N d'ordre : 52/2018-C/ MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté de Mathématiques

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat 3 ème cycle (LMD)

En : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle et Mathématique Discrète

Par : RAHIM Asmaa

Sujet

Etude sur les nombres de Jacobi-Stirling

Soutenue publiquement le, lundi 02 juillet 2018, devant le jury composé de :

Mourad BOUDHAR	Prof.	USTHB	Président
Miloud MIHOUBI	Prof.	USTHB	Directeur de thèse
Hacène BELBACHIR	Prof.	USTHB	Examinateur
Abdellah DERBAL	Prof.	ENS-Kouba	Examinateur
Ahmed AIT MOKHTAR	MCA	ENS-Kouba	Examinateur
Mohamed Amine BOUTICHE	MCA	USTHB	Examinateur
Yamina SAIDI	MCB	ENSA	Invitée

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Je remercie en premier lieu ALLAH, pour la foi, la confiance en soi et la volonté dont il m'a doté.

Ma gratitude va en tout premier lieu vers mon directeur de thèse, Professeur MIHOUBI Miloud, qui m'a fait découvrir le monde de la recherche à travers des sujets originaux et intéressants. Je dois beaucoup à sa patience, au temps qu'il a pu me consacrer et aux conseils judicieux qu'il a su me procurer. Son encadrement sans faille m'aura permis de m'épanouir pleinement dans mes travaux et je l'en remercie mille fois.

Je remercie le Professeur BOUDHAR Mourad, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse.

C'est avec humilité que je tiens à remercier les honorables membres du Jury : Les Professeurs BELBACHIR Hacène, BOUTICHE Mohamed Amine, DERBAL Abdellah, AIT MOKHTAR Ahmed et Docteur SAIDI Yamina.

Je tiens à remercier plus personnellement mes parents, mes frères Ayoub et Mohamed Elarbi et mes soeurs Sara, Amira et Khalida et ma tante Nassima et bien sûr mes neveux pour le soutien et l'encouragement qu'ils m'ont apporté durant toutes mes années d'études, ainsi que tous ceux qui m'ont de prés ou de loin aidée.

Je remercie tous les équipes du Laboratoire RECITS, je pense en particulier à SAIDI

Yamina, TAHARBOUCHET Said, BENRABIA Imène, REGGANE Lilia et AMROUCHE Said. Je remercie aussi tous les enseignants, chercheurs et personnels de la faculté des mathématiques de l'U.S.T.H.B.

Je ne peux terminer mes remerciements sans citer mes amies qui représentent une force pour moi, je dois beaucoup et particulièrement à mes très chères HANECHE Houria et CHAKER Nesrine.

DÉDICACES

À mes parents, ma tante Nassima,

mes soeurs et mes frères.

RÉSUMÉ

Cette thèse s'inscrit en combinatoire énumérative et porte sur l'étude des nombres de Jacobi-Stirling. Nous présentons dans la première partie une étude combinatoire et analytique des nombres r-Jacobi-Stirling de seconde espèce en donnant leurs fonctions génératrices, des relations de récurrences, des interprétations combinatoires et autres.
Dans la seconde partie de la thèse, nous interprétons des suites de nombres généralisant les r-Jacobi-Stirling et les r-Stirling en introduisant la notion de partitions liées aux multi-ensemble. En fin, nous définissons les nombres étendus de Jacobi-Stirling de première espèce et nous donnons quelques propriétés.

Mots-Clés : Nombres r- Jacobi-Stirling, Nombres de partitions associés aux multi-ensembles, Nombres étendus de Jacobi-Stirling.

ABSTRACT

This thesis comes within the scope of enumerative combinatorics and studies the Jacobi-Stirling numbers. We present in the first part a combinatorial and analytic study of the r-Jacobi-Stirling numbers of the second kind by giving their generating functions, recurrence relations, combinatorial interpretations and others.
In the second part of the thesis, we interpret sequences of numbers generalizing r-Jacobi-Stirling and r -Stirling by introducing the notion of partitions related to multi-sets.
Finally, we define the extended Jacobi-Stirling numbers of the first kind and we give some properties.

Keywords : r-Jacobi-Stirling Numbers, Number of partitions associated with multi-sets, Extended Jacobi-Stirling Numbers.

LISTE DES TABLEAUX

NOTATIONS

$[n]$	l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
$\delta_{n,m}$	symbole de kronecker égal à 1 si $n = m$ et 0 sinon.
$(x)_n$	factorielle décroissante : $x(x-1)\ldots(x-n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $(x)_0 = 1$.
$x^{(n)}$	factorielle croissante : $x(x+1)\ldots(x+n-1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x^{(n)} = 1$.
$(x)_{k,z}$	représente $\prod_{i=0}^{k-1}(x - i(i+z))$ si $k \geq 1$ et $(x)_{0,z} = 1$.
$s(n,k)$	nombres de Stirling(non-signés) de première espèce.
$s_r(n,k)$	nombres $r-$Stirling (non-signés) de première espèce.
$S(n,k)$	nombres de Stirling de seconde espèce.
$S_r(n,k)$	nombres r-Stirling de seconde espèce.
$js(n,k;z)$	nombres de Jacobi-Stirling de première espèce.
$JS(n,k;z)$	nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce.
$JS_r(n,k;z)$	nombres r-Jacobi-Stirling de seconde espèce.
$[\pm n]$	l'ensemble $\{-1, +1, \ldots, -n, +n\}$.

INTRODUCTION

Cette thèse intitulée "Étude sur les nombres de Jacobi-Stirling" s'inscrit en combinatoire énumérative et concerne une famille de nombres ayant des propriétés intéressantes de dénombrement. Elle se situe dans la continuité de l'analyse combinatoire, née dès le XVIIe siècle avec les travaux de Pascal. Bien d'autres mathématiciens ont ensuite contribué à cette théorie, dont Newton, Leibniz, Bernoulli, Euler, André, Lucas, MacMahon, Stanley, etc.

La combinatoire énumérative consiste à donner des interprétations combinatoires à des suites d'entiers. Une telle interprétation peut servir à établir des relations de récurrences, des fonctions génératrices, des identités, etc.... Elle permet d'étudier le dénombrement des objets discrets qui peuvent être décrits par un nombre fini de règles.

Dans cette discipline, on trouve toujours des questions de type : quel est le nombre de façons d'interpréter combinatoirement une suite de nombres ? Quelles sont les différentes possibilités de partitionner un ensemble fini en sous-ensembles vérifiant une propriété donnée ? La réponse à ce genre de questions n'est pas toujours évidente.

Au cours des dernières décennies, différents travaux ont été réalisés en théorie des opérateurs différentiels où apparaissent naturellement des suites d'entiers, dont figurent les nombres de Jacobi-Stirling .

Ces nombres ont été introduits en 2002 [21], étudiés en 2007 [20] et ont attiré par la suite l'attention de plusieurs chercheurs, voir par exemple les références [33, 35, 49, 50].

La n-ième composée de l'opérateur différentiel d'une famille de polynômes orthogonaux génère une suite de nombres, nous citons par exemple les nombres de Stirling, Legendre-Stirling et Jacobi-Stirling.

Les systèmes de polynômes orthogonaux associés d'Hermite, Laguerre, Bessel et Jacobi (y compris les cas particuliers nommés Chebyshev, Legendre et Gegenbauer) sont les systèmes les plus étudiés et largement appliqués. Ces quatre familles de polynômes orthogonaux sont appelées collectivement les « polynômes orthogonaux classiques ».

En 1929, Bochner [7] a prouvé qu'il y a seulement quatre ensembles de polynômes orthogonaux distincts satisfaisant l'équation différentielle suivante

$$\rho_2 y'' + \rho_1 y' + \rho_0 y = \lambda y$$

avec $\rho_i, i = 0, 1, 2$ sont des fonctions à valeurs réelles et λ est un paramètre réel. Les seules familles de polynômes orthogonaux qui sont des fonctions propres d'un opérateur différentiel linéaire de second ordre sont les familles classiques.

Notre travail consiste à étudier les nombres de Jacobi-Stirling ainsi que quelques extensions de ces nombres. Cette étude consiste à élaborer de différentes propriétés de tels nombres.

Ce manuscrit comporte cinq chapitres :

Chapitre 1- Généralités

Nous présentons les notions de base utilisées dans cette thèse en rappelant des interprétations combinatoires, des fonctions génératrices, des propriétés et la log-concavité des nombres de Stirling et r-Stirling des deux espèces et des nombres de Jacobi-Stirling des deux espèces, comme nous précisons le concept de la log-concavité et certaines opérations sur les suites log-concaves.

Chapitre 2 -Nombres r-Jacobi-Stirling de seconde espèce

Les nombres r-Jacobi-Stirling de seconde espèce ont été interprétés combinatoirement par Gelineau [26]. Dans ce chapitre nous introduisons une nouvelle technique combinatoire pour étudier ces nombres en donnant des relations de récurrences, des expressions exactes et des identités combinatoires. Nous exprimons ainsi les nombres r-Jacobi-Stirling de seconde espèce en fonction des nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce, nous étudions leur log-concavité, et, nous définissons les nombres de Jacobi-Stirling généralisés en donnant une forme explicite et une relation de récurrence.

Chapitre 3- Interprétation combinatoire des nombres de Stirling généralisés

Nous utilisons la définition de la partition d'un multi-ensemble pour donner une interprétation combinatoire d'une classe des nombres de Stirling généralisés généralisant les nombres de Stirling [14], r-Stirling [9], Jacobi-Stirling [20], r-Jacobi-Stirling [26, Sec. 1.4] et p-Stirling de seconde espèce [58].

Chapitre 4 - Cas particuliers des nombres de Stirling généralisés

Nous donnons quelques nombres combinatoires connus, en appliquant une définition donnée dans le chapitre précédent et la fonction génératrice des nombres Stirling généralisés.

Chapitre 5 - Une extension des nombres de Jacobi-Stirling de première espèce

Nous terminons cette thèse par le cinquième chapitre, où l'objet est de donner une extension des nombres de Jacobi-Stirling de première espèce en introduisant une fonction dans le but de généraliser les nombres étendus de Legendre-Stirling de première espèce et motivés par le travail de Wen et al. [62], et en s'inspirant de la fonction donnée dans cet article, nous introduisons des nombres étendus de Jacobi-Stirling de première espèce.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS

1 Introduction

Nous commençons ce mémoire par une introduction aux polynômes orthogonaux classiques et aux opérateurs différentiels qui leurs associés permettant de faire apparaître les nombres de Stirling, les nombres r-Stirling et les nombres de Jacobi-Stirling. Nous citons ainsi pour ces nombres leurs fonctions génératrices, leurs relations de récurrences et aussi leurs principales propriétés.

2 Polynômes orthogonaux

Ce chapitre concerne essentiellement les liens entre les polynômes orthogonaux classiques et les opérateurs différentiels associés aux équations différentielles de Gegenbauer, Legendre, Laguerre et Hermite. Ces équations différentielles sont de la forme

$$M[y] := -(py')' + qy = \lambda wy \text{ sur }]a,b[\,, \tag{1.1}$$

où les coefficients p, q et w sont des fonctions à valeurs réelles sur un intervalle $]a, b[$ et λ est un paramètre réel.

On sait que les polynômes orthogonaux classiques sont les seuls polynômes orthogonaux qui peuvent être générés en tant que solutions d'équations différentielles du type (1.1) [24] .

Les opérateurs différentiels générés par (1.1) sont déterminés dans un cas dit *défini à droite*. Un tel opérateur différentiel T est défini dans un domaine $d(T) \subset L^2_w(]a,b[)$, où $L^2_w(]a,b[)$ l'espace des fonctions de carré integrable. L'opérateur différentiel T est défini, à partir de l'équation (1.1) par

$$Tf := w^{-1}M[f]\,,\ f \in d(T)\,.$$

Dans l'article d'Everitt en 1980 [22], si dans l'équation (1.1) la fonction w est non-négative sur $]a, b[$, alors ce problème est appelé *défini à droite* et est étudié dans l'espace des fonctions de carré intégrable $L^2_w(]a,b[)$, où

$$L^2_w(]a,b[) = \left\{ f :]a,b[\to \mathbb{C},\ \int_a^b w(x)\,|f(x)|^2\,dx < \infty \right\}.$$

Quelques notations

Etant donné un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, fini ou non et une fonction de poids $w(x)$ positive sur $[a,b]$. On définit le produit scalaire

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\,g(x)\,w(x)\,dx,$$

où les fonctions f et g sont dans $L_w^2(]a,b[)$ telles que (f,g) est fini et la fonction w, appelée la fonction de poids, est positive et mesurable au sens de Lebesgue avec $0<\int_a^b w(x)\,dx<\infty$. Plus généralement, le produit scalaire ci-dessus peut être défini par une intégrale de Stieltjes :

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\,g(x)\,d\alpha(x).$$

Quand $\alpha(x)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et on a $w(x)=\alpha'(x)$.

Remarque 1. *Un système de polynômes* $\{P_0(x),P_1(x),P_2(x),\ldots\}$ *est dit orthogonal par rapport à la fonction poids* $w(x)$ *dans l'intervalle* $[a,b]$ *si*

$$\int_a^b P_n(x)\,P_m(x)\,w(x)dx=0\ \ n\neq m \textit{ et } \ n,m=0,1,2,\ldots$$

.

La fonction de poids $w(x)$ *devrait être continue et positive sur* $[a,b]$ *de telle sorte que les moments*

$$M_n=\int_a^b x^n w(x)dx, n=0,1,\ldots,$$

existent.

On construit P_n *par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt[52, Th. 1.1.8], ces polynômes satisfont les conditions :*

a) $P_n(x)$ *est un polynôme de degré* n *dont le coefficient de* x^n *est positif.*

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, *le système* $\{P_0(x),P_1(x),P_2(x),\ldots,\}$ *est orthonormal c'est à dire*

$$\int_a^b P_n(x)\,P_m(x)\,d\alpha(x)=\delta_{n,m}, n,m=0,1,\ldots.$$

Un résultat de Lesky [31] sur les zéros des polynômes orthogonaux est donné par le théorème suivant :

Théorème 2. *[31] Les zéros des polynômes orthogonaux $\{P_n(x)\}$ associés à la distribution $d\alpha(x)$ sur $[a,b]$ sont réels, distincts et dans $]a,b[$.*

On a de plus le théorème suivant

Théorème 3. *[31] Les polynômes orthogonaux classiques sont les seuls polynômes solutions de l'équation différentielle de Sturm-Liouville*

$$P\left(x\right)y''\left(x\right)+Q\left(x\right)y'\left(x\right)+\left(T\left(x\right)-\lambda\right)y\left(x\right)=0,$$

où P, Q et T sont des fonctions fixées sur l'intervalle $]a,b[\subseteq\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Ce résultat a été conjecturé par Aczel [1] et prouvé par Feldman [24] et Freud [25] et dans la forme ci-dessus par Lesky [31].
Ce tableau résume les polynômes orthogonaux classiques en donnant l'intervalle d'orthogonalité et la fonction poids $w(x)$

Nom du polynômes	$\mathbf{p_n(x)}$	$\mathbf{w(x)}$	$]\mathbf{a},\mathbf{b}[$
Hermite	$H_n(x)$	e^{-x^2}	$]-\infty,\infty[$
Laguerre	$L_n^{(\alpha)}\left(x\right)$	$x^\alpha e^{-x}$	$]0,\infty[$
Jacobi	$P_n^{(\alpha,\beta)}\left(x\right)$	$\left(1-x\right)^\alpha\left(1+x\right)^\beta,\ \alpha>-1,\ \beta>-1$	$]-1,1[$
Legendre	P_n	1	$]-1,1[$

Les polynômes de Gegenbauer (ou Ultrasphérique) $C_n^v\left(x\right)$ est un cas particulier de polynômes de Jacobi en posant $\alpha=\beta=v-1/2$.

Certaines familles de polynômes orthogonaux revêtent une importance particulière puisqu'elles apparaissent dans de nombreuses applications, entre autres comme solutions d'équations différentielles ayant une signification physique par exemple l'équation de la chaleur, l'équation de Boltzmann non linéaire pour le modèle de sphère dure [30] etc.

2.1 Polynômes de Laguerre

L'expression différentielle de Laguerre est définie par :

$$l_{Lag}[y](x) := \frac{1}{x^{\alpha}e^{-x}}\left(-\left(x^{\alpha+1}e^{-x}y'(x)\right)' + kx^{\alpha}e^{-x}y(x)\right),\ x \in \left]0,\infty\right[,\ \alpha > -1.$$

L'équation différentielle de Laguerre est :

$$l_{Lag}[y](x) = \lambda y(x), \tag{1.2}$$

ou de manière équivalente

$$-xy''(x) + (x-1-\alpha)\,y'(x) + ky(x) = \lambda y(x),\ \ x \in \left]0,\infty\right[.$$

Une partie de l'importance de cette équation est que les polynômes de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ sont des fonctions propres de (1.2). Plus précisèment, $y = L_n^{(\alpha)}(x)$ est une solution de (1.2) quand $\lambda = n + k$. L'espace *défini à droite* pour cette expression différentielle est l'espace de Hilbert $L_{\alpha}^{2}(\left]0,\infty\right[) = L^{2}\left(\left(\left]0,\infty\right[\right); x^{\alpha}e^{-x}\right)$ muni du produit scalaire

$$(f,g) = \int_0^{\infty} f(x)\,\overline{g}(x)\,x^{\alpha}e^{-x}dx,\ \ f,g \in L_{\alpha}^{2}(\left]0,\infty\right[).$$

Les nombres de Stirling de seconde espèce apparaissent dans les compositions de $l_{Lag}[.]$ définis par

$$l_{Lag}^{(n)}[y] = l_{Lag}\left(l_{Lag}^{(n-1)}[y]\right)\ \text{ et }\ l_{Lag}^{(1)}[y] = l_{Lag}[y],$$

qui peuvent être mises sous la forme, pour chaque $n \in \mathbb{N}^{*}$,

$$l_{Lag}^{n}[y] = \frac{1}{x^{\alpha}e^{-x}}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\left(c_j(n,k)\,x^{\alpha+j}e^{-x}y^{(j)}(x)\right)^{(j)}$$

où $y^{(j)}$ est la j-ème dérivée de y,

$$c_0(n,k) = k^{n}, n \geq 1.$$

et pour $j \in \{1,\ldots,n\}$, on a

$$c_j(n,k) = \begin{cases} S(n,j)\ \text{ si } k = 0 \\ \sum\limits_{m=0}^{n-1}\binom{n}{m}S(n-m,j)\,k^{m} \text{ si } k > 0 \end{cases}$$

où les $S(n,j)\,, j=1,\ldots,n$, sont les nombres de Stirling de seconde espèce.
Nous donnons certaines propriétés, les fonctions génératrices, relation de récurrence de ces nombres dans la section 4. Du fait que

$$\sum_{n\geq 1} c_j(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{kt}}{j!}\left(e^t-1\right)^j,$$

il s'ensuit que :

$$c_j(n,k) = S_k(n+k, j+k)\,,\ \ j\geq 1,\ k\geq 1. \tag{1.3}$$

2.2 Polynômes de Jacobi

Pour $\alpha, \beta > -1$ deux paramètres réels fixés, l'expression différentielle classique de Jacobi de second ordre est donnée par

$$l_{(\alpha,\beta)}[y](x) = -\left(1-x^2\right)y''(x) + (\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)x)\,y'(x) + ky(x)$$

La solution de l'équation de Jacobi suivante

$$l_{(\alpha,\beta)}[y](x) = \lambda_n^{(\alpha,\beta)} y(x)\,,\ x\in\,]-1,1[\,,$$

avec

$$\lambda_n^{(\alpha,\beta)} = n(n+\alpha+\beta+1)+k, n\in\mathbb{N}$$

est $y = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, où $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ est le n-ième polynôme de Jacobi, qui est normalisé, $\left\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ forme un système orthonormé complet dans le cadre *défini à droite* avec

$$L^2\left(]-1,1[\,; w_{\alpha,\beta}(x)\right) := L^2_{\alpha,\beta}\left(]-1,1[\right)$$

muni du produit scalaire

$$(f,g)_{\alpha,\beta} = \int_{-1}^{1} f(t)\,\overline{g}(t)\,w_{\alpha,\beta}(t)\,dt,\ \ f,g\in L^2_{\alpha,\beta}\left(]-1,1[\right)$$

et des conditions initiales

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{\alpha+1}{n} \text{ et } P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n\binom{\beta+1}{n}. \tag{1.4}$$

La n-ième composée de l'expression différentielle de Jacobi donnée par cette récurrence

$$l_{(\alpha,\beta)}^{(n)}[y] = l_{(\alpha,\beta)}\left(l_{(\alpha,\beta)}^{(n-1)}[y]\right) \text{ et } l_{(\alpha,\beta)}^{(1)}[y] = l_{(\alpha,\beta)}[y],$$

et nous avons

$$l_{(\alpha,\beta)}^{(n)}[y](x) = \frac{1}{w_{(\alpha,\beta)}(x)} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left(c_j^{(\alpha,\beta)}(n,k)(1-x)^{\alpha+j}(1+x)^{\beta+j} y^{(j)}(x)\right)^{(j)}, n \geq 1$$

où $y^{(j)}$ est la j-ème dérivée de y,

$$c_0^{(\alpha,\beta)}(n,k) = k^n, n \geq 1$$

et

$$c_j^{(\alpha,\beta)}(n,k) = \begin{cases} JS(n,j;\alpha,\beta) \text{ si } k=0 \\ \sum_{s=0}^{n-j}\binom{n}{s} JS(n-s,j;\alpha,\beta)\, k^s \text{ si } k>0 \end{cases}$$

où $JS(n,j;\alpha,\beta)$ est donné par :

$$JS(n,j;\alpha,\beta) = \sum_{r=0}^{j} (-1)^{r+j} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+r+1)\Gamma(\alpha+\beta+2r+2)(r(r+\alpha+\beta+1))^n}{r!(j-r)!\Gamma(\alpha+\beta+2r+1)\Gamma(\alpha+\beta+j+r+2)},$$

où les coefficients $JS(n,j;\alpha,\beta)$ sont appelés les nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce. Nous donnons l'expression exacte, la relation de récurrence et la fonction génératrice de ces nombres dans la section 5.

