

N° d'ordre : 32/2018-C/MT.

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE DE HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



THÈSE
PRÉSENTÉE POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE
DOCTORAT 3^{ème} CYCLE (LMD)

EN : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Probabilités Statistiques et SApplication

Par : SADEG Ines

Sujet

**Modèle de Files d'Attente à Serveur non Fiable, Clients Impatients,
deux Types de Vérifications et Vacances**

Soutenue publiquement le : 20/06/2018, devant le jury composé de :

M^{me} K. DJABALLAH	Professeur à l'U.S.T.H.B	Présidente.
M^{me} H. SAGGOU	Professeur à l'U.S.T.H.B	Directrice de thèse.
M E. BOURENNANE	Professeur à l'Univ.France	Co-Directeur de thèse.
M K. ABBAS	Professeur à L'Univ.Bejaia	Examineur .
M A. AISSANI	Professeur à l'U.S.T.H.B	Examineur.
M^{me} M. OURBIH-TARI	Professeur à L'Univ.Tipaza	Invitée.

Table des matières

Remerciements	iv
Introduction Générale	8
1 Notions sur les files d'attente	9
1.1 Processus Stochastique	10
1.1.1 Processus de Markov	10
1.1.2 Processus de Poisson	10
1.2 Description d'une file d'attente	11
1.2.1 Processus d'arrivée	12
1.2.2 Processus de service	13
1.2.3 Nombre de serveurs	14
1.2.4 Capacité du système	14
1.2.5 Discipline de service	14
1.2.6 Caractéristiques d'une file d'attente à un serveur	15
1.3 Type de modèles de files d'attente	16
1.3.1 Modèle Markovien	16
1.3.2 Modèle non Markovien	16
1.4 Notes bibliographiques	18
1.4.1 Modèles d'attente avec arrivées groupées	18
1.4.2 Modèles d'attente avec vacances	18
1.4.3 Modèles d'attente avec pannes	19
1.4.4 Modèles d'attente $M/G/1$ avec rappels	19
1.5 Réseaux de communication	19

2	File $M^{[X]}/G/1$ à Serveur non fiable, Clients impatientes, Deux types de Vérification et Vacances.	22
2.1	Description du modèle mathématique	23
2.1.1	Représentation schématique du modèle	25
2.2	Analyse des probabilités stationnaires	26
2.3	Mesures de erformance	32
2.4	Distribution de la taille du système au point de départ	36
2.5	Cas particuliers	37
2.6	Analyse de sensibilité des caractéristiques du système	38
3	File $M^{[X]}/G/1$ avec Rappels, à Serveur non fiable, Deux types de clients, Deux délais de Vérification et Vacances	44
3.1	Modèle mathématique	45
3.2	Analyse des probabilités stationnaires	46
3.3	Mesures de performances	55
3.4	Cas particuliers	58
3.5	Décomposition stochastique	60
3.6	Illustration numérique	61
	Conclusion générale et perspectives	66
	Bibliographie	70

Table des figures

1.1	Représentation schématique d'une file d'attente classique.	12
1.2	Représentation schématique d'un Réseau N.O.C	20
1.3	Représentation schématique de la commutation de paquets : mode Wormhol	20
2.1	Représentation schématique du système d'attente.	26
2.2	(a) Effet du taux de service μ sur P_0 . (b) Effet du taux de service μ sur $E(N)$	39
2.3	(c) Effet du taux de service μ sur P_0 . (d) Effet du taux de service μ sur $E(N)$	40
2.4	(e) Effet ξ sur P_{D_2} avec différentes valeurs de p . (f) Effet ξ sur P_{D_2} avec les différentes valeurs de r	40
2.5	(g) Effet des paramètres (α_1, α_2) sur P_0 . (h) Effet des paramètres (α_1, α_2) sur $E(N)$	41
2.6	(i) Effet ξ sur la fréquence A . (j) Effet de ξ sur la fréquence de f	42
3.1	(a) Effet du paramètre ξ sur P_{0K} . (b) Effet du paramètre ξ sur $E(L)$. . .	61
3.2	(c) Effet du paramètre ξ sur P_{0K} . (d) Effet du paramètre ξ sur $E(L)$. . .	62
3.3	(e) Effet du paramètre ξ sur P_{0K} . (f) Effet du paramètre ξ sur $E(L)$	63
3.4	Effet du paramètre α_2 sur $E(L)$ avec différentes valeurs de p .(g) $K = 3$. (h) $K = 10$	63

Remerciements

Je remercie ma directrice de thèse Mme Hafida SAGGOU, Professeur à l'Université des Sciences et de la Technologie Houari BOUMEDIENNE (USTHB), pour m'avoir encadrée et guidée tout au long de ma thèse.

Mes sincères remerciements vont également à mon co-directeur de thèse Mr El-Bay BOURENNANE, Professeur à l'Université de Bourgogne pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire LE2i, sa disponibilité, ses conseils, et ses encouragements.

Je remercie Mme Megdouda OURBIH, pour son efficace contribution dans ma thèse, sa disponibilité, ses conseils et d'avoir accepter l'invitation.

J'adresse aussi mes vifs remerciements aux membres du jury, Mr Amar AISSANI, Professeur à l'USTHB, Mr Karim ABBAS, Professeur à l'université de Béjaia, de m'avoir fait l'honneur d'évaluer ce travail.

Je remercie vivement Mme Khadidja DJABALLAH, Professeur à l'USTHB, de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider mon jury de thèse.

Je remercie Mme O.Sadki, Mme Z.Guessoum, Mr A.Tatachak, Mr M.Yahi et tous mes enseignants pour leur aide et encouragement tout au long de ma thèse.

Je tiens à remercier Mr A.Aissani, Mr T.Kernane, Mme S. Taleb pour leurs conseils, de m'avoir orienter et guider.

Je remercie toute ma famille et mes amies.

Enfin, je remercie toute personne ayant contribué à l'accomplissement de ce travail.

Introduction Générale

Le phénomène d'attente est observé dans notre vie quotidienne. Quand nous nous rendons à la poste, à la gare, à l'hôpital, bien souvent nous devons faire une "*Queue*" pour obtenir de l'argent, un billet, une consultation. Ce phénomène d'attente se forme lorsque les clients arrivent de façon aléatoire, non aléatoire ou déterministe pour se faire servir. La modélisation de ce dernier a pour but de calculer ses performances et de déterminer ses caractéristiques afin d'aider les gestionnaires à prendre des décisions. Cependant, l'étude de la théorie des files d'attente a seulement commencé au début du vingtième siècle avec le travail du mathématicien Danois A. K. Erlang. Il a réalisé la première analyse mathématique d'un modèle de file d'attente des systèmes téléphoniques dans un centre d'appel à Copenhague.

En 1909, il a réalisé un article intitulé "**The theory of probabilities and telephone conversations**". Parmi les premiers résultats obtenus, Erlang observe le caractère poissonien des arrivées des appels au central téléphonique, et le caractère exponentiel des durées des appels. De là, il réussit à obtenir la probabilité d'avoir un appel refusé et cela par un calcul relativement simple en tenant compte de l'état d'équilibre du système.

A partir de 1930, grâce aux apports des mathématiciens Molina, Fry, Pollaszek aux Etats Unis, Kolmogorov ,Khintchine en Russie, Palm en Suède et Kendall en Cambridge que la théorie des files d'attente s'est vraiment développée.

Dans les années 1980, cette discipline devient beaucoup plus mathématique. Elle consiste à décrire des techniques et des modèles permettant de trouver des solutions aux modèles. L'évolution rapide de cette théorie a été appliquée dans divers domaines, les systèmes informatiques et les réseaux de communications ; voir, [42], nous trouvons aussi leurs applications dans les flux de trafics (voiture, avion), l'ordonnancement (planification, programme d'un

ordinateur), ou encore le dimensionnement (banque, poste, téléphone).

Le sujet d'application des files d'attente a été inspiré et continu à inspirer de nombreux chercheurs, comme en témoignent de nombreuses publications dans divers domaines parues à ce jour. Malheureusement, cette théorie ne peut pas répondre aux besoins de beaucoup de systèmes réels qui sont de plus en plus complexes, comme les systèmes à serveur non fiable. En pratique, nous observons de nombreuses situations de modèles non fiables, dans les usines, les réseaux de télécommunications, les distributeurs automatiques, ect. La panne du serveur induit ainsi une augmentation de la congestion (accumulation) des clients dans la salle d'attente, et peut engendrer une instabilité du système si une condition de stabilité spécifique n'est pas établie et prise en considération dans la réalisation physique du système. De nombreux chercheurs se sont intéressés à étudier ces modèles à serveur non fiables afin d'améliorer leurs performances. White et al. (1958) [64] ont été les premiers à étudier la file $M/M/1$ à serveur non fiable, où les pannes sont de distribution exponentielle, tandis que, Wenway (1993) [63] a considéré le même modèle avec clients impatientes. Les temps de services et d'interruptions de distribution générale ont été étudiés aussi dans [57, 59]. Ce dernier a également étudié la fiabilité de quelques modèles files d'attente. Wang (2003) [61] a analysé le modèle $M/M/1$ à N-politique, serveur non fiable et transportable, c'est à dire que lorsque le serveur tombe en panne, cela nécessite une réparation dans un centre de réparation et les temps de réparation sont de distribution exponentielle. Wang et al. (2004) [62] ont développé les modèles de files d'attente contrôlables $M/H_K/1$ avec un serveur non fiable.

Les modèles de files d'attente avec arrivées groupées et / ou (service groupé) ont été introduits par divers de chercheurs; voir, par exemple [14, 19, 49, 48]. Ces arrivées par groupes ou par lots sont utilisées dans les systèmes informatiques où le message est transmis par paquets. Certains auteurs ont étudié la notion de vacance dans les files d'attente. Cela consiste à utiliser le temps d'inactivité du serveur comme une période de vacance. Ces systèmes d'attente sont longuement étudiés dans les communications informatiques et les systèmes stochastiques. Parmi les travaux sur les files d'attente avec vacances, nous citons, Miller (1964) [50] qui a étudié le modèle $M/G/1$ avec un serveur indisponible pendant une durée aléatoire (appelée vacance). Doshi (1986) [24] a étudié la file $M/G/1$ avec une vacance variable, et a présenté les propriétés de la décomposition stochastique pour ce modèle. En 1991, Takagi [55] a étudié les systèmes de files d'attente

avec vacances et priorité. Servi et al. (2002) [54] se sont intéressés au concept de vacance active (Working-vacation) pour la file d'attente $M/M/1$. D'autre part, Li (1997) [45] a analysé la fiabilité des systèmes de files d'attente $M/G/1$ avec panne et serveur en vacance. La file d'attente $M/G/1$ avec interruptions selon Bernoulli Schedule et serveur en vacance a été présentée dans les travaux [15, 16]. Le modèle de files d'attente avec arrivées groupées, serveur non fiable, serveur en vacance et Bernoulli Schedule a été étudié par les chercheurs [13, 21, 22, 31]. Boxma et Takine (2003) [18] ont développé la file d'attente avec de multiples arrivées en flux selon un processus de Markov, un seul serveur est considéré avec interruption de discipline *F.C.F.S.* Ke et Yang (2016) [39] ont présenté la file d'attente $M^{[X]}/G/1$ avec la politique de vacances. Tous les clients sont servis dans le système où le serveur exploite une des deux politiques, la première d'une seule période de vacance et la seconde de multiples périodes de vacances. Kempa (2011)[40] a considéré une file d'attente à un seul serveur et des arrivées groupées, Après chaque service, le serveur prend plusieurs vacances et le processus de service est arrêté. Borthakur (1971) [17] a introduit le service groupé de loi générale et les clients arrivent selon un processus de Poisson.

Lorsque le serveur tombe en panne, en réalité la réparation ne commence pas immédiatement, c'est à dire que le temps d'attente pour la réparation (appelé délai) est considéré. Ce délai a été introduit par Choudhury et Tadj (2009) [23] pour la file d'attente $M/G/1$ avec panne du serveur et réparation retardée.

La théorie des files d'attente offre deux possibilités pour résoudre un conflit qui est lorsqu'un client arrivant dans le système trouve le serveur occupé : soit il quitte le système sans être servi (Modèle d'Erlang à demandes refusées), soit il rejoint une autre file d'attente qu'on appelle "*Orbite*" et répète sa tentative après un temps aléatoire jusqu'à ce qu'il parvienne à la zone de service. Ce phénomène de répétition a été observé dans les systèmes téléphoniques, les réseaux informatiques, ce qui a poussé certains chercheurs à étendre les modèles de files d'attente classiques aux modèles de files d'attente avec *Rappels*. Cette branche de théorie est très utilisée en pratique notamment dans la modélisation stochastique de différents problèmes de télécommunications, les réseaux informatiques et l'analyse du comportement des données dans les réseaux téléphoniques. Parmi les premières contributions dans ce domaine, on trouve celles de [27, 32, 35]. Fayolle (1986) [32] considéré la file $M/M/1$ avec rappels, dans laquelle le client qui trouve le serveur occupé rejoint

l'orbite, seul le client en tête de l'orbite est autorisé à tenter de recevoir un service après un temps de rappel de distribution exponentielle en compétition avec un nouveau client intégrant le système appelé client primaire. Des travaux récents sont donnés dans les articles de [1, 3, 7, 28, 58], et dans la monographie de Falin et Templeton (1997) [29]. Farahmand (1996) [30] a étudié la file d'attente avec rappels de discipline *F.C.F.S.*. Choi et al. (1990) [20] ont généralisé ce modèle en considérant une file $M/M/1$ avec rappels où les temps de rappels sont de distribution générale. Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'étude des files d'attente avec rappels en considérant les temps de service et de rappels de distributions générales, nous citons [11, 33, 44]. Pour les modèles de files d'attente avec rappels et pannes, Kulkarni et Choi (1990) [43] ont étudié le modèle avec rappels et pannes du serveur et réparation; voir aussi, [4, 25]. Moreno (2004) [51] a étudié la file d'attente $M/G/1$ avec rappels. Dans ce modèle le nombre de clients récurrents est fixé à $K > 0$, ces derniers reprennent directement leurs places dans l'orbite après chaque service accompli, alors que le client transitaire quitte le système après qu'il soit servi. Saggou et al. (2017) [52] ont développé les mesures de performances et proposé la décomposition stochastique du modèle $M/G/1$ avec rappels et clients récurrents, avec pannes et délai de distribution générale.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressé à travailler dans un cadre plus pratique, ce dernier consiste à modéliser un routeur dans les réseaux de communication, et cela en se basant sur les réseaux sur puce appelés "N.O.C" (Network On Chip). Ces derniers utilisent plusieurs méthodes de commutation. Cette étude nous a emmené à trouver un nouveau modèle de file d'attente à un seul serveur avec des clients impatients arrivant en groupe. Le serveur est sujet à des pannes actives, la réparation n'est pas immédiate. Par conséquent, deux délais de vérification sont considérés. Nous supposons qu'à chaque fin de service, le serveur est autorisé à prendre une vacance avec une certaine probabilité. Aussi, nous proposons le même modèle en considérant la politique de rappels avec deux types de clients transitaires et récurrents. L'organisation de la thèse est la suivante :

- Le premier chapitre est consacré aux généralités et aux notions de base sur les files d'attente classiques et les files d'attente avec rappels. Nous rappelons quelques modèles de file d'attente avec serveur en panne, vacance, arrivées groupées et clients impatients. Nous établissons la condition de stabilité et le nombre moyen de clients

dans le système pour chaque modèle. Ces rappels nous permettrons d'introduire les chapitres suivants où seront abordés de nouveaux résultats.

- Dans le deuxième chapitre, nous présentons un nouveau modèle de file d'attente à serveur non fiable, avec arrivées groupée et clients impatient. Nous considérons la réparation de la panne et deux types de vérification, nous précisons que le serveur peut aller en vacance après avoir accompli un service ou bien servir le prochain client.
- Dans le troisième chapitre, un nouveau modèle sera introduit en considérant la politique de rappels. Le système contient au moins K clients. Les deux clients sont caractérisés par la propriété qu'un client trouvant à son arrivée le serveur occupé ou en panne va directement en Orbite et rappelle ultérieurement jusqu'à ce qu'il décroche un service.

Nous clôturons notre travail en donnant des suggestions pour des recherches futures sur cette thématique non encore abordées.

1

Notions sur les files d'attente

Introduction

Les files d'attente se forment lorsque les clients arrivent de façon aléatoire pour se faire servir. Les exemples les plus courants dans la vie de tous les jours sont les caisses des supermarchés, les bureaux de poste, les billetteries des aéroports. Toutefois, lorsqu'on parle d'attente, on pense souvent à des " personnes ". Or, les " clients " peuvent être des commandes en attente de traitement, des programmes d'ordinateurs en attente d'être exécutés, des machines en attente d'être réparées, etc. La théorie mathématique des files d'attente est assez complexe. Dans ce chapitre, nous présentons les concepts et les outils de base qui seront utilisés dans la suite de notre thèse. Nous exposons, dans un premier temps, les notations concernant les processus stochastiques permettant de modéliser un système de files d'attente, puis dans un second temps, nous nous intéressons à quelques modèles de file d'attente : les systèmes avec panne du serveur, avec perte des clients, avec arrivées groupées, les modèles avec rappels et vacances et enfin les réseaux de files d'attente.

1.1 Processus Stochastique

De nombreux phénomènes physiques, biologiques ou économiques évoluant dans le temps, et leur évolution a un caractère aléatoire, c'est à dire non prévisible avec certitude. La modélisation mathématique de ces phénomènes nous conduit à étudier les *Processus stochastiques* qu'on définit comme suit.

Définition 1.1.1. *Un processus stochastique $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ est une famille de variables aléatoires indexées par le temps t et définies sur un même espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) . Les variables aléatoires prennent des valeurs dans un espace E dénombrable ou non. Les processus stochastiques peuvent être classifiés en se basant sur l'espace d'état E et l'indice t désignant le temps, $t \in \mathbb{T}$.*

- *Si \mathbb{T} est infini dénombrable, par exemple $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, alors $X_t, t \in \mathbb{T}$ est un processus à temps discret.*
- *Si \mathbb{T} est un ensemble d'intervalles par exemple $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$, alors $X_t, t \in \mathbb{T}$ est un processus à temps continu.*

1.1.1 Processus de Markov

Le *processus de Markov* fournit un outil simple de modélisation d'une classe particulière de systèmes à espace d'états discret. L'analyse des processus de Markov est un préliminaire nécessaire à l'étude des systèmes de files d'attente.

Définition 1.1.2. *Le processus $\{X_t, t \geq 0\}$ est dit de Markov si pour tous les $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n < t_{n+1}$, pour tous $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$*

$$P[X_{t_{n+1}} = x_{t_{n+1}} | X_{t_1} = x_{t_1}, X_{t_2} = x_{t_2}, \dots, X_{t_n} = x_{t_n}] = P[X_{t_{n+1}} = x_{t_{n+1}} | X_{t_n} = x_{t_n}].$$

Cela traduit que la probabilité de n'importe quel comportement futur, le présent étant connu, n'est pas modifié par toute connaissance supplémentaire du passé, ce qui caractérise la propriété de *d'absence de mémoire*

1.1.2 Processus de Poisson

Des phénomènes peuvent se définir par la famille $(A_n, n \in \mathbb{N}^*)$ des temps d'arrivées qui sont des variables aléatoires telles que l'arrivée des pannes des machines dans une usine. Ces instants d'arrivées peuvent être modélisés par un Processus de Comptage.

Définition 1.1.3. Le processus $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est appelé processus de comptage si c'est un processus croissant, c'est à dire si pour tout $s \leq t$, $N_s \leq N_t$. La variable aléatoire $N_t - N_s$ est alors appelée accroissement du processus sur $]s, t]$.

Définition 1.1.4. Un processus de comptage $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est appelé processus à accroissements indépendants si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous t_1, t_2, \dots, t_n tels que $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les accroissements $N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Définition 1.1.5. Le processus est dit stationnaire, si pour tout s et t , l'accroissement $N_{t+s} - N_s$ a la même loi que N_t .

Définition 1.1.6. Un processus à accroissements indépendants stationnaires $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est dit à événements rares si :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} P[N_h > 0] = 0 \quad \text{et} \quad \text{si} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P[N_h > 1]}{P[N_h = 1]} = 0$$

Définition 1.1.7. Le processus de comptage $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ tel que $N_0 = 0$ est un processus de Poisson si :

- 1- $\{N_t, t \geq 0\}$ est stationnaire ;
- 2- $\{N_t, t \geq 0\}$ est un processus à accroissements indépendants ;
- 3- $\{N_t, t \geq 0\}$ est un processus à événements rares ;
- 4- il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt .

