N° d'ordre :15/2018 – D/M.T

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

Faculté de Mathématiques

THESE

Présentée pour l'obtention du **grade** de **DOCTEUR EN SCIENCES**

En : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle et Mathématique discrètes

Par : **Mohammed BENATALLAH**

Sujet

Contribution à l'étude du nombre b-domatique dans les graphes

Soutenue publiquement, le 23 / 06 / 2018 , devant le jury composé de :

M.	A. BERRACHEDI	Professeur à l'USTHB	Président
M.	M. MIHOUBI	Professeur à l'USTHB	Directeur de thèse
Mme.	M. BESSEDIK	Maître de Conférences/A à l' ESI, Oued-Smar	Examinatrice
M.	M. BLIDIA	Professeur à l'USDB, Blida	Examinateur
M.	M. BOUTICHE	Maître de Conférences/A à l'USTHB	Examinateur
M.	B. SADI	Maître de Conférences/A à l'UMMT	Examinateur
M.	N. IKHLEF ESCHOUF	Maître de Conférences/A à l'UYFM, Médéa	Invité

Résumé

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un ensemble $S \subseteq V(G)$ est un ensemble *dominant* de G si tout sommet de $V(G) \setminus S$ est adjacent à au moins un sommet dans S. Une *partition domatique* $\mathcal{P}$ de G est une partition de V en sous-ensembles (appelées classes) dominants disjoints. Une partition domatique $\mathcal{P}$ est dite *b-maximale* si aucune partition domatique $\mathcal{P}'$ de taille plus grande que $\mathcal{P}$ ne peut être obtenue en regroupant des sous-ensembles de certaines classes de $\mathcal{P}$ pour former une nouvelle classe. Le *nombre b-domatique,* noté $bd(G)$ est le cardinal minimum d'une partition domatique b-maximale de G.

L'objectif de cette thèse est l'étude du problème de la partition domatique b-maximale dans les graphes. Notre contribution ici est de trois ordres. Nous montrons, en premier lieu, une condition suffisante pour qu'une partition domatique d'un graphe donnée soit b-maximale et comme conséquence, nous donnons quelques classes de graphes pour lesquels le nombre b-domatique est égale à 2 ou à $\delta(G) + 1$, où $\delta(G)$ est le degré minimum de G. Nous déterminons ensuite le nombre b-domatique des bloc graphes et des cactus dans le cas où chaque bloc possède au moins un sommet dont la suppression ne diçonnecte pas le graphe G. En second lieu, nous caractérisons les graphes connexes G d'ordre n tels que $bd(G) = n - 1$, $n - 2$ ou $n - 3$. Nous montrons également que tout graphe G à n sommets satisfait la condition $bd(G) + bd(\overline{G}) \leq n + 1$, où $\overline{G}$ est le graphe complémentaire de G. Nous caractérisons de plus les graphes G d'ordre n tels que $bd(G) + bd(\overline{G}) \in \{n + 1, n\}$ et les graphes pour lesquels $bd(G) = bd(\overline{G}) = n/2$. Enfin, nous étudions ce paramètre dans certains graphes particuliers, à savoir le joint de deux graphes et le produit cartésien de deux graphes. Autres invariants liés au nombre b-domatique seront introduit à la fin de ce manuscrit.

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a simple graph. A set $S \subseteq V(G)$ is a dominating set of G if every vertex of $V(G) \setminus S$ is adjacent to at least one vertex in S. A domatic partition $\mathcal{P}$ of G is a partition of V into classes which are dominating sets disjoint. A partition $\mathcal{P}$ is b-maximal if no partition $\mathcal{P}'$of size greater than $\mathcal{P}$ can be obtained by collecting subsets of certain classes of $\mathcal{P}$ to form a new class. The b-domatic number, denoted $bd(G)$ is the minimum cardinal of a b-maximal domatic partition of G.

The aim of this thesis is to study the concept of the b-maximal domatic partition in graphs. Indeed, firstly, we will prove a sufficient condition for a domatic partition of a given graph to be b-maximal. Then we give some classes of graphs having a b-domatic number equal to 2 and $\delta(G)+1$ where $\delta(G)$ is the minimum degree of a graph G. We also determine the b-domatic number of the block graph and the cactus graph in the case where each block has at least one non-cut vertex for G. Secondly, we will characterize the related graphs G of order n such that $bd(G) \in \{n-1, n-2, n-3\}$. Also, we will show that any graph G of n vertices satisfies $bd(G)) + bd(\overline{G}) \leq n+1$, where $\overline{G}$ is the complementary graph of G, then we characterize the graphs G of order n such that $bd(G)) + bd(\overline{G}) \in \{n+1, n\}$ as well as the graphs for which $bd(G)) = bd(\overline{G}) = n/2$. Finally, we will study the b-domatic number of some particular graphs, namely the joint of two graphs and the cartesian product of two graphs. Other invariants related to the b-domatic number will be introduced at the end of this thesis.

ملخص

ملخص هذه الأطروحة هو دراسة مفهوم التقسيم المهيمن ب-قصوى.

لتكن $G = (V, E)$ الرسم البياني البسيط. المجموعة $S(G)$ هي مجموعة مهيمنة من G إذا كان كل قمة من $V(G) - S$ مجاورة لقمة على الأقل في S . التقسيم المهيمن $\mathcal{P}$ من G هو تقسيم V إلى مجموعات فئات مهيمنة منفصلة. التقسيم $\mathcal{P}$ هو ب-قصوى إذا كان لا يمكن الحصول على التقسيم $\mathcal{P}'$ عدد الفئات المهيمنة أكبر من $\mathcal{P}$ عن طريق جمع مجموعات فرعية من فئات معينة من $\mathcal{P}$ لتشكيل فئة جديدة. العدد ب-الهيمنة يرمز له بالرمز $bd(G)$ هو التعداد الأدنى من التعدادات للتقسيمات المهيمنة من مجموعات التقسيمات المهيمنة ب-قصوى من G.

والهدف من هذه الأطروحة هو دراسة مفهوم التقسيم المهيمن ب-قصوى في الرسوم البيانية. في الواقع، سوف نثبت أولا شرطا كافيا لتقسيم مهيمن من رسم بياني معين ليكون ب-قصوى. ثم نعطي بعض فئات الرسوم البيانية التي لها عدد ب-الهيمنة يساوي 2 و $\sigma(G) + 1$ حيث $\sigma(G)$ هو الدرجة الأدنى لقمة من الرسم البياني G . ثم، فإننا نحدد عدد ب-الهيمنة من الرسم البياني للكتلة والرسم البياني للصبار في حالة كل كتلة على الأقل واحد قمة غير قاطعة لـ G ثانيا، سوف نميز الرسوم البيانية ذات الصلة G من النظام n التي تحقق العلاقة $bd(G) \in \{n-1, n-2, n-3\}$. أيضا، سوف نبين أن أي رسم بياني G ذو n قمة يحقق العلاقة $\mathrm{bd(G)} + \mathrm{bd}(\bar{G}) \leq n + 1$، حيث $\bar{G}$ هو الرسم البياني التكميلي لـ G ، ثم نقوم بتوصيف الرسوم البيانية G ذو n قمة بحيث $bd(G) + bd(\bar{G}) \in \{n, n+1\}$ ، وكذلك الرسوم البيانية التي تحقق العلاقة $bd(G) = bd(\bar{G}) = n/2$. أخيرا، سوف ندرس عدد ب-الهيمنة من بعض الرسوم البيانية معينة، وهي المنتج المشترك لإثنين من الرسوم البيانية والمنتج الديكارتي لإثنين من الرسوم البيانية .وسيتم عرض معلمات أخرى تتعلق بالعدد ب-الهيمنة في نهاية هذه الأطروحة.

Remerciements

Je tiens à exprimer, en premier lieu, toute ma reconnaissance et mes remerciements à Monsieur **Miloud Mihoubi**, Professeur à l'USTHB, pour la confiance qu'il m'a accordée en me permettant de réaliser cette thèse sous sa direction. Je le remercie aussi pour ses précieux conseils et sa disponibilité.

Je tiens à remercier chaleureusement Monsieur **Noureddine Ikhlef Eschouf**, Maître de Conférences à l'Université Dr. Yahia Farès de Médéa, d'avoir guidé avec gentillesse mes travaux de recherche en sa qualité de co-directeur. Je le remercie également pour sa disponibilité et son aide.

Je remercie Monsieur **Mustapha Chellali**, Professeur à l'Université Blida 1, pour son aide et ses conseils.

Je remercie aussi Monsieur Abdelhafid Berrachedi, professeur à l'USTHB, d'avoir accepté d'être président du jury de ma thèse.

Mes remerciements vont également à Madame **Malika Bessedik**, Maître de Conférences à ESI, Oued-Smar, Monsieur **Mostafa Blidia**, Professeur à l'université de Blida 1, Monsieur **Mohamed Amine Boutiche**, Maître de Conférences à l'USTHB et Monsieur **Bachir Sadi**, Maître de Conférences à l'UMMT, Tizi-ouzou qui m'ont honoré en acceptant d'évaluer mon travail.

Enfin, j'adresse toute mon affection à ma mère, à ma femme, à mes enfants et à tous les membres de la famille.

A ma trés chère mère et

A la mémoire de mon père

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

Introduction

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes. Elle représente un moyen très utile et très efficace pour résoudre des problèmes discrets de la Recherche Opérationnelle. Elle est ainsi souvent présente dans notre vie quotidienne, sans que l'on en soit toujours conscient. Le problème appelé "problème des ponts de Koenigsberg" posé par Euler en 1736 [11] est à l'origine de cette branche. Ce problème consiste à répondre à la question suivante : "peut-on se promener dans la ville de Koenigsberg qui possède sept ponts en traversant chaque pont une et une seule fois ?". Depuis, la théorie des graphes s'est développée, notamment grâce aux travaux de Berge [10] qui a grandement participé à sa diffusion.

La théorie des graphes peut modéliser beaucoup de problèmes pratiques et dans plusieurs domaines, notamment en technologie, par exemple, les problématiques de réseaux informatiques, de réseaux routiers, de transport de marchandises, d'emplois du temps, d'électronique, de mécanique du solide et aussi les réseaux de télécommunication [49].

Le problème de partition de graphes est l'un des thèmes les plus importants en théorie des graphes. En effet, de nombreux problèmes de la théorie des graphes peuvent être traités comme une partition d'objets (sommets, arêtes, ...) en ensembles disjoints (classes) suivant certaines règles [2, 1]. Parmi ces problèmes, on cite le problème classique de la coloration des sommets. Ce concept peut être vu comme une partition de l'ensemble des sommets en ensembles stables, une telle partition est dite propre ou chromatique. La partition des sommets d'un graphe G d'ordre n en n classes dont chacune contient un seul sommet est chromatique et les partitions chromatiques les plus intéressantes sont celles de petit cardinal. Une partition chromatique de cardinalité minimum est dite une *partition minimale*. La cardinalité d'une partition minimale d'un graphe G, noté $\chi(G)$ est appelée le *nombre chromatique* de G. En d'autres termes, $\chi(G)$ est le plus petit entier k pour lequel il existe une partition de $V(G)$ en k sous-ensembles stables disjoints.

Les partitions de grand cardinal peuvent être aussi intéressantes si elles sont minimales dans un certain sens. Harary et Hedetniemi [34] ont définit une *partition a-chromatique* ou complète, s'il n'est pas possible de rassembler deux classes de couleurs en une seule classe. *Le nombre a-chromatique* est la cardinalité maximum d'une partition complète. Une nouvelle définition de la minimalité d'une partition propre a été proposé par Irving et Manlove [45, 53]. Une partition chromatique $\mathcal{P}$ est appellée *b-coloration* si aucune classe de $\mathcal{P}$ ne peut être supprimée en transférant ses sommets aux autres classes de $\mathcal{P}$. *Le nombre b-chromatique* de G est le cardinal maximum d'une partition propre de G (voir [43, 47, 48]).

Par analogie avec le nombre chromatique et la partition chromatique d'un graphe G, Cockayne et Hedetniemi [20] ont étudié en 1977 le problème des partitions des sommets de G en ensembles dominants. Un sous-ensemble S de V est un ensemble *dominant* de G si tout sommet de $(V \setminus S)$ est adjacent à au moins un sommet de S. *Le nombre de domination* est la taille minimum d'un dominant de G. *Une partition domatique* d'un graphe G est une partition de l'ensemble des sommets de G en ensembles dominants. Il est à souligner que $\{V\}$ est une partition domatique de cardinal 1 et les partitions domatiques les plus intéressantes sont celles de grand cardinal. *Le nombre domatique* est la cardinalité maximum d'une partition domatique de G. Notons qu'une partition est domatique si et seulement si chaque sommet est dominé par chaque classe différente de sa propre classe. Comme pour les partitions chromatiques, une petite partition domatique peut être intéressante si elle est maximale dans un certain sens. Cockayne [23] a défini aussi le concept du nombre a-domatique. Une partition domatique $\mathcal{P}$ est considérée comme a-maximale si aucune partition domatique $\mathcal{P}'$ ne peut être obtenue en divisant une classe (ensemble dominant) en deux nouveaux ensembles dominants. Le cardinal minimum d'une partition domatique a-maximale de G est appelée *le nombre a-domatique* [23]. Des résultats plus récents sur ce concept peuvent être trouvés dans [3, 16, 65]. Favaron [27] a introduit une nouvelle définition de la maximalité d'une partition domatique. Une partition domatique $\mathcal{P}$ est dite *b-maximale* s'il n'est pas possible d'obtenir une partition domatique $\mathcal{P}'$ en recueillant des sous-ensembles de certaines classes de $\mathcal{P}$ pour former une nouvelle classe. Le cardinal minimum d'une partition domatique b-maximale de G est appelé *le nombre b-domatique* et est notée par $bd(G)$.

Le but de cette thèse est de contribuer à l'étude de la partition domatique b-maximale.

Ce manuscrit est structuré en cinq chapitres. Dans le premier chapitre nous rappellons les principales notions de base liées à la théorie des graphes qui sont nécessaires à la compréhension de cette thèse. Egalement, ce chapitre passe en revue la définition de quelques paramètres de domination dans les graphes. Dans le chapitre deux, nous présentons un état de l'art sur les principaux travaux qui font la base de notre contribution notamment les nombres domatique et b-domatique d'un graphe. Les chapitres trois, quatre et cinq constituent notre contribution personnelle. Le chapitre trois est composé de deux parties. Dans la première partie, nous établissons une condition suffisante pour laquelle une partition domatique donnée soit b-maximale, puis nous déterminons le nombre b-domatique de certains classes de graphes spécifiques. Dans la deuxième partie, nous caractérisons les graphes connexes d'ordre $n \geq 2$ pour lesquels $bd(G) = n-1, n-2$, ou $n-3$, ensuite nous montrons que tout graphe G d'ordre n satisfait $bd(G) + bd(\overline{G}) \leq n+1$, où $\overline{G}$ est le graphe complémentaire de G. Par ailleurs, une caractérisation des graphes G d'ordre n tels que $bd(G) + bd(\overline{G}) \in \{n+1, n\}$ ainsi que les graphes vérifiant $bd(G) = bd(\overline{G}) = \frac{n}{2}$ seront établis. Le chapitre quatre est consacré à l'étude du nombre b-domatique de certains graphes particuliers à savoir, le joint de deux graphes et le produit cartésien de deux graphes. Enfin, dans le dernier chapitre, nous introduisons d'autres variantes du nombre b-domatique tels que le nombre b-domatique total et le nombre b-domatique couplé, ensuite nous donnons des bornes sur ces paramètres. Ce manuscrit s'achève par une conclusion générale résumant les principaux résultats et les perspectives envisagées à l'issu de ce travail.

CHAPITRE 1

Notions générales sur les graphes

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions et la terminologie utilisées le long de ce document. Dans la première partie, nous donnons quelques définitions de base de la théorie des graphes et un bref aperçu sur les paramètres structurels d'un graphe. Enfin, nous rappelons brièvement la notion de la domination dans les graphes et nous définissons quelques paramètres de domination.

Pour plus de détails sur la terminologie utilisée dans cette thèse, le lecteur est invité à se référer aux ouvrages de Berge [10, 11], Haynes, Hedetniemi et Slater [36] et de Chartrand et zhang [17] .

1.1 Concepts fondamentaux

1.1.1 Définitions

Un *graphe* fini $G = (V, E)$ non orienté est la donnée de deux ensembles finis, un ensemble de *sommets* V et un ensemble d'*arêtes* E. Le cardinal de V est appelé l'*ordre* de G; noté par $n(G)$ et le cardinal de E est appelé la *taille* de G; noté par $m(G)$. Une arête $e \in E$ est une paire de sommets u, v notée par $e = uv$ et les sommets u et v s'appellent les extrémités de e. On dira dans ce cas que u et v sont adjacents et que e est incidente à u et v. Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues. Un graphe est dit *simple* s'il est sans boucles et sans arêtes multiples. Tous les graphes considérés dans cette thèse sont simples et finis.

Le *voisinage ouvert* d'un sommet v est l'ensemble de tous les sommets adjacents à v i.e. $N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$ et le *voisinage fermé* de v est $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$; le voisinage ouvert de S est défini par $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ et le voisinage fermé de S est défini par $N_G[S] = \bigcup_{v \in S} N(v) \cup S$. Le voisinage privé d'un sommet $v \in S$ par rapport à S, noté $pn[v, S]$ est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont aucun autre voisin dans S autre que v, i.e. $pn[v, S] = \{u : N_G[u] \cap S = \{v\}\}$.

Le *degré* d'un sommet $v \in V$ noté $d_G(v)$ est le cardinal de son voisinage ouvert i.e. $d_G(v) = |N_G(v)|$. On note par $N_S(v) = N_G(v) \cap S$ et $d_S(v) = |N_S(v)|$. On notera par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ respectivement, le *degré maximum* et le *degré minimum* dans G. Un sommet de degré nul est dit sommet *isolé*. Le sommet de degré un est dit sommet *pendant*. Un sommet de degré $n-1$ est dit *sommet universel*.

Une *chaîne* P_k dans un graphe G est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, ..., v_k$ telle que pour tout indice i, $1 \leq i \leq k-1, e_i = v_i v_{i+1} \in E$. L'entier $k-1$ représente la longueur de P_k et les sommets v_1 et v_k s'appellent les extrémités P_k. Une chaîne est dite élémentaire (resp., simple) si tous ses sommets sont distincts (resp., les arêtes sont distinctes). Une *corde* est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par n sommets, notée P_n est une chaîne élémentaire sans corde. Un *cycle* C_n est une chaîne élémentaire dont les extrémités sont confondues.

La *distance* entre deux sommets u et v d'un graphe G, notée $d_G(u, v) = d(u, v)$, est la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v.

1.1.2 Connexité

On définit une relation, notée $\sim$, entre les sommets d'un graphe G par:

$$u \sim v \text{ si et seulement s'il existe dans } G \text{ une chaîne reliant } u \text{ à } v.$$

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence. Les sous-graphes induits par les classes d'équivalence de $\sim$ sont appelés composantes connexes de G. Le graphe G est dit connexe s'il possède une seule composante connexe. Une *forêt* est un graphe où chaque composante connexe est un arbre. Si G est connexe, alors $\overline{G}$ est dit co-connexe. Les complémentaires des composantes connexes de $\overline{G}$ sont appelées composantes co-connexes de G. Il est bien connu que pour tout graphe G, G et $\overline{G}$ ne peuvent être tous les deux non connexes.

1.1.3 Quelques graphes particuliers

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, le *sous-graphe induit* par S noté $G[S]$ ou $\langle S \rangle$ est le graphe ayant S comme ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs extrémités dans S.

Pour un sous-ensemble $F \subseteq E$, le *graphe partiel* de G engendré par F noté G_F est le graphe dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement V et F.

Le *graphe complet* d'ordre n, noté K_n est un graphe dont tous les sommets sont adjacents deux à deux. Une clique est un sous-graphe complet d'un graphe G.

Le *graphe complémentaire*, noté $\overline{G}$, d'un graphe G le même ensemble de sommets que G et deux sommets sont voisins dans $\overline{G}$ si et seulement s'ils ne le sont pas dans G.

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *biparti* si l'on peut partitionner V en deux ensembles V_1 et V_2 tels que $\langle V_1 \rangle$ et $\langle V_2 \rangle$ ne contiennent pas d'arêtes. Il est bien connu qu'un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycles impairs. Si de plus tout sommet de V_1 est adjacent à tout sommet de V_2, alors G sera dit un graphe *biparti complet*. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$.

Un *arbre* est un graphe connexe et sans cycles, souvent noté par T. Une *étoile*, noté par $K_{1,p}\,(p \geq 1)$, est un arbre à $p+1$ sommets ayant exactement p sommets pendants. Une *étoile double* $S_{p,q}$ est un arbre obtenu à partir de deux étoiles $K_{1,p}$ et $K_{1,q}$ en ajoutant une arête reliant les deux centres.

Un graphe G est *r-régulier* si tous ses sommets sont de degré r et semi-régulier si $\Delta(G) - \delta(G) = 1$.

1.1.4 Ensemble maximal (resp., minimal) / maximum (resp., minimum)

On dit qu'un sous-ensemble A de V est *minimal* (resp. *maximal*) par rapport à une propriété P s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq A$ (resp. $B \supseteq A$) tel que $G[B]$ vérfie P et on dit qu'un sous-ensemble A de V est *minimum* ou de *taille minimale* (resp. *maximum* ou de *taille maximale*) par rapport à une propriété P s'il n'existe pas d'ensemble $B \subset V$ tel que $G[B]$ vérifie la propriété P et $|A| > |B|$ (resp.$|B| < |A|$) où $|A|$ est le cardinal de l'ensemble A.

1.1.5 Quelques opérations sur les graphes

Nous présentons ici les différents types de produits de graphes utilisés dans cette thèse, illustrés dans les Figures **??**. Pour plus informations sur les produits de graphes, voir [44, 32].

Soit x un sommet d'un graphe $G = (V, E)$, on note $G - x$ le sous-graphe engendré par l'ensemble $V \setminus \{x\}$ et pour un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$, on note $G \setminus S$ le sous-graphe engendré par $V \setminus S$.

Etant donné deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ avec $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

L'*union* de G_1 et G_2 est défini par le graphe $G_1 \cup G_2$ dont l'ensemble des sommets est $V_1 \cup V_2$ et l'ensemble des arêtes est $E_1 \cup E_2$, de plus, pour un entier k donné, l'union de $k \geq 1$ copies de G est notée par kG.

Le *joint* de G_1 et G_2 est défini par le graphe $G_1 \vee G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E_{1,2})$ où $E_{1,2} = \{v_1u_1 : v_1 \in V_1, u_1 \in V_2\}$.

Le *produit cartésien* $G_1 \Box G_2$ est le graphe $G = (V, E)$ tel que $V = \{(u, v) : u \in V_1$ et $v \in V_2\}$ et deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents dans $G_1 \Box G_2$ si $u_2 = u_1$ et $v_2v_1 \in E(G_2)$ ou $v_2 = v_1$ et $u_2u_1 \in E(G_1)$.

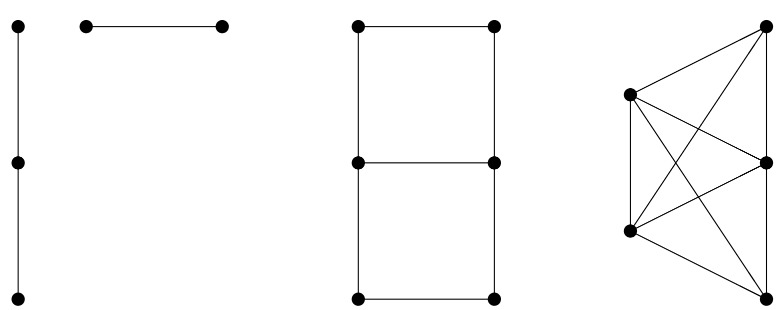


FIGURE 1.1. Illustrations des différents produits $P_2 \Box P_3$ et $P_2 \vee P_3$.

1.1.6 Invariants de graphes

Deux graphes sont dits *isomorphes* s'il existe une fonction bijective entre les ensembles des sommets des deux graphes telle que deux sommets sont adjacents dans l'un des graphes si et seulement si leurs images par la fonction bijective sont adjacentes dans l'autre graphe.

Si deux graphes sont isomorphes alors ils ont des propriétés communes. Ces propriétés communes sont appelées *invariants* de graphes, en d'autres termes un invariant est une propriéte stable par isomorphisme. Le nombre de sommets et d'arêtes sont deux invariants de base d'un graphe.

Voici les définitions de quelques invariants de graphes utilisés dans cette thèse. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n.

Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est dit stable (ou indépendant) de G si les sommets de S sont non adjacents deux à deux. Le cardinal minimum d'un ensemble stable maximal de G noté $i(G)$ est appelé le nombre de domination stable de G.

Un couplage dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes non adjacentes deux à deux. On notera par $\beta(G)$ la taille maximale d'un couplage dans G. Le couplage est dit parfait dans G si $\beta(G) = n/2$.

1.2 Aperçu sur la domination

Le concept de domination trouve son origine dans le jeu d'échec. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée remonte au 16^{eme} siècle en Inde (Voir [40, 49]). En 1862, De Jaenisch [30] posa le problème suivant: Déterminer le nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée ou contrôlée par une reine. Pour un échiquier 5×5 le nombre minimum est 3 et de 8×8 le nombre minimum est 5. Bien que le nombre minimum pour un échiquier $n \times n$ reste indéterminé jusqu'à présent. Pour plus de détails voir [28, 56].

En 1958, Claude Berge [10] donna une formulation de la domination dans les graphes orientés. Le nombre de domination s'appelle alors coefficient de stabilité externe.

L'appelation actuelle du nombre de domination est due à Ore [55] en 1962. La domination n'a connue sa veritable expansion qu'après la parution du papier de Cockayne et Hedetniemi [21] en 1977.