2.3 Polynômes de Type Legendre

L'expression de type Legendre de quatrième ordre est définie comme suit :

$$l_{LT}[y](x) = \left(\left(1-x^2\right)^2 y''(x)\right)'' - \left(8+4A\left(1-x^2\right)y'(x)\right)' + ky(x), \quad x \in \left]-1,1\right[,$$

où A est une constante positive fixe et k est un paramètre fixe, non négatif. La plus ancienne occurrence de cette expression dans la littérature mathématique est attribuée à Krall [29] en 1938. En effet, il a montré que lorsque

$$\lambda_n = n(n+1)\left(n^2+n-2+4A\right) + k, \quad n \in \mathbb{N},$$

l'équation de Type Legendre

$$l_{LT}[y](x) = \lambda_n y(x)$$

admet un polynôme, noté $y = P_{n,A}(x)$, comme sotulion réelle polynômiale pour chaque nombre entier non négatif n. Les polynômes $(P_{n,A}(x))$ sont appelés les polynômes de type Legendre qui forment un ensemble orthogonal complet dans l'espace de Hilbert *défini à droite*

$$L^2_\mu([-1,1]) = \left\{ f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C} | f \text{ est Lebesgue mesurable et } \|f\|_\mu^{\frac{1}{2}} = \int_{[-1,1]} |f|^2 d\mu < \infty \right\},$$

où μ est la mesure positive de Borel définie par le produit scalaire noté $(f,g)_\mu$ donné comme suit :

$$(f,g)_\mu = \frac{f(1)\overline{g}(1)}{2} + \frac{A}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g}(x)dx + \frac{f(-1)\overline{g}(-1)}{2}$$

La n-ième composée de l'expression différentielle de Type Legendre est donnée par

$$l^n_{LT}[y](x) = \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \left(\left(a_j(n,k)\left(1-x^2\right)^j + b_j(n,k)\left(1-x^2\right)^{j-1} \right) y^{(j)}(x) \right)^{(j)},$$

où les suites $\{a_j(n,k)\}$ et $\{b_j(n,k)\}$ sont définis par :

$$a_0(n,k) = k^n, n \geq 1.$$

et pour $j = 1, 2, \ldots, 2n$

$$a_j(n,k) = \left\{ \begin{array}{c} a_{n,j} \text{ si } k = 0 \\ \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} a_{n-r,j} k^r \text{ si } k > 0 \end{array} \right.,$$

où

$$a_{n,j} = \sum_{m=0}^{j} \frac{(-1)^{m+j}(2m+1)\left(m^2+m\right)^n\left(m^2+m-2+4A\right)^n}{(m+j+1)!\,(j-m)!},$$

$b_0(n,k) = 0$, et pour $j = 1, 2, \ldots, 2n$,

$$b_j(n,k) = \left\{ \begin{array}{c} b_{n,j} \text{ si } k = 0 \\ \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} b_{n-r,j} k^r \text{ si } k > 0 \end{array} \right.,$$

où

$$b_{n,j} = \sum_{m=0}^{j} (-1)^{m+j} \times \frac{4(2m+1)\left((2Aj+(j+1))\left(j+m^2+m\right)\right)\left(m^2+m\right)^n\left(m^2+m-2+4A\right)^n}{(m+j+1)!\,(j-m)!\,(2A+m(m-1))\,(2A+(m+1)(m+2))}.$$

Il n'y a aucune étude sur les suites $\{a_j(n,k)\}$ et $\{b_j(n,k)\}$.

3 Log-concavité, partitions et permutations

Les suites log-concaves et/ou unimodales apparaissent souvent dans la combinatoire, l'algèbre, la géométrie et l'informatique, ainsi que dans les probabilités et les statistiques. Prouver la Log-concavité et/ou l'unimodalité d'une suite peut parfois être une tâche difficile. On le fait, par exemple, en utilisant des outils d'analyse, d'algèbre linéaire, de la théorie des fonctions symétriques ou autres techniques. Nous citons à titre d'exemple Balazard [6], Stanley[56] et Brenti [8]. Parmi les techniques nous donnons une approche classique pour établir l'unimodalité et/ou la log-concavité des suites et qui consiste à utiliser le résultat dû à Newton [32]. Commençons par la définition de la suite log-concave :

Définition 4. *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels non négatifs . On dit qu'elle est log-concave si $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ pour tout $i \geq 1$. Si l'inégalité est stricte, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est dite strictement log-concave.*

Théorème 5. *(L'inégalité de Newton [32]) Soit $a_0, \ldots, a_n$ une suite finie des nombres non-négatifs. Si le polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ admet que des racines réelles, alors*

$$a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}\left(\frac{i+1}{i}\right)\left(\frac{n-i+1}{n-i}\right), \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

et la suite (a_n) est log-concave.

Quelque exemples sur les suites log-concaves.

1. La suite des coefficients binomiaux.
2. La suite des coefficients q-binomiaux,[11].
3. La suite des nombres de Stirling des deux espèces, [61].
4. La suite des nombres r-Stirling de seconde espèce,[38].

Avant de poursuivre, nous allons définir deux notions fondamentales en combinatoire **partitions et permutations**

Définition 6. *Soit $[n] = \{1, \ldots, n\}$ un ensemble à n éléments. La partition de $[n]$ en k blocs notés $B_1, \ldots, B_k$ satisfait :*
(1) aucun de ces blocs n'est vide

(2) pour tout $i \in [k]$, $\cup_{i=1}^{k} B_i = [n]$
(3) pour tout $i, j \in [k]$, $B_i \cap B_j = \emptyset$

Exemple 7. *Les partitions de l'ensemble* $\{1, 2, 4\}$ *sont* $\{1, 2, 4\}$; $\{1\} \cup \{2, 4\}$; $\{1, 2\} \cup \{4\}$; $\{1, 4\} \cup \{2\}$; $\{1\} \cup \{2\} \cup \{4\}$.

Définition 8. *Rappelons q'une permutation de* E *est une bijection de* E *vers* E. *Une permutation notée* σ *de* E *(de cardinal* n*) est un ensemble de* n *couples :*

$$\sigma = \{(i, \sigma(i)) / i \in E\}$$

Nous écrivons σ_i *au lieu de* $\sigma(i)$, *nous représentons les permutations sous la forme*

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$$

Exemple 9. *Soit* $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, *l'application* σ *définie par* $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 4, \sigma(3) = 5, \sigma(4) = 1, \sigma(5) = 3$*, notée* $\sigma = 24513$ *est une permutation de* E *et on peut écrire aussi* σ *comme produit de cycles comme suit* $\sigma = (124)(35)$

4 Nombres de Stirling des deux espèces

4.1 Nombres de Stirling

Pour les nombres de Stirling donnés dans cette section, on s'est basé sur les références [14, 15, 18, 54].

Définition 10. *Le nombre de Stirling de seconde espèce, noté* $S(n, k)$, *est le nombre de façons de partitionner un ensemble à* n *éléments en* k *blocs.*
Le nombre de Stirling (non signés) de première espèce, noté $s(n, k)$, *compte le nombre de permutations d'un ensemble à* n *éléments en* k *cycles.*

Ces nombres vérifient les relations de récurrence suivantes :

$$s(n, k) = 0 \quad \text{si } n < k,$$
$$s(n, k) = s(n-1, k-1) + (n-1)\, s(n-1, k) \;\text{ si } k > 0.$$

et

$$
\begin{aligned}
&S\left(n,k\right)=0 \quad \text{si } n<k,\\
&S\left(n,k\right)=S\left(n-1,k-1\right)+kS\left(n-1,k\right) \ \text{ si } k>0,\\
&S\left(n,k\right)=\sum_{k\leq l\leq n} S\left(l-1,k-1\right)k^{n-l}.
\end{aligned}
$$

Ils admettent comme fonctions génératrices exponentielles les fonctions :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n,k\geq 0} S\left(n,k\right)\frac{t^n}{n!}&=\frac{1}{k!}\left(e^t-1\right)^k,\\
\sum_{n\geq k} s\left(n,k\right)\frac{t^n}{n!}&=\frac{1}{k!}\left(-\ln\left(1-t\right)\right)^k
\end{aligned}
$$

qui entraînent les fonctions génératrices mixtes associées les fonctions

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} S\left(n,k\right)\frac{t^n}{n!}x^k=e^{x\left(e^t-1\right)} \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} s\left(n,k\right)\frac{t^n}{n!}x^k=\left(1-t\right)^{-x}
$$

et interviennent dans un changement de base dans l'espace vectoriel des polynômes de degrés au plus n comme suit :

$$
\sum_{k=0}^{n} S\left(n,k\right)\left(t\right)_k=t^n \text{ et } \sum_{k=0}^{n} s\left(n,k\right)t^k=\left(t\right)_n, \tag{1.5}
$$

où $\left(x\right)_n := x\left(x-1\right)\cdots\left(x-n+1\right)$ si $n\geq 1$ et $\left(x\right)_0 := 1.$
De plus, les nombres $S\left(n,k\right)$ admettent ainsi une fonction génératrice ordinaire donnée par :

$$
\sum_{n=k}^{\infty} S\left(n,k\right)t^n=\frac{t^k}{\left(1-x\right)\left(1-2x\right)\cdots\left(1-kx\right)}
$$

et peuvent être donnés explicitement [18] comme suit :

$$
\begin{aligned}
S(n,k)&=\sum_{c_1+c_2+\cdots+c_k=n-k} 1^{c_1}2^{c_2}\cdots k^{c_k},\\
S(n,k)&=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\left(-1\right)^{k-j}\binom{k}{j}j^n.
\end{aligned}
$$

Ainsi, que les nombres $s\,(n,k)$ peuvent être donnés par :

$$s(n,k)=\sum_{r=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{r}(-1)^{j}\binom{r}{j}\binom{n+r-1}{k-1}\binom{2n-k}{n-k-r}\frac{j^{n-k+r}}{r!}.$$

Les premières valeurs des nombres de Stirling (non-signés) de première et de seconde espèce sont donnés dans les tableaux suivants :

n / k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	2	3	1					
4	0	6	11	6	1				
5	0	24	50	35	10	1			
6	0	120	274	225	85	15	1		
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1	

Table 1.1 – Nombre de Stirling (non-signés) de première espèce

n / k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		

Table 1.2 – Nombre de Stirling de seconde espèce

4.2 Nombres r-Stirling

Les nombres r-Stirling représentent une certaine généralisation des nombres de Stirling classiques. Carlitz [12] a étudié ces nombres sous le nom de " Weighted Stirling numbers", koutras [28] sous le nom de "non-central Stirling numbers" et Broder [9] les a aussi étudié aussi et leur a donné le nom " r-Stirling numbers" .

Définition 11. *Les nombres r-Stirling de seconde espèce noté $S_r(n,k)$ comptent le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k blocs tel que les r premiers éléments soient dans des blocs disjoints.*

Ces nombres vérifient les relations de récurrence [9]

$$\begin{aligned} &S_r(n,k) = S_r(n-1,k-1) + kS_r(n-1,k) \text{ si } k>0, \\ &S_r(n,k) = S_{r-1}(n,k) - (r-1)\, S_{r-1}(n-1,k), \quad n \geq k \geq r \geq 1 \end{aligned}$$

Ils admettent comme fonctions génératrices exponentielle et ordinaire les fonctions

$$\begin{aligned} &\sum_n S_r(n+r,k+r)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}e^{rt}\left(e^t-1\right)^k, \quad k \geq 0, \\ &\sum_{n\geq k} S_r(n,k)\, t^n = \frac{t^k}{(1-rt)(1-(r+1)t)\cdots(1-(k+r)t)}. \end{aligned}$$

Définition 12. *Les nombres r-Stirling (non-signés)de première espèce, noté $s_r(n,k)$, comptent le nombre de permutation d'un ensemble à n éléments en k cycles tel que les r premiers éléments soient dans des cycles disjoints.*

Ces nombres vérifient les relations de récurrence [9]

$$\begin{aligned} &s_r(n,k) = s_r(n-1,k-1) + (n-1)\, s_r(n-1,k) \text{ si } k>0, \\ &s_r(n,k) = \frac{1}{r-1}\left(s_{r-1}(n,k-1) - s_r(n,k-1)\right), \quad n \geq k \geq r \geq 2 \end{aligned}$$

Ils admettent comme fonctions génératrices les fonctions

$$\begin{aligned} &\sum_n s_r(n+r,k+r)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{1-t}\right)^r\left(\ln\left(\frac{1}{1-t}\right)\right)^k, \ k \geq 0, \\ &\sum_{k=0}^{n} s_r(n,k)\, t^k = t^r(t+r)(t+r+1)\cdots(t+n-1), n \geq r \geq 0. \end{aligned}$$

Les nombres r-Stirling de seconde espèce (resp. de première espèce) peuvent être exprimer en terme des nombres de Stirling de seconde espèce (resp. de première espèce) par les relations suivantes [14] :

$$s_r(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (r+n-j-1)_{n-j}\, s(j,k)$$
$$S_r(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} r^{n-j} S(j,k).$$

Les nombres r-Stirling de seconde espèce satisfont l'égalité suivante

$$\begin{aligned} S_r(n+r+k, n+r) &= \sum_{0 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n} (i_1+r)(i_2+r)\cdots(i_k+r), \\ &= \sum_{r \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n} i_1 \cdots i_k. \end{aligned}$$

et vérifient l'identité

$$S_r(n+r, k+r) = \sum_j \binom{n}{j} S_p(n-k+p, k+p)(r-p)^j, \quad 0 \le p \le r.$$

Les nombres r-Stirling de première espèce satisfont l'égalité suivante

$$\begin{aligned} s_r(n+r, n+r-k) &= \sum_{0 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k < n} (i_1+r)(i_2+r)\cdots(i_k+r) \\ &= \sum_{r \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k < n} i_1 \cdots i_k. \end{aligned}$$

et vérifient l'identité :

$$s_r(n+r, k+r) = \sum_j j \binom{n}{j} S_p(n-k+p, k+p)(r-p)^{(j)}, \quad 0 \le p \le r.$$

Les premières valeurs des nombres r-Stirling (non-signés) de première et de seconde espèce sont données par les tableaux suivants :

n / k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	2	1						
2	4	5	1					
3	8	19	9	1				
4	16	65	55	14	1			
5	32	211	285	125	20	1		
6	64	665	1351	910	245	27	1	

Table 1.3 – Nombres 2-Stirling de seconde espèce

n / k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	3	1						
2	9	7	1					
3	27	37	12	1				
4	81	175	97	18	1			
5	243	781	660	205	25	1		
6	729	3367	4081	1890	380	33	1	

Table 1.4 – Nombres 3-Stirling de seconde espèce

n / k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	2	1						
2	6	5	1					
3	24	26	9	1				
4	120	154	71	14	1			
5	720	1044	580	155	20	1		
6	5040	8028	5104	1665	295	27	1	

Table 1.5 – Nombres 2-Stirling (non-signés) de première espèce

n / k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	3	1						
2	12	7	1					
3	60	47	12	1				
4	360	342	119	18	1			
5	2520	2754	1175	245	25	1		
6	20160	24552	12154	3135	445	33	1	

Table 1.6 – Nombres 3-Stirling (non-signés) de première espèce

On a de plus le théorème suivant

Théorème 13. *[38]Les deux suites* $(S_r\,(n+r,k+r))_{k=0}^{n}$ *et* $(s_r\,(n+r,k+r))_{k=0}^{n}$ *sont strictement log-concaves, et donc unimodales.*

5 Nombres de Jacobi-Stirling

Au cours des dernières années, différents travaux ont été réalisés en théorie des opérateurs différentiels où apparaissent naturellement des suites d'entiers positifs, en particulier, les nombres de Jacobi-Stirling. Ces nombres ont été introduits dans [21] en tant que coefficients des compositions de l'opérateur différentiel de Jacobi donné par

$$l_{(\alpha,\beta)}\,[y]\,(x) = \frac{1}{w_{(\alpha,\beta)(x)}}\left(-w_{(\alpha+1,\beta+1)}\,(x)\,y'\,(x)\right)', w_{(\alpha,\beta)}\,(x) = (1-x)^{\alpha}\,(1+x)^{\beta} \qquad (1.6)$$

avec α et β deux paramètres réels tel que $\alpha, \beta > -1$. Lorsque les paramètres sont tous les deux égaux à 0, nous trouvons la définition des nombres de Legendre-Stirling, introduits pour la première fois dans [21] et ensuite étudiés dans [3]. Dans [20, 21, 50], les auteurs montrent que ces nombres peuvent être interprétés par le dénombrement des partitions de l'ensemble $[\pm n]$. Une telle interprétation nous permet d'établir que ces nombres admettent une relation de récurrence triangulaire et d'étudier leurs propriétés. Les interprétations combinatoires des nombres de Legendre-Stirling [4, 19] et les nombres de Jacobi-Stirling qui [26] ont été données reposent sur des permutations et des partitions. Everitt et al. ont montré dans [20, Eq 4.4] que les nombres de Jacobi-Stirling ont l'expression exacte suivante

$$JS(n,k;\alpha,\beta)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}\binom{k}{j}\frac{\alpha+\beta+2j+1}{(\alpha+\beta+k+j+1)_{k+1}}(j(j+\alpha+\beta+1))^{n}.$$

Nous remarquons que la dernière expression des nombres de Jacobi-Stirling $JS(n,k;\alpha,\beta)$ dépend de paramètre $\alpha+\beta$, si nous posons $z:=\alpha+\beta+1$ et $JS(n,k;\alpha,\beta):=JS(n,k;z)$, l'identité 5 devient

$$JS(n,k;z)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}\binom{k}{j}\frac{z+2j}{(z+k+j)_{k+1}}(j(j+z))^{n},\quad z>-1. \tag{1.7}$$

En utilisant des différentes méthodes, Everitt et al. [20, Thm 4.1] et Gelineau et al. [26, Sec 4.2] ont prouvé que

$$x^{n}=\sum_{k=0}^{n}JS(n,k;z)(x)_{k,z}. \tag{1.8}$$

Les nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce $JS(n,k;z)$ sont alors les coefficients de changement de base dans $\mathbb{R}_n$ entre les bases

$$(1,x,\ldots,x^{n})\ \text{ et }\ \left(\left((x)_{0,z},(x)_{1,z},\ldots,(x)_{n,z}\right)\right).$$

De l'équation 1.8 il s'ensuit que les nombres de Jacobi-Stirling satisfont la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned}
&JS(0,0;z)=1, \\
&JS(n,0;z)=JS(0,k;z)=0\ \text{ si } n,k\geq 1, \\
&JS(n,k;z)=JS(n-1,k-1;z)+k(k+z)JS(n-1,k;z)\ \text{ si } n,k\geq 1.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Si $z=1$, on retrouve les nombres de Legendre-Stirling de seconde espèce avec

$$\begin{aligned}
&LS(0,0)=1, \\
&LS(n,0)=LS(0,k)=0\ \text{ si } n,k\geq 1, \\
&LS(n,k)=LS(n-1,k-1)+k(k+1)LS(n-1,k)\ \text{ si } n,k\geq 1.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Les coefficients de changement de base inverse, partant de la base $\left(\left((x)_{0,z},(x)_{1,z},\ldots,(x)_{n,z}\right)\right)$ à la base canonique $(1,x,\ldots,x^{n})$ sont appelés les nombres

Jacobi-Stirling de première espèce, notés $js\left(n,k;z\right)$, qui satisfont cette identité

$$\left(x\right)_{n,z}=\sum_{k=0}^{n}js\left(n,k;z\right)x^{k}.$$

Ils satisfont les relations de récurrences suivantes :

$$\begin{aligned}
&js\left(0,0;z\right)=1, \qquad (1.11)\\
&js\left(n,0;z\right)=js\left(0,k;z\right)=0 \text{ si } n,k\geq 1,\\
&js\left(n,k;z\right)=js\left(n-1,k-1;z\right)-\left(n-1\right)\left(n-1+z\right)js\left(n-1,k;z\right) \text{ si } n,k\geq 1.
\end{aligned}$$

Les nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce admettent comme fonction génératrice verticale la fonction [26]

$$\sum_{n\geq k}JS\left(n,k;z\right)t^{n}=\frac{t^{k}}{\left(1-\left(1+z\right)t\right)\left(1-2\left(2+z\right)t\right)\ldots\left(1-k\left(k+z\right)t\right)} \qquad (1.12)$$

De cette fonction génératrice, on a

$$JS(n,k;z)=\sum_{c_{1}+c_{2}+\cdots+c_{k}=n-k}\left(1\left(1+z\right)\right)^{c_{1}}.\left(2\left(2+z\right)^{c_{2}}\cdots\left(k\left(k+z\right)\right)^{c_{k}}. \qquad (1.13)$$

et comme fonction génératrice exponentielle la fonction

$$\sum_{n\geq 0}JS\left(n,k;z\right)\frac{t^{n}}{n!}=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\left(-1\right)^{k+j}\binom{k}{j}\frac{z+2j}{\left(z+k+j\right)_{k+1}}\exp\left(j\left(j+z\right)t\right). \qquad (1.14)$$

Les premières valeurs des nombres de Jacobi-Stirling de première et de seconde espèce sont donnés dans les tableaux suivants :

k / n	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1		1	$1+z$	$1+2z+z^2$	$1+3z+3z^2+z^3$	$1+4z+6z^2+4z^3+z^4$	$1+5z+10z^2+10z^3+5z^4+z^5$
2			1	$5+3z$	$21+24z+7z^2$	$85+141z+79z^2+15z^3$	$341+738z+604z^2+222z^3+31z^4$
3				1	$14+6z$	$147+120z+25z^2$	$1408+1662z+664z^2+90z^3$
4					1	$30+10z$	$627+400z+65z^2$
5						1	$55+15z$
6							1

Table 1.7 – Nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce

k / n	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1		1	$-1-z$	$4+6z+2z^2$	$-36-66z-36z^2-6z^3$	$576+1200z+840z^2+240z^3+24z^4$
2			1	$-5-3z$	$49+48z+11z^2$	$-820-1030z-404z^2-50z^3$
3				1	$-14-6z$	$273+200z+35z^2$
4					1	$-30-10z$
5						1

Table 1.8 – Nombres de Jacobi-Stirling de première espèce

CHAPITRE 2

NOMBRES R-JACOBI-STIRLING DE SECONDE ESPÈCE

1 Introduction

Dans ce chapitre, en se basant sur une interprétation combinatoire des nombres r-Jacobi-Stirling, on établit des relations de récurrence, des expressions exactes et leur log-concavité. Ce chapitre fait l'objet de la publication donnée par la référence [41].

2 Nombres r-Jacobi-Stirling de seconde espèce

La définition suivante est la définition de la partition signée des nombres de Jacobi-Stirling $JS\left(n,k;2\gamma-1\right)$ donnée par Andrews et al. [2, Déf. 4.1] dans le but de les interpréter d'une manière combinatoire.