Remarque 1.1.1. Un processus qui vérifie la condition 4 vérifie certainement la condition 3.

1.2 Description d'une file d'attente

Une file d'attente est constituée d'une salle d'attente de capacité finie ou infinie, d'un ou plusieurs serveurs, et des clients arrivant de l'extérieur à des instants aléatoires. Les clients attendent pour recevoir un service selon une certaine discipline adoptée au sein du système, et quittent le système. Si tous les serveurs sont occupés, les clients doivent patienter dans la salle d'attente jusqu'à ce qu'un serveur se libère.

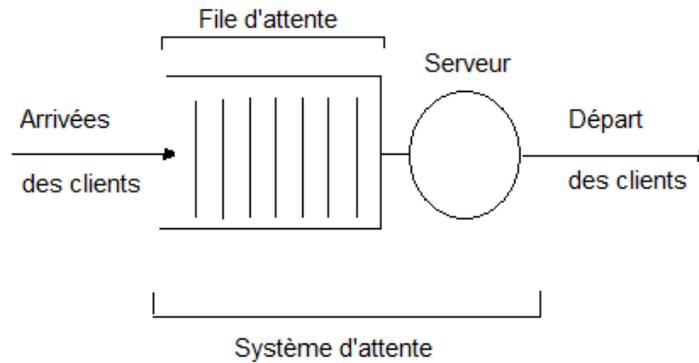


FIGURE 1.1 – Représentation schématique d'une file d'attente classique.

Une représentation des systèmes de files d'attente classique est donnée par la figure 1.1.

Un système de files d'attente classique se base principalement sur les éléments suivants.

1.2.1 Processus d'arrivée

Les arrivées des clients sont caractérisées par l'ensemble des instants d'arrivées de chaque client dans le système. La collection de ces instants forment un processus des arrivées. Souvent dans les systèmes d'attente, le processus des arrivées est un processus de Poisson c'est à dire que les temps des inter-arrivées suivent une loi Exponentielle. Nous pouvons définir un processus de Poisson comme une suite croissante de nombre réels positifs

$$T_0 = 0 < T_1 < T_2 < T_3 < \dots$$

où T_i désigne l'instant d'arrivée du client "i".

Soit une suite de variable aléatoire positives A_1, A_2, A_3, \dots indépendantes et identiquement distribuées. On considère $A_n = T_n - T_{n-1}$ le temps écoulé entre la $(n - 1)^{i\grave{e}me}$ et la $n^{i\grave{e}me}$ arrivée d'un certain événement, comme par exemple les appels dans un central téléphonique.

Notons par

$$T_0 = 0 \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^n A_k \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

On peut décrire une réalisation en supposant la variable aléatoire N_t défini pour tout $t \geq 0$ par

$$N_t = \sup\{n \in \mathbb{N}, T_n \leq t\} = \sum_{n \geq 1} 1_{\{T_n \leq t\}}$$

Inversement, les T_n se déduisent des N_t par la relation

$$T_n = \inf\{t \geq 0, N_t = n\}$$

La variable aléatoire N_t représente le nombre d'événement, se produisant dans l'intervalle de temps $[0, t]$

Le processus de comptage $N_\lambda(t)$ est appelé *processus de Poisson* de taux λ si les inter-arrivées A_n sont indépendantes et de même loi Exponentielle $\xi(\lambda)$ de fonction de distribution

$$P\{A_n \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Pour tout $t \geq 0$, on définit la variable aléatoire ξ_t par

$\xi_t \equiv$ le temps qui sépare l'instant t de la prochaine arrivée.

Plus précisément, ξ_t est donnée par

$$\xi_t = T_{N_t} - t$$

ξ_t est appelée le *temps résiduel d'arrivée au temps t* . La variable aléatoire possède la même distribution Exponentielle de taux λ si le processus de comptage $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus de Poisson de taux λ c'est à dire $P\{\xi_t \leq x\}$, indépendamment de t .

1.2.2 Processus de service

Le temps de service d'un client est défini par le temps séparant le début et la fin du service. On note S_n le temps de service du $n^{\text{ième}}$ client. Les temps de service sont des variables léatoires indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d*).

1.2.3 Nombre de serveurs

Une file d'attente peut contenir une infinité de serveurs. Dans le cas multi-serveurs la détermination de la distribution de service de chacun des serveurs, est recommandée, voire indispensable. La plus part du temps, les serveurs sont considérés identiques et indépendants les uns des autres.

1.2.4 Capacité du système

La capacité K du système à accueillir des clients en attente de service est égale à la somme du nombre de serveurs et du nombre de places d'attente disponibles. Elle peut être finie ou infinie ; lorsque K est finie certains clients qui arrivent vers le système n'ont pas la possibilité d'y entrer.

1.2.5 Discipline de service

L'objectif de la discipline de service est de déterminer l'ordre des clients dans la file d'attente et leurs accès au service.

Les disciplines les plus utilisées ainsi que leurs acronymes, sont

- **FCFS** : First Come First Served, le premier arrivé est le premier à être servi.
- **LIFO** : Last In, First Out "dernier arrivé, premier servi".
- **Random** : Le client dans la file d'attente qui sera servi est choisi aléatoirement.
- **Round Robin** : les clients sont servis à tour de rôle pendant un intervalle de temps fixe, appelé quantum. A l'issue de quantum, le client retourne dans la file si son service n'est pas encore terminé.

Pour la classification des files d'attente, on a recours à une notation symbolique appelée *notation de Kendall* qui a la forme générale suivante $A/B/c/K/S$, où

- A : Distribution des temps des inter-arrivées ;
- B : Distribution des temps de service ;
- c : Nombre de serveurs ;
- K : Capacité (ou taille) du système ;
- S : Discipline de service.

Pour "A" et "B", la liste suivante résume les lois de probabilités les plus couramment rencontrées dans la modélisation des systèmes de file d'attente ainsi que les symboles

associés.

- M : Désigne la loi Exponentielle (Markovienne) ;
- D : Correspond à une loi déterministe ;
- E_k : Désigne la loi d'Erlang d'ordre k ;
- G : Désigne la loi générale, elle est utilisée lorsqu'aucune hypothèse particulière n'est faite sur le processus d'arrivée et ou le processus de service.

1.2.6 Caractéristiques d'une file d'attente à un serveur

Dans les modèles de files d'attente à un serveur, il existe certaines relations de base (entre certains paramètres et les mesures de performances) qui permettent de déterminer les mesures de performances.

On note λ le taux d'arrivée des clients, cela signifie que l'espérance de la durée séparant deux arrivées successives est $E(A) = \frac{1}{\lambda}$.

On note μ le taux de service des clients, cela signifie que l'espérance de la durée de service est $E(S) = \frac{1}{\mu}$.

Sous la condition de stabilité du système c'est à dire $\rho < 1$, nous obtenons les mesures de performances suivantes.

- $E(N)$: Le nombre moyen de clients dans le système ;
- $E(N_f)$: Le nombre moyen de clients dans la file d'attente ;
- $E(W)$: Le temps moyen d'attente d'un client dans le système ;
- $E(W_f)$: Le temps moyen d'attente d'un client dans la file d'attente.

Remarque 1.2.1. *Les deux premières relations sont obtenues en utilisant la "Formule de Little" qui énonce que le nombre moyen de clients dans le système est égal au produit du taux moyen d'arrivées par le temps passé par chaque client dans le système en régime stationnaire, c'est à dire :*

$$E(N) = \lambda_e * W$$

,

$$E(N_f) = \lambda_e * W_f,$$

où $\lambda_e = \lambda(1 - \text{Probabilité de refus})$.

Le théorème de PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages) est défini comme suit :

Définition 1.2.1. *Si le processus des arrivées est Poisson et les arrivées après un temps t sont indépendantes de $N(t)$ (pas d'anticipation), alors,*

$$a_n = p_n$$

avec,

a_n : fraction des arrivées qui voient n paquets dans le système.

p_n : fraction de temps avec n paquets dans le système.

1.3 Type de modèles de files d'attente

Dans l'analyse mathématique de ces systèmes, on s'intéresse principalement au nombre de client $N(t)$ se trouvant dans le système à l'instant $t, t \geq 0$, ce qui revient à déterminer :

- Les probabilités d'état $P_n(t) = P(N(t) = n)$, qui définissent le régime transitoire du processus stochastique $\{N(t), t \geq 0\}$. Les fonctions $P_n(t)$ dépendent de l'état initial du processus.
- L'étude du régime transitoire s'avère généralement très complexe pour la plupart des modèles. C'est pourquoi dans la théorie des files d'attente nous préférons étudier le système une fois qu'il atteint son régime stationnaire et qui est défini par :

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t), (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Dans ce qui suit, nous présentons deux modèles de files d'attente.

1.3.1 Modèle Markovien

Les modèles *Markoviens* sont ceux dans lesquels les temps des inter-arrivées et les durées de service sont des variables aléatoires indépendantes de distribution Exponentielle. Cette distribution a la propriété d'absence de mémoire, ce qui permet une étude facile de ces modèles.

1.3.2 Modèle non Markovien

Lorsqu'on s'écarte de l'hypothèse d'exponentialité de l'un des processus stochastiques : le temps des inter-arrivées et la durée de service, on aboutit à un modèle *non Markovien* qui

prend en considération certaines spécificités des problèmes par introduction de paramètres supplémentaires, ce qui rend l'étude mathématique très difficile. Afin de la faciliter, on essaye de se ramener à un processus de *Markov* judicieusement choisi à l'aide d'une des méthodes d'analyse suivantes :

1. **Méthode de la chaîne de Markov induite** : Établie par Kendall en 1953 et souvent utilisée. Elle consiste à choisir une suite d'instants $1, 2, 3, \dots$ (déterministes ou aléatoires) telle que la chaîne induite $\{N_n, n \geq 0\}$, où $\{N_n = N(n)\}$ soit *Markovienne* et *homogène*.
2. **Méthode de la variable supplémentaire** : Elle consiste à compléter l'information sur le processus $\{N_t, t \geq 0\}$ en lui donnant un caractère *Markovien*, ce qui nous ramène à l'étude du processus $\{N_t, \xi_1(t), \xi_2(t), \dots, t \geq 0\}$ que $\xi_i(t), i = 1, 2, 3, \dots$ sont dites variables supplémentaires.
3. **Simulation** : Lorsque le modèle étudié est trop compliqué pour faire des calculs analytiques, il faut alors avoir recours à des méthodes de simulation, c'est à dire réaliser en générale à l'aide d'un ordinateur, un certain nombre de situation possible pour pouvoir appliquer des techniques statistiques.

Exemple d'un modèle non markovien : file $M/G/1$ classique

Description du modèle

Les clients arrivent dans le système selon un processus de Poisson de taux λ . Le service est assuré par un seul serveur, les durées de service sont des variables aléatoires *i.i.d.* de loi générale dont la fonction de répartition est $B(x)$, de densité $b(x)$ et de transformée de Lapalace-Stieltjes $B^*(s)$, les deux premiers moments sont respectivement β_1 et β_2 .

Les résultats principaux de ce modèle sont donnés comme suit.

Résultats principaux

- 1- La condition de stabilité du système est donnée par :

$$\rho = \lambda\beta_1 < 1$$

2- La fonction génératrice du nombre de clients dans le système est appelée formule de Pollaczek-Khintchine qui est donnée par :

$$\pi(z) = \frac{B^*(\lambda(1-z))(1-\rho)(1-z)}{B^*(\lambda(1-z)) - z}.$$

3- Le nombre moyen de clients dans le système est :

$$E(N) = \rho + \frac{\lambda^2 \beta_2}{2(1-\rho)}.$$

1.4 Notes bibliographiques

1.4.1 Modèles d'attente avec arrivées groupées

Dans ce type de modèle d'attente, les arrivées sont considérées par groupes, la taille d'un groupe est une variable aléatoire, les clients sont servis un par un selon la discipline du service. Ce type de modèle d'attente a intéressé plusieurs chercheurs ; voir, par exemple [10, 38, 39, 40]. Ce modèle est très utilisé dans les réseaux informatiques et électroniques, par exemple la transmission des messages dans un *réseau sur puce* (*Network On Chip* "N.O.C.") qui se fait selon différents modes de commutations, parmi eux la commutation de paquets. Ce mécanisme de commutation consiste à découper un message en plusieurs paquets avant d'être envoyé. Un paquet est décomposé en plusieurs flits, chaque flit est stocké dans une file d'attente puis transmis sur la voie appropriée.

1.4.2 Modèles d'attente avec vacances

Les modèles d'attente avec vacances se distinguent des modèles classiques par l'existence d'un paramètre supplémentaire. Il existe deux cas de vacances du serveur, le premier cas celui d'un service exhaustif et le deuxième cas celui d'un service non-exhaustif. Dans la première situation, le serveur prend ses vacances lorsque le système est vide et il reste toujours en vacance jusqu'à ce qu'il trouve au moins un client dans le système, ou bien il prend une seule vacation après chaque période d'activité. Dans la seconde situation, le serveur est autorisé à prendre des vacances en présence des clients dans le système. Cependant, le temps d'oisiveté du serveur pourrait être utilisé pour d'autres tâches supplémentaires : réparation, rappel, clients prioritaires, etc. Une large bibliographie sur les systèmes d'attente avec vacances et leurs diverses propriétés, [24, 34, 37, 47, 55, 60].

1.4.3 Modèles d'attente avec pannes

En pratique, les serveurs sont souvent sujets à des pannes et réparations, ce qui conduit à une augmentation du nombre de clients en attente dans le système. De nombreux chercheurs se sont intéressés à cette question. Madan (1989) [46] a étudié un système à un seul serveur de distribution Exponentielle. Il a obtenu la fonction génératrice des probabilités d'état en régime stationnaire ainsi que la taille de la file et quelques cas particuliers ; voir, par exemple [45, 56, 57].

1.4.4 Modèles d'attente $M/G/1$ avec rappels

Une nouvelle classe de modèles d'attente, appelés modèles d'attente avec rappels, a été introduite pour l'analyse de systèmes téléphoniques où un appel qui reçoit un signal occupé refait généralement son appel jusqu'à ce qu'il obtienne un signal libre. Ce type de modèle peut être considéré comme modèle d'attente avec vacances, où les temps de vacances sont les tentatives répétées. Ces modèles avec rappels sont caractérisés par le fait qu'un client qui arrive et trouve le serveur et la salle d'attente occupée doit obligatoirement rejoindre une autre salle qu'on appelle "*orbite*" constituée de clients "bloqués". Ces clients vont tenter à chaque fois leur chance pour rejoindre le serveur tout en respectant la politique de rappels. Si par contre le client arrive et trouve le serveur libre il est servi immédiatement puis quitte le système. Les travaux récents dans ce domaine sont résumés dans la monographie de Falin et Templeton (1997)[29]. Artalejo (1997)[5] a considéré une file $M/G/1$ avec rappels constants et politiques de vacances exhaustive. Aissani (2000)[2] a considéré une file d'attente avec rappels constants, arrivées en groupes et vacances exhaustives du serveur. Les temps de service et les périodes de vacances sont arbitrairement distribués. Il a obtenu les fonctions génératrices partielles du nombre de clients dans le système et dans l'orbite en régime stationnaire. Une classification bibliographique sur les systèmes avec rappels est donnée par Artalejo (1990-1999)[6], Artalejo et Gomez (2000-2010)[8, 9]

1.5 Réseaux de communication

Dans cette partie, nous définissons les réseaux sur puce et le mode de commutation de paquet dans le routeur sur lequel nous nous sommes basés dans notre travail de thèse.

Définition 1.5.1. Le réseau sur puce (N.O.C pour Network On Chip) s'inspire des réseaux d'ordinateurs. Il désigne l'intégration d'un réseau de communication dans un circuit intégré dans une puce dont les différents composants sont inter connectés avec une architecture réseau à base de routeur.

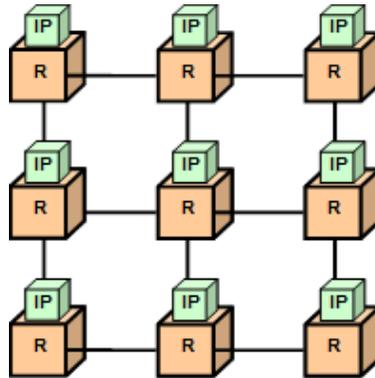


FIGURE 1.2 – Représentation schématique d'un Réseau N.O.C

Définition 1.5.2. Ce mécanisme de commutation consiste à découper un message en plusieurs paquets avant d'être envoyé. Ce dernier est décomposé en plusieurs flits, chaque flit est transmis par le routeur sur la voie appropriée.

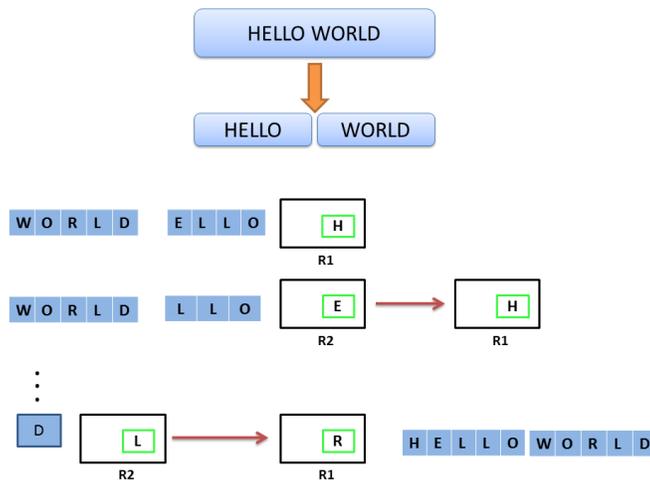


FIGURE 1.3 – Représentation schématique de la commutation de paquets : mode Wormhol

Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les notions de base sur les système d'attente, telles que le processus stochastique, processus de Markov et le processus de Poisson, nous avons présenté des files quelques d'attentes classiques de type $M//G/1$ avec panne, vacance, clients impatients, rappel et de type $M^X/G/1$ qui seront utilisées dans la modélisation des systèmes présentés en détails dans les prochains chapitres et comme abordé en dernière partie les réseaux "N.O.C" et le mode de commutation de paquets utilisé dans notre modélisation.

2

File $M^{[X]}/G/1$ à Serveur non fiable, Clients impatientes, Deux types de Vérification et Vacances.

Introduction

Ces dernières années plusieurs travaux ont été faits sur des systèmes de files d'attente de plus en plus complexes. Bien que certains aspects ont été abordés séparément à savoir la non fiabilité du serveur et différentes politiques de réparations et de vacances. Cependant, il est intéressant de mettre en place un modèle qui combine entre toutes ces composantes.

Dans ce chapitre, nous étudions un nouveau modèle d'une seule file d'attente et un seul serveur, fonctionnant sous les hypothèses suivantes. A chaque instant d'arrivée, un groupe aléatoire de clients arrive dans le système, où le client s'impatiente à un instant particulier. Le serveur est sujet à des pannes actives de loi de Poisson avec réparation. Nous introduisons également la vacance non exhaustive et deux types de vérification (appelés premier délai de vérification et deuxième délai de vérification). Nous présentons la condition de stabilité du modèle, ses mesures de performances et quelques illustrations numériques.

2.1 Description du modèle mathématique

Notre modèle $M^{[X]}/G/1$ est basé sur les hypothèses suivantes.

