pi_{\mathbb{E}(z_t \otimes z_{t-h} \mid \Delta_t = \cdot)} = \begin{pmatrix} \pi(1) \mathbb{E}(z_t \otimes z_{t-h} \mid \Delta_t = 1) \\ \vdots \\ \pi(d) \mathbb{E}(z_t \otimes z_{t-h} \mid \Delta_t = d) \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons, alors pour tout $t = 1, ..., S$ et $h \geq 1$

$$\Gamma_h^{(t)} := \mathbb{E}\left(z_t \otimes z_{t-h}\right) = \mathbb{I}_{r^2} W_h^{(t)} = \mathbb{I}_{r^2} \mathbb{P}_{\xi_t(\cdot)} W_{h-1}^{(t-1)}, \tag{2.13}$$

avec valeurs de démarrage $W_0^{(t)} = M_{t,2}$, pour $t = 1, ..., S$. Ainsi, la fonction d'autocovariance du modèle $MS - PARMA$ peut être calculée en utilisant l'algorithme suivant

Algorithme 2.1 (Aliat et Hamdi, 2017**)**

1. *Pour $s = 1, 2, \ldots, S$, calculer $M_{s,2}$ puis $\Gamma_0^{(s)} = \mathbb{I}_{r^2} M_{s,2}$.*
2. *Pour $s = 1, 2, \ldots, S$ et $h \geq 1$, calculer $\Gamma_h^{(s)}$ en utilisant la relation* (2.13)*.*
3. *Pour $s = 1, 2, \ldots, S$ et $h \geq 0$, déduire $\gamma_h^{(s)}$ en utilisant la relation $\gamma_h^{(s)} = H_{r^2} \Gamma_h^{(s)}$.*

Malgré sa simplicité et sa facilité d'implémentation, cette première approche reste inefficace en terme de temps de calcul et d'espace mémoire. En effet, pour chaque retard h et chaque période s, nous avons besoins d'effectuer des opérations sur des variables de dimension $dr^2 = d\left(p+q\right)^2$. Ceci pourrait être très coûteux pour des modèles d'ordres importants et/ou le nombre de mélange est élevé. Afin de réduire cette complexité, nous proposons d'utiliser une deuxième approche basée sur la technique développée par Aknouche et *al.* (2008). En effet, comme le modèle $MS - PARMA$ est un mélange de modèles $PARMA$, sa fonction d'autocovariance doit être similaire à celle du modèle $PARMA$. Les autocovariances du modèle $MS - PARMA$ peuvent être obtenues facilement et satisfont un système d'équation similaire aux équations de Yule-Walker associées à un modèle $PARMA$.

Considérons le modèle $MS - PARMA$ (2.4) que nous supposons causal ou nonanticipatif (la causalité ou la nonanticipativité assure que le processus $\{y_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ dépend seulement du présent et du passé du processus d'innovation ϵ_t, et non pas du future des erreurs). On peut réécrire l'équation (2.4) comme suit

$$y_t = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{d} \phi_{t,i}^{(k)} y_{t-i} \mathbf{1}_{(\Delta_t = k)} + \sum_{j=0}^{q} \sum_{k=1}^{d} \sum_{l=1}^{d} \theta_{t,j}^{(k)} \sigma_{t-j}^{(l)} \eta_{t-j} \mathbf{1}_{(\Delta_t = k)} \mathbf{1}_{(\Delta_{t-j} = l)}, \tag{2.14}$$

où $\theta_{t,0}^{(k)} = 1$, pour tout $1 \leq t \leq S$ et $1 \leq k \leq d$.

En multipliant les deux membres de (2.14) par y_{t-h} $(h \in \mathbb{Z})$ et en prenant l'espérance, nous avons

$$\begin{aligned}
\gamma_h^{(t)} &= \mathbb{E}\left(y_t y_{t-h}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{d}\phi_{t,i}^{(k)} P\left(\Delta_t = k\right)\mathbb{E}\left(y_{t-i}y_{t-h}\right) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{q}\sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\theta_{t,j}^{(k)}\sigma_{t-j}^{(l)} P\left(\Delta_t = k, \Delta_{t-j} = l\right)\mathbb{E}\left(\eta_{t-j}y_{t-h}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{d}\phi_{t,i}^{(k)}\pi\left(k\right)\gamma_{h-i}^{(t-i)} + \sum_{j=0}^{q}\sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\theta_{t,j}^{(k)}\sigma_{t-j}^{(l)} p^{(j)}\left(l,k\right)\pi\left(l\right)\mathbb{E}\left(\eta_{t-j}y_{t-h}\right).
\end{aligned}$$

Comme le modèle (2.4) est causal, il admet la représentation causale suivante

$$y_t = \sum_{m=0}^{\infty}\psi_{t,m}\epsilon_{t-m} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{d}\psi_{t,m}\sigma_{t-m}^{(n)}\mathbf{1}_{(\Delta_{t-m}=n)}\eta_{t-m},$$

où les poids $\psi_{t,m}$ sont absolument sommable dans le sens que $\sum_{m=0}^{\infty}\left|\psi_{t,m}\right| < \infty$. Ces coefficients périodiques peuvent être obtenus récursivement en termes des paramètres du modèle, via la récursion suivante (voir Lund et Basawa 2000, pour le cas $PARMA$), pour $s = 1, ..., S$,

$$\psi_{t,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0, \\ \sum_{k=1}^{d}\theta_{t,m}^{(k)}\mathbf{1}_{(\Delta_t=k)}\mathbf{1}_{(m\leq q)} + \sum_{j=1}^{\min(m,p)}\sum_{k=1}^{d}\phi_{t,m}^{(k)}\mathbf{1}_{(\Delta_t=k)}\psi_{t-j,m-j} & \text{si } m \geq 1. \end{cases}$$

Par conséquent, pour $h \leq j$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\eta_{t-j}y_{t-h}\right) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{d}\psi_{t-h,m}\sigma_{t-h-m}^{(n)} P\left(\Delta_{t-h-m} = n\right)\mathbb{E}\left(\eta_{t-j}\eta_{t-h-m}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{d}\psi_{t-h,j-h}\sigma_{t-j}^{(n)}\pi\left(n\right),
\end{aligned}$$

et $\mathbb{E}\left(\eta_{t-j}y_{t-h}\right) = 0$, pour $j < h$. Alors, nous obtenons les équations de Yule-Walker périodiques qui ont la forme suivante

$$\gamma_h^{(t)} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{d}\phi_{t,i}^{(k)}\pi\left(k\right)\gamma_{h-i}^{(t-i)} + \sum_{j=h}^{q}\sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\sum_{n=1}^{d}\theta_{t,j}^{(k)}\psi_{t-h,j-h}\sigma_{t-j}^{(l)}\sigma_{t-j}^{(n)} p^{(j)}\left(l,k\right)\pi\left(l\right)\pi\left(n\right). \qquad (2.15)$$

Soit $t = s + \tau S$, tel que $1 \leq s \leq S$ et $\tau \in \mathbb{Z}$, on peut réécrire (2.15) de la façon suivante

$$\gamma_h^{(s)} - \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{d}\phi_{s,i}^{(k)}\pi(k)\gamma_{h-i}^{(s-i)} = \sum_{j=h}^{q}\sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\sum_{n=1}^{d}\theta_{s,j}^{(k)}\psi_{s-h,j-h}\sigma_{s-j}^{(l)}\sigma_{s-j}^{(n)}p^{(j)}(l,k)\pi(l)\pi(n), \ \ h \geq 0. \tag{2.16}$$

Notons que ces équations sont similaires à celles de Yule-Walker pour les processus $PARMA$.

Pour établir la fonction d'autocovariance à partir des équations de Yule-Walker (2.16), nous suivons la même approche développée par Aknouche et *al.* (2008), et donc nous aurons besoin de connaitre les valeurs de démarrage de $\gamma_h^{(s)}, 0 \leq h \leq p$ et $1 \leq s \leq S$. Une fois que ces valeurs sont connues, les autocovariances $\gamma_h^{(s)}$ pour $h > p$ et $1 \leq s \leq S$, peuvent être calculées de façon récursive à partir de (2.16). Les autocovariances $\gamma_h^{(s)}$ avec des retards négatifs peuvent être obtenues en utilisant la relation $\gamma_{-h}^{(s)} = \gamma_h^{(s+h)}$. Afin d'obtenir les $p+1$ autocovariances de démarrage, nous pouvons formuler un système linéaire pour accomplir cette tâche. Soit $\boldsymbol{\gamma}$ un vecteur qui contient les $p+1$ autocovariances de démarrage $\gamma_h^{(s)}$ pour chaque saison s, tel que

$$\boldsymbol{\gamma} = \left(\gamma_0^{(1)}, \ldots, \gamma_p^{(1)}, \gamma_0^{(2)}, \ldots, \gamma_p^{(2)}, \ldots, \gamma_0^{(S)}, \ldots, \gamma_p^{(S)}\right)',$$

et $\boldsymbol{\zeta}$ est un vecteur colonne de dimension $S(p+1)$ dont les éléments sont le membre droit de (2.16), tel que

$$\boldsymbol{\zeta} = \left(\zeta_1, \ldots, \zeta_{pS+1}, \zeta_2, \ldots, \zeta_{pS+2}, \ldots, \zeta_S, \ldots, \zeta_{pS+S}\right)',$$

où

$$\zeta_{hS+s} = \sum_{j=h}^{q}\sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}\sum_{n=1}^{d}\theta_{s,j}^{(k)}\psi_{s-h,j-h}\sigma_{s-j}^{(l)}\sigma_{s-j}^{(n)}p^{(j)}(l,k)\pi(l)\pi(n), 0 \leq h \leq p \text{ et } 1 \leq s \leq S.$$

Considérons la matrice fondamentale $\varphi_h^{(s)}$ $(h \geq 0,\ 1 \leq s \leq S)$ d'ordre $(p+1)\times(p+1)$

$$\varphi_h^{(s)} = \begin{cases} \left(\begin{array}{cccccc|c} \multicolumn{6}{l|}{\mathbf{0}_{h\times(p+1-h)}} & \mathbf{0}_h \\ \hline -\sum_{k=1}^{d}\phi_{s,h}^{(k)}\pi(k) & -\sum_{k=1}^{d}\phi_{s,h+1}^{(k)}\pi(k) & \cdots & \cdots & & -\sum_{k=1}^{d}\phi_{s,p}^{(k)}\pi(k) & \\ 0 & -\sum_{k=1}^{d}\phi_{s,h}^{(k)}\pi(k) & 0 & \cdots & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & \mathbf{0}_{(p+1-h)\times h} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & 0 & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & -\sum_{k=1}^{d}\phi_{s,h}^{(k)}\pi(k) & \end{array}\right) & \text{si } 0 \leq h \leq p, \\ \mathbf{0}_{p+1} & \text{si } h \geq p+1. \end{cases}$$

à partir de laquelle est définie la matrice $\mathbf{\Phi}_k^{(s)}$ $(k,\, s \in \{1, ..., S\})$ comme suit

$$\mathbf{\Phi}_k^{(s)} = \sum_{i \equiv 1-k (mod\ S)} \varphi_i^{(s)}, \text{ pour } k = 1, ..., S,$$

Formons maintenant à partir de ces matrices $\left(\mathbf{\Phi}_k^{(s)}\right)$ la matrice circulaire par blocs d'ordre $S(p+1) \times S(p+1)$ donnée par

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_0^{(1)} & \mathbf{\Phi}_{S-1}^{(1)} & \cdots & \mathbf{\Phi}_2^{(1)} & \mathbf{\Phi}_1^{(1)} \\ \mathbf{\Phi}_1^{(2)} & \mathbf{\Phi}_0^{(2)} & \cdots & \mathbf{\Phi}_3^{(2)} & \mathbf{\Phi}_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{\Phi}_{S-2}^{(S-1)} & \mathbf{\Phi}_{S-3}^{(S-1)} & \cdots & \mathbf{\Phi}_0^{(S-1)} & \mathbf{\Phi}_{S-1}^{(S-1)} \\ \mathbf{\Phi}_{S-1}^{(S)} & \mathbf{\Phi}_{S-2}^{(S)} & \cdots & \mathbf{\Phi}_1^{(S)} & \mathbf{\Phi}_0^{(S)} \end{pmatrix}.$$

On peut montrer que les $(p+1)$ autocovariances de démarrage d'un modèle MS-$PARMA$ (2.4) peuvent être obtenues en résolvant un système linéaire, pour $\boldsymbol{\gamma}$ (voir Aknouche et *al.* (2008), pour le cas des modèles $PARMA$).

Proposition 2.2 (Aliat et Hamdi, 2017a**)** *Le vecteur* $\boldsymbol{\gamma}$ *des autocovariances de démarrage est l'unique solution du système linéaire suivant*

$$\mathbf{\Omega}\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\zeta},$$

tant que le modèle (2.4) *soit causal.*

2.5 Estimation des paramètres du modèle MS-$PARMA$

Dans l'estimation du modèle MS-$PARMA$ que nous avons proposé, l'existence de la partie moyenne mobile (MA), requiert la connaissance de tout le passé de la chaîne de Markov qui gouverne les transitions d'un régime à l'autre (toute la trajectoire du régime). Cette dépendance de trajéctoires est dûe au fait que le processus dépend, à chaque instant t, de tous les régimes passés à cet instant, et cela à cause de la nature récursive de l'équation (2.4). Cette dernière caractérisation rend l'estimation de ce genre de modèle une tâche difficile. En effet, le processus (Δ_t) est inobservable, et donc les régimes sont inconnus. De ce fait, nous sommes obligés de sommer sur toutes les trajectoires possibles de (Δ_t) , lors du calcul de la fonction de vraisemblance. Cependant, le nombre de trajectoires possibles augmente de manière exponentielle à travers le temps, ce qui rend l'évaluation exacte de la fonction de vraisemblance très coûteuse. Cette difficulté nous conduit à proposer une procédure d'estimation basée sur une modification du modèle, afin de contourner ce problème.

Dans cette section, nous allons décrire un algorithme simple pour estimer les paramètres du modèle MS-$PARMA$ via la méthode du maximum de vraisemblance (MV). L'algorithme que nous proposons est similaire à son homologue dans le cas non périodique, proposé par Chen et Tsay (2011). Ce dernier est obtenu en combinant les idées de Hamilton (1989) et Gray (1996).

Soit

$$\beta = \left(vec\left(\mathbb{P}\right)', \beta_1^{(1)}, ..., \beta_S^{(1)}, \beta_1^{(2)}, ..., \beta_S^{(2)}, ..., \beta_1^{(d)}, ..., \beta_S^{(d)}\right)',$$

où $\beta_s^{(k)} = \left(\phi_{s,1}^{(k)}, \ldots, \phi_{s,p}^{(k)},\ \theta_{s,1}^{(k)}, \ldots, \theta_{s,q}^{(k)}, \sigma_s^{(k)}\right)$, pour $s = 1, ..., S$ et $k = 1, ..., d$ et $vec(A)$ est l'opérateur usuel de la transformation de la matrice A en vecteur. Afin de pouvoir calculer la fonction de densité conditionnelle (conditionnellement à l'ensemble d'information disponible jusqu'à l'instant $t-1$, noté $\mathcal{F}_{t-1}$) $f\left(y_t|\, \mathcal{F}_{t-1}\right)$, nous avons besoins de calculer l'échantillon des innovations $y_t - \mathbb{E}\left(y_t\,|\mathcal{F}_{t-1}\right)$. Cependant, du fait que les variables (Δ_t) ne sont pas observables et que notre définition (2.4) du modèle MS-$PARMA$ dépend du régime courant et des q régimes précédents, notre problème d'estimation n'est pas standard. Afin de contourner cette difficulté, Chen et Tsay (2011) ont suggéré d'utiliser une autre définition du régime en se basant sur les travaux de Hamilton (1994). Ils ont défini une nouvelle variable Δ_t^* qui énumère toutes les trajectoires possibles de la chaîne de Markov, et qui est définie comme suit

$$\begin{array}{lll}
\Delta_t^* = 1 & \text{si} & \Delta_t = 1, \Delta_{t-1} = 1, \ldots, \Delta_{t-q} = 1, \\
\Delta_t^* = 2 & \text{si} & \Delta_t = 2, \Delta_{t-1} = 1, \ldots, \Delta_{t-q} = 1, \\
\quad\vdots & \ \vdots & \qquad\qquad\quad \vdots \\
\Delta_t^* = d & \text{si} & \Delta_t = d, \Delta_{t-1} = 1, \ldots, \Delta_{t-q} = 1, \\
\Delta_t^* = d+1 & \text{si} & \Delta_t = 1, \Delta_{t-1} = 2, \ldots, \Delta_{t-q} = 1, \\
\Delta_t^* = d+2 & \text{si} & \Delta_t = 2, \Delta_{t-1} = 2, \ldots, \Delta_{t-q} = 1, \\
\quad\vdots & \ \vdots & \qquad\qquad\quad \vdots \\
\Delta_t^* = 2d & \text{si} & \Delta_t = d, \Delta_{t-1} = 2, \ldots, \Delta_{t-q} = 1, \\
\quad\vdots & \ \vdots & \qquad\qquad\quad \vdots \\
\Delta_t^* = d^{q+1} & \text{si} & \Delta_t = d, \Delta_{t-1} = d, \ldots, \Delta_{t-q} = d.
\end{array}$$

A partir de cette définition, nous pouvons caractériser la $j^{\grave{e}me}$ trajectoire, $\Delta_t^* = j$, par

$$\Delta_t^* = j \quad \text{si} \quad \Delta_t = l_0 + 1, \Delta_{t-1} = l_1 + 1, \ldots, \Delta_{t-q} = l_q + 1, \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, ..., d^{q+1},$$

où l_x, $x = 0, \ldots, q$, sont des entiers positifs tels que

$$j - 1 = l_0 \times d^0 + l_1 \times d^1 + l_2 \times d^2 + \cdots + l_q \times d^q,\ 0 \leq l_x < d,$$

avec $(l_q \ldots l_1 l_0)_d$ est l'écriture de $j-1$ dans la base d au lieu de la base dix.

Il est facile de constater que (Δ_t^*) est aussi une chaîne de Markov d'ordre un dont la matrice de probabilités de transition

$$\mathbb{P}^* = \begin{pmatrix} p^*(1,1) & p^*(2,1) & \cdots & p^*(d^{q+1},1) \\ p^*(1,2) & p^*(2,2) & \cdots & p^*(d^{q+1},2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p^*(1,d^{q+1}) & p^*(2,d^{q+1}) & \cdots & p^*(d^{q+1},d^{q+1}) \end{pmatrix},$$

où $p^*(i,j) = P\left(\Delta_t^* = j \mid \Delta_{t-1}^* = i\right)$, pour $i,j = 1,2,...,d^{q+1}$. A partir de la définition de la chaîne de Markov (Δ_t^*), ces probabilités de transition peuvent être calculées explicitement en utilisant la caractérisation précédente de chaque trajectoire. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} & p^*(i,j) \\ & = P\left(\Delta_t = j_0, \Delta_{t-1} = j_1, \ldots, \Delta_{t-q} = j_q \middle| \Delta_{t-1} = i_1, \Delta_{t-2} = i_2, \ldots, \Delta_{t-q} = i_q, \Delta_{t-q-1} = i_{q+1}\right), \end{aligned}$$

donc

$$p^*(i,j) = \begin{cases} p(i_1, j_0) & \text{si } j_1 = i_1,\ j_2 = i_2, \ldots,\ j_q = i_q, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}, \tag{2.17}$$

où $p(k,l)$ est l'élément de la ligne k et la colonne l de la matrice de transition $\mathbb{P}$ de la chaîne de Markov (Δ_t) et les états i et j sont écrits, dans la base d, comme $(i_{q+1} \ldots i_2 i_1)_d$ et $(j_q \ldots j_1 j_0)_d$ respectivement.

Revenant maintenant au calcul de la fonction de vraisemblance du modèle $MS-PARMA$. Pour une réalisation donnée, $\mathcal{Y}_T = (y_1, y_2, ..., y_T)$, du modèle (2.4) et sous l'hypothèse de normalité de η_t, il est possible d'estimer le vecteur des paramètre β, en maximisant la fonction log de vraisemblance par rapport à β (voir Chen et Tsay, 2011) donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\beta) &= \sum_{t=1}^{T} \log\left(f\left(y_t \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right)\right) \\ &= \sum_{t=1}^{T} \log\left(\sum_{j=1}^{d^{q+1}} f\left(y_t \middle| \Delta_t^* = j, \mathcal{F}_{t-1}\right) P\left(\Delta_t^* = j \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right)\right), \end{aligned} \tag{2.18}$$

où $\mathcal{F}_t = (\mathcal{Y}_t, \Lambda_t, \beta)$ est l'ensemble d'information disponible jusqu'à l'instant t, Λ_t est une matrice de dimension $(d^{q+1} \times q)$, dont la $j^{ème}$ colonne contient les espérances conditionnelles de la suite

$(\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \ldots, \epsilon_{t-q+1})$, conditionnellement à $\Delta_t^* = j$ et l'ensemble d'information $\mathcal{F}_{t-1}$

$$\Lambda_t = \begin{pmatrix} \widehat{\epsilon}_{t|\Delta_t^*=1,\mathcal{F}_{t-1}} & \widehat{\epsilon}_{t|\Delta_t^*=2,\mathcal{F}_{t-1}} & \cdots & \widehat{\epsilon}_{t|\Delta_t^*=d^{q+1},\mathcal{F}_{t-1}} \\ \widehat{\epsilon}_{t-1|\Delta_t^*=1,\mathcal{F}_{t-1}} & \widehat{\epsilon}_{t-1|\Delta_t^*=2,\mathcal{F}_{t-1}} & \cdots & \widehat{\epsilon}_{t-1|\Delta_t^*=d^{q+1},\mathcal{F}_{t-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\epsilon}_{t-q+1|\Delta_t^*=1,\mathcal{F}_{t-1}} & \widehat{\epsilon}_{t-q+1|\Delta_t^*=2,\mathcal{F}_{t-1}} & \cdots & \widehat{\epsilon}_{t-q+1|\Delta_t^*=d^{q+1},\mathcal{F}_{t-1}} \end{pmatrix},$$

et

$$f\left(y_t \middle| \Delta_t^* = j, \mathcal{F}_{t-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t^{(j_0)}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{y_t - \mathbb{E}\left(y_t \left| \Delta_t^* = j, \mathcal{F}_{t-1}\right.\right)}{\sigma_t^{(j_0)}} \right)^2 \right\}. \tag{2.19}$$

Afin d'évaluer la fonction log-vraisemblance (2.18), il est nécessaire de calculer les probabilités conditionnelles $P\left(\Delta_t^* = j \left| \mathcal{F}_{t-1}\right.\right)$ et les espérances conditionnelles

$$\widehat{\epsilon}_{t|\Delta_t^*=j,\mathcal{F}_{t-1}} := \mathbb{E}\left(\epsilon_t \left| \Delta_t^* = j, \mathcal{F}_{t-1}\right.\right) = y_t - \mathbb{E}\left(y_t \left| \Delta_t^* = j, \mathcal{F}_{t-1}\right.\right).$$

Ceci peut être achevé en itérant ce système d'équations (voir Hamilton (1994) et Chen et Tsay (2011))

$$\begin{cases} (a) \quad \widehat{\xi}_{t+1|t} = \mathbb{P}^* \times \frac{\widehat{\xi}_{t|t-1} \odot \mathbf{f}_t}{\mathbf{1}\left(\widehat{\xi}_{t|t-1} \odot \mathbf{f}_t\right)}, \\ (b) \quad \widehat{\epsilon}_{t-k|\Delta_t^*=j,\mathcal{F}_{t-1}} = \frac{\Lambda_{t-1}^{(k)}\left(\mathbb{P}_j^{*\prime} \odot \widehat{\xi}_{t-1|t-1}\right)}{\mathbb{P}_j^* \times \widehat{\xi}_{t-1|t-1}}, \text{ pour } k = 1, 2, \ldots, q \text{ et } j = 1, 2, \ldots, d^{q+1}, \\ (c) \quad \widehat{\epsilon}_{t|\Delta_t^*=j,\mathcal{F}_{t-1}} = y_t - \sum_{k=1}^{p} \phi_{t,k}^{(j_0)} y_{t-k} - \sum_{k=1}^{q} \theta_{t,k}^{(j_0)} \widehat{\epsilon}_{t-k|\Delta_t^*=j,\mathcal{F}_{t-1}}, \text{ pour } j = 1, 2, \ldots, d^{q+1}, \end{cases} \tag{2.20}$$

où

$$\widehat{\xi}_{t|t-1} = \begin{pmatrix} P\left(\Delta_t^* = 1 \left| \mathcal{F}_{t-1}\right.\right) \\ P\left(\Delta_t^* = 2 \left| \mathcal{F}_{t-1}\right.\right) \\ \vdots \\ P\left(\Delta_t^* = d^{q+1} \left| \mathcal{F}_{t-1}\right.\right) \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{f}_t = \begin{pmatrix} f\left(y_t \middle| \Delta_t^* = 1, \mathcal{F}_{t-1}\right) \\ f\left(y_t \middle| \Delta_t^* = 2, \mathcal{F}_{t-1}\right) \\ \vdots \\ f\left(y_t \left| \Delta_t^* = d^{q+1}, \mathcal{F}_{t-1}\right.\right) \end{pmatrix}.$$

Ici $\Lambda_t^{(k)}$ représente la $k^{ème}$ ligne de la matrice Λ_t, $\mathbb{P}_j^*$ est la $j^{ème}$ ligne de la matrice de transition $\mathbb{P}^*$, $\mathbf{1}$ est un vecteur ligne de taille d^{q+1} dont tous les éléments sont égaux à un et le symbole $\odot$ désigne le produit terme à terme de deux matrices (produit matriciel de Hadamard).