Définition 14. *Pour tous entiers positifs n,k et γ, la partition signée de l'ensemble $[\pm n]$ en γ blocs-zéros, notés $A_1,\ldots,A_\gamma$, et k blocs-non-zéros, notés $B_1,\ldots,B_k$, est une partition signée en $k+\gamma$ blocs tels que*

1) Les blocs $A_1,\ldots,A_\gamma$ sont distinguables, mais les blocs $B_1,\ldots,B_k$ sont indistinguables.
2) Les blocs zéros peuvent être vides, mais les blocs-non-zéros ne sont pas vides.
3) $\forall i\in[n]\,,\ \{-i,i\}\nsubseteq A_1\cup\ldots\cup A_\gamma$.
4) $\forall j\in[k]\,,\forall i\in[n]\,,$ nous avons $\{-i,i\}\subset B_j\Leftrightarrow i=\min B_j$.

Andrews et al. ont montré que le nombre de Jacobi-Stirling $JS\left(n,k;2\gamma-1\right)$ compte le nombre de partitions signées de l'ensemble $[\pm n]$ en γ blocs-zéros et k blocs-non-zéros [2, Th. 4.1].

Exemple 15. *Comme nous le voyons dans la Table 2.1, il y a 20 partitions signées de l'ensemble $[\pm 3]$ en $\gamma=3$ blocs-zéros et $k=2$ blocs-non-zéros.*

Dans sa thèse de doctorat, Gelineau [26, Sec. 1.4] a introduit les nombres r-Jacobi-Stirling de seconde espèce $JS_r\left(n,k;z\right),\, n\geq r\geq 0$, comme suit.

Définition 16. *Le nombre r-Jacobi-Stirling $JS_r\left(n,k;2\gamma-1\right)$ est le nombre de partitions signées de l'ensemble $[\pm n]$ en γ blocs-zéros et k blocs-non-zéros tels que $\min B_j=j$, pour $j=1,\ldots,r$.*

Table 2.1 – La partition signée des nombres de Jacobi-Stirling

blocs zéros	**non-zéros blocs**	**blocs zéros**	**blocs-non-zéros**
$\emptyset, \emptyset, \emptyset$	$\{\pm 1, -3\}, \{\pm 2, +3\}$	$\{-3\}, \emptyset, \emptyset$	$\{\pm 1, +3\}, \{\pm 2\}$
$\emptyset, \emptyset, \emptyset$	$\{\pm 1, 3\}, \{\pm 2, -3\}$	$\emptyset, \emptyset, \{3\}$	$\{\pm 1, -3\}, \{\pm 2\}$
$\emptyset, \emptyset, \{-3\}$	$\{\pm 1\}, \{\pm 2, 3\}$	$\emptyset, \{3\}, \emptyset$	$\{\pm 1, -3\}, \{\pm 2\}$
$\emptyset, \{-3\}, \emptyset$	$\{\pm 1\}, \{\pm 2, 3\}$	$\{3\}, \emptyset, \emptyset$	$\{\pm 1, -3\}, \{\pm 2\}$
$\{-3\}, \emptyset, \emptyset$	$\{\pm 1\}, \{\pm 2, 3\}$	$\{-2\}, \emptyset, \emptyset$	$\{\pm 1, 2\}, \{\pm 3\}$
$\emptyset, \emptyset, \{3\}$	$\{\pm 1\}, \{\pm 2, -3\}$	$\emptyset, \{-2\}, \emptyset$	$\{\pm 1, 2\}, \{\pm 3\}$
$\emptyset, \{3\}, \emptyset$	$\{\pm 1\}, \{\pm 2, -3\}$	$\emptyset, \emptyset, \{-2\}$	$\{\pm 1, 2\}, \{\pm 3\}$
$\{3\}, \emptyset, \emptyset$	$\{\pm 1\}, \{\pm 2, -3\}$	$\{2\}, \emptyset, \emptyset$	$\{\pm 1, -2\}, \{\pm 3\}$
$\emptyset, \emptyset, \{-3\}$	$\{\pm 1, 3\}, \{\pm 2\}$	$\emptyset, \{2\}, \emptyset$	$\{\pm 1, -2\}, \{\pm 3\}$
$\emptyset, \{-3\}, \emptyset$	$\{\pm 1, 3\}, \{\pm 2\}$	$\emptyset, \emptyset, \{2\}$	$\{\pm 1, -2\}, \{\pm 3\}$

Dans cette section, nous étudions les nombres r-Jacobi-Stirling de seconde espèce en se basant sur des raisonnements analytiques et/ou combinatoires. Le théorème clé ou de base est le suivant. Voir [41]

Théorème 17. *[41] Pour tous entiers positifs n, k, la fonction génératrice ordinaire des nombres r-Jacobi-Stirling est donnée par*

$$\sum_{n\geq 0} JS_r\left(n+k,k;z\right)t^n = \left(\prod_{i=r}^{k}\left(1-i\left(i+z\right)t\right)\right)^{-1}.$$

Démonstration. Soit γ un entier positif tel que $z = 2\gamma - 1$. Selon la définition 16, soit $m_j = \min B_j$, $j = 1, \ldots, k$ et nous ordonnons les éléments minimaux des blocs-non-zéros pour obtenir $m_1 < m_2 < \cdots < m_k$. Nous avons $m_1 = 1, \ldots,\ m_r = r$ et $m_j \geq j$ pour $j = r+1, \ldots, k$. Initialement, les ensembles $A_1, \ldots, A_\gamma$ sont vides et $B_j = \{m_j\}\ ,\ j = 1, \ldots, k$. Par conséquent, nous comptons le nombre de façons de construire tel blocs $A_1, \ldots, A_\gamma$ et $B_1, \ldots, B_k$ par insertion les éléments de l'ensemble $[\pm n] - \{\pm m_1, \ldots, \pm m_k\}$. Les éléments de l'ensemble $[n] - \{m_1, \ldots, m_k\}$ sont les éléments entiers de l'ensemble $]m_1, m_2[\cup \cdots \cup]m_k, n+1[$. Nous pouvons procéder dans cette preuve par l'insertion des éléments entiers (et leurs opposés de chaque intervalle).

En effet, soit $j \in \{r, \ldots, k\}$ et $s \in]m_j, m_{j+1}[$ avec la convention $m_{k+1} = n+1$, nous avons trois cas possibles.

Cas 1 : Si $s \in A_1 \cup \ldots \cup A_\gamma$ et $-s \in B_1 \cup \ldots \cup B_k$, il y a γ façons d'insérer s dans les blocs-zéros et j façons d'insérer $-s$ dans les blocs-non-zéros (car les blocs $B_{j+1}, \ldots, B_k$ quand ils existent, ont les éléments minimaux $\geq m_{j+1} > s > m_j \geq j$ il en résulte que $-s$ peut être inséré que dans les blocs $B_1, \ldots, B_j$). Alors, nous comptons dans ce cas γj possibilités.

Cas 2 : Si $-s \in A_1 \cup \ldots \cup A_\gamma$ et $s \in B_1 \cup \ldots \cup B_k$, par symétrie, on compte également γj possibilités.

Cas 3 : Si $\pm s \in B_1 \cup \ldots \cup B_k$, mais $-s$ et s peuvent être insérés que dans les blocs $B_1, \ldots, B_j$ et ne peuvent pas être insérés dans le même bloc, nous obtenons $j\,(j-1)$ possibilités.

Alors, li y'a $2\gamma j +\ j\,(j-1) = j\,(j+z)$ façons d'insérer $\pm s$ et du fait que l'intervalle $]m_j, m_{j+1}[$ contient $n_j := m_{j+1} - m_j - 1$ éléments, on déduit que le nombre de façons d'insérer ces éléments (et leurs opposés) de cet intervalle est $(j\,(j+z))^{n_j}$. Il en résulte que le nombre total d'insertion des éléments (et leurs opposés) de l'ensemble

$[\pm n] - \{\pm m_1, \ldots, \pm m_k\}$ est $\prod_{j=r}^{k} (j\,(j+z))^{n_j}$. Alors, le nombre $JS_r\,(n,k;z)$ doit être égal à

$$\sum_{r=m_r<\cdots<m_k<n+1=m_{k+1}} \prod_{j=r}^{k} (j\,(j+z))^{n_j} = \sum_{n_r+\cdots+n_k=n-k} \prod_{j=r}^{k} (j\,(j+z))^{n_j} .$$

Alors,

$$JS_r\,(n+k,k;z) = \sum_{n_r+\cdots+n_k=n} \prod_{j=r}^{k} (j\,(j+z))^{n_j}$$

D'où

$$\sum_{n\geq 0} JS_r\,(n+k,k;z)\,t^n = \left(\prod_{i=r}^{k} (1 - i\,(i+z)\,t)\right)^{-1} .$$

□

Proposition 18. *[41] Pour tous entiers positifs n, k, r, les nombres r-Jacobi-Stirling $JS_r\,(n,k;z)$ satisfont l'équation suivante*

$$JS_r\,(n,k;z) = JS_{r-1}\,(n,k;z) - (r-1)\,(r-1+z)\,JS_{r-1}\,(n-1,k;z)\,.$$

Démonstration. Le nombre de partitions signées de l'ensemble $[\pm n]$ en γ blocs-zéros et k blocs-non-zéros sachant que $\min B_j = j$ pour $j = 1, \ldots, r-1$ et $\min B_r \neq r$ est

$JS_{r-1}(n,k;2\gamma-1)-JS_r(n,k;2\gamma-1)$.

Ce nombre est exactement $(r-1)(r-2+2\gamma)\,JS_{r-1}(n-1,k;2\gamma-1)$. En effet, le nombre de partitions signées de l'ensemble $[\pm n]-\{\pm r\}$ est exactement le nombre de partitions signées de l'ensemble $[\pm(n-1)]$ et les éléments $\pm r$ ne peuvent être insérés que dans les blocs-zéros ou dans $B_1\cup\cdots\cup B_{r-1}$ en $(r-1)(r-2+2\gamma)$ façons, c-à-d,

Cas 1 : Si r est dans l'un des blocs-zéros (il y'a γ façons de l'insérer), alors, $-r$ peut être insésé dans les blocs-non-zéros en $r-1$ façons, i.e.$-r$ ne peut pas être insérer dans les blocs $B_r,\ldots,B_k$ car ces blocs ont les éléments minimaux $\geq r+1$. Alors, ce cas donne $\gamma(r-1)$ possibilités.

Cas 2 : Par symétrie, si $-r$ est dans l'un des blocs-zéros, nous obtenons $\gamma(r-1)$ possibilités.

Cas 3 : Si $-r$ et r sont dans les blocs-non-zéros, nous obtenons $(r-1)(r-2)$ possibilités car, ils ne peuvent pas être dans le même bloc. Alors,

$JS_{r-1}(n,k;2\gamma-1)-JS_r(n,k;2\gamma-1)=(r-1)(r-2+2\gamma)\,JS_{r-1}(n-1,k;2\gamma-1)$.

□

Proposition 19. *[41] Pour tous entiers positifs n,k, les nombres r-Jacobi-Stirling $JS_r(n,k;z)$ satisfont l'équation suivante*

$$JS_r(n,k;z)=JS_r(n-1,k-1;z)+k(k+z)\,JS_r(n-1,k;z),\ 0\leq r\leq k\leq n,\ r<n.$$

Démonstration. Le nombre de partitions signées de l'ensemble $[\pm n]$ en γ blocs-zéros et k blocs-non-zéros sachant que $\min B_j=j$ pour $j=1,\ldots,r$ est $JS_r(n,k;2\gamma-1)$. Ce nombre peut être obtenu d'une autre manière en considérant n un élément minimum ou non dans un bloc-non-zéro. En effet, si n est un minimum dans tel bloc-non-zéro, alors ce bloc ne contient que les deux éléments $-n$ et n, dans ce cas nous avons $JS_r(n-1,k-1;2\gamma-1)$ façons, sinon, $[\pm(n-1)]$ peut être partitionner en $\gamma+k$ blocs en $JS_r(n-1,k;2\gamma-1)$ façons, et par suite, les éléments $\pm n$ peuvent être insérer dans les $\gamma+k$ blocs en $k(k+2\gamma-1)$ façons. Alors,

$JS_r(n,k;2\gamma-1)\;=\;JS_r(n-1,k-1;2\gamma-1)\;+\;k(k+2\gamma-1)\,JS_r(n,k-1;2\gamma-1)$.

□

Notre raisonnement combinatoire des nombres r-Jacobi-Stirling suggère les identités données ci-dessous.

Théorème 20. *[41] Pour tous entiers positifs n, k et r, nous avons l'égalité suivante*

$$JS_r\left(n,k;z\right)=\sum_{l=r}^{k} JS_r\left(l-1,k-1;z\right)\left(k\left(k+z\right)\right)^{n-l}$$

Démonstration. Soit l le plus grand élément minimum qui apparait avec sa copie dans le k-ième bloc-non-zéro. Alors, les éléments 1 à $l-1$ peuvent être distribués dans les $k-1$ blocs-non-zéros restants et dans les γ blocs-zéro sachant que les r premiers éléments soient des minimums dans les blocs-non-zéros en $JS_r\left(l-1,k-1;z\right)$ façons. Les éléments $l+1,\ldots,n$ doivent être insérés dans les k blocs-non-zéros restants et γ blocs-zéros en $\left(2k\gamma+k\left(k-1\right)\right)^{n-l}$ façons qui est égale à $\left(k\left(k+2\gamma-1\right)\right)^{n-l}$. $\square$

Théorème 21. *[41] Pour tous les entiers positifs n, k et r, les nombres r-Jacobi-Stirling satisfont l'égalité suivante :*

$$JS_r\left(n+k+1,k;z\right)=\sum_{l=r}^{k} l\left(l+z\right)JS_r\left(n+l,l;z\right)$$

Démonstration. Nous prouvons cette identité de la manière suivante : les éléments $n+k+1, n+k,\cdots,n+l+2$ apparaissent chacun dans un bloc-non-zéro avec leurs copies et l'élément $n+l+1$ n'apparaît pas dans un bloc-non-zéro avec sa copie. Alors, on veut insérer cet élément et sa copie dans les l blocs-non-zéros et les γ les blocs-zéros en $2l\gamma+l\left(l-1\right)$ façons qui est égale à $l\left(l+\gamma\right)$. Le reste des $n+l$ éléments doivent être distribués dans les l blocs-zéros et les γ blocs-zéros sachant que les r premiers éléments soient des minimums des blocs-non-zéros en $JS_r\left(n+l,l;\gamma\right)$ façons. $\square$

Nous donnons des expressions concernant les nombres r-Jacobi-Stirling de seconde espèce.

Théorème 22. *[41] Pour tous les entiers non-négatifs n, k, r, les nombres r-Jacobi-Stirling $JS_r\left(n,k;z\right)$ sont donnés par l'expression suivante :*

$$JS_r\left(n+r,k+r;z\right)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\left(-1\right)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{2j+2r+z}{\left(j+k+2r+z\right)_{k+1}}\left(\left(j+r\right)\left(j+r+z\right)\right)^{n}.$$

En particulier, pour $r=0$ ou $r=1$, nous obtenons :

$$JS\left(n,k;z\right)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\left(-1\right)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{2j+z}{\left(j+k+z\right)_{k+1}}\left(j\left(j+z\right)\right)^{n}.$$

Démonstration. A partir du théorème 17, il existe des nombres $\lambda_r,\ldots,\lambda_k$ tels que

$$\sum_{n\geq0}JS_r\left(n+k,k+r;z\right)t^n=\left(\prod_{i=r}^{k}\left(1-i\left(i+z\right)t\right)\right)^{-1}=\sum_{j=r}^{k}\frac{\lambda_j}{1-j\left(j+z\right)t}$$

On peut vérifier que nous avons

$$\lambda_j=\frac{1}{\prod\limits_{i=r,i\neq j}^{k}\left(1-\frac{i(i+z)}{j(j+z)}\right)}=\frac{\left(j\left(j+z\right)\right)^k}{\prod\limits_{i=r,i\neq j}^{k}\left(\left(j-i\right)\left(j+i+z\right)\right)}$$

Qui peut être simplifiée comme suit :

$$\lambda_j=\frac{\left(-1\right)^{k-j}}{k!}\binom{k}{j-r}\frac{2j+z}{\left(j+r+k+z\right)_{k+1}}\left(j\left(j+z\right)\right)^k.$$

En d'autres termes, nous avons :

$$\sum_{n\geq0}JS_r\left(n+k,k;z\right)t^n=\sum_{j=r}^{k}\frac{\lambda_j}{1-j\left(j+z\right)t}=\sum_{j=r}^{k}\lambda_j\sum_{n\geq0}\left(j\left(j+z\right)\right)^n t^n.$$

et ceci montre que :

$$\begin{aligned}JS_r\left(n,k;z\right)&=\sum_{j=r}^{k}\lambda_j\left(j\left(j+z\right)\right)^{n-k}\\&=\frac{1}{k!}\sum_{j=r}^{k}\left(-1\right)^{k-j}\binom{k}{j-r}\frac{2j+z}{\left(j+r+k+z\right)_{k+1}}\left(j\left(j+z\right)\right)^n.\end{aligned}$$

□

Remarque 23. *Nous avons $JS_r\left(n+r,n+r;z\right)=1$ ce qui donne avec le théorème 22 l'identité suivante :*

$$\sum_{j=0}^{n}\left(-1\right)^{n-j}\binom{n}{j}\frac{2j+2r+z}{\left(j+n+2r+z\right)_{n+1}}\left(\left(j+r\right)\left(j+r+z\right)\right)^n=n!.$$

Remarque 24. *Ces nombres admettent comme fonction génératrice exponentielle la fonction*

$$\sum_{n\geq 0} JS\left(n+r,k+r;z\right)\frac{t^n}{n!} =$$
$$\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\left(-1\right)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{2j+2r+z}{\left(j+k+2r+z\right)_{k+1}}\exp\left(\left(j+r\right)\left(j+r+z\right)t\right).$$

Corollaire 25. *[41] Pour tous les entiers non-négatifs $n,\ k,r,$ les nombres r-Jacobi-Stirling peuvent être exprimés en terme des nombres de Jacobi-Stirling comme suit :*

$$JS_r\left(n+r,k+r;z\right) = \sum_{i=0}^{n-k}\binom{n}{i}\left(r\left(r+z\right)\right)^i JS\left(n-i,k;z+2r\right).$$

Démonstration. D'aprés le théorème 22 on a :

$$\begin{aligned}
&JS_r\left(n+r,k+r;z\right)\\
&=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\left(-1\right)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{2j+2r+z}{\left(j+2r+k+z\right)_{k+1}}\left(j\left(j+z+2r\right)+r\left(r+z\right)\right)^n\\
&=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\left(-1\right)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{2j+2r+z}{\left(j+2r+k+z\right)_{k+1}}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(j\left(j+z+2r\right)\right)^{n-i}\left(r\left(r+z\right)\right)^i\\
&=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(r\left(r+z\right)\right)^i\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\left(-1\right)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{2j+2r+z}{\left(j+2r+k+z\right)_{k+1}}\left(j\left(j+z+2r\right)\right)^{n-i}\\
&=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(r\left(r+z\right)\right)^i JS\left(n-i,k;z+2r\right).
\end{aligned}$$

□

Remarque 26. *pour $r=1$et $z=-1$ dans le corollaire 25 nous obtenons l'identité suivante :*

$$JS\left(n+1,k+1;-1\right) = JS\left(n,k;1\right).$$

Corollaire 27. *Pour tous les entiers non-négatifs $n,r,$ les nombres r-Jacobi-Stirling satisfont*

$$\left(X+r\left(r+z\right)\right)^n = \sum_{k=0}^{n} JS_r\left(n+r,k+r;z\right)\left(X\right)_{k,z+2r}.$$

Démonstration. D'aprés la première identité du corollaire 25 et l'identité (1.8) nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} JS_r\left(n+r,k+r;z\right)(X)_{k,z+2r} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(r\left(r+z\right)\right)^{i} JS\left(n-i,k;z+2r\right)\right)(X)_{k,z+2r} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(r\left(r+z\right)\right)^{i}\left(\sum_{k=0}^{n} JS\left(n-i,k;z+2r\right)(X)_{k,z+2r}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(r\left(r+z\right)\right)^{i} X^{n-i} \\
&= \left(X+r\left(r+z\right)\right)^{n}.
\end{aligned}$$

□

Remarque 28. *Comme les nombres de Jacobi-Stirling $JS\left(n,k;z\right)$ sont des polynômes en z de degré $n-k$ et de coefficients positifs où le dernier coefficient est le nombre de Stirling de seconde espèce $S\left(n,k\right)$, d'aprés le corollaire 27, nous remarquons que les nombres r-Jacobi-Stirling sont aussi des polynômes en z de degré $n-k$ et de coefficients positifs où le dernier coefficient est le nombre r-Stirling de seconde espèce $S_r\left(n,k\right)$.*

Remarque 29. *Le corollaire 27 peut être obtenu par le changement suivant, nous remplaçons x_i par $\left(i+r\right)\left(i+r+z\right)$ et X par $X+r\left(r+z\right)$ dans la formule d'interpolation de Newton,*

$$X^{n} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k} x_j^{n}\left(\prod_{l=0,l\neq j}^{k}\left(x_j-x_l\right)\right)^{-1}\right)\prod_{i=0}^{k-1}\left(X-x_i\right).$$

Théorème 30. *[41] Pour tout entier positif n et chaque nombre réel $z\geq -1$, le polynôme*

$$P_n\left(x;r\right) = \sum_{k=0}^{n} JS_r\left(n+r,k+r;z\right)x^{k}$$

n'a que des racines réelles simples non positives, puis, la suite des nombres r-Jacobi-Stirling de seconde espèce sont strictement log-concave (ainsi unimodale).

Démonstration. Mongelli [49] a prouvé le cas où $r=0$. Pour $r\geq 1$, comme le coefficient de x^{n} dans $P_n\left(x\right)$ est $JS_r\left(n+r,n+r;z\right)=1$, P_n est un polynôme de degré n. Pour $n=1$,

$P_1(x) = 1 + x$ a une racine réelle négative, supposant $P_n(x)$ n'admet que des racines réelles négatives simples, $n \geq 1$. Donc, à partir de la proposition 19, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& P_{n+1}(x;r) \\
& = \sum_{k=0}^{n+1} JS_r(n+1+r, k+r; z)\, x^k \\
& = \sum_{k=0}^{n+1} \left(JS_r(n+r, k+r-1; z) + (k+r)(k+r+z)\, JS_r(n+r, k+r; z)\right) x^k \\
& = xP_n(x;r) + x^{1-r} D\left(x^{1-z} D\left(x^{r+z} \sum_{k=0}^{n} JS_r(n+r, k+r; z)\, x^k\right)\right) \\
& = xP_n(x;r) + x^{1-r} D\left(x^{1-z} D\left(x^{r+z} P_n(x;r)\right)\right), \text{où } D \text{ désigne l'opérateur de dérivation,}
\end{aligned}$$

et en fixant $Q_n(x) = x^r P_n(x;r)$, la dernière identité devient

$$Q_{n+1}(x) = x\left(Q_n(x) + D\left(x^{1-z} D\left(x^z Q_n(x)\right)\right)\right), \quad r \geq 1.$$

Par récurrence, le polynôme $Q_n(x)$ satisfait toutes les hypothèses du lemme 2 données dans [49], alors $Q_{n+1}(x)$ n'a que des racines simples réelles négatives et la racine $x = 0$ avec la multiplicité r. Ceci montre que $P_{n+1}(x;r)$ a des racines simples réelles négatives. □

3 Généralisation des polynômes de Jacobi-Stirling

3.1 Introduction

Parmi les polynômes les plus connus en combinatoire, nous avons cité dans le premier chapitre les polynômes de Jacobi-Stirling. Ces polynômes ont joué et continuent à jouer un rôle important dans la détermination de plusieurs propriétés et identités combinatoires, voir [2, 26, 34, 49, 50]. Dans cette section, nous étudions une généralisation des nombres de Jacobi-Stirling en donnant leur relation de récurrence . Nous présentons cette définition qui est une généralisation de ces nombres.