Depuis, l'étude de la domination dans les graphes avec des hypothèses additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination (Voir [22, 12, 50, 51]). Une étude approfondie de quelques types de domination fera l'objet des prochains chapitres. Ainsi, beaucoup de voies de recherche sont à explorer telles que la détermination des bornes supérieures et inférieures, etc....

En 1990, un numéro spécial de la revue Discrete Mathematics édité par Hedetniemi et Laskar a été consacré entièrement à la domination dans les graphes. Dans ce numéro, Hedetniemi et Laskar [40] ont inclus environ 400 références. On compte actuellement environ 200 types de domination et plus de 3000 références dans le domaine.

Pour un aperçu détaillé, le lecteur peut consulter les deux livres remarquables de Haynes, Hedetniemi et Slater ([36, 37]).

1.2.1 La domination

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

Un sous ensemble de sommets $D \subseteq V$ de G est dit ensemble *dominant* si tout sommet $V - D$ est adjacent à au moins un sommet de D.

Un ensemble dominant D est dit *dominant minimal* si aucun sous ensemble propre de D n'est un ensemble dominant.

Le *nombre de domination inférieur* (appelé *nombre de domination*), noté $\gamma(G)$, d'un graphe G représente la cardinalité minimale d'un ensemble dominant de G.

Un ensemble *dominant minimum* avec une telle cardinalité est appelé $\gamma(G)$-*ensemble*, on note qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)$-ensembles.

Voici quelques résultats sur les ensembles dominants, dûs à Ore [55], donnés par le théorème suivant.

Théorème 1.1 ([55]). *Un ensemble dominant D est minimal si et seulement si chaque sommet $v \in D$ vérifie l'une des conditions suivantes:*

1. v est un sommet isolé dans D.

2. Il existe un sommet $u \in V \setminus D$ tel que $N(u) \cap D = \{v\}$.

Par exemple pour le graphe $K_{2,3}$ de la Figure 1.2, $\gamma(G) = 2$, et $\{u, v\}$, $\{u, x\}$ et $\{v, z\}$ sont des $\gamma(G)$-ensembles.

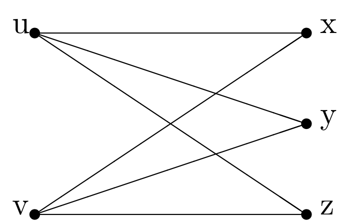


FIGURE 1.2. Le graphe $K_{2,3}$.

1.2.2 Quelques invariants de domination

En raison de la large variété des problèmes liés à la domination, nous allons nous restreindre dans cette partie uniquement aux types de domination ayant un lien avec les types étudiés. Pour en savoir plus sur les types de domination, voir [59, 36, 56, 60].

La domination totale est l'une des principales variantes de la domination. Elle a été introduite par Cockayne, Dawes et Hedetniemi dans [19]. Un dominant total d'un graphe $G = (V, E)$ sans sommet isolé est un ensemble $S \subseteq V$ de sommets tel que tout sommet de V est adjacent à un sommet de S. i.e. S vérifie $V = N(S)$.

Le nombre de domination totale du graphe G, noté $\gamma_t(G)$ est le cardinal minimal d'un dominant total. Pour plus de détails sur la domination totale, voir le récent ouvrage de Henning et Yeo [42] et le survey de Henning sur la domination totale [41].

La domination stable dans les graphes a été liée en premier temps aux ensembles dominants. En effet, il est facile de voir qu'un ensemble stable est maximal si et seulement si c'est un dominant. Par conséquent, un stable maximal peut être vue comme un cas particulier des ensembles dominants. Le nombre de domination stable est le cardinal minimal d'un stable maximal de G.

La domination couplé est une variante assez proche de la domination totale, introduite par Haynes et Slater dans [38, 39]. Une dominant couplé d'un graphe G est un dominant S tel que le sous-graphe induit $G[S]$ admet un couplage parfait. Tout graphe sans sommet isolé admet une paire-dominant, par exemple l'ensemble des extrémités d'un couplage maximum. Le nombre de domination couplé de G, noté $\gamma_{pr}(G)$, est le cardinal d'un dominant couplé minimum.

Par exemple pour la chaîne P_5 de la Figure 1.3, $\{v_2, v_4\}$ est un $\gamma(P_5)$-ensemble et $i(P_5)$-ensemble, $\{v_2, v_3, v_4\}$ est l'unique $\gamma_t(P_5)$-ensemble et $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ est $\gamma_{pr}(P_5)$-ensemble.

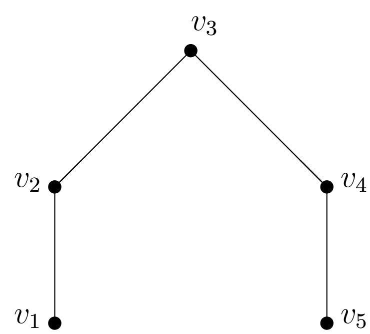


FIGURE 1.3. Graphe avec $\gamma(P_5) = i(P_5) = 2$, $\gamma_t(P_5) = 3, \gamma_{pr}(P_5) = 4$.

CHAPITRE 2

Nombres domatique et b-domatique d'un graphe

L'un des paramètres importants de la domination dont l'étude a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs est le nombre domatique, voir [3, 16, 23, 46]. Le concept de la partition domatique est semblable à celle de la partition en stables.

Par analogie avec le nombre chromatique lié aux partitions des sommets d'un graphe G en ensembles indépendants, Cockayne et Hedetniemi ont introduit le nombre domatique en étudiant des partitions des sommets de G en ensembles dominants et ont défini le nombre domatique voir [20]. Cockayne [23] a ensuite introduit le nombre a-domatique comme la contrepartie du nombre achromatique. Dans sa thèse de doctorat, Manlove a présenté le nombre b-chromatique en considérant un nouveau type de minimalité d'une partition chromatique [45, 53], et en 2013, Favaron a introduit le nombre b-domatique en considérant un nouveau type de maximalité d'une partition domatique.

Dans ce chapitre, on donnera quelques résultats connus sur la partition domatique dans les graphes. Par ailleurs, on présente des travaux de Zelinka [62, 63] concernant le nombre domatique. Dans la deuxième partie de ce chapitre, on présente les premiers travaux établis par Favaron [27] sur la partition domatique b-maximale dans les graphes. Il faut signaler qu'il y a un seul article sur ce sujet.

2.1 Partition domatique

Avant de commencer, on a besoin de donner les définitions suivantes qui sont nécéssaires pour la partition domatique d'un graphe.

Définition 2.1. *Une partition domatique d'un graphe G est une partition de son ensemble de sommets V en ensembles dominants.*

La partition $\{V\}$ de cardinalité 1 est domatique et les partitions domatiques les plus intéressantes sont celles de grande cardinalité.

Définition 2.2. *Soient $U_1, ..., U_k$ les classes d'une partition domatique $\mathcal{P}$, i.e. $\mathcal{P} = \{U_1, ..., U_k\}$ une partition domatique. Un sommet $x \in U_i$ est dominé par $V \setminus U_i$ si x admet au moins un voisin dans chaque classe différente de sa classe U_i. On note qu'une partition est domatique si et seulement si tout sommet $x \in V$ est dominé par chaque classe différente de sa propre classe.*

Définition 2.3. *Le nombre domatique d'un graphe G, noté $d(G)$ est le nombre maximum de classes qui partitionnent l'ensemble V en ensembles dominants.*

Remarque 2.4. *Pour toute classe U_i, $i = 1, ..., k$, on a $|U_i| \geq \gamma(G)$.*

En 1977, Cockayne et Hedetniemi [20] ont présenté la première borne supérieure pour le nombre domatique en fonction de $\delta(G)$.

Théorème 2.5 ([25]). *Pour tout graphe G, on a*

$$d(G) \leq \delta(G) + 1.$$

De plus, ils ont établié une relation entre le nombre domatique et le nombre dominant.

Théorème 2.6 ([25]). *Pour tout graphe G, on a*

$$d(G)\gamma(G) \leq n.$$

Zelinka [67] a donné des bornes inférieures pour le nombre domatique:

Théorème 2.7 ([67]). *Pour tout graphe G de degré minimum δ,*

$$d(G) \geq \frac{n}{n - \delta(G)}.$$

Théorème 2.8 ([67]). *Pour tout graphe G,*

$$d(G) \geq \gamma(\overline{G}).$$

Pour d'autres résultats sur le nombre domatique, voir [2, 29, 57].

Quelques valeur exactes du nombre domatique $d(G)$ dans des familles de graphes spécifiques sont données dans [20, 23, 24].

Proposition 2.9 ([20, 23, 24])**.**

1. $d(P_n) = d(T) = d(K_{1,n}) = 2$, $n \geq 2$.

2. $d(C_{3n}) = 3$ et $d(C_{3n+1}) = d(C_{3n+2}) = 2$, $n \geq 1$.

3. $d(K_n) = n$, $n \geq 2$.

4. $d(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$, $m, n \geq 2$.

La Figure 2.1 suivante représente deux partitions domatiques de K_4 et $K_{4,5}$.

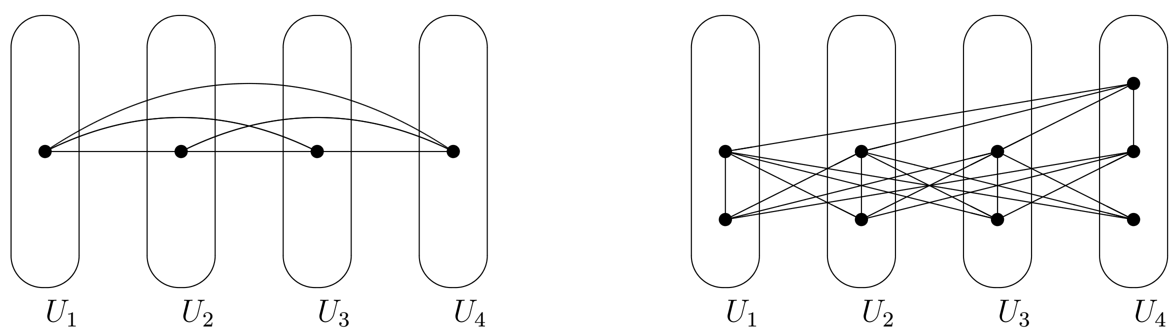


FIGURE 2.1. Deux partitions domatiques du K_4 et $K_{4,5}$.

2.1.1 Les graphes domatiquement pleins

Définition 2.10. *Les graphes G tels que $d(G) = \delta + 1$ sont appellés les graphes domatiquement pleins.*

La propriété de la plénitude domatique a toujours été d'un grand intérêt pour les chercheurs, une variété de classes de graphe a été étudiée. Afin d'exhiber cette propriété, nous citons les résultats suivants:

Les graphes connus être domatiquement pleins sont le graphe complet K_n, le graphe sans arêtes et les arbres.

Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un graphe régulier domatiquement plein est établie par Zelinka [62]:

Théorème 2.11 ([62])**.** *Un graphe G régulier d'ordre n est domatiquement plein de nombre domatique d existe si et seulement si d divise n. L'ensemble de ses sommets est tel que*

$$V(G) = \bigcup_{i=1}^{d} V_i, V_i \cap V_j = \emptyset, |V_i| = n/d$$

avec la propriété que le sous graphe $G\left[V_i \cup V_j\right]$ est un graphe régulier de degré 1. (pour $i = 1, ..., d,\ j = 1, ..., d$ et $i \neq j$).

Définition 2.12. *Un* bloc-cactus *est un graphe dont les blocs engendrent soit des sous graphes complets soit des cycles élémentaire sans cordes.*

Rautenbach et Volkmann [58] ont donne le nombre domatique des graphes bloc-cactus pour $\delta(G) \geq 4$.

Théorème 2.13 ([58])**.** *Soit G un graphe bloc-cactus connexe. Si $\delta(G) \geq 4$, ou si $\delta(G) = 2$ et G ne contient aucun cycle C_l de longueur $l \neq 0\,[3]$ comme bloc, ou si $\delta(G) = 3$ et G ne contient aucun cycle C_5 comme bloc, alors G est domatiquement plein.*

2.1.2 Résultats de type Nordhaus-Gaddum sur le nombre domatique

En 1956, Jaeger et Payan [29] ont donné une relation de type Nordhaus-Gaddum, dans lequel ils donnent des bornes de la somme et du produit du nombre chromatique du graphe et son complémentaire. Depuis lors, beaucoup de résultats de même type ont été donnés pour d'autres paramètres (voir [18, 35]), nous verrons ceux qui sont relatifs au nombre domatique.

Théorème 2.14 ([20])**.** *Pout tout graphe G d'ordre n, on a*

$$d(G) + d(\overline{G}) \leq n + 1.$$

L'égalité est atteinte si et seulement si $G = K_n$ ou $\overline{K}_n$.

Dunbar et al. [26] ont aussi établi une relation pour le produit et ont caractérisé les graphes G atteigant la borne trouvée.

Théorème 2.15 ([26]). *Pout tout graphe G d'ordre $n \geq 4$, on a*

$$2 \leq d(G)d(\overline{G}) \leq n^2/4.$$

Les égalités ont lieu pour $d(K_{1,p})d(\overline{K_{1,p}}) = 2 \times 1 = 2$ et $d(K_{s,s})d(\overline{K_{s,s}}) = s \times s = n^2/4$.

En 1999, Dunbar et al [26], ont caractérisé les graphes atteignant cette borne supérieure. Ils ont procédé de la manière suivante:

Pour tout entier $k \geq 2$, ils ont défini une famille $\mathcal{G}_k$ de graphes comme suit:

Soit $I = \{1, 2, ..., k\}$. Si $G \in \mathcal{G}_k$ alors les sommets du graphe G peuvent être indexés $u_1, u_2, ..., u_k, v_1, v_2, ...v_k$ tels que pour tout $i \in I$, l'une des conditions suivantes est satifaite:

(C_1) : Pour tout $l \in I - \{i\}$,
soient $u_iu_l, v_iv_l \in E(G)$ et $u_iv_l, v_iu_l \in E(\overline{G})$ ou
$u_iu_l, v_iv_l \in E(\overline{G})$ et $u_iv_l, v_iu_l \in E(G)$;

(C_2) : il existe un $j \in I - \{i\}$, tel que

(a) Pour tout $l \in I - \{i, j\}$, soit
$u_iu_l, v_iv_l \in E(G)$ et $u_iv_l, v_iu_l \in E(\overline{G})$ ou
$u_iu_l, v_iv_l \in E(\overline{G})$ et $u_iv_l, v_iu_l \in E(G)$;

(b) $u_iu_j, u_iv_j, v_iu_j \in E(G)$ et $u_iv_i, u_jv_j, v_iv_j \in E(\overline{G})$;

(c) Dans le graphe G,
$N(u_i)\diagdown V_{ij} = N(u_j)\diagdown V_{ij}$ et $N(v_i)\diagdown V_{ij} = N(v_j)\diagdown V_{ij}$,
où $V_{ij} = \{u_i, u_j, v_i, v_j\}$.

Théorème 2.16 ([26]). *Pour tout graphe G, d'ordre pair $n \geq 4$, $d(G)d(\overline{G}) = n^2/4$ si et seulement si $G \simeq K_4$ ou $G \in \mathcal{G}_k$ pour tout entier $k \geq 2$.*

Notons que le Théorème 2.16 caractérise une sous classe de graphes ayant $d(G) = n/2$ c'est-à-dire les graphes pour lesquels $d(G) = d(\overline{G}) = n/2$.

2.1.3 Le nombre domatique dans les produits de graphes

Chang [16] a donné des bornes sur le nombre domatique du produit de graphes. Monika et al. [54] ont déterminé des bornes supérieures et inférieures pour le nombre domatique du produit cartésien $G_1 \square G_2$, du produit fort $G_1 \boxtimes G_2$ et du joint $G_1 \vee G_2$ de deux graphes.

Dans la suite, nous présenterons des résultats établir par Monika [54].

Proposition 2.17 ([54])**.** *Pour deux graphes G_1 et G_2, on a*

1. $\max\{d(G_1), d(G_2)\} \leq d(G_1 \square G_2) \leq \delta(G_1) + \delta(G_2) + 1.$

2. $\max\{d(G_1), d(G_2)\} \leq d(G_1 \boxtimes G_2) \leq \delta(G_1) + \delta(G_2) + \delta(G_1)\delta(G_2) + 1.$

3. $\max\{d(G_1) + d(G_2), \min\{|V(G_1)|, |V(G_2)|\}\} \leq d(G_1 \vee G_2) \leq \min\{\delta(G_1) + |V(G_2)|,$

   $\delta(G_2) + |V(G_1)|\} + 1.$

2.2 Partition a-domatique

Cockayne et al. [20] ont défini le nombre domatique et le nombre a-domatique d'un graphe. Zelinka [63] a présenté des résultats concernant le nombre a-domatique d'un graphe dont on citera ci-dessous.

Nous donnons aussi des définitions sur la partition domatique a-maximale dans les graphes introduits par Zelinka [63].

Définition 2.18. *Une partition domatique $\mathcal{P}$ est a-maximale si aucune partition domatique plus grande $\mathcal{P}'$ ne peut être obtenue en divisant une classe en deux nouveaux ensembles dominants, en d'autres termes, si chaque classe est un ensemble dominant indivisible de G.*

Définition 2.19. *La cardinalité minimum d'une partition domatique a-maximale de G est appelée le nombre a-domatique est notée par $ad(G)$.*

Les propriétés sur les classes d'une partition domatique a-maximale sont établies dans [63].

Proposition 2.20 ([63]). *Toute partition domatique $\mathcal{P}$ dont chaque classe U contient un sommet isolé dans $G[U]$ est a-domatique.*

Proposition 2.21 ([63]). *Soit G un graphe. Alors $ad(G) = 1$ si et seulement si G contient un sommet isolé.*

Nous citons quelques théorèmes caractérisant les graphes G dont $ad(G) = 2$.

Théorème 2.22 ([63]). *Soit G un graphe non connexe sans sommets isolés. Alors*

$$ad(G) = 2.$$

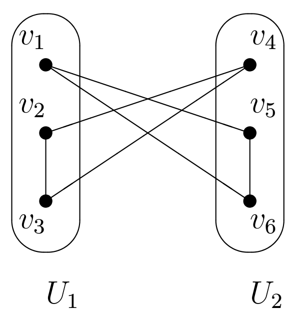


FIGURE 2.2. Partition domatique a-maximale du graphe $2K_3$.

Théorème 2.23 ([63]). *Soit G un graphe connexe dont le diamètre est au moins 3. Alors*

$$ad(G) = 2.$$

Une inégalité entre $ad(G)$ et $d(G)$ donnée par Zelinka [63] est telle que:

Proposition 2.24 ([63]). *Soit G un graphe a-domatique. Alors*

$$ad(G) \leq d(G).$$

Dans ce qui suit, on presentera des traveaux recents sur d'autres paramètres de partition domatique.

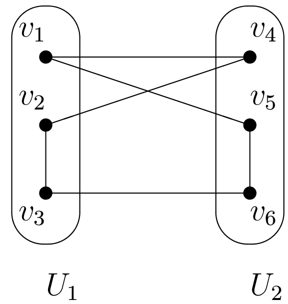


FIGURE 2.3. Partition domatique a-maximale du cycle C_6.

2.3 Quelques invariants de nombre domatique

En raison de la large variétés des problèmes liés au nombre domatique, nous allons nous restreindre dans cette partie uniquement aux invariants de nombre domatique ayant un lien avec les types étudiés. Pour plus d'information sur ces invariants, voir par exemple [63, 64, 66].

2.3.1 Nombre domatique total

La partition domatique totale d'un graphe G est une partition de l'ensemble de sommets V en ensembles dominants totaux. La partition $\{V\}$ de cardinalité 1 est domatique totale (si le graphe G est sans sommet isolé). En 1980, Cockayne et al ont introduit le nombre domatique total $d_t(G)$ qui est la cardinalité maximale de la partition domatique totale de G. Soit $\mathcal{P}$ une partition domatique telle que chaque classe de $\mathcal{P}$ induit un sous-graphe sans sommets isolés. Le nombre domatique total est défini seulement pour les graphes sans sommets isolés et donc $\delta(G) \geq 1$.

Théorème 2.25 ([24]). *Pour tout graphe G sans sommets isolés, on a*

$$d_t(G) \leq \min\left\{\frac{n}{\gamma_t(G)}, \delta(G)+1\right\}.$$

Puisque $\gamma_t(G) \geq 2$, le résultat suivant est immédiat.

Corollaire 2.26 ([66]). *Pour tout graphe G sans sommets isolés, on a*

$$d_t(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Une inégalité entre $d_t(G)$ et $d(G)$ donnée par Zelinka [66] est telle que:

Théorème 2.27 ([66]). *Pour tout graphe G,*

$$d_t(G) \leq d(G).$$

2.3.2 Nombre domatique indépendant

Une partition domatique indépendante est une partition domatique d'un graphe G dont toutes les classes sont des ensembles indépendants. Cockayne et Hedetniemi [20] et Zelinka [62] ont introduit le nombre domatique indépendant $id(G)$ (ou le nombre i-domatique de G) tel que $id(G)$ est la cardinalité maximale de la partition domatique independant de G [52].

Théorème 2.28 ([62]). *Pour tout graphe G, si $\gamma(G) \geq 2$, alors*

$$id(G) \leq \delta(G) + 1.$$

Théorème 2.29 ([62]). *Pour tout graphe G, on a*

$$id(G)i(G) \leq n.$$

Une inégalité entre $id(G)$ et $d(G)$ donnée par Zelinka [63] est telle que:

Théorème 2.30 ([36]). *Pour tout graphe G, on a*

$$id(G) \leq d(G).$$

Haynes et al [36] ont donné une relation entre $id(G)$ et $ad(G)$.

Proposition 2.31 ([63]). *Soit G un graphe i-domatique. Alors*

$$id(G) \geq ad(G).$$

2.3.3 Nombre domatique couplé

Une partition de $V(G)$ est appelée domatique couplée, si toutes ses classes sont des ensembles dominants couplés de G. Le nombre domatique couplé $d_{pr}(G)$ est le cardinal maximal de la partition domatique couplée de G. Autrement, le nombre domatique couplé est défini seulement pour les graphes d'ordre pair et sans sommets isolés et donc $\delta(G) \geq 1$. Une partition $\mathcal{P}$ d'un graphe est domatique couplée si et seulement si tout sommet de G est dominé par chaque classe de $\mathcal{P}$ où chaque classe contient au moins une arête. Haynes et Slater [38] ont introduit le nombre domatique couplé $d_{pr}(G)$ et ils ont prouvé que:

Théorème 2.32 ([38]). *Pour tout graphe G. Si $\gamma(G) \geq 2$, alors*

$$d_{pr}(G) \leq \delta(G).$$

Théorème 2.33 ([38]). *Pour tout graphe G, on a*

$$d_{pr}(G)\gamma_{pr}(G) \leq n.$$

Théorème 2.34 ([38]). *Pour tout graphe G, on a*

$$d_{pr}(G) \leq d(G).$$

2.4 Partition domatique b-maximale

Le concept du nombre b-domatique a été introduit en 2013 par Favaron [27]. Nous donnons ici quelques propriétés et résultats établis concernant ce nombre.

Proposition 2.35 ([27]). *Une partition domatique telle que chaque classe U contienne un sommet isolé dans $G[U]$ est a-maximal.*

Proposition 2.36 ([27]). *Une partition domatique $\mathcal{P} = \{U_1, U_2, ..., U_k\}$ est b-maximale si et seulement si pour tout choix d'ensembles dominants minimaux $U_i' \subset U_i, ..., U_k' \subset U_k$ de G, l'ensemble $V \setminus (U_1' \cup ... \cup U_k')$ ne domine pas G.*

Proposition 2.37 ([27]). *Toute partition domatique $\mathcal{P} = \{U_1, U_2, ..., U_k\}$ dont chaque classe est un ensemble dominant minimal de G est b-maximale.*

Proposition 2.38 ([27]). *Toute partition domatique a-maximale $\mathcal{P} = \{U_1, U_2, ..., U_k\}$ dont chaque classe U_i, $1 \leq i \leq k-1$, est un ensemble dominant minimal de G est b-maximale.*

Proposition 2.39 ([27]). *Si G admet une partition b-maximale de cardinalité k, alors il existe une famille $\{U_1, U_2, ..., U_k\}$ de k ensembles dominants minimaux disjoints de G tel que $V \setminus (U_1 \cup ... \cup U_k)$ n'est pas un ensemble dominant de G.*

Définition 2.40. *Une classe dominant, U dans $\mathcal{P}$ est* indivisible *si on ne peut pas diviser U en deux nouveaux classes dominants $U^{'}$ et $U^{''}$.*

Le résultat de la proposition suivante est légèrement plus faible que celui de la réciproque de la Proposition 2.39.

Proposition 2.41 ([27]). *S'il existe une famille $\{U_1, U_2, ..., U_k\}$ avec k ensembles dominants minimaux disjoints de G et un indice i_0 tel que $V \setminus (U_1 \cup ... \cup U_k)$ ne domine pas G, mais $V \setminus \bigcup_{i=1, i\neq i_0}^{k} U_i$ est un ensemble dominant indivisible de G, alors G admet une partition b-maximale de cardinalité k.*

Une partition domatique $\mathcal{P}$ est dite b-maximale si aucune partition domatique $\mathcal{P}'$ de cardinalité plus grande que celle de $\mathcal{P}$ ne peut être obtenue en regroupant des sous-ensembles de certaines classes de $\mathcal{P}$ pour former une nouvelle classe.