Les résultats obtenus nous ont permis de définir une procédure à trois étapes pour estimer les paramètres du modèle $MS-PARMA$ par la méthode du maximum de vraisemblance. Ces trois étapes peuvent être récapitulées dans l'algorithme suivant.

Algorithme 2.2 (Aliat et Hamdi, $2017a$**)**

1. *Initialisation :*

   (a) *Construire la matrice des probabilités de transition* $\mathbb{P}^*$ *en utilisant la relation* (2.17).

   (b) *Choisir des valeurs initiales pour le vecteur* $\widehat{\xi}_{1|0}$ *et calculer ensuite* $\widehat{\xi}_{t|t-1}$, *à partir de* $(2.20a)$, *pour* $t = 2, ..., \max(p, q)$. *Pour* $\widehat{\xi}_{1|0}$, *on peut poser par exemple* $\widehat{\xi}_{1|0} = \frac{1}{d^{q+1}} \times \mathbf{1}$.

   (c) *Choisir des valeurs initiales pour les matrices* Λ_t, *pour* $t = 1, ..., \max(p, q)$.

   (d) *Calculer les éléments du vecteur* $\mathbf{f}_t$ *à partir de* (2.19), *pour* $t = 1, ..., q$.

2. *Calcul de la fonction* log *de vraisemblance :*

   (a) *Pour* $t = \max(p, q) + 1$ *à* T,

      i. *Calculer le vecteur* $\widehat{\xi}_{t|t-1}$ *en utilisant* $(2.20a)$.

      ii. *Construire la matrice* Λ_t *en utilisant* $(2.20b)$ *et* $(2.20c)$.

      iii. *Mettre à jour* $\mathbf{f}_t$ *en utilisant* (2.19).

   (b) *Calculer la fonction* log *de vraisemblance* $\mathcal{L}(\beta)$ *à partir de* (2.18).

3. *Utiliser une procédure d'optimisation pour déterminer* $\widehat{\beta}$ *qui maximise* $\mathcal{L}(\beta)$ *sous* d *contraintes linéaires, tels que la somme des éléments de chaque colonne de la matrice* $\mathbb{P}$ *soit égale à* 1.

2.6 Etude de Simulation

Dans cette section, nous réalisons une étude de simulation afin d'évaluer la performance de la méthode d'estimation que nous avons proposée, à travers des séries chronologiques périodiquement corrélées. Nous considérons trois exemples de processus générateur de données $MS - PARMA$, à deux régimes ($d = 2$), dont les résultats sont regroupés dans les tables $1 - 3$. Les valeurs des paramètres de chaque modèle que nous avons considéré, sont choisies de manière à satisfaire la condition de stationnarité périodique (2.11). Nous avons simulé 1000 échantillons avec différentes tailles ($T = 500,\ 1000,\ 1500$ et 2000). Les modèles que nous allons examiner dans cette étude de simulation sont $MS - PARMA_4(1, 0)$ ou bien $MS - PAR_4(1)$, $MS - PARMA_2(1, 1)$ et $MS - PARMA_4(2, 1)$.

Afin d'obtenir une idée sur la performance de la procédure d'estimation du maximum de vraisemblance, que nous avons proposé dans la section précédente, nous avons présenté dans chaque tableau les vraies valeurs (TV) des paramètres de chaque processus générateur de données, la moyenne (ME) et les écarts-types (ESE) de leurs estimations pour les 1000 réplications.

Table 1. Résultats de 1000 simulations d'un modèle $MS\text{-}PAR_4\,(1)$ avec différentes tailles T.

	$T = 500$		$T = 1000$		$T = 1500$		$T = 2000$	
TV	ME	ESE	ME	ESE	ME	ESE	ME	ESE
$p_{1,1} = 0.9000$	0.8941	0.0419	0.8964	0.0272	0.8989	0.0200	0.8999	0.0168
$p_{1,2} = 0.1000$	0.1059	0.0419	0.1036	0.0272	0.1011	0.0200	0.1001	0.0168
$p_{2,1} = 0.2000$	0.2120	0.0867	0.2088	0.0523	0.2035	0.0385	0.2015	0.0343
$p_{2,2} = 0.8000$	0.7880	0.0867	0.7912	0.0523	0.7965	0.0385	0.7985	0.0343
$\phi_{1,1}^{(1)} = 1.2000$	1.2045	0.0848	1.2032	0.0554	1.2002	0.0448	1.2000	0.0384
$\sigma_1^{(1)} = 0.5000$	0.4914	0.0448	0.4960	0.0330	0.4970	0.0257	0.4969	0.0220
$\phi_{2,1}^{(1)} = 0.3000$	0.3060	0.0900	0.3002	0.0601	0.3011	0.0491	0.3033	0.0408
$\sigma_2^{(1)} = 0.7000$	0.6879	0.0688	0.6941	0.0447	0.6963	0.0355	0.6976	0.0309
$\phi_{3,1}^{(1)} = 0.4000$	0.3936	0.1114	0.3993	0.0758	0.3970	0.0592	0.3989	0.0490
$\sigma_3^{(1)} = 0.6000$	0.5900	0.0585	0.5946	0.0408	0.5982	0.0321	0.5984	0.0281
$\phi_{4,1}^{(1)} = -1.1000$	−1.1024	0.0773	−1.0987	0.0574	−1.0989	0.0455	−1.1015	0.0388
$\sigma_4^{(1)} = 0.4000$	0.3942	0.0425	0.3994	0.0287	0.3998	0.0233	0.4003	0.0202
$\phi_{1,1}^{(2)} = 0.5000$	0.5071	0.1241	0.4991	0.0773	0.4978	0.0599	0.5019	0.0514
$\sigma_1^{(2)} = 0.3000$	0.2914	0.0645	0.2955	0.0419	0.2975	0.0319	0.2994	0.0276
$\phi_{2,1}^{(2)} = -0.8000$	−0.7721	0.1896	−0.7917	0.1186	−0.7970	0.0848	−0.7967	0.0718
$\sigma_2^{(2)} = 0.4000$	0.3879	0.0875	0.3948	0.0585	0.3978	0.0467	0.3982	0.0392
$\phi_{3,1}^{(2)} = 0.1000$	0.1051	0.2251	0.1033	0.1455	0.1017	0.1074	0.1033	0.0519
$\sigma_3^{(2)} = 0.6000$	0.5774	0.1022	0.5900	0.0658	0.5950	0.0543	0.5948	0.0469
$\phi_{4,1}^{(2)} = 0.3000$	0.2961	0.1998	0.3091	0.1215	0.2977	0.0980	0.2994	0.0839
$\sigma_4^{(2)} = 0.5000$	0.4848	0.0812	0.4926	0.0550	0.4946	0.0451	0.4952	0.0378

Table 2. Résultats de 1000 simulations d'un modèle $MS\text{-}PARMA_2\,(1,1)$ avec différentes tailles T.

	$T = 500$		$T = 1000$		$T = 1500$		$T = 2000$	
TV	ME	ESE	ME	ESE	ME	ESE	ME	ESE
$p_{1,1} = 0.90$	0.8966	0.0266	0.8994	0.0181	0.8995	0.0145	0.8998	0.0099
$p_{1,2} = 0.10$	0.1034	0.0266	0.1006	0.0181	0.1005	0.0145	0.1002	0.0099
$p_{2,1} = 0.25$	0.2633	0.0738	0.2531	0.0485	0.2505	0.0373	0.2503	0.0251
$p_{2,2} = 0.75$	0.7367	0.0738	0.7469	0.0485	0.7495	0.0373	0.7497	0.0251
$\phi_{1,1}^{(1)} = 0.50$	0.4850	0.1577	0.4934	0.1015	0.4901	0.0827	0.4953	0.0652
$\theta_{1,1}^{(1)} = 1.20$	1.1390	0.3238	1.1004	0.1965	1.1066	0.1658	1.1545	0.1234
$\sigma_1^{(1)} = 1.20$	1.1961	0.0709	1.2019	0.0501	1.2033	0.0399	1.2028	0.0282
$\phi_{2,1}^{(1)} = 0.60$	0.6324	0.1459	0.6184	0.0868	0.6132	0.0741	0.6088	0.0598
$\theta_{2,1}^{(1)} = -0.60$	−0.6333	0.1452	−0.6175	0.0863	−0.6125	0.0743	−0.6076	0.0621
$\sigma_2^{(1)} = 0.55$	0.5401	0.0927	0.5497	0.0591	0.5538	0.0455	0.5534	0.0279
$\phi_{1,1}^{(2)} = 0.40$	0.3678	0.1587	0.3905	0.0976	0.3898	0.0794	0.3907	0.0602
$\theta_{1,1}^{(2)} = 0.85$	0.8967	0.3320	0.8700	0.2081	0.8578	0.1577	0.8553	0.1113
$\sigma_1^{(2)} = 0.20$	0.2052	0.0164	0.2081	0.0106	0.2088	0.0087	0.2052	0.0068
$\phi_{2,1}^{(2)} = 0.50$	0.4888	0.1232	0.4975	0.0767	0.4971	0.0598	0.4977	0.0432
$\theta_{2,1}^{(2)} = 0.35$	0.3609	0.1436	0.3495	0.0862	0.3491	0.0684	0.3495	0.0495
$\sigma_2^{(2)} = 0.40$	0.3946	0.0436	0.3969	0.0282	0.3996	0.0229	0.3988	0.0187

Table 3. Résultats de 1000 simulations d'un modèle MS-$PARMA_4\,(2,1)$ avec différentes tailles T.

	$T=500$		$T=1000$		$T=1500$		$T=2000$	
TV	ME	ESE	ME	ESE	ME	ESE	ME	ESE
$p_{1,1}=0.90$	0.8945	0.0245	0.8977	0.0160	0.8988	0.0133	0.8991	0.0101
$p_{1,2}=0.10$	0.1055	0.0245	0.1023	0.0160	0.1012	0.0133	0.1009	0.0101
$p_{2,1}=0.25$	0.2672	0.0645	0.2583	0.0391	0.2541	0.0309	0.2521	0.0254
$p_{2,2}=0.75$	0.7328	0.0645	0.7417	0.0391	0.7459	0.0309	0.7479	0.0254
$\phi_{1,1}^{(1)}=0.50$	0.4931	0.1312	0.5025	0.0734	0.4956	0.0573	0.4972	0.0395
$\phi_{1,2}^{(1)}=0.80$	0.7881	0.1062	0.7931	0.0702	0.7963	0.0568	0.7973	0.0398
$\theta_{1,1}^{(1)}=0.25$	0.2631	0.1186	0.2504	0.0679	0.2507	0.0549	0.2504	0.0499
$\sigma_1^{(1)}=1.20$	1.1920	0.1015	1.1967	0.0661	1.1963	0.0549	1.1976	0.0422
$\phi_{2,1}^{(1)}=0.60$	0.6197	0.0916	0.6093	0.0566	0.6053	0.0448	0.6021	0.0297
$\phi_{2,2}^{(1)}=-0.30$	-0.3162	0.0929	-0.3078	0.0538	-0.3023	0.0421	-0.3024	0.0335
$\theta_{2,1}^{(1)}=-0.60$	-0.6243	0.0936	-0.6101	0.0593	-0.6059	0.0459	-0.6051	0.0222
$\sigma_2^{(1)}=0.55$	0.4615	0.1728	0.5308	0.0918	0.5509	0.0661	0.5519	0.0454
$\phi_{3,1}^{(1)}=-0.25$	-0.2459	0.1518	-0.2509	0.0954	-0.2500	0.0731	-0.2507	0.0490
$\phi_{3,2}^{(1)}=-0.59$	-0.5868	0.0530	-0.5893	0.0348	-0.5902	0.0267	-0.5897	0.0159
$\theta_{3,1}^{(1)}=0.80$	0.8666	0.4808	0.7933	0.2812	0.7804	0.2081	0.7937	0.1498
$\sigma_3^{(1)}=0.20$	0.1943	0.0249	0.2009	0.0157	0.2031	0.0116	0.2008	0.0092
$\phi_{4,1}^{(1)}=0.15$	0.1462	0.1304	0.1461	0.0835	0.1467	0.0631	0.1484	0.0471
$\phi_{4,2}^{(1)}=-0.50$	-0.5087	0.1938	-0.5042	0.1276	-0.5013	0.0927	-0.5009	0.0602
$\theta_{4,1}^{(1)}=-0.65$	-0.6399	0.2532	-0.6428	0.1480	-0.6378	0.1158	-0.6429	0.0879
$\sigma_4^{(1)}=0.40$	0.3532	0.0924	0.3867	0.0483	0.3942	0.0393	0.3953	0.0252
$\phi_{1,1}^{(2)}=0.40$	0.3581	0.2461	0.3815	0.1425	0.3896	0.0989	0.3921	0.0736
$\phi_{1,2}^{(1)}=-0.18$	-0.1722	0.2457	-0.1741	0.1371	-0.1794	0.0961	-0.1797	0.0751
$\theta_{1,1}^{(2)}=0.85$	0.9467	0.2671	0.8903	0.1569	0.8775	0.1141	0.8670	0.0902
$\sigma_1^{(1)}=0.57$	0.5562	0.0552	0.5641	0.0377	0.5688	0.0307	0.5694	0.0201
$\phi_{2,1}^{(2)}=0.50$	0.4750	0.1624	0.4935	0.0898	0.4944	0.0675	0.4971	0.0502
$\phi_{2,2}^{(2)}=-0.65$	-0.6325	0.1477	-0.6451	0.0789	-0.6454	0.0599	-0.6482	0.0389
$\theta_{2,1}^{(2)}=0.35$	0.4116	0.3022	0.3596	0.1457	0.3545	0.1077	0.3507	0.0795
$\sigma_2^{(2)}=1.00$	0.9428	0.1670	0.9791	0.1040	0.9798	0.0823	0.9818	0.0681
$\phi_{3,1}^{(2)}=0.30$	0.2992	0.2663	0.3015	0.1579	0.3032	0.1228	0.3007	0.0993
$\phi_{3,2}^{(2)}=0.21$	0.2063	0.0996	0.2111	0.0595	0.2102	0.0460	0.2106	0.0307
$\theta_{3,1}^{(2)}=-0.30$	-0.4072	0.9586	-0.3178	0.4050	-0.2969	0.2823	-0.3145	0.1602
$\sigma_3^{(2)}=0.90$	0.8873	0.0940	0.8929	0.0615	0.8976	0.0488	0.8983	0.0393
$\phi_{4,1}^{(2)}=-0.90$	-0.7707	0.4406	-0.8437	0.2563	-0.8688	0.1907	-0.8803	0.1521
$\phi_{4,2}^{(2)}=0.40$	0.3957	0.3390	0.3923	0.1795	0.3973	0.1300	0.3989	0.1090
$\theta_{4,1}^{(2)}=-0.90$	-1.0892	0.5360	-0.9730	0.2982	-0.9460	0.2120	-0.9193	0.1524
$\sigma_4^{(2)}=1.50$	1.4367	0.2603	1.4588	0.1590	1.4822	0.1268	1.4935	0.0958

Le biais et l'écart-type de l'estimation constituent l'objectif principal dans cette étude de simulation. Les résultats obtenus fournissent quelques preuves préliminaires concernant les propriétés des estimateurs MV pour un échantillon de taille finie, dans le cadre d'un modèle $MS-PARMA$. À partir des Tables $1-3$, nous pouvons voir clairement que, même avec des séries de tailles relativement petites, le biais des estimations obtenues est généralement petit. Nous pouvons remarquer également que, dans chacun des exemples que nous avons considéré, le biais diminue à chaque fois que la taille de la série augmente et les estimations sont de plus en plus proches des vraies valeurs.

Notons que pour le deuxième exemple $MS\text{-}PARMA_2\,(1,1)$, les erreurs relatives absolues de toutes les estimations de paramètres (voir Table 2) sont inférieures à 8.3%. D'autre part, de la Table 1 et 3, nous pouvons observer que les écart-types empiriques de certaines estimations de paramètres sont relativement importantes. Par exemple, lorsque la taille de la série est égale à 500, ce résultat est plus frappant pour le paramètre $\phi_{3,1}^{(2)}$. Dans ce cas, la t-stat est d'environ 0.47 et 0.42 pour les modèles $MS\text{-}PAR_4\,(1)$ et $MS\text{-}PARMA_2\,(1,1)$ respectivement. Cette statistique est augmentée à plus de 1.96 lorsque la taille de l'échantillon est augmentée à 2000. En fait, il n'est pas surprenant que le problème d'écart-type empirique relativement important, apparaisse en particulier, lorsque la période est égale à 4. Nous pensons que cela est dû au grand nombre de paramètres estimés. Cependant, avec l'augmentation de la taille de la série ($T \geq 2000$), ce phénomène indésirable disparaît et l'amélioration de l'estimation augmente de manière significative. Ceci montre empiriquement que la propriété de consistance désirable des estimateurs du MV est satisfaite et que la procédure d'estimation proposée donne de bons résultats.

Chapitre 3

Modèles $PGARCH$ à changement de régime Markovien

3.1 Introduction

La modélisation de la volatilité des marchés financiers demeure un domaine de recherche important étant donné le rôle qu'elle joue dans une variété de problèmes financiers tels que les prix d'achat des actifs et la gestion des risques. Parmi les modèles de volatilité, nous retrouvons le modèle $GARCH$ proposé par Bollerslev (1986). Ce modèle est l'un des plus populaires, car il représente un outil puissant pour l'analyse et la prévision de la volatilité des marchés financiers. Le modèle $GARCH$ paramétrise explicitement la volatilité instantanée en utilisant à la fois les variances conditionnelles et les carrés des observations. Après son introduction dans la littérature des séries temporelles, le modèle $GARCH$ a permis de capturer plusieurs régularités statistiques qui caractérisent les séries financières, telles que le regroupement de volatilité et l'excès de kurtosis. Cependant, d'autres traits tels que la multimodalité et les changements récurrents de régime restent non capturés par ce genre de modèles. Ces dernières sont mieux représentées par les modèles à changement de régimes.

Les modèles MS ont connu un fort développement depuis leurs introductions par Hamilton en 1989. Ils ont rajouté plus de flexibilité aux modèles de séries chronologiques classiques. Cai (1994) et Hamilton et Susmel (1994) ont introduit les modèles $ARCH$ à changement de régime Markovien ($MS - ARCH$). Gray (1996) a proposé une formulation $GARCH$ à changement de régimes Markovien ($MS - GARCH$), comptant sur l'hypothèse que la variance conditionnelle, sachant le régime en cours, dépend de l'espérance des variances conditionnelles antérieures, plutôt que de leurs valeurs. Cette formulation a des inconvénients importants, particulièrement en ce qui concerne la prévision de la volatilité, à un horizon $h > 1$, qui s'avère très compliquée. Ceci a motivé Klaassen (2002) de proposer une nouvelle spécification qui rend les prévisions à un horizon quelconque plus pratiques tout en préservant les caractéristiques intéressantes du modèle de Gray (1996). Klaasen (2002) a proposé de modifier la formulation de Gray (1996) en tenant compte du régime actuel et de toutes les observations disponibles, tout en évaluant l'espérance des variances conditionnelles précédentes. Une étude approfondie de la structure probabiliste du modèle $MS-GARCH$ a été établie par Francq et Zakoïan (2005, 2008). D'autres travaux ont été élaborés sur les modèles $MS-GARCH$, nous citons par exemple, Abramson et Cohen (2007), Bauwens et *al.* (2010, 2014), Augustyniak (2013), Billio et *al.* (2016) et bien d'autres.

D'autre part, dans ces dernières décennies, la notion de processus périodiquement corrélés a été exploitée avec succès dans une variété de modèles de séries chronologiques, tels que les modèles $PARMA$ (Vecchia, 1985a, b ; Bentarzi et Hallin, 1994 ; Lund et Basawa, 2000), les modèles $PGARCH$ (Bollerslev et Ghysel, 1996 ; Franses et Paap, 2000), le mélange de modèles autorégressifs périodiques (Shao, 2006 ; Bentarzi et Merzougui, 2011 ; Hamdi, 2015), le mélange de modèles $PARCH$ (Bentarzi et Hamdi, 2008a, b) et le mélange de modèles $PGARCH$ (Hamdi et Souam, 2013 et 2017). En effet, il a été observé que, pour de nombreuses données journalières en finance, les autocorrélations des rendements et des rendements au carré varient au cours de la semaine (e.g. Franses et Van Dijk, 2000 ; Regnard et Zakoïan, 2010). Ainsi, les analystes des séries chronologiques financières sont devenus, de nos jours, plus convaincus de la nécessité d'inclure la périodicité et l'hétéroscédasticité conditionnelle dans un seul modèle. En effet, la classe de modèles $PGARCH$ a montré son adéquation pour capturer la périodicité dans la variance conditionnelle, une propriété qui ne peut pas être expliquée ni par les modèles $ARMA$ linéaires classiques ni par les modèles $GARCH$ stationnaires.

Il est bien connu que les autocorrélations des rendements des données financières tendent, généralement, à être plus importantes pendant les périodes de faible volatilité et plus faibles pendant les périodes de forte volatilité (e.g. Franses et Van Dijk, 2000). Par conséquent, les périodes de volatilité faible et élevée peuvent être interprétées comme deux régimes différents. Ainsi, le niveau de volatilité peut être considéré comme un processus déterminant du régime. Contrairement à la périodicité, le niveau de volatilité à l'avenir n'est pas connu avec certitude ce qui rend les modèles $PGARCH$ inconsistants en présence de ce type de changement de régime non déterministe. Afin d'ajouter plus de flexibilité à la famille des modèles $PGARCH$, nous proposons, dans ce chapitre, une extension du modèle $MS-GARCH$ au cas périodique.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit. Dans la Section 2, nous rappelons la définition des processus $PGARCH$. Dans la Section 3, nous présentons la classe des modèles $PGARCH$ à changement de régimes Markoviens ($MS-PGARCH$). Par la suite, nous allons établir, dans la Section 4, une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une unique solution *p.s.s.* et périodiquement ergodique. Dans la Section 5, nous allons analyser le problème de l'existence d'une solution $p.s.s.$ ayant des moments d'ordre supérieur finis. En outre, l'expression de ces moments, sous la condition d'existence établie, est obtenue. Enfin, la section 6 présente une procédure permettant de calculer les autocovariances.

3.2 Modèles $GARCH$ périodiques

Comme nous l'avons souligné précédemment, les modèles $GARCH$ peuvent ne pas être appropriés pour la modélisation des données financières présentant des changements structurels ou des comportements non stationnaires. Par exemple, les $GARCH$ classiques sont connus pour leur inconsistance dans la modélisation des rendements d'actifs qui exhibent une volatilité saisonnière. Les modèles $GARCH$ périodiques (Bollerslev et Ghysel, 1996), ont été introduits, comme une alternative, pour modéliser ce genre de séries chronologiques.