1. Les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$. Soit X la variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N}^* représentant la taille du groupe de distribution $C_i = P[X = i]$, $0 \leq C_i \leq 1$, ($i \in \mathbb{N}^*$) avec, $\sum_{i=1}^{\infty} C_i = 1$ et les deux premiers moments notés m_1, m_2 . Les tailles des arrivées successives en groupe sont *i.i.d.*
2. Un seul serveur peut servir un client à la fois en se basant sur la discipline du service *F.C.F.S.* Les temps successifs du service sont indépendants de même fonction de répartition $B(x)$, de densité $b(x)$ et de transformée de Laplace-Stieltjes $B^*(s)$ et les deux premiers moments sont respectivement β_1, β_2 .
3. Une fois que le temps de service est terminé, le serveur peut aller en vacance avec une probabilité q ou rester dans le système pour servir le prochain client avec une probabilité $1 - q$. Les périodes de vacances sont des variables aléatoires *i.i.d.* de distribution $V(x)$, de densité $v(x)$, de transformée de Laplace-Stieltjes $V^*(s)$ et les deux premiers moments sont respectivement ν_1, ν_2 .
4. Le serveur est sujet à des pannes actives, c'est-à-dire que le serveur ne tombe en panne que s'il sert un client. Il tombe en panne après un temps aléatoire de loi exponentielle de taux ξ . Le client qui était en service sera mis en attente jusqu'à ce que le serveur soit réparé. Une fois que le système tombe en panne, sa réparation ne sera pas prise en charge immédiatement. Il y a d'abord un premier délai de vérification de la panne de distribution générale $D_1(x)$, de densité $d_1(x)$, de transformée de Laplace-Stieltjes $D_1^*(s)$ et ses deux premiers moments sont respectivement $\theta_{1,1}, \theta_{1,2}$.
5. Après le premier délai de vérification, le processus de réparation commence immédiatement. Les temps de réparation sont des variables aléatoires *i.i.d.*; de distribution générale $R(x)$, de densité $r(x)$, de transformée de Laplace-Stieltjes $R^*(s)$ et les deux premiers moments sont respectivement η_1, η_2 .
6. Dès que le temps de réparation est achevé, le serveur aura un second délai de vérification de la mise en marche; les temps de délai sont des variables aléatoires *i.i.d.*; de distribution $D_2(x)$, de densité $d_2(x)$, de transformée de Laplace-Stieltjes $D_2^*(s)$ et les deux premiers moments sont respectivement $\theta_{2,1}, \theta_{2,2}$.

Le client dont le service est interrompu reste en service (n'est pas perdu). Une fois que le deuxième délai de vérification est terminé, le serveur prend en charge le service de ce client. Le serveur n'est pas autorisé à accepter un autre client tant que le client en service n'a pas quitté le système.

7. Si un groupe de clients arrive au système alors que le serveur est occupé, il a le choix de rejoindre la file d'attente avec la probabilité p ou de quitter le système avec la probabilité $1 - p$.

L'état du système à l'instant t peut être décrit par le processus de Markov suivant :

$$\{X(t), t \geq 0\} = \{(S(t), N(t), \tau_1(t), \tau_2(t), \tau_3(t), \tau_4(t), \tau_5(t)); t \geq 0\}.$$

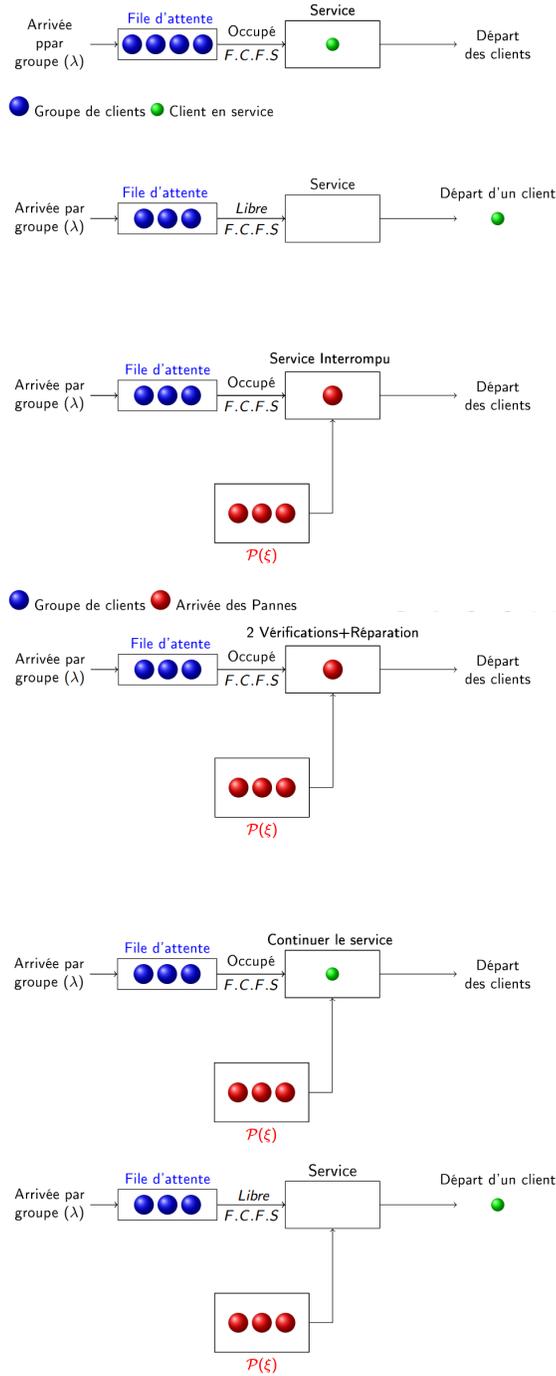
- $S(t)$ est l'état du serveur à l'instant t , avec les valeurs suivantes 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 représentant le serveur en état libre, occupé, en vacances, en première vérification, en réparation ou en deuxième vérification respectivement.
- $N(t)$ est le nombre de clients dans le système à l'instant t . Si $S(t) = 1$, on définit $\tau_1(t)$ le temps de service écoulé du client ; si $S(t) = 2$, on définit $\tau_2(t)$ le temps écoulé de la vacance ; si $S(t) = 3$, $\tau_3(t)$ est défini comme le temps écoulé de la première vérification ; si $S(t) = 4$, on définit $\tau_4(t)$ le temps écoulé de la réparation et si $S(t) = 5$, $\tau_5(t)$ représente le temps écoulé de la deuxième vérification.
- $\mu(x)$, $\omega(x)$, $\alpha_1(x)$, $\gamma(x)$ et $\alpha_2(x)$ les taux conditionnels de complétion (d'achèvement) pour le service, vacance, temps de la première vérification, réparation et la deuxième vérification sont respectivement définis par :

$$\mu(x) = \frac{b(x)}{1-B(x)}, \quad \omega(x) = \frac{v(x)}{1-V(x)}, \quad \alpha_1(x) = \frac{d_1(x)}{1-D_1(x)}, \quad \gamma(x) = \frac{r(x)}{1-R(x)} \quad \text{et} \quad \alpha_2(x) = \frac{d_2(x)}{1-D_2(x)}.$$

File $M^{[X]}/G/1$ à Serveur non fiable, Clients impatient, Deux types de Vérification et Vacances

2.1.1 Représentation schématique du modèle

Notre modèle étudié a été schématisé comme suit :



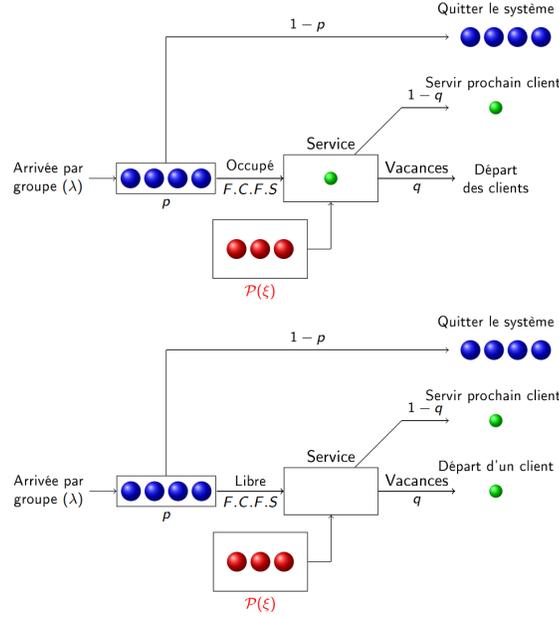


FIGURE 2.1 – Représentation schématique du système d'attente.

2.2 Analyse des probabilités stationnaires

Pour le processus $X(t)$, nous définissons ci-dessous les probabilités limites en utilisant la méthode de la variable supplémentaire.

$$P_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 0, N(t) = 0\}$$

$$P_n(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 1, N(t) = n, x < \tau_1(t) \leq x + dx\}, \quad n \geq 1;$$

$$V_n(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 2, N(t) = n, x < \tau_2(t) \leq x + dx\}, \quad n \geq 0;$$

$$D_{1,n}(x, y)dxdy = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 3, N(t) = n, x < \tau_1(t) \leq x + dx, y < \tau_3(t) \leq y + dy\}, \quad n \geq 1;$$

$$R_n(x, y)dxdy = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 4, N(t) = n, x < \tau_1(t) \leq x + dx, y < \tau_4(t) \leq y + dy\}, \quad n \geq 1;$$

$$D_{2,n}(x, y)dxdy = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 5, N(t) = n, x < \tau_1(t) \leq x + dx, y < \tau_5(t) \leq y + dy\}, \quad n \geq 1.$$

En utilisant la méthode de la variable supplémentaire aux probabilités limites ci-dessus, on obtient le système d'équations suivant.

$$\lambda P_0 = (1 - q) \int_0^\infty \mu(x)P_1(x)dx + \int_0^\infty \omega(x)V_0(x)dx \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} P_n(x) &= -(\lambda p + \mu(x) + \xi)P_n(x) + \lambda p \sum_{k=1}^n (1 - \delta_{n,1})C_k P_{n-k}(x) \\ &+ \int_0^\infty \alpha_2(y)D_{2,n}(x, y)dy, \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} V_n(x) = -(\lambda p + \omega(x))V_n(x) + \lambda p \sum_{k=1}^n (1 - \delta_{n,0})C_k V_{n-k}(x), \quad n \geq 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} D_{1,n}(x, y) = -(\lambda p + \alpha_1(y))D_{1,n}(x, y) + \lambda p \sum_{k=1}^n (1 - \delta_{n,1})C_k D_{1,n-k}(x, y), \quad n \geq 1 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} R_n(x, y) = -(\lambda p + \gamma(y))R_n(x, y) + \lambda p \sum_{k=1}^n (1 - \delta_{n,1})C_k R_{n-k}(x, y), \quad n \geq 1 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} D_{2,n}(x, y) = -(\lambda p + \alpha_2(y))D_{2,n}(x, y) + \lambda p \sum_{k=1}^n (1 - \delta_{n,1})C_k D_{2,n-k}(x, y), \quad n \geq 1 \quad (2.6)$$

Où $\delta_{i,j}$ est la fonction Kronecker définie comme suit

$$\begin{cases} \delta_{i,j} = 1 & \text{si } i = j; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$P_n(0) = (1 - q) \int_0^\infty \mu(x)P_{n+1}(x)dx + \int_0^\infty \omega(x)V_n(x)dx + \lambda P_0 C_n, \quad n \geq 1 \quad (2.7)$$

$$V_n(0) = q \int_0^\infty \mu(x)P_{n+1}(x)dx, \quad n \geq 0 \quad (2.8)$$

$$D_{1,n}(x, 0) = \xi P_n(x), \quad n \geq 1 \quad (2.9)$$

$$R_n(x, 0) = \int_0^\infty \alpha_1(y)D_{1,n}(x, y)dy, \quad n \geq 1 \quad (2.10)$$

$$D_{2,n}(x, 0) = \int_0^\infty \gamma(y)R_n(x, y)dy, \quad n \geq 1 \quad (2.11)$$

L'équation de normalisation est donnée comme suit :

$$P_0 + \sum_{n \geq 1} \int_0^\infty P_n(x)dx + \sum_{n \geq 0} \int_0^\infty V_n(x)dx + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{i=1}^2 \int_0^\infty \int_0^\infty D_{i,n}(x, y)dxdy + \int_0^\infty \int_0^\infty R_n(x, y)dxdy \right) = 1 \quad (2.12)$$

Pour résoudre le système d'équations (2.1 – 2.12) nous définissons les fonctions génératrices suivantes qui sont convergentes pour tout $x \geq 0, y \geq 0$ et dans le domaine $|z| \leq 1$,

$$P(z, x) = \sum_{n \geq 1} z^n P_n(x); \quad P(z, 0) = \sum_{n \geq 1} z^n P_n(0)$$

$$V_s(z, x) = \sum_{n \geq 0} z^n V_n(x); \quad V_s(z, 0) = \sum_{n \geq 0} z^n V_n(0)$$

$$R_s(z, x, y) = \sum_{n \geq 1} z^n R_n(x, y); \quad R_s(z, x, 0) = \sum_{n \geq 1} z^n R_n(x, 0)$$

$$D_{is}(z, x, y) = \sum_{n \geq 1} z^n D_{i,n}(x, y); \quad D_{is}(z, x, 0) = \sum_{n \geq 1} z^n D_{i,n}(x, 0), \quad \text{avec } i = 1, 2$$

$$C(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k C_k.$$

Le théorème suivant décrit la distribution des états du processus en équilibre en terme des fonctions génératrices partielles.

Théorème 2.2.1. Si $\frac{\lambda m_1 \psi_1}{1 + (1-p)\lambda m_1 \psi_1} < 1$ (condition de stabilité), nous avons :

$$P(z, x) = P(z, 0)e^{-A(z)x}(1 - B(x));$$

$$V_s(z, x) = \frac{q}{z}P(z, 0)B^*(A(z))e^{-\chi(z)x}(1 - V(x));$$

$$D_{1s}(z, x, y) = \xi P(z, 0)e^{-A(z)x}(1 - B(x))e^{-\chi(z)y}(1 - D_1(y));$$

$$R_s(z, x, y) = \xi P(z, 0)e^{-A(z)x}(1 - B(x))D_1^*(\chi(z))e^{-\chi(z)y}(1 - R(y));$$

$$D_{2s}(z, x, y) = \xi P(z, 0)e^{-A(z)x}(1 - B(x))D_1^*(\chi(z))R^*(\chi(z))e^{-\chi(z)y}(1 - D_2(y));$$

$$P(z, 0) = \frac{\lambda z(1 - C(z))P_0}{(1 - q)B^*(A(z)) + qB^*(A(z))V^*(\chi(z)) - z}.$$

Où

$$\chi(z) = \lambda p(1 - C(z))$$

et

$$A(z) = \phi(\chi(z)) \text{ telle que la fonction } \phi \text{ est définie par } \phi(z) = z + \xi - \xi D_1^*(z)R^*(z)D_2^*(z).$$

Preuve 1. Multipliant les équations (2.2-2.6) par z^n et en sommant sur n de 1 à ∞ , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x}P(z, x) = -(\lambda p + \mu(x) + \xi - \lambda p C(z))P(z, x) + \int_0^\infty \alpha_2(y)D_{2s}(z, x, y)dy \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}V_s(z, x) = -(\lambda p + \omega(x) - \lambda p C(z))V_s(z, x) \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}D_{1s}(z, x, y) = -(\lambda p + \alpha_1(y) - \lambda p C(z))D_{1s}(z, x, y) \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}R_s(z, x, y) = -(\lambda p + \gamma(y) - \lambda p C(z))R_s(z, x, y) \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}D_{2s}(z, x, y) = -(\lambda p + \alpha_2(y) - \lambda p C(z))D_{2s}(z, x, y) \quad (2.17)$$

En suivant les mêmes étapes de calcul, on multiplie les équations (2.7) à (2.11) par z^n et en sommant sur n de 1 à ∞ , nous obtenons

$$zP(z, 0) = (1 - q) \int_0^\infty \mu(x)P(z, x)dx + z \int_0^\infty \omega(x)V_s(z, x)dx - z\lambda P_0(1 - C(z)) \quad (2.18)$$

$$V_s(z, 0) = \frac{q}{z} \int_0^\infty \mu(x)P(z, x)dx \quad (2.19)$$

$$D_{1s}(z, x, 0) = \xi P(z, x) \quad (2.20)$$

$$R_s(z, x, 0) = \int_0^\infty \alpha_1(y)D_{1s}(z, x, y)dy \quad (2.21)$$

$$D_{2s}(z, x, 0) = \int_0^\infty \gamma(y)R_s(z, x, y)dy \quad (2.22)$$

Afin de résoudre les équations (2.14),(2.15),(2.16) et (2.17), on utilise les équations différentielles qui donnent :

$$V_s(z, x) = V_s(z, 0)(1 - V(x))e^{-\chi(z)x} \quad (2.23)$$

$$D_{1s}(z, x, y) = D_{1s}(z, x, 0)(1 - D_1(y))e^{-\chi(z)y} \quad (2.24)$$

$$R_s(z, x, y) = R_s(z, x, 0)(1 - R(y))e^{-\chi(z)y} \quad (2.25)$$

$$D_{2s}(z, x, y) = D_{2s}(z, x, 0)(1 - D_2(y))e^{-\chi(z)y}. \quad (2.26)$$

On combine entre les équations (2.20), (2.21), (2.22), (2.24), (2.25) et en remplaçant dans l'équation (2.26), on obtient

$$D_{2s}(z, x, y) = \xi P(z, x)D_1^*(\chi(z))R^*(\chi(z))(1 - D_2(y))e^{-\chi(z)y}. \quad (2.27)$$

On remplace l'équation (2.27) dans l'équation (2.13), on trouve

$$P(z, x) = P(z, 0)(1 - B(x))e^{-A(z)x}. \quad (2.28)$$

Remplaçant l'équation (2.28) dans l'équation (2.18), on aura

$$P(z, 0) = \frac{\lambda z(1 - C(z))P_0}{B^*(A(z))(qV^*(\chi(z)) + 1 - q) - z} \quad (2.29)$$

Après simplifications , on obtient

$$V_s(z, 0) = \frac{q}{z}P(z, 0)B^*(A(z)) \quad (2.30)$$

$$D_{1s}(z, x, 0) = \xi P(z, 0)(1 - B(x))e^{-A(z)x} \quad (2.31)$$

$$R_s(z, x, 0) = \xi P(z, 0)D_1^*(\chi(z))e^{-A(z)x} \quad (2.32)$$

$$D_{2s}(z, x, 0) = \xi P(z, 0)D_1^*(\chi(z))R^*(\chi(z))e^{-A(z)x}. \quad (2.33)$$

Ainsi, nous avons $P(z, 0)$, $V_s(z, 0)$, $D_{1s}(z, x, 0)$, $R_s(z, x, 0)$, $D_{2s}(z, x, 0)$ qui dépendent de P_0 . Cependant P_0 peut être trouvé en utilisant l'équation de normalisation suivante.

$$\begin{aligned} P_0 + \int_0^\infty P(1, x)dx + \int_0^\infty V_s(1, x)dx + \int_0^\infty \int_0^\infty D_{1s}(1, x, y)dx dy + \int_0^\infty \int_0^\infty R_s(1, x, y)dx dy \\ + \int_0^\infty \int_0^\infty D_{2s}(1, x, y)dx dy = 1. \end{aligned}$$

Théorème 2.2.2. Si $\frac{\lambda m_1 \psi_1}{1 + (1-p)\lambda m_1 \psi_1} < 1$, les fonctions génératrices partielles de probabilités des distributions de l'état du serveur sont données comme suit

$$P(z) = \frac{\lambda z(1-C(z))P_0}{[(1-q)B^*(A(z)) + qB^*(A(z))V^*(\chi(z)) - z]} \times \frac{[1-B^*(A(z))]}{A(z)}$$

$$V_s(z) = \frac{q\lambda(1-C(z))P_0B^*(A(z))}{[(1-q)B^*(A(z)) + qB^*(A(z))V^*(\chi(z)) - z]} \times \frac{[1-V^*(\chi(z))]}{\chi(z)}$$

$$D_{1s}(z) = \frac{\xi\lambda z(1-C(z))P_0}{[(1-q)B^*(A(z)) + qB^*(A(z))V^*(\chi(z)) - z]} \times \frac{[1-B^*(A(z))]}{A(z)} \times \frac{[1-D_1^*(\chi(z))]}{\chi(z)}$$

$$R_s(z) = \frac{\xi\lambda z(1-C(z))P_0D_1^*(\chi(z))}{[(1-q)B^*(A(z)) + qB^*(A(z))V^*(\chi(z)) - z]} \times \frac{[1-B^*(A(z))]}{A(z)} \times \frac{[1-R^*(\chi(z))]}{\chi(z)}$$

$$D_{2s}(z) = \frac{\xi\lambda z(1-C(z))P_0D_1^*(\chi(z))R^*(\chi(z))}{[(1-q)B^*(A(z)) + qB^*(A(z))V^*(\chi(z)) - z]} \times \frac{[1-B^*(A(z))]}{A(z)} \times \frac{[1-D_2^*(\chi(z))]}{\chi(z)}.$$

Preuve 2. En appliquant le théorème 2.2.1 et la définition de la fonction génératrice partielle pour chaque état du serveur, on obtient

$$\begin{aligned} P(z) &= \int_0^\infty P(z, x) dx \\ V_s(z) &= \int_0^\infty V_s(z, x) dx \\ R_s(z) &= \int_0^\infty \int_0^\infty R_s(z, x, y) dx dy \\ D_{is}(z) &= \int_0^\infty \int_0^\infty D_{is}(z, x, y) dx dy \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Ce qui donne donc les résultats précédents.