Définition 2.42. *Soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2, ..., U_k\}$ une partition domatique. On dit que $\mathcal{P}$ est une partition domatique b-maximale s'il n'existe pas de k sous-ensembles $U_i^{'} \subset U_i, ..., U_k^{'} \subset U_k$ (parmi eux $k-1$ peuvent être vides et $\bigcup_{i=1}^{k} U_i^{'} \neq \emptyset$) de telle sorte que la partition*

$$\mathcal{P}' = \{U_1 \setminus U_1', U_2 \setminus U_2', ..., U_k \setminus U_k', U_1' \cup U_2' \cup ... \cup U_k'\}$$

soit domatique.

Définition 2.43. *La cardinalité minimale d'une partition b-maximale de G est appelée le nombre b-domatique est notée par $bd(G)$.*

Remarque 2.44. *Une partition domatique b-maximale de cardinalité maximale est une partition domatique.*

Zelinka [63] a montré que pour tout entier a avec $2 \leq a \leq n$ et $a \neq n-1$, il existe un graphe connexe G d'ordre n tel que $ad(G) = a$. Un résultat similaire pour $bd(G)$ a été montre par Favaron [27].

Théorème 2.45 ([27]). *Soient b, n deux entiers tels que $2 \leq b \leq n$. Alors il existe un graphe connexe G d'ordre n tel que $bd(G) = b$.*

Remarque 2.46. *Si G contient des sommets isolés, alors $\{V\}$ est l'unique partition domatique et $ad(G) = bd(G) = d(G) = 1$.*

Dans ce qui suit, on ne considère que les graphes sans sommets isolés.

Notons que toute partition domatique maximale est b-maximale et toute partition b-maximale est a-maximale. En outre, dans [55] Ore a observé que l'ensemble des sommets de tout graphe sans sommets isolés possède deux ensembles dominants disjoints, ce qui implique que $bd(G) \geq 2$. D'où, les inégalités suivantes:

Proposition 2.47 ([27]). *Tout graphe G de degré minimum $\delta(G) \geq 1$ satisfait*

$$2 \leq ad(G) \leq bd(G) \leq d(G) \leq \delta(G) + 1.$$

Si un graphe G possède plusieurs composantes connexes $G_1, ..., G_k$, Chang [16] et Zelinka [64] ont montré que $d(G) = \min\{d(G_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$ et $ad(G) = 2$ si $\delta(G) \geq 1$. Le théorème suivant détermine $bd(G)$ lorsque G est non connexe.

Théorème 2.48 ([27]). *Soit $G_1, ..., G_k$ les composantes connexes d'un graphe G sans sommets isolés. Alors*

$$bd(G) = \min\{bd(G_i) \mid 1 \leq i \leq k\}.$$

2.5 Détermination de $bd(G)$ pour des classes particulières de graphes

D'après la Proposition 2.47 chaque graphe connexe G de degré minimum $\delta(G) = 1$, et en particulier chaque arbre non-trivial satisfait la condition $ad(G) = bd(G) = d(G) = 2$.

Le graphe complet K_n satisfait $ad(K_n) = bd(K_n) = d(K_n) = n = \delta(G) + 1$.

Cockayne [24] a été montré que:

$$d(C_n) = \begin{cases} 3 & n \equiv 0 (\bmod 3) \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La Figure 2.4 suivante présente la partition domatique d'un cycle C_6.

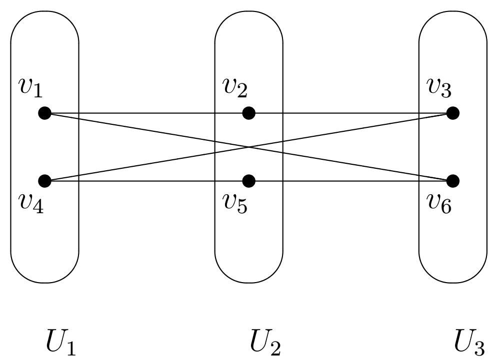


FIGURE 2.4. Partition domatique du cycle C_6.

Théorème 2.49 ([27])**.** *Le cycle C_n satisfait $ad(C_n) = bd(C_n) = 2$ pour $n \geq 4$.*

Le cycle C_6 de la Figure 2.5 est un exemple, où la partition domatique est b-maximale de cardinalié 2.

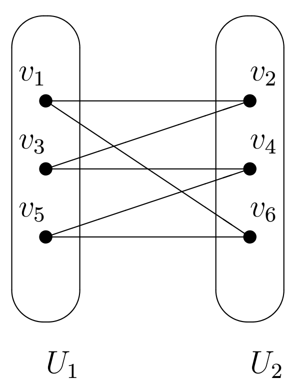


FIGURE 2.5. Partition domatique b-maximale du cycle C_6.

Les deux théorèmes suivants donnent des exemples de graphes G pour lesquels $ad(G) = bd(G) < d(G)$ ou $ad(G) < bd(G) = d(G)$.

Théorème 2.50 ([27])**.** *Soit $K_{p,q}$ un graphe biparti complet avec $2 \leq p \leq q$. Alors $ad(K_{p,q}) = bd(K_{p,q}) = 2$ et $d(K_{p,q}) = p$.*

La Figure 2.6 suivante présente la partition domatique d'un graphe biparti complet $K_{4,4}$.

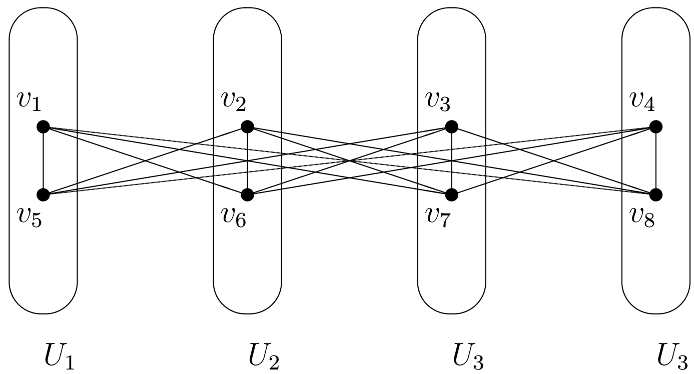


FIGURE 2.6. Partition domatique du graphe biparti complet $K_{4,4}$.

Le graphe biparti complet $K_{4,4}$ de la Figure 2.7 est un exemple, où la partition domatique est b-maximale de cardinalié 2.

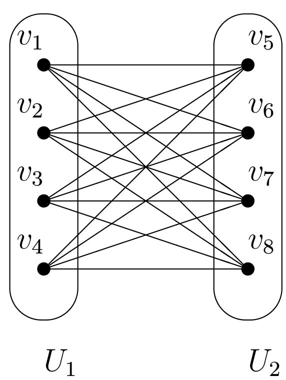


FIGURE 2.7. Partition domatique b-maximale du graphe biparti complet $K_{4,4}$.

Théorème 2.51 ([27])**.** *Soit $G_{p,q}$ obtenu à partir d'un graphe biparti complet $K_{p,p}$, $p \geq 4$ avec des classes bipartitionées $A = \{a_1, ..., a_p\}$ et $B = \{b_1, ..., b_p\}$ en ajoutant les arêtes $a_i a_j$ et $b_i b_j$ pour $1 < i < j < q < p-1$. En outre $d(G_{p,q}) = p$, $ad(G_{p,q}) = 2$ et $bd(G_{p,q}) = q$ si $q \geq 3$, $bd(G_{p,q}) = q + 1 = 3$ si $q = 2$.*

Le Théorème 2.51 montre que, $3 \leq bd(G) \leq d(G)$ pour $G_{p,q}$.

CHAPITRE 3

Partition b-maximale et nombre b-domatique d'un graphe

Dans ce chapitre, nous présentons nos premiers résultats concernant la partition b-maximale et le nombre b-domatique d'un graphe. Dans la première section de ce chapitre, nous donnons une condition suffisante pour laquelle une partition domatique donnée d'un graphe G est domatique b-maximale, ensuite nous déterminons le nombre b-domatique de quelques classes de graphes. Dans la deuxième section, on caractérise les graphes G d'ordre n pour lesquels $bd(G) \in \{n-1, n-2, n-3\}$, puis on montre que tout graphe G à n sommets satisfait $bd(G) + bd(\overline{G}) \leq n+1$, où $\overline{G}$ est le graphe complémentaire de G. Par ailleurs, on présente une caractérisation des graphes G d'ordre n tels que $bd(G) + bd(\overline{G}) \in \{n+1, n\}$ ainsi que les graphes pour lesquels $bd(G) = bd(\overline{G}) = \frac{n}{2}$.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication et un papier soumis. La publication a été publié dans la revue Discussiones Mathematicae Graph Theory [6], et le papier a été soumis au journal Electronic Journal of Graph Theory and Applications [7].

3.1 Propriétés préliminaires

Cockayne et Hedetniemi [20] ont montré le résultat suivant.

Proposition 3.1 ([20]). *Soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta(G)$. Alors*

$$d(G) \leq \min\{\frac{n}{\gamma(G)}, \delta(G)+1\}. \tag{3.1}$$

Favaron [27] a montré que si G possède un sommet isolé, alors $\{V\}$ est l'unique partition domatique de G. Elle a montré également que le nombre domatique de G est une borne supérieure du nombre b-domatique de G.

Proposition 3.2 ([27]). *Soit G un graphe de degré minimum $\delta(G)$. Si $\delta(G) = 0$, alors $bd(G) = d(G) = 1$, et si $\delta(G) \geq 1$, alors $2 \leq bd(G) \leq d(G)$.*

Des Propositions 3.1 et 3.2 découle le résultat suivant:

Proposition 3.3 ([27]). *Tout graphe G de degré minimum $\delta(G)$ satisfait*

$$bd(G) \leq \min\{\frac{n}{\gamma(G)}, \delta(G) + 1\}.$$

Si G est un graphe sans sommets universels, alors $\gamma(G) \geq 2$. Ainsi, en utilisant la Proposition 3.3, on obtient le corollaire suivant:

Corollaire 3.4. *Si G est un graphe à n sommets et sans sommets universels, alors $bd(G) \leq \frac{n}{2}$.*

Une condition suffisante pour laquelle une partition domatique donnée d'un graphe G est b-maximale est donnée ci-dessous. Pour un sommet $v \in V$, notons par U_v la classe d'une partition domatique $\mathcal{P}$ contenant v.

Théorème 3.5 ([6]). *Soit $\mathcal{P}$ une partition domatique d'un graphe $G = (V, E)$. Si G possède un sommet v tel que pour tout sommet $u \in N_G[v]$, l'ensemble $pn[u, U_u]$ est non vide, alors $\mathcal{P}$ est une partition b-maximale de G.*

Preuve. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ une partition domatique d'un graphe $G = (V, E)$, et soit v un sommet de V ayant la propriété suivante: tout sommet $u \in N_G[v]$ satisfait $pn[u, U_u] \neq \emptyset$. Supposons, au contraire, que $\mathcal{P}$ n'est pas une partition b-maximale de G. Ceci implique qu'il existe k sous ensembles non vides $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k$ tels que $\mathcal{P}' = \{\pi_1, \ldots, \pi_k, \bigcup_{i=1}^{k}(U_i \setminus \pi_i)\}$ est une partition domatique de G , où $\pi_i \subset U_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ et $\bigcup_{i=1}^{k}(U_i \setminus \pi_i) \neq \emptyset$. Posons $\pi_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k}(U_i \setminus \pi_i)$. Nous allons montrer que les sommets de $N_G[v]$ n'appartiennent pas à π_{k+1}. En effet, supposons au contraire qu'il existe un sommet $u \in N_G[v] \cap \pi_{k+1}$. Alors, il y a une classe $\pi_p \subset U_u$ qui ne contient pas u pour un certain $p \in \{1, ..., k\}$. De ce fait, soit u est isolé dans U_u et par conséquent aucun sommet de π_u ne domine u pour la partition $\mathcal{P}'$, ou bien il existe un sommet $z \in pn[u, U_u]$ et par conséquent aucun sommet de π_p ne domine z pour la partition $\mathcal{P}'$. Dans les deux cas, contradiction avec le fait que $\mathcal{P}'$ est une partition domatique de G. Ceci prouve que v et ses voisins ne peuvent pas appartenir à π_{k+1}. Mais dans ce cas, v sera non dominé par π_{k+1}, ce qui contredit que $\mathcal{P}'$ est une partition domatique de G. $\square$

Il est à souligner que l'inverse n'est pas vrai en général. En effet, la partition domatique $\mathcal{P}_0=\{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_4, v_5, v_6\}\}$ du graphe H_0 de la Figure 3.1 est b-maximale mais H_0 ne possède aucun sommet qui satisfait la condition suffisante du Théorème 3.5 pour $\mathcal{P}_0$.

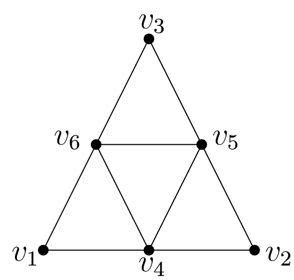


FIGURE 3.1. Graphe H_0.

Comme $\mathcal{P}_0$ est une partition domatique de H_0 de cardinalité 2, alors la borne inférieure de la Proposition 3.2 implique que $bd(H_0) = 2$. Le théorème suivant stipule que pour tout entier $k \geq 6$, il existe un graphe G_k d'ordre k contenant H_0 comme sous-graphe induit tel que $bd(G_k) = 2$. Rappelons que si $G = (V, E)$ est un graphe sans sommets isolés, alors le complémentaire $V \setminus S$ de tout ensemble dominant minimal S de G est un ensemble dominant de G [55].

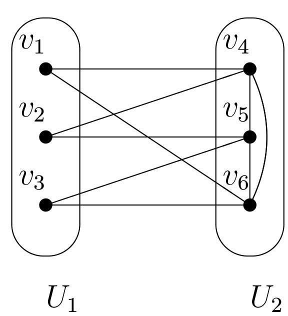


FIGURE 3.2. Partition domatique b-maximale du H_0.

Théorème 3.6 ([6]). *Pour tout entier $k \geq 6$, il existe un graphe G_k d'ordre k contenant H_0 comme sous-graphe induit, tel que $bd(G_k) = 2$.*

Preuve. Soient $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ des sommets de H_0 comme illustré dans la Figure 3.1. Soit $V(H_0) = A_1 \cup A_2$ où $A_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ et $A_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$. Clairement $\{A_1, A_2\}$ est une partition domatique de H_0. Soit G_k ($k \geq 6$) un graphe sans sommets isolés d'ordre k obtenu à partir de H_0 en ajoutant un nouveau graphe H_1 ayant A_3 (éventuellement vide) comme ensemble de sommets, de telle sorte qu'aucun sommet de A_3 n'est adjacent à A_1. En d'autres termes, $V(G_k) = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ où $G[A_1 \cup A_2] = H_0$ et les seules arêtes qui peuvent exister entre A_3 et $A_1 \cup A_2$ sont des arêtes qui vont joindre uniquement des sommets de A_3 et A_2. Notons que si $k = 6$, alors A_3 est un ensemnle vide et donc $G_6 = H_0$. Au vu de la remarque qui précède le Théorème 3.6, $bd(G_6) = 2$. Supposons maintenant que $k \geq 7$, donc $|A_3| \geq 1$. Soit S un ensemble dominant minimal de H_1. Alors, d'après le Théoreme 1.1 de Ore [55], $A_3 \diagdown S$ est un ensemble dominant de H_1. Ceci implique que $\{S,\ A_3 \diagdown S\}$ est une partition domatique de H_1. Posons $U_1 = A_1 \cup S$ et $U_2 = A_2 \cup (A_3 \diagdown S)$ .Il est clair que $V(G_k) = U_1 \cup U_2$, et $\{U_1, U_2\}$ est une partition domatique de G_k. Par ailleurs, il est facile de vérifier que U_1 est un ensemble dominant minimal de G_k. Montrons maintenant que $\{U_1, U_2\}$ est une partition domatique b-maximale de G_k. Supposons maintenant que $\{U_1, U_2\}$ n'est pas une partition b-maximale de G_k. Alors, il existe deux sous-ensembles non vides π_1, π_2 tels que $\mathcal{P}' = \{\pi_1, \pi_2, (U_1 \diagdown \pi_1) \cup (U_2 \diagdown \pi_2)\}$ est une partition domatique de G_k, où $\pi_i \subset U_i$ pour tout $i = 1, 2$ et $(U_1 \diagdown \pi_1) \cup (U_2 \diagdown \pi_2) \neq \emptyset$. Posons $\pi_3 = (U_1 \diagdown \pi_1) \cup (U_2 \diagdown \pi_2)$. Comme U_1 est un ensemble dominant minimal de G_k, alors aucun sommet de U_1 ne peut être dans π_3, et donc $\pi_1 = U_1$. Egalement, aucun sommet de A_2 ne peut être dans π_3 car sinon, A_1 ($\subset \pi_1$) possède un sommet qui ne sera pas dominé par π_3 (ou par π_2). En effet, si v_4 est le seul sommet de A_2 qui appartient à π_3, alors v_3 n'aura aucun voisin dans π_3, et si A_2 a au moins deux sommets, disons v_4, v_5 qui appartiennent à π_3, alors v_2 n'aura aucun voisin dans π_2. Dans les deux cas, nous avons une contradiction avec le fait que $\mathcal{P}'$ est une partition domatique de G_k. De ce fait, aucun sommet de A_2 ne peut être dans π_3, et par suite $A_2 \subset \pi_2$. Par conséquence, A_3 ne domine aucun sommet de A_1, ce qui conduit à une contradiction avec le fait que $\mathcal{P}'$ est une partition domatique de G_k. Ainsi $\{U_1, U_2\}$ est une partition domatique b-maximale de G_k et par conséquent $bd(G_k) \leq 2$. La Proposition 3.2 implique que $bd(G_k) = 2$. □

3.2 Graphes G tels que $bd(G) = 2$

Nous présentons ci-après d'autres classes de graphes dont le nombre b-domatique est égal à 2.

Théorème 3.7 ([6]). *Si G contient un sommet tel que ses voisins forment un ensemble indépendant, alors $bd(G) = 2$.*

Preuve. Soit H une composante connexe de G ($H = G$ si G est connexe). Soit v un sommet de H tel que ses voisins forment un ensemble independant dans H. Notons par U_1 (resp., U_2) l'ensemble de sommets de H à distance paire (resp., impaire) de v. Il est clair que $v \in U_1$ et tous les voisins de v appartiennent à U_2. Egalement, il est facile de voir que $\{U_1, U_2\}$ est une partition domatique de H. En vertu du Théorème 3.5, $\{U_1, U_2\}$ est une partition domatique b-maximale de H puisque v et ses voisins sont isolés dans U_1 et U_2, respectivement. Ainsi $bd(H) \leq 2$, et par suite $bd(G) = 2$ d'après la Proposition 3.3. □

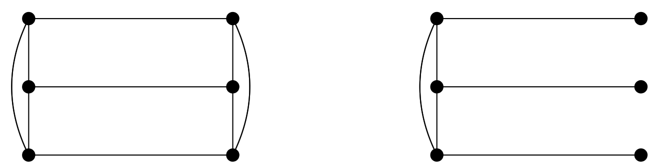
Corollaire 3.8. *[6] Si G est un graphe sans triangles, alors $bd(G) = 2$.*

Définition 3.9. *Soit H un graphe d'ensemble de sommets $V(H)$.*

- *Etant donnée une permutation π des sommets de $V(H)$, le prisme de H par rapport à π est le graphe obtenu en prenant deux copies disjointes H_1 et H_2 de H, et joignant tout sommet $u \in V(H_1)$ avec $\pi(u) \in V(H_2)$.*

- *Le prisme complémentaire de H est le graphe formé par l'union disjointe de H et de $\overline{H}$ en ajoutant les arêtess d'un couplage parfait entre les sommets correspondants de H et de $\overline{H}$.*

Proposition 3.10 ([6]). *Si G est le prisme ou le prisme complémentaire d'un certain graphe H, alors $bd(G) = 2$.*

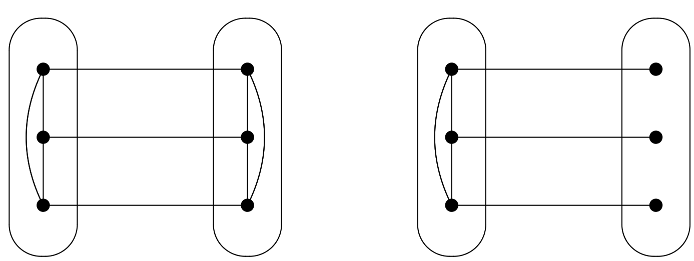


(a) (b)

FIGURE 3.3. (a) Prisme $K_3 \square K_2$ et (b) Complémentaire prisme $K_3\overline{K}_3$.

Preuve. Soient G le prisme de H, H_1 et H_2 deux copies disjointes de H et $\mathcal{P} = \{V(H_1), V(H_2)\}$ une partition de $V(G)$. Il est facile de voir que $\mathcal{P}$ est une partition domatique de G. Par ailleurs, pour $i = 1, 2$, chaque sommet de $V(H_i)$ possède un voisin privé par rapport à $V(H_i)$. De ce fait, en vertu du Théorème 3.5, $\mathcal{P}$ est une partition domatique b-maximale de G, et donc $bd(G) = 2$ d'après la Proposition 3.2. En remplaçant H_1 et H_2 par H et $\overline{H}$ respectivement, le même raisonnement s'applique si G est le prisme complémentaire de H. $\square$

Notons que le produit cartésien de K_3 et K_2, noté $K_3 \square K_2$ est le prisme de K_3. Rappelons également que $K_3\overline{K}_3$ est le prisme complémentaire de K_3. Ainsi, au vu du Théorème 3.10, on a $b(K_3 \square K_2) = 2$ et $bd(K_3\overline{K}_3) = 2$. La Figure 3.4 présente deux partitions domatiques b-maximales de $K_3 \square K_2$ et $K_3\overline{K}_3$ respectivement.



U_1 U_2 U_1 U_2

FIGURE 3.4. Partition domatique b-maximale de $K_3 \square K_2$ et $K_3\overline{K}_3$.

3.3 Le nombre b-domatique des graphes régulier

Théorème 3.11 ([6]). *Soient $G = (V, E)$ un graphe r-régulier et S_v un stable maximum du sous-graphe engendré par $N_G(v)$. Soit $\mu = \max\{|S_v| : v \in V(G)\}$. Si $d(G) = r + 1$, alors $bd(G) \leq r - \mu + 2$.*

Preuve. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, \ldots, U_{r+1}\}$ une partition domatique de G de cardinalité $r + 1$. Observons que pour $i \in \{1, \ldots, r + 1\}$,

$$U_i \text{ est un stable de } G. \text{ Par ailleurs, chaque sommet dans } U_i \text{ possède exactement un seul voisin dans chaque classe } U_j \ (j \neq i). \tag{3.2}$$

Soit v un sommet de G tel que $\mu = |S_v|$. Clairement $r \geq \mu \geq 1$. Désignons par $v_1, \ldots, v_r$ les r voisins de v dans G. En vertu de (3.2), on peut supposer que $v \in U_1$ et $v_i \in U_{i+1}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. Sans perte de généralité, supposons également que $S_v = \{v_1, v_2 \ldots, v_\mu\}$. Posons $q = r - \mu + 2$. Soit $\mathcal{P}' = \{\pi_1, \ldots, \pi_q\}$ une partition de G de cardinalité q obtenue à partir de $\mathcal{P}$ de la façon suivante.

- $\pi_1 = \{v\} \cup ((\bigcup_{i=1}^{\mu} U_{i+1}) \setminus S_v)$,
- $\pi_2 = S_v \cup (U_1 \setminus \{v\})$,
- $\pi_i = U_{i+\mu-1}$ pour tout $i \in \{3, \ldots, q\}$.

Montrons que $\mathcal{P}'$ est une partition domatique de G. En effet, pour $i \in \{3, \ldots, q\}, \pi_i$ est un ensemble dominant de G puisque $U_{i+\mu-1}$ est un ensemble dominant de G. Montrons maintenant que π_2 est ensemble dominant de G. En vertu de (3.2), chaque sommet de $U_{i+1} \setminus \{v_i\}$, $i \in \{1, \ldots, \mu\}$, possède au moins un voisin dans $U_1 \setminus \{v\}$ et vice versa. Par conséquent, chaque sommet de π_2 est dominé par π_1 et vice versa. Comme S_v est un stable maximum dans $G[N_G(v)]$, alors tout sommet de $\{v_{\mu+1} \ldots, v_r\}$ possède au moins un voisin dans S_v et donc dans π_2. Il est à noter que v n'a aucun voisin dans $\bigcup_{i=1}^{r} (U_{i+1} \setminus \{v_i\})$. De ce fait, puisque U_1 est un ensemble dominant de G, alors tout sommet dans $U_{i+1} \setminus \{v_i\}$ $(i \geq 1)$ possède au moins un voisin dans $U_1 \setminus \{v\}$ et donc dans π_2. Ainsi, tout sommet de π_i, $3 \leq i \leq q$ a un voisin dans π_2, ce qui implique que π_2 est un ensemble dominant de G. Maintenant, il reste à montrer que π_1 est un ensemble dominant de G. Pour cela, montrons que tout sommet $u \in U_{j+1}$, $(j \geq \mu+1)$ est dominé par π_1. Rappelons que v_j est le voisin de v dans U_{j+1}. Clairement, si $u = v_j$ $(j \geq \mu+1)$, alors u est adjacent à v et donc u est dominé par π_1. Supposons maintenant que $u \neq v_j$. Alors u ne peut pas être adjacent à tous les sommets de S_v, car sinon, puisque u et v_j sont dans la même classe U_{j+1}, la deuxième partie de l'Observation 3.2 implique que v_j n'a aucun voisin dans S_v et par suite $S_v \cup \{v_j\}$ est un stable dans $G[N_G(v)]$, contradiction. D'où u possède au moins un non-voisin dans S_v. De ce fait, u doit être adjacent à au moins un sommet de $\bigcup\limits_{i=1}^{\mu}(U_{i+1} \setminus \{v_i\})$ et donc u est dominé par π_1. Ainsi, tout sommet de $\bigcup_{i=3}^{q} \pi_i$ est dominé par π_1, ce qui signifie que π_1 est un ensemble dominant de G. Par conséquent, $\mathcal{P}'$ est une partition domatique de cardinalité q pour laquelle tout sommet de $N_G[v]$ est isolé dans sa classe. Au vu du Théorème 3.5, $\mathcal{P}'$ est une partition domatique b-maximale de G, et par conséquent $bd(G) \leq q = r - \mu + 2$. □

La borne du Théorème 3.11 est atteinte. En effet, considérons le graphe G formé par un graphe biparti complet $K_{p,p}$ d'ordre $2p$ moins un couplage parfait. Alors $\delta(G) = \mu = p-1$ et $d(G) = p$, tandis que d'après le Théorème 3.11, $bd(G) = 2$.