Nous rappelons qu'un modèle $GARCH$ périodique d'ordres p et q et de période $S \geq 1$, noté $PGARCH_S\,(p,q)$, admet l'écriture suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_t = \sqrt{h_t}\eta_t, \\ h_t = \omega_t + \sum\limits_{i=1}^{q} \alpha_{t,i}\epsilon_{t-i}^2 + \sum\limits_{j=1}^{p} \beta_{t,j}h_{t-j}, \end{array} \right. , \ t \in \mathbb{Z} \tag{3.1}$$

où η_t est une suite de variables aléatoires $i.i.d.$ avec $\mathbb{E}\left(\eta_t\right) = 0$ et $\mathbb{E}\left(\eta_t^2\right) = 1$. Les paramètres ω_t, $\alpha_{t,i}$ pour $1 \leq i \leq q$ et $\beta_{t,j}$ pour $1 \leq j \leq p$ sont des fonctions périodique en t de période S (i.e. $\omega_{t+\tau S} = \omega_t$, $\alpha_{t+\tau S,i} = \alpha_{t,i}$ et $\beta_{t+\tau S,j} = \beta_{t,j}$). Pour exclure la possibilité d'avoir des variances conditionnelles négatives ou nulles, les conditions suivantes sur les paramètres doivent être imposées : $\omega_t > 0$, $\alpha_{t,i} \geq 0$, pour $1 \leq i \leq q$ et $\beta_{t,j} \geq 0$, pour $1 \leq j \leq p$.

En multipliant la deuxième équation dans (3.1) par η_t^2, nous obtenons

$$\epsilon_t^2 = h_t\eta_t^2 = \omega_t\eta_t^2 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_{t,i}\eta_t^2\epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_{t,j}\eta_t^2 h_{t-j},$$

et en définissant les vecteurs aléatoires de taille $(p+q)$,

$$z_t = \left(\epsilon_t^2, \epsilon_{t-1}^2, ..., \epsilon_{t-q+1}^2, h_t, h_{t-1}, ..., h_{t-p+1}\right)' \text{ et } b_t = \left(\omega_t\eta_t^2, \mathbf{0}_{1\times(q-1)}, \omega_t, \mathbf{0}_{1\times(p-1)}\right)'$$

ainsi que la matrice aléatoire A_t d'ordres $(p+q)\times(p+q)$

$$A_t=\begin{pmatrix} \alpha_{t,1:q-1}\eta_t^2 & \alpha_{t,q}\eta_t^2 & \beta_{t,1:p-1}\eta_t^2 & \beta_{t,q}\eta_t^2 \\ \mathbf{I}_{q-1} & \mathbf{0}_{(q-1)\times 1} & \mathbf{0}_{(q-1)\times(p-1)} & \mathbf{0}_{(q-1)\times 1} \\ \alpha_{t,1:q-1} & \alpha_{t,q} & \beta_{t,1:p-1} & \beta_{t,q} \\ \mathbf{0}_{(p-1)\times(q-1)} & \mathbf{0}_{(q-1)\times 1} & \mathbf{I}_{p-1} & \mathbf{0}_{(p-1)\times 1} \end{pmatrix},$$

avec $\alpha_{t,1:q-1}=(\alpha_{t,1},...,\alpha_{t,q-1})$ et $\beta_{t,1:p-1}=\left(\beta_{t,1},...,\beta_{t,p-1}\right)$. Par suite, le modèle (3.1) admet l'écriture Markovienne suivante

$$Y_t=A_tY_{t-1}+B_t. \tag{3.2}$$

Notons que la propriété stationnarité périodique du modèle (3.2) peut être étudiée en examinant la stationnarité d'une certaine transformation appropriée (voir Gladyshev, 1961). En effet, il est bien connu qu'un processus périodiquement stationnaire $\{Y_t,t\in\mathbb{Z}\}$ est équivalent au processus S-varié stationnaire $\{\mathbf{Y}_\tau,\tau\in\mathbb{Z}\}$, où $\mathbf{Y}_\tau=\left(Y'_{1+S\tau},Y'_{2+S\tau},...,Y'_{S+S\tau}\right)$. Ce dernier processus admet la représentation autorégressive généralisée

$$\mathbf{Y}_t=\mathbf{A}_tY_{t-1}+\mathbf{B}_t, \tag{3.3}$$

où $(\mathbf{A}_\tau,\mathbf{B}_\tau)_{\tau\in\mathbb{Z}}$ est une suite $i.i.d.$ dont le (i,j)-bloc de la matrice $\mathbf{A}_\tau$ et le $(i,1)$-bloc du vecteur $\mathbf{B}_\tau$ sont donnés par $(\mathbf{A}_\tau)_{i,j}=\prod_{s=0}^{i-1}A_{i-s+\tau S}\mathbf{1}_{(j=S)}$ et $(\mathbf{B}_\tau)_{i,1}=\sum_{v=1}^{i}\left(\prod_{s=0}^{i-v-1}A_{i-s+\tau S}\right)\mathbf{B}_{v+\tau S}$, $i,j=1,...,S$, respectivement.

La stationnarité périodique stricte des modèles $PGARCH\,(1,1)$ a été étudiée par Aknouche et Bentarzi (2008). Pour les modèles $PGARCH$ plus généraux, les conditions de stationnarité périodique stricte ont été établies par Bibi et Aknouche (2008), Aknouche et Bibi (2009) et Lee et Shin (2009). Bibi et Aknouche (2008) et Lee et Shin (2009) ont utilisé la représentation (3.3) pour obtenir des conditions de stationnarité stricte des modèles $PGARCH\,(p,q)$. Aknouche et Bibi (2009) et Bibi et Aknouche (2009) ont au contraire, exploité la représentation (3.2) qui diffère de la formulation standard avec des coefficients stationnaires et ergodiques (cf. Bougerol et Picard, 1992). Les coefficients (A_t,B_t) sont plutôt périodiquement stationnaires et périodiquement ergodiques. Aknouche et Bibi (2009) ont montré que $\gamma^S\,(A)<0$ est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une unique solution p.s.s. et périodiquement ergodique. Une condition nécessaire et suffisante de stationnarité périodique au second ordre du modèle particulier $PGARCH\,(1,1)$ 2-périodique est établie dans Bollerslev et Ghysel (1996). Le cas $PGARCH$ général est établie dans Aknouche et Bentarzi (2008), de même que l'existence d'une solution p.s.s et ayant des moments d'ordre supérieur finis (voir également Aknouche et Bibi (2009) et Bibi et Aknouche (2008)). Le calcul de certains moments et des autocovariances des carrés ont été établies dans Bibi et Aknouche (2008).

Les propriétés asymptotiques, à savoir la consistance forte et la normalité asymptotique, de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance, de l'estimateur des moindres carrés et d'un estimateur de type Yule-Walker, sont respectivement établies dans Aknouche et Bibi (2009), Bibi et Lesheb (2010a, b) et Bibi et Lesheb (2013).

Malgré l'intérêt et l'importance qu'a obtenu le modèle $PGARCH$ depuis son introduction, diverses limitations de cette classe de modèles (e.g. Bentarzi et Hamdi, 2008 ; Regnard et Zakoïan, 2010 ; Hamdi et Souam, 2013 et 2017) nous ont conduit à proposer une autre classe de modèles plus flexible, permettant de capturer différents traits qui caractérisent les séries économiques, et financières en particulier.

3.3 Modèles $PGARCH$ à changement de régimes Markovien

Le modèle $GARCH$ périodique à changement de régimes Markovien ($MS - PGARCH$), que nous proposons, peut être vu comme un processus bivarié $\{(\epsilon_t, \Delta_t)\,; t \in \mathbb{Z}\}$ dans lequel le processus (Δ_t), qui gouverne le changement de régime est une chaîne de Markov à espace d'états fini, homogène et ergodique, et (ϵ_t) est un processus $PGARCH$.

Définition 3.1 (Aliat et Hamdi, 2017b**)** *On dit qu'un processus stochastique $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est représenté par un modèle $GARCH$ périodique à changement de régimes Markovien p et q et de période $S \geq 1$, noté $MS - PGARCH_S\,(p, q)$, s'il est solution de l'équation aux différences stochastique suivante*

$$\left\{\begin{array}{l} \epsilon_t = \sqrt{h_t}\eta_t,\ t \in \mathbb{Z} \\ h_t = \sum_{k=1}^d \mathbf{1}_{(\Delta_t = k)}\omega_t^{(k)} + \sum\limits_{i=1}^{q} \sum_{k=1}^d \mathbf{1}_{(\Delta_t = k)}\alpha_{t,i}^{(k)}\epsilon_{t-i}^2 + \sum\limits_{j=1}^{p}\sum\limits_{k=1}^{d}\sum\limits_{l=1}^{d} \mathbf{1}_{(\Delta_t = k)}\beta_{t,j}^{(k)}\mathbf{1}_{\left(\Delta_{t-j} = l\right)}h_{t-j}^{(l)}, \end{array}\right. \tag{3.4}$$

où $h_t = \mathbb{E}\left[\epsilon_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}\right]$, avec $\mathcal{F}_{t-1}$ désigne l'information disponible jusqu'à l'instant $t-1$, $\mathbf{1}_{(\cdot)}$ désigne la fonction indicatrice, (Δ_t) est une chaîne de Markov homogène à espace d'états fini $\mathcal{E} = \{1, 2, \ldots, d\}$, et $\{\eta_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{E}\,(\eta_t) = 0$ et $\mathbb{E}\,(\eta_t^2) = 1$. Les paramètres $\omega_t^{(k)}$, $\alpha_{t,i}^{(k)}$ et $\beta_{t,j}^{(k)}$, pour $1 \leq k \leq d$, $1 \leq i \leq q$ et $1 \leq j \leq p$, sont des fonctions S-périodiques (i.e. $\omega_{t+\tau S}^{(k)} = \omega_t^{(k)}$, $\alpha_{t+\tau S,i}^{(k)} = \alpha_{t,i}^{(k)}$ et $\beta_{t+\tau S,j}^{(k)} = \beta_{t,j}^{(k)}$), tels que $\omega_t^{(k)} > 0$, $\alpha_{t,i}^{(k)} \geq 0$ et $\beta_{t,j}^{(k)} \geq 0$, pour $1 \leq k \leq d$, $1 \leq i \leq q$ et $1 \leq j \leq p$.

Notons que dans la définition précédente les paramètres du modèle dépendent aussi de l'état de la chaîne de Markov inobservable (Δ_t). Notons également que si p est nul, nous obtiendrons implicitement un modèle $ARCH$ périodique à changement de régimes Markovien $(MS-PARCH)$.

Afin de réécrire le modèle (3.4) sous une forme plus simple à manipuler, posons

$$\begin{aligned}
\omega_t(\Delta_t) &:= \sum_{k=1}^{d} \mathbf{1}_{(\Delta_t=k)}\omega_t^{(k)}, \\
\alpha_{t,i}(\Delta_t) &:= \sum_{k=1}^{d} \mathbf{1}_{(\Delta_t=k)}\alpha_{t,i}^{(k)}, \\
\beta_{t,j}(\Delta_t) &:= \sum_{k=1}^{d} \mathbf{1}_{(\Delta_t=k)}\beta_{t,j}^{(k)},
\end{aligned}$$

et

$$h_{t-j} := \sum_{k=1}^{d} \mathbf{1}_{\left(\Delta_{t-j=l}\right)} h_{t-j}^{(l)},$$

par conséquent, le modèle (3.4) peut être reécrit comme suit

$$\left\{\begin{array}{l}
\epsilon_t = \sqrt{h_t}\eta_t, \\
h_t = \omega_t(\Delta_t) + \sum\limits_{i=1}^{q} \alpha_{t,i}(\Delta_t)\epsilon_{t-i}^2 + \sum\limits_{j=1}^{p} \beta_{t,j}(\Delta_t) h_{t-j},
\end{array}\right. \quad t \in \mathbb{Z} \tag{3.5}$$

Les processus $\{\eta_t\}$ et (Δ_t) sont supposés indépendants. En outre, dans tout ce qui suit, nous allons utiliser les mêmes hypothèses, concernant la chaîne de Markov (Δ_t), que nous avons énoncé dans le chapitre précédent.

3.4 Stationnarité périodique stricte d'un processus $MS-PGARCH$

La défintion (3.5) est difficile à traiter lorsque nous souhaitons étudier la structure probabiliste du modèle $MS-PGARCH$ écrit sous cette forme. Pour cette raison, il sera utile de réécrire le modèle (3.5) sous forme d'une représentation Markovienne équivalente. Définissons les vecteurs aléatoires de dimension $r = p + q$

$$z_t = \left(\epsilon_t^2, \epsilon_{t-1}^2, ..., \epsilon_{t-q+1}^2, h_t, h_{t-1}, ..., h_{t-p+1}\right)',$$

et

$$b_t = \left(\omega_t\left(\Delta_t\right)\eta_t^2, \mathbf{0}_{1\times(q-1)}, \omega_t\left(\Delta_t\right), \mathbf{0}_{1\times(p-1)}\right)',$$

ainsi que la matrice aléatoire A_t de dimensions $r \times r$

$$A_t = \begin{pmatrix} \alpha_{t,1:q-1}\left(\Delta_t\right)\eta_t^2 & \alpha_{t,q}\left(\Delta_t\right)\eta_t^2 & \beta_{t,1:p-1}\left(\Delta_t\right)\eta_t^2 & \beta_{t,q}\left(\Delta_t\right)\eta_t^2 \\ \mathbf{I}_{q-1} & \mathbf{0}_{(q-1)\times 1} & \mathbf{0}_{(q-1)\times(p-1)} & \mathbf{0}_{(q-1)\times 1} \\ \alpha_{t,1:q-1}\left(\Delta_t\right) & \alpha_{t,q}\left(\Delta_t\right) & \beta_{t,1:p-1}\left(\Delta_t\right) & \beta_{t,q}\left(\Delta_t\right) \\ \mathbf{0}_{(p-1)\times(q-1)} & \mathbf{0}_{(q-1)\times 1} & \mathbf{I}_{p-1} & \mathbf{0}_{(p-1)\times 1} \end{pmatrix},$$

où

$$\alpha_{t,1:q-1}\left(\Delta_t\right) = \left(\alpha_{t,1}\left(\Delta_t\right), ..., \alpha_{t,q-1}\left(\Delta_t\right)\right), \text{ et } \beta_{t,1:p-1}\left(\Delta_t\right) = \left(\beta_{t,1}\left(\Delta_t\right), ..., \beta_{t,p-1}\left(\Delta_t\right)\right).$$

Avec de telles notations, le modèle (3.5) peut se mettre sous la forme d'une représentation Markovienne suivante

$$z_t = A_t z_{t-1} + b_t, \tag{3.6}$$

où les coefficients (A_t, b_t) sont des variables aléatoires $i.p.d.$

Théorème 3.4 (Aliat et Hamdi, 2017b**)** *Le modèle* (3.5) *admet une solution nonanticipative et p.s.s. donnée par la première composante de*

$$z_t = b_t + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-i}\right) b_{t-j}, \; t \in \mathbb{Z} \tag{3.7}$$

si $\gamma^S(A)$ *est strictement négatif, où la série* (3.7) *converge presque sûrement pour tout* $t \in \mathbb{Z}$. *De plus, la solution est unique et périodiquement ergodique.*

Preuve. La preuve est similaire à celle d'Aknouche et Guerbyenne (2009b, Theorem 2.1 et Remark 2.1) et donc elle sera omise. ■

Remarque 3.1

1. *Si* $S = 1$, *alors le modèle* (3.5) *admet une unique solution nonanticipative strictement stationnaire et ergodique si et seulement si*

$$\gamma(A) = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left\{\frac{1}{t}\left\|A_t A_{t-1} \ldots A_1\right\|\right\} < 0.$$

Cette dernière condition est la même obtenue par Francq et al. (2001, *Theorem* 1) *dans le cas d'un modèle non-périodique* $MS-GARCH$.

2. *Lorsque nous considérons $d = 1$, le théorème précédent coïncide avec le résultat obtenu par Aknouche et Bibi (2009, Theorem 1) pour la stationnarité périodique stricte des modèles $PGARCH$.*
3. *Dans le cas où (Δ_t) est une suite de variables aléatoire i.i.d., la condition (3.8) coïncide avec le résultat obtenu par Hamdi et Souam (2017, Theorem 1) pour les modèles $M - PGARCH$.*

3.5 Existence et calcul des moments d'ordres supérieurs d'un processus $MS - PGARCH$

3.5.1 Existence et calcul des moments : cas général

Conditions d'existence des moments d'ordre supérieur

Avant d'énoncer le résultat assurant l'existence des moments d'ordres $2m$, où m est un entier strictement positif, nous notons que, $\underline{A}_t^{[m]}(\cdot) = \mathbb{E}\left(A_t^{[m]} \mid \Delta_t = \cdot\right)$ et $\underline{b}_t^{[m]}(\cdot) = \mathbb{E}\left(b_t^{[m]} \mid \Delta_t = \cdot\right)$. Rappelons également qu'une matrice A dans $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. strictement positive) et on note $A \geq 0$ (resp. $A > 0$), si tous ses coefficients sont positifs ou nuls (resp. strictement positifs).

Si A et B sont deux matrices dans $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ la notation $A \succeq B$ (resp. $A \succ B$) signifie que la matrice $A - B$ est positive (resp. $A - B$ est strictement positive).

Si $n > 2$, on dit que la matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ est réductible s'il existe une matrice de permutation P de dimension n telle que

$$P'AP = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \mathbf{0} & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

où $A_{1,1}$ et $A_{2,2}$ sont des matrices carrées d'ordre inférieur à n. Une matrice non réductible est dite irréductible.

Le resultat suivant donne une condition nécessaire et suffisant d'existence des moments d'ordre pair du processus *MS-PGARCH* défini par (3.5). Notons que si nous faisons une hypothèse de symétrie pour la loi de η_t, les moments d'ordre impair, lorsqu'ils existent, sont nuls.

Théorème 3.5 (Aliat et Hamdi, 2017b) *Supposons que $\mathbb{E}\left(\eta_t^{2m}\right) < \infty$ et*

$$\rho\left(\prod_{s=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\underline{A}_{S-s}^{[m]}}\right) < 1, \tag{3.8}$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la série définie par (3.7) converge dans $\mathcal{L}^m$ et le processus $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$, défini comme la première composante de $\{z_t, t \in \mathbb{Z}\}$, est p.s.s et admet des moments jusqu'à l'ordre $2m$.

Inversement, si $\prod_{s=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\underline{A}_{S-s}^{[m]}}$ est irréductible et $\rho\left(\prod_{s=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\underline{A}_{S-s}^{[m]}}\right) \geq 1$, alors le modèle (3.5) n'admet aucune solution p.s.s. telle que $\mathbb{E}\left(\epsilon_t^{2m}\right) < \infty$.

Preuve. Ce théorème se démontre par le même raisonnement utilisé par Francq et Zakoïan (2005).

On note qu'il existe une solution (ϵ_t) de (3.5) appartenant à $\mathcal{L}^{2m}$ si et seulement s'il existe une solution z_t de (3.6) appartenant à $\mathcal{L}^m$.

(i) Nous montrons que (3.8) une condition suffisante pour l'existence d'une solution de (3.6) appartenant à $\mathcal{L}^m$. Soit

$$z_t = \sum_{k=0}^{\infty} z_{t,k}, \tag{3.9}$$

avec $z_{t,0} = b_t$ et $z_{t,k} = \left(\prod_{l=0}^{k-1} A_{t-l}\right) b_{t-k}$, pour $k \geq 1$.

Pour que la série définie dans (3.9) appartienne à $\mathcal{L}^m$, il suffit que $z_{t,k}$ converge vers zéro dans $\mathcal{L}^m$, avec un taux exponentiel lorsque k tend vers l'infini.

De l'indépendance des matrices et du vecteur $A_t, ..., A_{t-k+1}, b_{t-k}$ conditionnelle à Δ_t, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(z_{t,k}^{[m]}\right) &= \mathbb{E}\left(A_t^{[m]} A_{t-1}^{[m]} \ldots A_{t-k+1}^{[m]} b_{t-k}^{[m]}\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(A_t^{[m]} A_{t-1}^{[m]} \ldots A_{t-k+1}^{[m]} b_{t-k}^{[m]} \mid \Delta_t, \ldots, \Delta_{t-k}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[A_t^{[m]}\left(\Delta_t\right) A_{t-1}^{[m]}\left(\Delta_{t-1}\right) \ldots A_{t-k+1}^{[m]}\left(\Delta_{t-k+1}\right) b_{t-k}^{[m]}\left(\Delta_{t-k}\right)\right].
\end{aligned}$$

Posons $t = s + S\tau$ *et* $k = \nu + S\delta$ *tel que* $\tau \in \mathbb{Z}$, $\delta \in \mathbb{N}$ *et* $s, \nu \in \{1, 2, \ldots, S\}$. En utilisant l'équation (2.10) donnée dans le Lemme 2.1 du chapitre précédent, nous obtenons

$$\mathbb{E}\left(z_{t,k}^{[m]}\right) = \mathbb{I}_{r^m}\left(\prod_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\underline{A}_{s-l}^{[m]}}\right)^{\delta}\left(\prod_{l=0}^{\nu-1} \mathbb{P}_{\underline{A}_{s-l}^{[m]}}\right) \Pi_{\underline{b}_{s-\nu}^{[m]}}. \tag{3.10}$$

Considérons la norme matricielle définie par $\|A\| = \sum_{i,j} |A_{i,j}|$, où $A_{i,j}$ représente l'élément générique d'une matrice A. En utilisant les égalités $\|A\| \|B\| = \|A \otimes B\| = \|B \otimes A\|$, il s'avère que $\left\|\underline{z}_{t,k}\right\|^m = \left\|\underline{z}_{t,k}^{\otimes m}\right\|$. Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left(\left\|\underline{z}_{t,k}\right\|^m\right) = \mathbb{E}\left(\left\|\underline{z}_{t,k}^{[m]}\right\|\right) = \left\|\mathbb{E}\left(\underline{z}_{t,k}^{[m]}\right)\right\|,$$

car $\mathbb{E}\|X\| = \|\mathbb{E}(X)\|$, pour tout vecteur à composantes positives. De la relation (3.10), nous avons donc

$$\mathbb{E}\left(\left\|\underline{z}_{t,k}\right\|^m\right) = \left\|\mathbb{I}_{r^m}\left(\prod_{l=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-l}^{[m]}}\right)^{\delta}\left(\prod_{l=0}^{\nu-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-l}^{[m]}}\right)\Pi_{\underline{b}_{s-\nu}^{[m]}}\right\|$$

La norme matricielle étant multiplicative, nous avons

$$\begin{aligned}
\left\|\underline{z}_{t,k}\right\|_{\mathcal{L}^m} &= \left\|\mathbb{I}_{r^m}\left(\prod_{l=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-l}^{[m]}}\right)^{\delta}\left(\prod_{l=0}^{\nu-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-l}^{[m]}}\right)\Pi_{\underline{b}_{s-\nu}^{[m]}}\right\|^{1/m} \\
&\leq \left\|\mathbb{I}_{r^m}\right\|^{1/m}\left\|\left(\prod_{l=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-l}^{[m]}}\right)^{\delta}\right\|^{1/m}\left\|\left(\prod_{l=0}^{\nu-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-l}^{[m]}}\right)\right\|^{1/m}\left\|\Pi_{\underline{b}_{s-\nu}^{[m]}}\right\|^{1/m}
\end{aligned}$$

Si le rayon spectral de la matrice $\prod_{l=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-l}^{[m]}}$ est strictement inférieur à 1, alors $\left\|\left(\prod_{l=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-l}^{[m]}}\right)^{\delta}\right\|$ converge vers zéro à vitesse exponentielle quand $\delta \longrightarrow \infty$. Puisque pour tout s, $\left\|\prod_{l=0}^{\nu-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-l}^{[m]}}\right\|$ est uniformément bornée par $\max_{1\leq s\leq S}\left\|\left(\prod_{l=0}^{\nu-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-l}^{[m]}}\right)\right\|$, qui est fini, alors $z_{t,k}$ converge vers zéro dans $\mathcal{L}^m$, à une vitesse exponentielle, lorsque $\delta \longrightarrow \infty$. Par conséquent, $z_t = \sum_{k=0}^{\infty} z_{t,k}$ est dans $\mathcal{L}^m$.