Corollaire 2.2.1. La probabilité que le système étudié est libre et le serveur n'est pas en vacance noté P_0 et l'intensité du trafic ρ sont données respectivement,

$$P_0 = \frac{1 - \lambda p m_1 \psi_1}{1 + (1-p)\lambda m_1 \psi_1}, \quad (2.34)$$

et

$$\rho = \frac{\lambda m_1 \psi_1}{1 + (1-p)\lambda m_1 \psi_1}.$$

Où,

$\psi_1 = \phi'(0)\beta_1 + q\nu_1$ est obtenue en considérant la 1^{ère} dérivée de la fonction $\phi(z)$ appliquée à $z = 0$ donnée ci-dessous.

$$\phi'(0) = 1 + \xi(\theta_{1,1} + \eta_1 + \theta_{2,1}).$$

Preuve 3. *En utilisant le théorème 2.2.2 et en appliquant la formule de normalisation donnée ci-dessous*

$$P_0 + \lim_{z \rightarrow 1} P(z) + \lim_{z \rightarrow 1} zV_s(z) + \lim_{z \rightarrow 1} D_{1s}(z) + \lim_{z \rightarrow 1} R_s(z) + \lim_{z \rightarrow 1} D_{2s}(z) = 1 \quad (2.35)$$

On obtient l'expression de la probabilité P_0 et on a,

$$P_0 = 1 - \rho.$$

A partir de la formule donnée précédemment, nous obtenons l'expression de ρ .

Remarque 2.2.1. *Comme P_0 doit être positif, alors, $\rho < 1$ est la condition nécessaire pour la stabilité du système.*

2.3 Mesures de erformance

Dans cette section, sous la condition de stabilité nous déduisons quelques mesures de performance du système .

Corollaire 2.3.1. *1. La fonction génératrice du nombre moyen de clients dans le système est donnée par*

$$\pi(z) = \frac{P_0}{p} \left[\frac{z(1-p) + (p-z)B^*(A(z))(qV^*(\chi(z)) + 1 - q)}{B^*(A(z))(qV^*(\chi(z)) + 1 - q) - z} \right]$$

2. Le nombre moyen de clients dans le système est :

$$E(N) = \frac{P_0\Gamma}{2p\Theta}$$

3. Le temps moyen d'attente d'un client dans le système (en incluant le temps de service) est donné par

$$E(W) = \frac{P_0\Gamma}{2\lambda m_1 p^2 \Theta}$$

Où,

$$\begin{aligned} \Gamma = & (A'(1))^2(\beta_2 - 2\beta_1^2) + q[\nu_2(\chi'(1))^2 - 2\beta_1 A'(1)\chi'(1)\nu_1 - 2q(\chi'(1))^2\nu_1^2 \\ & - 2\chi'(1)\nu_1 - \nu_1\chi''(1)] - \beta_1(2A'(1) + A''(1)) \end{aligned}$$

A', A'', χ', χ'' sont la 1^{ère} et la 2^{ème} dérivées des deux fonctions $A(z)$ et $\chi(z)$, qui sont données respectivement par :

$$A'(1) = \chi'(1)\phi'(0)$$

$$\begin{aligned}
 A''(1) &= \chi''(1)\phi'(0) + (\chi'(1))^2\phi''(0) \\
 \chi'(1) &= -\lambda pm_1 \\
 \chi''(1) &= -\lambda pm_2 \\
 \phi'(0) &= 1 + \xi(\theta_{1,1} + \eta_1 + \theta_{2,1}) \\
 \phi''(0) &= -\xi[\theta_{1,2} + \eta_2 + \theta_{2,2} + 2(\theta_{1,1}\eta_1 + \theta_{1,1}\theta_{2,1} + \theta_{2,1}\eta_1)] \\
 \Theta &= (A'(1)\beta_1 + q\chi'(1)\nu_1 + 1)^2
 \end{aligned}$$

Preuve 4. *La fonction génératrice du nombre de clients dans le système est donnée par :*

$$\pi(z) = P_0 + P(z) + zV_s(z) + D_{1s}(z) + R_s(z) + D_{2s}(z)$$

Nous obtenons le 1^{er} résultat. En appliquant la règle de l'Hôpital sur la fonction $\pi(z)$ au point $z = 1$, on obtient $E(N) = \lim_{z \rightarrow 1} \pi'(z)$, d'où nous trouvons le 2^{ème} résultat. En utilisant la formule de Little, nous déduisons l'expression du temps moyen d'attente dans le système.

Corollaire 2.3.2. 1. *Le serveur est occupé (Busy) mais pas en panne avec la probabilité*

$$P_B = \frac{\lambda m_1 \beta_1}{1 + (1 - p)\lambda m_1 \psi_1}$$

2. *Le serveur est en attente (Waiting) de réparation avec la probabilité*

$$P_W = \xi \theta_{1,1} P_B$$

3. *Le serveur est en réparation avec la probabilité*

$$P_R = \xi \eta_1 P_B$$

4. *Le serveur est en 2^{ème} vérification avec la probabilité*

$$P_{D_2} = \xi \theta_{2,1} P_B$$

5. *Le serveur est en vacance avec la probabilité*

$$P_V = \frac{qm\lambda\nu_1}{1 + (1 - p)\lambda m_1 \psi_1}$$

6. Le serveur n'est pas disponible avec la probabilité

$$P_I = \xi(\theta_{1,1} + \eta_1 + \theta_{2,1})P_B$$

Preuve 5. En considérant les limites de $P(z)$, $D_{1s}(z)$, $R_s(z)$, $D_{2s}(z)$, $V_s(z)$ quand z tend vers 1, on obtient respectivement P_B , P_W , P_R , P_{D_2} et P_V .

L'expression de P_I est obtenue par $P_I = P_W + P_R + P_{D_2}$.

Remarque 2.3.1. Les probabilités P_W , P_R et P_{V_2} sont écrites en fonction de P_B , ce qui explique des pannes surviennent pendant le service.

Corollaire 2.3.3. Si $\rho < 1$, A et f représentent les indices de fiabilité du système. La disponibilité du système et la fréquence de défaillance sont données respectivement par

$$A = \frac{1 - \lambda m_1(p\psi_1 - \beta_1)}{1 + (1 - p)\lambda m_1\psi_1},$$

et

$$f = \frac{\xi \lambda m_1 \beta_1}{1 + (1 - p)\lambda m_1 \psi_1},$$

Preuve 6. La disponibilité du système est :,

$$A = P_0 + \int_0^\infty P(1, x) dx$$

d'où,

$$A = P_0 + \lim_{z \rightarrow 1} P(z)$$

et en considérant les théorèmes 2.2.1 et 2.2.1, nous obtenons l'expression de A . Ainsi, la fréquence de la défaillance f est :

$$f = \xi \lim_{z \rightarrow 1} P(z)$$

Corollaire 2.3.4. Soient O et C deux variables aléatoires définies comme suit :

- O est la durée de la période occupée.
- C est la durée de la période d'occupation d'un cycle.

Sous la condition de stabilité, leurs moyennes sont respectivement

$$E(O) = \frac{\psi_1}{(1 - \lambda p m_1 \psi_1)},$$

et

$$E(C) = \frac{1 + (1 - p)\lambda m_1 \psi_1}{\lambda m_1 (1 - \lambda p m_1 \psi_1)}.$$

Preuve 7. *En appliquant l'argument de la théorie de renouvellement alternée, nous obtenons :*

$$E(O) = \frac{P_0^{-1} - 1}{\lambda m_1},$$
$$E(C) = \frac{1}{\lambda m_1 P_0}.$$

Et en prenant en compte le théorème 2.2.1 nous trouvons les résultats ci-dessus.

2.4 Distribution de la taille du système au point de départ

En utilisant l'argument de PASTA , le nombre de client dans le système juste après le départ à l'état stationnaire est donné par :

$$S_n^+ = D_0(1 - q) \int_0^\infty \mu(x)P_{n+1}(x)dx + D_0 \int_0^\infty \omega(x)V_n(x)dx \quad n \geq 0 \quad (2.36)$$

Où, D_0 est la constante de normalisation donnée par :

$$D_0 = \frac{(1 + (1 - p)\lambda m_1 \psi_1)}{\lambda m_1}$$

Théorème 2.4.1. *Soit $S^+(z)$ la fonction génératrice de S_n^+ , ($n = 0, 1, 2, \dots$), on a*

$$S^+(z) = \frac{(1 + (1 - p)\lambda m_1 \psi_1)(1 - C(z))B^*(A(z))(1 - q + qV^*(\chi(z)))P_0}{m_1[B^*(A(z))(qV^*(\chi(z)) + 1 - q) - z]} \quad (2.37)$$

Preuve 8. *En multipliant l'équation 2.36 par z^n en sommant sur n de 0 à ∞ , nous obtenons l'équation 2.37*

Remarque 2.4.1. *Pour $p = 1$, après le réarrangement de l'équation (37), on écrit*

$$S^+(z) = \frac{(1 - C(z)) (1 - z)B^*(A(z))(1 - q + qV^*(\chi(z)))P_0}{m_1(1 - z) [B^*(A(z))(qV^*(\chi(z)) + 1 - q) - z]}$$

donc,

$$S^+(z) = M(z)\pi(z)$$

où,

$\pi(z)$ est la fonction génératrice pour $p = 1$.

et

$$M(z) = \frac{1 - C(z)}{E(X)(1 - z)}$$

$M(z)$ est la fonction génératrice du nombre de clients placé avant l'arrivée d'un groupe de client dans lequel existe le client marqué, voir, Takagi (1991) [55].

2.5 Cas particuliers

Premier cas : absence de la vacance, pannes, arrivées groupées, perte de clients

Dans ce cas, le système ne tombe jamais en panne, le serveur ne part pas en vacance et les clients n'arrivent pas en groupe, i.e., $P(X = 1) = 1$, donc, $\xi = 0$, $p = 1$, $q = 0$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$. Alors,

La condition de stabilité du système est donnée par :

$$\rho = \lambda\beta_1 < 1$$

Si $\rho < 1$, le nombre moyen de clients dans le système est :

$$E(N) = \rho + \frac{\lambda^2\beta_2}{2(1-\rho)}$$

Les résultats trouvés dans ce cas particulier sont similaires aux résultats du modèle $M/G/1$, voir le livre de Kleinrock [41] .

Deuxième cas : Absence des pannes, arrivée groupées, perte de clients

Le serveur est toujours fiable, le serveur peut prendre une vacance avec la probabilité q et les clients n'arrivent pas en groupe, i. e., $P(X = 1) = 1$, de là, $\xi = 0$, $p = 1$, $q \neq 0$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$. Alors,

La condition de stabilité du système est :

$$\rho = \lambda(\beta_1 + q\nu_1) < 1$$

Sous cette condition de stabilité, nombre moyen de clients dans le système est donné par :

$$E(N) = \frac{\lambda^2(\beta_2 - 2\beta_1^2 + q\nu_2 - 2q\beta_1\nu_1 - 2q\nu_1^2) + 2\lambda(\beta_1 + \nu_1)}{2(1 - \lambda(\beta_1 + q\nu_1))}$$

Voir les résultats de Inoue et al (2017)[26]. **Troisième cas : Absence du deuxième délai, de la vacance et de l'arrivée en groupe**

Dans ce cas, le serveur tombe en panne il passe en délai de vérification (première vérification) avant de commencer la réparation, les clients arrivent un par un, i. e., $P(X = 1) = 1$, $q = 0$, $p = 1$, $\xi \neq 0$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $\theta_{2,1} = 0$, alors la condition de stabilité du système est :

$$\rho = \lambda\beta_1(1 + \xi(\theta_{1,1} + \eta_1)) < 1$$

et le nombre moyen de clients dans le système est donné par :

$$E(N) = \frac{P_0[(A'(1))^2(\beta_2 - 2\beta_1^2) - \beta_1(2A'(1) + A''(1))]}{2\Theta}$$

avec,

$$A'(1) = -\lambda(1 + \xi(\theta_{1,1} + \eta_1))$$

$$A''(1) = A'(1) - \lambda^2\xi(\theta_{1,2} + \eta_2 + 2\theta_{1,1}\eta_1)$$

Les résultats de ce cas particulier sont similaires aux résultats de ,Choudhury (2000)[21]

Quatrième cas : Absence du deuxième délai

Le serveur est soumis à des pannes actives, et il a le choix d'aller en vacance nous avant un seul délai de vérification avant la réparation, les clients arrivent en groupe ,d'où, $q \neq 0$, $p = 1$, $\xi \neq 0$, $\theta_{2,1} = 0$, on a :

$$\chi'(1) = -\lambda m_1$$

$$\chi''(1) = -\lambda m_2$$

$$A'(1) = -\lambda m_1(1 + \xi(\theta_{1,1} + \eta_1))$$

$$A''(1) = A'(1) - \lambda m_2(1 + \xi(\theta_{1,1} + \eta_1)) - (\lambda m_1)^2\xi(\theta_{1,2} + \eta_2 + 2\theta_{1,1}\eta_1)$$

$$\Theta = [1 - \lambda m_1(\beta_1(1 + \xi(\theta_{1,1} + \eta_1))) + q\nu_1]^2,$$

$$\Gamma = (A'(1))^2(\beta_2 - 2\beta_1^2) + q[\nu_2(\chi'(1))^2 - 2\beta_1 A'(1)\chi'(1)\nu_1 - 2q(\chi'(1))^2\nu_1^2 - 2\chi'(1)\nu_1 - \nu_1\chi''(1)] - \beta_1(2A'(1) + A''(1))$$

La condition de stabilité du système est donnée ci-dessous :

$$\rho = \lambda\beta_1(1 + \xi(\theta_{1,1} + \eta_1)) + q\nu_1 < 1$$

La formule de $\pi(z)$ est la suivante :

$$\pi(z) = \frac{(1-z)B^*(A(z))(qV^*(\chi(z)) + 1 - q)P_0}{B^*(A(z))(qV^*(\chi(z)) + 1 - q) - z}$$

Le nombre moyen de clients dans le système est :

$$E(N) = \frac{P_0\Gamma}{2p\Theta}$$

Nous retrouvons les résultats dans l'article de Choudhury (2002) [22].

2.6 Analyse de sensibilité des caractéristiques du système

Dans cette section, nous illustrons l'effet des paramètres sur les principales mesures de performances P_0 et $E(N)$. La taille du groupe des arrivées est de loi Géométrique de probabilité r , tan dit que le temps de service, temps de réparation, les deux temps de vérification et le temps de vacance ont tous la même distribution qui est de loi Erlang avec les paramètres (k, μ) ,

$(2, \gamma)$, $(2, \alpha_1)$, $(2, \alpha_2)$, $(2, \omega)$ respectivement. De plus, le serveur est soumis à des pannes actives de distribution Exponentielle avec un taux ξ .

7. 1 Effet du paramètre μ sur P_0 et $E(N)$ pour différentes valeurs de p et r

La figure 2.2 illustre la probabilité P_0 et la valeur de $E(N)$ par rapport au taux de service μ avec différentes valeurs de p . Dans chaque cas, nous représentons trois courbes où p prend les valeurs 0.025, 0.5, 1 et les autres paramètres sont choisis tels que $k = 2$, $q = 0.75$, $r = 1/5$, $\xi = 0.1$, $\omega = 8$, $\alpha_1 = 40$, $\alpha_2 = 20$.

- (a) Pour chaque valeur de p , nous étudions l'influence du taux de service μ sur P_0 . Ici, λ et γ ont les valeurs 0.4 et 10 respectivement.
- (b) Pour chaque valeur de p , nous étudions l'influence du taux de service μ sur $E(N)$. Ici, λ et γ ont les valeurs 0.25 et 6 respectivement.

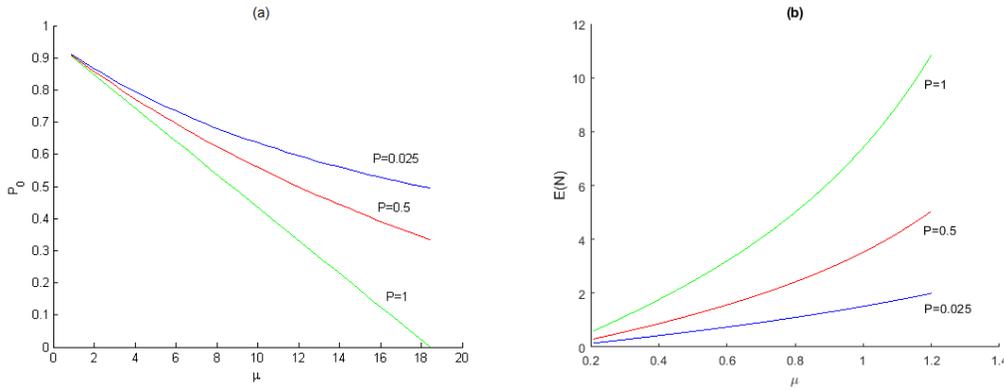


FIGURE 2.2 – (a) Effet du taux de service μ sur P_0 . (b) Effet du taux de service μ sur $E(N)$

Commentaires :

La probabilité P_0 décroît lorsque le taux de service μ et la probabilité p augmentent, et le nombre moyen de clients dans le système $E(N)$ augmente lorsque le taux μ et la probabilité p augmente.

La figure 2.3 illustre la probabilité P_0 et la valeur de $E(N)$ par rapport, au taux de service μ avec différentes valeurs de la probabilité r . Nous avons considéré deux cas, où nous représentons trois courbes où r prend les valeurs $1/7$, $1/4$, 1 et les autres paramètres ont les valeurs $k = 2$, $q = 0.75$, $\xi = 0.1$, $\alpha_1 = 20$.

- (c) Pour chaque valeur de r , nous étudions l'influence du taux de service μ sur P_0 . On a, $p = 0.001$, $\lambda = 0.4$, $\gamma = 8$, $\omega = 4$, $\alpha_2 = 10$.
- (d) Pour chaque valeur de r , nous étudions l'influence du taux de service μ sur $E(N)$. On a, $p = 0.01$, $\lambda = 3$, $\gamma = 10$, $\omega = 5$, $\alpha_2 = 20$.

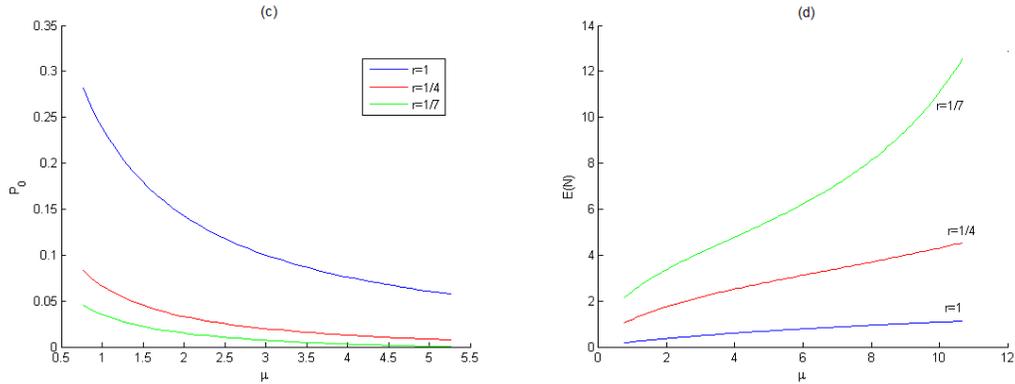


FIGURE 2.3 – (c) Effet du taux de service μ sur P_0 . (d) Effet du taux de service μ sur $E(N)$

Commentaires :

Dans la figure 2.3, nous observons le même comportement de la probabilité P_0 et la valeur de $E(N)$ que dans la figure 2.2, et cela par rapport au taux μ et cela en augmentant la valeur de la probabilité du groupe de client r

7. 2 Effet du paramètre de la panne ξ sur P_{D_2} pour différentes valeurs de p et r

La probabilité de la deuxième vérification P_{D_2} a été illustrée par rapport au taux de la panne ξ avec différentes valeurs des probabilités p et r dans la figure 2.4, ici aussi nous avons considéré deux cas

- (e) On choisit $q = 1, r = 1/5, \lambda = 0.04, \mu = 0.5, \gamma = 4, \omega = 2, \alpha_1 = 20, \alpha_2 = 10$, et en variant les valeurs de p , les courbes tracées correspondent à $p = 0.025, 0.5, 1$.
- (f) On choisit $p = 0.5, q = 1, \lambda = 0.01, \mu = 1, \gamma = 4, \omega = 2, \alpha_1 = 20, \alpha_2 = 10$, et en variant les valeurs de r , les courbes tracées correspondent à $r = 1/7, 1/4, 1$.