Dans ce chapitre, nous avons fait une étude sur les nombres r-Jacobi-Stirling de seconde espèce en donnant leurs expressions exactes et d'autres résultats. Ainsi, nous remarquons que ces nombres sont des polynômes en z . Alors, il est naturel de penser d'introduire les polynômes de Jacobi-Stirling généralisés qui généralisent les r-Jacobi-Stirling et les Jacobi-Stirling, commençons par cette définition.

Définition 31. *Soient $A = (a_0, a_1, ...)$, $B = (b_0, b_1, ...)$ et $C = (c_0, c_1, ...)$ trois suites infinies de nombres réels telles que $a_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$ et soit α un nombre réel. Les nombres de Jacobi-Stirling généralisés de seconde espèce sont définis par*

$$JS_G\left(n,k;z\right) = \frac{\alpha^k}{k!}\sum_{j=0}^{k}\left(-1\right)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{z+2j}{\left(z+k+j\right)_{k+1}}C\left(j\right)\prod_{i=0}^{n-1}(a_i j\left(j+z\right)+b_i),$$

avec convention $\prod_{i=0}^{-1}(a_i x\left(x+z\right)+b_i) = 1$ et nous posons

$$P_{n,G}\left(x\right) := \sum_{k\geq 0} JS_G\left(n,k;z\right)x^k.$$

Proposition 32. *Les nombres de Jacobi-Stirling généralisés de seconde espèce sont donnés par la relation de récurrence suivante :*

$$JS_G\left(n,k;z\right) = \alpha a_{n-1} JS_G\left(n-1,k-1;z\right) + (a_{n-1}k\left(k+z\right)+b_{n-1})JS_G\left(n-1,k;z\right).$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}
&\alpha a_{n-1} JS_G\left(n-1,k-1;z\right) + (a_{n-1}k\left(k+z\right)+b_{n-1})JS_G\left(n-1,k;z\right)\\
&= \frac{\alpha^k a_{n-1}}{(k-1)!}\sum_{j=0}^{k-1}\left(-1\right)^{k-1-j}\binom{k-1}{j}\frac{z+2j}{\left(z+k+j-1\right)_k}C\left(j\right)\left(aj\left(j+z\right)+b\right)_{[n-1]}\\
&+ (a_{n-1}k\left(k+z\right)+b_{n-1})\frac{\alpha^k}{k!}\sum_{j=0}^{k}\left(-1\right)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{z+2j}{\left(z+k+j\right)_{k+1}}C\left(j\right)\left(aj\left(j+z\right)+\alpha b\right)_{[n-1]}\\
&= -\frac{\alpha^k a_{n-1}}{k!}\sum_{j=0}^{k}\left(-1\right)^{k-j}\binom{k}{j}\left(k-j\right)\frac{\left(z+2j\right)\left(z+k+j\right)}{\left(z+k+j\right)_{k+1}}C\left(j\right)\left(aj\left(j+z\right)+\alpha b\right)_{[n-1]}\\
&+ (a_{n-1}k\left(k+z\right)+b_{n-1})\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\left(-1\right)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{z+2j}{\left(z+k+j\right)_{k+1}}C\left(j\right)\left(aj\left(j+z\right)+\alpha b\right)_{[n-1]}\\
&= \frac{\alpha^k}{k!}\sum_{j=0}^{k}\left(-1\right)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{z+2j}{\left(z+k+j\right)_{k+1}}C\left(j\right)\left(aj\left(j+z\right)+b\right)_{[n-1]}\left(a_{n-1}j\left(j+z\right)+b_{n-1}\right))
\end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha^k}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{z+2j}{(z+k+j)_{k+1}}C(j)\,(aj(j+z)+b)_n$$
$$= JS_G(n,k;z)\,.$$

□

3.2 Cas particuliers

On peut obtenir les nombres de Jacobi-Stirling et les r-Jacobi-Stirling de seconde espèce, en fixant des valeurs à a_n, α, b_n et $C(n)$.
Pour $a_n = 1, \alpha = 1, b_n = 0$ et $C(n) = 1$, nous obtenons les nombres classiques de Jacobi-Stirling de seconde espèce

$$JS_G(n,k;z) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{z+2j}{(z+k+j)_{k+1}}(j(j+z))^n = JS(n,k;z)$$

Pour $a_n = 1,\ \alpha = 1,\ b_n = zr - r^2$ et $C(n) = 1$, nous obtenons les nombres r-Jacobi-Stirling de seconde espèce

$$JS_G(n,k;z+2r) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{z+2r+2j}{(z+2r+k+j)_{k+1}}((j+r)(j+r+z))^n$$
$$= JS_r(n+r,k+r;z)\,.$$

Proposition 33. *Les polynômes de Jacobi-Stirling généralisés de seconde espèce satisfont*

$$P_{n+1,G}(x) = (-\alpha a_{n-1}x + \alpha b_{n-1})\,P_{n,G}(x) + a_{n-1}x^{1-r}D\left(x^{1-z}D\left(x^{r+z}P_{n,G}(x)\right)\right).$$

où D désigne l'opérateur de dérivation.

Démonstration. En utilisant la dernière proposition, nous pouvons écrire

$$P_{n+1,G}(x) = \sum_{k\geq 0} JS_G(n+1,k;z)\,x^k$$
$$= \sum_{k\geq 0}(\alpha a_{n-1}JS_G(n,k-1;z) + (a_{n-1}k(k+z)+b_{n-1})JS_G(n,k;z))\,x^k$$

$$= \alpha a_{n-1} x P_{n,G}(x) + a_{n-1} x^{1-r} D \left(x^{1-z} D \left(x^{z} \sum_{k=0}^{n} JS_{G}(n,k;z)\, x^{k} \right) \right) +$$

$$\left(b_{n-1} P_{n,G}(x)\right)$$

$$= \left(\alpha a_{n-1} x + b_{n-1}\right) P_{n,G}(x) + a_{n-1} x^{1-r} D \left(x^{1-z} D \left(x^{r+z} P_{n,G}(x) \right) \right).$$

□

CHAPITRE 3

INTERPRÉTATION COMBINATOIRE DE QUELQUES NOMBRES DE STIRLING GÉNÉRALISÉS

1 Introduction

Par motivation des applications riches des nombres de Stirling, r-Stirling [9], les nombres de Lah [15], les nombres $(r_1, \ldots, r_p)$-Stirling [40], Jacobi-Stirling, r-Jacobi-Stirling [41] et d'autres nombres, nous pensons à élargir l'étude de ces nombres aux nombres similaires associés aux multi-ensemble définis ci-dessous.
De tels nombres à étudier, peuvent être vu comme des nombres de Stirling généralisés définis par :

Définition 34. *[60] Soit $a = (a_{n,k}, 0 \leq k \leq n)$ une suite de nombres réels, les nombres de Stirling généralisés de seconde espèce $S(n, k; a)$ sont définis par :*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k; a) (x \mid a)_k \tag{3.1}$$

où $(x \mid a)_n = (x - a_0)(x - a_1) \cdots (x - a_{n-1})$ si $n \geq 1$ et $(x \mid a)_0 = 1$.
Si les nombres $a_{n,k} = a_k$ sont indépendants de n, la fonction génératrice de ces nombres est donnée par :

$$\sum_{n \geq 0} S(n + k, k; a) t^n = \left(\prod_{j=0}^{k} (1 - a_k t) \right)^{-1}. \tag{3.2}$$

Cette définition englobe les définitions de nombres de Stirling, r-Stirling, Jacobi-Stirling et r-Jacobi-Stirling de seconde espèce [41]. Ceci est vue à travers les fonctions génératrices données par 1.5 et Corollaire 27.
Pour ce faire, nous introduisons la notion de multi-ensemble comme suit :

Définition 35. *soit n un entier naturel (s_n) une suite d'entiers naturels et*

$$\{1_1, ..., 1_{s_1}, ..., n_1, ..., n_{s_n}\} = \{1^{s_1}, \ldots, n^{s_n}\}$$

un multi-ensemble. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, les copies $i_1, \ldots, i_{s_i}$ de i peuvent être considérées comme s_i couleurs de i et sont tous de valeur égale à i

De nombreuses propriétés de ces nombres ont été discutées en combinatoire [60]. Certains cas particuliers des nombres $S(n, k; a)$ ont des interprétations combinatoires liées aux partitions de l'ensemble ou du mutli-ensemble. Entre ces nombres, on trouve les coefficients binomiaux, les nombres de Stirling, r-Stirling [9], Jacobi-Stirling [20, Sec. 1.4], r-Jacobi-Stirling [26, Sec. 1.4], p-Stirling de seconde espèce [58] et d'autres nombres étudiés dans [50]. Dans cette étude, nous donnons des interprétations combinatoires de certains nombres comptant des partitions du multi-ensemble $\{1^{s_1}, \ldots, n^{s_n}\}$.

Soient γ un entier non-négatif et n un entier positif et soient $\mathbf{s} = (s_n)$, $\mathbf{u} = (u_n)$ et $\mathbf{v} = (v_n)$ trois suites des entiers naturels avec $s_n \geq 1, \forall n$.

Posons

$$a(n,k;\gamma) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{s_n} \left[\exp_{v_1}(t) \cdots \exp_{v_k}(t) \exp_{u_n}(\gamma t)\right], \quad n \geq 1,\ k \geq 0, \tag{3.3}$$

ou d'une manière équivalente

$$a(n,k;\gamma) = \sum_{i_1+\cdots+i_{k+1}=s_n,\ i_1 \leq v_1,\ldots,i_k \leq v_k,\ i_{k+1} \leq u_n} \frac{s_n!}{i_1! \cdots i_k!} \frac{\gamma^{i_{k+1}}}{i_{k+1}!},$$

où

$$\exp_n(t) := 1 + t + \cdots + \frac{t^n}{n!}.$$

L'organisation de ce chapitre est la suivante. Dans la première partie, nous définissons et discutons d'une signification combinatoire liée aux partitions d'un multi-ensemble et dans la seconde partie, nous présentons plusieurs cas particuliers [45].

2 Comptage des partitions d'un multi-ensemble

2.1 Partitions d'un multi-ensemble

Nous proposons quelques définitions de partitions et nombres à étudier tout au long de ce chapitre [46].

Définition 36. *Une* $(\mathbf{s}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$*-partition, avec cardinalité, notée* $P^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n,k;\gamma)$, *est une partition du multi-ensemble* $\{1^{s_1}, \ldots, n^{s_n}\}$ *en* γ *blocs-zéros* $A_1, ..., A_\gamma$ *et* k *blocs-non-zéros* $B_1, ..., B_k$ *avec les conditions suivantes :*

(1) Les blocs $A_1, \ldots, A_\gamma$*, sont distinguables, mais les blocs* $B_1, \ldots, B_k$ *sont indistinguables.*

(2) Les blocs-zéros peuvent être vides, mais les blocs-non-zéros ne sont pas vides.

(3) L'ensemble $A_1 \cup \cdots \cup A_\gamma$ *contient au plus* u_i *copies de* $i,\ \forall i \in \{1, ..., n\}$,

(4) Si $i \neq \min B_j$, *alors* B_j *contient au plus* v_i *copies de* $i,\ \forall i \in \{1, ..., n\}$,

(5) Si $i = \min B_j$, *alors* $\{i_1, ..., i_{s_i}\} \subset B_j,\ \forall i \in \{1, ..., n\},\ \forall j \in \{1, ..., k\}$.

Cette définition généralise la définition 14 donnée dans le chapitre précédent en posant $s_i = 2, u_i = v_i = 1$.

Exemple 37. *Nous donnons* 24 *dans la Table 3.1* $(\mathbf{s}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$*-partitions de l'ensemble* $\{1^{s_1}, 2^{s_2}, 3^{s_3}\}$ *en* $\gamma = 3$ *blocs-zéros et* $k = 2$ *blocs-non-zéros avec* $s_1 = 2, s_2 = 3$, $s_3 = 4, u_i = 2, v_i = 2$.

Définition 38. *Soit* $n,\ k,\ r$ *des nombres non-négatifs avec* $n \geq k \geq r$. *Une* r-$(\mathbf{s}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$-*partition avec cardinalité notée* $P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n, k; \gamma)$, *est définie comme une* $(\mathbf{s}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$*-partition pour laquelle* $j = \min B_j$ *pour* $1 \leq j \leq r$.

A partir de ces définitions, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&P_0^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n, k; \gamma) = P^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n, k; \gamma), \quad n \geq k \geq 1,\\
&P_1^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n, 0; \gamma) = 0, \quad n \geq 1,\\
&P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n, n; \gamma) = 1,\\
&P_0^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n, 0; \gamma) = \gamma^{s_1+\cdots+s_n} 1_{(u_1=s_1,\ldots,u_n=s_n)},\ n \geq 1.
\end{aligned}$$

Remarque 39. *A partir des définitions ci-dessus, nous pouvons affimer que pour chaque* k, *on a nécessairement*

$$u_j + v_1 + \cdots + v_k \geq s_j,\ \textit{pour tout}\ j = 1, \ldots, n,$$

parce que sinon on obtient $P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n, k; \gamma) = 0$.

2.2 Relations de récurrence triangulaires

Les nombres $P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n, k; \gamma)$ admettent les relations de récurrence suivantes.

Proposition 40. *Pour tous entiers positifs* n, k *et un entier non-négatif* r *avec* $n \geq k \geq r$, $n > r$, *les nombres* $P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n, k; \gamma)$ *satisfont l'égalité suivante*

$$P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n, k; \gamma) = P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n-1, k-1; \gamma) + a(n, k; \gamma)\, P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n-1, k; \gamma). \qquad (3.4)$$

blocs zéros	**blocs-non-zéros**	**blocs zéros**	**blocs-non-zéros**
$\emptyset, \emptyset, \emptyset$	$\{1_1, 1_2, 3_1, 3_2\}, \{2_1, 2_2, 2_3, 3_3, 3_4\}$	$\{3_1, 3_2\}, \emptyset, \emptyset$	$\{1_1, 1_2, 3_3, 3_4\}, \{2_1, 2_2, 2_3\}$
$\emptyset, \emptyset, \emptyset$	$\{1_1, 1_2, 3_1, 3_3\}, \{2_1, 2_2, 2_3, 3_2, 3_4\}$	$\{3_1, 3_3\}, \emptyset, \emptyset$	$\{1_1, 1_2, 3_2, 3_4\}, \{2_1, 2_2, 2_3\}$
$\emptyset, \emptyset, \emptyset$	$\{1_1, 1_2, 3_2, 3_3\}, \{2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 3_4\}$	$, \emptyset, \{3_1, 3_3\}, \emptyset$	$\{1_1, 1_2, 3_2, 3_4\}, \{2_1, 2_2, 2_3\}$
$\emptyset, \emptyset, \emptyset$	$\{1_1, 1_2, 3_3, 3_4\}, \{2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 3_2\}$	$\{3_3, 3_4\}, \emptyset, \emptyset$	$\{1_1, 1_2, 3_1, 3_2\}, \{2_1, 2_2, 2_3\}$
$\emptyset, \emptyset, \{3_1, 3_2\}$	$\{1_1, 1_2\}, \{2_1, 2_2, 2_3, 3_3, 3_4\}$	$\emptyset, \{3_3, 3_4\}, \emptyset$	$\{1_1, 1_2, 3_1, 3_2\}, \{2_1, 2_2, 2_3\}$
$\emptyset, \{3_1, 3_2\}, \emptyset$	$\{1_1, 1_2\}, \{2_1, 2_2, 2_3, 3_3, 3_4\}$	$\emptyset, \emptyset, \{3_3, 3_4\}$	$\{1_1, 1_2, 3_1, 3_2\}, \{2_1, 2_2, 2_3\}$
$\{3_1, 3_2\}, \emptyset, \emptyset$	$\{1_1, 1_2\}, \{2_1, 2_2, 2_3, 3_3, 3_4\}$	$\emptyset, \emptyset, \{2_1, 2_3\}$	$\{1_1, 1_2, 2_2\}, \{3_1, 3_2, 3_3, 3_4\}$
$\emptyset, \emptyset, \{3_3, 3_4\}$	$\{1_1, 1_2\}, \{2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 3_2\}$	$\emptyset, \{2_1, 2_3\}, \emptyset,$	$\{1_1, 1_2, 2_2\}, \{3_1, 3_2, 3_3, 3_4\}$
$\emptyset, \{3_3, 3_4\}, \emptyset$	$\{1_1, 1_2\}, \{2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 3_2\}$	$\{2_1, 2_3\}, \emptyset, \emptyset$	$\{1_1, 1_2, 2_2\}, \{3_1, 3_2, 3_3, 3_4\}$
$\{3_3, 3_4\}, \emptyset, \emptyset$	$\{1_1, 1_2\}, \{2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 3_2\}$	$\{2_1, 2_2\}, \emptyset, \emptyset$	$\{1_1, 1_2, 2_3\}, \{3_1, 3_2, 3_3, 3_4\}$
$\emptyset, \emptyset, \{3_1, 3_2\}$	$\{1_1, 1_2, 3_3, 3_4\}, \{2_1, 2_2, 2_3\}$	$\emptyset, \{2_1, 2_2\}, \emptyset$	$\{1_1, 1_2, 2_3\}, \{3_1, 3_2, 3_3, 3_4\}$
$\emptyset, \{3_1, 3_2\}, \emptyset$	$\{1_1, 1_2, 3_3, 3_4\}, \{2_1, 2_2, 2_3\}$	$\emptyset, \emptyset, \{2_1, 2_2\}$	$\{1_1, 1_2, 2_3\}, \{3_1, 3_2, 3_3, 3_4\}$

Table 3.1 – La partition des nombres de Stirling généralisés

Démonstration. Le nombre de partitions du multi-ensemble $\{1^{s_1},\ldots,n^{s_n}\}$ en γ blocs-zéros et k blocs-non-zéros (notés $k+\gamma$ blocs) est $P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n,k;\gamma)$. Ce nombre peut être obtenu d'une autre manière en considérant n comme un élément minimum ou non dans un bloc-non-zéro. En effet, si n est un minimum dans un bloc-non-zéro, alors ce bloc contient que les s_n éléments $n_1,...,n_{s_n}$, dans ce cas nous avons $P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n-1,k-1;\gamma)$ façons, sinon, le multi-ensemble $\{1^{s_1},\ldots,(n-1)^{s_{n-1}}\}$ peut être partitionné en $k+\gamma$ blocs en $P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n-1,k;\gamma)$ façons, et, les $n_1,...,n_{s_n}$ copies de n peuvent être inserées dans les $k+\gamma$ blocs en

$$\sum_{i=0}^{u_n}\binom{s_n}{i}\gamma^i\sum_{i_1+\cdots+i_k=s_n-i,\ i_1\le v_1,\ldots,i_k\le v_k}\frac{(s_n-i)!}{i_1!\cdots i_k!}=a(n,k;\gamma)$$

façons, parce que s'il y a i copies $(i\le u_n)$ de n dans $A_1\cup\cdots\cup A_\gamma$ (avec $\binom{s_n}{i}\gamma^i$ façons), les s_n-i copies restantes de n sont dans $B_1\cup\cdots\cup B_k$ avec $\sum_{i_1+\cdots+i_k=s_l-i,\ i_1\le v_1,\ldots,\ i_k\le v_k}\frac{(s_n-i)!}{i_1!\cdots i_k!}$ façons. Alors, $P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n,k;\gamma)=P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n-1,k-1;\gamma)+a(n,k;\gamma)P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n-1,k;\gamma)$. □

Proposition 41. *Pour tous entiers positifs* $n,\ k,r$ *avec* $n\ge k\ge r+1$, *si*

$$s_n=s \text{ pour tout } n,$$

alors les nombres $P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n,k;\gamma)$ *satisfont l'égalité suivante*

$$P_{r+1}^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n,k;\gamma)=P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n,k;\gamma)-a(r,r-1;\gamma)P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n-1,k;\gamma). \tag{3.5}$$

Démonstration. Le nombre de partitions du multi-ensemble $\{1_1,...,1_{s_1},...,n_1,...,n_{s_n}\}$ en $k+\gamma$ blocs sachant que $\min(B_j)=j$ pour $j=1,\ldots,r-1$ et $\min(B_r)\ne r$ (pour $r=1$, nous remplaçons ces conditions par $\min(B_1)\ne 1$) est $P_{r-1}^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n,k;\gamma)-P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n,k;\gamma)$. Ce nombre est exactement $a(r,r-1;\gamma)P_{r-1}^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n-1,k;\gamma)$ puisque le nombre de partitions du multi-ensemble $\{1^s,\ldots,n^s\}-\{r_1,...,r_s\}$ en $k+\gamma$ blocs est exactement le nombre de partitions du multi-ensemble $\{1^s,\ldots,(n-1)^s\}$ en $k+\gamma$ blocs et les copies $r_1,...,r_s$ ne peuvent être insérées que dans les blocs-zéros ou dans $B_1\cup\ldots\cup B_{r-1}$ en $a(r,r-1;\gamma)$ façons, c'est à dire, s'il y a i copies de r $(i\le u_r)$ dans les blocs-zéros (il y a $\binom{s}{i}\gamma^i$ façons pour les insérer), alors les $s-i$ copies restantes de r peuvent être insérées dans les blocs-non-zéros en $\sum_{i_1+\cdots+i_{r-1}=s-i,\ i_1\le v_1,\ldots,i_{r-1}\le v_{r-1}}\frac{(s-i)!}{i_1!\cdots i_{r-1}!}$ façons si $r\ge 2$ et $\gamma^s_{(u_1=s)}$ si $r=1$, c'est à dire ces copies ne peuvent pas être insérées dans les blocs $B_r, \ldots, B_k$ puisque ces blocs ont des éléments minimaux $\geq r+1$. Donc, le nombre total de façons est

$$\sum_{i=0}^{u_r} \binom{s}{i} \gamma^i \sum_{i_1+\cdots+i_{r-1}=s-i,\ i_1 \leq v_1, \ldots, i_{r-1} \leq v_{r-1}} \frac{(s-i)!}{i_1! \cdots i_{r-1}!} = a\left(r, r-1; \gamma\right) \quad \text{si} \quad r \geq 2,$$

$$\gamma^s \delta_{(u_r=s)} = a\left(1, 0; \gamma\right) \quad \text{si} \quad r=1.$$

Alors, $P_{r-1}^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}\left(n, k; \gamma\right) - P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}\left(n, k; \gamma\right) = a\left(r, r-1; \gamma\right) P_{r-1}^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}\left(n-1, k; \gamma\right).$ □

2.3 Expressions explicites et fonction génératrice

La fonction génératrice ordinaire des nombres $P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}\left(n, k; \gamma\right)$ peut être exprimée comme suit.