En outre, par la propriété circulaire du rayon spectral, on voit facilement que

$$\rho\left(\prod_{l=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-l}^{[m]}}\right) = \rho\left(\prod_{s=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{S-s}^{[m]}}\right), \text{ pour tout } s,\ 1\leq s\leq S,$$

(ii) Nous procéderons par l'absurde. On suppose maintenant qu'une autre solution strictement stationnaire de (3.6) existe, ou encore qu'il y a une autre solution strictement stationnaire $(\widetilde{z}_t)$ de (3.6). Alors pour tout $k \geq 0$

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{z}_t - z_t\right\| &= \left\|A_t\left(\widetilde{z}_{t-1} - z_{t-1}\right)\right\| = \cdots = \left\|A_tA_{t-1}\ldots A_{t-k}\left(\widetilde{z}_{t-k-1} - z_{t-k-1}\right)\right\| \\
&\leq \left\|A_tA_{t-1}\ldots A_{t-k}\right\|\left\|\widetilde{z}_{t-k-1} - z_{t-k-1}\right\|
\end{aligned}$$

Par hypothèse $P\left(\left\|\widetilde{z}_t - z_t\right\| \neq 0\right) > 0$. Par ailleurs, puisque la série définie dans (3.9) converge *p.s.* on a $\left\|A_tA_{t-1}\ldots A_{t-k}\right\| \rightarrow 0$ avec probabilité 1 lorsque $k \rightarrow \infty$. Il s'en suit que

$$P\left(\lim_{k\rightarrow\infty}\left\|\widetilde{z}_{t-k-1} - z_{t-k-1}\right\| = \infty\right) > 0.$$

Donc, soit $\limsup_{k\rightarrow\infty}\left\|\widetilde{z}_{t-k-1}\right\| = \infty$ ou $\limsup_{k\rightarrow\infty}\left\|z_{t-k-1}\right\| = \infty$ avec une probabilité positive, ce qui contredit la stationnarité périodique des deux suites $\{z_t, t\in\mathbb{Z}\}$ et $\{\widetilde{z}_t, t\in\mathbb{Z}\}$. L'unicité de z_t est ainsi établie.

(iii) Inversement, supposons que $\mathbb{E}\left(\epsilon_t^{2m}\right) < \infty$. De la représentation (3.6), nous avons pour tout entier $k \geq 0$

$$z_t = z_{t,0} + \cdots + z_{t,k} + A_t A_{t-1} \ldots A_{t-k} z_{t-k-1} \succeq \sum_{i=0}^{k} z_{t,i},$$

car les matrices A_t et le vecteur z_t ont des composantes positives. D'où $z_t \succeq \sum\limits_{i=0}^{\infty} z_{t,i}$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(z_t^{[m]}\right) &\succeq \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} z_{t,k}\right)^{[m]}\right] \succeq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(z_{t,k}^{[m]}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{I}_{r^m} \left(\prod\nolimits_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}_{\underline{A}_{t-j}^{[m]}}\right) \Pi_{\underline{b}_{t-k}^{[m]}} \\
&= \sum_{\nu=0}^{S-1} \sum_{\delta=0}^{\infty} \mathbb{I}_{r^m} \left(\prod\nolimits_{j=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\underline{A}_{s-j}^{[m]}}\right)^{\delta} \left(\prod\nolimits_{j=0}^{\nu-1} \mathbb{P}_{\underline{A}_{s-j}^{[m]}}\right) \Pi_{\underline{b}_{s-\nu}^{[m]}},
\end{aligned}$$

en utilisant (2.10)(voir le Lemme 2.1 du Chapitre 2). Pour toute matrice positive et irréductible A de dimension $(l \times l)$, nous avons $(I + A)^{l-1} \succ 0$. En outre, les relations élémentaires $\|\mathbb{I}A\| = \|A\|$, $\|A\| \geq \rho(A)$, $\rho\left(A^l\right) = \{\rho(A)\}^l$, $l!\left(I + A + \cdots + A^l\right) \succeq (I + A)^l$ et $\|A + B\| = \|A\| + \|B\|$, sont vérifiées pour toutes matrices $A \succeq 0$ et $B \succeq 0$ de dimensions appropriées. De plus, $\left\|\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k\right\| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A_k\|$ pour toutes suites de matrices positives de même dimensions. Comme $\mathbb{E}\left(\epsilon_t^{2m}\right) < \infty$, alors $\mathbb{E}\left(z_t^{[m]}\right) < \infty$ et

$$\lim_{\delta \to \infty} \mathbb{I}_{r^m} \left(\prod\nolimits_{j=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\underline{A}_{s-j}^{[m]}}\right)^{\delta} \left(\prod\nolimits_{j=0}^{\nu-1} \mathbb{P}_{\underline{A}_{s-j}^{[m]}}\right) \Pi_{\underline{b}_{s-\nu}^{[m]}} = 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbb{E}\left(z_t^{[m]}\right)\right\| &\geq \left\|\sum_{\nu=0}^{S-1}\sum_{\delta=0}^{\infty}\mathbb{I}_{r^m}\left(\prod_{j=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-j}^{[m]}}\right)^{\delta}\left(\prod_{j=0}^{\nu-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-j}^{[m]}}\right)\Pi_{\underline{b}_{s-\nu}^{[m]}}\right\| \\
&= \sum_{\nu=0}^{S-1}\sum_{\delta=0}^{\infty}\left\|\mathbb{I}_{r^m}\left(\prod_{j=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-j}^{[m]}}\right)^{\delta}\left(\prod_{j=0}^{\nu-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-j}^{[m]}}\right)\Pi_{\underline{b}_{s-\nu}^{[m]}}\right\| \\
&= \sum_{\nu=0}^{S-1}\sum_{\delta=0}^{\infty}\left\|\left(\prod_{j=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-j}^{[m]}}\right)^{l\delta}\left[\mathbf{I}_{dr^m}+\left(\prod_{j=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-j}^{[m]}}\right)+\cdots+\left(\prod_{j=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-j}^{[m]}}\right)^{l-1}\right]\right. \\
&\qquad\qquad \left.\times\left(\prod_{j=0}^{\nu-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-j}^{[m]}}\right)\Pi_{\underline{b}_{s-\nu}^{[m]}}\right\| \\
&\geq \frac{1}{l!}\sum_{\nu=0}^{S-1}\sum_{\delta=0}^{\infty}\left\|\left(\prod_{j=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-j}^{[m]}}\right)^{l\delta}\left[\mathbf{I}_{dr^m}+\left(\prod_{j=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-j}^{[m]}}\right)\right]^{l-1}\left(\prod_{j=0}^{\nu-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-j}^{[m]}}\right)\Pi_{\underline{b}_{s-\nu}^{[m]}}\right\| \\
&\geq \frac{Sc}{l!}\sum_{\delta=0}^{\infty}\left\|\left(\prod_{j=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-j}^{[m]}}\right)^{l\delta}\right\| \\
&\geq \frac{Sc}{l!}\sum_{\delta=0}^{\infty}\left\{\rho\left(\prod_{j=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-j}^{[m]}}\right)\right\}^{l\delta},
\end{aligned}$$

où c est le plus petit élément de

$$\left[\mathbf{I}_{dr^m}+\left(\prod_{j=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-j}^{[m]}}\right)\right]^{l-1}\left(\prod_{j=0}^{\nu-1}\mathbb{P}_{\underline{A}_{s-j}^{[m]}}\right)\Pi_{\underline{b}_{s-\nu}^{[m]}},$$

et l est un entier strictement positif. Par conséquent, puisque $\mathbb{E}\left(z_t^{[m]}\right)<\infty$, la condition (3.8) doit être vérifiée, ce qui achève la preuve. ■

Remarque 3.2

1. *Notons que lorsque le nombre de régime est égal à* 1, *i.e.* $d=1$, *la condition* (3.8) *se réduit à*

$$\rho\left(\prod_{s=0}^{S-1}\mathbb{E}\left(A_{S-s}^{[m]}\right)\right)<1.$$

   *Cette condition est la même obtenue par Aknouche et Bentarzi (*2008, *Proposition* 3.1*) et Bibi et Aknouche (*2008, *Theorem* 4.2*), dans le cas des modèle* $PGARCH$.

2. *Lorsque* $S=1$, *la condition* (3.8) *se réduit à*

$$\rho\left(\mathbb{P}_{\underline{A}^{[m]}(\cdot)}\right)<1,$$

avec $A^{[m]}(\cdot) = \mathbb{E}\left(A_t^{[m]} \mid \Delta_t = \cdot\right)$. Cette condition a été établie par Francq et Zakoïan (2005, Theorem 1) pour les modèles $MS-GARCH$ non périodiques.

3. *Dans le cas où (Δ_t) est une suite de variables aléatoire i.i.d., la condition (3.8) s'écrit comme suit*

$$\rho\left(\prod_{s=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\underline{A}_{S-s}^{[m]}(\cdot)}\right) < 1,$$

où $A_t^{[m]}(\cdot) = \mathbb{E}\left(A_t^{[m]} \mid Z_t^{(\cdot)} = 1\right)$, avec la variable $Z_t^{(k)}$ (pour $k = 1, ..., d$) est égale à 1 signifie que l'observation ϵ_t est générée par la $k^{ième}$ composante du mélange. Cette condition a été établie par Hamdi et Souam (2017, Theorem 2) pour les modèles $M-PGARCH$.

Calcul des moments du modèle $MS-GARCH_S(p,q)$

Pour le calcul des moments du modèle $MS-GARCH_S(p,q)$, nous utilisons son écriture Markovienne donnée par (3.6), ainsi que les propriétés du produit de Kronecker.

Calcul de l'espérance du vecteur $\mathbf{z}_t$

Pour $k = 1, 2, ..., d$, nous avons

$$\begin{aligned}
\pi(k)\mathbb{E}(z_t \mid \Delta_t = k) &= \pi(k)\mathbb{E}(A_t z_{t-1} \mid \Delta_t = k) + \pi(k)\mathbb{E}(b_t \mid \Delta_t = k) \\
&= \pi(k)\underline{A}_t^{[1]}(k)\mathbb{E}(z_{t-1} \mid \Delta_t = k) + \pi(k)\underline{b}_t^{[1]}(k) \\
&= \sum_{j=1t}^{d} \underline{A}_t^{[1]}(k)\mathbb{E}(z_{t-1} \mid \Delta_{t-1} = j)\, p(j,k)\,\pi(j) + \pi(k)\underline{b}_t^{[1]}(k),
\end{aligned}$$

ce qui donne le système suivant

$$M_{t,1} = \mathbb{P}_{\underline{A}_t^{[1]}} M_{t-1,1} + C_{t,1},$$

où $C_{t,1} = \Pi_{\underline{b}_t^{[1]}}$ et $M_{t,m}(\cdot) = \pi(\cdot)\mathbb{E}\left(z_t^{[m]} \mid \Delta_t = \cdot\right)$. Après $S-1$ remplcements successifs dans ce dernier système, nous obtenons

$$M_{t,1} = \left[\mathbf{I}_{dr} - \prod_{i=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\underline{A}_{t-i}^{[1]}}\right]^{-1} \sum_{j=0}^{S-1} \left[\prod_{i=0}^{j-1} \mathbb{P}_{\underline{A}_{t-i}^{[1]}}\right] C_{t-j,1}. \tag{3.11}$$

Donc, l'espérance inconditionnelle du vecteur z_t, est donnée par

$$\underline{\mu}_{t,1} = \mathbb{E}(z_t) = \sum_{k=1}^{d} M_{t,1}(k),$$

ou de façon équivalente

$$\underline{\mu}_{t,1} = \mathbb{I}_r M_{t,1}, \tag{3.12}$$

et par conséquent,

$$\mathbb{E}\left(\epsilon_t^2\right) = H_r \mathbb{I}_r M_{t,1}.$$

Calcul de l'espérance du vecteur $\mathbf{z}_t^{[2]}$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(z_t^{[2]} \mid \Delta_t = k\right) &= \mathbb{E}\left(\left(A_t z_{t-1} + b_t\right) \otimes \left(A_t z_{t-1} + b_t\right) \mid \Delta_t = k\right) \\
&= \mathbb{E}\left(A_t^{[2]} z_{t-1}^{[2]} + \left(A_t \otimes b_t\right) z_{t-1} + \left(b_t \otimes A_t\right) z_{t-1} + b_t^{[2]} \mid \Delta_t = k\right) \\
&= \mathbb{E}\left(A_t^{[2]} z_{t-1}^{[2]} \mid \Delta_t = k\right) + \mathbb{E}\left(\left(A_t \otimes b_t + b_t \otimes A_t\right) z_{t-1} \mid \Delta_t = k\right) \\
&\quad + \mathbb{E}\left(b_t^{[2]} \mid \Delta_t = k\right) \\
&= \underline{b}_t^{[2]}(k) + \left\{\left(\underline{A}_t^{[1]}(k) \otimes \underline{b}_t^{[1]}(k)\right) + \left(\underline{b}_t^{[1]}(k) \otimes \underline{A}_t^{[1]}(k)\right)\right\} \mathbb{E}\left(z_{t-1} \mid \Delta_t = k\right) \\
&\quad + \underline{A}_t^{[2]}(k)\, \mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[2]} \mid \Delta_t = k\right) \\
&= \underline{b}_t^{[2]}(k) + \Lambda_{t,2}(k)\, \mathbb{E}\left(z_{t-1} \mid \Delta_t = k\right) + \underline{A}_t^{[2]}(k)\, \mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[2]} \mid \Delta_t = k\right),
\end{aligned}$$

où $\Lambda_{t,2}(k) = \left(\underline{A}_t^{[1]}(k) \otimes \underline{b}_t^{[1]}(k)\right) + \left(\underline{b}_t^{[1]}(k) \otimes \underline{A}_t^{[1]}(k)\right)$, pour $k = 1, 2, ..., d$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\pi(k)\, \mathbb{E}\left(z_t^{[2]} \mid \Delta_t = k\right) &= \pi(k)\, \underline{b}_t^{[2]}(k) + \pi(k)\, \Lambda_{t,2}(k)\, \mathbb{E}\left(z_{t-1} \mid \Delta_t = k\right) \\
&\quad + \pi(k)\, \underline{A}_t^{[2]}(k)\, \mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[2]} \mid \Delta_t = k\right) \\
&= \pi(k)\, \underline{b}_t^{[2]}(k) + \sum_{j=1}^{d} \Lambda_{t,2}(k)\, \mathbb{E}\left(z_{t-1} \mid \Delta_{t-1} = j\right) p(j,k)\, \pi(j) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{d} \underline{A}_t^{[2]}(k)\, \mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[2]} \mid \Delta_{t-1} = j\right) p(j,k)\, \pi(j).
\end{aligned}$$

Nous obtenons, donc le systhème suivant

$$M_{t,2} = \mathbb{P}_{\underline{A}_t^{[2]}} M_{t-1,2} + C_{t,2},$$

où $C_{t,2} = \mathbb{P}_{\Lambda_{t,2}} M_{t-1,1} + \Pi_{\underline{b}_t^{[2]}}$, alors le système précédent peut être réécrit, après $S-1$ remplacements successifs, comme suit

$$M_{t,2} = \left[\mathbf{I}_{dr^2} - \prod_{i=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\underline{A}_{t-i}^{[2]}} \right]^{-1} \sum_{j=0}^{S-1} \left[\prod_{i=0}^{j-1} \mathbb{P}_{\underline{A}_{t-i}^{[2]}} \right] C_{t-j,2}. \tag{3.13}$$

Donc,

$$\underline{\mu}_{t,2} := \mathbb{E}\left(z_t^{[2]} \right) = \mathbb{I}_{r^2} M_{t,2}. \tag{3.14}$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left(\epsilon_t^4\right) = H_{r^2} \mathbb{I}_{r^2} M_{t,2}.$$

Calcul de l'espérance du vecteur $\mathbf{z}_t^{[m]}$

De façon plus générale, il est facile de voir, à partir de (3.6), que

$$\left(A_t z_{t-1} + b_t\right)^{[m]} = \sum_{l=0}^{m} D_{m,l} \left(A_t^{[l]} z_{t-1}^{[l]} \otimes b_t^{[m-l]} \right),$$

où les matrices $D_{m,l}$ peuvent être obtenues de manière récurssive à travers la récurssion donnée au Chapitre 2.

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\Delta_t = k$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\pi(k)\, \mathbb{E}\left(z_t^{[m]} \middle| \Delta_t = k \right) &= \pi(k) \sum_{l=0}^{m} D_{m,l} \mathbb{E}\left(\left(A_t^{[l]} z_{t-1}^{[l]} \otimes b_t^{[m-l]} \right) \middle| \Delta_t = k \right) \\
&= \pi(k)\, \underline{b}_t^{[m]}(k) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{m-1} D_{m,l} \left(\underline{A}_t^{[l]}(k) \otimes \underline{b}_t^{[m-l]}(k) \right) \sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[l]} \middle| \Delta_{t-1} = j \right) p(j,k)\, \pi(j) \\
&\quad + \underline{A}_t^{[m]}(k) \sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[m]} \middle| \Delta_{t-1} = j \right) p(j,k)\, \pi(j), \\
&= \pi(k)\, \underline{b}_t^{[m]}(k) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{m-1} D_{m,l} \left(\underline{A}_t^{[l]}(k) \otimes \underline{b}_t^{[m-l]}(k) \right) \sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[l]} \middle| \Delta_{t-1} = j \right) p(j,k)\, \pi(j) \\
&\quad + \underline{A}_t^{[m]}(k) \sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}\left(z_{t-1}^{[m]} \middle| \Delta_{t-1} = j \right) p(j,k)\, \pi(j),
\end{aligned}$$

Nous obtenons, donc le système suivant

$$M_{t,m} = \mathbb{P}_{\underline{A}_t^{[m]}} M_{t-1,m} + C_{t,m},$$

où $C_{t,m} = \sum_{l=1}^{m-1} \mathbb{P}_{\Lambda_{t,l}} M_{t-1,l} + \Pi_{\underline{b}_t^{[m]}}$ et $\Lambda_{t,l}(\cdot) = D_{m,l}\left(\underline{A}_t^{[l]}(\cdot) \otimes \underline{b}_t^{[m-l]}(\cdot)\right)$, pour $l = 1, ..., m-1$, qui donne après $S-1$ remplacements successifs

$$M_{t,m} = \left[\mathbf{I}_{r^m} - \prod_{j=0}^{S-1} \mathbb{P}_{\underline{A}_{t-j}^{[m]}}\right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \mathbb{P}_{\underline{A}_{t-j}^{[m]}}\right) C_{t-i,m}\right].$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left(\epsilon_t^{2m}\right) = H_{r^m} \mathbb{I}_{r^m} M_{t,m}.$$

3.5.2 Existence et calcul des moments : cas d'un $MS - PGARCH_S(1,1)$

Dans le cas particulier $MS - GARCH_S(1,1)$, il est plus simple d'effectuer un calcul direct. En effet, lorsque $p = q = 1$, le modèle (3.5) s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sqrt{h_t}\eta_t, \\ h_t = \omega_t(\Delta_t) + \alpha_t(\Delta_t)\epsilon_{t-1}^2 + \beta_t(\Delta_t) h_{t-1}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{3.15}$$

Il est facile de remarquer que h_t s'écrit égalment comme suit

$$h_t = \omega_t(\Delta_t) + \left[\alpha_t(\Delta_t)\eta_{t-1}^2 + \beta_t(\Delta_t)\right] h_{t-1}.$$

Posons $b_t = \omega_t(\Delta_t)$ et $a_t = \alpha_t(\Delta_t)\eta_{t-1}^2 + \beta_t(\Delta_t)$, nous obtenons donc

$$h_t = a_t h_{t-1} + b_t.$$

En itérant cette équation l fois et faisant tendre l vers l'infini, nous aurons donc

$$h_t = b_t + \sum_{k=1}^{\infty} a_t a_{t-1} \ldots a_{t-k+1} b_{t-k}.$$

Pour que la série définie dans la relation précédente appartient à $\mathcal{L}^m$, il suffit que $h_{t,k} = \left(\prod_{i=0}^{k-1} a_{t-i}\right) b_{t-k}$ converge vers 0 dans $\mathcal{L}^m$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(h_{t,k}^m\right) &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[\left(\prod_{i=0}^{k-1} a_{t-i}\right)^m b_{t-k}^m \middle| \Delta_t,\ldots,\Delta_{t-k}\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\left(\prod_{i=0}^{k-1} a_{t-i,m}\left(\Delta_{t-i}\right)\right) b_{t,m}\left(\Delta_{t-k}\right)\right\} \\
&= \mathbb{I}_1\left(\prod_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{a_{s-l,m}}\right)^\delta \left(\prod_{l=0}^{\nu-1} \mathbb{P}_{a_{s-l,m}}\right) \Pi_{b_{s-\nu,m}},
\end{aligned}$$

où $a_{t,m}(\cdot) = \mathbb{E}\left(a_t^m \mid \Delta_t = \cdot\right)$ et $b_{t,m}(\cdot) = \mathbb{E}\left(b_t^m \mid \Delta_t = \cdot\right)$. Par suite,

$$\mathbb{E}\left(\|h_{t,k}\|^m\right) = \left\|\mathbb{I}_1\left(\prod_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{a_{s-l,m}}\right)^\delta \left(\prod_{l=0}^{\nu-1} \mathbb{P}_{a_{s-l,m}}\right) \Pi_{b_{s-\nu,m}}\right\|$$

La norme matricielle étant multiplicative, nous avons

$$\begin{aligned}
\|h_{t,k}\|_{\mathcal{L}^m} &= \left\|\mathbb{I}_1\left(\prod_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{a_{s-l,m}}\right)^\delta \left(\prod_{l=0}^{\nu-1} \mathbb{P}_{a_{s-l,m}}\right) \Pi_{b_{s-\nu,m}}\right\|^{1/m} \\
&\leq \|\mathbb{I}_1\|^{1/m} \left\|\left(\prod_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{a_{s-l,m}}\right)^\delta\right\|^{1/m} \left\|\left(\prod_{l=0}^{\nu-1} \mathbb{P}_{a_{s-l,m}}\right)\right\|^{1/m} \left\|\Pi_{b_{s-\nu,m}}\right\|^{1/m}
\end{aligned}$$

Si le rayon spectral de la matrice $\left(\prod_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{a_{s-l,m}}\right)$ est strictement inférieur à 1, alors $\left\|\left(\prod_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{a_{s-l,m}}\right)^\delta\right\|$ converge vers zéro à une vitesse exponentielle quand $\delta \longrightarrow \infty$. Puisque pour tout s, $\left\|\left(\prod_{l=0}^{\nu-1} \mathbb{P}_{a_{s-l,m}}\right)\right\|$ est uniformément bornée par $\max_{1\leq s\leq S} \left\|\left(\prod_{l=0}^{\nu-1} \mathbb{P}_{a_{s-l,m}}\right)\right\|$, qui est fini, alors $h_{t,k}$ converge vers zéro dans $\mathcal{L}^m$, à une vitesse exponentielle, lorsque $\delta \longrightarrow \infty$. Par conséquent, $h_t = \sum_{k=0}^{\infty} h_{t,k}$ est dans $\mathcal{L}^m$. En outre, par la propriété circulaire du rayon spectral, on voit facilement que

$$\rho\left(\prod_{l=0}^{S-1} \mathbb{P}_{a_{s-l,m}}\right) = \rho\left(\prod_{s=0}^{S-1} \mathbb{P}_{a_{S-s,m}}\right), \text{ pour tout } s,\ 1 \leq s \leq S,$$

nous concluons que la condition, $\rho\left(\prod_{s=0}^{S-1} \mathbb{P}_{a_{S-s,m}}\right) < 1$, est suffisante pour l'existence des moments d'ordre $2m$ d'un processus $MS - PGARCH_S(1,1)$.