Théorème 3.12 ([6]). *Soient r un entier positif et G un graphe r-régulier. Alors $bd(G) = r+1$ si et seulement si $G = pK_{r+1}$ pour un certain entier positif p.*

Preuve. Du Théorème 2.48 et la Proposition 2.9, on constate aisément que l'énoncé du théorème est vérifié quand $G = pK_{r+1}$. Inversement, vu que $bd(G) = r+1 = d(G)$, alors le Théorème 3.11 donne $r+1 \leq r - \mu + 2$. D'où, puisque $\mu \geq 1$, il s'ensuit que $r+1 \leq r-\mu+2 \leq r+1$. Par conséquent $\mu = 1$, ceci implique que le voisinage de tout sommet de G induit un sous-graphe complet. D'où $G = pK_{r+1}$. □

Un sommet dans un graphe G est dit *universel* s'il est adjacent à tous les autres sommets de G. Rappelons que si G est sans sommets universels, alors $\gamma(G) \geq 2$. Par le Corollaire 3.4 donne $bd(G) \leq \frac{n}{2}$.

Cette dernière borne est atteinte pour les graphes $(n-2)$-réguliers d'ordre n.

Proposition 3.13 ([6]). *Si G est un graphe $(n-2)$-régulier d'ordre n pair, alors $bd(G) = \frac{n}{2}$.*

Preuve. Soit G un graphe r-régulier d'ordre $n = r+2$. Clairement G est un graphe sans sommets isolés d'ordre n pair. Par ailleurs, tout sommet de G a exactement $n-2$ voisins et un seul non-voisin. Ainsi, d'après le Corollaire 3.4, $bd(G) \leq \frac{n}{2}$. Supposons au contraire que $bd(G) = k < \frac{n}{2}$, et considérons une partition domatique b-maximale $\mathcal{P} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ de G de cardinalité k. Etant donné que tout ensemble de deux sommets de G domine G, alors $\mathcal{P}$ possède deux classes U_i, U_j $(i \neq j)$, dont chacune contient au moins 6 sommets. Dans ce cas, nous pouvons partitionner $U_i \cup U_j$ en trois ensembles dominants U_i', U_j', U_{k+1}, dont chacune contient au moins deux sommets, tels que $U_i' \subseteq U_i$, $U_j' \subseteq U_j$ et $U_{k+1} \subseteq U_i \cup U_j$. Il est facile de vérifier que $(\mathcal{P} \diagdown \{U_i, U_j\}) \cup \big(\{U_i', U_j', U_{k+1}\}\big)$ est une partition domatique de G de cardinalité $k+1$, contradiction. D'où $bd(G) = \frac{n}{2}$. □

3.4 Le nombre b-domatique de graphes à seuil

Chang [16] a montré que si v est un sommet universel, alors $d(G) = d(G \diagdown v) + 1$. Un résultat similaire de Chang [16] sera établie pour le nombre b-domatique.

Proposition 3.14 ([6])**.** *Si v est un sommet universel dans G, alors*

$$bd(G) = bd(G \diagdown v) + 1.$$

Preuve. Soit v un sommet universel dans G. Soient $k = bd(G \diagdown v)$ et $\{U_1, \ldots, U_k\}$ une partition domatique b-maximale de $G \diagdown v$. Clairement $\{U_1, \ldots, U_k, \{v\}\}$ est une partition domatique b-maximale de G, et par suite $bd(G) \leq bd(G \diagdown v) + 1$. Posons $t = bd(G)$. Soit $\{\pi_1, \ldots, \pi_t\}$ une partition domatique b-maximale de G. Supposons que $v \in \pi_1$. Alors $\{(\pi_1 \cup \pi_2) \diagdown \{v\}, \pi_{3,} \ldots, \pi_t\}$ est une partition domatique b-maximale de $G \diagdown v$. Ainsi $bd(G \diagdown v) \leq bd(G) - 1$, ce qui donne le résultat souhaité. □

Le graphe W_5 présenté (voir la Figure 3.5), possède un sommet universel v_0 qui satisfait la propriété de la Proposition 3.14.

Définition 3.15 ([14])**.** *Les* graphes à seuil *sont obtenus à partir d'un sommet isolé, en ajoutant de façon répétée un sommet isolé ou un sommet universel.*

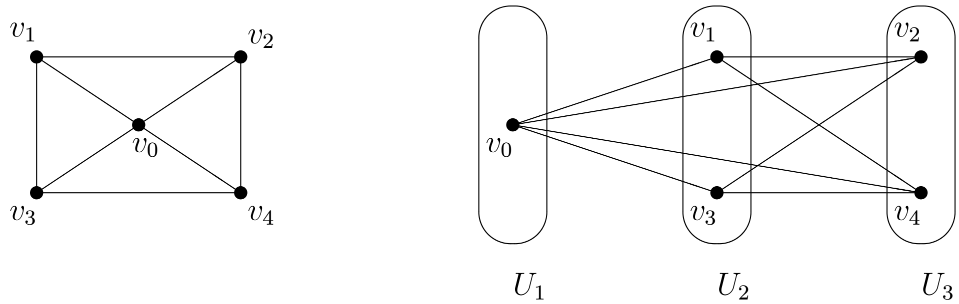


FIGURE 3.5. Partition domatique b-maximale du W_5.

Le graphe de la Figure 3.6 est un graphe à seuil obtenu à partir du sommet v_1, en ajoutant, dans l'ordre, les sommets v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 tels que pour $i = 2, 3, 4$, v_i est isolé dans le sous-graphe $G[v_1, ..., v_i]$ et pour $i = 5, 6$, v_i est un sommet universel dans le sous-graphe $G[v_1, ..., v_i]$.

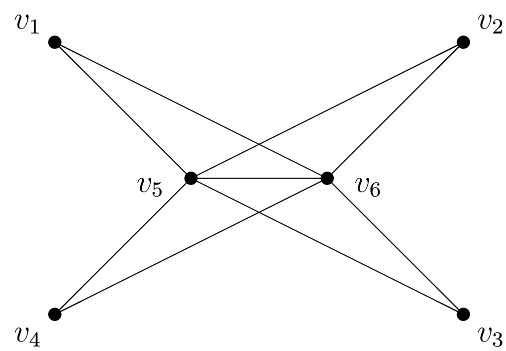


FIGURE 3.6. Graphe à seuil.

Dans ce qui suit on établit la valeur exacte du nombre b-domatique des graphes à seuil et de son graphe complémentaire.

Corollaire 3.16 ([6])**.** *Soit G_n un graphe à seuil d'ordre n. Alors*

$$bd(G_1) = 1 \text{ et pour } n \geq 2,\ bd(G_n) = 1 + \sum_{j=2}^{n} \alpha_n \times ... \times \alpha_j,$$

$$\text{où } \alpha_j = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet ajouté à } G_{j-1} \text{ est un sommet universel,} \\ 0 & \text{si le sommet ajouté à } G_{j-1} \text{ est un sommet isolé.} \end{cases}$$

Preuve. Les Propositions 3.2-3.14 donnent $bd(G_1) = 1$ et $bd(G_n) = \alpha_n \times bd(G_{n-1}) + 1$ pour $n \geq 2$. Cette relation de récurrence admet une unique solution donnée par:

$$bd(G_n) = 1 + \sum_{j=2}^{n} \alpha_n \times ... \times \alpha_j.$$

□

Corollaire 3.17 ([6]). *Si $\overline{G_n}$ est le graphe complémentaire d'un graphe à seuil G_n, alors*

$$bd(\overline{G_n}) = 1 + \sum_{j=2}^{n} (1 - \alpha_n) \times ... \times (1 - \alpha_j).$$

3.5 Le nombre b-domatique des bloc graphes et des cactus

Un sommet d'un graphe $G = (V, E)$ est dit *sommet d'articulation* si sa suppression de V augmente le nombre de composantes connexes de G. Un *bloc* d'un graphe est un sous-graphe connexe maximal sans sommets d'articulation.

Définition 3.18. *Un bloc graphe G est un graphe dont tout bloc de G est un sous-graphe complet de G (voir la Figure 3.7).*

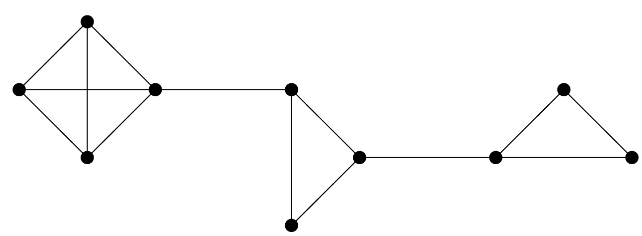


FIGURE 3.7. Bloc graphe avec 5 blocs.

Nous déterminons ci-après le nombre b-domatique d'un bloc graphe G dans le cas où chaque bloc de G possède au moins un sommet qui n'est pas d'articulation pour G.

Théorème 3.19 ([6]). *Soient G un bloc graphe et $B_1, ..., B_r$ $(r \geq 2)$ les blocs de G. Pour $i \in \{1, ..., r\}$, posons $|V(B_i)| = n_i$, et notons par k_i le nombre des sommets d'articulation de G dans B_i. Alors,*

$$\textit{si } l = \min\{n_i - k_i : 1 \leq i \leq r\} \geq 1, \ \textit{alors } bd(G) = l + 1.$$

Preuve. Soit $r \geq 2$. Pour $i \in \{1, ..., r\}$, désignons par $\delta_i(G)$ le degré minimum dans B_i et posons $l_i = n_i - k_i$. Comme $l = \min\{l_i : 1 \leq i \leq r\} \geq 1$, alors $\delta = \min \delta_i \geq 1$ et $1 \leq l_i \leq \delta_i(G)$. Ainsi, $l \leq \delta_i$ et en particulier,

$$l \leq \delta(G). \tag{3.3}$$

Si $r = 2$, alors G a exactement un sommet d'articulation, disons w et donc,

$$l_i = n_i - 1 = \delta_i(G) \text{ pour } i = 1, 2. \tag{3.4}$$

Ceci signifie que w est un sommet universel dans G, et par suite $G \setminus w = K_{\delta_1} \cup K_{\delta_2}$ est l'union de deux sous-graphes complets de G. Ainsi, par le Thèoréme 2.48,

$$bd(G \setminus w) = \min\{bd(K_{\delta_1}), bd(K_{\delta_2})\} = \min\{\delta_1(K_{\delta_1}), \delta_2(K_{\delta_2})\},$$

et en vertu de (3.4),

$$bd(G \setminus w) = \min\{l_1, l_2\} = l.$$

Par conséquent, la Proposition 3.14 donne $bd(G) = bd(G \setminus w) + 1 = l + 1$. Le théorème est vérifié pour $r = 2$.

Supposons maintenant que $r \geq 3$, et désignons l'ensemble des sommets du bloc B_i par

$$V(B_i) = \{v_1^i, v_2^i, ..., v_{l_i}^i, u_1^i, u_2^i, ..., u_{k_i}^i\},$$

où $v_1^i, v_2^i, ..., v_{l_i}^i$ et $u_1^i, u_2^i, ..., u_{k_i}^i$ sont respectivement les sommets non-d'articulation et les sommets d'articulation de G dans B_i.

Nous montrons tout d'abord que $bd(G) \geq l + 1$. Pour cela, posons $k = bd(G)$ et supposons au contraire que $k \leq l$. Alors par (3.3), on a

$$k \leq l \leq \delta(G). \tag{3.5}$$

Soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2, ..., U_k\}$ une partition domatique b-maximale de G de cardinalité k. Remarquons que $|B_i| = \delta_i(G) + 1 \geq \delta(G) + 1$ pour chaque $i \in \{1, ..., r\}$, donc par (3.5), nous avons

$$|B_i| \geq l + 1 \geq k + 1. \tag{3.6}$$

Comme chaque bloc B_i contient au moins l sommets non-d'articulation pour G, l'inégalité (3.6) implique que pour chaque $i \in \{1, ..., r\}$, il existe une classe de $\mathcal{P}$ qui intersect B_i en au moins deux sommets telle que l'un de ces deux sommets, disons v_1^i est un sommet non-d'articulation. Posons $X = \{v_1^1, v_1^2, ..., v_1^r\}$ et pour une partition $\mathcal{P}' = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k, \pi_{k+1})$ de $V(G)$ de cardinalité $k + 1$ obtenue à partir de $\mathcal{P}$ de la façon suivante. Pour chaque $i \in \{1, ..., r\}$, $\pi_i = U_i \diagdown X_i$ où $X_i = X \cap U_i$ (X_i peut être éventuellement vide), et $\pi_{k+1} = X$. Il est facile de vérifier que $\mathcal{P}'$ est une partition domatique de G, ce qui conduit à une contradiction avec le fait que $\mathcal{P}$ est une partition domatique b-maximale de G. Ainsi

$$bd(G) \geq l + 1. \tag{3.7}$$

Montrons maintenant que $bd(G) = k \leq l + 1$. Ceci est clairement vraie si $l = \delta(G)$, et de (3.7), on a $k = l + 1 = \delta(G) + 1$. Supposons maintenant que $l \leq \delta(G) - 1$ et sans perte de généralité B_1 contient le plus petit nombre de sommets non-d'articulation dans G. Alors

$$l_1 = l \text{ et donc } V(B_1) = \{v_1^1, v_2^1, ..., v_l^1, u_1^1, u_2^1, ..., u_{k_1}^1\}. \tag{3.8}$$

où $u_1^1, u_2^1, ..., u_{k_1}^1$ sont les sommets d'articulation de B_1. Il est à noter qu'un sommet est un sommet d'articulation si et seulement s'il appartient à au moins deux blocs. Par conséquent, sans perte de généralité, on peut supposer que

$$\text{pour } i \in \{1, ..., k_1\}, u_i^1 \in V(B_1) \cap V(B_{i+1}).$$

Soit $s \geq 0$ le nombre de blocs de G qui n'intersectent pas B_1. Il est clair que $s < r$, de plus si $s = 0$, alors chaque bloc B_j $(j \neq 1)$ de G intersecte B_1. Si $s \geq 1$, supposons sans perte de généralité que

$$V(B_1) \cap V(B_j) = \emptyset \text{ pour } j \in \{r - s + 1, ..., r\}.$$

Considérons une partition domatique $\mathcal{P} = \{U_1, U_2, ..., U_{l+1}\}$ de G de cardinalité $l+1 \leq \delta(G)$ définie selon la valeur de l comme suit.

Cas 1: $l \geq 2$

- Si $s \geq 1$, alors $U_{l+1} = \{u_i^1 : 1 \leq i \leq k_1\} \cup \{v_1^j : r-s+1 \leq j \leq r\}$; sinon $U_{l+1} = \{u_i^1 : 1 \leq i \leq k_1\}$.
- $U_i = \left\{v_i^j : 1 \leq j \leq r\right\}, 2 \leq i \leq l$.
- $U_1 = V(G) \diagdown \left(\bigcup_{i=2}^{l+1} U_i\right)$.

Cas 2. $l = 1$.

- Si $s \geq 1$, alors $U_2 = \{u_i^1 : 1 \leq i \leq k_1\} \cup \{v_1^j : r-s+1 \leq j \leq r\}$; sinon $U_2 = \{u_i^1 : 1 \leq i \leq k_1\}$.
- $U_1 = V(G) \diagdown U_2$.

Remarquons que, dans les deux cas, chaque classe de $\mathcal{P}$ intersecte chaque bloc de G en au moins un sommet. Ceci signifier que $\mathcal{P}$ est une partition domatique de G. Observons également que pour $i \in \{1, ..., k_1\}$, v_l^{i+1} est un sommet privé de u_i^1 par rapport à U_{l+1}. De plus, chaque classe U_i $(i = 1, ..., l)$ possède un sommet v_i^1 isolé dans sa propre classe, et un sommet de chacune des classes U_j, $j \in \{1, ..., l\} \diagdown \{i\}$. Nous concluons alors que v_1^1 est un sommet isolé dans U_1 et chacun de ses voisins est soit isolé dans sa classe, soit il possède un voisin privé par rapport à U_{l+1}. Ainsi, au vu du Théorème 3.5, $\mathcal{P}$ est une partition domatique b-maximale de G, ce qui signifie que $k \leq l+1$. D'où par (3.7), on a $k = l+1$. $\square$

Un *isthme* est une arête, dont la suppression déconnecte le graphe.

Définition 3.20. *Un* cactus *est un graphe connexe tel que chaque arête appartient à au plus un cycle. En d'autres termes, un cactus est un graphe dans lequel chaque bloc est soit un isthme ou un cycle. Un graphe* d'amitié F_n *$(n \geq 2)$ est un cactus d'ordre $2n+1$ dans lequel deux sommets quelconques ont exactement un voisin en commun (voir la Figure 3.8).*

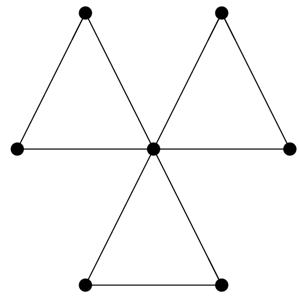


FIGURE 3.8. Un graphe d'amitié F_3.

Dans la proposition suivante, nous montrons que, à l'exception de K_3 et F_n $(n \geq 2)$, le nombre b-domatique d'un cactus G dont chaque bloc a au moins un sommet dont la suppression ne deconnecte pas G, est égal à 2.

Proposition 3.21 ([6])**.** *Soit G un cactus tel que chaque bloc possède au moins un sommet dont la suppression ne deconnecte pas G. Alors*

$$bd(G) = \begin{cases} 2 & si\ G \neq K_3\ \ et\ G \neq F_n(n \geq 2), \\ 3 & si\ G = K_3\ \ ou\ G = F_n(n \geq 2). \end{cases}$$

Preuve. Clairement $\delta(G) \leq 2$. Si $\delta(G) = 1$, alors d'après la Proposition 3.3, on a $bd(G) = 2$. Supposons maintenant que $\delta(G) = 2$. Si G possède un cycle de longueur au moins 4, alors G contient un sommet non-d'articulation de degré 2 dont ses voisins forment un ensemble indépendant. Ainsi par le Théorème 3.6, $bd(G) = 2$. Maintenant, supposons que tout cycle de G est de longueur 3. Soit l un entier strictement positif défini comme dans le Théorème 3.19 et soit $r \geq 1$ le nombre de blocs de G. Si $r = 1$, alors $G = K_3$ et donc $bd(K_3) = 3$ suivant la Proposition 2.9. Supposons alors que $r \geq 2$. Si $G = F_n$, alors $l = 2$ et donc $bd(F_n) = 3$ par le Thèoréme 3.19. Sinon $l = 1$ impliquant que $bd(G) = 2$ par le Thèoréme 3.19. □

3.6 Graphes possédant un nombre b-domatique très grand

Dans cette section, nous donnons une caractérisation des graphes G d'ordre n pour lequel $bd(G) \in \{n-1, n-2, n-3\}$. Etant que les graphes G d'ordre n pour lesquels $bd(G) = n$

ont été caractérisé dans [27].

Il a été montré dans [6] que si G a un sommet universel v, alors $bd(G \setminus v) = bd(G) - 1$. Ce résultat peut être généralisé comme suit.

Proposition 3.22 ([7])**.** *Soit A l' ensemble des sommets universels d'un graphe G. Alors $bd(G) = bd(G \setminus A) + |A|$.*

Le résultat suivant est dû à Favaron [27].

Proposition 3.23 ([27])**.** *Soit G un graphe d'ordre n. Alors $bd(G) = n$ si et seulement si G est isomorphe à K_n.*

Posons $k = bd(G)$. Une partition domatique $\mathcal{P}$ est dite k-partition domatique d'un graphe G si $\mathcal{P}$ est une partition b-maximale de G de cardinalité k. Dans la proposition suivante, nous montrons que les graphes complets privés d'une arête quelconque sont les seuls graphes pour lesquels le nombre b-domatique est égal à $n-1$.

Proposition 3.24 ([7])**.** *Soit G un graphe d'ordre n. Alors $bd(G) = n-1$ si et seulement si G est isomorphe à $K_n - e$, où e est une arête arbitraire du graphe complet K_n.*

Preuve. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2, ..., U_{n-1}\}$ une $(n-1)$-partition domatique de G. Sans perte de généralité, supposons que $U_1 = \{a, b\}$ et $U_i = \{u_i\}$ pour chaque $i \in \{2, ..., n-1\}$. Clairement $d_G(u_i) = n-1$, puisque chaque u_i domine $V(G)$. Si $ab \in E$, alors $G = K_n$ et par la Proposition 3.23, $bd(G) = n$, contradiction. Donc $ab \notin E$, et ainsi $G = K_n - e$.

L'inverse est évident. $\square$

Proposition 3.25 ([7])**.** *Soit G un graphe d'ordre n. Alors $bd(G) = n-2$ si et seulement si G est isomorphe à $G_1 \vee K_{n-3}$ ou $G_2 \vee K_{n-4}$, où $G_1 \in \{\overline{K}_3, K_2 \cup K_1\}$ et $G_2 \in \{P_4, C_4, 2K_2\}$.*

Preuve. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2, ..., U_{n-2}\}$ une (n-2)-partition domatique de G tel que $|U_1| \geq |U_2| \geq ... \geq |U_{n-2}|$. Clairement, soit $|U_1| = 3$ et $|U_i| = 1$ pour chaque $i \neq 1$ ou bien $|U_1| = |U_2| = 2$ et $|U_i| = 1$ pour chaque $i \notin \{1, 2\}$.

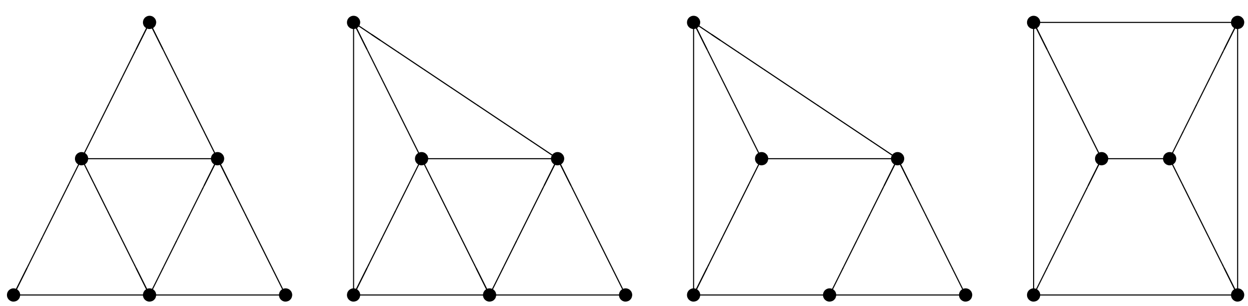
Supposons d'abord que $|U_1| = 3$ et $|U_i| = 1$ pour chaque $i \neq 1$. Posons $U_i = \{u_i\}$ pour chaque $i \in \{2, ..., n-2\}$. Puisque chaque u_i domine $V(G)$, il s'ensuit que $G = G_1 \vee K_{n-3}$, où $G_1 = \langle U_1 \rangle$. D'après les Propositions 3.23 et 3.24, $G_1 \notin \{K_3, P_3\}$. Donc $G_1 = K_2 \cup K_1$ ou $\overline{K}_3$.

Supposons maintenant que $|U_1| = |U_2| = 2$. Soit $U_i = \{u_i\}$ pour tout $i \in \{3, ..., n-2\}$. Comme précédemment, chaque u_i domine $V(G)$, et ainsi $G = G_2 \vee K_{n-4}$, où $G_2 = \langle U_1 \cup U_2 \rangle$. Puisque U_1 domine U_2, tout sommet de U_1 possède un voisin dans U_2, également tout sommet de U_2 possède un voisin dans U_1. En utilisant le fait que $G_2 \notin \{K_4, K_4 - e\}$ (d'après les Propositions 3.23 et 3.24), on en déduit que $G_2 \in \{P_4, C_4, 2K_2\}$.

Pour montrer l'inverse, désignons par A l'ensemble des sommets universels de G. Selon la Proposition 3.22, $bd(G) = bd(H) + |A|$, où $H \in \{G_1, G_2\}$. Si $H = G_1$, alors $bd(G_1) = 1$ et $|A| = n-3$, ceci implique que $bd(G) = n-2$. Si $H = G_2$, alors $bd(G_2) = 2$ et $|A| = n-4$, ceci implique également que $bd(G) = n-2$. □

Soit $\mathcal{H}$ une famille de graphes G d'ordre 6 avec $\delta(G) \geq 2$ et $3 \leq \Delta(G) \leq 4$, où chaque sommet est contenu dans un triangle. Il est à souligner que $\mathcal{H}$ contient exactement 14 graphes (pour plus de détail voir le livre de Harary [33], pages $218 - 224$).

Nous montrons ci-après que le nombre b-domatique d'un graphe de $\mathcal{H}$, à l'exception de ceux représentés dans la Figure 3.9, est égal à 3.



(H_1) (H_2) (H_3) (H_4)

FIGURE 3.9. Graphes H_1, H_2, H_3 et H_4.