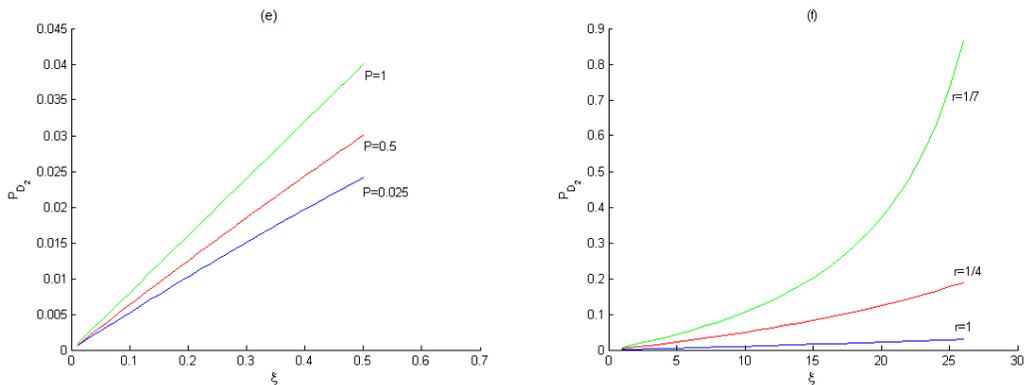


FIGURE 2.4 – (e) Effet ξ sur P_{D_2} avec différentes valeurs de p . (f) Effet ξ sur P_{D_2} avec les différentes valeurs de r .

Commentaires :

Les deux cas (e) et (f) de la figure 2.4 montrent que la probabilité P_{D_2} croit en augmentant le taux de la panne ξ et cela pour quelques soient les valeurs de p et r , et croit encore plus vite en augmentant les valeurs de p et diminuant les valeurs de r .

7. 3 Effet des taux de vérifications (α_1, α_2) sur P_0 et $E(N)$

Dans la figure 2.5, nous représentons P_0 et $E(N)$ par rapport à la paire (α_1, α_2) . Les courbes sont tracées pour les valeurs $k = 1, p = 1, q = 0.5, r = 1/5, \lambda = 0.1, \mu = 1, \xi = 0.01, \gamma = 8, \omega = 8$. Nous avons aussi deux cas :

- (g) On étudie l'influence des paramètres (α_1, α_2) sur P_0 .
- (h) On étudie l'influence des paramètres (α_1, α_2) sur $E(N)$.

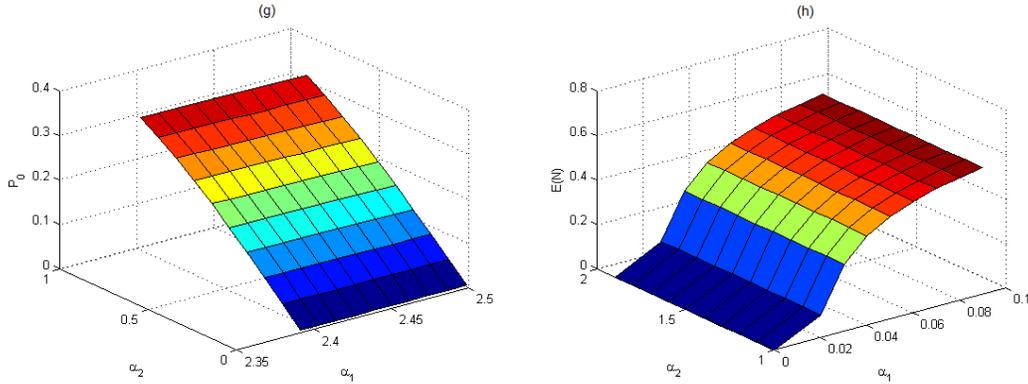


FIGURE 2.5 – (g) Effet des paramètres (α_1, α_2) sur P_0 . (h) Effet des paramètres (α_1, α_2) sur $E(N)$.

Commentaires :

Dans la figure 2.5, on peut dire que la probabilité P_0 et le nombre moyen de clients dans le système $E(N)$ se comportent bien avec le choix des paramètres et puisque les deux surfaces sont lisses.

7. 4 Influence du paramètre ξ sur les fréquences A et f pour différentes valeurs de p

La figure 2.6 représente les fréquences de fiabilité et de défaillance par rapport au taux de panne ξ avec les différentes valeurs de p .

Nous avons deux cas et dans chaque cas, nous représentons trois cas où la probabilité p prend les valeurs 0.025, 0.5, 1 et les autres paramètres ont les valeurs suivantes : $k = 2, q = 0.25, r = 1/5, \gamma = 4, \omega = 4, \alpha_1 = 3, \alpha_2 = 3$.

- (i) L'influence du taux de la panne ξ sur la fréquence de fiabilité A en considérant $\lambda = 0.05, \mu = 5$.
- (j) L'influence du taux de la panne ξ sur la fréquence de défaillance f , en considérant $\lambda = 0.08, \mu = 3$.

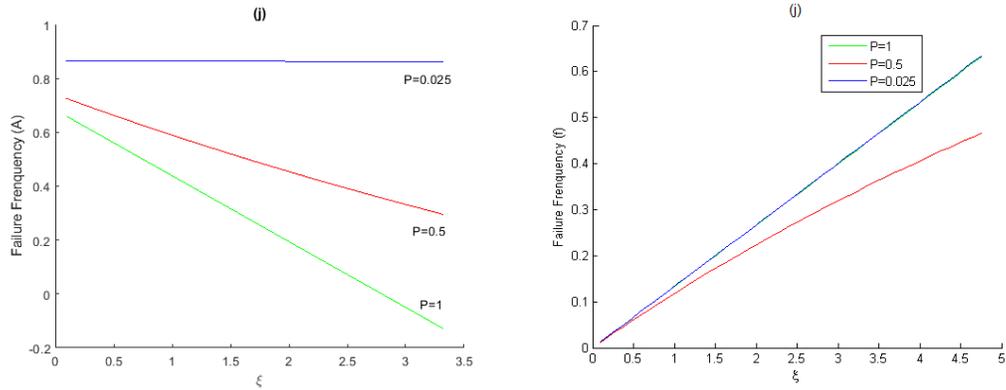


FIGURE 2.6 – (i) Effet ξ sur la fréquence A . (j) Effet de ξ sur la fréquence de f .

Commentaires :

Pour le cas (i) de la figure 2.6, nous remarquons que la fréquence de fiabilité A décroît en augmentant les valeurs du taux ξ quelle que soit la valeur de la probabilité p . Par contre le cas (j) montre l'inverse c'est à dire que la fréquence de défaillance f croît en augmentant les valeurs de ξ pour toutes les valeurs de p .

Conclusion du chapitre

Nous avons établi une étude de la file d'attente $M^{[X]}/G/1$ avec perte géométrique des clients et vacances où le serveur n'est pas fiable, c'est à dire que nous avons des périodes de pannes du serveur, de réparations et deux délais de vérification. Par la méthode de la variable supplémentaire, nous avons obtenu la fonction génératrice de l'état du serveur ainsi que la condition de stabilité du système. Enfin nous avons donné quelques exemples numériques montrant l'effet des pannes, délais de vérification et la taille du groupe de clients sur les principales mesures de performances.

3

File $M^{[X]}/G/1$ avec Rappels, à Serveur non fiable, Deux types de clients, Deux délais de Vérification et Vacances

Introduction

Les systèmes de files d'attente avec rappels et arrivées groupées ont été développés par Falin (1976) [28], qui a introduit une nouvelle discipline du serveur définie par :

Si un client ou un groupe de clients arrive et trouve le serveur occupé, en pannes, alors il quitte la zone de service et se joint à un groupe de clients en orbite suivant la discipline *F.C.F.S.* et répète sa tentative après un temps aléatoire jusqu'à l'obtention d'un service.

Dans ce chapitre, nous présentons un nouveau modèle qui est une extension du modèle présenté dans le chapitre précédent en introduisant la politique de rappels et deux types de clients, client transitaire (appelé aussi clients ordinaires) et client récurrent (appelé aussi clients permanents). Nous obtenons la condition de stabilité, les distributions des états du système en terme de fonction génératrices partielles, ainsi que la décomposition stochastique du modèle.

3.1 Modèle mathématique

Les hypothèses suivantes décrivent le modèle mathématique.

1. La capacité de l'orbite est infinie.
2. La seule file d'attente à deux types de clients : clients transitaires et clients récurrents.
3. **Processus des clients transitaires :**
les clients transitaires arrivent dans le système selon un processus de Poisson de taux λ . Les clients arrivent par groupe de taille aléatoire de distribution $C_i = P[X = i]$, $0 \leq C_i \leq 1$, ($i \in \mathbb{N}^*$) avec, $\sum_{i=1}^{\infty} C_i = 1$ et les deux premiers moments notés m_1, m_2 .
4. Le service est assuré par un seul serveur. À l'arrivée d'un groupe de clients transitaires, si le serveur est occupé le groupe entre en orbite. Par contre, si le serveur est libre l'un des clients sera pris en charge par le serveur et le reste du groupe entre en orbite selon une discipline *F.C.F.S.* On suppose que seul le client transitaire à la tête de l'orbite est autorisé à accéder au serveur. Les temps successifs d'inter-rappels, de tous les clients transitaires sont régis par une fonction de répartition $H(x)$, de densité $h(x)$ et de transformée de Laplace-Stieltjes $H^*(s)$.
5. Les temps de service des clients transitaires sont des variables aléatoires de loi générale de distribution $B_1(x)$, de densité $b_1(x)$, de transformée de Laplace-Stieltjes $B^*(s)$ et possédants les deux premiers moments $\beta_{1,1}, \beta_{1,2}$.
6. Les temps de service des clients récurrents sont des variables aléatoires de loi générale de distribution $B_2(x)$, de densité $b_2(x)$, de transformée de Laplace-Stieltjes $B^*(s)$ et possédant les deux premiers moments $\beta_{2,1}, \beta_{2,2}$.
7. Nous précisons que le serveur est confronté à des pannes actives, i. e. le serveur tombe en panne seulement quand il est occupé après une période de temps exponentielle avec un taux ξ .
8. Une fois le système en panne, la réparation ne commence pas immédiatement, il y a d'abord un premier délai de vérification de la panne. Ce temps aléatoire est de loi générale de distribution $D_1(x)$, de densité $d_1(x)$, de transformée de Laplace-Stieltjes $D_1^*(s)$ et possédant les deux premiers moments $\theta_{1,1}, \theta_{1,2}$.
9. Après achèvement du premier délai de vérification de la panne, la réparation commence immédiatement ; le temps requis pour la réparation est une variable aléatoire de loi générale de distribution $R(x)$, de densité $r(x)$, de transformée de Laplace-Stieltjes $R^*(s)$ et possédant les deux premiers moments η_1, η_2 .
10. Une fois la réparation achevée, le serveur aura un deuxième délai de vérification de la remise en marche ; ce temps aléatoire est de loi générale de distribution $D_2(x)$, de densité $d_2(x)$, de transformée de Laplace-Stieltjes $D_2^*(s)$ et possédant les deux premiers moments $\theta_{2,1}, \theta_{2,2}$.
11. Une fois que le deuxième délai de vérification est terminé, le serveur reprend le service de ce client. Le serveur n'est pas autorisé à accepter un autre client jusqu'à ce que le client en service quitte le système.
12. Après chaque fin de service de clients transitaires, le serveur décide de prendre une vacance avec une probabilité q , ou servir le prochain client avec la probabilité $1 - q$. Ce temps de vacances est une variable aléatoire de loi générale, de distribution $V(x)$, de densité $v(x)$, de transformée de Laplace-Stieltjes $V^*(s)$ et possédant les deux premiers moments ν_1, ν_2 .

13. Si le serveur est occupé, ou en premier délai de vérification, ou en réparation, ou en deuxième délai de vérification ou en vacance, il quitte le système avec une probabilité $1 - p$

Nous supposons que toutes les variables aléatoires sont mutuellement indépendantes. Les taux conditionnels de complétion pour les rappels des clients transitoires, service des clients transitoires, service des clients récurrents, les temps de réparation, les temps de vacances et les temps des deux délais de vérifications sont donnés respectivement par :

$$\varphi(x) = \frac{h(x)}{1-H(x)}, \mu_1(x) = \frac{b_1(x)}{1-B_1(x)}, \mu_2(x) = \frac{b_2(x)}{1-B_2(x)}, \omega(x) = \frac{v(x)}{1-V(x)}, \alpha_1(x) = \frac{d_1(x)}{1-D_1(x)},$$

$$\gamma(x) = \frac{r(x)}{1-R(x)}, \alpha_2(x) = \frac{d_2(x)}{1-D_2(x)}$$

L'état du système à l'instant t peut être décrit par le processus de Markov suivant

$$\{X(t), t \geq 0\} = \{(S(t), S^*(t), N(t), \tau_0(t), \tau_1(t), \tau_2(t), \tau_3(t), \tau_4(t), \tau_5(t), \tau_6(t)), t \geq 0\}.$$

Où $S(t)$ prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ selon que le serveur soit inactif, occupé avec un client transitoire, occupé avec un client récurrent, sous le premier délai de vérification, en cours de réparation, en vacances ou en deuxième délai de vérification. Si $S(t) = 3, 4$ ou 6 , $S^*(t)$ représente le type de clients en service ($S^*(t) = 1$ ou 2 selon le occupation du serveur par un transitoire ou un client récurrent). Si $S(t) = 0$ et $N(t) > K$, alors $\tau_0(t)$ représente le temps écoulé délai de réexpédition du client de transitoire. Si $S(t) = 1$, nous définissons $\tau_1(t)$ en tant que temps de service écoulé du client transitoire. Si $S(t) = 2$, nous définissons $\tau_2(t)$ comme le temps de service écoulé le client récurrent. Si $S(t) = 3$, nous définissons $\tau_3(t)$ comme écoulé le premier temps de délai de vérification. Si $S(t) = 4$, nous définissons $\tau_4(t)$ comme temps de réparation écoulé ; Si $S(t) = 5$, nous définissons $\tau_5(t)$ comme le temps de délai de la deuxième vérification écoulée et si $S(t) = 6$, nous définissons $\tau_6(t)$ comme le temps de vacance écoulé .

3.2 Analyse des probabilités stationnaires

Dans cette section nous étudions la distribution stationnaire du système. Si la distribution stationnaire existe, les probabilités limites seront définies comme suit :

$$P_{0,K} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 0, N(t) = K\}$$

$$P_{0,n}(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 0, N(t) = n, x < \tau_0(t) \leq x + dx\} \quad n > K;$$

$$P_{1,n}(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 1, N(t) = n, x < \tau_1(t) \leq x + dx\} \quad n \geq K;$$

$$P_{2,n}(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 2, N(t) = n, x < \tau_2(t) \leq x + dx\} \quad n \geq K - 1;$$

$$D_{1,1,n}(x, y)dxdy = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 3, N(t) = n, S^*(t) = 1, x < \tau_1(t) \leq x + dx, y < \tau_3(t) \leq y + dy\}$$

$$n \geq K;$$

$$D_{1,2,n}(x, y)dxdy = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 3, N(t) = n, S^*(t) = 2, x < \tau_2(t) \leq x + dx, y < \tau_3(t) \leq y + dy\}$$

$$n \geq K - 1;$$

$$R_{1,n}(x, y)dxdy = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 4, N(t) = n, S^*(t) = 1, x < \tau_1(t) \leq x + dx, y < \tau_4(t) \leq y + dy\}$$

$$n \geq K;$$

$$R_{2,n}(x, y)dxdy = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 4, N(t) = n, S^*(t) = 2, x < \tau_2(t) \leq x + dx, y < \tau_4(t) \leq y + dy\}$$

$$n \geq K - 1;$$

$$D_{2,1,n}(x, y)dxdy = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 6, N(t) = n, S^*(t) = 1, x < \tau_1(t) \leq x + dx, y < \tau_5(t) \leq y + dy\}$$

$$n \geq K;$$

$$D_{2,2,n}(x, y)dxdy = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 6, N(t) = n, S^*(t) = 2, x < \tau_2(t) \leq x + dx, y < \tau_5(t) \leq y + dy\}$$

$$n \geq K - 1;$$

$$V_n(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{S(t) = 5, N(t) = n, x < \tau_6(t) \leq x + dx\} \quad n \geq K.$$

En utilisant la méthode de la variable supplémentaire sur les probabilités limites, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$(\lambda + \sigma)P_{0,K} = (1 - q) \int_0^\infty P_{1,K}(x)\mu_1(x)dx + \int_0^\infty P_{2,K-1}(x)\mu_2(x)dx + \int_0^\infty V_K(x)\omega(x)dx \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} P_{0,n}(x) + (\lambda + \sigma + \varphi(x))P_{0,n}(x) = 0 \quad n \geq K + 1 \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda p + \xi + \mu_1(x)\right)P_{1,n}(x) = \lambda p(1 - \delta_{n,K}) \sum_{j=1}^{n-K} C_j P_{1,n-j}(x)$$

$$+ \int_0^\infty D_{2,1,n}(x, y)\alpha_2(y)dy \quad n \geq K \quad (3.3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda p + \xi + \mu_2(x)\right)P_{2,n}(x) = \lambda p(1 - \delta_{n,K-1}) \sum_{j=1}^{n-K+1} C_j P_{2,n-j}(x)$$

$$+ \int_0^\infty D_{2,2,n}(x, y)\alpha_2(y)dy \quad n \geq K - 1 \quad (3.4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + \alpha_1(y)\right)D_{1,1,n}(x, y) = \lambda p(1 - \delta_{n,K}) \sum_{j=1}^{n-K} C_j D_{1,1,n-j}(x, y) \quad n \geq K \quad (3.5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + \alpha_1(y)\right)D_{1,2,n}(x, y) = \lambda p(1 - \delta_{n,K-1}) \sum_{j=1}^{n-K+1} C_j D_{1,2,n-j}(x, y) \quad n \geq K - 1 \quad (3.6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + \alpha_2(y)\right)D_{2,1,n}(x, y) = \lambda p(1 - \delta_{n,K}) \sum_{j=1}^{n-K} C_j D_{2,1,n-j}(x, y) \quad n \geq K \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + \alpha_2(y)\right)D_{2,2,n}(x, y) = \lambda p(1 - \delta_{n,K-1}) \sum_{j=1}^{n-K+1} C_j D_{2,2,n-j}(x, y) \quad n \geq K - 1 \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + \gamma(y)\right)R_{1,n}(x, y) = \lambda p(1 - \delta_{n,K}) \sum_{j=1}^{n-K} C_j R_{1,n-j}(x, y) \quad n \geq K \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + \gamma(y)\right)R_{2,n}(x, y) = \lambda p(1 - \delta_{n,K-1}) \sum_{j=1}^{n-K+1} C_j R_{2,n-j}(x, y) \quad n \geq K - 1 \quad (3.10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda p + \omega(x)\right)V_n(x) = \lambda p(1 - \delta_{n,K}) \sum_{j=1}^{n-K} C_j V_{n-j}(x) \quad n \geq K \quad (3.11)$$

Où $\delta_{i,j}$ est la fonction Kronecker.