Un raisonnement analogue à celui de la partie (iii) de la preuve du Théorème 3.5, avec

$$\mathbb{E}\left(h_t^m\right) \geq \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{I}_1\left(\prod_{j=0}^{i-1} \mathbb{P}_{a_{t-j,m}}\right) \Pi_{b_{t-i,m}},$$

nous conduira à conclure que dans le cas d'un modèle $MS-PGARCH_S\left(1,1\right)$, la condition, $\rho\left(\prod_{s=0}^{S-1}\mathbb{P}_{a_{S-s,m}}\right)<1$, est également nécessaire.

Calculons maintenant la variance du processus $\{\epsilon_t; t\in\mathbb{Z}\}$. Si $\rho\left(\prod_{s=0}^{S-1}\mathbb{P}_{a_{S-s,m}}\right)<1$, pour $m=1$, nous avons

$$\mathbb{E}\left(\epsilon_t^2\right)=\sum_{k=1}^{d}\pi\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_t^2\mid\Delta_t=k\right)=\sum_{k=1}^{d}N_{t,2}\left(k\right),$$

où $N_{t,m}\left(\cdot\right)=\pi\left(\cdot\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_t^m\mid\Delta_t=\cdot\right)$. Il est clair que lorsque $p=q=1$, nous avons

$$\epsilon_t^2=\omega_t\left(\Delta_t\right)\eta_t^2+\alpha_t\left(\Delta_t\right)\eta_t^2\epsilon_{t-1}^2+\beta_t\left(\Delta_t\right)\eta_t^2h_{t-1},$$

et pour $k=1,2,\ldots,d$

$$\begin{aligned}\pi\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_t^2\middle|\Delta_t=k\right) &= \pi\left(k\right)\mathbb{E}\left(\omega_t\left(\Delta_t\right)\eta_t^2\middle|\Delta_t=k\right)+\pi\left(k\right)\mathbb{E}\left(\alpha_t\left(\Delta_t\right)\eta_t^2\epsilon_{t-1}^2\middle|\Delta_t=k\right)\\ &\quad+\pi\left(k\right)\mathbb{E}\left(\beta_t\left(\Delta_t\right)\eta_t^2h_{t-1}\middle|\Delta_t=k\right)\\ &= \pi\left(k\right)\omega_t\left(k\right)+\pi\left(k\right)\alpha_t\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^2\middle|\Delta_t=k\right)\\ &\quad+\pi\left(k\right)\beta_t\left(k\right)\mathbb{E}\left(h_{t-1}\middle|\Delta_t=k\right).\end{aligned}$$

De plus, nous savons que $\mathbb{E}\left(h_{t-1}\mid\Delta_t=k\right)=\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^2\mid\Delta_t=k\right)$, ainsi l'équation précédente peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned}\pi\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_t^2\middle|\Delta_t=k\right) &= \pi\left(k\right)\omega_t\left(k\right)+\pi\left(k\right)\left(\alpha_t\left(k\right)+\beta_t\left(k\right)\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^2\middle|\Delta_t=k\right)\\ &= \pi\left(k\right)\omega_t\left(k\right)+\pi\left(k\right)a_{t,1}\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^2\middle|\Delta_t=k\right)\\ &= \pi\left(k\right)\omega_t\left(k\right)+\sum_{j=1}^{d}a_{t,1}\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^2\middle|\Delta_{t-1}=j\right)p\left(j,k\right)\pi\left(j\right),\end{aligned}$$

ce qui est équivalent à l'écriture vectorielle suivante

$$N_{t,2}=\mathbb{P}_{a_{t,1}}N_{t-1,2}+\Pi_{\omega_t},$$

où $N_{t,m}=\Pi_{\mathbb{E}\left[\epsilon_t^m\mid\Delta_t=\cdot\right]}$. En faisant itérer le système précédent $S-1$ fois, nous aurons, alors

$$N_{t,2}=\left[\mathbf{I}_d-\prod_{i=0}^{S-1}\mathbb{P}_{a_{t-i,1}}\right]^{-1}\sum_{j=0}^{S-1}\left[\prod_{i=0}^{j-1}\mathbb{P}_{a_{t-i,1}}\right]\Pi_{\omega_{t-j}}. \tag{3.16}$$

Par conséquent, le moment d'ordre 2 de $\{\epsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est donné par

$$\mathbb{E}\left(\epsilon_t^2\right) = \sum_{k=1}^{d} N_{t,2}\left(k\right). \tag{3.17}$$

D'autre part, nous savons que $\epsilon_t^4 = h_t^2 \eta_t^4$. Donc

$$\begin{aligned}
\epsilon_t^4 &= \eta_t^4 \left[\omega_t\left(\Delta_t\right) + \alpha_t\left(\Delta_t\right)\epsilon_{t-1}^2 + \beta_t\left(\Delta_t\right)h_{t-1}\right]^2 \\
&= \eta_t^4 \left[\omega_t^2\left(\Delta_t\right) + 2\omega_t\left(\Delta_t\right)\alpha_t\left(\Delta_t\right)\epsilon_{t-1}^2 + 2\omega_t\left(\Delta_t\right)\beta_t\left(\Delta_t\right)h_{t-1} + \alpha_t^2\left(\Delta_t\right)\epsilon_{t-1}^4\right. \\
&\quad \left. +2\alpha_t\left(\Delta_t\right)\beta_t\left(\Delta_t\right)\epsilon_{t-1}^2 h_{t-1} + \beta_t^2\left(\Delta_t\right)h_{t-1}^2\right].
\end{aligned}$$

Supposons que $\rho\left(\prod_{s=0}^{S-1} \mathbb{P}_{a_{S-s,2}}\right) < 1$, et que $\mu_4 = \mathbb{E}\left(\eta_t^4\right) < \infty$, alors

$$\mathbb{E}\left(\epsilon_t^4\right) = \sum_{k=1}^{d} \pi\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_t^4 \mid \Delta_t = k\right).$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\epsilon_t^4 \middle| \Delta_t = k\right) &= \mu_4 \left\{\omega_t^2\left(k\right) + 2\omega_t\left(k\right)\alpha_t\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^2 \middle| \Delta_t = k\right)\right. \\
&\quad + 2\omega_t\left(k\right)\beta_t\left(k\right)\mathbb{E}\left(h_{t-1} \middle| \Delta_t = k\right) + \alpha_t^2\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^4 \middle| \Delta_t = k\right) \\
&\quad \left. +2\alpha_t\left(k\right)\beta_t\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^2 h_{t-1} \middle| \Delta_t = k\right) + \beta_t^2\left(k\right)\mathbb{E}\left(h_{t-1}^2 \middle| \Delta_t = k\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Du fait que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\epsilon_{t-1}^2 h_{t-1} \middle| \Delta_t = k\right] &= \mathbb{E}\left(h_{t-1}^2 \middle| \Delta_t = k\right) \\
\mathbb{E}\left(h_{t-1} \middle| \Delta_t = k\right) &= \mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^2 \middle| \Delta_t = k\right),
\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^4 \middle| \Delta_t = k\right) = \mu_4 \mathbb{E}\left(h_{t-1}^2 \middle| \Delta_t = k\right),$$

alors $\mathbb{E}\left(\epsilon_t^4 \middle| \Delta_t = k\right)$ s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\epsilon_t^4 \middle| \Delta_t = k\right) &= \mu_4 \left\{\omega_t^2\left(k\right) + 2\omega_t\left(k\right)\alpha_t\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^2 \middle| \Delta_t = k\right)\right. \\
&\quad + 2\omega_t\left(k\right)\beta_t\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^2 \middle| \Delta_t = k\right) + \alpha_t^2\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^4 \middle| \Delta_t = k\right) \\
&\quad \left. +\frac{2\alpha_t\left(k\right)\beta_t\left(k\right)}{\mu_4}\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^4 \middle| \Delta_t = k\right) + \frac{\beta_t^2\left(k\right)}{\mu_4}\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^4 \middle| \Delta_t = k\right)\right\} \\
&= \mu_4 \left\{\omega_t^2\left(k\right) + 2\omega_t\left(k\right)\alpha_t\left(k\right) + 2\omega_t\left(k\right)\beta_t\left(k\right)\right\}\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^2 \middle| \Delta_t = k\right) \\
&\quad + \left\{\mu_4\alpha_t^2\left(k\right) + 2\alpha_t\left(k\right)\beta_t\left(k\right) + \beta_t^2\left(k\right)\right\}\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^4 \middle| \Delta_t = k\right)
\end{aligned}$$

Posons pour $k = 1, ..., d$

$$\phi_{t,2}(k) = 2\mu_4 \omega_t(k)(\alpha_t(k) + \beta_t(k)),$$

et

$$\lambda_{t,2}(k) = \mu_4 \omega_t^2(k),$$

ainsi

$$\begin{aligned} \pi(k)\mathbb{E}\left(\epsilon_t^4 \middle| \Delta_t = k\right) &= \pi(k)\lambda_t(k) + \pi(k)\phi_t(k)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^2 \middle| \Delta_t = k\right) \\ &\quad + \pi(k)a_{t,2}(k)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^4 \middle| \Delta_t = k\right) \\ &= \pi(k)\lambda_t(k) + \sum_{j=1}^{d}\phi_t(k)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^2 \middle| \Delta_{t-1} = j\right)p(j,k)\pi(j) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{d} a_{t,2}(k)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^4 \middle| \Delta_{t-1} = j\right)p(j,k)\pi(j), \end{aligned}$$

ce qui donne le système suivant

$$N_{t,4} = \mathbb{P}_{a_{t,2}} N_{t-1,4} + C_{t,2},$$

où $C_{t,2} = \Pi_{\lambda_{t,2}} + \mathbb{P}_{\phi_{t,2}} N_{t-1,2}$. Après $S-1$ remplacements successifs, nous obtenons

$$N_{t,4} = \left[\mathbf{I}_d - \prod_{i=0}^{S-1}\mathbb{P}_{a_{t-i,2}}\right]^{-1}\sum_{j=0}^{S-1}\left[\prod_{i=0}^{j-1}\mathbb{P}_{a_{t-i,2}}\right]C_{t-j,2}. \tag{3.18}$$

Par suite, le moment d'ordre 4 de $\{\epsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est donné par

$$\mathbb{E}\left(\epsilon_t^4\right) = \sum_{k=1}^{d} N_{t,4}(k). \tag{3.19}$$

Passons maintenant au calcul de $\mathbb{E}\left(\epsilon_t^{2m}\right)$. Nous avons, pour tout entier $m \geq 1$, $\epsilon_t^{2m} = \eta_t^{2m} h_t^m$. Cependant,

$$\begin{aligned} h_t^m &= \left\{\omega_t(\Delta_t) + \left[\alpha_t(\Delta_t)\eta_{t-1}^2 + \beta_t(\Delta_t)\right]h_{t-1}\right\}^m \\ &= \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\omega_t^{m-i}(\Delta_t)\left[\alpha_t(\Delta_t)\eta_{t-1}^2 + \beta_t(\Delta_t)\right]^i h_{t-1}^i \\ &= \omega_t^m(\Delta_t) + \sum_{i=1}^{m-1}\binom{m}{i}\omega_t^{m-i}(\Delta_t)\left[\alpha_t(\Delta_t)\eta_{t-1}^2 + \beta_t(\Delta_t)\right]^i h_{t-1}^i \\ &\quad + \left[\alpha_t(\Delta_t)\eta_{t-1}^2 + \beta_t(\Delta_t)\right]^m h_{t-1}^m. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $\rho\left(\prod_{s=0}^{S-1}\mathbb{P}_{a_{S-s,m}}\right)<1$ et $\mu_{2m}=\mathbb{E}\left(\eta_t^{2m}\right)<\infty$, nous avons

$$\mathbb{E}\left(\epsilon_t^{2m}\right)=\sum_{k=1}^{d}N_{t,2m}\left(k\right)=\mu_{2m}\sum_{k=1}^{d}\pi\left(k\right)\mathbb{E}\left[h_t^m\mid\Delta_t=k\right].$$

Or

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(h_t^m\mid\Delta_t=k\right) &= \omega_t^m\left(k\right)+\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m}{i}\omega_t^{m-i}\left(k\right)a_{t,i}\left(k\right)\mathbb{E}\left(h_{t-1}^i\mid\Delta_t=k\right)\\ &\quad +a_{t,m}\mathbb{E}\left(h_{t-1}^m\mid\Delta_t=k\right),\\ &= \omega_t^m\left(k\right)+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\binom{m}{i}\omega_t^{m-i}\left(k\right)a_{t,i}\left(k\right)}{\mu_{2i}}\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^{2i}\mid\Delta_t=k\right)\\ &\quad +\frac{a_{t,m}}{\mu_{2m}}\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^{2m}\mid\Delta_t=k\right).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\pi\left(k\right)\mathbb{E}\left[\epsilon_t^{2m}\mid\Delta_t=k\right] &= \pi\left(k\right)\omega_t^m\left(k\right)+\pi\left(k\right)\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m}{i}\omega_t^{m-i}\left(k\right)a_{t,i}\left(k\right)\frac{\mu_{2m}}{\mu_{2i}}\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^{2i}\mid\Delta_t=k\right)\\ &\quad +\pi\left(k\right)a_{t,m}\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^{2m}\mid\Delta_t=k\right)\\ &= \pi\left(k\right)\mu_{2m}\omega_t^m\left(k\right)\\ &\quad +\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{d}\binom{m}{i}\frac{\mu_{2m}}{\mu_{2i}}\omega_t^{m-i}\left(k\right)a_{t,i}\left(k\right)p\left(l,k\right)\pi\left(l\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^{2i}\mid\Delta_{t-1}=l\right)\\ &\quad +\sum_{l=1}^{d}a_{t,m}p\left(l,k\right)\pi\left(l\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^{2m}\mid\Delta_{t-1}=l\right),\end{aligned}$$

ce qui est équivalent à l'écriture vectorielle suivante

$$N_{t,2m}=\mathbb{P}_{a_{t,m}(\cdot)}N_{t-1,2m}+C_{t,m},$$

où

$$\begin{aligned}C_{t,m} &= \sum_{i=1}^{m-1}\mathbb{P}_{\phi_{t,2i}}N_{t-1,2i}+\Pi_{\lambda_{t,m}},\\ \phi_{t,2i}\left(\cdot\right) &= \binom{m}{i}\frac{\mu_{2m}}{\mu_{2i}}\omega_t^{m-i}\left(\cdot\right)a_{t,i}\left(\cdot\right),\end{aligned}$$

et

$$\lambda_{t,m}(\cdot) = \mu_{2m}\omega_t^m(\cdot).$$

Après $S-1$ remplacements successifs

$$N_{t,2m} = \left[\mathbf{I}_d - \prod_{i=0}^{S-1} \mathbb{P}_{a_{t-i,m}}\right]^{-1} \sum_{j=0}^{S-1} \left[\prod_{i=0}^{j-1} \mathbb{P}_{a_{t-i,m}}\right] C_{t-j,m}.$$

Par conséquent, le moment d'ordre $2m$ de $\{\epsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est donné par

$$\mathbb{E}\left(\epsilon_t^{2m}\right) = \sum_{k=1}^{d} N_{t,2m}(k).$$

Proposition 3.1 (Aliat et Hamdi, 2017*b*) *Lorsque $p = q = 1$ et si $\mathbb{E}(\eta_t^{2m}) < \infty$, alors une condition nécessaire et suffisante pour que processus MS-PGARCH défini par* (3.15) *est p.s.s. et admet des moments jusqu'à l'ordre m, i.e. $\mathbb{E}(\epsilon_t^{2m}) < \infty$, est donnée par*

$$\rho\left(\prod_{s=0}^{S-1} \mathbb{P}_{a_{S-s,m}}\right) < 1. \tag{3.20}$$

De plus, la forme explicite du moment d'ordre $2m$ du processus $\{\epsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$, pour tout entier $m \geq 1$, est donnée par

$$\mathbb{E}\left(\epsilon_t^{2m}\right) = \sum_{k=1}^{d} N_{t,2m}(k),$$

où

$$N_{t,2m} = \left[\mathbf{I}_d - \prod_{i=0}^{S-1} \mathbb{P}_{a_{t-i,m}}\right]^{-1} \sum_{j=0}^{S-1} \left[\prod_{i=0}^{j-1} \mathbb{P}_{a_{t-i,m}}\right] C_{t-j,m}.$$

Par conséquent, la variance et le coefficient de kurtosis de la distribution de $\epsilon_{s+\tau S}$ sont donnés par

$$\sigma_\epsilon^{(s)2} := \mathbb{E}\left(\epsilon_{s+\tau S}^2\right) = \sum_{k=1}^{d} N_{s+\tau S,2}(k), \; s = 1, 2, \ldots, S,$$

et

$$\kappa_\epsilon^{(s)} := \frac{\mathbb{E}\left(\epsilon_{s+\tau S}^4\right)}{\left[\mathbb{E}\left(\epsilon_{s+\tau S}^2\right)\right]^2} = \frac{\sum_{k=1}^{d} N_{s+\tau S,4}(k)}{\left[\sum_{k=1}^{d} N_{s+\tau S,2}(k)\right]^2}, \; s = 1, 2, \ldots, S.$$

Remarque 3.3

1. *Si de plus $S=1$, alors la condition* (3.20) *s'écrit sous la forme suivante*

$$\rho\left[\mathbb{P}_{\mathbb{E}\left\{\alpha_1(\cdot)\eta_t^2+\beta_1(\cdot)\right\}^m}\right]<1. \tag{3.21}$$

*Cette dernière condition est la même obtenue par Francq et Zakoïan (*2005*, Corollary* 2*) pour les modèles $MS-GARCH$ non périodique.*

2. *Dans le cas où (Δ_t) est une suite de variables aléatoire i.i.d., alors la condition assurant l'existence des moments d'ordre $2m$ finis du mélange de modèle $GARCH$ périodique est donnée par*

$$\rho\left(\prod_{s=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(\alpha_{S-s}(\cdot)\eta_{S-s}^2+\beta_{S-s}(\cdot)\right)^m}\right)<1. \tag{3.22}$$

Dans ce cas particulier, nous pouvons réécrire cette dernière condition sous une autre forme plus simple. En effet, il suffit de remarquer que pour toute suite de fonctions $f_i:\mathcal{E}\to\mathcal{M}_{n\times n'}(\mathbb{R})$, $i=1,...,S$, nous avons

$$\prod_{i=1}^{S}\mathbb{P}_{f_i}=\begin{pmatrix}\lambda_1 f_1(1)\left\{\prod_{i=2}^{S}\left(\sum_{k=1}^{d}\lambda_k f_i(k)\right)\right\} & \cdots & \lambda_1 f_1(1)\left\{\prod_{i=2}^{S}\left(\sum_{k=1}^{d}\lambda_k f_i(k)\right)\right\}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_d f_1(d)\left\{\prod_{i=2}^{S}\left(\sum_{k=1}^{d}\lambda_k f_i(k)\right)\right\} & \cdots & \lambda_d f_1(d)\left\{\prod_{i=2}^{S}\left(\sum_{k=1}^{d}\lambda_k f_i(k)\right)\right\}\end{pmatrix},$$

et par suite

$$\begin{aligned}\prod_{s=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(\alpha_{S-s}(\cdot)\eta_{S-s}^2+\beta_{S-s}(\cdot)\right)^m} &= \begin{pmatrix}\lambda_1\mathbb{E}\left(\alpha_S(1)\eta_{S-s}^2+\beta_S(1)\right)^m & \cdots & \lambda_1\mathbb{E}\left(\alpha_S(1)\eta_S^2+\beta_S(1)\right)^m\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_d\mathbb{E}\left(\alpha_S(d)\eta_S^2+\beta_S(d)\right)^m & \cdots & \lambda_d\mathbb{E}\left(\alpha_S(d)\eta_S^2+\beta_S(d)\right)^m\end{pmatrix}\\ &\quad\times\left\{\prod_{s=1}^{S-1}\left(\sum_{k=1}^{d}\lambda_k\mathbb{E}\left(\alpha_{S-s}(k)\eta_{S-s}^2+\beta_{S-s}(k)\right)^m\right)\right\}.\end{aligned}$$

Notons que cette dernière matrice est une matrice positive telle que la somme des termes de chaque colonne est constante égale à

$$\prod_{s=0}^{S-1}\left(\sum_{k=1}^{d}\lambda_k\mathbb{E}\left(\alpha_{S-s}(k)\eta_{S-s}^2+\beta_{S-s}(k)\right)^m\right),$$

et qui est alors une valeur propre de $\prod_{s=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(\alpha_{S-s}(\cdot)\eta_{S-s}^{2}+\beta_{S-s}(\cdot)\right)^{m}}$ *et*

$$\rho\left(\prod_{s=0}^{S-1}\mathbb{P}_{\mathbb{E}\left(\alpha_{S-s}(\cdot)\eta_{S-s}^{2}+\beta_{S-s}(\cdot)\right)^{m}}\right)=\prod_{s=0}^{S-1}\left(\sum_{k=1}^{d}\lambda_{k}\mathbb{E}\left(\alpha_{S-s}\left(k\right)\eta_{S-s}^{2}+\beta_{S-s}\left(k\right)\right)^{m}\right).$$

*(voir Horn et Johnson (*2013*), Lemma* 8.1.21*, p.* 521*).*

Pour $m=1$*, la condition* (3.22) *est la même obtenue par Hamdi et Souam (*2017*, Corollary* 1*) pour la stationnarité périodique au second ordre des modèles* $M-PGARCH$*.*

3.6 Structure d'autocovariance des carrés

3.6.1 Cas d'un $MS-PGARCH_{S}\left(1,1\right)$

Nous avons

$$\epsilon_{t}^{2}\epsilon_{t-1}^{2}=\omega_{t}\left(\Delta_{t}\right)\eta_{t}^{2}\epsilon_{t-1}^{2}+\alpha_{t}\left(\Delta_{t}\right)\eta_{t}^{2}\epsilon_{t-1}^{4}+\beta_{t}\left(\Delta_{t}\right)\eta_{t}^{2}h_{t-1}\epsilon_{t-1}^{2}.$$

Sous l'hypothèse que $\mathbb{E}\left(\epsilon_{t}^{4}\right)<\infty$, nous avons

$$\mathbb{E}\left(\epsilon_{t}^{2}\epsilon_{t-1}^{2}\right)=\sum_{k=1}^{d}\pi\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t}^{2}\epsilon_{t-1}^{2}\middle|\,\Delta_{t}=k\right).$$

Or

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\epsilon_{t}^{2}\epsilon_{t-1}^{2}\middle|\,\Delta_{t}=k\right) &= \omega_{t}\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^{2}\middle|\,\Delta_{t}=k\right)+\alpha_{t}\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^{4}\middle|\,\Delta_{t}=k\right)\\ &\quad+\beta_{t}\left(k\right)\mathbb{E}\left(h_{t-1}\epsilon_{t-1}^{2}\middle|\,\Delta_{t}=k\right)\\ &= \omega_{t}\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^{2}\middle|\,\Delta_{t}=k\right)+\xi_{t}\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^{4}\middle|\,\Delta_{t}=k\right),\end{aligned}$$

où $\xi_{t}\left(\cdot\right)=\alpha_{t}\left(\cdot\right)+\beta_{t}\left(\cdot\right)$. Ainsi, pour tout $k=1,...,d$, nous avons

$$\begin{aligned}\pi\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t}^{2}\epsilon_{t-1}^{2}\middle|\,\Delta_{t}=k\right) &= \pi\left(k\right)\omega_{t}\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^{2}\middle|\,\Delta_{t}=k\right)+\pi\left(k\right)\xi_{t}\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^{4}\middle|\,\Delta_{t}=k\right)\\ &= \sum_{j=1}^{d}\omega_{t}\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^{2}\middle|\,\Delta_{t}=k\right)p\left(j,k\right)\pi\left(j\right)\\ &\quad+\sum_{j=1}^{d}\xi_{t}\left(k\right)\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^{4}\middle|\,\Delta_{t}=k\right)p\left(j,k\right)\pi\left(j\right),\end{aligned}$$

ce qui donne le système suivant

$$W_{1}^{(t)}=\mathbb{P}_{\omega_{t}}N_{t-1,2}+\mathbb{P}_{\xi_{t}}N_{t-1,4}, \tag{3.23}$$

où $W_h^{(t)} = \Pi_{\mathbb{E}\left(\left.\epsilon_t^2\epsilon_{t-h}^2\right|\Delta_t=\cdot\right)}$, $t, h \in \mathbb{Z}$.