Rappelons qu'il a été montré dans [6] que $bd(H_1) = bd(H_4) = 2$.

Proposition 3.26 ([7]). *Les seuls graphes de $\mathcal{H}$ pour lesquels le nombre b-domatique est égal à 2 sont H_1, H_2, H_3 et H_4.*

Preuve. Soit $G \in \mathcal{H}$, et supposons que $bd(G) = 2$. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2\}$ est un 2-partition domatique de G tel que $|U_1| \leq |U_2|$. Comme $|V(G)| = 6$ et $\Delta(G) \leq 4$, alors $3 \leq |U_2| \leq 4$ et par suite $2 \leq |U_1| \leq 3$. Considérons les deux cas suivants.

Cas 1. $|U_1| = 2$ et $|U_2| = 4$. Soit $U_1 = \{a, b\}$ et $U_2 = \{x, y, z, t\}$. Nous distinguons deux sous-cas, selon que l'arête ab existe ou non.

Cas 1.1. $ab \notin E$. Puisque chaque sommet de G appartient à un triangle, chaque sommet de U_2 est non isolé dans $\langle U_2 \rangle$. Si $\langle U_2 \rangle$ n'a pas deux arêtes indépendantes, alors clairement $\langle U_2 \rangle$ est une étoile $K_{1,3}$, centrée, sans perte de généralité, à x. Notons que $\langle U_2 \rangle$ n'a pas de triangle. En utilisant le fait que chaque sommet de G est contenu dans un triangle et y, z, t forment un ensemble indépendant dans $\langle U_2 \rangle$, on déduit que chaque triangle contenant l'un des y, z et t contient également x. De ce fait x est adjacent à a et b, impliquant ainsi que $d_G(x) = 5$, contradiction. Donc, on peut supposer que $\langle U_2 \rangle$ a deux arêtes indépendantes.

Soit T_a et T_b deux triangles contenant a et b, respectivement. Puisque $ab \notin E(G)$, T_a et T_b ont au plus deux sommets en commun. Supposons d'abord qu'il n'y ait pas de sommets communs entre T_a et T_b. Sans perte de généralité, soit $V(T_a) = \{a, x, y\}$ et $V(T_b) = \{b, z, t\}$. Dans ce cas, $\{\{a, b\}, \{x, z\}, \{y, t\}\}$ est une partition domatique de G, contradiction. Supposons maintenant que, si y est le seul sommet commun entre T_a et T_b. Sans perte de généralité, soit $V(T_a) = \{a, x, y\}$ et $V(T_b) = \{b, y, z\}$. Puisque t est dominé par U_1, supposons que $tb \in E$. Si $tz \in E$, alors $\{a, x, y\}$ et $\{b, z, t\}$ induisent deux triangles indépendants et comme ci-dessus, nous pouvons obtenir une partition domatique d'ordre 3. Donc $tz \notin E$. Puisque t appartient à un triangle, supposons que $yt \in E$, mais dans ce cas $d_G(y) = 5$, contradiction. Finalement, supposons que tous les triangles contenant a et b ont deux voisins en commun. Par conséquent, $V(T_a) = \{a, x, y\}$ et $V(T_b) = \{b, x, y\}$. Notons que puisque $\Delta(G) \leq 4$, x et y chacun d'eux possède au plus un voisin dans $\{z, t\}$. Ainsi, puisque U_1 domine U_2, on peut supposer que $zb \in E$. Supposons aussi que $zt \in E$. Alors $bt \notin E$, car sinon il existe deux triangles indépendants. Donc $at \in E$ et par suite $az \notin E$ (sinon, il existe deux triangles indépendants). Puisque chacun des z et t appartient à un triangle, nous avons $xz, ty \in E$. Mais alors $\{a, y, t\}$ et $\{b, x, z\}$ sont deux triangles sans sommets communs, contradiction. Par conséquent $zt \notin E$. Puisque $\langle U_2 \rangle$ a deux arêtes indépendantes, on peut supposer que $ty \in E$. Alors $at \notin E$ car sinon

$\{a, y, t\}$ et $\{b, x, y\}$ sont deux triangles avec un sommet en commun, contradiction. Ainsi $bt \in E$ mais également $\{a, x, y\}$ et $\{b, y, t\}$ sont deux triangles avec un voisin en commun, contradiction.

Cas 1.2. $ab \in E(G)$. Vu que $\Delta(G) \leq 4$, alors ni a ni b est adjacent à tous les sommets de U_2. De plus, puisque $\{U_1, U_2\}$ est une 2-partition domatique de G, alors sans perte de généralité, on peut supposer que $at \notin E$ et donc $bt \in E$. Egalement $bx \notin E$ et par suite $ax \in E$. Notons que x et t ne sont pas isolés dans U_2 puisque $\delta(G) \geq 2$. Cependant, au plus l'un des deux sommets y, z est isolé dans U_2, car sinon x et t n'appartiennent à aucun triangle.

Supposons, sans perte de généralité, que z isolé dans U_2. Alors z doit être adjacent à a et b. Comme chacun des deux sommets x, t se trouvent sur un triangle, xy et $ty \in E$. Clairement, y possède un voisin dans U_1. Supposons que y adjacent à a et à b. Si $xt \notin E$, alors $G = H_1$, sinon $G = H_2$. Notons que $bd(H_1) = 2$ (voir [6]). De même, $bd(H_2) = 2$ par le Thèoréme 3.5 puisque z est isolé dans U_2 et chacun de a, b a un voisin privé par rapport à U_1. Supposons maintenant que y est adjacent soit à a ou à b, mais pas aux deux. Dans ce cas, $tx \in E$ puisque t appartient à un triangle, d'où $G = H_3$. L'argument ci-dessus appliqué à z montre que $bd(H_3) = 2$.

Supposons maintenant que U_2 ne contient aucun sommet isolé. Puisque x appartient à un triangle, x doit être adjacent à au moins l'un des deux sommets y, z, disons y. Par le même argument, t a un voisin dans $\{y, z\}$. Observons que chacun des deux sommets a et b possède un voisin dans $\{y, z\}$ car chacun d'eux appartient à un triangle. Il est clair que U_1 domine y et z. Si zt ou $zx \in E$, alors $\{\{a, b\}, \{x, t\}, \{y, z\}\}$ est une partition domatique de G, contradiction. D'où $zt, zx \notin E$ impliquant que $zy \in E$ puisque z n'est pas isolé dans U_2. De ce fait $ty \in E$ puisque t appartient à un triangle. Vu que y possède un voisin U_1 et $\Delta(G) \leq 4$, alors y est adjacent à exactement l'un des deux sommets a, b. Par symétrie, on peut supposer que $yb \in E$. Alors $ay \notin E$, et donc az et $zb \in E$ puisque a appartient à un triangle. Comme x se trouve sur un triangle, alors $xt \in E$. Dans ce cas, $\{\{a, b\}, \{x, y\}, \{z, t\}\}$ est une partition domatique de G, contradiction.

Cas 2. $|U_1| = |U_2| = 3$. Soit $U_1 = \{a, b, c\}$ et $U_2 = \{x, y, z\}$. De même, ici on distingue quatre sous-cas.

Cas 2.1. U_1 est un ensemble indépendant. Clairement, tout sommet de U_1 est adjacent à au moins deux sommets de U_2. Supposons qu'un sommet de U_1, disons a est adjacent à tous les sommets de U_2. Puisque chaque triangle contenant un sommet de U_1 doit contenir deux sommets de U_2, alors il existe un sommet dans U_2 reliant tout sommet de G, ce qui conduit à une contradiction puisque $\Delta(G) \leq 4$. Par conséquent, chaque sommet de U_1 a exactement deux voisins dans U_2. Ainsi, il est facile de voir que U_2 induit un K_3 et donc $G = H_1$.

Cas 2.2. $\langle U_1 \rangle$ contient exactement une arête. Supposons donc que $bc \in E$, et que a isolé dans $\langle U_1 \rangle$. Alors a est adjacent à au moins deux sommets adjacents dans U_2, disons x et y. Supposons que zb et $zc \notin E$. Alors $za \in E$ et chacun des deux sommets b et c possède un voisin dans $\{x, y\}$. Vu que b, c chacun d'eux appartient à un triangle, alors by ou cx, disons $by \in E$. Egalement l'un de x et y, disons y adjacent à la fois à b et à c. Puisque z appartient à un triangle, $xz \in E$ ($yz \notin E$ vu que $\Delta(G) \leq 4$). Mais alors $\{\{a, c\}, \{y, z\}, \{b, x\}\}$ est une partition domatique de G, contradiction. Par conséquent, $N(z) \cap \{b, c\} \neq \emptyset$. Sans perte de généralité, supposons que $zb \in E$. Clairement $N(c) \cap U_2 \neq \emptyset$. Si $cz \in E$, alors $\{\{a, b\}, \{y, z\}, \{c, x\}\}$ est une partition domatique de G, contradiction. Alors $cz \notin E$ et donc c doit être adjacent à l'un des deux sommets x ou y. Par symétrie, supposons que $cy \in E$. Si $zx \in E$, alors $\{\{a, b\}, \{y, z\}, \{c, x\}\}$ est une partition domatique de G, contradiction. Par conséquent $zx \notin E$ et donc $zy \in E$ vu que z appartient à un triangle. Alors $by \notin E$ puisque $\Delta(G) \leq 4$, ce qui signifie que $za, bx, cx \in E$ car chacun des deux sommets z, b appartient à un triangle. Mais encore une fois, $\{\{a, b\}, \{x, z\}, \{c, y\}\}$ est une partition domatique, contradiction.

Cas 2.3. $\langle U_1 \rangle$ contient exactement deux arêtes. Sans perte de généralité, supposons que $ba, bc \in E$. Vu les cas précédents, on constate que $\langle U_2 \rangle = P_3$ ou K_3.

Supposons d'abord que $\langle U_2 \rangle$ est une chaîne P_3 centrée à y. Supposons aussi que $by \in E$. Puisque $\Delta(G) \leq 4$, l'une des deux arêtes bx et bz appartient à E, disons $bz \notin E$. De même, l'une de ya et yc appartient à E. Par symétrie, supposons que $yc \notin E$. Vu que chacun de c et z appartient à un triangle, alors $cx, bx \in E$ et $az, ay \in E$. Dans ce cas, $\pi = \{\{a, c\}, \{x, z\}, \{b, y\}\}$ serait une partition domatique de G, contradiction. D'où $by \notin E$. Puisque chaque U_i est un ensemble dominant de G, on peut supposer, par isomorphisme, que bx et $ya \in E$. Si $ax \notin E$, alors en utilisant le fait que chacun de a et x appartient à un triangle, on constate que $az, xc \in E$. Mais alors π serait une partition domatique de G, contradiction. Par conséquent $ax \in E$. Si $cz \in E$, alors π serait aussi une partition domatique de G. Ainsi $cz \notin E$. D'où $az \in E$ et $cx \in E$ puisque chacun de z et c appartient à un triangle. Mais encore une fois π est une partition domatique de G, contradiction.

Supposons maintenant que $\langle U_2 \rangle$ est un K_3. Puisque b est adjacent à au moins un sommet de U_2 et non à tous les sommets de U_2 car $\Delta(G) \leq 4$, on peut supposer, sans perte de généralité, que $by \in E$ et $bx \notin E$. Egalement, le sommet y doit être non-adjacent à au moins un sommet dans U_1. Par isomorphisme, supposons que $ya \notin E$. Maintenant, comme a appartient à un triangle, alors $az \in E$ et, soit ax ou bien $bz \in E$. Supposons d'abord que $ax \in E$. Si $cz \in E$, alors $d(z) = 4$, d'où, $bz \notin E$ et donc $cy \in E$ (tel que b se trouve sur un triangle). Mais alors $\{\{a, c\}, \{x, y\}, \{b, z\}\}$ serait une partition domatique de G, contradiction. Alors $cz \notin E$ et par suite $cy \in E$ puisque c appartient à un triangle. Comme ci-dessus, on aura une partition domatique d'ordre 3, contradiction. Par conséquent $ax \notin E$, impliquant que $cx \in E$ puisque x a au moins un voisin dans U_1. Supposons maintenant que $bz \in E$. Alors $d(z) = 4$, ce qui signifie que $cz \notin E$. D'où $cy \in E$ puisque c se trouve sur un triangle. Mais alors $\{\{a, c\}, \{x, z\}, \{b, y\}\}$ serait également une partition domatique de G, contradiction.

Cas 2.4. $\langle U_1 \rangle$ contient exactement trois arêtes, c'est-à-dire $\langle U_1 \rangle = K_3$. En examinant les cas précédants, on constate que $\langle U_2 \rangle = K_3$. Puisque $\{U_1, U_2\}$ est une 2-partition domatique de G et $\Delta(G) \leq 4$, alors tout sommet de U_1 a un ou deux voisins dans U_2. Supposons que $N(a) = \{x, y\}$. Alors $za \notin E$ puisque $\Delta \leq 4$ et par suite $N(z) \cap \{b, c\} \neq \emptyset$. Sans perte de généralité, supposons que $zc \in E$. Egalement, supposons que $bz \in E$, alors $\{\{a, c\}, \{x, z\}, \{b, y\}\}$ est une partition domatique de G, contradiction. Donc $bz \notin E$ et $N(b) \cap \{x, y\} \neq \emptyset$. Par symétrie, supposons que $by \in E$. Alors $\{\{a, c\}, \{y, z\}, \{b, x\}\}$ est une partition domatique de G, contradiction. Ainsi $|N(t) \cap U_2| = 1$ pour tout $t \in \{a, b, c\}$. Donc $G = H_4$. Comme prouvé en [6], $bd(H_4) = 2$. □

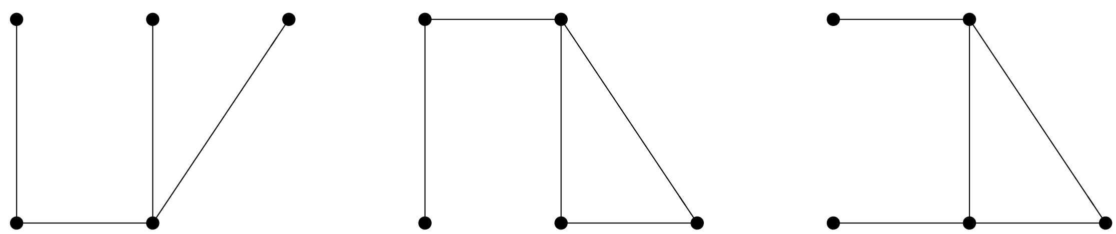
Corollaire 3.27 ([7])**.** *Si $G \in \mathcal{H} \setminus \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$, alors $bd(G) = 3$.*

Proposition 3.28 ([7]). *Soit G un graphe d'ordre n. Alors $bd(G) = n-3$ si et seulement si G est isomorphe à l'un des graphes suivants:*

i) $H \vee K_{n-4}$, *où* $H \in \{\overline{K}_4, K_2 \cup \overline{K}_2, P_3 \cup K_1, K_3 \cup K_1\}$,

ii) $H \vee K_{n-5}$, *où* H *ou* $\overline{H} \in \{C_5, P_5, K_{2,3}, P_3 \cup K_2, F_1, F_2, F_3\}$. *($F_1, F_2, F_3$ sont donnés par la Figure 3.10),*

iii) $H \vee K_{n-6}$, *où* $H = 2K_3$ *ou* $H \in \mathcal{H} \diagdown \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$.



(F_1) (F_2) (F_3)

FIGURE 3.10. Graphes $(F_1), (F_2)$ et (F_3).

Preuve. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2, ..., U_{n-3}\}$ une $(n-3)$-partition domatique de G telle que $|U_1| \geq |U_2| \geq ... \geq |U_{n-3}|$. Nous distinguons trois cas suivants:

Cas 1. $|U_1| = 4$ et $|U_i| = 1$ pour tout $i \neq 1$. Il est clair que $G = H \vee K_{n-4}$, où $H = \langle U_1 \rangle$. Si H contient un sommet universel, disons x, alors $\{U_1 \diagdown \{x\}, U_2, ..., U_{n-3}, \{x\}\}$ est une partition domatique de G de cardinalité $n-2$, contradiction. Donc H ne contient pas des sommets universels. Si $H \in \{P_4, C_4, 2K_2\}$, alors de la Proposition 3.25, on peut facilement voir que $bd(G) = n-2$, contradiction. Par conséquent, $H \in \{\overline{K}_4, K_2 \cup \overline{K}_2, P_3 \cup K_1, K_3 \cup K_1\}$.

Cas 2. $|U_1| = 3, |U_2| = 2$ et $|U_i| = 1$ pour tout $i \notin \{1, 2\}$. Dans ce cas, $G = H \vee K_{n-5}$, où $H = \langle U_1 \cup U_2 \rangle$. Puisque U_1 domine U_2, tout sommet de U_1 a un voisin dans U_2, également tout sommet de U_2 a un voisin dans U_1. Donc $\delta(H) \geq 1$. Maintenant, supposons que $\Delta(H) = 4$ et soit x est un sommet de H avec $d_H(x) = 4$. Alors $\mathcal{P}' = \{U_1', U_2', U_3, ..., U_{n-3}\}$ est une $(n-3)$-partition domatique de G, où $U_1' = (U_1 \cup U_2) \diagdown \{x\}$ et $U_2' = \{x\}$. Mais un tel est déjà considéré (voir cas 1). Donc $\Delta(H) \leq 3$. En examinant tous les graphes H d'ordre cinq avec $1 \leq \delta(H) \leq \Delta(H) \leq 3$ répertoriés dans [33] (voir les pages 216–217), alors H ou $\overline{H} \in \{C_5, P_5, K_{2,3}, P_3 \cup K_2, F_1, F_2, F_3\}$.

Cas 3. $|U_1| = |U_2| = |U_3| = 2$ et $|U_i| = 1$ pour tout $i \notin \{1,2,3\}$. Dans ce cas $G = H \vee K_{n-6}$, où $H = \langle U_1 \cup U_2 \cup U_3 \rangle$. Notons que de Proposition 3.22, $bd(H) = 3$ et donc tous les sommets de H sont contenus dans des triangles (d'après le Théorème 3.5). Donc $\delta(H) \geq 2$. Par un argument similaire à celui utilisé dans le Cas 2, on constate que $\Delta(H) \leq 4$. Observons que si $\Delta(H) = 2$, alors soit $H = 2K_3$ ou bien $H = C_6$. Cependant, le cas $H = C_6$ est exclu puisque $bd(C_6) = 2$. Pour la suite, supposons que H est un graphe d'ordre 6 satisfaisant $\delta(H) \geq 2$ et $3 \leq \Delta(H) \leq 4$ et que tout sommet est contenu dans un triangle. Ainsi $H \in \mathcal{H}$. En utilisant les Propositions 3.22 et 3.26, on constate que $H \notin \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$. Par conséquent, $H \in \mathcal{H} \diagdown \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$.

Inversement, supposons que G est isomorphe à l'un des graphes décrits dans les clauses (i), (ii) ou (iii). Soit A l'ensemble des sommets universels de G. Au vu de la Proposition 3.22, $bd(G) = bd(H) + |A|$. Si G satisfait (i), alors $bd(H) = 1$ et $|A| = n - 4$, ce qui implique que $bd(G) = n - 3$. Si G satisfait (ii), alors $bd(H) = 2$ (par le Thèorème 3.1, la Proposition 2.9 et le Thèoréme 3.7) et $|A| = n - 5$, ce qui implique que $bd(G) = n - 3$. Finalement, si G satisfait (iii), alors $bd(H) = 3$ (par le Corollaire 3.27) et $|A| = n - 6$, ce qui implique que $bd(G) = n - 3$. $\square$

3.7 Graphes G d'ordre n avec $bd(G) = bd(\overline{G}) = \frac{n}{2}$

Le but de cette section est de caractériser les graphes G d'ordre n tel que $bd(G) = bd(\overline{G}) = \frac{n}{2}$. Pour ce faire, nous allons utiliser un résultat dû à Dunbar et al [26], ce résultat caractérise les graphes G d'ordre n tel que $d(G).d(\overline{G}) = n^2/4$. Rappelons d'abord la famille de graphes $\mathcal{G}_k$ définie dans [26] comme suit: Pour tout nombre entier $k \geq 2$, notons $I = \{1, 2, ...k\}$. Si $G \in \mathcal{G}_k$, alors notons par $u_1, u_2, ..., u_k, v_1, v_2, ...v_k$ les sommets de G de sorte que pour tout $i \in I$ l'une des conditions suivantes est satisfaite.

(C_1) : Pour tout $l \in I - \{i\}$,
soit $u_iu_l, v_iv_l \in E(G)$ et $u_iv_l, v_iu_l \in E(\overline{G})$ ou
$u_iu_l, v_iv_l \in E(\overline{G})$ et $u_iv_l, v_iu_l \in E(G)$;

(C_2) : Il existe un $j \in I - \{i\}$, tel que

(a) Pour tout $l \in I - \{i, j\}$, soit
$u_i u_l, v_i v_l \in E(G)$ et $u_i v_l, v_i u_l \in E(\overline{G})$ ou
$u_i u_l, v_i v_l \in E(\overline{G})$ et $u_i v_l, v_i u_l \in E(G)$;

(b) $u_i u_j, u_i v_j, v_i u_j \in E(G)$ et $u_i v_i, u_j v_j, v_i v_j \in E(\overline{G})$;

(c) dans le graphe G,
$N(u_i) \diagdown V_{ij} = N(u_j) \diagdown V_{ij}$ et $N(v_i) \diagdown V_{ij} = N(v_j) \diagdown V_{ij}$,
où $V_{ij} = \{u_i, u_j, v_i, v_j\}$.

Dunbar et al. [26] ont montré que pour tout graphe G d'ordre $n \geq 4$, $d(G).d(\overline{G}) \leq n^2/4$, ils ont également caractérisé tous les graphes atteignant cette borne.

Théorème 3.29 ([26]). *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 4$, $d(G).d(\overline{G}) = \frac{n^2}{4}$ si et seulement si $G \cong K_4$ ou $G \in \mathcal{G}_k$, pour un certain entier $k \geq 2$.*

La preuve du Théorème 3.29 est basée sur des faits résumés dans le résultat suivant:

Proposition 3.30 ([26]). *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 4$ satisfaisant $d(G).d(\overline{G}) = \frac{n^2}{4}$. Soit $k = \frac{n}{2}$ et $\mathcal{P} = \{U_1, U_2, ..., U_k\}$ une partition domatique de G de cardinalité k tel que $\sum_{i=1}^{k} |E(\langle U_i \rangle)|$ est un maximum. Alors,*

(i) $k - 1 \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq k$ *et* $k - 1 \leq \delta(\overline{G}) \leq \Delta(\overline{G}) \leq k$.

(ii) Si U_i est un ensemble dominant de $\overline{G}$, alors i satisfait la Condition (C_1).

(iii) Si U_i n'est pas un ensemble dominant de $\overline{G}$, alors i satisfait la Condition (C_2).

Par la proposition 3.30, tout graphe $G \in \mathcal{G}_k$ est régulier ou semi-régulier de degré minimum $n/2 - 1$ ou $n/2$.

Théorème 3.31 ([7]). *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 4$,*

$$bd(G) = bd(\overline{G}) = \frac{n}{2}$$

si et seulement si $G \in \{2K_2, C_4, P_4\}$.

Preuve. Il est facile de montrer que si $G \in \{2K_2, C_4, P_4\}$, alors $bd(G) = bd(\overline{G}) = n/2$. Pour prouver la nécessité, considérons un graphe G d'ordre $n \geq 4$ avec $k = bd(G) = bd(\overline{G}) = \frac{n}{2}$ et soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2, ..., U_k\}$ une partition domatique b-maximale de G de cardinalité k. Notons que G est sans sommets universels puisque sinon $\overline{G}$ contient un sommet isolé et donc $bd(\overline{G}) = 1 < n/2$, contradiction. Egalement $\overline{G}$ est sans sommets universels. Donc $\gamma(G) \geq 2$ et $\gamma(\overline{G}) \geq 2$. Il s'ensuit alors que $|U_i| = 2$ pour tout i puisque $k = \frac{n}{2}$. De plus $d(G) \leq \frac{n}{2}$ et $d(\overline{G}) \leq \frac{n}{2}$ par la Proposition 3.1. Soit $I = \{1, ..., k\}$ et $U_i = \{u_i, v_i\}$ pour tout $i \in I$. Puisque $bd(G) \leq d(G)$ et $bd(\overline{G}) \leq d(\overline{G})$, alors $d(G) = d(\overline{G}) = \frac{n}{2}$ et ainsi $d(G).d(\overline{G}) = \frac{n^2}{4}$. Clairement $G \neq K_4$ ce qui signifie, le Théorème 3.29, que $G \in \mathcal{G}_k$. Puisque $d(G) = bd(G)$, tout $d(G)$-partiton domatique de G est une $bd(G)$-partition domatique de G. Ainsi, on peut supposer que la partition $\mathcal{P}$ est choisie parmi tous les $d(G)$-partitons domatiques de G telles que $\sum\limits_{i=1}^{d(G)} |E(\langle U_i \rangle|$ est maximum. Maintenant, par la Proposition 3.30-(i), on a $\frac{n}{2} - 1 \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq \frac{n}{2}$. Il est facile de vérifier que si $n = 4$, alors $G \in \{2K_2, C_4, P_4\}$. De ce fait,on peur supposer que $n \geq 5$, et par suite $k = \frac{n}{2} \geq 3$. Nous distinguons donc deux cas possibles:.

Cas 1. U_i est un ensemble dominant de $\overline{G}$ pour tout $i \in I$.