Théorème 42. *Soit k, n, r des entiers non-négatifs avec $n \geq k \geq r$. Alors, nous avons*

$$P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n, k; \gamma) = \sum_{r=m_r<m_{r+1}<\cdots<m_k<m_{k+1}=n+1} \left(\prod_{l=m_j+1}^{m_{j+1}-1} a\left(l, r; \gamma\right) \right) \cdots \left(\prod_{l=m_j+1}^{m_{j+1}-1} a\left(l, k; \gamma\right) \right) \tag{3.6}$$

avec la convention $\prod_{l=m_j+1}^{m_{j+1}-1} a\left(l, j; \gamma\right) = 1$ *quand* $m_{j+1} = m_j + 1, \quad r \leq j \leq k-1.$

Démonstration. Pour $r \geq 1$, soit $m_j = \min\left(B_j\right) = j$ pour $1 \leq j \leq r$ et $m_j = \min B_j$ pour $r+1 \leq j \leq k$ et soit $m_{k+1} = n+1$ avec $r+1 \leq m_{r+1} < \cdots < m_k < m_{k+1}$. Nous avons $m_{j+1} - m_j - 1$ entiers dans $]m_j, m_{j+1}[$ pour $j = r, \ldots, k$. Pour $j = r, \ldots, k$, si $l \in]m_j, m_{j+1}[$, alors, s'il y a i copies de l $(i \leq u_l)$ dans $A_1 \cup \cdots \cup A_\gamma$ (avec $\binom{s_l}{i}\gamma^i$ façons), les $s_l - i$ copies restantes de l ne peuvent être insérées que dans $B_1 \cup \ldots \cup B_j$ avec $\sum_{i_1+\cdots+i_j=s_l-i,\ i_1 \leq v_1, \ldots, i_j \leq v_j} \frac{(s_l-i)!}{i_1! \cdots i_j!}$ façons. Alors, nous obtenons dans ce cas

$$\sum_{i=0}^{u_l} \binom{s_l}{i} \gamma^i \sum_{i_1+\cdots+i_j=s_l-i,\ i_1 \leq v_1, \ldots, i_j \leq v_j} \frac{(s_l-i)!}{i_1! \cdots i_j!} = a\left(l, j; \gamma\right)$$

façons. Ainsi (3.6) est valable pour $r \geq 1$.

Pour $r = 0$, soit $m_0 = 0$ et $m_j = \min B_j$ pour $1 \leq j \leq k$ et soit $m_{k+1} = n+1$ avec

$1 \leq m_1 < \cdots < m_k < m_{k+1}$. Comme ci-dessus, pour $j = 1, \ldots, k$, les s_l copies de $l \in]m_j, m_{j+1}[$ peuvent être insérées dans les blocs-zéros ou dans les blocs-non-zéros $B_1, \ldots, B_j$ en $a_j(s_l, u_l, v; \gamma)$ façons and quand $l \in]0, m_1[$, les s_l copies de l ne peuvent être insérées que dans les blocs-zéros avec $a(l, 0; \gamma)$ façons qui est possible uniquement lorsque $u_l = s_l$ et $u_1 = s_1$. Alors, (3.6) est vérifiée pour $r = 0$. □

Le théorème suivant donne une relation de récurrence pour les nombres $P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n, k; \gamma)$ et un lien avec les fonctions symétriques.

Théorème 43. *Pour tous entiers non-négatifs n, k, r, nous avons :*

$$P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n, k; \gamma) = \sum_{j=r}^{n} a(j + k, j; \gamma)\, P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(j + k - 1, j; \gamma)\,,\ n > k \geq r, \tag{3.7}$$

et pour $n \geq r,\ k > 0$, la relation de récurrence précédente donne :

$$P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n + k, n; \gamma) = \sum_{r \leq j_1 \leq \ldots \leq j_k \leq n} a(j_1 + 1, j_1; \gamma) \cdots a(j_k + k, j_k; \gamma)\,. \tag{3.8}$$

Exemple 44. *Posons $a_j = j(j + 2\gamma - 1)$, nous obtenons les identités 4.5 et 4.6.*

Démonstration. Soit $F_{k,r}(x; \gamma) = \sum_{n \geqslant r} P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n + k, n; \gamma)\, x^n$.
A partir de la proposition 40, nous avons

$$\begin{aligned} F_{k,r}(x; \gamma) &= x \sum_{n \geqslant r+1} P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n - 1 + k, n - 1; \gamma)\, x^{n-1} \\ &\quad + \sum_{n \geqslant r} a(n + k, n; \gamma)\, P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n + k - 1, n; \gamma)\, x^n \\ &= x F_{k,r}(x; \gamma) + \sum_{n \geqslant r} a(n + k, n; \gamma)\, P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n + k - 1, n; \gamma)\, x^n \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} F_{k,r}(x; \gamma) &= \frac{1}{1 - x} \sum_{n \geqslant r} a(n + k, n; \gamma)\, P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n + k - 1, n; \gamma)\, x^n \\ &= \sum_{n \geqslant r} x^n \sum_{j=r}^{n} a(j + k, j; \gamma)\, P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(j + k - 1, j; \gamma) \end{aligned}$$

et ceci donne l'identité (3.7).

Nous en déduisons également en utilisant l'identité (3.7) de manière récursive

$$\begin{aligned}
&P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}\left(n+k,n;\gamma\right)\\
&=\sum_{j_k=r}^{n} a\left(j_k+k,j_k;\gamma\right)P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}\left(j_k+k-1,j_k;\gamma\right)\\
&=\sum_{r\le j_{k-1}\le j_k\le n} a\left(j_k+k,j_k;\gamma\right)a\left(j_{k-1}+k-1,j_{k-1};\gamma\right)P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}\left(j_{k-1}+k-2,j_{k-1};\gamma\right)\\
&=\sum_{r\le j_k\le\ldots\le j_1\le n} a\left(j_k+k,j_k;\gamma\right)\cdots a\left(j_1+1,j_1;\gamma\right)P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}\left(j_1,j_1;\gamma\right).
\end{aligned}$$

Utilisant (3.6) pour obtenir $P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}\left(j_1,j_1;\gamma\right)=1$. □

Proposition 45. *Pour $r\ge p\ge 0$ nous avons :*

$$\begin{aligned}
&P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n,k;\gamma)\\
&=\sum_{j=0}^{n-r}\binom{n-r}{j}\left(\prod_{l=1}^{j}a\left(p+l,p;\gamma\right)\right)P_{r-p}^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n-p-j,k-p;\gamma).
\end{aligned}\tag{3.9}$$

En particulier, pour $p=r$ nous obtenons :

$$P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n+r,k+r;\gamma)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\prod_{l=1}^{j}a\left(p+l,p;\gamma\right)\right)P^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n-j,k;\gamma),\tag{3.10}$$

avec la convention $\prod_{l=1}^{0}a\left(p+l,p;\gamma\right)=1$.

Exemple 46. *En posant $a_j=j$, nous obtenons la relation de récurrence suivante donné par Broder [9, Th.14]*

$$S_r(n+r,k+r)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}S_p(n-j+p,k+p)(r-p)^j$$

Démonstration. Pour former une r-$(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})$-partition en γ blocs-zéros et k blocs-non-zéros sachant que $1,\ldots,r$ sont des éléments minimaux des r blocs-non-zéros, choisir d'abord j nombres dans l'ensemble $\{r+1,\ldots,n\}$ pour être dans les p blocs-non-zéros dont les éléments minimaux $1,\ldots,p$ et construire les $p+\gamma$ blocs, cela peut se faire en $P_p^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(p+j,p;\gamma)$ façons. Les nombres $n-p-j$ restants doivent former $k-p$ blocs-non-zéros tels que

$p+1,\ldots,r$ soient des éléments minimaux, cela peut se faire en $P_{r-p}^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n-p-j,k-p;\gamma)$ façons. En résumé, nous obtenons

$$P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n+r,k+r;\gamma)=\sum_{j=0}^{n-r}\binom{n-r}{j}P_p^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(p+j,p;\gamma)\,P_{r-p}^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n-p-j,k-p;\gamma).$$

Pour compléter la preuve, utilisant (3.8) pour avoir $P_p^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(p+j,p;\gamma)=\prod_{l=1}^{j}a\left(p+l,p;\gamma\right).$

□

3 Cas où $u_n = v_n = s_n$

Dans ce cas nous avons

$$a\left(n,k;\gamma\right)=\left(k+\gamma\right)^{s_n}.$$

et (s_n) décroissante.

A partir des propositions 40, 41 et les théorèmes 42, 43, on obtient les deux corollaires suivants :

Corollaire 47. *On a :*

$$P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}\left(n,k;\gamma\right)=\sum_{r=m_r<m_{r+1}<\cdots<m_k<m_{k+1}=n+1}\;\prod_{j=r}^{k}\left(j+\gamma\right)^{s_{m_j+1}+\cdots+s_{m_{j+1}-1}},$$

avec $s_{m_j+1}+\cdots+s_{m_{j+1}-1}=0$ *quand* $m_{j+1}=m_j+1,\ \ r\leq j\leq k-1.$

La proposition 45 devient

Corollaire 48. *On a :*

$$P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n,k;\gamma)=\sum_{j=0}^{n-r}\binom{n-r}{j}\left(p+\gamma\right)^{s_{p+1}+\cdots+s_{p+j}}P_{r-p}^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n-p-j,k-p;\gamma).$$

En particulier, pour $p=0$ *ou* $p=r$, *nous avons*

$$P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n,k;\gamma)=\sum_{j=1}^{n-r}\binom{n-r}{j}\gamma^{s_1+\cdots+s_j}P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n-j,k;\gamma),$$

$$P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n+r,k+r;\gamma)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(r+\gamma\right)^{s_{r+1}+\cdots+s_{r+j}}P^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n-j,k;\gamma)$$

avec la convention $\left(r+\gamma\right)^{s_{m+1}+\cdots+s_{m+j}}=1$ *quand* $j=0.$

4 Cas où $u_n = u$, $v_n = v$ et $s_n = s$ pour tout n

Notons par

$$a_k(s,u,v;\gamma) := a(n,k;\gamma) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{s} \left[(\exp_v(t))^k \exp_u(\gamma t)\right], \quad n \geq 1,\ k \geq 0.$$

et

$$P_r^{(s,u,v)}(n,k;\gamma) := P_r^{(\mathbf{s},\mathbf{u},\mathbf{v})}(n,k;\gamma)$$

Les propositions 40 et 41 donnent les corollaires suivants :

Corollaire 49. *Pour tous entiers positifs n, k et entier non-négatif r avec $n \geq k \geq r$, $n > r$, les nombres $P_r^{(s,u,v)}(n,k;\gamma)$ satisfont*

$$P_r^{(s,u,v)}(n,k;\gamma) = P_r^{(s,u,v)}(n-1,k-1;\gamma) + a_k(s,u,v;\gamma)\,P_r^{(s,u,v)}(n-1,k;\gamma), \tag{3.11}$$

$$P_{r+1}^{(s,u,v)}(n,k;\gamma) = P_r^{(s,u,v)}(n,k;\gamma) - a_r(s,u,v;\gamma)\,P_r^{(s,u,v)}(n-1,k;\gamma). \tag{3.12}$$

Le théorème 42 donne le corollaire suivant :

Corollaire 50. *Pour tous entiers non-négatifs k, n, r avec $n \geq k \geq r$. Alors,*

$$P_r^{(s,u,v)}(n,k;\gamma) = \sum_{r=m_r<m_{r+1}<\cdots<m_k<m_{k+1}=n+1} \prod_{j=r}^{k} \left(a_j(s,u,v;\gamma)\right)^{m_{j+1}-m_j-1} \tag{3.13}$$

et

$$\sum_{n\geqslant 0} P_r^{(s,u,v)}(n+k,k;\gamma)t^n = \prod_{j=r}^{k} \left(1 - a_j(s,u,v;\gamma)\,t\right)^{-1} \tag{3.14}$$

avec la convention $m_{k+1} = n+1$ et $\prod_{l=m_j+1}^{m_{j+1}-1} a_j(s,u,v;\gamma) = 1$ quand $m_{j+1} = m_j + 1$.

Le théorème 43 donne le corollaire suivant :

Corollaire 51. *Pour tous entiers non-négatifs k, n, r. Alors, pour $n \geq r,\ k > 0$, nous avons*

$$P_r^{(s,u,v)}(n,k;\gamma) = \sum_{j=r}^{k} a_j(s,u,v;\gamma)\,P_r^{(s,u,v)}(j+n-k-1,j;\gamma), \quad n > k \geq r, \tag{3.15}$$

$$P_r^{(s,u,v)}(n+k,n;\gamma) = \sum_{r\leq j_1\leq\ldots\leq j_k\leq n} a_{j_1}(s,u,v;\gamma)\cdots a_{j_k}(s,u,v;\gamma), \quad n > 0,\ \ n \geq r,\ k > 0. \tag{3.16}$$

De la proposition 45

Corollaire 52. *Pour $r \geq p \geq 0$, on a*

$$P_r^{(s,u,v)}(n,k;\gamma) = \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} \left(a_p\left(s,u,v;\gamma\right)\right)^j P_{r-p}^{(s,u,v)}(n-p-j,k-p;\gamma)$$

En particulier, pour $p = r$ on obtient

$$P_r^{(s,u,v)}(n+r,k+r;\gamma) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(a_r\left(s,u,v;\gamma\right)\right)^j P_r^{(s,u,v)}(n-j,k;\gamma). \tag{3.17}$$

On a de plus la proposition suivante :

Proposition 53. *Pour $v \neq 0$, les propriétés suivantes sont satisfaites*

(1) le nombre $a_n\left(s,u,v;\gamma\right)$ est un polynôme en n de degré s,

(2) le nombre $P_r^{(s,u,v)}(n+r,k+r;\gamma)$ est un polynôme en r de degré sn, et,

(3) le nombre $P_r^{(s,u,v)}(n+k,n;\gamma)$ est un polynôme en n de degré $(s+1)\,k$.

Démonstration. Pour $v \neq 0$ nous avons

$$\begin{aligned}
a_n\left(s,u,v;\gamma\right) &= \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{s} \left[\left(\exp_v\left(t\right)\right)^n \left(\exp_u\left(\gamma t\right)\right)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{u} \binom{s}{i} \gamma^i \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{s-i} \left[\exp\left(n \ln\left(\exp_v\left(t\right)\right)\right)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{u} \binom{s}{i} \gamma^i \sum_{l=0}^{s-i} \frac{n^l}{l!} \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{s-i} \left(\ln\left(\exp_v\left(t\right)\right)\right)^l \\
&= \sum_{l=s-u}^{s} \frac{n^l}{l!} \sum_{i=0}^{s-l} \binom{s}{i} \gamma^i \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{s-i} \left(\ln\left(\exp_v\left(t\right)\right)\right)^l \\
&= \sum_{l=s-u}^{s} \theta_l n^l,
\end{aligned}$$

avec le grand coefficient $\theta_s = \frac{1}{s!}\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{s-i} \left(\ln\left(\exp_v\left(t\right)\right)\right)^s = 1$. Il s'ensuit que a_n est un polynôme en n avec degré s. Ainsi, en utilisant (3.17), il en résulte que $P_r^{(s,u,v)}(n+r,k+r;\gamma)$ est un polynôme en r de degré sn. Par un résultat dû à Stanley [57, Cor. 4.3.1], du fait que $P_r^{(s,u,v)}\left(n+k,n;\gamma\right)$ est un polynôme en n (Corollaire 50) de degré supposé m_k alors $F_{k,r}^{(s,u,v)}\left(x;\gamma\right) := \sum_{n \geqslant r} P_r^{(s,u,v)}\left(n+k,n;\gamma\right) x^n = \dfrac{Q_{m_k}\left(x\right)}{\left(1-x\right)^{m_k+1}}$.Alors par la proposition 54, on a

$$\begin{aligned}
F_{k,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma) &= \frac{1}{1-x}\sum_{j=0}^{s} t_j x^j \left(\frac{d}{dx}\right)^j F_{k-1,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma) \\
&= \frac{Q_{m_k}(x)}{(1-x)^{m_k+1}} \\
&= \frac{1}{1-x}\sum_{j=0}^{s} t_j x^j \left(\frac{d}{dx}\right)^j \frac{P_{k-1}(x)}{(1-x)^{m_{k-1}}} \\
&= \frac{T_{m_{k-1}+s}(x)}{(1-x)^{m_{k-1}+1+s}}
\end{aligned}$$

ça signifie

$$\begin{aligned}
m_k &= m_{k-1} + 1 + s \\
&= m_{k-2} + 2(1+s) \\
&= k(1+s) + m_0 \\
&= k(1+s).
\end{aligned}$$

□

Maintenant, nous allons introduire une fonction génératrice des nombres $P_r^{(s,u,v)}$ qui pourra nous en donner de nouvelles informations. Son utilité peut être plus claire dans les cas particuliers donnés dans le chapitre suivant.

Proposition 54. *Pour tous entiers non-négatifs* n, k, *la suite de fonctions* $(F_{k,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma))$ *définie par*

$$F_{k,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma) = \sum_{n\geqslant r} P_r^{(s,u,v)}(n+k,n;\gamma)\, x^n, \ \ s \geq \max(u,v,1).$$

satisfait

$$\begin{aligned}
F_{0,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma) &= \frac{x^r}{1-x}, \\
F_{k,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma) &= \frac{1}{1-x}\sum_{j=0}^{s} t_j x^j \left(\frac{d}{dx}\right)^j F_{k-1,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma), \ \ r \geq 0,\ k \geq 1,
\end{aligned}$$

où

$$t_j = \frac{1}{j!}\left(\frac{d}{dt}\right)^s_{t=0} \left[\exp_u(\gamma t)\left(\exp_v(t)-1\right)^j\right] = 1_{(j\leq s)} \sum_{l=j}^{s} \binom{s}{l} \gamma^{s-j} S^{(\leq v)}(l,j)$$

et $S^{(\leq v)}(n,k)$ sont les nombres de Stirling tronqués de seconde espèce par définition comptent le nombres de façon de partitionner un ensemble à n éléments en k blocs tels que la taille des blocs est inférieur ou égal à v.
Nous avons aussi

$$F_{k,r+1}^{(s,u,v)}(x;\gamma) = F_{k,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma) - a_r(s,u,v;\gamma)\, F_{k-1,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma), \quad r \geq 0, \ k \geq 1.$$

Démonstration. Pour $k=0$, comme $P_r^{(s,u,v)}(n,n;\gamma) = 1$ on obtient

$$F_{k,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma) = \sum_{n\geqslant r} P_r^{(s,u,v)}(n,n;\gamma)\, x^n = \sum_{n\geqslant r} x^n = \frac{x^r}{1-x}.$$

A l'aide du corollaire 49 il s'ensuit que

$$\begin{aligned} F_{k,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma) &= x \sum_{n\geqslant r+1} P_r^{(s,u,v)}(n-1+k, n-1;\gamma)\, x^{n-1} \\ &\quad + \sum_{n\geqslant r} a_n P_r^{(s,u,v)}(n+k-1,n;\gamma)\, x^n \\ &= x F_{k,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma) + \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{s} \left(\exp_u(\gamma t)\, F_{k-1,r}^{(s,u,v)}(x\exp_v(t);\gamma)\right) \end{aligned}$$

ou d'une manière équivalente

$$F_{k,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma) = \frac{1}{1-x}\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{s} \left(\exp_u(\gamma t)\, F_{k-1,r}^{(s,u,v)}(x\exp_v(t);\gamma)\right). \tag{3.18}$$

Maintenant, à partir de la formule de Leibniz on obtient

$$F_{k,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma) = \frac{1}{1-x}\sum_{l=0}^{s}\binom{s}{l}\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{s-l}(\exp_u(\gamma t))\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{l}\left[F_{k-1,r}^{(s,u,v)}(x\exp_v(t);\gamma)\right]$$

et d'après la formule de Riordan [53]

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{t}^{n} g(f(t)) = \sum_{k=0}^{n} g^{(k)}(f(t))\, B_{n,k}\left(f'(t), f''(t), \ldots f^{(n-k+1)}(t)\right)$$

où $B_{n,k}(x_j) := B_{n,k}(x_1, x_2, \ldots)$ sont les polynômes de Bell [17, 48] définis par

$$\sum_{n\geq k} B_{n,k}(x_j)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\sum_{m\geq 1} x_m \frac{t^m}{m!}\right)^k$$

il en résulte que

$$
\begin{aligned}
&(1-x)\, F_{k,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma) \\
&= \sum_{l=0}^{s} \binom{s}{l} \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{s-l} (\exp_u(\gamma t)) \sum_{j=0}^{l} \left(\frac{d}{dx}\right)^{j} F_{k-1,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma)\, B_{l,j}\Big(\overbrace{x,\ldots,x}^{v \text{ fois}},0,\ldots\Big) \\
&= \sum_{l=0}^{s} \binom{s}{l} \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{s-l} (\exp_u(\gamma t)) \sum_{j=0}^{l} \frac{x^j}{j!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{j} F_{k-1,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma) \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{l} \left[(\exp_v(t)-1)^j\right] \\
&= \sum_{j=0}^{s} x_j \left(\frac{d}{dx}\right)^{j} F_{k-1,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma),
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
x_j &= \frac{x^j}{j!} \sum_{l=j}^{s} \binom{s}{l} \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{s-l} (\exp_u(\gamma t)) \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{l} (\exp_v(t)-1)^j \\
&= \frac{x^j}{j!} \sum_{l=0}^{s} \binom{s}{l} \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{s-l} (\exp_u(\gamma t)) \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{l} (\exp_v(t)-1)^j \\
&= \frac{x^j}{j!} \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{s} \left[\exp_u(\gamma t)(\exp_v(t)-1)^j\right] \\
&= \frac{x^j}{j!} 1_{(j\le s)} \sum_{l=j}^{s} \binom{s}{l} \gamma^{s-j} S^{(\le v)}(l,j) \\
&= x^j t_j.
\end{aligned}
$$

La dernière identité du Corollaire 54 suit de (3.12) . □

Remarque 55. *Si $G_{k,r}^{(s,u,v)}(t;\gamma) := F_{k,r}^{(s,u,v)}(\exp(t);\gamma)$, la proposition 54 est équivalente à*

$$
\begin{aligned}
G_{0,r}^{(s,u,v)}(t;\gamma) &= \frac{\exp(rt)}{1-\exp(t)}, \\
G_{k,r}^{(s,u,v)}(t;\gamma) &= \frac{1}{1-\exp(t)} \sum_{j=0}^{s} \beta_j \left(\frac{d}{dx}\right)^{j} G_{k-1,r}^{(s,u,v)}(t;\gamma),
\end{aligned}
$$

où

$$
\beta_j = \frac{1}{j!} \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{s} \left[\exp_u(\gamma t)(\ln(\exp_v(t)))^j\right].
$$

En effet, de la formule de Riordan [53] on obtient

$$
\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} g(\exp(t)) = \sum_{k=0}^{n} \exp(kt)\, g^{(k)}(\exp(t))\, S(n,k),
$$

ce qui donne

$$\exp(nt)\, g^{(n)}(\exp(t)) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) \left(\frac{d}{dt}\right)^{k} (g(\exp(t))),$$

où $s(n,k)$ *sont les nombres de Stirling de première espèce. Donc*

$$\begin{aligned}(1-\exp(t))\, G_{k,r}^{(s,u,v)}(t;\gamma) &= \sum_{j=0}^{s} t_j \left(\exp(jt) \left(\frac{d}{dx}\right)_{x=\exp(t)}^{j} F_{k-1,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{s} t_j \left(\sum_{l=0}^{j} (-1)^{j-l} s(j,l) \left(\frac{d}{dt}\right)^{l} G_{k-1,r}^{(s,u,v)}(t;\gamma)\right) \\ &= \sum_{l=0}^{s} \beta_l \left(\frac{d}{dt}\right)^{l} G_{k-1,r}^{(s,u,v)}(t;\gamma).\end{aligned}$$

En plus de la fonction génératrice définie ci-dessus, nous introduisons le polynôme de partition défini dans la proposition suivante.