Nous passons maintenant, au calcul de $\gamma_{\epsilon^2,h}^{(t)} := cov\left(\epsilon_t^2, \epsilon_{t-h}^2\right)$, pour $h > 1$. Rappelons que les autocovariances $\gamma_{\epsilon^2,h}^{(t)}$ avec des retards négatifs peuvent être obtenues en utilisant la relation $\gamma_{\epsilon^2,-h}^{(t)} = \gamma_{\epsilon^2,h}^{(t+h)}$.

Nous avons pour tout $k = 1, ..., d$ et pour tout $h > 1$,

$$\begin{aligned}
\pi(k)\,\mathbb{E}\left(\left.\epsilon_t^2\epsilon_{t-h}^2\right|\Delta_t = k\right) &= \pi(k)\,\mathbb{E}\left(\left.h_t\epsilon_{t-h}^2\right|\Delta_t = k\right)\\
&= \pi(k)\,\omega_t(k)\,\mathbb{E}\left(\left.\epsilon_{t-h}^2\right|\Delta_t = k\right) + \pi(k)\,\alpha_t(k)\,\mathbb{E}\left(\left.\epsilon_{t-1}^2\epsilon_{t-h}^2\right|\Delta_t = k\right)\\
&\quad + \pi(k)\,\beta_t(k)\,\mathbb{E}\left(\left.h_{t-1}\epsilon_{t-h}^2\right|\Delta_t = k\right)\\
&= \pi(k)\,\omega_t(k)\,\mathbb{E}\left(\left.\epsilon_{t-h}^2\right|\Delta_t = k\right) + \pi(k)\,\xi_t(k)\,\mathbb{E}\left(\left.\epsilon_{t-1}^2\epsilon_{t-h}^2\right|\Delta_t = k\right)\\
&= \sum_{j=1}^{d}\omega_t(k)\,\mathbb{E}\left(\left.\epsilon_{t-h}^2\right|\Delta_{t-h} = j\right)p^{(h)}(j,k)\,\pi(j)\\
&\quad + \sum_{j=1}^{d}\xi_t(k)\,\mathbb{E}\left(\left.\epsilon_{t-1}^2\epsilon_{t-h}^2\right|\Delta_{t-1} = j\right)p(j,k)\,\pi(j),
\end{aligned}$$

où $\xi_t(\cdot) = \alpha_t(\cdot) + \beta_t(\cdot)$. Par suite, nous aurons une l'écriture vectorielle suivante

$$W_h^{(t)} = \mathbb{P}_{\omega_t}^{(h)} N_{t-h,2} + \mathbb{P}_{\xi_t} W_{h-1}^{(t-1)}. \tag{3.24}$$

Par conséquent, nous obtenons pour tout $h \in \mathbb{N}$

$$\gamma_{\epsilon^2,h}^{(t)} = \sum_{k=1}^{d} W_h^{(t)}(k) - \left(\sum_{k=1}^{d} N_{t,2}(k)\right)\left(\sum_{k=1}^{d} N_{t-h,2}(k)\right). \tag{3.25}$$

L'algorithme suivant résume le calcul des autocovariances des carrés d'un processus $MS-PGARCH_S(1,1)$.

Algorithme 3.1 (Aliat et Hamdi, 2017b**)**

1. *Pour* $s = 1, 2, \ldots, S$, *calculer* $N_{s,2}$ *et* $N_{s,4}$ *à partir de* (3.16) *et* (3.18) *respectivement.*
2. *Pour* $s = 1, 2, \ldots, S$, *calculer* $W_1^{(s)}$ *à partir de* (3.23).
3. *Pour* $s = 1, 2, \ldots, S$, *et* $h > 1$, *calculer* $W_h^{(s)}$ *à partit de* (3.24).
4. *Pour* $s = 1, 2, \ldots, S$, *et* $h \in \mathbb{N}$, *calculer les autocovariances du processus* $\{\epsilon_t^2;\ t \in \mathbb{Z}\}$ *à partir* (3.25).

3.6.2 Cas général

Afin de calculer la fonction d'autocovariance du modèle (3.5), nous utilisons sa représentation Markovienne (3.6). En premier lieu, nous commençons par le calcul de l'espérance du vecteur $z_t \otimes z_{t-h}$. Nous avons pour tout $h \geq 0$,

$$\begin{aligned}
z_t \otimes z_{t-h} &= \left(A_t z_{t-1} + b_t\right) \otimes z_{t-h} \\
&= \left(A_t z_{t-1} \otimes z_{t-h}\right) + \left(b_t \otimes z_{t-h}\right) \\
&= \left(A_t \otimes \mathbf{I}_r\right)\left(z_{t-1} \otimes z_{t-h}\right) + \left(b_t \otimes \mathbf{I}_r\right) z_{t-h}.
\end{aligned}$$

Donc, pour $k = 1, 2, ..., d$, nous avons

$$\begin{aligned}
\pi(k)\,\mathbb{E}\left(z_t \otimes z_{t-h} \middle| \Delta_t = k\right) &= \pi(k)\left(\underline{A}_t^{[1]}(k) \otimes \mathbf{I}_r\right)\mathbb{E}\left(z_{t-1} \otimes z_{t-h} \middle| \Delta_t = k\right) \\
&\quad + \pi(k)\left(\underline{b}_t^{[1]}(k) \otimes \mathbf{I}_r\right)\mathbb{E}\left(z_{t-h} \middle| \Delta_t = k\right) \\
&= \sum_{j=1}^{d}\left(\underline{A}_t^{[1]}(k) \otimes \mathbf{I}_r\right)\mathbb{E}\left(z_{t-1} \otimes z_{t-h} \middle| \Delta_{t-1} = j\right) p(j,k)\,\pi(j) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{d}\left(\underline{b}_t^{[1]}(k) \otimes \mathbf{I}_r\right)\mathbb{E}\left(z_{t-h} \middle| \Delta_{t-h} = j\right) p^{(h)}(j,k)\,\pi(j) \\
&= \sum_{j=1}^{d}\Upsilon_t(k)\,\mathbb{E}\left(z_{t-1} \otimes z_{t-h} \middle| \Delta_{t-1} = j\right) p(j,k)\,\pi(j) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{d}\Xi_t(k)\,\mathbb{E}\left(z_{t-h} \middle| \Delta_{t-h} = j\right) p^{(h)}(j,k)\,\pi(j).
\end{aligned}$$

où $\Upsilon_t(\cdot) = \underline{A}_t^{[1]}(\cdot) \otimes \mathbf{I}_r$ et $\Xi_t(\cdot) = \underline{b}_t^{[1]}(\cdot) \otimes \mathbf{I}_r$. Par suite, nous aurons le système suivant

$$\mathbf{W}_h^{(t)} = \begin{cases} M_{t,2} & \text{si } h = 0, \\ \mathbb{P}_{\Upsilon_t}\mathbf{W}_{h-1}^{(t-1)} + \mathbb{P}_{\Xi_t}^{(h)} M_{t-h,1} & \text{si } h \geq 1. \end{cases} \tag{3.26}$$

où $\mathbf{W}_h^{(t)} = \Pi_{\mathbb{E}\left(z_t \otimes z_{t-h} \middle| \Delta_t = \cdot\right)}$, $t, h \in \mathbb{Z}$.

Par conséquent, nous obtenons pour tout $h \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}\left(z_t \otimes z_{t-h}\right) = \sum_{k=1}^{d}\mathbf{W}_h^{(t)}(k).$$

Enfin, la fonction d'autocovariance de retard h et de période s du processus $MS-PGARCH$ défini par (3.5) est donnée par

$$\gamma_{\epsilon^2,h}^{(t)} = H_{r^2}\mathbb{I}_{r^2}\mathbf{W}_h^{(t)} - \left(H_r\mathbb{I}_r M_{t,1}\right)\left(H_r\mathbb{I}_r M_{t-h,1}\right). \tag{3.27}$$

La fonction d'autocovariance du modèle $MS-PGARCH_S\,(p,q)$ peut être calculée en utilisant l'algorithme suivant

Algorithme 3.2 (Aliat et Hamdi, 2017b**)**

1. *Pour* $s = 1, 2, \ldots, S$, *calculer* $M_{s,1}$ *et* $M_{s,2}$ *à partir de* (3.11) *et* (3.13) *respectivement.*
2. *Pour* $s = 1, 2, \ldots, S$ *et* $h \geq 1$, *calculer* $\mathbf{W}_h^{(t)}$ *en utilisant la relation* (3.26).
3. *Pour* $s = 1, 2, \ldots, S$, *et* $h \in \mathbb{N}$, *calculer les autocovariances du processus* $\{\epsilon_t^2;\ t \in \mathbb{Z}\}$ *à partir* (3.27).

Notons que malgré sa simplicité et sa facilité de programmation, cet algorithme n'est pas très performant en temps de calcul et espace mémoire. Une remarque similaire dans le cas $GARCH$ a été soulevé par Francq et Zakoïan (2010).

Chapitre 4

Modèles espace d'états périodiques à changement de régimes Markovien

4.1 Introduction

Un modèle très général qui englobe beaucoup de modèles de séries chronologiques est le modèle espace d'état ou le modèle dynamique linéaire, introduit par Kalman (1960) et Kalman et Bucy (1961). Un modèle espace d'état est une représentation simplifiée d'un phénomène sous étude. Il fournit au chercheur un cadre de modélisation et une manière informatiquement efficace pour l'inférence statistique sur un très grand éventail de situations. Au cours des dernières décennies, il y a eu un intérêt croissant pour l'application des modèles espace d'états dans l'analyse des séries temporelles (cf. Anderson et Moore, 1979 ; Aoki, 1987 ; Harvey, 1989 ; West et Harrison, 1997 ; Kim et Nelson, 1999 ; Durbin et Koopman, 2001 ; Douc, Moulines et Stoffer, 2014). Les modèles espaces d'états fournissent une approche flexible pour l'analyse des séries temporelles. Ils peuvent être utilisés afin de réduire la complexité des problèmes liés à l'analyse de certains modèles des séries chronologiques. En effet, ils peuvent en particulier, être exploités dans le problème de l'estimation des paramètres par la méthode MV (e.g. Harvey, 1989 ; Stoffer et Wall,1991 ; Durbin et Koopman, 2001, Aknouche et Hamdi, 2008 et 2009), dans l'estimation des données manquantes (e.g. Stoffer et Wall,1991), dans l'estimation des erreurs de prédiction conditionnelles et dans la détermination des régions de prévision pour les observations futures de la série (e.g. Wall et Stoffer, 2002 ; Rodriguez et Ruiz, 2009 ; Guerbyenne et Hamdi, 2015). En outre, ils ont une structure probabiliste puissante, offrant un outil flexible pour un champ d'application très vaste. Ces modèles peuvent être utilisés, non seulement, pour modéliser des séries temporelles univariées ou multivariées, mais aussi, en présence de non stationnarité, de changements structurels ou de périodicité. En effet, les modèles espace d'états ont été largement utilisés pour décrire de nombreuses séries présentant différentes dynamiques, rencontrées dans divers domaines.

Ces modèles ont été appliqués, à titre d'exemple, dans la modélisation des données économiques (cf. Harrison et Stevens, 1976 ; Harvey et Pierse, 1984 ; Harvey et Todd, 1983 ; Kitagawa et Gersch, 1984, Shumway et Stoffer, 1982), dans la médecine (Jones, 1984) et dans d'autres domaines. En général, un modèle espace d'état appliquée à une série chronologique y_t, $t = 1, ..., T$, permet d'étudier un phénomène observé à travers une variable inobservable x_t, dite *variable d'état*. Les deux vecteurs y_t et x_t sont liés par deux relations. La première, est dite *équation d'observation* et la seconde est dite *équation d'état* ou *équation de transition*.

Par ailleurs, les modèles espace d'états et les modèles à changement de régimes Markovien ne sont pas nouveaux dans les littératures statistiques et économétriques. Cependant, le nombre croissant d'articles publiés qui les employaient démontre leur utilité et leur large applicabilité. La combinaison des modèles espace d'états avec les chaînes de Markov, pour faire l'inférence statistique sur l'instant et la nature des changements de régime, n'est pas trivial. Cela devient clair quand nous pensons que le nombre de régimes ainsi que les instants des changements de régimes sont inconnus, et donc, l'estimation de ces modèles nécessite la connaissance de toute la trajectoire des régimes. Bien que les modèles qui intègrent à la fois les variables d'état et le changement de régime aient de nombreuses applications potentielles évidentes, leur estimation a posé de sérieux obstacles calculatoires. Cependant, face à ces difficultés, Kim (1994) a développé un algorithme pour faire l'inférence sur la variable d'état inobservable et évaluer la fonction de vraisemblance afin d'estimer les paramètres inconnus du modèle suivant

$$\begin{cases} y_t = F(\Delta_t) x_t + \beta(\Delta_t) z_t + e_t, \\ x_t = A(\Delta_t) x_{t-1} + \gamma(\Delta_t) z_t + v_t, \end{cases}$$

où

$$\begin{pmatrix} e_t \\ v_t \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R(\Delta_t) & 0 \\ 0 & Q(\Delta_t) \end{pmatrix} \right),$$

et (Δ_t) est une chaîne de Markov définie sur un espace d'états fini. L'algorithme proposé par Kim (1994) peut être résumé par les deux équations de prédiction suivantes

$$\begin{cases} x_{t|t-1}^{(i,j)} = \mathbb{E}\left(x_t \middle| \Delta_t = j, \Delta_{t-1} = i, \mathcal{F}_{t-1}\right) = A(j)\, x_{t-1|t-1}^{i} + \gamma(j)\, z_t, \\ P_{t|t-1}^{(i,j)} = \mathbb{E}\left[\left(x_t - x_{t|t-1}^{(i,j)}\right)\left(x_t - x_{t|t-1}^{(i,j)}\right)' \middle| \Delta_t = j, \Delta_{t-1} = i, \mathcal{F}_{t-1} \right] = A(j)\, P_{t-1|t-1}^{i} A'(j) + Q(j), \end{cases}$$

où $\mathcal{F}_t$ est l'information disponible jusqu'à l'instant t et $x_{t|t-1}^{(i,j)}$ et $P_{t|t-1}^{(i,j)}$ sont, respectivement, la moyenne et la matrice de variance covariance de loi conditionnelle du vecteur d'état x_t sachant $\mathcal{F}_{t-1}$, $\Delta_t = j$ et $\Delta_{t-1} = i$. Par conséquent, on peut obtenir la moyenne conditionnelle et la matrice de variance-covariance de la variable d'état filtrée, $x_{t|t}^{(i,j)}$ et $P_{t|t}^{(i,j)}$, en exécutant le filtre de Kalman conditionnel.

Pour rendre cet algorithme opérationnel, Kim (1994) a proposé de calculer les approximations suivantes

$$
\begin{aligned}
x_{t|t}^{j} &= \frac{\sum_{i=1}^{d} P\left[\Delta_t = j, \Delta_{t-1} = i \mid \mathcal{F}_t\right] x_{t|t}^{(i,j)}}{P\left[\Delta_t = j \mid \mathcal{F}_t\right]}, \\
P_{t|t}^{j} &= \frac{\sum_{i=1}^{d} P\left[\Delta_t = j, \Delta_{t-1} = i \mid \mathcal{F}_t\right] \left\{P_{t|t}^{(i,j)} + \left(x_{t|t}^{j} - x_{t|t}^{(i,j)}\right)\left(x_{t|t}^{j} - x_{t|t}^{(i,j)}\right)'\right\}}{P\left[\Delta_t = j \mid \mathcal{F}_t\right]}.
\end{aligned}
$$

Billio et Monfort (1998) ont présenté un modèle espace d'état à changement de régimes Markovien, et ils ont proposé de combiner le filtre de Kalman partiel avec des techniques d'échantillonnage d'importance afin de calculer la fonction de vraisemblance. Frühwirth-Schnatter (2001a) a proposée différentes méthodes bayésiennes pour l'estimation des modèles espace d'état à changement de régimes. Récemment, Nagy and Suzdaleva (2013) ont proposé un autre algorithme pour estimer la variable d'état, dans lequel ils ont calculé la moyenne et la matrice de variance-covariance de la variable d'état x_t conditionnellement à $\mathcal{F}_{t-1}$ et Δ_t, comme suit

$$
\begin{cases}
x_{\Delta_t;t|t-1} = \mathbb{E}\left(x_t \mid \Delta_t, \mathcal{F}_{t-1}\right) = A\left(\Delta_t\right) x_{t-1|t-1} + \gamma\left(\Delta_t\right) z_t, \\
P_{\Delta_t;t|t-1} = \mathbb{E}\left[\left(x_t - x_{\Delta_t;t|t-1}\right)\left(x_t - x_{\Delta_t;t|t-1}\right)' \mid \Delta_t, \mathcal{F}_{t-1}\right]
\end{cases}
$$

Puisque la loi conditionnelle du vecteur d'état x_t sachant $\mathcal{F}_t$, notée $f\left(x_t \mid \mathcal{F}_t\right)$, est un mélange de lois normales, ces deux chercheurs, ont suggéré d'approximer ce mélange par une seule densité gaussienne, en utilisant une mesure de divergence.

Ce chapitre, est consacré à l'étude des modèles espace d'états à coefficients périodiques et à changement de régimes Markovien. Nous allons, donc, présenter la définition de ces modèles en question dans la Section 2. Nous allons par la suite, dans la Section 3, dériver un filtre adéquat permettant d'estimer le vecteur d'état inobservable, en se basant sur les travaux de Hamilton (1994), Kim et Nelson (1999) Chen et Tsay (2011) et Nagy et Suzdaleva (2013). Enfin dans la Section 4, ce chapitre sera conclu par un algorithme qui permet d'évaluer la fonction de vraisemblance du modèle afin d'estimer les paramètres inconnus de celui-ci.

4.2 Définitions et notations

Nous considérons, dans ce chapitre, le modèle espace d'état à coefficients périodiques et à changement de régimes Markovien défini par les deux équations suivante

$$y_t = C_t(\Delta_t)\, x_t + H_t(\Delta_t)\, z_t + u_t, \tag{4.1}$$

$$x_t = A_t(\Delta_t)\, x_{t-1} + v_t, \tag{4.2}$$

$$\binom{u_t}{v_t} \sim \mathcal{N}\left(0 \quad , \begin{pmatrix} R_t(\Delta_t) & 0 \\ 0 & Q_t(\Delta_t) \end{pmatrix} \right), \tag{4.3}$$

où l'équation d'observation (4.1) décrit la relation entre un vecteur de dimension $N \times 1$ de données observées y_t et un vecteur de dimension $M \times 1$ de variables inobservables x_t et un vecteur de dimension $K \times 1$ de variables exogènes. L'équation de transition (4.2) décrit l'évolution du vecteur d'état inobservable x_t. Les matrices aléatoires $C_t(\Delta_t)$, $H_t(\Delta_t)$, $A_t(\Delta_t)$, $R_t(\Delta_t)$ et $Q_t(\Delta_t)$ sont de dimensions $N \times M$, $N \times K$, $M \times M$, $N \times N$ et $M \times M$ respectivement. Ces matrices sont des fonctions périodiques dans le temps de période S (i.e., $C_{t+\tau S}(k) = C_t(k)$, $H_{t+\tau S}(k) = H_t(k)$, $A_{t+\tau S}(k) = A_t(k)$, $R_{t+\tau S}(k) = R_t(k)$ et $Q_{t+\tau S}(k) = Q_t(k)$, pour $\Delta_t = k$ avec $k = 1, \ldots, d$ et pour tout $t, \tau \in \mathbb{Z}$) et dépendent d'une chaîne de Markov (Δ_t) qui satisfait l'hypothèse **H1**.

4.3 Filtre associé au modèle

Supposons que les paramètres du modèle spécifié par les équations (4.1) et (4.2) sont connus. Soit $\mathcal{F}_t$ l'ensemble de toutes les observations disponibles jusqu'à l'instant t, tel que, $\mathcal{F}_t = (y'_1, \ldots, y'_t, z'_1, \ldots, z'_t)'$.

Dans les modèles espace d'états linéaires et à coefficients constants, le but est d'établir la meilleure prédiction du vecteur d'état inobservable x_t basée sur l'information disponible $\mathcal{F}_{t-1}$. Il s'agit donc, de calculer la loi conditionnelle du vecteur d'état x_t sachant $\mathcal{F}_{t-1}$. Pour cela, il suffit de calculer la moyenne, notée $x_{t|t-1}$, et la matrice de variance-covariance de l'erreur de prédiction, notée $P_{t|t-1}$, de cette loi conditionnelle, i.e.,

$$x_{t|t-1} = \mathbb{E}(x_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$$

et

$$P_{t|t-1} = \mathbb{E}\left[\left(x_t - x_{t|t-1}\right) \left(x_t - x_{t|t-1}\right)' \mid \mathcal{F}_{t-1} \right].$$

Une fois la loi conditionnelle du vecteur d'état prédit est connue, nous utilisons les équation du filtre de Kalman pour calculer la loi conditionnelle du vecteur d'état filtré, en calculant la moyenne de x_t sachant $\mathcal{F}_t$, notée $x_{t|t}$, ainsi que la matrice de variance-covariance de l'erreur de filtrage, notée $P_{t|t}$.

Dans notre cas, la nature récursive de l'équation (4.2), requiert la connaissance de toute la trajectoire des régimes. Puisque les régimes sont inobservables, on doit connaitre toutes les trajectoires possibles des régimes lors de la prédiction du vecteur d'état x_t à partir de l'information disponible à l'instant $t-1$, selon le critère de l'erreur moyenne quadratique. Cependant, le nombre de trajectoires possibles augmente de façon exponentielle à travers le temps, ce qui rend cette tâche irréalisable. Afin de contourner cette difficulté, nous proposons de se restreindre à la connaissance d'un passé limité de la trajectoire au lieu de la connaissance de toute la trajectoire, de telle sorte que nous obtenons une bonne prédiction et en contrepartie nous aurons une complexité raisonnable de l'algorithme. Nous adoptons la même idée de la Section 2.5, nous définissons une nouvelle variable Δ_t^* qui énumère toutes les trajectoires possibles de la chaîne de Markov jusqu'à un certain retard $r \in \mathbb{N}^*$. Supposons que

$$\begin{array}{lll}
\Delta_t^* = 1 & \text{si} & \Delta_t = 1, \Delta_{t-1} = 1, \ldots, \Delta_{t-r} = 1, \\
\Delta_t^* = 2 & \text{si} & \Delta_t = 2, \Delta_{t-1} = 1, \ldots, \Delta_{t-r} = 1, \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\Delta_t^* = d & \text{si} & \Delta_t = d, \Delta_{t-1} = 1, \ldots, \Delta_{t-r} = 1, \\
\Delta_t^* = d+1 & \text{si} & \Delta_t = 1, \Delta_{t-1} = 2, \ldots, \Delta_{t-r} = 1, \\
\Delta_t^* = d+2 & \text{si} & \Delta_t = 2, \Delta_{t-1} = 2, \ldots, \Delta_{t-r} = 1, \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\Delta_t^* = 2d & \text{si} & \Delta_t = d, \Delta_{t-1} = 2, \ldots, \Delta_{t-r} = 1, \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\Delta_t^* = d^{r+1} & \text{si} & \Delta_t = d, \Delta_{t-1} = d, \ldots, \Delta_{t-r} = d,
\end{array}$$

à partir de laquelle nous pouvons caractériser la $j^{ème}$ trajectoire $\Delta_t^* = j$, de la même manière que dans la Section 2.6. Il est clair que (Δ_t^*) est une chaîne de Markov définie sur un espace d'état fini $\mathcal{E}^* = \{1, 2, \ldots, d^{r+1}\}$, et de matrice de transition $\mathbb{P}^*$ dont les probabilités de transitions $p^*(i,j) = P\left(\Delta_t^* = j \mid \Delta_{t-1}^* = i\right)$, pour $i, j \in \mathcal{E}^*$, peuvent être calculées explicitement de la manière suivante

$$p^*(i,j) = P\left(\Delta_t = j_0, \Delta_{t-1} = j_1, \ldots, \Delta_{t-r} = j_r \middle| \Delta_{t-1} = i_1, \Delta_{t-2} = i_2, \ldots, \Delta_{t-r} = i_r, \Delta_{t-r-1} = i_{r+1}\right),$$

ce qui donne

$$p^*(i,j) = \left\{ \begin{array}{ll} p(i_1, j_0) & \text{si } j_1 = i_1,\ j_2 = i_2, \ldots,\ j_r = i_r, \\ 0 & \text{sinon,} \end{array} \right. , \tag{4.4}$$

où $p(i,j)$, $i, j \in \mathcal{E}$, sont les probabilités de transition de la chaîne de Markov (Δ_t).