Par la Proposition 3.30-(ii), la Condition (C_1) est satisfaite pour tout $i \in I$. Comme U_i est un ensemble dominant de G et de $\overline{G}$, alors tout sommet de U_j, avec $j \neq i$, est adjacent à un sommet de U_i dans G. Donc,

$$\forall x \in U_i, \;\; |pn\,[x, U_i]| = k - 1. \tag{3.9}$$

De plus, nous réclamons que

$$\text{pour tout } i \in I, \;\; N_G(u_i) \setminus \{v_i\} \;\text{ induit un graphe complet.}$$

En effet, supposons au contraire que pour certain $p \in I$, il existe un sommet $u_p \in U_p$ tel que $N_G(u_p) \setminus \{v_p\}$ contient deux sommets non adjacents. Sans perte de généralité, supposons que u_q et u_r sont les deux sommets non adjacents dans $N_G(u_p) \setminus \{v_p\}$. Par la Condition (C_1), les sommets v_q et v_r ne sont pas adjacents dans $N_G(v_p) \setminus \{u_q\}$. Soit $U_q' = \{u_q, u_r, v_p\}$, $U_r' = \{v_q, v_r, u_p\}$ et $\mathcal{P}' = (\mathcal{P} \setminus \{U_p, U_q, U_r\}) \cup \{U_q', U_r'\}$. Observons que

$$U_q' \text{ et } U_r' \text{ sont des ensembles indépendants dans } G. \tag{3.10}$$

D'où par (3.9) et (3.10), $\mathcal{P}'$ satisfait ce qui suit: tout sommet de G est isolé dans sa classe ou bien il possède un voisin privé par rapport à sa classe. Ainsi, par le Thèoréme 3.5, $\mathcal{P}'$ est une partition domatique b-maximale de G de cardinalité $\frac{n}{2} - 1$, contradiction, ceci complète la preuve de la réclamation.

De ce fait, pour tout $i \in I$, les sommets de $N(u_i) \diagdown \{v_i\}$ sont deux à deux adjacentes. Alors G est l'union disjointes des deux graphes complets, chacun est d'ordre $\frac{n}{2}$ auquel cas s $(0 \leq s \leq \frac{n}{2})$ arêtes indépendantes peuvent être ajoutées de sorte que chaque arête ajoutée relie un sommet d'un $K_{\frac{n}{2}}$ à un sommet de l'autre $K_{\frac{n}{2}}$. Mais dans ce cas $bd(\overline{G}) = 2 < bd(G)$ d'après le Théorème 3.7, contradiction.

Cas 2. U_i n'est pas un ensemble dominant de $\overline{G}$ pour un certain $i \in I$.

Par la Proposition 3.30-(iii), i satisfait la Condition (C_2). Soit $j \in I - \{i\}$ tel que les clauses (a), (b) et (c) de la Condition (C_2) sont satisfaites. Observons que u_i, v_i, u_j, v_j induisent une chaîne P_4 : v_i-u_j-u_i-v_j (d'après la clause (b)). Egalement par la clause (c), les sommets de chacune des paires u_i, u_j et v_i, v_j ont le même voisin dans $V(G) \diagdown \{u_i, u_j, v_i, v_j\}$. Puisque $k \geq 3$, $l \in I - \{i, j\}$ et $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \diagdown \{U_i, U_j, U_l\}$. Maintenant, par la clause (c), soit ($u_i u_l, u_j u_l \in E$ et $v_i v_l, v_j v_l \in E$) ou bien ($u_i v_l, u_j v_l \in E$ et $v_i u_l, v_j u_l \in E$). Dans le premier cas, posons $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}' \cup \{\{u_i, u_j, v_l\}, \{v_i, v_j, u_l\}\}$ et dans le dernier cas, posons $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}' \cup \{\{u_i, u_j, u_l\}, \{v_i, v_j, v_l\}\}$. Dans les deux cas, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont des partitions domatiques de G. Pour la suite, supposons, sans perte de généralité, que $\mathcal{P}_1$ est satisfaite. Pour montrer que $\mathcal{P}_1$ est une partition domatique b-maximale, il suffit d'examiner le Théorème 3.5 en considérant le sommet v_l et en utilisant le fait que G est régulier ou semi-régulier de degré (minimum) $n/2 - 1$ ou bien $n/2$. En effet, v_l est isolé dans sa classe $\{u_i, u_j, v_l\}$ et pour tout $x \in N(v_l)$, le sommet x est soit isolé dans sa classe (quand $d_G(x) = n/2 - 1$) ou il possède un voisin privé par rapport à sa classe (quand $d_G(x) = n/2$). Donc $\mathcal{P}_1$ est une partition domatique b-maximale de G d'ordre $|\mathcal{P}'| + 2 = (\frac{n}{2} - 3) + 2 < \frac{n}{2}$, contradiction. $\square$

3.8 Résultats Nordhaus-Gaddum

Dans cette section, nous présentons des bornes de type Nordhaus-Gaddum pour $bd(G) + bd(\overline{G})$ en fonction de l'ordre du graphe G, et nous caractérisons les graphes extrêmaux atteignant ses bornes.

Théorème 3.32 ([7])**.** *Pour tout graphe G d'ordre n, $bd(G)+bd(\overline{G}) \leq n+1$, avec égalité si et seulement si $G \cong K_n$ ou $\overline{K}_n$.*

Preuve. De la Proposition 3.1, nous avons

$$bd(G) + bd(\overline{G}) \leq \delta(G) + \delta(\overline{G}) + 2. \tag{3.11}$$

De plus, puisque $\delta(\overline{G}) = n - \Delta(G) - 1$, alors

$$bd(G) + bd(\overline{G}) \leq n + 1 + \delta(G) - \Delta(G), \tag{3.12}$$

et la borne est satisfaite puisque $\delta(G) - \Delta(G) \leq 0$.

Supposons maintenant que $bd(G)+bd(\overline{G}) = n+1$, alors par (3.12), nous avons $\delta(G) = \Delta(G)$, c'est à dire G est un graphe régulier. Observons que si ni G ni $\overline{G}$ est un sommet universel, alors $\gamma(G) \geq 2$ et $\gamma(\overline{G}) \geq 2$. Ainsi, le Corollaire montre que 3.4, $bd(G) \leq n/2$ et $bd(\overline{G}) \leq n/2$, impliquant que $bd(G) + bd(\overline{G}) \leq n$ ce qui conduit à une contradiction. Par conséquent, au moins l'un des deux graphes G et $\overline{G}$ possède un sommet universel. Maintenant, si G a un sommet universel, alors $bd(\overline{G}) = 1$ et $bd(G) = n$, ce qui implique que $G = K_n$. Tandis que, si $\overline{G}$ a un sommet universel, alors $bd(G) = 1$ et $bd(\overline{G}) = n$, ce qui implique que $\overline{G} = K_n$.

L'inverse est évident. □

Théorème 3.33 ([7])**.** *Soit G un graphe d'ordre n. Si ni G ni $\overline{G}$ est un graphe complet, alors*

$$bd(G) + bd(\overline{G}) \leq n,$$

avec égalité si et seulement si $G \in \{K_n - e, 2K_2, C_4, P_4\}$.

Preuve. La borne se déduit directement du Thèoréme 3.32 puisque ni G ni $\overline{G}$ est un graphe complet.

Supposons que $bd(G) + bd(\overline{G}) = n$. Si G a un sommet universel, alors $bd(\overline{G}) = 1$ et $bd(G) = n - 1$. Par la Proposition 3.24, $G = K_n - e$, où e est une arête arbitraire de K_n. Par symétrie, si $\overline{G}$ possède un sommet universel, alors $\overline{G} = K_n - e$, où e est une arête arbitraire de K_n. Alors, on peut supposer que ni G ni $\overline{G}$ a un sommet universel. Il s'ensuit que, $\gamma(G) \geq 2$ et $\gamma(\overline{G}) \geq 2$ et donc $n \geq 4$. Maintenant, puisque $bd(G) + bd(\overline{G}) = n$, le Corollaire 3.4 implique que $bd(G) = bd(\overline{G}) = \frac{n}{2}$ et par suite $G \in \{2K_2, C_4, P_4\}$ d'après le Thèoréme 3.31.

L'inverse est évident. $\square$

CHAPITRE 4

Nombre b-domatique dans les produits de graphes

Le premier papier traitant le nombre domatique du joint de n graphes, du produit cartésien et de l'union de deux graphes a été publié en 1994 par Chang [16]. Un autre travail sur le produit fort de deux graphes a été donné par Monika [54]. Dans ce chapitre, nous étudions différents problèmes liés à la partition domatique b-maximale du produit de deux graphes. Principalement, nous donnons des bornes sur le nombre b-domatique du joint et du produit cartésien de deux graphes.

Notons que les travaux présentés dans ce chapitre ont été accepté comme communication aux colloques COSI'17 [9], ROADEF'2016 [5] et ROADEF'2017 [8].

4.1 Le nombre b-domatique du joint de deux graphes

Nous commençons cette section par la définition suivante.

Définition 4.1. *Soit $\mathcal{P}$ une partition domatique b-maximale d'un graphe G et soit U une classe de $\mathcal{P}$. Un sommet $v \in U$ est dit non-transférable si pour tout sommet $u \in N[v]$, l'ensemble $pn[u, U_u]$ est non vide.*

Par la définition du joint de deux graphes G_1 et G_2, on trouve que

$$\delta(G_1 \vee G_2) = \min\{\delta(G_1) + |V(G_2)|, \delta(G_2) + |V(G_1)|\},$$

et par les Propositions 3.1 et 3.2, on constate que

$$bd(G_1 \vee G_2) \leq \min\{\delta(G_1) + |V(G_2)|, \delta(G_2) + |V(G_1)|\} + 1.$$

Dans ce qui suit, nous allons présenter d'autres bornes supérieures sur le nombre b-domatique dans le produit de graphes. Rappelons qu'une partition b-maximale de cardinalité minimale est appelée une bd-partition.

Proposition 4.2. *Soient $\mathcal{P}(G_1)$ et $\mathcal{P}(G_2)$ deux bd-partitions domatiques de G_1 et G_2, respectivement. Si tous les sommets appartenant aux classes de $\mathcal{P}(G_1)$ (ou $\mathcal{P}(G_2)$) ne sont pas transférables, alors*

$$bd(G_1 \vee G_2) \leq bd(G_1) + bd(G_2).$$

Preuve. Supposons que tous les sommets de $\mathcal{P}(G_1)$ sont non-transférables. Notons que pour $t = 1, 2$, $|\mathcal{P}(G_t)| = bdG_t)$ et par suite

$$|\mathcal{P}(G_1)|) + |\mathcal{P}(G_2)| = bdG_1) + bdG_2). \tag{4.1}$$

Posons $k = bdG_1) + bd(G_2)$, $\mathcal{P}(G_1) = \{A_1, \ldots, A_{bd(G_1)}\}$ et $\mathcal{P}(G_2) = \{B_1, \ldots, B_{bd(G_2)}\}$. Il est aisé de voir que $V(G_1 \vee G_2) = (\bigcup_{i=1}^{bd(G_1)} A_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{bd(G_2)} B_j)$. Observons que chaque classe $A_i, 1 \leq i \leq bd(G_1)$, domine tous les sommets de $V(G_2)$ et chaque classe B_j, $1 \leq j \leq bd(G_2)$, domine tous les sommets de $V(G_1)$. Vu que les classes A_i et B_j sont disjointes, alors $\mathcal{P}(G_1) \cup \mathcal{P}(G_2)$ est une partition domatique de $G_1 \vee G_2$. Posons $\mathcal{P}(G_1 \vee G_2) = \mathcal{P}(G_1) \cup \mathcal{P}(G_2)$. Il est immédiat de voir que

$$|\mathcal{P}(G_1)|) + |\mathcal{P}(G_2)| = |\mathcal{P}(G_1 \vee G_2)|\,. \tag{4.2}$$

Soit $U_i = A_i$ pour $i = 1, ..., bd(G_1)$ et $U_{bd(G_1)+j} = B_j$ pour $j = 1, ..., bd(G_2)$. Alors $\mathcal{P}(G_1 \vee G_2) = \{U_1, U_2, ..., U_k\}$. Il est à souligner que tous les sommets de A_i sont non-transférables dans la partition $\mathcal{P}(G_1 \vee G_2)$ puisque il le sont dans la partition $\mathcal{P}(G_1)$. Nous allons montrer que $\mathcal{P}(G_1 \vee G_2)$ est b-maximale de $G_1 \vee G_2$. Supposons le contraire. Alors, il existe k sous-ensembles non vides $U_i' \subseteq U_i$, $i \in \{1, .., k\}$ avec inclusion stricte pour au moins un sous-ensemble non vide, $\mathcal{A} = V \setminus \bigcup_{j=1}^{k} U_i'$, $(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ et $\{U_1', U_2', ..., U_k'\}$ est une partition domatique de $(G_1 \vee G_2) - \mathcal{A}$ et $\mathcal{P}' = \{U_1', U_2', ..., U_k', V \setminus \bigcup_{j=1}^{k} U_i'\}$ est une partition domatique de G. Pusique tous les sommets de A_i sont non-transférables, alors $\mathcal{A}$ ne contient aucun sommet de A_i. Autrement dit, $\mathcal{A}$ contient seulement les sommets de B_i et donc de $\mathcal{P}(G_2)$. Ceci implique que $\mathcal{P}(G_2)$ est non b-maximale, contradiction. D'où $\mathcal{P}(G_1 \vee G_2)$ est b-maximale, ce qui implique que $bd(G_1 \vee G_2) \leq |\mathcal{P}(G_1 \vee G_2)|$. D'après (4.1) et (4.2), on trouve que $bd(G_1 \vee G_2) \leq bd(G_1) + bd(G_2)$. $\square$

Proposition 4.3. *Soient T un arbre d'ordre m et G un graphe d'ordre n. Alors,*

$$bd(T \vee G) \leq 2 + bd(G).$$

Preuve. Par la Proposition 2.47, $bd(T) = 2$. On sait que tous les sommets de T peuvent être partitionné en deux sous-ensembles stable. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2\}$ une 2-partition de T telle que U_i $(i = 1, 2)$ est un stable. Clairement tous les sommets $U_1 \cup U_2$ sont non-transférables. D'où, en vertu de la Proposition 4.2, $bd(T \vee G) \leq 2 + bd(G)$. $\square$

Par un raisonnement similaire, on obtient le resultat suivant.

Corollaire 4.4. *Soient $P_n, n \geq 2$ une chaîne à n sommets et G un graphe d'ordre n. Alors,*

$$bd(P_n \vee G) \leq 2 + bd(G).$$

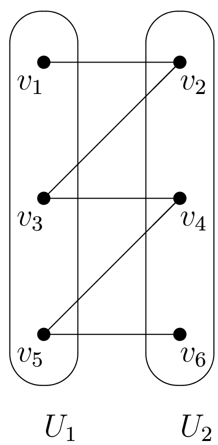


FIGURE 4.1. Partition domatique b-maximale de la chaîne P_6.

Proposition 4.5. *Soient K_m un graphe complet d'ordre m et G un graphe d'ordre n. Alors,*

$$bd(K_m \vee G) = m + bd(G).$$

Preuve. Observons que tous les sommets de K_m sont des sommets universels dans $K_m \vee G$. Donc par la Proposition 3.22, $bd\,(K_m \vee G) = bd((K_m \vee G) \setminus K_m) + m$. D'autre part $bd((K_m \vee G) \setminus K_m) = bd(G)$. D'où $bd(K_m \vee G) = m + bd(G)$. $\square$

Proposition 4.6. *Soient P un graphe de Petersen et G un graphe d'ordre n. Alors,*

$$bd(P \vee G) \leq 2 + bd(G).$$

Preuve. D'près la Proposition 3.10 et la Figure 4.2, $bd(P) = 2$. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2\}$ telle que $U_1 = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ et $U_2 = \{v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$. Tous les sommets de $U_1 \cup U_2$ sont non-transférables dans $\mathcal{P}$. D'où, en vertu de la Proposition 4.2, $bd(P \vee G) \leq 2 + bd(G)$. $\square$

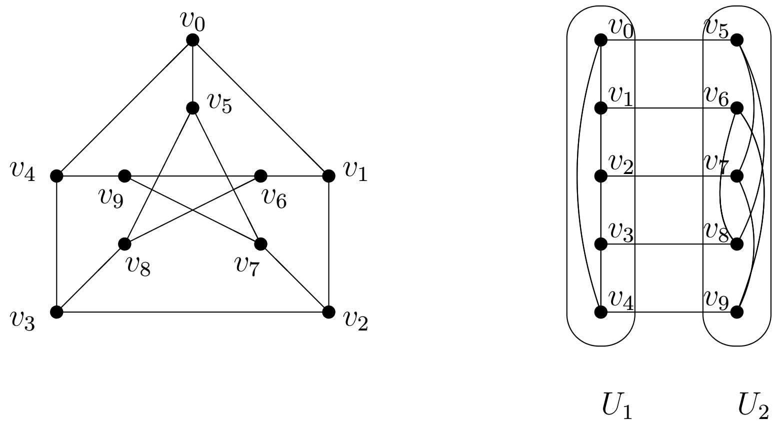


FIGURE 4.2. Graphe de Petersen P et Partition domatique b-maximale de P .

Proposition 4.7. *Soient C_n et C_m deux cycles avec $n, m \geq 4$. Si n ou m est pair, alors*

$$bd(C_n \vee C_m) \leq 4.$$

Preuve. Soient C_n et C_m deux cycles avec $n, m \geq 4$. D'après la Proposition 2.49, $bd(C_n) = bd(C_m) = 2$. Sans perte de généralité, soit n pair, alors tous les sommets de C_n peuvent être partitionné en deux sous-ensembles stable. Donc tous les sommets de C_n dans toute bd-partition de C_n sont non-transférables. D'où, par la Proposition 4.2, $bd(C_n \vee C_m) \leq 4$. $\square$

Proposition 4.8. *Pour tout m, n, p et $q \geq 2$,*

$$bd(K_{p,q} \vee K_{m,n}) \leq 4.$$

Preuve. Soit $K_{p,q}, K_{m,n}$ deux graphes bipartis complets de bipartition (A_p, B_q) et (C_n, D_m) respectivement. Il est clair que $K_{p,q} = G[A_p] \vee G[B_q]$ et $K_{m,n} = G[C_n] \vee G[D_m]$. Dans toute bd-partition de $K_{p,q}$ et $K_{m,n}$, tous les sommets de $K_{p,q}$ et $K_{m,n}$ sont non-transférables. D'où, en vertu de la Proposition 4.2, $bd(K_{p,q} \vee K_{m,n}) \leq 4$. $\square$

4.2 Le nombre b-domatique du produit cartésien de deux graphes

Dans cette section, nous allons déterminer le nombre b-domatique du produit cartésien de deux graphes.

Par la définition du produit cartésien $G_1 \square G_2$, on trouve

$$\delta(G_1 \square G_2) = \delta(G_1) + \delta(G_2),$$

et par la Proposition 3.1,

$$\min(bd(G_1), bd(G_2)) \leq bd(G_1 \square G_2) \leq \delta(G_1) + \delta(G_2) + 1. \tag{4.3}$$

Proposition 4.9. *Soient G_1 et G_2 deux graphes avec $bd(G_1) \leq bd(G_2)$. Soit $\mathcal{P}(G_1)$ une bd-partition de G_1. S'il existe un sommet v appartenant à une classe de $\mathcal{P}(G_1)$ tel que tout sommet de $N_{G_1}[v]$ possède un voisin privé par rapport à sa classe, alors*

$$bd(G_1 \square G_2) = bd(G_1).$$

Preuve. Soient $\mathcal{P}(G_1) = \{A_1, \ldots, A_{bd(G_1)}\}$ et $\mathcal{P}(G_2) = \{B_1, \ldots, B_{bd(G_2)}\}$ deux *bd*-partition de G_1 et G_2, respectivement. Posons $k = bd(G_1)$. Soit $\mathcal{P}(G_1 \square G_2) = \{U_1, U_1, ..., U_k\}$ une partition de $G_1 \square G_2$ tel que $U_i = V(\langle A_i \rangle \square G_2)$, $i = 1, ..., bd(G_1)$. Il est facile de vérifier que $\mathcal{P}(G_1 \square G_2)$ est une partition domatique. Montrons que $\mathcal{P}(G_1 \square G_2)$ est une partition b-maximale de $G_1 \square G_2$. Soit $v \in A_p$, p fixé appartenant à $\{1, ..., k\}$, tel que tout sommet $u \in N_{G_1}[v]$ possède un voisin privé relative à A_p dans G_1. Soit $z \in U_p$. Il n'est pas difficile de vérifier que tout sommet $w \in N_{G_1 \square G_2}[z]$ possède aussi un voisin privé relative à U_p dans $G_1 \square G_2$. Par conséquent, en utilisant le Théorème 3.5, on constate que $\mathcal{P}(G_1 \square G_2)$ est une partition domatique b-maximale de $G_1 \square G_2$. D'où $bd(G_1 \square G_2) \leq k$ et par (4.3), on conclut que $bd(G_1 \square G_2)$. $\square$

Proposition 4.10. *Soient H un prisme graphe et G un graphe quelconque. Alors*

$$bd(H \square G) = 2.$$

Preuve. d'après la Proposition 3.10, $bd(H) = 2$. Etant donnée une *bd*-partition de H, tout sommet de H possède un voisin privé par rapport à sa classe. Donc par la Proposition 4.9, $bd(H \square G) = 2$. $\square$

Le corollaire suivant est immediat.

Corollaire 4.11. *Pour tout $n, m \geq 2$, nous avons*

$$bd(K_n \Box K_m) = \min(n, m).$$

Théorème 4.12. *Soient G_1 et G_2 deux graphes tels chacun contient un sommet dont les voisins forment un ensemble stable. Alors*

$$bd(G_1 \Box G_2) = 2.$$

Preuve. Soit $v = (v_1, v_2)$ un sommet de $G_1 \Box G_2$ avec $v_1 \in V(G_1)$ et $v_2 \in V(G_2)$ tel que les ensembles $N_{G_1}(v_1)$ et $N_{G_2}(v_2)$ forment deux stables dans G_1 et G_2, respectivement. La structure de $G_1 \Box G_2$ implique que l'ensemble $N_{G_1 \Box G_2}(v)$ forme aussi un stable dans $G_1 \Box G_2$. De ce fait, en vertu du Théorème 3.7, on constate que $bd(G_1 \Box G_2) = 2$. $\Box$

Corollaire 4.13. *Pour tout n, m, p et $q \geq 2$. Alors,*

$$bd(K_{n,m} \Box K_{p,q}) = 2.$$

Proposition 4.14. *Soient P_n une chaîne et C_m un cycle avec $n \geq 2$ et $m \geq 3$, alors*

$$bd(P_n \Box C_m) = \begin{cases} 3 & si\ n \neq 3\ et\ m \neq 3 \\ 2 & si\ non \end{cases}.$$

Preuve. Soient P_n une chaîne d'ordre $n \geq 2$ et C_m un cycle d'ordre $m \geq 3$. Posons $G_{n,m} = P_n \Box C_m$. Si $n = 2$, alors d'après la Proposition 3.10, $bd(G_{2,m}) = 2$. Egalement si $n \geq 4$ et $m \geq 4$, alors en vertu du Théorème 4.12, $bd(G_{n,m}) = 2$. Il nous reste à examiner le cas $n = m = 3$. Pour cela, posons $V(G_{3,3}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ (voir Figure 4.3). La partition $\{\{v_1, v_4, v_7\}, \{v_2, v_5, v_8\}, \{v_3, v_6, v_9\}\}$ est domatique b-maximale de $G_{3,3}$ d'après le Théorème 3.5 puisque chaque sommet possède un voisin privé relatif à sa classe. De ce fait $bd(G_{3,3}) \leq 3$. Nous allons montrer que $bd(G_{3,3}) < 3$. Supposons le contraire. Alors $bd(G_{3,3}) = 2$ puisque $G_{3,3}$ est sans sommets isolés. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2\}$ une bd-partition de $G_{3,3}$. Il est à observer que les sommets de $G_{3,3}$ peuvent être partitionné en trois copies de K_3. Par ailleurs, chaque sommet de $G_{3,3}$ est contenu dans une copie de K_3. De ce fait, l'une des deux classes U_1 ou U_2 contient au moins deux sommets du même copie de K_3.

Supposons d'abord que les trois sommets du certains copies sont dans U_1. Par symétrie, on peut supposer que les sommets de la première copie v_1, v_2, v_3 appartiennent à U_1. Dans ce cas les trois sommets v_4, v_5, v_6 de la deuxième copie sont dans U_2 car sinon l'un des sommets de la première copie ne sera dominé par U_2. Mais dans ce cas $\{U_1, U_2, \{v_1, v_4\}\}$ serait une partition domatique de $G_{3,3}$, contradiction. Supposons maintenant que exactement deux sommets du même copie appartiennent à U_1 ou U_2. contient exactement deux partition contient au plus deux sommets de chaque copie. Soit A une nouvelle classe obtenue à partir de U_1 et U_2 de la façon suivante. Pour toute paire de deux sommets du même copie qui se trouvent dans la même classe U_1 ou U_2, on déplace l'un des deux sommets à A et on garde l'autre sommet dans sa classe. Il est facile de vérifier que cette nouvelle partition est domatique, contradiction $\square$

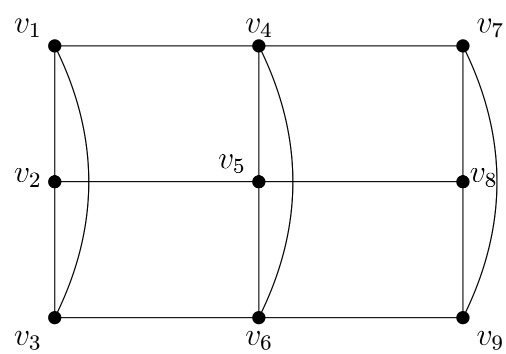


FIGURE 4.3. Graphe $P_3 \square C_3$.