Proposition 56. *Soit*

$$B_{n,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma) = \sum_{k=0}^{n} P_r^{(s,u,v)}(n+r, k+r; \gamma)\, x^k.$$

Alors

$$B_{n+1,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma) = x B_{n,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma) + \sum_{j=0}^{s} T_j x^j \left(\frac{d}{dx}\right)^{j} B_{n,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma),$$

où

$$T_j = \frac{1}{j!} \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{s} \left[\exp_u(\gamma t)(\exp_v(t))^r (\exp_v(t)-1)^j\right].$$

Démonstration. A l'aide de la définition de $B_{n,r}^{(s,u,v)}$ on peut écrire en utilisant la relation de récurrence (3.11)

$$\begin{aligned}B_{n,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma) &= \sum_{k=0}^{n} P_r^{(s,u,v)}(n+r,k+r;\gamma)\, x^k \\ &= x B_{n-1,r}^{(s,u,v)}(x;\gamma) + \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{s} \left[\exp_u(\gamma t)(\exp_v(t))^r B_{n-1,r}^{(s,u,v)}(x \exp_v(t);\gamma)\right].\end{aligned}$$

Ensuite, de même que la preuve de la proposition 54 on obtient l'identité souhaitée. □

4.1 Cas où $u = v = s$

Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} a_n(s,s,s;\gamma) &= (n+\gamma)^s, \\ t_j &= S_\gamma(s+\gamma, j+\gamma), \\ \beta_j &= \binom{s}{j}\gamma^{s-j}, \\ T_j &= S_{r+\gamma}(s+r+\gamma, j+r+\gamma). \end{aligned}$$

où $S_r(n,k)$ sont les nombres r-Stirling de seconde espèce.

Ensuite, si nous mettons

$$P_r^{(s,u,v)}(n,k;\gamma) := P_r^{(s)}(n,k;\gamma),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} P_r^{(s)}(r+k,r;\gamma) &= (r+\gamma)^{sk}, \\ P_r^{(s)}(n+r+1,n+r;\gamma) &= \sum_{j=0}^{n}(j+r+\gamma)^s \end{aligned}$$

et les relations et les identités ci-dessus deviennent

$$\begin{aligned} P_r^{(s)}(n,k;\gamma) &= P_r^{(s)}(n-1,k-1;\gamma) + (k+\gamma)^s P_r^{(s)}(n-1,k;\gamma), \\ P_{r+1}^{(s)}(n,k;\gamma) &= P_r^{(s)}(n,k;\gamma) - (r+\gamma)^s P_r^{(s)}(n-1,k;\gamma), \\ P_r^{(s)}(n,k;\gamma) &= \sum_{j=r}^{k}(j+\gamma)^s P_r^{(s)}(j+n-k-1,j;\gamma), \quad n>k\geq r\geq 0, \end{aligned}$$

$$P_r^{(s)}(n+k,n;\gamma) = \sum_{r\leq j_k\leq\ldots\leq j_1\leq n}(j_1+\gamma)^s\cdots(j_k+\gamma)^s, \quad n\geq 1, \quad n\geq r\geq 0, \ k\geq 1,$$

$$\sum_{n\geqslant 0} P_r^{(s)}(n+k,k;\gamma)t^n = \prod_{j=r}^{k}\left(1-(j+\gamma)^s t\right)^{-1},$$

$$P_r^{(s)}(n+r,k+r;\gamma) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a_r^j P^{(s)}(n-j,k;\gamma).$$

Proposition 57. *on a*

$$\sum_{n\geqslant r} P_r^{(s)}(n+k,n;\gamma)\,x^n = \left(\frac{1}{1-x}\left(\gamma + x\frac{d}{dx}\right)^s\right)^k \frac{x^r}{1-r}.$$

Démonstration. Soit $F_{k,r}^{s}(x;\gamma)=\sum\limits_{n\geqslant r}S_{r}(n+k,n)\,x^{n}$. Puis, de la proposition 54 il s'ensuit

$$\begin{aligned}F_{k,r}^{s}(x;\gamma)&=\frac{1}{1-x}\sum_{j=0}^{s}S_{\gamma}(s+\gamma,j+\gamma)\,x^{j}\left(\frac{d}{dx}\right)^{j}F_{k-1,r}^{s}(x;\gamma)\\&=\frac{1}{1-x}\sum_{l=0}^{s}\binom{s}{l}\gamma^{s-l}\sum_{j=0}^{l}S(l,j)\,x^{j}\left(\frac{d}{dx}\right)^{j}F_{k-1,r}^{s}(x;\gamma),\end{aligned}$$

et, en utilisant l'identité $\sum\limits_{j=0}^{k}S(k,j)\,x^{j}\left(\frac{d}{dx}\right)^{j}=\left(x\frac{d}{dx}\right)^{k}$ [23], nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}F_{k,r}^{s}(x;\gamma)&=\frac{1}{1-x}\sum_{l=0}^{s}\binom{s}{l}\gamma^{s-l}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{l}F_{k-1,r}^{s}(x;\gamma)\\&=\frac{1}{1-x}\left(\gamma+x\frac{d}{dx}\right)^{s}F_{k-1,r}^{s}(x;\gamma)\\&=\left(\frac{1}{1-x}\left(\gamma+x\frac{d}{dx}\right)^{s}\right)^{k}\frac{x^{r}}{1-r}.\end{aligned}$$

□

Soit

$$B_{n,r}^{(s)}(x;\gamma)=\sum_{k=0}^{n}P_{r}^{(s)}(n+r,k+r;\gamma)\,x^{k}.$$

Alors

$$\begin{aligned}B_{0,r}^{(s)}(x;\gamma)&=1,\\B_{1,r}^{(s)}(x;\gamma)&=x+(r+\gamma)^{s},\\B_{2,r}^{(s)}(x;\gamma)&=x^{2}+x\left((r+\gamma)^{s}+(r+\gamma+1)^{s}\right)+(r+\gamma)^{2s}.\end{aligned}$$

Proposition 58. *On a*

$$\begin{aligned}B_{n+1,r}^{(s)}(x;\gamma)&=\left(x+\left(r+\gamma+x\frac{d}{dx}\right)^{s}\right)B_{n,r}^{(s)}(x;\gamma),\\B_{n,r}^{(s)}(x;\gamma)&=\left(x+\left(r+\gamma+x\frac{d}{dx}\right)^{s}\right)^{n}1.\end{aligned}$$

Démonstration. De la proposition 56 et [23] on a

$$\begin{aligned}
&B_{n+1,r}^{s}\left(x;\gamma\right)-xB_{n,r}^{s}\left(x;\gamma\right)\\
&=\sum_{j=0}^{s}S_{r+\gamma}\left(s+r+\gamma,j+r+\gamma\right)x^{j}\left(\frac{d}{dx}\right)^{j}B_{n,r}^{s}\left(x;\gamma\right)\\
&=\sum_{l=0}^{s}\binom{s}{l}\left(r+\gamma\right)^{s-l}\sum_{j=0}^{l}S\left(l,j\right)x^{j}\left(\frac{d}{dx}\right)^{j}B_{n,r}^{s}\left(x;\gamma\right)\\
&=\sum_{l=0}^{s}\binom{s}{l}\left(r+\gamma\right)^{s-l}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{l}B_{n,r}^{s}\left(x;\gamma\right)\\
&=\left(r+\gamma+x\frac{d}{dx}\right)^{s}B_{n,r}^{s}\left(x;\gamma\right).
\end{aligned}$$

□

CHAPITRE 4

CAS PARTICULIERS DES NOMBRES DE STIRLING GÉNÉRALISÉS

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques nombres qui apparaissent comme des cas particuliers des nombres de Stirling généralisés.

2 Nombres particuliers : $u_n = u,\ v_n = v, s_n = s$

Nous avons les nombres combinatoires connus suivants.

2.1 Les coefficients binomiaux

Pour $s = u = \gamma = 1,\ v = r = 0$ nous avons $a_j = 1$ et de (3.14) nous obtenons

$$\sum_{n\geqslant 0} P_0^{(1,1,0)}(n+k,k;1)t^n = (1-t)^{-k-1} = \sum_{n\geq 0}\binom{n+k}{k}t^n,$$

ce qui donne que les coefficients binomiaux peuvent être exprimés comme

$$\binom{n}{k} = P_0^{(1,1,0)}(n,k;1).$$

De (3.15), nous avons

$$\binom{n+k+1}{k} = \sum_{j=0}^{k}\binom{n+j}{j}.$$

Nous avons aussi de la proposition 54

$$\sum_{n\geqslant r}\binom{n+k}{n}x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

En effet, nous pouvons vérifier que $t_j = \delta_j$ et

$$\begin{aligned} F_{k,r}^{(1,1,0)}(x;\gamma) &= \frac{1}{1-x}\sum_{j=0}^{s} t_j x^j \left(\frac{d}{dx}\right)^j F_{k-1,r}^{(1,1,0)}(x;\gamma) \\ &= \frac{1}{1-x}F_{k-1,r}^{(1,1,0)}(x;\gamma) \\ &= \frac{1}{(1-x)^{k+1}}, \end{aligned}$$

où $\delta_n = 1$ si $n = 0$ et $\delta_n = 0$ si $n \neq 0$.

2.2 Les nombres r-Stirling de seconde espèce

Les nombres r-Stirling de seconde espèce $S_r(n,k)$ sont étudiés par Broder [9]. Ils sont définis par leurs fonctions génératrices données par

$$\sum_{n\geqslant 0} S_r(n+k,k)\,t^n = \prod_{j=r}^{k}(1-jt)^{-1} \quad \text{et}$$
$$\sum_{n\geqslant k} S_r(n+r,k+r)\,\frac{t^n}{n!} = \frac{\exp(rt)}{k!}(\exp(t)-1)^k.$$

Alors, de (3.14) nous avons

$$\sum_{n\geqslant 0} P_r^{(1,0,1)}(n+k,k;\gamma)\,t^n = \sum_{n\geqslant 0} P_{r+1}^{(1,1,1)}(n+k+1,k+1;1)\,t^n = \prod_{j=r}^{k}(1-jt)^{-1}$$

ce qui montre que

$$S_r(n,k) = P_r^{(1,0,1)}(n,k;\gamma) = P_{r+1}^{(1,1,1)}(n+1,k+1;1).$$

de (3.11), (3.12), (3.15), (3.16) et (3.17) nous obtenons des identités connues suivantes

$$\begin{aligned}
S_r(n,k) &= S_r(n-1,k-1) + kS_r(n-1,k),\\
S_{r+1}(n,k) &= S_r(n,k) - rS_r(n-1,k),\\
S_r(n,k) &= \sum_{j=r}^{k} jS_r(n+j-1,j), \quad n>k\geq r,\\
S_r(n+k,n) &= \sum_{r\leq j_k\leq\ldots\leq j_2\leq j_1\leq n} j_1j_2\cdots j_k, \quad n>k\geq r,\\
S_r(n+r,k+r) &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} r^j S(n-j,k).
\end{aligned}$$

Proposition 59. *Nous avons*

$$\sum_{n\geqslant r} S_r(n+k,n)\,(w(t))^n = \left(\frac{d}{dt}\right)^k \frac{(w(t))^r}{1-w(t)},$$

où w est une fonction définie par

$$we^{-w} = t, \quad w(t) = \sum_{n\geqslant 1} n^{n-1}\frac{t^n}{n!}.$$

Démonstration. De la proposition 54, si nous posons

$$F_{k,r}\left(x\right)^{(1,0,1)}=\sum_{n\geqslant r}S_{r}\left(n+k,n\right)x^{n}$$

nous obtenons

$$F_{k,r}^{(1,0,1)}\left(x\right)=\frac{x}{1-x}\frac{d}{dx}F_{k-1,r}^{(1,0,1)}\left(x\right)=\left(\frac{x}{1-x}\frac{d}{dx}\right)^{k}F_{0,r}^{(1,0,1)}\left(x\right).$$

Donc, nous pouvons écrire

$$F_{k,r}^{(1,0,1)}\left(w\left(t\right)\right)=\frac{d}{dt}F_{k-1,r}^{(1,0,1)}\left(w\left(t\right)\right)=\left(\frac{d}{dt}\right)^{k}F_{0,r}^{(1,0,1)}\left(w\left(t\right)\right),$$

et puisque

$$F_{0,r}^{(1,0,1)}\left(x\right)=\sum_{n\geqslant r}S_{r}\left(n,n\right)x^{n}=\sum_{n\geqslant r}x^{n}=\frac{x^{r}}{1-x},$$

il en résulte

$$F_{k,r}^{(1,0,1)}\left(w\left(t\right)\right)=\sum_{n\geqslant r}S_{r}\left(n+k,n\right)\left(w\left(t\right)\right)^{n}=\left(\frac{d}{dt}\right)^{k}\frac{\left(w\left(t\right)\right)^{r}}{1-w\left(t\right)}.$$

□

Corollaire 60. *On a*

$$\sum_{m=r}^{n}mS_{r}\left(m+k,m\right)\frac{n^{n-m-1}}{(n-m)!}=k!\binom{n+k}{k}\sum_{m=r}^{n+k}m\frac{(n+k)^{n+k-m-1}}{(n+k-m)!}.$$

Démonstration. De la dernière proposition on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{m\geqslant r}S_{r}\left(m+k,m\right)\left(w\left(t\right)\right)^{m} &= \left(\frac{d}{dt}\right)^{k}\frac{\left(w\left(t\right)\right)^{r}}{1-w\left(t\right)}\\ &= \sum_{m\geqslant r}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k}\left(w\left(t\right)\right)^{m}\\ &= \sum_{m\geqslant r}\sum_{n\geqslant \max(m-k,0)}m!B_{n+k,m}\left(j^{j-1}\right)\frac{t^{n}}{n!}\end{aligned}$$

et

$$\sum_{m\geqslant r}S_{r}\left(m+k,m\right)\left(w\left(t\right)\right)^{m}=\sum_{n\geqslant r}\frac{t^{n}}{n!}\sum_{m=r}^{n}m!B_{n,m}\left(j^{j-1}\right)S_{r}\left(m+k,m\right),$$

Ensuite, à partir des deux expressions de $\sum_{m\geqslant r}S_{r}\left(m+k,m\right)\left(w\left(t\right)\right)^{m}$, il s'ensuit

$$\sum_{m=r}^{n}m!B_{n,m}\left(j^{j-1}\right)S_{r}\left(m+k,m\right)=\sum_{m=r}^{n+k}m!B_{n+k,m}\left(j^{j-1}\right).$$

Comme $B_{n,m}\left(j^{j-1}\right)=m\binom{n}{m}n^{n-m-1}$ [48, Exp. 5], il suit les résultats souhaités. □

2.3 Les nombres r-Jacobi-Stirling de seconde espèce

Ces nombres ont été étudiés de manière similaire à ce travail par Mihoubi et al. [41]. Posons $s = 2,\ v = u = 1$. Ici, nous obtenons $a_j = j\,(2\gamma + j - 1)$ et de (3.14) nous avons

$$\sum_{n\geqslant 0} P_r^{(2,1,1)}(n+k,k;\gamma)t^n = \prod_{j=r}^{k}\left(1 - j\,(2\gamma + j - 1)\,t\right)^{-1} \tag{4.1}$$

ce qui donne

$$JS_r\,(n,k;2\gamma-1) = P_r^{(2,1,1)}(n,k;\gamma). \tag{4.2}$$

De (3.11), (3.12),(3.15), (3.16) et (3.17), nous obtenons les identités connues suivantes :

$$JS_r\,(n,k;\gamma) = JS_r\,(n-1,k-1;\gamma) + k\,(2\gamma+k-1)\,JS_r\,(n-1,k;\gamma)\,, \tag{4.3}$$

$$JS_{r+1}\,(n,k;\gamma) = JS_r\,(n,k;\gamma) - r\,(2\gamma+r-1)\,JS_r\,(n-1,k;\gamma)\,, \tag{4.4}$$

$$JS_r\,(n,k;\gamma) = \sum_{j=r}^{k} j\,(j-1+2\gamma)\,JS_r\,(j+n-k-1,j;\gamma)\,,\ \ n > k \geq r, \tag{4.5}$$

$$JS_r\,(n+k,n;\gamma) = \sum_{r\leq j_k\leq\cdots\leq j_1\leq n} j_1\,(j_1-1+2\gamma)\cdots j_k\,(j_k-1+2\gamma)\,,\ \ n\geq r,\ k>0, \tag{4.6}$$

$$JS_r\,(n+r,k+r;\gamma) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left[r\,(r-1+2\gamma)\right]^j JS\,(n-j,k;\gamma)\,. \tag{4.7}$$

Proposition 61. *Nous avons*

$$\sum_{n\geqslant r} JS_r\,(n+k,n;2\gamma-1)\,x^n = \left(\frac{1}{(1-x)\,x^{2(\gamma-1)}}\frac{d}{dx}\left(x^{2\gamma}\frac{d}{dx}\right)\right)^k\frac{x^r}{1-x}.$$

Démonstration. Soit $F_{k,r}^{(2,1,1)}(x;\gamma) = \sum_{n\geqslant r} JS_r\,(n+k,n;2\gamma-1)\,x^n$.
Alors, de la proposition 54, nous obtenons

$$t_j = \frac{1}{j!}\left(\frac{d}{dt}\right)^2_{t=0}(1+\gamma t)\,t^j = 2\gamma\delta_{j-1} + \delta_{j-2},$$

et

$$\begin{aligned}
F_{k,r}^{(2,1,1)}(x;\gamma) &= \frac{1}{1-x}\sum_{j=0}^{s} t_j x^j \left(\frac{d}{dx}\right)^j F_{k-1,r}^{(2,1,1)}(x;\gamma) \\
&= \frac{2\gamma x}{1-x}\frac{d}{dx}F_{k-1,r}^{(2,1,1)}(x;\gamma) + \frac{x^2}{1-x}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 F_{k-1,r}^{(2,1,1)}(x;\gamma).
\end{aligned}$$

Cette dernière fonction peut aussi être mise sous la forme

$$\begin{aligned}
F_{k,r}^{(2,1,1)}(x;\gamma) &= \frac{1}{(1-x)\,x^{2(\gamma-1)}}\frac{d}{dx}\left(x^{2\gamma}\frac{d}{dx}\right) F_{k-1,r}^{(2,1,1)}(x;\gamma) \\
&= \left(\frac{1}{(1-x)\,x^{2(\gamma-1)}}\frac{d}{dx}\left(x^{2\gamma}\frac{d}{dx}\right)\right)^k F_{0,r}^{(2,1,1)}(x;\gamma) \\
&= \left(\frac{1}{(1-x)\,x^{2(\gamma-1)}}\frac{d}{dx}\left(x^{2\gamma}\frac{d}{dx}\right)\right)^k \frac{x^r}{1-x}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 62. *Soit*

$$B_{n,r}^{(2,1,1)}(x;\gamma) = \sum_{k=0}^{n} JS_r(n+r,k+r;\gamma)\,x^k.$$

Alors

$$\begin{aligned}
B_{n+1,r}^{(2,1,1)}(x;\gamma) &= \left(x + 2\gamma r + r(r-1) + 2(r+\gamma)\,x\frac{d}{dx} + x^2\left(\frac{d}{dx}\right)^2\right) B_{n,r}^{(2,1,1)}(x;\gamma), \\
B_{n,r}^{(2,1,1)}(x;\gamma) &= \left(x + 2\gamma r + r(r-1) + 2(r+\gamma)\,x\frac{d}{dx} + x^2\left(\frac{d}{dx}\right)^2\right)^n 1.
\end{aligned}$$

Démonstration. Utilisant la Proposition 56 avec

$$T_j = \frac{1}{j!}\left(\frac{d}{dt}\right)^2_{t=0}\left[(1+\gamma t)(1+t)^r t^j\right],$$

c'est à dire $T_0 = r(2\gamma + r - 1)$, $T_1 = 2(r+\gamma)$, $T_2 = 1$, $T_j = 0$, $j \geq 3$. □

Nombres factoriels centraux

Dans cette courte partie, on considère la suite des nombres factoriels centraux, dont deux suites extraites sont des cas particuliers des nombres de Jacobi-Stirling.