Dans le cas du modèle espace d'état périodique à changement de régimes Markovien, notre but est de former une prédiction pour le vecteur d'état inobservable x_t basée non seulement sur l'information disponible $\mathcal{F}_{t-1}$, mais aussi sur l'état de la chaîne de Markov (Δ_t^*). Nous avons

$$x_{\Delta_t^*;t|t-1} = \mathbb{E}\left(x_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right) = A_t\left(\Delta_t^*\right) x_{\Delta_{t-1}^*;t-1|t-1}, \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} P_{\Delta_t^*;t|t-1} &= \mathbb{E}\left[\left(x_t - x_{\Delta_t^*;t|t-1}\right)\left(x_t - x_{\Delta_t^*;t|t-1}\right)'\middle| \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= A_t\left(\Delta_t^*\right) P_{\Delta_{t-1}^*;t-1|t-1} A_t'\left(\Delta_t^*\right) + Q_t\left(\Delta_t^*\right), \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\epsilon_{\Delta_t^*;t|t-1} = y_t - \mathbb{E}\left[y_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right] = y_t - C_t\left(\Delta_t^*\right) x_{\Delta_t^*;t|t-1} - H_t\left(\Delta_t^*\right) z_t, \tag{4.7}$$

et

$$\Omega_{\Delta_t^*;t|t-1} = \mathbb{E}\left(\epsilon_{\Delta_t^*;t|t-1}\epsilon'_{\Delta_t^*;t|t-1}\middle| \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right) = C_t\left(\Delta_t^*\right) P_{\Delta_t^*;t|t-1} C_t'\left(\Delta_t^*\right) + R_t\left(\Delta_t^*\right). \tag{4.8}$$

La distribution du vecteur $(y_t', x_t')'$ conditionnellement à Δ_t^* et $\mathcal{F}_{t-1}$, est une distribution gaussienne donnée par

$$\begin{pmatrix} y_t \\ x_t \end{pmatrix}_{|\Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} C_t\left(\Delta_t^*\right) x_{\Delta_t^*;t|t-1} + H_t\left(\Delta_t^*\right) z_t \\ x_{\Delta_t^*;t|t-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Omega_{\Delta_t^*;t|t-1} & C_t\left(\Delta_t^*\right) P_{\Delta_t^*;t|t-1} \\ P_{\Delta_t^*;t|t-1} C_t'\left(\Delta_t^*\right) & P_{\Delta_t^*;t|t-1} \end{pmatrix}\right).$$

Par conséquent, nous obtenons

$$x_{\Delta_t^*;t|t} = x_{\Delta_t^*;t|t-1} + P_{\Delta_t^*;t|t-1} C_t'\left(\Delta_t^*\right) \Omega^{-1}_{\Delta_t^*;t|t-1}\left(y_t - C_t\left(\Delta_t^*\right) x_{\Delta_t^*;t|t-1} - H_t\left(\Delta_t^*\right) z_t\right) \tag{4.9}$$

et

$$P_{\Delta_t^*;t|t} = P_{\Delta_t^*;t|t-1} - P_{\Delta_t^*;t|t-1} C_t'\left(\Delta_t^*\right) \Omega^{-1}_{\Delta_t^*;t|t-1} C_t\left(\Delta_t^*\right) P_{\Delta_t^*;t|t-1} \tag{4.10}$$

Notons, cependant, que $x_{\Delta_t^*;t|t}$ and $P_{\Delta_t^*;t|t}$ ne représentent pas exactement $\mathbb{E}\left(x_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_t\right)$ et

$$\mathbb{E}\left[\left(x_t - x_{\Delta_t^*;t|t-1}\right)\left(x_t - x_{\Delta_t^*;t|t-1}\right)'\middle| \Delta_t^*, \mathcal{F}_t\right],$$

ceci est dû au fait que la loi conditionnelle de x_t sachant Δ_t^* and $\mathcal{F}_t$ est un mélange de lois normales. Par conséquent, il est nécessaire d'introduire quelques approximations pour rendre le filtre de Kalman donné par les équations $(4.5) - (4.8)$ opérationnel.

4.4 Estimation du modèle

Pour dériver un algorithme qui permet d'estimer les paramètres inconnus du modèle, nous devons établir quelques approximations afin de garantir la récursivité des équations du filtre de Kalman.

4.4.1 Construction et approximation de la densité à postériori du vecteur d'état

La densité à postériori du vecteur d'état x_t peut être obtenue par sommation des densités conditionnelles sachant toutes les trajectoires possibles des régimes, i.e.,

$$\begin{aligned} f\left(x_t \mid \mathcal{F}_t\right) &= \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f\left(x_t, \Delta_t^* \mid \mathcal{F}_t\right) = \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f\left(x_t, \Delta_t^* \mid y_t, \mathcal{F}_{t-1}\right) \\ &\propto \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f\left(x_t, y_t, \Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) \\ &= \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f\left(x_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_t\right) f\left(y_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right) P\left(\Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}\right). \end{aligned} \tag{4.11}$$

D'après (4.11), nous constatons que $f\left(x_t \mid \mathcal{F}_t\right)$ est un mélange de lois gaussiennes. Notre but est d'approximer ce mélange par une seule loi gaussienne, que nous notons $\widehat{f}\left(x_t \mid \mathcal{F}_t\right)$, telle que la mesure de divergence entre les deux densités, dite *Kerridge inaccuracy*, définie par

$$K\left(f\left(x_t \mid \mathcal{F}_t\right); \widehat{f}\left(x_t \mid \mathcal{F}_t\right)\right) = \int_{\boldsymbol{\chi}} f\left(x_t \mid \mathcal{F}_t\right) \ln \frac{1}{\widehat{f}\left(x_t \mid \mathcal{F}_t\right)} dx_t,$$

atteint son minimum, où $\boldsymbol{\chi}$ est l'ensemble de toutes les valeurs possible de x_t, $\forall t \in \mathbb{Z}$. Soit

$$f\left(x_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_t\right) \equiv \mathcal{N}\left(x_{\Delta_t^*;t|t}, P_{\Delta_t^*;t|t}\right) \text{ et } \widehat{f}\left(x_t \mid \mathcal{F}_t\right) \equiv \mathcal{N}\left(\widehat{x}_{t|t}, \widehat{P}_{t|t}\right).$$

Tout d'abord, calculons la mesure K entre la distribution conditionnelle $f\left(x_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_t\right)$ et la distribution approximée $\widehat{f}(x_t \mid \mathcal{F}_t)$, du vecteur d'état x_t, notée $K_{\Delta_t^*}$, et qui prend la forme suivante

$$\begin{aligned}
K_{\Delta_t^*} &= \int_{\mathcal{X}} \mathcal{N}\left(x_{\Delta_t^*;t|t}, P_{\Delta_t^*;t|t}\right) \ln \frac{1}{\mathcal{N}\left(\widehat{x}_{t|t}, \widehat{P}_{t|t}\right)} dx_t \\
&= \int_{\mathcal{X}} \mathcal{N}\left(x_{\Delta_t^*;t|t}, P_{\Delta_t^*;t|t}\right) \ln \frac{1}{(2\pi)^{-\frac{M}{2}} \left|\widehat{P}_{t|t}\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x_t - \widehat{x}_{t|t}\right)' \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(x_t - \widehat{x}_{t|t}\right)\right\}} dx_t \\
&= \int_{\mathcal{X}} \left[-\ln(2\pi)^{-\frac{M}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\widehat{P}_{t|t}\right| + \frac{1}{2}\left(x_t - \widehat{x}_{t|t}\right)' \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(x_t - \widehat{x}_{t|t}\right)\right] \mathcal{N}\left(x_{\Delta_t^*;t|t}, P_{\Delta_t^*;t|t}\right) dx_t \\
&= -\ln(2\pi)^{-\frac{M}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\widehat{P}_{t|t}\right| + \frac{1}{2}\int \left(x_t - \widehat{x}_{t|t}\right)' \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(x_t - \widehat{x}_{t|t}\right) \mathcal{N}\left(x_{\Delta_t^*;t|t}, P_{\Delta_t^*;t|t}\right) dx_t \\
&= -\ln(2\pi)^{-\frac{M}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\widehat{P}_{t|t}\right| + \frac{1}{2}\int \left(\left\{x_t - x_{\Delta_t^*;t|t}\right\}\left\{x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right\}\right)' \widehat{P}_{t|t}^{-1} \\
&\quad \times \left(\left\{x_t - x_{\Delta_t^*;t|t}\right\}\left\{x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right\}\right) \mathcal{N}\left(x_{\Delta_t^*;t|t}, P_{\Delta_t^*;t|t}\right) dx_t \\
&= -\ln(2\pi)^{-\frac{M}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\widehat{P}_{t|t}\right| + \frac{1}{2}\int \left(x_t - x_{\Delta_t^*;t|t}\right)' \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(x_t - x_{\Delta_t^*;t|t}\right) \mathcal{N}\left(x_{\Delta_t^*;t|t}, P_{\Delta_t^*;t|t}\right) dx_t \\
&\quad + \frac{1}{2}\underbrace{\int \left(x_t - x_{\Delta_t^*;t|t}\right)' \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right) \mathcal{N}\left(x_{\Delta_t^*;t|t}, P_{\Delta_t^*;t|t}\right) dx_t}_{=0} \\
&\quad + \frac{1}{2}\underbrace{\int \left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)' \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(x_t - x_{\Delta_t^*;t|t}\right) \mathcal{N}\left(x_{\Delta_t^*;t|t}, P_{\Delta_t^*;t|t}\right) dx_t}_{=0} \\
&\quad + \frac{1}{2}\int \left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)' \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right) \mathcal{N}\left(x_{\Delta_t^*;t|t}, P_{\Delta_t^*;t|t}\right) dx_t \\
&= -\ln(2\pi)^{-\frac{M}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\widehat{P}_{t|t}\right| + \frac{1}{2}\underbrace{\int \left(x_t - x_{\Delta_t^*;t|t}\right)' \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(x_t - x_{\Delta_t^*;t|t}\right) \mathcal{N}\left(x_{\Delta_t^*;t|t}, P_{\Delta_t^*;t|t}\right) dx_t}_{=\mathbb{E}\left[\left(x_t - x_{\Delta_t^*;t|t}\right)' \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(x_t - x_{\Delta_t^*;t|t}\right)\right]} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)' \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right) \underbrace{\int \mathcal{N}\left(x_{\Delta_t^*;t|t}, P_{\Delta_t^*;t|t}\right) dx_t}_{=1} \\
&= -\ln(2\pi)^{-\frac{M}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\widehat{P}_{t|t}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(\widehat{P}_{t|t}^{-1} P_{\Delta_t^*;t|t}\right) + \frac{1}{2}\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)' \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$K_{\Delta_t^*} = -\ln(2\pi)^{-\frac{M}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\widehat{P}_{t|t}\right| + \frac{1}{2}\left[\operatorname{Tr}\left(\widehat{P}_{t|t}^{-1} P_{\Delta_t^*;t|t}\right) + \left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)' \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)\right].$$

Par conséquent, la mesure K sera exprimée comme suit

$$K = \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f\left(y_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right) P\left(\Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) K_{\Delta_t^*}.$$

Pour minimiser la mesure K, il est nécessaire de dériver les mesures $K_{\Delta_t^*}$ par rapport à $\widehat{x}_{t|t}$ et $\widehat{P}_{t|t}$ respectivement. Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_{\Delta_t^*}}{\partial \widehat{x}_{t|t}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \widehat{x}_{t|t}}\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)' \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right) \\
&= \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(\widehat{x}_{t|t} - x_{\Delta_t^*;t|t}\right),
\end{aligned}$$

et la dérivée de $K_{\Delta_t^*}$ par rapport à $\widehat{P}_{t|t}$ est calculée de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_{\Delta_t^*}}{\partial \widehat{P}_{t|t}} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial \widehat{P}_{t|t}}\ln\left|\widehat{R}_{t|t}\right| + \frac{\partial}{\partial \widehat{P}_{t|t}}\operatorname{Tr}\left(\widehat{P}_{t|t}^{-1}P_{\Delta_t^*;t|t}\right) + \left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)'\frac{\partial}{\partial \widehat{P}_{t|t}}\widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\widehat{P}_{t|t}^{-1} - \widehat{P}_{t|t}^{-1}\widehat{P}_{t|t}^{-1}P_{\Delta_t^*;t|t} - \left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)'\widehat{P}_{t|t}^{-1}\widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\widehat{P}_{t|t}^{-1}\widehat{P}_{t|t}\widehat{P}_{t|t}^{-1} - \widehat{P}_{t|t}^{-1}P_{\Delta_t^*;t|t}\widehat{P}_{t|t}^{-1} - \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)'\widehat{P}_{t|t}^{-1}\right\}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{\partial K_{\Delta_t^*}}{\partial \widehat{P}_{t|t}} = \frac{1}{2}\widehat{P}_{t|t}^{-1}\left\{\widehat{P}_{t|t} - P_{\Delta_t^*;t|t} - \left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)'\right\}\widehat{P}_{t|t}^{-1}.$$

Finalement, les dérivées de la mesure de divergence K, entre les deux distributions $f\left(x_t \mid \mathcal{F}_t\right)$ et $\widehat{f}\left(x_t \mid \mathcal{F}_t\right)$, sont données par

$$\begin{cases}
\frac{\partial K}{\partial \widehat{x}_{t|t}} = \sum\limits_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f\left(y_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right) P\left(\Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)\widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(\widehat{x}_{t|t} - x_{\Delta_t^*;t|t}\right), \\
\frac{\partial K}{\partial \widehat{P}_{t|t}} = \frac{1}{2}\sum\limits_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f\left(y_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right) P\left(\Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)\widehat{P}_{t|t}^{-1}\left\{\widehat{P}_{t|t} - P_{\Delta_t^*;t|t} - \left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)'\right\}\widehat{P}_{t|t}^{-1}.
\end{cases}$$

Pour déterminer le minimum de la fonction K, il suffit de résoudre le système d'équation suivant

$$\begin{cases}
\sum\limits_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f\left(y_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right) P\left(\Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)\widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(\widehat{x}_{t|t} - x_{\Delta_t^*;t|t}\right) = 0, \\
\sum\limits_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f\left(y_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right) P\left(\Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)\widehat{P}_{t|t}^{-1}\left\{\widehat{P}_{t|t} - P_{\Delta_t^*;t|t} - \left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)'\right\}\widehat{P}_{t|t}^{-1} = 0.
\end{cases}$$

Par suite, les paramètres de la distribution normale $\widehat{f}(x_t \mid \mathcal{F}_t) = \mathcal{N}\left(\widehat{x}_{t|t}, \widehat{P}_{t|t}\right)$ qui minimise la mesure K sont donnés par

$$\widehat{x}_{t|t} = \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f(y_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}) P(\Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}) x_{\Delta_t^*;t|t}, \tag{4.12}$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{t|t} &= \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f(y_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}) P(\Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}) P_{\Delta_t^*;t|t} \\ &\quad + \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f(y_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}) P(\Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}) \left(\widehat{x}_{t|t} - x_{\Delta_t^*;t|t}\right) \left(\widehat{x}_{t|t} - x_{\Delta_t^*;t|t}\right)'. \end{aligned} \tag{4.13}$$

4.4.2 Évaluation de la fonction de vraisemblance

Une fois que les approximations nécessaires pour le déroulement du filtre de Kalman présenté précédemment, sont établies, nous pouvons alors passer à l'évaluation de la fonction de vraisemblance de notre modèle espace d'état périodique et à changement de régimes Markovien. Nous résumons, maintenant, tous les résultats que nous avons obtenus à travers ce chapitre dans un algorithme qui permet de calculer la fonction de vraisemblance du modèle de manière récursive afin d'estimer ses paramètres inconnus.

Algorithme 4.1 (Aliat et Hamdi, 2017*c***)**

1. *Initialisation de l'algorithme :*

   (a) *Choisir des valeurs initiales pour les vecteurs $x_{j;0|0}$ et $P_{j;0|0}$, pour toute trajectoire $j = 1, 2, \ldots, d^{r+1}$ ainsi que la loi initiale de Δ_0^*.*

   (b) *Construire la matrice des probabilités de transitions $\mathbb{P}^*$ à partir de (**??**).*

2. *Pour $t = 1, ..., T$,*

   (a) *Exécuter le filtre de Kalman (4.5) − (4.10) pour obtenir : $x_{j;t|t-1}$, $P_{j;t|t-1}$, $\epsilon_{j;t|t-1}$, $\Omega_{j;t|t-1}$, $x_{j;t|t}$ et $P_{j;t|t}$, pour toute trajectoire $j = 1, 2, \ldots, d^{r+1}$.*

   (b) *Calculer pour tout $j = 1, 2, \ldots, d^{r+1}$, la probabilité $P(\Delta_t^* = j \mid \mathcal{F}_{t-1})$ à partir de la relation suivante*

$$P(\Delta_t^* = j \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{i \in \mathcal{E}^*} P\left(\Delta_t^* = j \mid \Delta_{t-1}^* = i\right) P\left(\Delta_{t-1}^* = i \mid \mathcal{F}_{t-1}\right).$$

(c) *Calculer la densité conjointe* $f\left(y_t, \Delta_t^* = j \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)$, *pour* $j = 1, 2, \ldots, d^{r+1}$, *à partir de la relation suivante*

$$f\left(y_t, \Delta_t^* = j \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) = f\left(y_t \mid \Delta_t^* = j, \mathcal{F}_{t-1}\right) P\left(\Delta_t^* = j \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)$$

où

$$f\left(y_t \mid \Delta_t^* = j, \mathcal{F}_{t-1}\right) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \left|\Omega_{j;t|t-1}\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\epsilon'_{j;t|t-1}\Omega^{-1}_{j;t|t-1}\epsilon_{j;t|t-1}\right\}.$$

(d) *Calculer la densité marginale* $f\left(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)$ *comme suit*

$$f\left(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) = \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f\left(y_t, \Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}\right).$$

Puis calculer les probabilités

$$P\left(\Delta_t^* = j \mid \mathcal{F}_t\right) = \frac{f\left(y_t, \Delta_t^* = j \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)}{f\left(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)}, \text{ pour } j = 1, 2, \ldots, d^{r+1}.$$

(e) *Calculer les approximations* $\widehat{x}_{t|t}$ *et* $\widehat{P}_{t|t}$ *à partir de* (4.12) *et* (4.13) *respectivement.*

3. *Utiliser une procédure d'optimisation pour déterminer* $\widehat{\theta}$ *qui minimise* $-2\mathcal{L}(\theta)$. *La fonction de log-vraisemblance* $\mathcal{L}(\theta)$ *peut être évaluée par la relation*

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{t=1}^{T} \log\left[f\left(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)\right].$$

Conclusion et perspectives

La présente thèse a été consacrée aux modèles MS, en accordant une attention particulière à l'étude de quelques modèles MS périodiques. Les modèles à changement de régimes, en particulier les modèles à changement de régimes Markovien, sont considérés comme un moyen prometteur pour capturer les non-linéarités dans les séries chronologiques. Ils peuvent expliquer les changements soudains dans la structure de la moyenne ou la variance d'un processus comme ils peuvent également donner, une interprétation directe de ces changements. Dans le premier chapitre nous avons établi un aperçu sur les concepts généraux des modèles MS, tout en présentant quelques travaux de recherche qui concernent l'étude de différents types de modèles MS.

Dans le second chapitre, nous avons proposé une nouvelle classe de modèles non linéaires pour les séries temporelles périodiques, à savoir les modèles $MS - PARMA$. Ces modèles sont potentiellement utiles dans la modélisation de séries temporelles non linéaires caractérisées par une structure d'autocorrélation périodique. Nous avons étudié quelques propriétés probabilistes fondamentales de cette classe de modèles, où nous avons établi des conditions assurant l'existence d'une solution périodiquement strictement stationnaire. Nous avons également établi une condition suffisante assurant l'existence et la finitude de $\mathbb{E}\left(y_t^m\right)$, $m \geq 1$. Sous ces conditions, des expressions explicites sont fournies pour le calcul des moments. Comme dans le modèle non périodique, l'estimation peut être faite en utilisant la méthode MV. Des exemples de simulation ont montré que la procédure d'estimation MV proposée ne fonctionne pas bien lorsque la taille de l'échantillon est petite. Mais, sa performance d'estimation s'améliore significativement avec l'augmentation de la taille. Ceci montre empiriquement que la propriété de consistance désirable des estimateurs MV est satisfaite. En fait, la taille de l'ensemble de données en économie et en finance a augmenté rapidement et nous pouvons facilement obtenir un grand volume de données. Afin d'améliorer la qualité de l'estimation, il pourrait être intéressant dans une future recherche de développer une nouvelle approche d'estimation, par exemple, en adoptant la méthodologie bayésienne. De nombreux problèmes concernant les modèles $MS - PARMA$ restent posés. Par exemple, des approches pour sélectionner le nombre de régimes de la chaîne de Markov inobservable ainsi que les ordres du modèle doivent être développés. Le comportement asymptotique des estimateurs MV devrait être théoriquement étudié. Enfin, comme dans le modèle non périodique, la version multivariée de ce modèle peut être étudiée.

Dans le troisième chapitre, nous avons proposé une autre classe de modèles très flexible, permettant de capturer différents traits qui caractérisent les séries économiques, et financières en particulier, à savoir le modèle $MS - PGARCH$. Nous nous sommes focalisés sur l'étude des propriétés probabilistes du modèle. Nous avons établi des conditions nécessaires et suffisantes pour la stationnarité périodique ainsi que pour l'existence des moments d'ordres supérieurs du modèle. Nous avons donné, sous les conditions d'existence, les expressions qui permettent de calculer les moments d'ordres pair d'un processus $MS - PGARCH$, et nous avons présenté des algorithmes pour le calcul des autocovariances, en accordant plus d'importance au cas particulier $MS - PGARCH_S\,(1,1)$ qui est très utile pour modéliser les séries économiques et financières en particulier. Plusieurs travaux sur cette classe de modèles restent à explorer, tels que l'estimation des paramètres, qui n'est pas un problème facile même dans le cas non périodique.

Finalement, dans le dernier chapitre, nous avons essayé d'adopter les mêmes idées des chapitres précédents, dans le cadre des modèles espace d'états. Nous avons proposé un modèle espace d'états périodique à changement de régimes Markovien, et nous avons élaboré une procédure qui permet d'estimer la variable d'état inobservable et ensuite d'évaluer la fonction de vraisemblance du modèle afin d'estimer ses paramètres. Cette petite tentative que nous avons présenté à travers ce chapitre ouvre la voie sur l'exploration des modèles espace d'états périodique à changement de régimes Markovien dans des recherches ultérieures.

Bibliographie

[1] Abramson, A., Cohen, I., (2007) On the stationarity of Markov-Switching $GARCH$ models, *Econometic Theory*, **23**, 485-500.

[2] Adams, G. J., Goodwin, G. C. (1995). Parameter estimation for periodic $ARMA$ models. *Journal Time Series Analysis*, **16**, 127-145.

[3] Aknouche, A. (2007). Causality conditions and autocovariance calculations in $PVAR$ models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **77**, 769-780.

[4] Aknouche, A., Belbachir, H., Hamdi, F. (2008). A Note on Calculating Autocovariances of Periodic $ARMA$ Models. *Communications in Statistics -Simulation and Computation*, **37**, 924-927.