CHAPITRE 5

Nombres b-domatiques total et couplé

Ce chapitre est consacré à l'étude de deux variantes relatives au nombre b-domatique, à savoir le nombre b-domatique total et le nombre b-domatqiue couplé. En effet, nous allons donner des valeurs exactes et des bornes sur ces deux paramètres pour certains graphes particuliers tels que le graphe milieu et le graphe total d'un cycle C_n et d'une roue W_n.

Les résultats de ce chapitre ont été obtenus en collaboration avec les étudiants du Master Boutoumi Meriem et Taibi Naouel [13], et Zaitri Hadjer [61].

Définition 5.1 ([31]). *Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe où $V(G)$ est l'ensemble des sommets et $E(G)$ est l'ensemble des arêtes. Le graphe milieu de G, noté $M(G)$, est défini comme suit: L'ensemble des sommets de $M(G)$ est $V(G) \cup E(G)$. Deux sommets v et u de $M(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée.*

- $v, u \in E(G)$ et v, u sont adjacents dans G.
- $v \in V(G)$, $u \in E(G)$ et v est incident à u dans G.

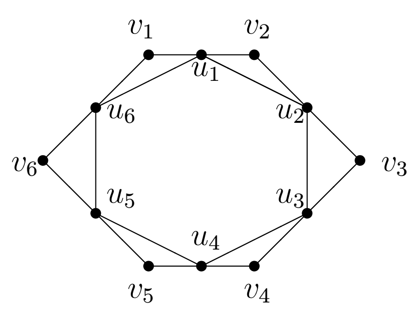


Figure 5.1. Le graphe milieu de C_6.

Théorème 5.2. *Pour tout cycle C_n d'ordre n, on a*

$$bd\left(M\left(C_n\right)\right) = 2.$$

Preuve. Soit G un graphe milieu du cycle C_n. Posons $V(C_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ et $E(C_n) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ avec $u_j = v_j v_{j+1}$, $1 \leq j \leq n-1$ et $u_n = v_n v_1$. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2\}$ une partition domatique de G avec $U_1 = \{u_1, u_2\} \cup \{v_4, \ldots, v_n\}$ et $U_2 = V(G) \diagdown U_1$. Nous allons montrer que $\mathcal{P}$ est b-maximale. Puisque v_2 est isolé dans $G[U_2]$, la classe U_2 est un ensemble dominant indivisible. Montrons maintenant que U_1 est un dominant minimal. Remarquons d'abord que $pn[u_1, U_1] = \{v_1\}$ et $pn[u_2, U_1] = \{v_3\}$, de plus, tout sommet de $U_1 \diagdown \{u_1, u_2\}$ est isolé dans $G[U_1]$. Donc, d'après le Théorème 2.21 et la Proposition 2.47, $\mathcal{P}$ est une partition domatique b-maximale. D'où $bd(G) = 2$. □

Définition 5.3 ([4]). *Le graphe total de G, noté $T(G)$, est défini comme suit. L'ensemble des sommets de $T(G)$ est $V(G) \cup E(G)$. Deux sommets v et u de $T(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

- v, $u \in V(G)$ et v, u sont adjacents dans G.
- v, $u \in E(G)$ et v est adjacent à u dans G.
- $v \in V(G)$, $u \in E(G)$ et v est incident à u dans G.

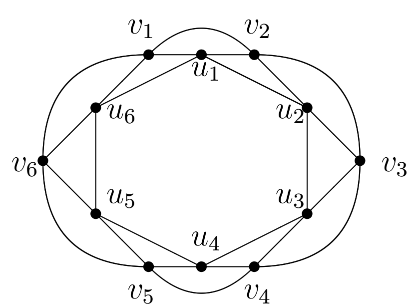


FIGURE 5.2. Le graphe total de C_6.

Proposition 5.4. *Pour tout cycle C_n d'ordre $n \geq 5$, on a*

$$bd(T(C_n)) \leq 3.$$

Preuve. Soit G le graphe total de C_n. Posons $V(C_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ et $E(C_n) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ avec $u_j = v_j v_{j+1}$, $1 \leq j \leq n-1$ et $u_n = v_n v_1$. Soit $P = \{U_1, U_2, U_3\}$ une partition de G où U_1, U_2 et U_3 sont définies comme suit:

$$U_1 = \left(\cup_{i=0}^{s}\{v_{3i+2}\}\right) \cup \left(\cup_{i=0}^{t}\{u_{3i+3}\}\right) \text{ avec } s = \left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor, \ t = \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor,$$

et

$$U_2 = V(C_n) \setminus U_1; \; U_3 = E(C_n) \setminus U_1.$$

Montrons que cette partition est b-maximale. D'abord, observons que le sommet v_2 est isolé dans la classe U_1 et $N_G(v_2) = \{v_1, v_3, u_1, u_2\}$. Par ailleurs, on a $pn[v_1, U_2] = \{u_1\}$, $pn[v_3, U_2] = \{u_2\}$, $pn[u_1, U_3] = \{v_1\}$ et $pn[u_2, U_3] = \{v_1\}$. Donc, d'après le Théorème 3.5, $\mathcal{P}$ est b-maximale. D'où, $bd(T(C_n)) \leq 3$. □

Définition 5.5. *La Roue W_n est un graphe d'ordre n construit à partir d'un cycle C_{n-1} et un sommet universel.*

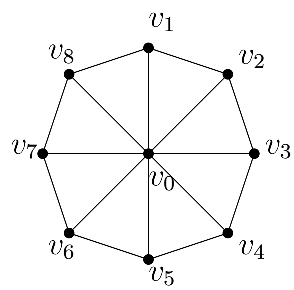


FIGURE 5.3. La roue W_9.

Corollaire 5.6. *Le nombre b-domatique de la Roue W_n $(n \geq 4)$ est*

$$bd(W_n) = bd(C_{n-1}) + 1 = 3.$$

5.1 Partition domatique totale b-maximale

Dans cette partie, nous allons introduire le nombre b-domatique total. Après avoir donné quelques propriétés concernant ce parmètres, nous déterminons la valeur exacte de ce paramètre pour certains graphes simples.

5.1.1 Propriétés des partitions domatiques totales b-maximales

Nous commençons d'abord par donner les définitions suivantes.

Définition 5.7. *Une partition domatique totale $\mathcal{P}$ est dite a_t-maximale, s'il n'existe pas une partition domatique totale $\mathcal{P}'$ de cardinalité plus grande que $\mathcal{P}$, obtenue à partir de $\mathcal{P}$ en divisant une classes U_i de $\mathcal{P}$ en deux dominants totaux U_i' et U_i''.*

Définition 5.8. *La cardinalité minimum d'une partition a_t-maximale de G est appelée le nombre a-domatique total de G et on le note par $ad_t(G)$.*

Proposition 5.9. *Toute partition domatique totale $\mathcal{P}$ dont chaque classe U contient un sommet pendant dans $G[U]$ est a_t-maximale.*

Preuve. L'ensemble dominant U contenant un sommet pendant v dans $G[U]$ est indivisible, car si on divise U en U' contenant v et U'' contenant leur support, v est isolé dans U'. Donc U' est un ensemble non dominant total. Ainsi toute classe de $\mathcal{P}$ est indivisible et donc $\mathcal{P}$ est a_t-maximale. □

Une partition domatique totale $\mathcal{P}$ est b_t-maximale s'il n'existe pas une partition domatique totale $\mathcal{P}'$ ($|\mathcal{P}'| > |\mathcal{P}|$) qui peut être obtenue à partir de $\mathcal{P}$ en rassemblant quelques sous classes de $\mathcal{P}$ pour former une nouvelle classe (un autre ensemble dominant total). Plus formellement, une partition domatique b_t-maximale peut être définie comme suit.

Définition 5.10. *Une partition domatique totale $\mathcal{P} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ est b_t-maximale s'il n'existe pas k sous-ensembles $U_i' \subset U_i$ telle que $\mathcal{P}' = \{U_1 \setminus U_1', \ldots, U_k \setminus U_k', U_1' \cup \ldots \cup U_k'\}$ est une partition domatique totale, (avec la condition que $U_1' \cup \ldots \cup U_p' \neq \emptyset$).*

Définition 5.11. *La cardinalité minimum d'une partition domatique totale b_t-maximale de G est appelée le nombre b-domatique total et on le note par $bd_t(G)$.*

Remarque 5.12. *Le nombre b-domatique total est défini seulement pour les graphes sans sommets isolés.D'où $\delta(G) \geq 1$.*

Dans ce qui suit, nous présentons quelques propriétés concernant les partitions domatiques totales b-maximale.

Proposition 5.13. *Une partition domatique totale $\mathcal{P} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ est b_t-maximale si et seulement si pour tout choix d'ensembles dominants totaux minimaux $\pi_i \subset U_i$, $V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \pi_i$ n'est pas un dominant total de G.*

Proposition 5.14. *Toute partition domatique totale $\mathcal{P} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ dont chaque classe est un ensemble dominant total minimal de G, est b_t-maximale.*

Preuve. Si chaque classe est un ensemble dominant minimal total de G, alors en posant $\pi_i = U_i$ pour chaque i, l'ensemble $V \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} \pi_i$ serait un ensemble non dominant total de G. □

Proposition 5.15. *Toute partition domatique totale a_t-maximale $\mathcal{P} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ telle que chaque classe U_i, $1 \leq i \leq k-1$ est un ensemble dominant minimal total de G, est b_t-maximal.*

Preuve. Dans ce cas $\pi_i = U_i$ pour $1 \leq i \leq k-1$ et $V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \pi_i = U_k \setminus \pi_k$ qui n'est pas un dominant total de G car U_k est indivisible. □

Proposition 5.16. *Soient G un graphe et $\mathcal{P} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ une partition domatique totale de G. Si pour tout $i \in \{1, .., k\}$, $E(U_i)$ est un couplage parfait de $G[U_i]$, alors $\mathcal{P}$ est b_t-maximale.*

Preuve. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ une partition domatique totale de G telle que pour tout $i \in \{1, 2, .., k\}$, $E(U_i)$ est un couplage parfait de $G[U_i]$. Soit $v_i u_i$ une arête quelconque de U_i. Dans ce cas, on ne peut pas transférer v_i ou u_i vers une nouvelle classe. En effet, si exactement l'un des deux sommet v_i ou u_i, disons v_i est transféré vers une la nouvelle classe, alors u_i serait isolé dans U_i. Maintenant si les deux sommets sont transférés vers une la nouvelle classe, alors v_i et u_i seront non dominé par U_i. Dans les deux cas, on a une contradiction. □

5.1.2 Le nombre b-domatique total de classes simples

La remarque suivante est triviale.

Remarque 5.17. *Si $\delta(G) = 1$, alors $\{V\}$ est l'unique partition domatique totale de G. D'où*

$$ad_t(G) = bd_t(G) = d_t(G) = 1.$$

Pour cette raison, dans la suite de cette partie, on considère que les graphes de degré minimum $\delta(G) \geq 2$.

Il est à souligner que toute partition domatique totale est une partition domatique b_t-maximale et toute partition domatique b_t-maximale est une partition domatique a_t-maximale. Ainsi, vu que chaque sommet est non isolé dans sa classe, alors le résultat suivant est immédiat:

Proposition 5.18. *Tout graphe G de dégré minimum $\delta(G) \geq 2$ satisfait:*

$$1 \leq ad_t(G) \leq bd_t(G) \leq d_t(G) \leq \delta(G).$$

Remarque 5.19. *Il existe des graphes pour lesquels $\delta(G) \geq 2$, mais $d_t(G) = 1$.*

Par exemple, pour le cycle C_3, $\delta(G) = 2$ mais $d_t(G) = 1$.

D'après la Proposition 5.18, on en déduit, le résultat suivant:

Proposition 5.20. *Tout graphe G satisfait:*

$$bd_t(G) \leq \min\left\{\frac{n}{\gamma_t(G)}, \delta(G)\right\},$$

Puisque $\gamma_t(G) \geq 2$, alors on a le résultat suivant

Corollaire 5.21. *Tout graphe G satisfait*

$$bd_t(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Vu que les extrémités de toute arête de K_n, forment un dominant total minimal de K_n, alors Si chaque arête du graphe est un dominant total de K_n, alors toute classe d'une partition domatique total contient une seule arête.

Corollaire 5.22. *Le graphe K_n satisait*

$$bd_t(K_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Proposition 5.23. *Pour tout cycle C_n d'ordre n, on a*

$$bd_t(C_n) = \begin{cases} 2 & si\ n \equiv 0\,[4]\,, \\ 1 & sinon. \end{cases}$$

Preuve. Soit $V(C_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. D'après la Proposition 5.18, $bd_t(C_n) \leq 2$. Montrons d'abord que si n est multiple de 4, alors $bd_t(C_n) = 2$. Supposons au contraire que $bd_t(C_n) = 1$. Donc $V(C_n)$ est une partition domatique b$_t$-maximale de C_n. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2\}$ une partition de C_n construite comme suit. $U_1 = \{v_1, v_2, v_5, v_6, ..., v_{n-3}, v_{n-2}\}$ et $U_2 = V(C_n) \diagdown U_1$. Par une simple vérification, on peut constater que U_i $(i = 1, 2)$ est un ensemble dominant total de G, contradiction. D'où, $bd_t(C_n) = 2$.

Montrons maintenant que si n n'est pas multiple de 4, alors $bd_t(C_n) = 1$. Supposons au contraire que $bd_t(C_n) = 2$. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2\}$ une partition domatique b$_t$-maximale de G. Le sous graphe engendré par U_i $(i = 1, 2)$ est sans P_3 car s'il existe une chaîne induite $P_3 = v_1v_2v_3$ dans U_1, alors v_2 n'aura pas de voisins dans U_2 car le degré de v_2 est égal à 2. Par conséquent v_2 ne sera pas dominé par U_2. De ce fait, pour $i = 1, 2$, $G[U_i]$ est l'union de $t_i \geq 2$ copies de P_2. Vu que C_n est un graphe 2-régulier, alors $t_1 = t_2$. Ceci implique que $t_1 + t_2$ est pair et par suit $n = 2(t_1 + t_2)$ est un multiple de 4, contradiction. □

Théorème 5.24. *Soit $K_{p,q}$ un graphe biparti complet avec $2 \leq p \leq q$. Alors*

$$bd_t(K_{p,q}) = p.$$

Preuve. Posons $V(K_{p,q}) = A \cup B$ où $A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ et $B = \{b_1, b_2, ..., b_q\}$. Il est clair que toute ensemble dominant total D de G intersecte, A et B car sinon D contient des sommets isolés. Par conséquent, dans toute partition domatique totale de $K_{p,q}$, chaque classe de cette partition contient au moins un sommet de A et au moins un sommet de B. Considérons une partition domatique totale $\mathcal{P}$ définie comme suit.

$$\mathcal{P} = \{\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, ..., \{a_{p-1}, b_{p-1}\}, \{a_p, b_p, b_{p+1}, ..., b_q\}\}.$$

Vu que chaque classe $\{a_i, b_i\}_{1\leq i\leq p-1}$ est un dominant minimal total de G et par la Proposition 5.15, la partition $\{a_p, b_p, b_{p+1}, ..., b_q\}$ est a$_t$-maximale de G, alors par la Proposition 5.15, $\mathcal{P}$ est b$_t$-maximale. D'où $bd_t(K_{p,q}) \leq p$.

Maintenant, nous montrons que $bd_t(K_{p,q}) = p$. Supposons au contraire que $bd_t(K_{p,q}) = k < p$ et considérons une partition domatique b$_t$-maximale $\mathcal{P} = \{U_1, U_2, ..., U_k\}$ de $K_{p,q}$ de cardinalité k. Alors, il existe une classe de $\mathcal{P}$, disons U_1 qui contient au moins deux sommets de A, disons a_1, a_2 car sinon $|A| < p$. Si la classe U_1 contient aussi deux sommets de B, disons b_1, b_2, alors $\{U_1 \setminus \{a_1, b_1\}, U_2, ..., U_k, \{a_1, b_1\}\}$ est une partition domatique totale de $K_{p,q}$, contradiction. Si la classe U_1 contient un seul sommet de B, disons b_1, alors par un argument similaire au précédent, il existe une classe différente de U_1, disons U_2 qui contient deux sommets de B, disons b_2 et b_3. Par ailleurs, U_2 contient au moins un sommet de A, disons a_3. Mais dans ce cas, la partition $\{U_1 \setminus \{a_1\}, U_2 \setminus \{b_2\}, ..., U_k, \{a_1, b_2\}\}$ serait une partition domatique totale de $K_{p,q}$, contradiction. □

Proposition 5.25. *Soit W_n une Roue d'ordre $n \geq 5$. Alors*

$$bd_t(W_n) = 2.$$

Preuve. Soit $v_0, v_1, ..., v_{n-1}$ les sommets de roue W_n où v_0 est le sommet universel de W_n. Nous montrons que $bd_t(W_n) \leq 2$. Posons $\mathcal{P} = \{U_1, U_2\}$ telle que $U_1 = \{v_0, v_1\}$ et $U_2 = V(W_n) \setminus U_1$. Il est facile de vérifier que U_1 est un dominant minimal total. Puisque U_2 possède un sommet pendant, alors d'après la Proposition 5.9, U_2 est un ensemble dominant a$_t$-maximale. D'où, par la Proposition 5.15, $\mathcal{P}$ est b$_t$-maximale. En conséquence, $bd_t(W_n) \leq 2$. Montrons maintenant que $bd_t(W_n) = 2$. Supposons au contraire que $bd_t(W_n) = 1$. Donc $V(W_n)$ est une partition domatique b$_t$-maximale de W_n. Soit $\pi = \{U_1, U_2\}$ une partition de W_n telle que U_1 possède deux sommets où l'un des deux est un sommet universel et $U_2 = V(W_n) - U_1$. Il est facile de vérifier que π est une partition domatique totale de W_n, contradiction. □

Proposition 5.26. *Soient H un graphe sans sommet isolé et G le prisme de H. Alors*

$$bd_t(G) = 2.$$

Preuve. Soient H_1 et H_2 deux copies disjointes de H et soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2\}$ une partition domatique de G telle que $U_1 = V(H_1)$ et $U_2 = V(H_2)$. Il est clair que $\mathcal{P}$ est une partition domatique totale de G. Chaque sommet de H_i, $i = 1, 2$ admet un voisin privé par rapport à U_i. Alors par le Théorème 1.1, chaque classe U_i est un dominant minimal de G et puisque G est sans sommets isolé, alors U_1 et U_2 sont des dominants minimaux totaux de G. D'après la Proposition 5.14, $\mathcal{P}$ est b$_t$-maximale de G, donc $bd_t(G) \leq 2$. D'autre part, comme $\mathcal{P}$ est une partition domatique totale de G, alors $\{V(G)\}$ n'est pas b$_t$-maximale de G. □

Proposition 5.27. *Soient H un graphe simple sans sommet isolé et G le prisme complémentaire de H. Alors*

$$bd_t(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } H \text{ admet un sommet universel,} \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Soit H un graphe simple sans sommet isolé et G un prisme complémentaire. Si H contient un sommet universel, alors son complémentaire $\overline{H}$ contient un sommet isolé. Par conséquent, G admet un sommet pendant. D'après la Remarque 5.19, $\{V(G)\}$ est l'unique partition b_t-maximale de G. Par conséquence, $bd_t(G) = 1$.

Supposons maintenant que H est sans sommet universel et considérons la partition $\mathcal{P} = \{U_1, U_2\}$ définie comme suit. $U_1 = V(H)$ et $U_2 = V(\overline{H})$. Vu que pour $i = 1, 2$, chaque sommet de U_i admet un voisin privé par rapport à U_i. Alors par le Théorème 1.1, chaque classe U_i est un dominant minimal de G et puisque G est sans sommets isolés, alors U_1 et U_2 sont des dominants minimaux totaux de G. En utililsant la Proposition 5.14, on constate que $\mathcal{P}$ est b_t-maximale de G. D'où $bd_t(G) \leq 2$. D'autre part, d'après 5.38, on trouve $bd_t(G) = 2$ □

5.2 Partition domatique couplée b-maximale

Dans cette partie, nous allons introduire et étudier le nombre b-domatique couplé d'un graphe. A noter que ce paramètre peut ne pas exister pour certaines classes de graphes.

5.2.1 Propriétés des partitions domatiques couplées b-maximale

Définition 5.28. *Une partition domatique couplée $\mathcal{P}$ est dite b_{pr}-maximale si aucune partition domatique couplée $\mathcal{P}'$ de cardinalité plus grande que $\mathcal{P}$ ne peut être obtenue à partir de $\mathcal{P}$ en regroupant des sous-ensembles de certaines classes de $\mathcal{P}$ pour former une nouvelle classe (un autre ensemble dominant couplé).*

Définition 5.29. *La cardinalité minimale d'une partition domatique couplée b_{pr}-maximale de G est appelée le nombre b-domatique couplé et on le note par $bd_{pr}(G)$.*

Remarque 5.30. *Si G admet un couplage parfait et $\delta(G) = 1$, alors*

$$bd_{pr}(G) = d_{pr}(G) = 1.$$

Remarque 5.31. *Soit G un graphe d'ordre n.*

- *s'il existe une partition domatique couplée b_{pr}-maximale de G, alors n est pair.*

- *si n est un pair, alors $bd_{pr}(G)$ n'existe pas (voir la Figure 5.4).*

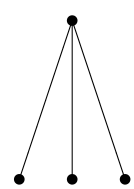


FIGURE 5.4. Exemple d'une étoile $K_{1,3}$

Il est clair que toute partition domatique couplée optimale est une partition domatique couplée b_{pr}-maximale et toute partition domatique couplée b_{pr}-maximale est une partition domatique couplée a_{pr}-maximale. Alors le résultat suivant est immédiat.

Proposition 5.32. *Soit G un graphe de degré minimum $\delta(G) \geq 1$. Alors*

$$1 \leq ad_{pr}(G) \leq bd_{pr}(G) \leq d_{pr}(G) \leq \delta(G).$$

D'après la Proposition 5.32 et le Théorème 2.33, on a l'inégalité suivante:

Corollaire 5.33. *Tout graphe G satisfait*

$$bd_{pr}(G) \leq \min\left\{\frac{n}{\gamma_{pr}(G)}, \delta(G)\right\}.$$

Ainsi, vu que $\gamma_t(G) \geq 2$, alors on a le résultat corollaire suivant:

Corollaire 5.34. *Tout graphe G satisfait:*

$$bd_{pr}(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Proposition 5.35. *Si chaque arête du graphe est un dominant couplé de G, alors toute classe d'une partition domatique couplé b_{pr}-maximale contient une seule arête.*

Proposition 5.36. *Toute partition domatique couplée $\mathcal{P} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ de G dont chaque classe U_i est un ensemble dominant minimal couplé de G, est b_{pr}-maximale.*

Preuve. Etant donné que chaque classe est un ensemble dominant minimal couplé de G, alors en posant $\pi_i = U_i$ pour chaque i, $V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \pi_i$ serait un ensemble non dominant couplé de G. □

Proposition 5.37. *S'il existe une partition domatique couplée b_{pr}-maximale de G, alors G possède un nombre pair de sommets.*

Preuve. Soit $\mathcal{P}$ une partition domatique couplée b$_{pr}$-maximale de G. Alors chaque classe U de $\mathcal{P}$ possède un couplage parfait et par suite le nombre de sommets de $G[U]$ est pair, ceci implique que l'ordre de G est pair. □

5.2.2 Le nombre b-domatique couplé de classes simples

Proposition 5.38. *Si G possède une partition domatique couplée b_{pr}-maximale de cardinalité 2, alors*

$$bd_{pr}(G) = 2.$$

Proposition 5.39. *Soit P_n une chaîne d'ordre n pair. Alors*

$$bd_{pr}(P_n) = 1.$$

Preuve. Soit P_n une chaîne d'ordre n pair. Puisque P_n possède un couplage parfait et $\delta\,(P_n) = 1$, alors d'après la Proposition 5.32, $bd_{pr}(P_n) = 1$. □

Proposition 5.40. *Soit K_n un graphe complet d'ordre n pair. Alors*

$$bd_{pr}(K_n) = \frac{n}{2}.$$

Preuve. Vu que $\gamma_{pr}(K_n) = 2$, alors d'après le Corollaire 5.33, $bd_{pr}(K_n) \leq \frac{n}{2}$. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ une partition domatique b$_{pr}$-maximale de K_n de cardinalité k. Notons que chaque paire de sommet adjacent de K_n est un dominant couplé de K_n. De ce fait, chaque classe U_i contient exactement une seule arête d'après la Proposition 5.35. D'où $k \geq \frac{n}{2}$, et par conséquent $bd_{pr}(K_n) = \frac{n}{2}$. $\square$

Proposition 5.41. *Soit $K_{n,n}$ un graphe biparti complet. Alors*

$$bd_{pr}(K_{n,n}) = n.$$

Preuve. Soit $K_{n,n}$ un graphe biparti complet de bipartition $\{U_1, U_2\}$ tels que $U_1 = \{v_1, ..., v_n\}$ et $U_2 = \{u_1, ..., u_n\}$. Comme $\delta(K_{n,n}) = n$, alors d'après la Proposition 5.32, $bd_{pr}(K_{n,n}) \leq n$. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ une partition domatique b$_{pr}$-maximale de $K_{n,n}$ de cardinalité k. Il est à souligner que chaque arête de $K_{n,n}$ est un dominant couplée de $K_{n,n}$. Ainsi, chaque classe U_i contient exactement une seule arête d'après la Proposition 5.35. D'où $k \geq n$. $\square$

Proposition 5.42. *Soit C_n un cycle d'ordre n pair. Alors*

$$bd_{pr}(C_n) = \begin{cases} 2 & si\ n \equiv 0\,[4]\,, \\ 1 & sinon. \end{cases}$$

Preuve. Soit $v_1, v_2, \ldots, v_n$ les sommets de C_n. D'après la Proposition 5.32, $bd_{pr}(C_n) \leq 2$. Supposons que $bd_{pr}(C_n) = 2$, et soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2\}$ une partition domatique b$_{pr}$-maximale de C_n. Comme C_n est un graphe 2-régulier, alors chaque classe U_i contient un P_2 comme sous-graphe induit, et le nombre de P_2 dans U_1 et le même dans U_2. Ceci donne $n = 4k$ qui est un multiple de 4. Si n ne divise pas 4, alors $|U_1| < |U_2|$ (ou $|U_1| < |U_2|$) et $\delta\,(C_n) = 2$. Donc $\mathcal{P}$ n'est pas une partition domatique, contradiction. D'où, $bd_{pr}(C_n) = 1$. $\square$

Proposition 5.43. *Soit C_n un cycle d'ordre n pair. Alors*

$$bd_{pr}(M(C_n)) = 2.$$

Preuve. Soit $G = M(C_n)$ le graphe milieu du cycle C_n. Supposons que $V\,(C_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ et $E\,(C_n) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ avec u_j adjacent à v_j et v_{j+1}, $1 \leq j \leq n-1$ et u_n adjacent à v_n et v_1. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2\}$ une partition domatique couplée de G où $U_1 = \{v_i, u_i : i \equiv 0(\text{mod}\,2)\}$ et $U_2 = \{v_i, u_i : i \equiv 1(\text{mod}\,2)\}$. Chaque U_i, $i = 1, 2$ est un dominant minimal couplé de G. Alors $bd_{pr}(M(C_n)) = 2$ par la proposition 5.38. $\square$

Proposition 5.44. *Soit W_n la roue d'ordre n pair. Alors*

$$bd_{pr}(W_n) = 2.$$

Preuve. Soit W_n une roue d'ordre n pair avec $C_{n-1} = \{v_1, ..., v_{n-1}\}$ et v_0 un sommet universel. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2\}$ une partition domatique couplée telle que $U_1 = \{v_0, v_1\}$ et $U_2 = \{v_2, ..., v_{n-1}\}$. Il est facile de vérifier que chaque classe U_i $(i = 1, 2)$ est un dominant minimal couplé de W_n. Par conséquent, d'après la proposition 5.38, $bd_{pr}(W_n) = 2$. $\square$

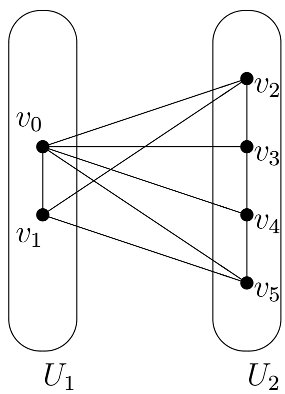


FIGURE 5.5. Partition domatique couplée b-maximale de W_6.