En effet, ces nombres sont définis dans l'ouvrage de Riordan [55, p.213-217] qui apparaissent comme coefficients de changement de bases par :

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} T\left(n, k\right) x^{[k]}$$

où

$$x^{[n]} = x\left(x + \frac{n}{2} - 1\right) \ldots \left(x + \frac{n}{2} - n + 1\right).$$

Les nombres $T\left(n, k\right)$ sont appelés *nombres factoriels centraux de seconde espèce.*
Ces nombres vérifient la relation triangulaire suivante :

$$T(n, k) = T(n-2, k-2) + \frac{1}{4}k^2T(n-2, k)$$

Les nombres $T\left(n, k\right)$ *ne sont pas tous des entiers, mais si on* se restreint à regarder les nombres factoriels centraux d'indices pairs $U(n, k) := T(2n, 2k)$, alors :

$$U(0,0) = 1, U(n, k) = 0, \text{ si } k \notin [n]$$
$$U(n, k) = U(n-1, k-1) + k^2U(n-1, k), n, k \geq 1$$

Les premières valeurs des suites $T(n, k)$ et $U(n, k)$ sont données par les tableaux suivants

n / k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	5	1			
4	1	21	14	1		
5	1	85	147	30	1	
6	1	341	1408	627	55	1

Table 4.1 – Les premières valeurs de $U\left(n, k\right)$

n / k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	0	1					
3	0	$\frac{1}{4}$	0	1				
4	0	0	1	0	1			
5	0	$\frac{1}{4^2}$	0	$\frac{10}{4}$	0	1		
6	0	0	1	0	5	0	1	
7	0	$\frac{1}{4^3}$	0	$\frac{91}{4^2}$	0	$\frac{35}{4}$	0	1

Table 4.2 – Les premiers valeurs de $T(n,k)$

Nous avons ces identités obtenus en posant $r=0$ ou 1 et $\gamma=\frac{1}{2}$

$$U(n,k)=U(n-1,k-1)+k^2U(n-1,k),$$

$$U(n,k)=\sum_{j=1}^{k}j^2U(j+n-k-1,j),\quad n>k\geq 1,$$

$$U(n+k,n)=\sum_{1\leq j_1\leq\ldots\leq j_k\leq n}j_1^2\cdots j_k^2,\ \ n\geq 1,\ k>0,$$

2.4 Les deux nombres p-Stirling de seconde espèce.

Les deux nombres p-Stirling de seconde espèce $S_1(n,k;p)$ et $S_2(n,k;p)$ sont introduits par Sun [58] et interprétés par les partitions k-matrice. Ils sont définis par leurs fonctions génératrices

$$\sum_{n\geqslant 0}S_1(n+k,k;p)\,t^n=\prod_{j=0}^{k}(1-j^pt)^{-1}\quad\text{et}$$

$$\sum_{n\geqslant k}S_2(n+k,k;p)\,t^n=\prod_{j=p-1}^{k+p-1}\left(1-\binom{j}{p}t\right)^{-1}.$$

Alors, de (3.14) nous avons

$$\sum_{n\geqslant 0}P_0^{(p,0,p)}(n+k,k;\gamma)\,t^n=\sum_{n\geqslant r}P_1^{(p,p,p)}(n+k+1,k+1;1)\,t^n=\prod_{j=0}^{k}(1-j^pt)^{-1}$$

ce qui montre que

$$S_1(n,k;p) = P_0^{(p,0,p)}(n,k;\gamma) = P_0^{(p,p,p)}(n+k,k;1)$$

et prouvé que ces nombres peuvent être aussi interprétés avec le dénombrement des partitions d'un multi-ensemble. De (3.11), (3.15) et (3.16) nous obtenons les identités connues suivantes

$$\begin{aligned}
S_1(n,k;p) &= S_1(n-1,k-1;p) + k^p S_1(n-1,k;p), \\
S_1(n,k;p) &= \sum_{j=1}^{k} j^p S_1(n-1,j;p), \quad n > k \geq 1, \\
S_1(n,k;p) &= \sum_{0 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_k \leq n} (j_1 j_2 \cdots j_k)^p, \quad n > k \geq 1.
\end{aligned}$$

Aussi, a partir (3.14) nous avons

$$\sum_{n \geqslant 0} P^{(p,0,1)}(n+k+p-1,k+p-1;\gamma)\left(\frac{t}{p!}\right)^n = \prod_{j=p}^{k+p-1}\left(1-\binom{j}{p}t\right)^{-1}$$

ce qui montre que $S_2(n,k;p) = \frac{1}{(p!)^n} P^{(p,0,1)}(n+p-1,k+p-1;\gamma)$ et

$$\begin{aligned}
S_2(n,k;p) &= S_2(n-1,k-1;p) + \binom{k}{p} S_2(n-1,k;p), \\
S_2(n,k;p) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{p} S_2(j+n-k-1,j), \\
S_2(n,k;p) &= \sum_{0 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_k \leq n} \binom{j_1}{p} \cdots \binom{j_k}{p}.
\end{aligned}$$

Proposition 63. *on a*

$$\sum_{n \geqslant p} S_1(n+k,n;p)x^n = \left(\frac{x}{1-x}\left(\frac{d}{dx}\right)^p\right)^k \frac{x}{1-x}.$$

Démonstration. A l'aide de la proposition 54, on obtient

$$F_k^{(p,0,p)}(x;\gamma) = \sum_{n \geqslant 0} P^{(p,0,1)}(n+k,n,\gamma)x^n = \sum_{n \geqslant 0} S_1(n+k,n;p)x^n.$$

Par le fait que

$$\begin{aligned} t_j &= \frac{1}{j!}\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{p}\left[\left(\exp_p(t)-1\right)^j\right] \\ &= \frac{1}{j!}\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{p}\left[\left(\exp(t)-1\right)^j\right] \\ &= S(p,j), \end{aligned}$$

il résulte que

$$\begin{aligned} F_k^{(p,0,p)}(x;\gamma) &= \frac{1}{1-x}\sum_{j=0}^{p} S(p,j)\, x^j \left(\frac{d}{dx}\right)^j F_{k-1}^{(p,0,p)}(x;\gamma) \\ &= \frac{1}{1-x}\left(x\frac{d}{dx}\right)^p F_{k-1}^{(p,0,p)}(x;\gamma). \end{aligned}$$

Maintenant, puisque

$$F_0^{(p,0,p)}(x;\gamma) = \sum_{n\geqslant 0} P^{(p,0,1)}(n,n,\gamma)x^n = \sum_{n\geqslant 0} x^n = \frac{1}{1-x},$$

on déduit que

$$F_k^{(p,0,p)}(x;\gamma) = \frac{x}{1-x}\left(\frac{d}{dx}\right)^p F_{k-1}^{(p,0,p)}(x;\gamma) = \left(\frac{x}{1-x}\left(\frac{d}{dx}\right)^p\right)^k \frac{1}{1-x}.$$

□

Proposition 64. *Soit*

$$B_n^{(p,0,p)}(x;\gamma) = \sum_{k=0}^{n} S_1(n,k;p)x^k.$$

Alors

$$\begin{aligned} B_{n+1}^{(p,0,p)}(x;\gamma) &= \left(x + \left(x\frac{d}{dx}\right)^p\right) B_n^{(p,0,p)}(x;\gamma), \\ B_n^{(p,0,p)}(x;\gamma) &= \left(x + \left(x\frac{d}{dx}\right)^p\right)^n 1. \end{aligned}$$

Démonstration. D'aprés la proposition 56 nous obtenons

$$B_n^{(p,0,p)}(x;\gamma) = \sum_{k=0}^{n} P^{(p,0,p)}(n,k;\gamma)\, x^k,\ T_j = \frac{1}{j!}\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}^{p}\left(\exp(t)-1\right)^j = S(p,j)$$

et

$$\begin{aligned} B_{n+1}^{(p,0,p)}(x;\gamma) &= xB_n^{(p,0,p)}(x;\gamma) + \sum_{j=0}^{p} S(p,j)\, x^j \left(\frac{d}{dx}\right)^j B_n^{(p,0,p)}(x;\gamma) \\ &= xB_n^{(p,0,p)}(x;\gamma) + \left(x\frac{d}{dx}\right)^p B_n^{(p,0,p)}(x;\gamma). \end{aligned}$$

□

Comme $\left(x\frac{d}{dx}\right)^p x^n = n^p x^n$, alors les premières valeurs de $B_n^{(p,0,p)}(x;\gamma)$ sont :

$$\begin{aligned} B_0^{(p,0,p)}(x;\gamma) &= 1, \\ B_1^{(p,0,p)}(x;\gamma) &= x, \\ B_2^{(p,0,p)}(x;\gamma) &= x^2 + x, \\ B_3^{(p,0,p)}(x;\gamma) &= x^3 + (1+2^p)\, x^2 + x, \\ B_4^{(p,0,p)}(x;\gamma) &= x^4 + (1+2^p+3^p)\, x^3 + (1+2^p+4^p)\, x^2 + x. \end{aligned}$$

3 Autres résultats sur les nombres de Stirling généralisés

De la fonction génératrice (3.2) des nombres de Stirling généralisés $S(n,k;a)$, nous pouvons écrire

$$S(n+k,k;a) = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j a_j^{n+k}, \quad \lambda_j = \prod_{i=0}^{k} (a_i - a_j)^{-1}.$$

Plusieurs propriètés de ces nombres ont été discutées en combinatoire [60].
Le but est de montrer quelques connexions de ces nombres avec les valeurs des polynômes de bernoulli à entiers nonnégatifs généralisant l'identité connue

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^n = \frac{B_{n+1}(m) - B_{n+1}(0)}{n+1},$$

où $B_n(x)$ est le n-ème polynôme de Bernoulli défini par

$$\sum_{n\geqslant 0} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{\exp(t)-1} \exp(xt).$$

Théorème 65. *Les nombres de Stirling généralisés des deux espèces, satisfont*

$$\sum_{j=0}^{k} a_j^{n+1} = \sum_{i+j=n} (i+1)\, S\,(k+i+1,k;a)\, s\,(k+1,k+1-j;a)\,. \tag{4.8}$$

Démonstration. Si nous posons $L_k\,(t) = \sum_{n\geq 0} S\,(n+k,k;a)\, t^n = \prod_{j=0}^{k} (1-a_j t)^{-1}$, nous obtenons

$$\frac{L_k'\,(t)}{L_k\,(t)} = \sum_{j=0}^{k} \frac{a_j}{1-a_j t} = \sum_{j=0}^{k} a_j \sum_{n\geq 0} a_j^n t^n = \sum_{n\geq 0} t^n \sum_{j=0}^{k} a_j^{n+1}$$

et

$$L_k'(t) = \sum_{n\geq 0} (n+1) S(n+1+k,k;a) t^n,$$

$$\frac{1}{L_k(t)} = \sum_{j=0}^{k+1} s(k+1,k+1-j;a) t^j.$$

Alors

$$\frac{L_k{}'(t)}{L_k(t)} = \sum_{n\geq 0} t^n \sum_{i+j=n} (i+1) S(k+i+1,k;a) s(k+1,k+1-j;a).$$

L'identification des coefficients de t^n dans les deux dernières expressions de $\frac{L_k'(t)}{L_k(t)}$. $\square$

Proposition 66. *on a*

$$\sum_{i+j=pq-1} (i+1)\, S\,(k+i+1,k;a)\, s\,(k+1,k+1-j;a)$$
$$= \sum_{i+j=p-1} (i+1)\, S\,(k+i+1,k;a^q)\, s\,(k+1,k+1-j;a^q)\,,$$

où $a^q = (a_0^q, a_1^q, \ldots)$ *. En particulier, pour* $p=1$ *ou* $p=2$*, nous trouvons*

$$\sum_{i+j=q-1} (i+1)\, S\,(k+i+1,k;a)\, s\,(k+1,k+1-j;a)$$
$$= S\,(k+1,k;a^q)\, s\,(k+1,k+1;a^q)\,,$$
$$\sum_{i+j=2q-1} (i+1)\, S\,(k+i+1,k;a)\, s\,(k+1,k+1-j;a)$$
$$= S\,(k+1,k;a^q)\, s\,(k+1,k;a^q) + 2S\,(k+2,k;a^q)\, s\,(k+1,k+1;a^q)\,.$$

Démonstration. D'aprés le théorème 65 nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k} a_j^{pq} &= \sum_{i+j=pq-1} (i+1)\, S\,(i+1+k,k;a)\, s\,(k+1,k+1-j;a) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \left(a_j^q\right)^p \\ &= \sum_{i+j=p-1} (i+1)\, S\,(i+1+k,k;a^q)\, s\,(k+1,k+1-j;a^q)\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat souhaité. □

La première application du théorème 65 est donnée par le corollaire suivant.

Corollaire 67. *Les nombres de Stirling des deux espèces et les polynômes de Bernoulli sont liés par la relation suivante :*

$$\sum_{i+j=n} (i+1)\, S\,(i+1+k,k)\, s\,(k+1,k+1-j) = \frac{B_{n+2}(k+1) - B_{n+2}(0)}{n+2}.$$

Démonstration. Pour $a_j = j$ dans (3.1) nous avons $s(n,k;a) = s(n,k)$ et $S(n,k;a) = S(n,k)$, où $S(n,k)$ et $s(n,k)$ sont, respectivement, les nombres de Stirling absolu de première espèce et les nombres de Stirling de seconde espèce. Alors, en utilisant (4.8), nous pouvons dire

$$\sum_{i+j=n} (i+1)\, S\,(i+1+k,k)\, s\,(k+1,k+1-j) = \sum_{j=0}^{k} j^{n+1},$$

ce qui nous mène à l'identité en utilisant l'équation (3.2). □

Plus généralement, une application sur les nombres p-Stirling des deux espèces introduits par Sun [58]. Avant de donner une telle application, nous donnons quelques propriétés de ces nombres.

Corollaire 68. *Les nombres p-Stirling des deux espèces et les polynômes de Bernoulli sont liés par*

$$\sum_{i+j=n} (i+1)\, S_1\,(i+1+k,k;p)\, s_1\,(k+1,k+1-j;p) = \frac{B_{p(n+1)+1}(k+1) - B_{p(n+1)+1}(0)}{p(n+1)+1}.$$

Démonstration. Pour $a_j = j^p$ dans (**??**) ou dans (**??**) nous en déduisons $s(n,k;a) = s_1(n,k;p)$ et $S(n,k;a) = S_1(n,k;p)$. Ainsi, en utilisant (3.1), nous pouvons écrire

$$\sum_{i+j=n} (i+1)\, S_1\left(i+1+k,k;p\right) s_1\left(k+1,k+1-j;p\right) = \sum_{j=0}^{k} j^{p(n+1)},$$

ce qui nous mène à l'identité en utilisant l'équation (3.2). □

En combinant les corollaires 67 et 68, nous déduisons que les nombres pq-Stirling sont liés aux nombres p-Stirling par la relation suivante

Corollaire 69. *nous avons*

$$\begin{aligned} &\sum_{i+j=n} (i+1)\, S_1\left(i+1+k,k;pq\right) s_1\left(k+1,k+1-j;pq\right) \\ &= \sum_{i+j=q(n+1)-1} (i+1)\, S_1\left(i+1+k,k;p\right) s_1\left(k+1,k+1-j;p\right). \end{aligned}$$

En particulier, pour $p = 1$ nous trouvons

$$\begin{aligned} &\sum_{i+j=n} (i+1)\, S_1\left(i+1+k,k;q\right) s_1\left(k+1,k+1-j;q\right) \\ &= \sum_{i+j=q(n+1)-1} (i+1)\, S\left(i+1+k,k\right) s\left(k+1,k+1-j\right) \end{aligned}$$

et pour $n = 0$, on a

$$\sum_{i+j=q-1} (i+1)\, S_1\left(i+1+k,k;p\right) s_1\left(k+1,k+1-j;p\right) = S_1\left(k+1,k;pq\right)$$

et pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned} &\sum_{i+j=2q-1} (i+1)\, S_1\left(i+1+k,k;p\right) s_1\left(k+1,k+1-j;p\right) \\ &= S_1\left(k+1,k;q\right) s_1\left(k+1,k;q\right) + 2S_1\left(k+2,k;q\right) s_1\left(k+1,k+1;q\right) \\ &= S_1\left(k+1,k;2pq\right). \end{aligned}$$

CHAPITRE 5

UNE EXTENSION DES NOMBRES DE JACOBI-STIRLING DE PREMIÈRE ESPÈCE

1 Introduction

Ce chapitre est indépendant des chapitres précédents dans lequel nous présentons deux nouveaux types de nombres $Js(-n,j;z)$, $n \geq 0$, $j \geq -1$ et $Js(-n,-j;z)$, $0 \leq n \leq j$ liés à la base d'indices négatifs $\left\{1,(x)_{-1,z},\ldots,(x)_{-n,z}\right\}$, où

$$(x)_{-n,z} = \left(\prod_{i=0}^{n-1}(x-i(i+z))\right)^{-1}, \ n \geq 1, \ (x)_{0,z} = 1.$$

Les nombres à présenter on les appelle les nombres étendus de Jacobi-Stirling de première espèce, on y présente certaines propriètés telles que relations de récurrence, fonction génératrice verticale, ainsi, qu'une relation reliant les nombres étendus de Jacobi-Stirling du première espèce et le nombre de Jacobi-Stirling de seconde espèce. Wen et al. [62] ont introduit les nombres étendus de Legendre-Stirling de première espèce liés à la base $\left\{1,(x)_{-1},\ldots,(x)_{-n}\right\}$, où

$$(x)_{-n} = \left(\prod_{i=0}^{n-1}(x-i(i+1))\right)^{-1}, \ n \geq 1, \ (x)_0 = 1.$$

Ils ont donné les deux définitions suivantes :

Définition 70. *Pour tous entiers positifs n, les nombres étendus de Legendre-Stirling de première espèce du type 1 $Ps(-n,j)$ sont définis par :*

$$(x)_{-n} = \sum_{j=-1}^{+\infty} Ps_{-n}^{(j)} x^j.$$

Nous avons ces cas particuliers

(1) $(x)_0 = 1$ et $Ps_0^{(0)} = 1, \ Ps_0^{(j)} = 0, j \neq 0.$

(2) $(x)_{-1} = \frac{1}{x}$ et $Ps_{-1}^{(-1)} = 1, \ Ps_0^{(j)} = 0, j \neq -1.$

(3) $Ps_{-n}^{(j)} = 0$ si $n \geq 0$ et $j < -1$.

Définition 71. *Pour tous entiers positifs n, les nombres étendus de Legendre-Stirling de première espèce du type 2 $Ps(-n,-j)$ sont définis par :*

$$(x)_{-n} = \sum_{j=n}^{+\infty} Ps_{-n}^{(-j)} x^{-j}.$$

Nous avons ces cas particuliers

(1) $(x)_0 = 1$ et $Ps_0^{(0)} = 1,\ Ps_0^{(-j)} = 0, j > 0.$

(2) $(x)_{-1} = \frac{1}{x}$ et $Ps_{-1}^{(-1)} = 1,\ Ps_0^{(-j)} = 0, j > 1.$

(3) $Ps_{-n}^{(-j)} = 0$ si $0 < j < n.$

Ces auteurs ont donné une extension de nombres de Legendre-Stirling ce qui nous motive de donner une extension pour les nombres de Jacobi-Stirling car les nombres de Legendre-Stirling est un cas particulier des nombres de Jacobi-Stirling c-à-d $Js\,(n, j; 1) = Ps_n^{(j)}$[2].

2 Les nombres étendus de Jacobi-Stirling de première espèce

Dans cette section, nous établissons une fonction

$$(x)_{-n,z} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} (x - i\,(i+z))\right)^{-1} \tag{5.1}$$

et nous proposons deux définitions . Par la suite, nous utilisons ces définitions pour prouver certaines propriètés concernant les nombres étendus de Jacobi-Stirling de première espèce.

Définition 72. *Pour tout entier positif n et $j \geq -1$, les nombres étendus de Jacobi-Stirling de première espèce du type 1 $Js(-n, j, z)$ sont définis par :*

$$(x)_{-n,z} = \sum_{j=-1}^{+\infty} Js(-n, j, z) x^j. \tag{5.2}$$

Nous avons ces cas particuliers

(1) $(x)_{-0,z} = 1$ et $Js(0, 0, z) = 1,\ Js(0, j, z) = 0,\ j \neq 0.$

(2) $(x)_{-1,z} = \frac{1}{x}$ et $Js(-1, -1, z) = 1,\ Js(-1, j, z) = 0,\ j \neq -1$

(3) $Js(-n, j, z) = 0$ si $n \geq 0,\ j < -1.$

Définition 73. *Pour tout entier positif n, $j \geq n \geq 0$ les nombres étendus de Jacobi-Stirling de première espèce du type 2 $Js(-n, -j, z)$ sont définis par :*

$$(x)_{-n,z} = \sum_{j=n}^{+\infty} Js(-n, -j, z) x^{-j}. \tag{5.3}$$

Nous avons ces cas particuliers :

(1) $(x)_{-0,z} = 1$ et $Js(0,0,z) = 1,\ Js(0,-j,z) = 0,\ j > 0.$

(2) $(x)_{-1,z} = \frac{1}{x}$ et $Js(-1,-1,z) = 1,\ Js(-1,-j,z) = 0,\ j > -1.$

(3) $Js(-n,-j,z) = 0$ si $0 < j < n$.