[5] Aknouche, A., Bentarzi, M. (2008). On the existence of higher-order moments for periodic $GARCH$ models. *Statistics and Probability Letters*, **78**, $3262 - 3268$.

[6] Aknouche A., Bibi, A. (2009). Quasi-maximum likelihood estimation of periodic $GARCH$ and periodic $ARMA - GARCH$ processes. *Journal of Time Series Analysis*, **28**, $19 - 46$.

[7] Aknouche, A., Guerbyenne, H. (2009a). On some probabilistic properties of double periodic AR models. *Statistics and Probability Letters*, **79**, 407-413.

[8] Aknouche, A., Guerbyenne, H. (2009b), Periodic stationarity of random coefficient periodic autoregressions. *Statistics and Probability Letters*, **79**, 990-996.

[9] Aknouche, A., Hamdi, F. (2009) . Calculating the autocovariances and the likelihood calculations for periodic $VARMA$ models. *Journal of Statistical Computation and Simulation.* **79,** 227-239.

[10] Albert, J.H. and Chib, S. (1993). Bayes inference via gibbs sampling of autoregressive time series subject to markov mean and variance shifts. *Journal Business and Economic Statistics,* **11**,1-15.

[11] **Aliat, B**., Hamdi, F., (2017a). On markov-switching periodic $ARMA$ models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **47**, 344-364.

[12] **Aliat, B**., Hamdi, F., (2017*b*) Some probabilistic properties of Markov-switching periodic *GARCH* models. Submitted

[13] **Aliat, B.**, Hamdi, F., (2017*c*) On periodic state-space models with regime switching. Mimeo

[14] Anderson, P. L., Meerschaert, M. M., (2005). Parameter estimation for periodically stationary time series. *Journal of Time Series Analysis*, **26**, 489-518.

[15] Anderson, P. L., Meerschaert, M. M., Vecchia, A. V. (1999). Innovations algorithm for periodically stationary time series. *Stochastic Processes and their Applications*, **83**, 149-169.

[16] Anderson, B. D., Moore, J. B. (1979). Optimal filtering. *Englewood Cliffs*, **21**, 22-95.

[17] Ansley, C. F. (1979). An algorithm for the exact likelihood of a mixed autoregressive-moving average process. *Biometrika*, **66**, 59-65.

[18] Aoki, M., (1987). *State space modelling of time series.* Springer-Verlag, New York

[19] Augustyniak, A., (2014) Maximum likelihood estimation of the Markov-switching *GARCH* model. *Computational Statistics and Data Analysis* **76**, 61–75.

[20] Augustyniak, A., Boudreault, M., Morales, M., (2017) Maximum Likelihood Estimation of the Markov-Switching *GARCH* Model Based on a General Collapsing Procedure. *Methodology and Computing in Applied Probability,* $1-24$.

[21] Basawa, I. V., Lund, R. (2001). Large sample properties of parameter estimates for periodic *ARMA* models. *Journal of Time Series Analysis*, **22**, 651-663.

[22] Baum, L.E., Petrie, T. (1966). Statistical inference for probabilistic functions of finite state space Markov chains. *Annals of Mathematical Statistics,* **30**, 1554-1563.

[23] Bauwens, L., Dufays, A., Rombouts, J. V. K., (2014) Marginal likelihood for Markov-switching and change-point *GARCH* models. *Journal of Econometrics*, **178**, 508–522.

[24] Bauwens, L., Preminger, A., Rombouts, J. V. K., (2010) Theory and inference for Markov switching GARCH model, *Econometrics Journal*, volume **13**,. 218-244.

[25] Bentarzi, M. (1995). Modèles de séries chronologiques à coefficients périodiques. Thèse de Doctorat es Sciences. Institut de Mathématiques, U.S.T.H.B, Alger, Algérie.

[26] Bentarzi, M., Aknouche A. (2005). Calculation of the Fisher information matrix for periodic *ARMA* models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **34**, 891-903.

[27] Bentarzi, M., Guerbyenne, H., Hemis, R., (2008). Predictive density order selection of periodic *AR* models. *Communications in Statistics -Simulation and Computation*, **37**, 1167-1182.

[28] Bentarzi, M., Hallin, M. (1994). On the Invertibility of Periodic Moving Average Models. *Journal of Time Series Analysis*, **15**, 263-268.

[29] Bentarzi, M., Hamdi, F. (2008*a*), Mixture periodic autoregressive conditional heteroskedastic models. *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 1-16.

[30] Bentarzi, M., Hamdi, F. (2008*b*), Mixture Periodic Autoregression with Periodic $ARCH$ Errors. *Advances and Applications in Statistics*, **8**, 219-46.

[31] Bentarzi, M., Merzougui, M. (2011). Moments of mixture periodic autoregressive models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **40**, 3937-3947.

[32] Bibi, A., Aknouche, A. (2008). On periodic $GARCH$ processes : Stationarity, existence of moments and geometric ergodicity. *Mathematical methods of Statistics*, **17**, 305-316.

[33] Bibi, A., Lescheb, I. (2010*a*). Strong consistency and asymptotic normality of least squares estimators for $PGARCH$ and $PARMA-PGARCH$ models. *Statistics and probability letters*, **80**, 1532-1542.

[34] Bibi, A., Lescheb, I. (2010*b*). A conditional least squares approach to $PGARCH$ and $PARMA-PGARCH$ time series estimation. *Comptes Rendus Mathematique*, **348**, 1211-1216.

[35] Bibi, A., Lescheb, I. (2013). Estimation and asymptotic properties in periodic $GARCH(1,1)$ models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **42**, 3497-3513.

[36] Billio, M., Casarin, R., Osuntuyi, A., (2016) Efficient Gibbs sampling for Markov switching $GARCH$ models. Computational Statistics and Data Analysis, **100**, 37-57.

[37] Billio, M., Cavicchioli, M. (2017). Markov Switching GARCH Models : Filtering, Approximations and Duality. *In Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance,* 59-72. Springer, Cham.

[38] Billio, M., Monfort, A., (1998) Switching state-space models likelihood function, filtering and smoothing. *Journal of Statistical Planning and Inference,* **68**, 65-103

[39] Billio, M., Monfort, A., Robert, C. P. (1999). Bayesian estimation of switching ARMA models. *Journal of econometrics*, **93**, 229-255.

[40] Bittanti, S., De Nicolao, G. (1993). Spectral factorization of linear periodic systems with application to the optimal prediction of periodic ARMA models. *Automatica*, **29**, 517-522.

[41] Bollen, N. P. B., Gray, S. F., Whaley, R. E., (2000) Regime-switching in foreign exchange rates : Evidence from currency option prices. *Journal of Econometrics*, **94,** 239-276.

[42] Bollerslev, T., (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.

[43] Bollerslev, T., Ghysels, E. (1996) Periodic autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Business and Economic Statistics*, **14**, 139–152.

[44] Boshnakov, G. N., (1996). Recursive computation of the parameters of periodic autoregressive moving-average processes. *Journal Time Series Analysis*, **17**, 333-349.

[45] Bougerol, P., Picard, N., (1992). Strict stationarity of generalized autoregressive processes. *The annals of probability,* **20**, 1714-1730.

[46] Brandt, A. (1986).The stochastic equation $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ with stationary coefficients. *Advanced in Applied Probability*, **18**, 211-220.

[47] Cai, J., (1994) A Markov model of Switching-regime $ARCH$, *Journal of Business and Economic Statistics*, **12**, 309-316.

[48] Cavicchioli, M. (2013). Spectral density of Markov-switching $VARMA$ models. *Economics Letters*, **121**, 218-220.

[49] Cavicchioli, M. (2014a). Determining the number of regimes in Markov switching VAR and VMA models. *Journal of Time Series Analysis*, **35**, 173-186.

[50] Cavicchioli, M. (2014b). Analysis of the likelihood function for Markov-Switching $VAR(CH)$ models. *Journal of Time Series Analysis*, **35**, 624-639.

[51] Cavicchioli, M. (2014c). Autocovariance and Linear Transformations of Markov Switching $VARMA$ Processes. *Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics*, **6**, 275-289.

[52] Cavicchioli, M. (2016). Weak $VARMA$ representations of regime-switching state-space models. *Statistical Papers*, **57**, 705-720.

[53] Cavicchioli, M. (2017). Third and fourth moments of vector autoregressions with regime switching. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46(9), 4181-4194.

[54] Chen, C.C., Tsay, W.J., (2011). A Markov regime-switching $ARMA$ approach for hedging stock indices. *J. Futures Markets*, **31**, 165-191.

[55] Chib, S. (1996). Calculating posterior distributions and modal estimates in Markov mixture models. *Journal of Econometrics*, **75**, 79-97.

[56] Cipra, T. (1985). Periodic moving average process. *Aplikace matematiky*, **30**, 218-229.

[57] Cleveland, W. P, Tiao, G. C. (1979). Modeling seasonal time series. *Revue Economique Appliquée*, **32**, 107-29.

[58] Cosslett, S. R., Lee, L. F. (1985). Serial correlation in latent discrete variable models. *Journal of Econometrics*, **27**, 79-97.

[59] Dempster, A. P., Laird, N. M., Rubin, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the royal statistical society.* Series B, **39**, 1-38.

[60] Diebold, F. X. (1986). Modeling the persistence of conditional variances : A comment. *Econometric Reviews*, **5**, 51-56.

[61] Ding, Z., Granger, C.W.J. and Engle, R. (1993) A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance* **1**, 83-106.

[62] Douc, R., Moulines, E., Ryden, T., (2004). Asymptotic properties of the maximum likelihood estimator in autoregressive models with Markov regime. *The Annals of statistics*, **32**, 2254-2304.

[63] Douc, R., Moulines, E., Stoffer, D. (2014). *Nonlinear time series : Theory, methods and applications with R examples.* CRC Press.

[64] Dueker, M. J., (1997) Markov switching in $GARCH$ processes and mean-reverting stock-market volatility, *Journal of Business and Economic Statistics*, **15**, 26-34.

[65] Durbin, J. and Koopman, S. J., (2001). *Time Series Analysis by State Space Methods.* Oxford, New York.

[66] Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with estimates of variance of U.K. Inflation. *Econometrica*, **50**, 987-1008.

[67] Francq, C., Gautier, A. (2004). Estimation of time-varying ARMA models with Markovian changes in regime. *Statistics and probability letters*, **70**, 243-251.

[68] Francq, C., & Roussignol, M. (1997). On white noises driven by hidden Markov chains. *Journal of Time Series Analysis*, **18**, 553-578.

[69] Francq, C., Roussignol, M. (1998). Ergodicity of autoregressive processes with Markov-switching and consistency of the maximum-likelihood estimator. *Statistics*, **32**, 151-173.

[70] Francq, C., Roussignol, M., Zakoïan, J. M., (2001) Conditional heteroskedasticity driven by hidden Markov chains, *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **22**, No. 2, 197-220.

[71] Francq, C., Zakoïan, J. M., (2001). Stationarity of multivariate Markov-switching $ARMA$ models. *Journal of Econometrics*, **102**, 339-364.

[72] Francq, C., Zakoïan, J. M., (2002) Autocovariance structure of powers of switching-regime $ARMA$ processes. *ESAIM : Probability and Statistics*, **6**, 259-270.

[73] Francq, C., Zakoïan, J. M., (2005) The L^2-structures of standard and switching-regime $GARCH$ models, *Stochastic Processes and their Applications*, **115**, 1557-1582.

[74] Francq, C., Zakoïan, J. M., (2008) Deriving the autocovariances of powers of Markov-switching *GARCH* models with applications to statistical inference, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 3027-3046.

[75] Francq, C., Zakoïan, J. M., (2010) *GARCH models : Structure, Statistical Inference and Financial Applications*, Wiley, United Kingdom.

[76] Franke, J. (1985). A Levinson-Durbin recursion for autoregressive-moving average processes. *Biometrika*, **72**, 573-581.

[77] Franses, P. H. (1996). *Periodicity and Stochastic Trends in Economic Times Series*. Oxford University Press.

[78] Franses, P.H., Paap, R. (2000) . Modeling Changing Day-of-the-week Seasonality in Stock Returns and Volatility, *Applied Financial Economics*, **10**, 483-488.

[79] Franses, P. H., Paap, R. (2004). *Periodic time series models*. Oxford University Press.

[80] Franses, P. H., Van Dijk, D. (2000). *Non-linear time series models in empirical finance*. Cambridge University Press.

[81] Frühwirth-Schnatter, S., (2001*a*) . Fully Bayesian analysis of switching Gaussian state space models. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **53**, 31-49.

[82] Frühwirth-Schnatter, S. (2001*b*). Markov chain Monte Carlo estimation of classical and dynamic switching and mixture models. *Journal of the American Statistical Association*, **96**, 194-209.

[83] Frühwirth-Schnatter, S., (2006) *Finite Mixture and Markov Switching Models*, Springer, New York.

[84] Ghahramani, Z., Hinton, G. E. (2000). Variational learning for switching state-space models. *Neural computation*, **12**, 831-864.

[85] Gladyshev, E. G. (1961). Periodically correlated random sequence. *Sov. Math*, 385-388.

[86] Goldfeld, S. M., Quandt, R. E., (1973) The estimation of structural shifts by switching regressions. *Annals of Economic and Social Measurement*, **2**, 475-485.

[87] Granger, C. W. J. and Andersen, A. P. (1978). *Introduction to Bilinear Time Series Models*. Vandenhoeck & Ruprect, Gottingen.

[88] Gray, S. F. (1996). Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process. *Journal of Financial Economics*, **42**, 27-62.

[89] Guerbyenne, H., Hamdi, F., (2015) Bootstrapping Periodic State-Space Models. *Communications in Statistics- simulation and computation*, **44**, 374-401.

[90] Haas, M., Mittink, S., Paolella,M., (2004*a*) A new approach to Markov-Switching GARCH models, *Journal of Financial Econometrics*, **2**, 493-530.

[91] Haas, M., Mittnik, S., Paolella, M. S. (2004*b*). Mixed normal conditional heteroskedasticity. *Journal of Financial Econometrics*, **2**, 211-250.

[92] Hamdi, F., (2012). Computing the exact Fisher information matrix of periodic state-space models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **41**, 4182-4199.

[93] Hamdi, F., Souam, S. (2013). Mixture periodic $GARCH$ models : Applications to exchange rate modeling. In Modeling, Simulation and Applied Optimization (ICMSAO), 2013 5th International Conference on IEEE.

[94] Hamdi, F., Souam, S. (2017). Mixture periodic GARCH models : theory and applications. *Empirical Economics*, 1-32.

[95] Hamilton, J. D. (1988). Rational-expectations econometric analysis of changes in regime : An investigation of the term structure of interest rates. *Journal of Economic Dynamics and Control*, **12**, 385-423.

[96] Hamilton, J.D. (1989). A new approach to the economie analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica*, **57**, 357-384.

[97] Hamilton, J.D. (1990). Analysis of time series subject to changes in regime. *Journal of Econometrics,* **45**, 39-70.

[98] Hamilton, J. D., (1994). *Time series analysis.* Princeton University Press, New Jersey.

[99] Hamilton, J. D., Susmel, R. (1994) Autoregressive condiational heteroskedasticity and changes in regime, *Journal of Econometrics*, **64**, 307-333.

[100] Harrison, P. J., Stevens, C. F. (1976). Bayesian forecasting. *Journal of the Royal Statistical Society.* Series B, 205-247.

[101] Harvey, A. C.,(1989). *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter.* Cambridge University Press, New York.

[102] Harvey, A. C., Pierse, R. G. (1984). Estimating missing observations in economic time series. *Journal of the American Statistical Association*, **79**, 125-131.

[103] Harvey, A. C., Todd, P. H. J. (1983). Forecasting economic time series with structural and Box-Jenkins models : A case study. *Journal of Business and Economic Statistics*, **1**, 299-307.

[104] Holst, U., Lindgren, G., Holst, J., Thuvesholmen, M. (1994). Recursive estimation in switching autoregressions with a Markov regime. *Journal of time series analysis*, **15**, 489-506.

[105] Jimenez, C., McLeod, A.I., Hipel, K.W., (1989) Kalman filter estimation for periodic autoregressive-moving average models. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, **3**, 227-40.

[106] Jones, R. H. (1984). Fitting multivariate models to unequally spaced data. *In Time series analysis of irregularly observed data*, 158-188.

[107] Kim, C. J., (1994). Dynamic linear models with Markov-switching. *Journal of Econometrics*, **60**,1-22.

[108] Kim, C. J., Nelson, C. R, (1999). *State-space models with regime-switching*. The MIT press.

[109] Kitagawa, G., Gersch, W. (1984). A smoothness priors state space modeling of time series with trend and seasonality. *Journal of the American Statistical Association*, **79**, 378-389.

[110] Klaasen, F. (2002) Improving $GARCH$ volatility forecasts, *Empirical Econometrics*, **27**, 363-394.

[111] Krishnamurthy, V., Ryden, T. (1998). Consistent Estimation of Linear and Non-linear Autoregressive Models with Markov Regime. *Journal of Time Series Analysis*, **19**, 291-307.

[112] Krolzig, H.M., (1997). *Markov-Switching Vector Autoregressions : Modelling, Statistical Inference and Application to Business Cycle Analysis*. Berlin-Heidelberg-New York : Springer Verlag.

[113] Lamoureux, C. G., Lastrapes, W. D. (1990). Persistence in variance, structural change, and the GARCH model. *Journal of Business and Economic Statistics*, **8**, 225-234.

[114] Lee, O., (2005). Probabilistic Properties of a Nonlinear $ARMA$ Process with Markov Switching. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **34**, 193-204.

[115] Lee, O., Shin, D. W. (2009). Geometric Ergodicity and Moment Conditions for a Seasonal $GARCH$ Model with Periodic Coefficients. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **39**, 38-51.

[116] Li, W. K., Hui, Y. V. (1988). An algorithm for the exact likelihood of periodic autoregressive moving average models. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **17**, 1483-1494.

[117] Liu, J. C. (2006). Stationarity of a Markov-switching GARCH model. *Journal of Financial Econometrics*, **4**, 573-593.

[118] Lund, R., Basawa, I. V., (2000). Recursive prediction and likelihood evaluation for periodic $ARMA$ models. *Journal of Time Series Analysis*, **21**, 75-93.

[119] Magnus, J. R., Neudecker, H. (1999). *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester.

[120] Marcucci, J. (2005). Forecasting stock market volatility with regime-switching GARCH models. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, **9**.

[121] McCulloch, R. E., Tsay, R. S. (1994). Statistical analysis of economic time series via Markov switching models. *Journal of time series analysis*, **15**, 523-539.

[122] Nagy, I., Suzdaleva, E., (2013). Mixture Estimation with State-Space Components and Markov Model of Switching. *Applied Mathematical Modelling*, **37**, 9970-9984.

[123] Nicholls, D. F. and Quinn, B. G. (1982). *Random coefficient autoregressive model : An introduction*. Springer Verlag, New York.

[124] Osborn, D. R. (1992). The implication of periodically varying coefficients for seasonal time series processes. J. Econometrics, **48**, 373-84.

[125] Pagano, M., (1978). On periodic and multiple autoregression. *The Annals of Statistics*, 6, 1310-1317.

[126] Pataracchia, B. (2011). The spectral representation of Markov switching ARMA models. *Economics Letters*, **112**, 11-15.

[127] Psaradakis, Z., Spagnolo, N., (2003). On the determination of the number of regimes in Markov-switching autoregressive models. *Journal of Time Series Analysis*, **24**, 237-252.

[128] Psaradakis, Z., Spagnolo, N., (2006) Joint determination of the state dimension and autoregressive order for models with in Markov regime switching. *Journal of Time Series Analysis*, **27**, 753-766.

[129] Quandt, R. E. (1958). The estimation of the parameters of a linear regression obeying two separate regime. *Journal of the American Statistical Association,* **53**, 873-880.

[130] Rodriguez, A., Ruiz, E. (2009). Bootstrap prediction intervals in state-space models. *Journal of time series analysis*, **30**, 167-178.

[131] Rossi, A., Gallo, G., (2006) , Volatility Estimation via Hidden Markov Models. *Journal of Empirical Finance,* **13**, 203-230.

[132] Sakai, H. (1982). Circular lattice filtering using Pagano's method. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, **30**, 279-287.

[133] Salas, J. D, Duane C. Boes, Smith, R. A. (1983). Estimation of $ARMA$ Models with Seasonal Parameters. *Water Resources Research*, **18**, 1006-10.

[134] Shao, Q. (2006). Mixture periodic autoregressive time series models. *Statistics and probability letters*, **76**, 609-618.

[135] Shao, Q., Lund, R. (2004). Computation and characterization of autocorrelations and partial autocorrelations in periodic $ARMA$ models. *Journal of Time Series Analysis*, **25**, 359-372.

[136] Shumway, R. H., Stoffer, D. S. (1991). Dynamic linear models with switching. *Journal of the American Statistical Association*, **86**, 763-769.

[137] Shumway, R. H., Stoffer, D. S. (1982). An approach to time series smoothing and forecasting using the EM algorithm. *Journal of time series analysis*, **3**, 253-264.

[138] Stelzer, R., (2009) On Markov-switching ARMA processes- Stationarity, existence of moments and geometric ergodicity. *Econometric Theory,* **25,** 43-62.

[139] Stoffer, D. S., Wall, K. D. (1991). Bootstrapping state-space models : Gaussian maximum likelihood estimation and the Kalman filter. *Journal of the american statistical association*, **86**, 1024-1033.

[140] Tesfaye, Y. G., Meerschaert, M. M. and Anderson, P. L. (2006). Identification of $PARMA$ models and their application to the modeling of river flows. *Water Resources Research*, **42**, W01419.

[141] Tiao, G. C., Grupe, M. R. (1980). Hidden periodic autoregressive-moving average models in time series data. *Biometrika*, **67**, 365-373

[142] Timmermann, A. (2000). Moments of Markov switching models. *Journal of Econometrics*, **96**, 75-111.

[143] Tjøstheim, D. (1986). Some doubly stochastic time series models. *Journal of Time Series Analysis*, **7**, 51-72.

[144] Tong, H. (1978). *On a threshold model. In C.H. Chen (ed.), Pattern Recognition and Signal Processing*. Amsterdam : Sijthoff and Noordhoff.

[145] Tong, H. (1990). *Nonlinear Time Series : A Dynamical System Approach.* Oxford University Press, Oxford.

[146] Ula, T. A. (1990). Periodic covariance stationarity of multivariate periodic autoregressive moving average processes. *Water Resources Research*, **26**, 855-861.

[147] Ula, T. A., Smadi A. A., (1997). Periodic stationary conditions for periodic autoregressive moving average processes as eigenvalue problems. *Water Resources Research*, **33**, 1929-1934.

[148] Vecchia, A. V. (1985a). Periodic autoregressive-moving average ($PARMA$) modeling with applications to water resources. *Journal of the American Water Resources Association*, **21**, 721-730.

[149] Vecchia, A. V., (1985*b*). Maximum likelihood estimation for periodic autoregressive Moving average models. *Technometrics*, **27**, 375-384.

[150] Vecchia, A. V., Ballerini, R. (1991). Testing for periodic autocorrelations in seasonal time series data. *Biometrika*, **78**, 53-63.

[151] Wall, K. D. and Stoffer D. S.,(2002). A state space approach to bootstrapping conditional forecasts in $ARMA$ models. Journal of time series Analysis, **23**, 733-751.

[152] West, K., Harrison, J., (1997) . *Bayesian forecasting and dynamic models*. Springer.

[153] Wong, C. S., Li, W. K. (2000). On a mixture autoregressive model. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B* , **62**, 95-115.

[154] Xie, Y., Yu, J., Ranneby, B. (2008). A general autoregressive model with Markov switching : Estimation and consistency. *Mathematical Methods of Statistics*, **17**, 228-240.

[155] Yao, J. (2001). On square-integrability of an AR process with Markov switching. *Statistics and probability letters*, **52**, 265-270.

[156] Yao, J. F., Attali, J. G. (2000). On stability of nonlinear AR processes with Markov switching. *Advances in Applied Probability*, **32**, 394-407.

[157] Zhang, J., Stine, R.A., (2001). Autocovariance structure of Markov regime switching models and model selection. *Journal of Time Series Analysis*, **22**, 107-124.