Ces ensembles d'équations seront résolus dans les conditions aux limites suivantes :

$$P_{0,n}(0) = r \int_0^\infty P_{1,n}(x)\beta_1(x)dx + \int_0^\infty P_{2,n-1}(x)\beta_2(x)dx + \int_0^\infty V_n(x)\nu(x)dx \quad n > K \quad (3.12)$$

$$P_{1,n}(0) = \lambda \sum_{j=1}^{n-K} (1 - \delta_{n,K})C_j \int_0^\infty P_{0,n+1-j}(x)dx + \int_0^\infty P_{0,n+1}(x)\alpha(x)dx \quad (3.13)$$

$$+ \lambda C_{n+1-K}P_{0K} \quad n \geq K$$

$$P_{2,n}(0) = \sigma(1 - \delta_{n,K-1}) \int_0^\infty P_{0,n+1}(x)dx + \sigma\delta_{n,K-1}P_{0,K} \quad n \geq K - 1 \quad (3.14)$$

$$D_{1,1,n}(x, 0) = \xi P_{1,n}(x) \quad n \geq K \quad (3.15)$$

$$D_{1,2,n}(x, 0) = \xi P_{2,n}(x) \quad n \geq K - 1 \quad (3.16)$$

$$D_{2,1,n}(x, 0) = \int_0^\infty R_{1,n}(x, y)\gamma(y)dy \quad n \geq K \quad (3.17)$$

$$D_{2,2,n}(x, 0) = \int_0^\infty R_{2,n}(x, y)\gamma(y)dy \quad n \geq K - 1 \quad (3.18)$$

$$R_{1,n}(x, 0) = \int_0^\infty D_{1,1,n}(x, y)\alpha_1(y)dy \quad n \geq K \quad (3.19)$$

$$R_{2,n}(x, 0) = \int_0^\infty D_{1,2,n}(x, y)\alpha_1(y)dy \quad n \geq K - 1 \quad (3.20)$$

$$V_n(0) = q \int_0^\infty P_{1,n}(x, y)\mu_1(x)dx \quad n \geq K \quad (3.21)$$

Ainsi, la condition de normalisation est donnée comme suit :

$$\begin{aligned}
 & P_{0,K} + \sum_{n>K} \int_0^\infty P_{0,n}(x)dx + \sum_{n \geq K} \left(\int_0^\infty P_{1,n}(x)dx + \int_0^\infty \int_0^\infty D_{1,1,n}(x,y)dxdy \right. \\
 & + \int_0^\infty \int_0^\infty D_{2,1,n}(x,y)dxdy + \int_0^\infty \int_0^\infty R_{1,n}(x,y)dxdy + \int_0^\infty V_n(x)dx \Big) \\
 & + \sum_{n \geq K-1} \left(\int_0^\infty P_{2,n}(x)dx + \int_0^\infty \int_0^\infty D_{1,2,n}(x,y)dxdy \right. \\
 & \left. + \int_0^\infty \int_0^\infty D_{2,2,n}(x,y)dxdy + \int_0^\infty \int_0^\infty R_{2,n}(x,y)dxdy \right) = 1
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Afin de résoudre ce système d'équations (3.1-3.22), nous définissons les fonctions génératrices suivantes et cela pour $|z| \leq 1$:

$$\begin{aligned}
 P_0(z, x) &= \sum_{n>K} P_{0,n}(x)z^n, & P_1(z, x) &= \sum_{n \geq K} P_{1,n}(x, y)z^n \\
 P_2(z, x) &= \sum_{n \geq K-1} P_{2,n}(x)z^n, & V_s(z, x) &= \sum_{n \geq K} V_n(x)z^n \\
 D_{1,1}(z, x, y) &= \sum_{n \geq K} D_{1,1,n}(x, y)z^n, & D_{2,1}(z, x, y) &= \sum_{n \geq K} D_{2,1,n}(x, y)z^n \\
 D_{1,2}(z, x, y) &= \sum_{n \geq K-1} D_{1,2,n}(x, y)z^n, & D_{2,2}(z, x, y) &= \sum_{n \geq K-1} D_{2,2,n}(x, y)z^n \\
 R_1(z, x, y) &= \sum_{n \geq K} R_{1,n}(x, y)z^n, & R_2(z, x, y) &= \sum_{n \geq K-1} R_{2,n}(x, y)z^n \\
 C(z) &= \sum_{n \geq 1} C_n z^n
 \end{aligned}$$

Le théorème suivant décrit la distribution des états du système en équilibre en fonction des fonctions génératrices.

Théorème 3.2.1. Si $\frac{(\lambda+\sigma)H^*(\lambda+\sigma)(\lambda m_1 q'(1)+\sigma k_2'(1))+\lambda p m_1(1-H^*(\lambda+\sigma))(\lambda q'(1)-\lambda(1-m_1)+\sigma k_2'(1))}{(\lambda+\sigma)H^*(\lambda+\sigma)[\sigma k_2'(1)+\lambda m_1 q'(1)(1-p)+\lambda p m_1]} < 1$,
On a :

$$\begin{aligned}
 P_0(z, x) &= \frac{(\lambda + \sigma)\{z(\lambda + \sigma) - G(z)\}P_{0K}z^K}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)\{z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)\}} \\
 &\quad \times (1 - H(x))e^{-(\lambda+\sigma)x}. \\
 P_1(z, x) &= \frac{(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)\{\lambda(1 - C(z)) + \sigma(1 - k_2(z))\}P_{0K}z^K}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)\{z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)\}} \\
 &\quad \times (1 - B_1(x))e^{-A(z)x}. \\
 P_2(z, x) &= \frac{\sigma(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)\{q(z) - z\}P_{0K}z^{K-1}}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)\{z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)\}} \\
 &\quad \times (1 - B_2(x))e^{-A(z)x}.
 \end{aligned}$$

$$D_{1,1}(z, x, y) = \frac{\xi(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)\{\lambda(1 - C(z)) + \sigma(1 - k_2(z))\}P_{0K}z^K}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)\{z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)\}} \\ \times (1 - B_1(x))(1 - D_1(y))e^{-(A(z)x + \chi(z)y)}.$$

$$D_{1,2}(z, x, y) = \frac{\xi\sigma(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)\{q(z) - z\}P_{0K}z^K}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)\{z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)\}} \\ \times (1 - B_2(x))(1 - D_1(y))e^{-(A(z)x + \chi(z)y)}.$$

$$D_{2,1}(z, x, y) = \frac{\xi(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)\{\lambda(1 - C(z)) + \sigma(1 - k_2(z))\}P_{0K}z^K}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)\{z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)\}} \\ \times (1 - B_1(x))R^*(\chi(z))D_1^*(\chi(z))(1 - D_2(y))e^{-(A(z)x + \chi(z)y)}.$$

$$D_{2,2}(z, x, y) = \frac{\xi\sigma(\lambda + \sigma)A^*(\lambda + \sigma)\{q(z) - z\}P_{0K}z^{K-1}}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))A(z) - (\lambda + \sigma)\{z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)\}} \\ \times (1 - B_2(x))R^*(\chi(z))D_1^*(\chi(z))(1 - D_2(y))e^{-(A(z)x + \chi(z)y)}.$$

$$R_1(z, x, y) = \frac{\xi(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)\{\lambda(1 - C(z)) + \sigma(1 - k_2(z))\}P_{0K}z^K}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)\{z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)\}} \\ \times (1 - B_1(x))D_1^*(\chi(z))(1 - R(y))e^{-(A(z)x + \chi(z)y)}.$$

$$R_2(z, x, y) = \frac{\xi\sigma(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)\{q(z) - z\}P_{0K}z^{K-1}}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)\{z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)\}} \\ \times (1 - B_2(x))D_1^*(\chi(z))(1 - R(y))e^{-(A(z)x + \chi(z)y)}.$$

$$V_s(z, x) = q \frac{(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)[\lambda(1 - C(z)) + \sigma(1 - k_2(z))](1 - V(x))e^{-\chi(z)x}P_{0K}z^K k_1(z)}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)[z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)]}$$

$$P_{0K} = \frac{\lambda p m_1 [(\lambda + \sigma H^*(\lambda + \sigma))(1 - q'(1)) - (1 - H^*(\lambda + \sigma))(\lambda m_1 + \sigma k_2'(1))]}{(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)[\lambda m_1(1 - (1 - q'(1))(1 - p)) + \sigma k_2'(1)]}$$

Où

$$\chi(z) = \lambda p(1 - C(z)), \quad \phi(z) = z + \xi[1 - R^*(z)D_1^*(z)D_2^*(z)], \quad A(z) = \phi(\chi(z))$$

et $k_i(z) = B_i^*(K(z))$ pour $i = 1, 2$,

aussi, $q(z) = k_1(z)[(1 - q) + qV^*(\chi(z))]$ et $G(z) = \lambda C(z)q(z) + z\sigma k_2(z)$

Preuve 9. En multipliant les équations (3.2) et (3.12) par z^n et en sommant sur $n \geq K$, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x} P_0(z, x) = -(\lambda + \sigma + \varphi(x))P_0(z, x) \quad (3.23)$$

$$P_0(z, 0) = (1 - q) \int_0^\infty P_1(z, x)\mu_1(x)dx + z \int_0^\infty P_2(z, x)\mu_2(x)dx + \int_0^\infty V_s(z, x)\omega(x)dx - z^K(\lambda + \sigma)P_{0K} \quad (3.24)$$

En faisant le même calcul, c.à.d en multipliant les équations (3.3),(3.5),(3.7),(3.9),(3.11),(3.13), (3.15), (3.17), (3.19) et (3.21) par z^n et en sommant sur $n \geq K$, on aura

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda p + \xi + \mu_1(x)\right)P_1(z, x) = \lambda p P_1(z, x)C(z) + \int_0^\infty D_{2,1}(z, x, y)\alpha_2(y)dy \quad (3.25)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + \alpha_1(y)\right)D_{1,1}(z, x, y) = \lambda p C(z)D_{1,1}(z, x, y) \quad (3.26)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + \alpha_2(y)\right)D_{2,1}(z, x, y) = \lambda p C(z)D_{2,1}(z, x, y) \quad (3.27)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + \gamma(y)\right)R_1(z, x, y) = \lambda p C(z)R_1(z, x, y) \quad (3.28)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda p + \omega(x)\right)V_s(z, x) = \lambda p C(z)V_s(z, x) \quad (3.29)$$

$$zP_1(z, 0) = \lambda C(z) \int_0^\infty P_0(z, x)dx + \int_0^\infty P_0(z, x)\varphi(x)dx + z^K \lambda P_{0K}C(z) \quad (3.30)$$

$$D_{1,1}(z, x, 0) = \xi P_1(z, x) \quad (3.31)$$

$$D_{2,1}(z, x, 0) = \int_0^\infty R_1(z, x, y)\sigma(y)dy \quad (3.32)$$

$$R_1(z, x, 0) = \int_0^\infty D_{1,1}(z, x, y)\alpha_1(y)dy \quad (3.33)$$

$$V_s(z, 0) = q \int_0^\infty P_1(z, x)\mu_1(x)dx \quad (3.34)$$

En multipliant les équations (3.4), (3.6),(3.8),(3.10),(3.14),(3.16),(3.18) et (3.20) par z^n et en sommant sur $n \geq K - 1$, on obtient

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda p + \xi + \mu_2(x)\right)P_2(z, x) = \lambda p P_2(z, x)C(z) + \int_0^\infty D_{2,2}(z, x, y)\alpha_2(y)dy \quad (3.35)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + \alpha_1(y)\right)D_{1,2}(z, x, y) = \lambda p C(z)D_{1,2}(z, x, y) \quad (3.36)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + \alpha_2(y)\right)D_{2,2}(z, x, y) = \lambda p C(z)D_{2,2}(z, x, y) \quad (3.37)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \lambda p + \gamma(y)\right)R_2(z, x, y) = \lambda p C(z)R_2(z, x, y) \quad (3.38)$$

$$P_2(z, 0) = z^{-1}\sigma \int_0^\infty P_0(z, x)dx + \sigma P_{0K}z^{k-1} \quad (3.39)$$

$$D_{1,2}(z, x, 0) = \xi P_2(z, x) \quad (3.40)$$

$$D_{2,2}(z, x, 0) = \int_0^\infty R_2(z, x, y)\gamma(y)dy \quad (3.41)$$

$$R_2(z, x, 0) = \int_0^\infty D_{1,2}(z, x, y)\alpha_1(y)dy \quad (3.42)$$

La solution de chacune des équations (3.23), (3.26), (3.27), (3.28), (3.29), (3.30), (3.31) et (3.32) est respectivement donnée par

$$P_0(z, x) = P_0(z, 0)(1 - H(x))e^{-(\lambda+\sigma)x} \quad (3.43)$$

$$D_{1,1}(z, x, y) = D_{1,1}(z, x, 0)(1 - D_1(y))e^{-\chi(z)y} \quad (3.44)$$

$$D_{1,2}(z, x, y) = D_{1,2}(z, x, 0)(1 - D_1(y))e^{-\chi(z)y} \quad (3.45)$$

$$D_{2,1}(z, x, y) = D_{2,1}(z, x, 0)(1 - D_2(y))e^{-\chi(z)y} \quad (3.46)$$

$$D_{2,2}(z, x, y) = D_{2,2}(z, x, 0)(1 - D_2(y))e^{-\chi(z)y} \quad (3.47)$$

$$R_1(z, x, y) = R_1(z, x, 0)(1 - R(y))e^{-\chi(z)y} \quad (3.48)$$

$$R_2(z, x, y) = R_2(z, x, 0)(1 - R(y))e^{-\chi(z)y} \quad (3.49)$$

$$V_s(z, x) = V_s(z, 0)(1 - V(x))e^{-\chi(z)x} \quad (3.50)$$

En combinant les équations (3.36), (3.40), (3.44), (3.48) et en remplaçant dans l'équation (3.38), on obtient

$$D_{2,1}(z, x, 0) = \xi P_1(z, x)R^*(\lambda p(1 - C(z))D_1^*(\lambda p(1 - C(z))) \quad (3.51)$$

En combinant les équations (3.37), (3.41), (3.45), (3.49) et en remplaçant dans l'équation (3.39), on aura

$$D_{2,2}(z, x, 0) = \xi P_2(z, x)D_1^*(\lambda p(1 - C(z))R^*(\lambda p(1 - C(z))) \quad (3.52)$$

En utilisant les équations (3.46) et (3.51) dans l'équation (3.24), ce dernier devient

$$P_1(z, x) = P_1(z, 0)e^{-A(z)x}(1 - B_1(x)) \quad (3.53)$$

En remplaçant les équations (3.47) et (3.52) dans l'équation (3.25), on a

$$P_2(z, x) = P_2(z, 0)e^{-A(z)x}(1 - B_2(x)) \quad (3.54)$$

En remplaçant l'équation (3.43) dans les équations (3.34) et (3.35), nous obtenons respectivement

$$P_1(z, 0) = \lambda C(z)z^{-1}P_0(z, 0)\frac{1 - H^*(\lambda + \sigma)}{\lambda + \sigma} + z^{-1}P_0(z, 0)H^*(\lambda + \sigma) + \lambda P_{0K}C(z)z^{K-1} \quad (3.55)$$

$$P_2(z, 0) = z^{-1}\sigma P_0(z, 0)\frac{1 - H^*(\lambda + \sigma)}{\lambda + \sigma} + \sigma P_{0K}z^{K-1} \quad (3.56)$$

En utilisant les équations (3.42), (3.50), (3.53), (3.54) et (3.33) on a

$$P_0(z, 0) = P_1(z, 0)q(z) + zP_2(z, 0)k_2(z) - z^K(\lambda + \sigma)P_{0K} \quad (3.57)$$

de la même façon pour les équations (3.55), (3.56) et (3.57) nous obtenons

$$P_0(z, 0) = \frac{(\lambda + \sigma)[z(\lambda + \sigma) - G(z)]P_{0K}z^K}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)[z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)]} \quad (3.58)$$

File $M^{[X]}/G/1$ avec Rappels, à Serveur non fiable, Deux types de clients, Deux délais de Vérification et Vacances

En remplaçant l'équation (3.58) dans l'équation (3.55) et l'équation (3.56), on obtient respectivement les résultats suivants.

$$P_1(z, 0) = \frac{(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)[\lambda(1 - C(z)) + \sigma(1 - k_2(z))]P_{0K}z^K}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)[z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)]} \quad (3.59)$$

$$P_2(z, 0) = \frac{\sigma(\lambda + \sigma)H^{A^*}(\lambda + \sigma)[q(z) - z]P_{0K}z^{K-1}}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)[z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)]} \quad (3.60)$$

Ainsi, nous avons les probabilités suivantes pour $i = 1, 2$
 $P_1(z, 0), P_2(z, 0), V_s(z, 0), D_{1,i}(z, x, 0), R_i(z, x, 0), D_{2,i}(z, x, 0)$ qui dépendent tous de P_{0K} , puisque la fonction de $P_0(z, 0)$ dépend de P_{0K} .

Cependant P_{0K} peut être trouvé en utilisant l'équation de normalisation suivante

$$\begin{aligned} P_{0K} + \sum_{i=0}^2 \int_0^\infty P_i(1, x)dx + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \int_0^\infty \int_0^\infty D_{j,i}(1, x, y)dxdy \\ + \sum_{i=1}^2 \int_0^\infty \int_0^\infty R_i(1, x, y)dxdy + \int_0^\infty V_s(1, x)dx = 1. \end{aligned}$$

Remarque 3.2.1. Pour calculer P_{0K} , nous avons besoin de donner le théorème 3.2.2.

Comme

$$P_{0K} + \lim_{z \rightarrow 1} \left[\sum_{i=0}^2 P_i(z) + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 D_{ji}(z) + \sum_{i=1}^2 R_i(z) + V_s(z) \right] = 1,$$

En remplaçant les probabilités par leurs équations données dans le théorème 3.2.2, on a

$$P_{0K} = 1 - \rho;$$

où

$$\rho = \frac{(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)(\lambda m_1 q'(1) + \sigma k_2'(1)) + \lambda p m_1 (1 - H^*(\lambda + \sigma))(\lambda q'(1) - \lambda(1 - m_1) + \sigma k_2'(1))}{(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)[\sigma k_2'(1) + \lambda m_1 q'(1)(1 - p) + \lambda p m_1]} \quad (3.61)$$

$q'(1)$ et $k_2'(1)$ sont définies comme 1^{ère} dérivée de la fonction $q(x)$ et de la fonction $k_2(x)$ respectivement appliquée à $x = 1$ données par

$$\begin{aligned} k_2'(1) &= \lambda p m_1 \beta_{2,1} [1 + \xi(\theta_{1,1} + \eta_1 + \theta_{2,1})]; \\ q'(1) &= \lambda p m_1 \{ (1 + \xi(\theta_{1,1} + \eta_1 + \theta_{2,1})) \beta_{1,1} + q\nu_1 \}. \end{aligned}$$

Puisque P_{0K} doit être positif pour avoir un système stable, donc, $\rho < 1$.

Remarque 3.2.2. P_{0K} dépend de K .

Théorème 3.2.2. Si $\frac{(\lambda+\sigma)H^*(\lambda+\sigma)(\lambda m_1 q'(1)+\sigma k_2'(1))+\lambda p m_1(1-H^*(\lambda+\sigma))(\lambda q'(1)-\lambda(1-m_1)+\sigma k_2'(1))}{(\lambda+\sigma)H^*(\lambda+\sigma)[\sigma k_2'(1)+\lambda m_1 q'(1)(1-p)+\lambda p m_1]} < 1$,
 Les fonctions génératrices partielles de probabilités des distributions de l'état du serveur sont données par :

$$P_0(z) = \frac{(\lambda + \sigma)[z(\lambda + \sigma) - G(z)]P_{0K}z^K}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)[z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)]} \frac{1 - H^*(\lambda + \sigma)}{(\lambda + \sigma)}$$

$$P_1(z) = \frac{(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)[\lambda(1 - C(z)) + \sigma(1 - k_2(z))]P_{0K}z^K}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)[z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)]} \frac{1 - k_1(z)}{A(z)}$$

$$P_2(z) = \frac{\sigma(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)[q(z) - z]P_{0K}z^{K-1}}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)[z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)]} \frac{1 - k_2(z)}{A(z)}$$

$$D_{1,1}(z) = \xi \frac{(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)[\lambda(1 - C(z)) + \sigma(1 - k_2(z))]P_{0K}z^K}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)[z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)]} \frac{1 - k_1(z)}{A(z)} \\ \times \frac{1 - D_1^*(\chi(z))}{\chi(z)}$$

$$D_{1,2}(z) = \xi \frac{\sigma(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)[q(z) - z]P_{0K}z^{K-1}}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)[z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)]} \frac{1 - k_2(z)}{A(z)} \\ \times \frac{1 - D_1^*(\chi(z))}{\chi(z)}$$

$$D_{2,1}(z) = \xi \frac{(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)[\lambda(1 - C(z)) + \sigma(1 - k_2(z))]P_{0K}z^K}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)[z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)]} \frac{1 - k_1(z)}{A(z)} \\ \times \frac{1 - D_2^*(\chi(z))}{\chi(z)} R^*(\chi(z)) D_1^*(\chi(z))$$

$$D_{2,2}(z) = \xi \frac{\sigma(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)[q(z) - z]P_{0K}z^{K-1}}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)[z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)]} \frac{1 - k_2(z)}{G(z)} \\ \times \frac{1 - D_2^*(\chi(z))}{\chi(z)} R^*(\chi(z)) D_1^*(\chi(z))$$

$$R_1(z) = \xi \frac{(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)[\lambda(1 - C(z)) + \sigma(1 - k_2(z))]P_{0K}z^K}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)[z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)]} \frac{1 - k_1(z)}{A(z)} \\ \times \frac{1 - R^*(\chi(z))}{\chi(z)} D_1^*(\chi(z))$$

$$R_2(z) = \xi \frac{\sigma(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)[q(z) - z]P_{0K}z^{K-1}}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)[z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)]} \frac{1 - k_2(z)}{A(z)} \\ \times \frac{1 - R^*(\chi(z))}{\chi(z)} D_1^*(\chi(z))$$

$$V_s(z) = q \frac{(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)[\lambda(1 - C(z)) + \sigma(1 - k_2(z))]P_{0K}z^K}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)[z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)]} \\ \times \frac{1 - V^*(\chi(z))}{\chi(z)}k_1(z)$$

Preuve 10. En effet, en appliquant le théorème 3.2.1 sur les définitions des les fonctions génératrices partielles de probabilités des distributions de l'état du serveur données ci-dessous

$$P_0(z) = \int_0^\infty P_0(z, x)dx, \quad P_i(z) = \int_0^\infty P_i(z, x)dx, \quad V_s(z) = \int_0^\infty V_s(z, x)dx, \quad i = 1, 2$$

$$D_{j,i}(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty D_{j,i}(z, x, y)dxdy, \quad R_i(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty R_i(z, x, y)dxdy, \quad j = 1, 2$$

et en utilisant les résultats connus de la théorie de renouvellement

$$\int_0^\infty e^{-sx}(1 - F(x))dx = \frac{1 - L_F(s)}{s}$$

où $F(x)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire X et $L_F()$ représente sa transformée de Laplace, donc nous obtenons les résultats.