3 Propriétés des nombres étendus de Jacobi-Stirling de première espèce

Théorème 74. *Pour tous entiers $n > 1$ et $j \geq 0$, les nombres étendus de Jacobi-Stirling de première espèce du type 1 $Js(-n, j, z)$ sont donnés par l'expression suivante*

$$Js(-n,j,z) = \frac{-z}{(n-1)!\,(-z)_n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=j+1 \\ n>1, k_i \geq 0, j \geq 0}} (1\,(1+z))^{-k_1} \cdots ((n-1)\,(n-1+z))^{-k_{n-1}}\,.$$

Démonstration. D'aprés la définition 72, nous avons

$$\begin{aligned}
& x \sum_{j \geq -1}^{+\infty} Js(-n,j,z) x^j \\
&= (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i\,(i+z)} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{(i\,(i+z))^k} \right) \\
&= (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i\,(i+z)} \sum_{k_1 \geq 0, \ldots k_{n-1} \geq 0} \frac{x^{k_1} \cdots x^{k_{n-1}}}{(1\,(1+z))^{k_1} \cdots ((n-1)\,(n-1+z))^{k_{n-1}}} \\
&= \frac{-z}{(n-1)!\,(-z)_n} \sum_{m \geq 0} x^m \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=m} (1\,(1+z))^{-k_1} \cdots ((n-1)\,(n-1+z))^{-k_{n-1}}\,,
\end{aligned}$$

en posant $m - 1 = j$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \geq -1} Js(-n,j,z) x^j \\
&= \frac{-z}{(n-1)!\,(-z)_n} \sum_{j \geq -1} \sum_{k_1+\cdots+k_{n-1}=j+1} (1\,(1+z))^{-k_1} \cdots ((n-1)\,(n-1+z))^{-k_{n-1}}\, x^j.
\end{aligned}$$

D'où

$$Js(-n,j,z) = \frac{-z}{(n-1)!\,(-z)_n} \sum_{k_1+\cdots+k_{n-1}=j+1} (1\,(1+z))^{-k_1} \cdots ((n-1)\,(n-1+z))^{-k_{n-1}}.$$

□

Théorème 75. *Pour $n > 1$ et $j \geq -1$ les nombres étendus de Jacobi-Stirling de première espèce du type 1 $Js(-n,j,z)$ satisfont la relation de récurrence suivante*

$$Js(-n,j,z) = Js(-n-1,j-1,z) - (n+1)\,(n+1-z)\,Js(-n-1,j,z).$$

Démonstration.
(1) Pour $j = -1$: $Js(-n,-1,z) = \frac{-z}{(n-1)!(-z)_n}$, $Js(-n,-2,z) = 0$, nous obtenons

$$Js(-n,-1,z) = -\,(n+1)\,(n+1-z)\,Js(-n-1,-1,z). \tag{5.4}$$

(2) Pour $j \geq 0$, les équation (5.1) et (5.2) nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}&\sum_{j\geq -1} Js(-n,j,z)x^j \\ &= \sum_{j\geq -1} Js(-n-1,j-1,z)x^{j+1} - (n+1)\,(n+1-z) \sum_{j\geq -1} Js(-n-1,j,z)x^j \quad ,\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}&Js(-n,-1,z)x^{-1} + \sum_{j\geq 0} Js(-n,j,z)x^j \\ &= \sum_{j\geq 0} Js(-n-1,j-1,z)x^j - (n+1)\,(n+1-z)\,Js(-n-1,-1,z)x^{-1} \\ &- (n+1)\,(n+1-z) \sum_{j\geq 0} Js(-n-1,j,z)x^j\end{aligned}$$

et à partir de l'équation (5.4), nous avons

$$\begin{aligned}&\sum_{j\geq 0} Js(-n,j,z)x^j \\ &= \sum_{j\geq 0} Js(-n-1,j-1,z)x^j - (n+1)\,(n+1-z) \sum_{j\geq 0} Js(-n-1,j,z)x^j.\end{aligned}$$

Alors, nous obtenons

$$\begin{aligned} & Js(-n, j, z) \\ & = Js(-n-1, j-1, z) - (n+1)\,(n+1-z)\, Js(-n-1, j, z) j \geq 0. \end{aligned}$$

□

Théorème 76. *Pour* $n, j \in \mathbb{Z}, 1 \leq n \leq j$, *les nombres étendus de Jacobi-Stirling de première espèce du type 2* $Js(-n, -j, z)$ *satisfont la relation de récurrence suivante*

$$Js(-n, -j, z) = Js(-n-1, -j-1, z) - (n+1)\,(n+1-z)\, Js(-n-1, -j, z).$$

Démonstration. A partir des équations (5.1) et (5.3) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} & \sum_{j \geq n} Js(-n, -j, z) x^{-j} \\ & = \sum_{j \geq n+1} Js(-n-1, -j-1, z) x^{-j+1} - (n+1)\,(n+1-z) \sum_{j \geq n+1} Js(-n-1, -j, z) x^{-j} \\ & = \sum_{j \geq n} Js(-n-1, -j-1, z) x^{-j} - (n+1)\,(n+1-z)\, Js(-n-1, -n, z) x^{-n} \\ & - (n+1)\,(n+1-z) \sum_{j \geq n} Js(-n-1, j, z) x^{-j}. \end{aligned}$$

D'où

$$Js(-n, -j, z) = Js(-n-1, -j-1, z) - (n+1)\,(n+1-z)\, Js(-n-1, -j, z),$$

avec $Js(-n-1, -n, z) = 0$. □

De l'expression exacte des nombres nombres de Jacobi-Stirling de seconde espèce $JS(n, j, z)$ donnée par l'identité 1.13, nous pouvons écrire

Théorème 77. *Pour tous entiers positifs* $n, j, j \geq n > 0$, *les nombres étendus de Jacobi-Stirling de première espèce du type 2* $Js(-n, -j, z)$ *satisfont la relation suivante :*

$$Js(-n, -j, z) = \sum_{\substack{i_1 + \cdots + i_{n-1} = j-n \\ i_l \geq 0, l = 1, \cdots, n-1}} (1\,(1+z))^{i_1} \cdots ((n-1)\,(n-1+z))^{i_{n-1}}.$$

Démonstration. Pour tout entier positif n, la fonction génératrice de la suite $(Js(-n,-j,z))_{j\geq n}$

$$F_n(x) = \sum_{j\geq n} Js(-n,-j,z)x^{-j}$$

est telle que

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \frac{1}{x\,(x-1\,(1+z))\cdots(x-(n-1)\,(n-1+z))} \\
&= x^{-n}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k\,(k+z)}{x}\right)^{-1} \\
&= x^{-n}\prod_{k=1}^{n-1}\sum_{i\geq 0}(k\,(k+z))^{i}\,x^{-i} \\
&= x^{-n}\sum_{i\geq 0}\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_{n-1}=i \\ i_t\geq 0,,l=1,\cdots,n-1}}(1\,(1+z))^{i_1}\cdots((n-1)\,(n-1+z))^{i_{n-1}}\,x^{-i} \\
&= \sum_{j\geq n}\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_{n-1}=j-n \\ i_t\geq 0,,l=1,\cdots,n-1}}(1\,(1+z))^{i_1}\cdots((n-1)\,(n-1+z))^{i_{n-1}}\,x^{-j}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $Js(-n,-j,z) = \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_{n-1}=j-n \\ i_l\geq 0,l=1,\cdots,n-1}}(1\,(1+z))^{i_1}\cdots((n-1)\,(n-1+z))^{i_{n-1}}$.

□

En comparant les identités des lemme **??** et théorème 77, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 78. $Js(-n,-j,z) = JS(j-1,n-1,z)$.

A partir du Corollaire 78, nous avons le théorème suivant :

Théorème 79. *Pour tous entiers positifs $n,j,j\geq n>0$, les nombres étendus de Jacobi-Stirling du type 2 $Js(-n,-j,z)$ satisfont la relation suivante :*

$$Js(-n,-j,z) = \sum_{r=n}^{j} Js(-n+1,-r+1,z)\,((n-1)\,(n-1+z))^{j-r}.$$

Andrews et al.[2] prouvent que $JS(n,1,z) = (z+1)^{n-1}$, donc à partir du Corollaire 78, nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 80. $Js(-2,-n-1,z) = JS(n,1,z) = (z+1)^{n-1}, n\geq 1$

Les mêmes auteurs ont donné la propriété suivante.

Lemme 81. *[2]Pour tout entier strictement positif k, nous avons*

$$\Delta^k \left(\frac{JS(n,j,z)}{(z+1)^n} \right) \geq 0, n \geq j$$

A partir du Corollaire 78 et du Lemme 81, nous avons le corollaire suivant

Corollaire 82. *Pour tout entier strictement positif k, nous avons*

$$\Delta^k \left(\frac{Js(-j,-n,z)}{(z+1)^{n-1}} \right) \geq 0, n \geq j.$$

Nous donnons les premières valeurs des nombres de Jacobi-Stirling de première espèce de type 2 $Js\,(-n,-j;z)$

n / j	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	$1+z$	$(1+z)^2$	$(1+z)^3$	$(1+z)^4$
3	0	0	1	$5+3z$	$21+24z+7z^2$	$85+141z+79z^2+15z^3$
4	0	0	0	1	$14+6z$	$147+120z+25z^2$

Table 5.1 – Les premières valeurs de $Js\,(-n,-j;z)$

ANNEXE A

POLYNÔMES ORTHOGONAUX

1 Espaces pré-hilbertiens

Soit v un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Définition 83. *On dit que v est un espace pré-hilbertien s'il est muni d'un produit scalaire $(.,.)$ de $v \times v$ dans $\mathbb{C}$ et qui pour tous $x, y, z \in v$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfait les conditions suivantes :*

1- $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

2- $(\alpha x + y, z) = \alpha(x, z) + (y, z)$.

3- $(x, x) > 0$ *si* $x \neq 0$.

On appelle produit hermitien si les conditions ci-dessus sont satisfaites.

Définition 84. *On dit qu'un espace pré-hilbertien v, muni de la norme $\| \, . \, \|$ associé au produit hermitien est un espace de Hilbert si $(v, \| \, . \, \|)$ est complet normé.*

Nous donnons la définition de fonction propre d'un opérateur comme suit :
Une fonction propre d'un opérateur linéaire D défini sur un espace des fonctions est une

fonction f non nulle dans cet espace qui vérifie :

$$Df = \lambda f$$

où λ est une valeur propre.

2 Mesure de Borel

Soit E un ensemble. On appelle classe de parties de E un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}\left(E\right)$.

Définition 85. *Une tribu $\mathcal{A}$ sur E est un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}\left(E\right)$ tel que :*

i. la partie vide appartient à $\mathcal{A}$,

ii. le complémentaire d'un élément de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$,

iii. Pour toute suite $\left(\mathcal{A}_{\,n}\right)_{\,n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\cup_n(\mathcal{A}_{\,n}) \in \mathcal{A}$

Définition 86. *Soit $\mathcal{E}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}\left(E\right)$. Il existe une plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant tous les éléments de $\mathcal{E}$. Elle est appelée **tribu engendrée** par $\mathcal{E}$, et est notée $\sigma(\mathcal{E})$.*

Dans cette partie, nous donnons la définition de la mesure de Borel.

2.1 Tribu borélienne

Rappelons que pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, un ensemble O de $\mathbb{R}$ est ouvert si

$$\forall x \in O,\ \exists a, b \in O,\ x \in]a, b[\subset O$$

On note $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$.

Définition 87. *La tribu $\sigma(\mathcal{O})$ engendrée par $\mathcal{O}$ est appelée **la tribu borélienne** de $\mathbb{R}$. On la note $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$. Ses éléments sont appelés les boréliens*

Définition 88. *On appelle **mesure de Borel** (localement finie) sur $\mathbb{R}$ une mesure μ définie sur une tribu contenant la tribu de Borel $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$ telle que $\mu(I) < \infty$ pour tout intervalle fermé et borné $I \subset \mathbb{R}$.*

3 Orthogonalité

Le résultat suivant, dû à Gram-Schmidt, donne une procédure pour obtenir un système orthogonal à partir d'un ensemble de fonctions linéairement indépendantes.

Théorème 89. *Soit* $\{f_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ *un ensemble de fonctions linéairement indépendantes à valeurs réelles dans* $L^2_\alpha(a, b)$ *; alors l'ensemble des fonctions orthogonaux* $\{\psi_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ *peuvent être construites selon le procédé de Gram-Schmidt.*
Pour tout $x \in [a, b]$ *:*

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= f_1(x)\\
\psi_2(x) &= f_2(x) - \frac{(f_2(x), \psi_1(x))}{(\psi_1(x), \psi_1(x)}\psi_1(x).\\
&\vdots\\
\psi_n(x) &= f_n(x) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(f_n(x), \psi_j(x))}{(\psi_j(x), \psi_j(x))}\psi_j(x).
\end{aligned}$$

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Tout au long de ce document, nous avons étudié les nombres de Jacobi-Stirling. Des relations intéressantes ont été établis dans le but d'enrichir le bagage des résultats concernant ces nombres en proposant aussi de nouvelles identités et relations de récurrences prouvées d'une manière analytique et combinatoire.

Nous avons présenté au début, les polynômes orthogonaux classiques et la connexion entre ces polynômes et quelques nombres combinatoires.

L'interprétation combinatoire des nombres r-Jacobi-Stirling par le dénombrement des partitions signées a fait l'objet du deuxième chapitre en donnant leurs fonctions génératrices, des relations de récurrences et des identités ont été établies par des techniques combinatoires classiques et originales.

La même technique a été exploitée pour interpréter les nombres de Stirling généralisés, et établir certaines propriétés et identités. Cette interprétation nous a permis de retrouver plusieurs suites connues dans la littérature telles que les nombres r-Stirling et les nombres r-Jacobi-Stirling.

Des travaux incomplets ont été initiés au chapitre cinq qui pourront nous donner une nouvelle vision combinatoire telle que les permutations sur les multi-ensembles.

Nous allons dégager les perspectives de travail futures basées sur les travaux menés au cours de cette thèse.

- On essaie d'étudier, par analogie aux nombres de Jacobi-Stirling, les nombres où les blocs sont ordonnés.
- Étudier les propriétés des polynômes de Jacobi-Stirling généralisés.
- Étudier les suites $\{a_j(n,k)\}$ et $\{b_j(n,k)\}$ définis dans [10]
- Similaire à l'interprétation combinatoire des coefficients liés aux polynômes de Jacobi-Stirling, on essaie d'interpréter ceux des cas particuliers des nombres de Jacobi-Stirling généralisés.
- Étendre cette étude aux nombres de Jacobi-Stirling de première espèce.
- Rechercher d'une interprétation à travers la théorie des graphes pour les nombres r-Jacobi-Stirling.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Aczél, Eine bemerkung über die charakterisierung der "klassischen" orthogonalen polynome. *Acta Math. Acad. Sci. hung*, 4 (1953) 315-321.

[2] G.E. Andrews , E.S. Egge , W. Gawronski, L.L. Littlejohn, The Jacobi-Stirling numbers. *Journal of Combinatorial Theory*, Series A 120 (2013) 288-303.

[3] G.E. Andrews, W. Gawronski, L.L. Littlejohn, The Legendre-Stirling numbers. *Discrete Mathematics*, 311 (2011) 1255-1272.

[4] G.E. Andrews, L.L. Littlejohn, A combinatorial interpretation of the Legendre-Stirling numbers. *Proceedings of the American Math*, Soc 137 (8) (2009) 2581-2590.

[5] G.E. Andrews, E. S. Egge, W. Gawronski, L.L. Littlejohn, The Jacobi-Stirling numbers. *arXiv* :1112.6111v1 [math.CO] 28 Dec 2011.

[6] M. Balazard, Quelques exemples de suites unimodales en théorie des nombres. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, 2(1) :13 ?30, (1990)

[7] S. Bochner, ÜberSturm-Liouvillesche Polynomsysteme. *Math. Z*, 89 (1929) 730-736.

[8] F. Brenti. Unimodal, Log-concave and P lya Frequency Sequences in Combinatorics. *American Mathematical Soc.* 413(1989)

[9] A.Z. Broder, The r-Stirling numbers. *Discrete Math.,* 49 (1984) 241-259.

[10] A. Bruder, L.L. Littlejohn, D. Tuncer, R. Wellman, Left-definite theory with applications to orthogonal polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233 (2010) 1380-1398.

[11] L.M. Butler, The q-log-concavity of q-binomial coefficients. *Journal of Combinatorial Theory*, Series A, 54 (1) (1990) 54-63 .

[12] L. Carlitz, Weighted Stirling numbers of the first and second kind-I. *Fibonacci Quart*, 18 (1980) 147-162.

[13] L. Carlitz, Weighted Stirling numbers of the first and second kind-II. *Fibonacci Quart*, 18 (1980) 242-257.

[14] C.A. Charalambides, Enumerative Combinatorics, *CRC Press* (2002).

[15] C.A. Charalambides, Combinatorial methods in discrete distributions, volume 600. John Wiley & Sons, 2005.

[16] G.-S. Cheon, J.-H. Jung, The r-Whitney numbers of Dowling lattices, *Discrete Math.*, 312 (15)(2012) 2337-2348.

[17] L. Comtet, Advanced Combinatorics. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland / Boston-U.S.A, (1974).

[18] L. Comtet, Analyse Combinatoire. Presses Universitaires de France, Paris,(1970).

[19] E.S. Egge, Legendre-Stirling permutations. *Europ. J. of Comb*, 31 (2010) 1735-1750.

[20] W.N. Everitt, K.H. Kwon, L.L. Littlejohn, R. Wellman and G.J. Yoon, Jacobi-Stirling numbers, Jacobi polynomials, and the left-definite analysis of the classical Jacobi differential expression. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 208 (2007) 29-56.

[21] W.N. Everitt, L.L. Littlejohn, R. Wellman, Legendre polynomials, Legendre-Stirling numbers, and the left-definite analysis of the Legendre differential expression. *J. Comput. Appl. Math.* 148 (2002) 213-238.

[22] W.N. Everitt, Legendre polynomials and singular differentiel operators. *Lecture Notes in Math.827, Springer-Verlag, New York* (1980) 83-106.

[23] S.P. Eu, T.S. Fu, Y.H. Liang, T.L. Wong, On xD-generalizations of Stirling numbers and Lah numbers via graphs and rooks. *Electron. J. Combin*, 24, #P2.9 (2017).

[24] L. Feldman, On a characterization of the classical orthogonal polynomials. *Acta Sci. Math (szeged)*, 17 (1956) 129-133.

[25] G. Freud, Orthogonal Polynomials, *(Pergamon Press, Oxford*, (1971).

[26] Y. Gelineau, Etudes combinatoires des nombres de Jacobi-Stirling et d'Entringer. PHD thesis (2010).

[27] G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya, Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, (1952).

[28] M. Koutras. Non-central numbers and some applications. *Discrete mathematics*, 42 (1982) 73-89.

[29] H.L. Krall, Certain differential equations for Tchebycheff polynomials. *Duke Math. J*, (4) (1938) 705-719.

[30] G. Kügerl, Laguerre polynomial solution of the nonlinear Boltzmann equation for the hard-sphere model. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 40 (1989).

[31] P. Lesky, Die Charakterisierung der klassischen orthogonalen Polynome durch Sturm-Liouvillesche Differentialgleichungen. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 10 (1962) 341-351.

[32] E.H. Lieb, Concavity properties and a generating function for Stirling numbers. *Journal of Combinatorial Theory*, 5 (2) (1968) 203-206.

[33] Z. Lin and J. Zeng, Positivity properties of Jacobi-Stirling and generalized ramanujan polynomials. *Advances in Applied Mathematics* 53 (2014)12-27.

[34] M. Merca, A note on the Jacobi-Stirling numbers. *Integral Transforms and Special Functions*, 25 (2014) 196-202.

[35] M. Merca, A connection between Jacobi–Stirling numbers and Bernoulli polynomials. *Journal of Number Theory*, 151 (2015) 223-229.

[36] M. Merca, A note on the r-Whitney numbers of Dowling lattices. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser*, 351 (2013) 649–655.

[37] M. Merkle, Convolutions of logarithmically concave functions. *Ser. Mat.* 9 (1998), 113-117.

[38] I. Mező, On the maximum of r-Stirling numbers. *Adv. in Applied Mathematics,* 41 (2008) 293-306.

[39] I. Mező, The r-Bell Numbers. *Journal of Integer Sequences*, Vol. 14 (2011).

[40] M. Mihoubi and M. S. Maamra, The $(r_1, ..., r_p)$-Stirling numbers of the second kind. (2012).

[41] M. Mihoubi et **A. Rahim**, The r-Jacobi-Stirling of the second kind. *Miskolc Math. Notes*, 17 (2) (2016), 947–955.

[42] M. Mihoubi and **A. Rahim**, The r-Jacobi-Stirling of the second kind. *DIMACOS'15*. Sidi belabbès Novembre 2015.

[43] M. Mihoubi and **A. Rahim**, A new combinatorial interpretation and some properties of The r-Jacobi-Stirling of the second kind. *JSL'2016* Avril 2016.

[44] M. Mihoubi and **A. Rahim**, The extended Jacobi-Stirling numbers of the first kind. *JSL'2017* Avril 2017.

[45] M. Mihoubi, **A. Rahim** and Said Taharbouchet, Combinatorial interpretations on multiset partitions. *Annales RECITS*, 05 (2018) pages 01-21.

[46] M. Mihoubi, **A. Rahim** and Said Taharbouchet, Combinatorial interpretations on multiset partitions. *JSL'2018* Avril 2018.

[47] M. Mihoubi and M. Rahmani, The partial r-Bell polynomials. *Afr. Mat.* 28 (Issue 7-8) (2017), 1167–1183.

[48] M. Mihoubi, Bell polynomials and binomial type sequences. *Discrete Math.*, 308 (2008), 2450–2459.

[49] P. Mongelli, Total positivity properties of Jacobi–Stirling numbers. *Advances in Applied Mathematics* 48 (2012) 354–364.

[50] P. Mongelli, Combinatorial interpretations of particular evaluations of complete and elementary symmetric functions. *Electron. J. Comb.* 19 (2012) #P60.

[51] N. Nielson, Hambuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig (1906).3.1 (Reprinted by Chelsea, New York, 1965).

[52] V.P. Onyango-Otieno, The application of ordinary differential operators to the study of the classical orthogonal polynomials. *University of Dundee*, November (1980).

[53] J. Riordan, Derivatives of composite functions. *Bull. Amer. Math. Soc.* 52 (1946) 664–667.

[54] J. Riodan, An Introduction to combinatorial analysis. John Wiley, (1958).

[55] J. Riodan, Combinatorial Identities, John Wiley and Sons Inc (1968).

[56] R. Stanley, Log-concaves and unimodal sequences in Algebra, Combinatorics and Geometry. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 576 (1989) 500-534.

[57] R.P. Stanley, Enumerative Combinatorics. *Stud. Adv. Math.*, vol. 49, Cambridge University Press, (1997) vol.1.

[58] Y. Sun, Two classes of p-Stirling numbers. *Discrete Math.* 306 (2006) 2801–2805.

[59] G. Szegö, Orthogonal polynomials. *Amer.Math.Soc.* Colloquium Publications, vol.23, 4th ed.(1975) (Rovidence, Rhode Island).

[60] I. Tomescu, Problems in Combinatorics and Graph Theory. *A Wiley-Interscience Publication, Wiley, NewYork* (1985).

[61] Y. Wang and Y-N. Yeh, Polynomials with real zeros and Pólya frequency sequences. *Journal of Combinatorial Theory*, Series A, 109(1) (2005) 63-74.

[62] F. Wen, H. Xie, X. Jing, Y. Li, F. Hou, The Extended Legendre-Stirling Numbers of the First Kind. *2nd International Conference on Mechanical, Electronic and Information Technology*, (2016). Engineering (ICMITE 2016) ISBN : 978-1-60595-340-3