Proposition 5.45. *Si G admet un couplage parfait, alors*

$$bd_{pr}(G \square K_2) = 2.$$

Preuve. Soient G_1 et G_2 deux copies de $G \square K_2$. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2\}$ une partition domatique couplée de $G \square K_2$ telle que $U_1 = V(G_1)$ et $U_2 = V(G_2)$. Il n'est pas difficile de voir que chaque sommet de G_1(resp. G_2) admet un seul voisin dans G_2(resp. G_1). De ce fait, U_1 et U_2 sont des dominants minimaux couplés de $G \square K_2$. Par conséquent, d'après la Proposition 5.38, $\mathcal{P}$ est b_{pr}-maximale de $G \square K_2$. $\square$

Théorème 5.46. *Soit K_n un graphe complet d'ordre n. Alors*

$$bd_{pr}(K_n \square K_2) = \begin{cases} 2 & \textit{si } n \textit{ est pair,} \\ \frac{n+1}{2} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Posons $G = K_n$. Soient G_1 et G_2 les deux copies de G avec $V(G_1) = \{v_1, ..., v_n\}$ et $V(G_2) = \{u_1, ..., u_n\}$. Si n pair, alors pour $i = 1, 2$, G_i admet un couplage parfait. La Proposition 5.45 donne $bd_{pr}(G) = 2$. Si n est impair, alors G_i $(i = 1, 2)$ ne possède pas de couplage parfait, tandis que $G\Box K_2$ admet un couplage parfait. Observons que pour $i \in \{1, ..., n\}$, l'ensemble $\{v_i, u_i\}$ est un dominant couplé minimal de G. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, ..., U_{\frac{n+1}{2}}\}$ une partition domatique couplée de $G\Box K_2$ de cardinalité $\frac{n+1}{2}$ définie de la façon suivante.

$$U_{\frac{n+1}{2}} = \{v_n, u_n\}, U_{\frac{n-1}{2}} = \{v_{n-2}, v_{n-1}, u_1, u_2\}$$

$$\text{et } U_i = \{v_{2i-1}, v_{2i}, u_{2i+1}, u_{2i+2}\}, i \in \{1, ..., \frac{n-3}{2}\}.$$

La partition $\mathcal{P}$ est b$_{pr}$-maximale car chacune des classe $U_{\frac{n-1}{2}}$ et $U_i, i \in \{1, ..., \frac{n-3}{2}\}$ contiennent deux arêtes indépendentes et la classe $U_{\frac{n+1}{2}} = \{v_n, u_n\}$ est dominante couplée minimale de $G\Box K_2$. D'où $bd_{pr}(G) \leq \frac{n+1}{2}$. Supposons que $bd_{pr}(G\Box K_2) = k < \frac{n+1}{2}$, et considérons une partition domatique b$_{pr}$-maximale $\mathcal{P} = \{U_1, ..., U_k\}$. Une arête croisée est une arête $v_i u_i$ ayant ses deux extrémités dans deux copies différentes, et une arête parallèle est une arête non croisée. Etant donné que n est impair et que pour $i \in \{1, ..., k\}$, $G[U_i]$ possède un couplage parfait, alors il existe une classe U_l, pour un certain $l \in \{1, ..., k\}$ telle que $G[U_l]$ possède une arête croisée e_l. Sans perte de généralité, posons $l = 1$ et $e_1 = v_1 u_1$.

Fait 1. *e_1 est la seule arête croisée de $G[U_1]$.*

Si $G[U_1]$ possède une autre arête croisée $e_2 = v_2 u_2$, alors vu que $\{v_1, u_1\}$ et $\{v_2, u_2\}$ sont des dominants couplés minimaux de G, $\mathcal{P} = \{U_1 \backslash \{v_2, u_2\}, , ..., U_k, \{v_2, u_2\}\}$ est une partition domatique couplée de cardinalité $k + 1$, contradiction. Ceci termine la preuve du **Fait 1.**

En conséquence, pour $i \in \{2, ..., k\}, G[U_i]$ possède au plus une arête croisée.

Fait 2. *Tous les sommets de $U_1 \diagdown \{v_1, u_1\}$ appartiennent à $V(G_1)$* ou *$V(G_2)$.*

Si $G[U_1]$ contient une seule arête croisée, alors toutes autres arêtes de $G[U_1]$ sont parallèles. Supposons au contraire que pour $i = 1, 2$, $(U_1 \diagdown \{v_1, u_1\}) \cap V(G_i) \neq \emptyset$. Alors $G[U_1]$ contient au moins deux arêtes parallèles, $v_s v_t$ et $u_p u_q$ telles que $s, t, p, q \neq 1$. Dans ce cas, $\mathcal{P} = \{U_1 \diagdown \{v_1, u_1\}, , ..., U_k, \{v_1, u_1\}\}$ est une partition domatique couplée de cardinalité $k + 1$ car $\{v_s, v_t, u_q u_p\}$ est un dominant couplé de G, contradiction. Ceci termine la preuve du **Fait 2.**

Par conséquence et sans perte de généralité, supposons que $U_1 \setminus \{v_1, u_1\} \subset V(G_1)$ et $v_3v_4 \in U_1$

Fait 3. Pour $i \neq 1$, toutes les arêtes de $G[U_1]$ sont parallèles.

Supposons au contraire qu'il existe aussi une autre classe U_2 de $\mathcal{P}$ qui contient une arête croisée $e_2 = v_2u_2$. D'après le **Fait 2**, $(U_2 \setminus \{v_2, u_2\})$ contient uniquement les sommets de $V(G_1)$ ou $V(G_2)$ mais pas les deux à la fois. Si $U_2 \setminus \{v_2, u_2\} \subset V(G_2)$, alors $\mathcal{P} = \{\{v_1, u_1\}, \{v_2, u_2\}, ..., U_k, (U_1 \cup U_2 \setminus \{v_2, u_2\})\}$ est partition domatique couplée de cardinalité $k+1$, contradiction. Si pour toute classe U_i contenant une arête croissée v_iu_i, on a $U_i \setminus \{v_i, u_i\} \subset V(G_1)$, alors il existe forcément une classe U_r $(r \neq i)$ qui ne contient aucune arête croisée telle que $G[U_r]$ possède au moins deux arêtes parallèles u_su_t et u_pu_q de $E(G_2)$ et au moins une arête parallèle v_fv_g de $E(G_1)$. Dans ce cas, $\mathcal{P} = \{U_1 \setminus \{v_1, u_1\}, U_2, ..., U_i \setminus \{u_s, u_t\}, ..., U_k, \{v_1, u_1, u_s, u_t\}\}$ est une partition domatique couplée de cardinalité $k+1$, contradiction. Ceci termine la preuve du **Fait 3.**

Par conséquence, U_1 est la seule classe qui contient une arête croisée. Ceci implique qu'il existe une classe U_r $(r \neq 1)$ contient au moins deux arêtes parallèles u_su_t et u_pu_q. Mais, $\mathcal{P} = \{U_1 \setminus \{v_1, u_1\}, ..., U_r \setminus \{u_s, u_t\}, ..., U_k, \{v_1, u_1, u_s, u_t\}\}$ est domatique couplée de cardinalité $k+1$, contradiction.

Ceci termine la preuve du Théorème. $\square$

Désignons par $K_4 \square K_2$ et $K_5 \square K_2$ des graphes de prisme. D'après le Théorème 5.46, $b(K_4 \square K_2) = 2$ et $bd(K_5 \square K_2) = \frac{5+1}{2} = 3$. La Figure 5.6 présente deux partitions domatiques couplées b-maximales de $K_4 \square K_2$ et $K_5 \square K_2$.

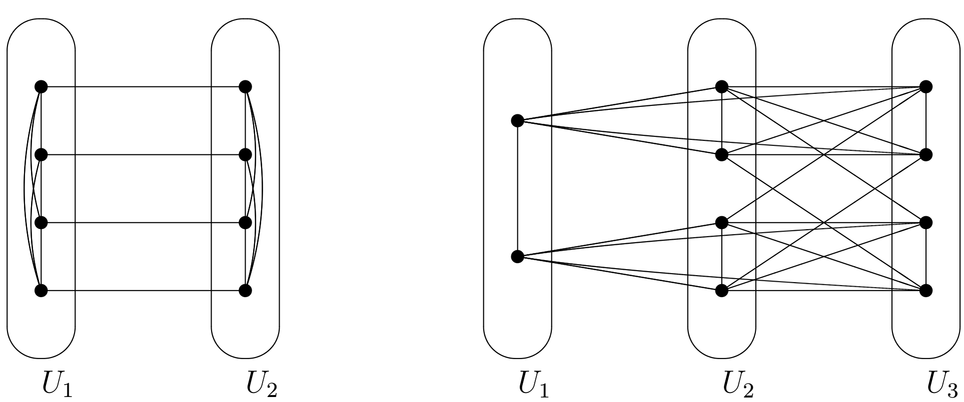


FIGURE 5.6. Deux partitions domatiques couplés b-maximales de $K_4 \square K_2$ et $K_5 \square K_2$.

Proposition 5.47. *Si G admet un couplage parfait, alors*

$$bd_{pr}(G\Box K_n) \leq n.$$

Preuve. Soit G un graphe d'ordre m tel que G admet un couplage parfait et K_n un graphe complet, alors $G\Box K_n$ contient n copies de G et admet un couplage parfait. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, ..., U_n\}$ une partition domatique couplé telle que chaque classe U_i, $i = 1, ..., n$ contient une copie de graphe G avec tous sommets dans chaque classe U_i, $i = 1, ..., n$ admet un seul voisin dans chaque classes différentes. Supposons que, $\mathcal{P}$ n'est pas b$_{pr}$-maximale c'est à dire il existe $\mathcal{P}' = \{U_1 \setminus U_1', ..., U_n \setminus U_n', U_1' \cup ... \cup U_n'\}$ une partition domatique couplé. Soit $\mathcal{A} = \{U_1' \cup ... \cup U_n'\} \neq \emptyset$ c'est à dire $\mathcal{A}$ contient au moins deux sommets de même classe U_i'. Donc les voisins de ses sommets dans les n copies ne domine pas la classe $U_i \setminus U_i'$, contradiction. D'où, $bd_{pr}(G \boxdot K_n) \leq n$. $\Box$

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

A travers cette thèse, divers problèmes d'aspect théoriques liés au nombre b-domatique ont été traités. Notre travail a été motivé par le fait que peu de travaux sont réalisés sur ce sujet relativement à d'autres paramètres de nombre domatique et aussi par le fait des nombreuses questions laissées ouvertes, principalement, dans l'article de Favaron [27]. Les résultats obtenus sont nombreux et variés (bornes, inégalités, relations, caractérisations).

Dans cette thèse, on a formulé et prouvé une condition suffisante pour qu'une partition d'un graphe donnée soit b-maximale, cependant, nous avons montré en plus que l'inverse n'est pas vrai.

On a également présenté une famille infini de classes de graphes ayant un nombre b-domatique égal à 2 et $\delta(G) + 1$. En particulier, nous avons déterminé le nombre b-domatique du bloc graphes et du cactus dans le cas où chaque bloc possède au moins un sommet non-d'articulation pour G (c'est-à-dire, $l \geq 1$).

Nous avons caractérisé par la suite les graphes connexes G d'ordre n dont $bd(G) \in \{n-1, n-2, n-3\}$, $bd(G) + bd(\overline{G}) \leq n+1$ et $bd(G) + bd(\overline{G}) \in \{n+1, n\}$ ainsi que les graphes G dont $bd(G) = bd(\overline{G}) = n/2$.

Nous avons introduit quelques paramètres du nombre b-domatique dont les résultats obtenus semblent intéressants et que cette notion mérite d'être étudier plus profondement.

Les travaux réalisés dans cette thèse ouvrent plusieurs perspectives de travaux futurs tels que:

1. La recherche d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partition domatique P soit b-maximal.

2. La recherche du nombre $bd(G)$ pour les cactus et blocs graphes qui contiennent au moins un cycle dont tous les sommets sont d'articulations pour G.

3. La recherche des bornes sur $bd(G)$ en fonction d'autres paramètres de G, valables pour tous les graphes ou dans certaines classes de graphes.

4. La recherche du nombre b-domatique pour les produits de graphes, par exemple le joint, le produit cartésien et le produit forte des graphes.

5. La caractérisation des graphes parfaits b-domatique, c'est à dire les graphes pour lesquels $bd(H) = d(H)$ pour tout sous-graphe induit H de G.

6. Détermination de leur complexité de $bd(G)$.

Références

[1] M. Alkhateeb and A. Kohl, *Upper bounds on the b-chromatic number and results for restricted graph classes*, Discuss. Math. Graph Theory 31 (2011) 709–735. doi:10.7151/dmgt.1575.

[2] S. Arumugam and K. Raja Chandrasekar, *Minimal dominating sets in maximum domatic partitions*, Australas. J. Combin. 52 (2012) 281–292.

[3] X. Baogen, E. J. Cockayne, T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, Z. Shangchao, *Extremal graphs for inequalies involving domination parameters.* Discrete Mathematics 216,1-10(2000).

[4] M. Behzad, *A criterion for the planarity of the total graph of a graph.* Proc. Camb.Philos. Soc. 63:679-681;1967.

[5] **M. Benatallah**, N. Ikhlef Eschouf, *b-Domatic number of graph products.* ROADEF2016, 10 au 12 février 2016. à Compiègne, (France).

[6] **M. Benatallah**, N. Ikhlef Eschouf and M. Mihoubi, *On the b-domatic number of graphs.* Discus. Math. Graph Theory (2018). doi: 10.7151/dmgt.2079

[7] **M. Benatallah**, M. Chellali and N. Ikhlef Eschouf, *Some new results on the b-domatic number of graphs.* Submitted. Electronic Journal of Graph Theory and Applications.

[8] **M. Benatallah**, N. Ikhlef Eschouf and M. Mihoubi, *On the b-domatic partition of some graphs.* ROADEF2017, 22 au 24 février 2017 à Metz, (France).

[9] **M. Benatallah**, N. Ikhlef Eschouf and M. Mihoubi, *The b-domatic number of join and corona graphs.* COSI'2017, 14 au 16 Mai 2017, Bouira (Algérie).

[10] C. Berge, *Graphs.* North Holland, 1985.

[11] C. Berge, *Les problémes de coloration en théorie des graphes*. Publ.Inst. Statist. Univ. Paris 9, (1960) 123-160.

[12] K. S. Booth et J. H. Johnson, *Dominating sets in chordal graphs*. SIAM J. Comput. 11(1982) 191-199.

[13] M. Boutoumi, N. Taibi and N. Ikhlef Eschouf and **M. Benatallah**, *Contribution à l'étude des partitions b-domatique et b-domatique totale dans les graphes*. Mémoire de Master, Université Dr.Yahia Farès de Médéa, Juin 2016.

[14] A. Brandstädt, VB. Le , JP. Spinrad, *Graph Classes: A Survey*. Philadelphia: SIAM, 1999.

[15] S. Cabello and M. Jakovac, *On the b-chromatic number of regular graphs*, Discrete Appl. Math. 159 (2011) 1303–1310. doi:10.1016/j.dam.2011.04.028

[16] G. J. Chang, *The domatic number problem*. Discrete Math. 125 (1994) 115–122.

[17] G. Chartrand et P. zhang, *Introduction of graph theory*. Mc Graw Hill, New York (2004).

[18] G. Chartrand and J. Mitchem, Graphical theorems of the Nordhaus-Gaddum class, In: Recent Trends un Graph Theory, Lecteur Notes in Math. 186, Springer-Verlag Berlin 55-61, (1971).

[19] E. J. Cockayne, R.M. Dawes et S.T. Hedetniemi, *Total domination in graphs*, Networks 10 (1980), 211–219.

[20] E. J. Cockayne and S.T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination in graphs*, Networks 7 (1977) 247–261.

[21] E. J. Cockayne, and S.T. Hedetniemi, *Disjoint independent dominating sets in graphs*, Discrete Math. 15 (1976) 213–222. doi:10.1016/0012-365X(76)90026-1

[22] E. J. Cockayne and S.T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination in graphs*, Networks 7 (1977) 247–261. doi:10.1002/net.3230070305

[23] E. J. Cockayne, *Domination in undirected graphs—a survey, in: Theory and Applications of Graphs*, Lectures Notes in Math. 642, (Springer, Berlin, 1978) 141–147. doi:10.1007/BFb0070371.

[24] E. J. Cockayne, R. M. Dawes et S. T. Hedetniemi, *Total domination in graphs.* Networks, 10 (1980).

[25] S. Corteel, M. Valencia-Pabon and J.-C. Vera, *On approximating the b-chromatic number*, Discrete Appl. Math. 146 (2005) 106–110. doi:10.1016/j.dam.2004.09.006

[26] J. E. Dunbar, T. W. Haynes and M. A. Henning, *Nordhaus-Gaddum type results for the domatic number of a graph.* In Combinatorics, Graph Theory, and Algorithms, vols. I, II, New Issues Press, Kalamazoo (1999) 303–312.

[27] O. Favaron, *The b-domatic number of a graph*, Discus. Math. Graph Theory 33 (2013) 747–757.

[28] G. H. Fricke, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, A. A. McRae, C.K. Wallis, M. S. Jacobson, H. W. Martin and W. D. Weakley, *Combinatorial problems on chessboards*, A briev survey, dans Graph Theory, Combinatorics and Applications: Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs, vol. 1, Y. Alavi and A. Schwenk, Eds., Wiley, (1995) 507-528.

[29] F. Jaeger and C. Payan, *relation du type Nordhaus-Gaddum pour le nombre d'absorption d'un graphe simple.* C. R. Acad. Sci. Paris, A, 274,728-730 (1972).

[30] C. F. Jaenisch, *Applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs*, Petrograde (1862).

[31] T. Hamada, I. Yoshimura: *Traversability and connectivity of the middle graph of agraph.* Discrete Math. 14 (1976) 247-256.

[32] F. Harary, S.T. Hedetniemi and G. Prins, *An interpolation theorem for graphical homomorphisms*, Port. Math. 26 (1967) 453–462.

[33] F. Harary, *Graph Theory.* Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[34] F. Harary and S.T. Hedetniemi, *The achromatic number of a graph*, J. Combin. Theory 8 (1970) 154–161. doi:10.1016/S0021-9800(70)80072-2

[35] F. Harary, T. W. Haynes. *Nordhaus-Gaddum inequalities for domination in graphs.* Discrete Math, 155, 1996.

[36] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.

[37] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, *Domination in Graphs: Advanced Topics*, Marcel Dekker, New York, 1998.

[38] T. W. Haynes, P. J. Slater. *Paired-domination and the paired-domatic number.* Congr. Nurner. 109 (1995), 65–72.

[39] T. W. Haynes et P. J. Slater, *Paired-domination in graphs*, Networks 32 (1998), 199–206.

[40] S. T. Hedetniemi and R. C. Laskar, *Introduction*, Discrete Mathematics 86 (1990) 3-9.

[41] M. A. Henning, *A survey of selected recent results on total domination in graphs.* Discrete Math, 309 (2009), 32-63.

[42] M. A. Henning et A. Yeo, *Hypergraphs with large tranversal number and with edge sizes at least three.* J. Graph Theory, 59 (2008), 326-348.

[43] C. T. Hoang, F. Maffray and M. Mechebbek, *A characterization of b-perfect graphs*, J. Graph Theory 71 (2012) 95–122. doi:10.1002/jgt.20635.

[44] W. Imrich et S. Klavzar, Product Graphs : *Structure and Recognition*, J. Wiley & Sons, New York, 2000.

[45] R. W. Irving and D. F. Manlove, *The b-chromatic number of a graph*, Discrete Appl. Math. 91 (1999) 127–141. doi:10.1016/S0166-218X(98)00146-2.

[46] J. Ivanco, *An interpolation theorem for partitions which are indivisible with respect to cohereditary properties*, J. Combin. Theory (B) 52 (1991) 97–101. doi:10.1016/0095-8956(91)90095-2.

[47] M. Kouider and M. Mahéo, *Some bounds for the b-chromatic number of a graph*, Discrete Math. 256 (2002) 267–277. doi:10.1016/S0012-365X(01)00469-1.

[48] J. Kratochv ́ıl, Zs. Tuza and M. Voigt, *On the b-chromatic number of graphs*, Lect. Notes Comput. Sci. 2573 (2002) 310–320. doi:10.1007/3-540-36379-3 27.

[49] R. Laskar and S. T. Hedetniemi, *Connected domination in graphs*. Technical Report NO. 414, Clemson Univ (1983).

[50] R. Laskar and K. Peters, *Domination and irredundance in graphs*. Technical Report 434, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ, (1983).

[51] R. Laskar, J. Pfaff, S. M. Hedetniemi and S. T. Hedetniemi, *On the algorithmic complexity of total domination*. SIAM J. Alg. Disc. Meth. Vol. 5, N^{o}3, september 1984.

[52] J. Lyle, N. Drake and R. Laskar, *Independent domatic partitioning or fall coloring of strongly chordal graphs*, Congr. Numer. 172 (2005) 149–159.

[53] D. F. Manlove, *Minimaximal and maximinimal optimization problems: A partial order-based approach*, Ph.D. Thesis, Tech. Rep. 27, Comp. Sci. Dept., Univ. Glasgow, Scotland, 1998.

[54] K. Monika. *Domatic number of graph products*. Journal of Mathematics and Applications. No 30, pp 71-81 (2008).

[55] O. Ore, *theory of graphs*, Amer. Math soc. Colloq. Publ. 38 (1962).

[56] J. Paulraj Joseph and S. Arumugam. *Domination and connectivity in graphs*. Internat. J. Management Systems, 8(3): 233-236, 1992.

[57] S. H. Poon, W. C. K. Yen and C. T. Ung, *Domatic Partition on Several Classes of Graphs*, Comb. Optim and Appl, V. 7402 of the series Lecture Notes in Computer Science, (2012) 245-256.

[58] D. Rautenbach, L. Volkmann, *The domatic number of block-cactus graphs*. Discrete Mathematics 187 (1998) 185-193.

[59] E. Sampathkumar and H. B. Walikar. *The connected domination number of a graph*. J. Math. Phys. Sci., 13:607-613,1979.

[60] B. Xu, E. J. Cockayne, T.W. Haynes, S. Hedetniemi and Z. Shangchao, *Extremal graphs for inequalities involving domination parameters, Discrete Mathematics* 216 (2000) 1-10.

[61] H. Zaitri, N. Ikhlef Eschouf et **M. Benatallah**, *Etude des partitions b-domatiques couplées et connexes dans les graphes*. Mémoire de Master, Université Dr.Yahia Farès de Médéa, Juin 2017.

[62] B. Zelinka, *Domatically critical graphs*, Czechoslovak Math. J. 30 (1980) 486–489.

[63] B. Zelinka, *Adomatic and idomatic numbers of graphs*, Math. Slovaca 33 (1983) 99–103.

[64] B. Zelinka, *Connected domatic numbers of graphs*, Math. Slovaca 36 (1986).

[65] B. Zelinka, *Some remarks on domatic numbers of graphs*. Časop. pěst. mat. 106 (1981) 373-375.

[66] B. Zelinka, *Total domatique number of degree of vertices of a graph*. Math. Slovaca, 1989.

[67] B. Zelinka, *Edge domatically full graphs*. Math. Slovaca, 34, No. 4, 359-365, 1990.