3.3 Mesures de performances

Dans cette section, nous déduisons les mesures de performances du système en régime stationnaire

Corollaire 3.3.1. 1. La fonction génératrice de la taille du système est donnée par,

$$\Phi(z) = \frac{\lambda(1 - C(z))[q(z)(p - z) + z(1 - p)] + \sigma(1 - k_2(z))q(z)(1 - z)}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)[z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)]} \\ \times \frac{(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)P_{0K}z^K}{\lambda p(1 - C(z))}$$

2. La fonction génératrice de la taille l'orbite est donnée par

$$\Omega(z) = \frac{\lambda z(1 - C(z))[(1 - z) + (z - q(z))(1 - p)] + \sigma(1 - k_2(z))q(z)(1 - z)}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)[z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)]} \\ \times \frac{(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)P_{0K}z^{K-1}}{\lambda p(1 - C(z))}$$

3. La fonction génératrice du nombre de clients transitaire dans l'orbite est donnée par,

$$\Upsilon(z) = \frac{\lambda(1 - C(z))[(1 - p)(z - q(z)) + (1 - z)] + \sigma(1 - k_2(z))(1 - z)}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)[z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)]} \\ \times \frac{(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)P_{0K}}{\lambda p(1 - C(z))}$$

4. La fonction génératrice du nombre de clients transit dans le système est donnée par

$$\Psi(z) = \frac{\sigma(1 - k_2(z))(1 - z)q(z) + \lambda(1 - C(z))[q(z)(p - z) + z(1 - p)]}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)[z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)]} \times \frac{(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)P_{0K}}{\lambda p(1 - C(z))}$$

Preuve 11. Soit L le nombre de clients dans le système, la fonction génératrice correspondante est donnée par

$$\Phi(z) = E(z^L) = z^K P_{0K} + P_0(z) + z \left\{ V_s(z) + \sum_{i=1}^2 \left(P_i(z) + D_{1,i}(z) + D_{2,i}(z) + R_i(z) \right) \right\}$$

Soit N le nombre de clients dans la file avec rappels, sa fonction génératrice est donnée par

$$\Omega(z) = E(z^N) = z^K P_{0K} + P_0(z) + V_s(z) + \sum_{i=1}^2 \left(P_i(z) + D_{1,i}(z) + D_{2,i}(z) + R_i(z) \right)$$

Soit N_T le nombre de clients transit dans la file avec rappels, sa fonction génératrice est donnée par.

$$\Upsilon(z) = P_{0K} + z^{-K} \left[P_0(z) + V_s(z) + \sum_{i=1}^2 z^{i-1} \left(P_i(z) + D_{1,i}(z) + D_{2,i}(z) + R_i(z) \right) \right]$$

Soit L_T le nombre de clients transitaire dans le système, sa fonction génératrice est donnée par.

$$\Psi(z) = E(z^{L_T}) = P_{0K} + z^{-K} P_0(z) + z^{-K+1} \left\{ V_s(z) + \sum_{i=1}^2 \left(P_i(z) + D_{1,i}(z) + D_{2,i}(z) + R_i(z) \right) \right\}$$

Ces résultats sont obtenus en utilisant le théorème 3.2.2

Remarque 3.3.1. Pour $p = 1$, nous obtenons $\Phi(z) = z^K \times \Psi(z)$ où, $\Psi(z) = \Upsilon(z) \times q(z)$

Corollaire 3.3.2. 1. Le nombre moyen de clients dans le système est :

$$E(L) = \frac{2m_1 K - m_2}{2m_1} + \frac{\lambda m_2 (p + q'(1)(1 - p)) + \lambda m_1 ((1 - p)q''(1) + 2k'_1(1)) + \sigma(k''_2(1) + 2k'_1(1)k'_2(1))}{2\{\lambda m_1 (p + q'(1)(1 - p)) + \sigma k'_2(1)\}} + \frac{(1 - H^*(\lambda + \sigma))[\lambda(m_2 + 2m_1 q'(1)) + \sigma(2k'_2(1) + k''_2(1))] + (\lambda + \sigma H^*(\lambda + \sigma))q''(1)}{2\{(\lambda + \sigma H^*(\lambda + \sigma))(1 - q'(1)) - (1 - H^*(\lambda + \sigma))(\lambda m_1 + \sigma k'_2(1))\}}$$

2. Le nombre moyen de clients dans l'orbite est :

$$E(N) = \frac{2m_1(K - 1) - m_2}{2m_1} + \frac{\lambda(2m_1 + m_2)(p + q'(1)(1 - p)) + \lambda m_1 q''(1)(1 - p) + \sigma(k''_2(1) + 2k'_2(1)q'(1))}{2\{\lambda m_1 (p + q'(1)(1 - p)) + \sigma k'_2(1)\}} + \frac{(1 - L_A(\lambda + \sigma))[\lambda(m_2 + 2m_1 q'(1)) + \sigma(2k'_2(1) + k''_2(1))] + (\lambda + \sigma H^*(\lambda + \sigma))q''(1)}{2\{(\lambda + \sigma H^*(\lambda + \sigma))(1 - q'(1)) - (1 - H^*(\lambda + \sigma))(\lambda m_1 + \sigma k'_2(1))\}}$$

Preuve 12. *On a*

$$E(L) = \lim_{z \rightarrow 1} \Phi'(z) \quad \text{et} \quad E(N) = \lim_{z \rightarrow 1} \Omega'(z)$$

. en appliquant la règle de l'Hôpital, nous retrouvons les résultats donnés ci-dessus.

Remarque 3.3.2. *Pour calculer le temps moyen d'attente des clients dans la file et dans le système, nous utilisons respectivement les deux formules suivantes :*

$$W_{T_q} = \frac{E(N)}{\lambda p m_1} \quad \text{et} \quad W_{T_s} = \frac{E(L)}{\lambda p m_1}$$

Corollaire 3.3.3. *1. Le serveur est libre avec la probabilité*

$$P_I = \frac{1 - \lambda p m_1 [\beta_{1,1}(1 + \theta_{1,1} + \eta_1 + \theta_{2,1}) + q \nu_1]}{1 + (1 + \theta_{1,1} + \eta_1 + \theta_{2,1})(\lambda m_1 \beta_{1,1}(1 - p) + \sigma \beta_{2,1}) + \lambda m_1(1 - p)q \nu_1}$$

2. Le serveur est occupé avec la probabilité

$$P_B = \frac{\lambda m_1 \beta_{1,1} + \sigma \beta_{2,1}(1 - \lambda p m_1 q \nu_1)}{1 + (1 + \theta_{1,1} + \eta_1 + \theta_{2,1})(\lambda m_1 \beta_{1,1}(1 - p) + \sigma \beta_{2,1}) + \lambda m_1 q(1 - p) \nu_1}$$

3. Le serveur est en première vérification avec la probabilité

$$P_{D_1} = \frac{\xi \theta_{1,1} [\lambda m_1 \beta_{1,1} + \sigma \beta_{2,1}(1 - \lambda p m_1 q \nu_1)]}{1 + (1 + \theta_{1,1} + \eta_1 + \theta_{2,1})(\lambda m_1 \beta_{1,1}(1 - p) + \sigma \beta_{2,1}) + \lambda m_1 q(1 - p) \nu_1}$$

4. Le serveur est en réparation avec la probabilité

$$P_R = \frac{\xi \eta_1 [\lambda m_1 \beta_{1,1} + \sigma \beta_{2,1}(1 - \lambda p m_1 q \nu_1)]}{1 + (1 + \theta_{1,1} + \eta_1 + \theta_{2,1})(\lambda m_1 \beta_{1,1}(1 - p) + \sigma \beta_{2,1}) + \lambda m_1 q(1 - p) \nu_1}$$

5. Le serveur est en réparation pendant que le client transitaire était en service avec la probabilité

$$P_{R_1} = \frac{\xi \beta_{1,1} \eta_1 \lambda m_1 (1 + \sigma p \beta_{2,1}(1 + \theta_{1,1} + \eta_1 + \theta_{2,1}))}{1 + (1 + \theta_{1,1} + \eta_1 + \theta_{2,1})(\lambda m_1 \beta_{1,1}(1 - p) + \sigma \beta_{2,1}) + \lambda m_1 q(1 - p) \nu_1}$$

6. Le serveur est en réparation pendant qu'un client récurrent en service avec la probabilité

$$P_{R_2} = \frac{\xi \beta_{2,1} \eta_1 \sigma [1 - \lambda p m_1 (\beta_{1,1}(1 + \theta_{1,1} + \eta_1 + \theta_{2,1}) + q \nu_1)]}{1 + (1 + \theta_{1,1} + \eta_1 + \theta_{2,1})(\lambda m_1 \beta_{1,1}(1 - p) + \sigma \beta_{2,1}) + \lambda m_1 q(1 - p) \nu_1}$$

7. Le serveur est en deuxième vérification avec la probabilité

$$P_{D_2} = \frac{\xi \theta_{2,1} [\lambda m_1 \beta_{1,1} + \sigma \beta_{2,1}(1 - \lambda p m_1 q \nu_1)]}{1 + (1 + \theta_{1,1} + \eta_1 + \theta_{2,1})(\lambda m_1 \beta_{1,1}(1 - p) + \sigma \beta_{2,1}) + \lambda m_1 q(1 - p) \nu_1}$$

8. Le serveur est en vacance avec la probabilité

$$P_V = \frac{q \nu_1 \lambda m_1 (1 + \sigma p \beta_{2,1}(1 + \theta_{1,1} + \eta_1 + \theta_{2,1}))}{1 + (1 + \theta_{1,1} + \eta_1 + \theta_{2,1})(\lambda m_1 \beta_{1,1}(1 - p) + \sigma \beta_{2,1}) + \lambda m_1 q(1 - p) \nu_1}$$

9. La probabilité de perte du client est donnée par

$$P_L = (1 - p)[P_B + P_{D_1} + P_R + P_{D_2} + P_V]$$

Preuve 13. En considérant les limites de $P(z)$, $D_{1i}(z)$, $R_i(z)$, $D_{2i}(z)$, $V_s(z)$ où z tend vers 1, on obtient respectivement $P_I = P_{0K} + P_0(1)$, $P_B = P_1(1) + P_2(1)$, $P_{D_1} = P_{D_{11}}(1) + P_{D_{12}}(1)$, $P_R = P_{R_1}(1) + P_{R_2}(1)$, $P_{R_1} = P_{R_1}(1)$, $P_{R_2} = P_{R_2}(1)$, $P_{D_2} = P_{D_{21}}(1) + P_{D_{22}}(1)$ et $P_V = P_{V_s}(1)$.

Remarque 3.3.3. Ces probabilités sont indépendantes de K .

Corollaire 3.3.4. En régime stationnaire, les fréquences de disponibilité et de défaillance du serveur sont respectivement A et f et sont données par

$$A = \frac{\lambda p m_1 [(1 - q'(1))(\lambda + \sigma H^*(\lambda + \sigma)) + \sigma \beta_{2,1}(\lambda + \sigma) H^*(\lambda + \sigma)]}{(\lambda + \sigma) H^*(\lambda + \sigma) [\lambda m_1 (1 - (1 - q'(1))(1 - p)) + \sigma k'_2(1)]} + \frac{[(\beta_{1,1}(\lambda + \sigma) H^*(\lambda + \sigma) - (1 - H^*(\lambda + \sigma)))(\lambda m_1 + \sigma k'_2(1))]}{(\lambda + \sigma) H^*(\lambda + \sigma) [\lambda m_1 (1 - (1 - q'(1))(1 - p)) + \sigma k'_2(1)]}$$

$$f = \frac{\xi \lambda p m_1 (\lambda + \sigma) H^*(\lambda + \sigma) [\beta_{1,1}(\lambda m_1 + \sigma k'_2(1)) + \beta_{2,1} \sigma (1 - q'(1))]}{(\lambda + \sigma) H^*(\lambda + \sigma) [\lambda m_1 (1 - (1 - q'(1))(1 - p)) + \sigma k'_2(1)]}$$

Preuve 14. Les résultats sont obtenus directement en utilisant les équations suivantes :

$$A = P_{0K} + \lim_{z \rightarrow 1} \left[\int_0^\infty P_1(z, x) dx + \int_0^\infty P_2(z, x) dx \right] \text{ et}$$

$$f = \xi \lim_{z \rightarrow 1} \left[P_1(z) + P_2(z) \right]$$

3.4 Cas particuliers

Premier cas : pas de vacance, pas de panne, pas d'arrivée groupée, pas de perte de client, pas de client récurrent et pas rappels

Dans ce cas, le système est fiable, les clients arrivent un par un et le serveur ne part pas en vacance, i.e., $P(X = 1) = 1$, $\xi = 0$, $p = 1$, $q = 0$, $\sigma = 0$, $K = 0$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ et $H^*(\lambda) = 1$. Donc, $k_1(z) = B_1^*(\lambda(1 - z))$, $k_1^{(1)}(1) = \lambda \beta_{1,1}$, et $k_1^{(2)}(1) = \lambda^2 \beta_{1,2}$.

La condition de stabilité du système est :

$$\rho = \frac{k_1'(1)}{H^*(\lambda)} < 1,$$

étant donné que

$$q'(1) = k_1'(1) = \lambda \beta_{1,1}$$

et

$$q''(1) = k_1''(1) = \lambda \beta_{1,2}$$

donc,

$$\rho = \lambda \beta_{1,1} < 1.$$

File $M^{[X]}/G/1$ avec Rappels, à Serveur non fiable, Deux types de clients, Deux délais de Vérification et Vacances

Si , le nombre moyen de client dans le système est donné par

$$E(N) = k'_1(1) + \frac{\lambda q''(1)}{2\lambda(1 - q'(1))},$$

ce qui suit,

$$E(N) = \rho + \frac{\lambda\beta_{1,2}}{2(1 - \rho)}.$$

Les résultats obtenus dans le premier cas sont similaires aux résultats du modèle $M/G/1$, voir, Kleinrock [41].

Deuxième cas : Pas de vacance, pas de panne, pas d'arrivée groupée et pas de perte de client

Dans ce cas, le système ne tombe jamais en panne, nous n'avons pas d'arrivées groupées et pas de perte de client. Nous avons une file avec rappels, i.e., $P(X = 1) = 1$, $\xi = 0$, $p = 1$, $q = 0$, $m_1 = 1$ et $m_2 = 1$. D'où,

$$\rho = \frac{\lambda\beta_{1,1} + \sigma\beta_{2,1}}{1 + \sigma\beta_{2,1}} \times \frac{\lambda + \sigma H^*(\lambda + \sigma)}{(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)}$$

La condition de stabilité est donnée ci-dessous

$$\frac{\lambda\beta_{1,1} + \sigma\beta_{2,1}}{1 + \sigma\beta_{2,1}} < \frac{(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)}{\lambda + \sigma H^*(\lambda + \sigma)}$$

Dans ce cas

$$\rho_1 = \lambda\beta_{1,1}$$

et

$$\rho_2 = (1 - \lambda\beta_{1,1}) \frac{\sigma\beta_{2,1}}{1 + \sigma\beta_{2,1}}$$

Ces résultats sont les mêmes que ceux obtenus dans l'article de Moreno (2004)[51].

Troisième cas : Pas de vacances, pas d'arrivée groupée, pas de perte de clients et pas de deuxième vérification

Dans ce cas, le serveur peut tomber en panne, nous avons un délai de vérification, réparation, clients récurrents et pas d'arrivées groupées, i. e., $P(X = 1) = 1$, $p = 1$, $q = 0$ et $D_2^*(s) = 1$, d'où la condition de stabilité du système est la suivante :

$$\rho = \frac{(\lambda + \sigma H^*(\lambda + \sigma))(\lambda k'_1(1) + \sigma k'_2(1))}{(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)(\lambda + \sigma k'_2(1))} < 1$$

Sous la condition de stabilité , le nombre moyen de clients dans le système est donné par :

$$E(N) = \frac{(\lambda + \sigma H^*(\lambda + \sigma))[\sigma k_2''(1)(\lambda - \lambda k_1'(1)) + \lambda k_1'''(1)(\lambda + \sigma k_2'(1))]}{2(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)[\lambda + \sigma k_2'(1)]^2 P_{0K}} + \frac{\lambda(1 - H^*(\lambda + \sigma))[\lambda k_1^{(1)}(1) + \sigma k_2'(1)]}{(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)[\lambda + \sigma k_2'(1)]P_{0K}} + k_1'(1).$$

Les résultats sont similaire à ceux donnés dans Saggou(2017) [52].

3.5 Décomposition stochastique

La propriété de décomposition stochastique des files d'attente classiques avec rappels indique que la distribution du nombre de clients dans le système est égale à la distribution de la somme de deux variables aléatoires indépendantes : le nombre de clients dans la file classique $M/G/1$ sans rappels et le nombre de clients dans la file d'attente $M/G/1$ avec rappels étant donné que le serveur est inactif.

Notons que la fonction génératrice de la distribution du système pour $p = 1$ est donné par

$$\Phi(z) = \frac{(\lambda + \sigma)H^*(\lambda + \sigma)P_{0K}z^K[q(z)(1 - z)(\lambda(1 - C(z)) + \sigma(1 - k_2(z)))]}{(1 - H^*(\lambda + \sigma))G(z) - (\lambda + \sigma)[z - H^*(\lambda + \sigma)q(z)]}$$

Soit $\Gamma(z)$ la fonction génératrice de la distribution conditionnelle du nombre de clients dans le système, sachant que le serveur est inactif ou occupé à servir un client récurrent ou en première ou en deuxième vérification ou encore en réparation. Sous cette définition, on peut facilement voir

$$\Gamma(z) = \frac{z^K P_{0K} + P_0(z) + zP_2(z) + zD_{12}(z) + zR_2(z) + zD_{22}(z)}{P_{0K} + P_0(1) + P_2(1) + D_{12}(1) + R_2(1) + D_{22}(1)}$$

et

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) \times \Gamma(z)$$

d'où on obtient,

$$\Phi_0(z) = \frac{(1 - z)q(z)(1 - q'(1))}{q(z) - z}$$

Ce qui confirme la décomposition stochastique de notre modèle.

3.6 Illustration numérique

Dans cette partie, nous présentons graphiquement l'effet de certains paramètres sur les principales mesures de performance P_0 et $E(L)$. La taille du groupe de clients est supposée être une distribution Géométrique avec le paramètre r . Les temps de service pour les clients transitoires les clients récurrents, temps de réparation, le temps de la première vérification et le temps de la panne sont tous respectivement des variables de distribution exponentielle avec les moyennes suivantes : $\beta_{1,1} = 1/2$, $\beta_{1,2} = 1/2$, $\eta_1 = 1$ et $\theta_{1,1} = 1$.

Nous considérons que le temps de vacances, temps de la deuxième vérification et aussi le temps de la panne sont respectivement de distribution exponentielle de paramètres ω , α_2 et ξ . Le temps de rappels de tous les clients transitoires est supposé être distribution Erlang de les paramètres (l, σ) .

7. 1 Effet du paramètre de la panne ξ sur P_{0K} et $E(L)$ pour différentes valeurs de p et r

La figure 3.1 illustre la probabilité P_{0K} et le nombre moyen de clients dans le système $E(L)$ par rapport au taux de la panne ξ avec différentes valeurs de p . Nous avons considéré deux cas et dans chaque cas, nous représentons trois courbes où p a les valeurs suivantes 0, 25, 0, 5, 1 et les d'autres paramètres sont choisis tels que $K = 5$, $r = 0.001$ et $q = 0.57$.

- (a) Pour chaque valeur de p , on étudie l'influence du taux de la panne ξ sur P_{0K} . Ici, λ et σ ont les valeurs 0.01 et 0.3 respectivement.
- (b) Pour chaque valeur de p , on étudie l'influence du taux de la panne ξ sur $E(L)$. Ici, λ et σ ont les valeurs 0.06 et 0.04 respectivement.

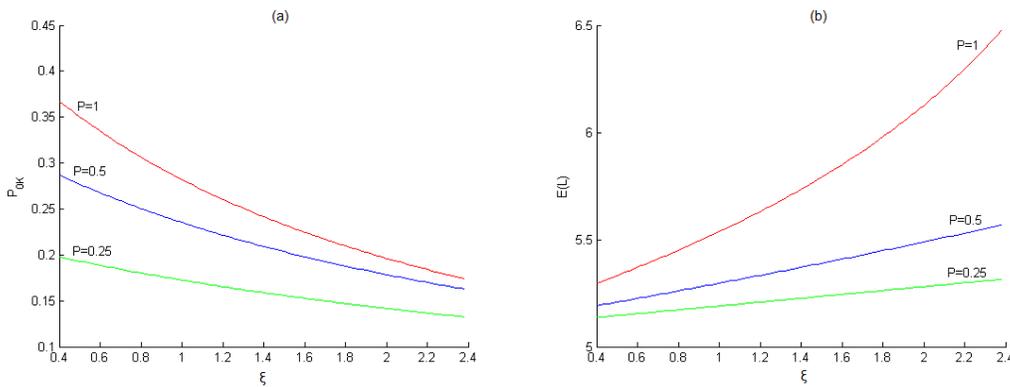


FIGURE 3.1 – (a) Effet du paramètre ξ sur P_{0K} . (b) Effet du paramètre ξ sur $E(L)$.

La figure 3.2 illustre la probabilité P_{0K} et le nombre moyen de clients dans le système $E(L)$ par rapport au taux de la panne ξ avec différentes valeurs de r . Dans chaque cas, nous représentons trois courbes où r a les valeurs suivantes 0.5, 0.75, 0.9 et les d'autres paramètres sont choisis tels que $K = 5$, $q = 0.76$ et $p = 0.5$.

- (c) Pour chaque valeur de r , on étudie l'influence du taux de la panne ξ sur P_{0K} . Avec, $\lambda = 0.01$, $\sigma = 0.1$.
- (d) Pour chaque valeur de r , on étudie l'influence du taux de la panne ξ sur $E(L)$. Avec, $\lambda = 0.02$, $\sigma = 0.009$.

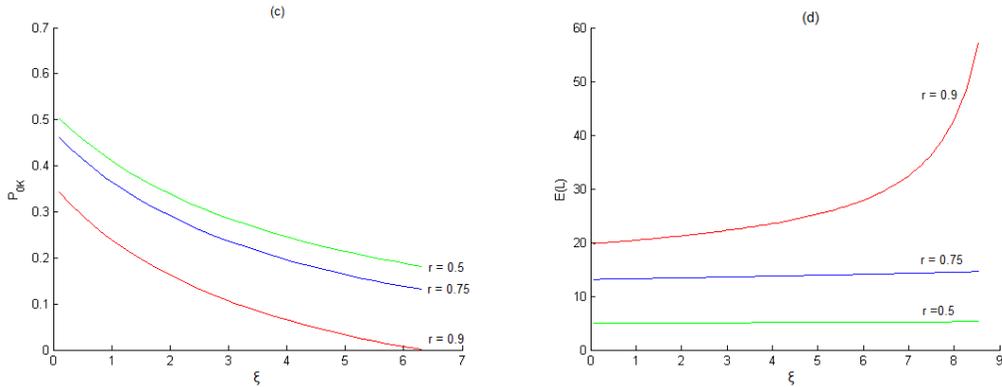


FIGURE 3.2 – (c) Effet du paramètre ξ sur P_{0K} . (d) Effet du paramètre ξ sur $E(L)$.

Commentaires

Le même modèle est observé dans les figures 3.1 et 3.2. Les deux cas (a) et (c) montrent respectivement que la probabilité P_{0K} diminue en augmentant les valeurs des probabilités p et r respectivement, tandis que l'inverse est observé dans les cas (b) et (d) concernés par le nombre moyen de clients dans le système $E(L)$, où ce dernier augmente en augmentant les valeurs des probabilités p et r respectivement.

7. 2 Effet du paramètre de la panne ξ sur P_{0K} et $E(L)$ pour différentes valeurs de la probabilité de vacance q

La probabilité P_{0K} et la valeur de $E(L)$ sont illustrées en fonction du taux de la panne ξ avec les différentes de valeurs de la probabilité de vacance q dans la figure 3.3, ici aussi nous avons deux cas :

- (e) On choisit $\lambda = 0.01$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.001$, $p = 0.5$, $K = 5$ et en variant les valeurs de q , les courbes tracées correspondent à $q = 0.2$, 0.57 et 1.
- (f) On choisit $\lambda = 0.01$, $\sigma = 0.1$, $r = 5 \times 10^{-7}$, $p = 0.7$, $K = 5$ et en variant les valeurs de q , les courbes tracées correspondent à $q = 0.2$, 0.57 et 1.

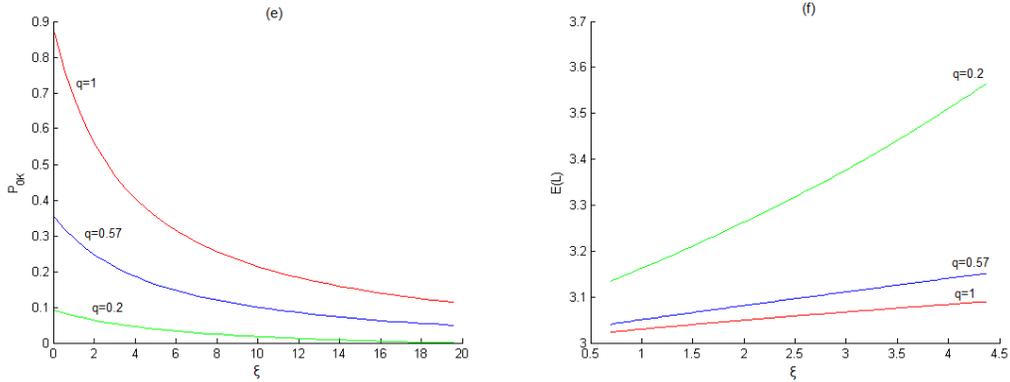


FIGURE 3.3 – (e) Effet du paramètre ξ sur P_{0K} . (f) Effet du paramètre ξ sur $E(L)$.

Commentaires

Le cas (e) de la figure 3.3 montre que la probabilité P_{0K} diminue lorsque le paramètre ξ augmente et que la valeur de la probabilité q diminue alors que, dans le cas (f) on observe l'inverse, c'est à dire que le nombre moyen de clients dans le système $E(L)$ augmente en augmentant les valeurs de ξ et en diminuant les valeurs de la probabilité de vacance q .

7. 3 Effet du paramètre du deuxième délai de vérification α_2 sur $E(L)$ pour $K = 3$ et $K = 10$

La figure 3.4 présente la valeur de $E(L)$ contre le deuxième taux de délai de vérification α_2 pour les valeurs $p = 0, 25, 0, 5, 1$.

- (g) Trois courbes sont tracées en prenant $K = 3$.
- (h) Trois courbes sont tracées en prenant $K = 10$.

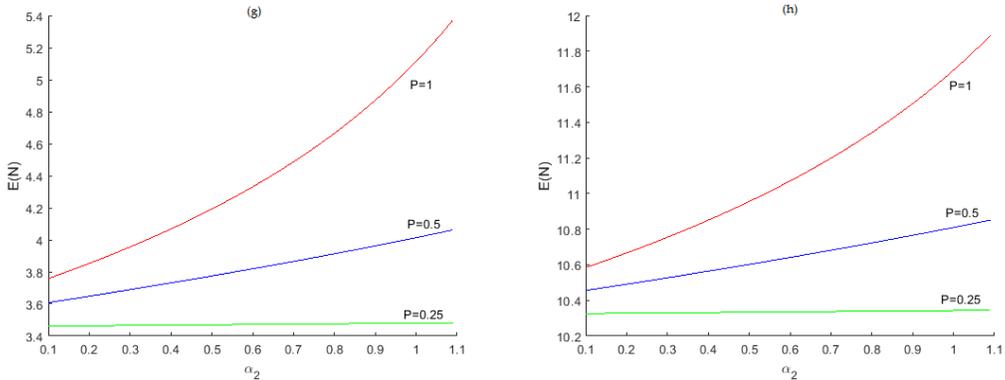


FIGURE 3.4 – Effet du paramètre α_2 sur $E(L)$ avec différentes valeurs de p . (g) $K = 3$. (h) $K = 10$

Commentaires

Pour la figure 3.4, le nombre moyen de clients dans le système augmente lorsque le taux de la deuxième vérification α_2 augmente, nous remarquons que la valeur de $E(L)$ commence à partir des valeurs autour de 3 et 10, ce qui explique toujours la présence de d'un nombre de clients récurrents dans le système, pour ce graphe nous avons fixée le nombre de clients récurrents K à 3 et 10.

Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons étudié une file d'attente de $M^{[X]}/G/1$ avec clients récurrents, perte géométrique et vacances Bernoulli où le serveur n'est pas fiable, ce qui se compose de périodes de pannes, réparations et deux délais de vérifications. En utilisant la méthode de la variable supplémentaire nous avons obtenu des formules explicites et exploitables. Nous avons montré l'influence des paramètres sur les mesures de performance dans des graphes illustratifs.

Conclusion Générale et Perspectives

Pour évaluer les performances d'un système, on utilise soit les méthodes analytiques telles que **les files d'attente ou les réseaux de files d'attente**, soit la **simulation**. Chacune de ces méthodes a des avantages et des inconvénients. Pour les solutions analytiques, le temps de résolution est rapide et les résultats sont exactes car ils sont déterminés à partir d'équations mathématiques. Toutefois, les modèles doivent être simple afin de pouvoir trouver leurs forme analytique ce qui n'est pas toujours le cas, car en théorie, on pose beaucoup de contraintes ce qui rend la modélisation assez complexe, ce qui nous emmène à faire des simulations, cette méthode donne des résultats proches de la réalité dans la plupart de temps avec moins de contraintes, mais la validation des résultats peut prendre assez de temps et d'efforts.

Dans une première partie, nous rappelons les notions de base utilisées dans l'étude de files d'attente et des réseaux de communication.

Dans une seconde partie, nous avons étudié le modèle $M^{[X]}/G/1$ avec arrivées groupées et clients impatient, le serveur peut tomber en panne pendant qu'il sert un client et peut aller en vacance après chaque fin de service ou servir le prochain client. Nous avons introduit deux délais de vérification, le premier avant la réparation et le deuxième juste après cette réparation. Dans le chapitre 3, nous avons élargi ce modèle avec l'option de rappels et deux types de clients. L'étude de ces deux modèles nous a permis de trouver la condition de stabilité et quelques mesures de performances du système. En dernière partie, nous avons développé une application sous le logiciel *JAVA* pour la simulation du modèle $M/G/1$ non fiable, deux délais de vérifications et vacances. Par conséquent, les conclusions suivantes sont tirées :

- La condition de stabilité, quelques mesures de performances exploitable et la décompositions stochastique des deux modèles suivants :
 - File $M^{[X]}/G/1$ à Serveur non fiable, Clients impatient, Deux types de Vérification et Vacances.
 - File $M^{[X]}/G/1$ avec Rappels, à Serveur non fiable, Deux types de clients, Deux délais de Vérification et Vacances.

Le travail que nous avons présenté dans cette thèse nous a permis d'envisager plusieurs axes de recherches , nous citons quelques uns ci-dessous :

- Élargir le modèle du réseau de Jackson ouvert présenté dans le quatrième chapitre à un réseau à plusieurs stations non fiables et vacances.
- Il serait intéressant de trouver une relation entre les **réseaux de Jackson** et les **réseaux NOC**, en prenant en considération la panne du serveur (appelé routeur pour les réseaux NOC) afin d'améliorer leurs performances.

Bibliographie

- [1] A., Aissani, *A retrial queue with redundancy and unreliable server*, Queueing systems 17 (1994), 431-449.
- [2] A., Aissani, *An $M^{[X]}/G/1$ retrial queue with exhaustive vacations*, Journal of Statistics and Management Systems, 3(2000), 269-286.
- [3] A., Aissani, J.R., Artalejo, *On the single server retrial queue subject to breakdowns*, Queueing systems 30 (1998), 309-321.
- [4] J.R., Artalejo, *New results in retrial queueing systems with breakdown of the servers*, Statistica Neerlandica 48 (1994), 23-36.
- [5] J.R., Artalejo, *Analysis of an $M/G/1$ queue with constant repeated attempts and server vacations*, Computers and operations research, 24(1997), 493-504.
- [6] J.R., Artalejo, *A classified bibliography of research on retrial queues*, Progress in 1990-1999.TOP, 7(1999), 187-211.
- [7] J.R., Artalejo, A., Gomez-Corral *Retrial queueing systems*, Mathematical and Computer Modelling 30 (1999), xiii-xv.
- [8] J.R., Artalejo, A., Gomez-Corral *Retrial queues : an algorithmic approach*, Journal of the Egyptian Mathematical Society, 1 (2000), 83-101.
- [9] J.R., Artalejo, A., Gomez-Corral *A state-dependent Markov-modulated mechanism for generating events and stochastic models*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 33 (2010), 1342-1349.
- [10] I., Atencia, G.Bouza, P., Moreno, *An $M^{[X]}/G/1$ retrial queue with server breakdowns and constant rate of repeated attempts*, Annals of Operations Research 157 (2008), 225-243.
- [11] I., Atencia, P., Moreno, *A single-server retrial queue with general retrial times and Bernoulli schedule*, Applied Mathematics and Computation 162 (2005), 855-880.
- [12] B. Avi-Itzhak, P. Naor, *Some Queueing Problems with the Service Station Subject to Breakdown*, Operations Research, 11 (1963), 303-320.
- [13] G., Ayyappan, K., Sathiya, *Analysis pf $M^{[X]}/G/1$ queue with service interruption and extended server vacations with Bernoulli schedule*, International Journal of Computer Applications 7 (2013), 2599-2611.
- [14] N.T.J., Bailey, *On Queuing Processes with Bulk Service* Journal of the Royal Statistical Society, 16 (1954), 80-87.
- [15] N., Balmani, *A single server $M/G/1$ queue with service interruption and Bernoulli Schedule Server Vacation having General Vacation Time Distribution* International Journal of Mathematical Archive, 3(2012), 347-353.

- [16] S.,Baskar, R., Rajalaksumi Rajagopal, S., Palaniammal, *A Single server M/G/1 queue with service interruption under Bernoulli schedule* International Mathematical Forum 6 (2011), 1697-1712.
- [17] A., Borthakur, *A Poisson Queue with General Bulk Service Rule* Journal of the Assam Scientific Society 14 (1971), 162-167.
- [18] O.J., Boxma, T., Takine, *The M/G/1 FIFO queue with several customer classes* Queueing Systems 45 (2003), 185-189.
- [19] M.L., Chaudhry, J.G.C., Templeton, *A First course in Bulk Queues*, John Wiley and sons, New York (1983).
- [20] B.D., Choi, K.K., Park, *The M/G/1 retrial queue with Bernoulli schedule*, Queueing systems 7(1990), 219-227.
- [21] G., Choudhury, *An $M^X/G/1$ Queueing System with a Setup Period and a Vacation Period*, Queueing Systems 36 (2000), 23-38.
- [22] G., Choudhury, *A Batch Arrival Queue with a Vacation Time Under Single Vacation Policy*, Computers and Operations Research 29 (2002), 1941-1955.
- [23] G., Choudhury, L., Tadj, *An M/G/1 Queue with Two Phases of Service Subject to the Server Breakdown and Delayed Repair*, Applied Mathematical Modelling 33 (2009), 2699-2709.
- [24] B.T. Doshi, *Queueing Systems with Vacations-a Survey*, Queueing Systems 1 (1986), 29-66.
- [25] N.V. Djellab, *On the M/G/1 retrial queue subjected to breakdowns*, RAIRO-Operations Research 36 (2002), 299-310.
- [26] Y., Inoue, O., Boxma, D., Perry, S.,Zacks *Analysis of $M^{[X]}/G/1$ queues with impatient customers*, Eurandom Report, 8 (2017).
- [27] A., Eldin *Approach of Theoretical Description of Repeated Call Attempts*, Erricson Thecnics 23(1967), 346-407.
- [28] G.I. Falin, *Aggregate arrival of customers in one line systems with repeated calls*, Ukrainian Mathematical Journal 28 (1976), 337-340.
- [29] G.I. Falin, J.G.C. Templeton *Retrial queues*, Chapman and Hall, London (1997).
- [30] K., Farahmand *Single line queue with recurrent repeated demands*, Queueing systems 22(1996), 425-435.
- [31] A. Farzana, M. Kailach, C. Madan, *Batch Arrival System with Random Breakdowns and Bernoulli Schedule Server Vacations having General Vacation Time Distribution*, International Journal of Information and Management Sciences 20 (2009), 55-70.
- [32] G., Fayolle *A simple Telephone Exchange with Delayed Feedbacks*, Teletra ?c Analysis and Computer Performance Evaluation (1986).
- [33] A. Gomez-Corral, *Stochastic analysis of a single server retrial queue with general retrial times*, Naval Research Logistics (NRL) 46(1999), 561-581.
- [34] C. M., Harris, W. G., Marchal *State dependence in M/G/1 server-vacation models*, Operations Research, 36(1988), 560-565.

- [35] O., Hashida, K., Kawashima *Buffer Behavior with Repeated Calls*, Electronics and Communication in Japan, 68 (1979), 27.
- [36] J. R., Jackson *Networks of waiting lines*, Operations research, 5(1957), 518-521.
- [37] J.C., Ke, *The optimal control of an M/G/1 queueing system with server startup and two vacation types*, Applied Mathematical Modelling, 27(2003), 437-450.
- [38] J.C., Ke, K.B., Huang, *Analysis of an Unreliable server $M^{[X]}/G/1$ system with a randomized vacation policy and delayed repair*, Stochastic Models 26(2010), 212-241.
- [39] J.C., Ke, D.Y., Yang, *Analysis of a Batch Arrival Queue with Vacation Policy and Exceptional Service*, Communications in Statistics, Theory and Methods 45 (2016), 3637-3657.
- [40] W.M. Kempa, *Analysis of departure process in batch arrival queue with multiple vacations and exhaustive service*, Communications in Statistics, Theory and Methods 40(2011), 2856-2865.
- [41] L.Kleinrock, *Queueing systems : Problems and solutions*, Wiley New York (1996).
- [42] H., Kobayashi, *Modelling and analysis; An introduction to system performance evaluation methodology*, The systems programming series, Addison wesley, (1987).
- [43] V.G., Kulkarni, B.D., Choi, *Retrial queues with server subject to breakdowns and repairs*, Queueing systems, Springer 7 (1990), 191-208.
- [44] B.K., Kumar, A., Vijayakumar, D., Arivudainambi, *The M/G/1 retrial queue with Bernoulli schedules and general retrial times*, Computers and Mathematics with Applications, Elsevier 43 (2002), 15-30.
- [45] W., Li, D., Shi, X., Chao, *Reliability analysis of M/G/1 queueing systems with server breakdowns and vacations*, Journal of Applied Probability 34 (1997), 546-555.
- [46] K. C., Madan, *A single channel queue with bulk service subject to interruptions*, Microelectronics Reliability, 29(1989), 813-818.
- [47] K. C., Madan, W., Abu-Dayyeh, F., Taiyyan, *A two server queue with Bernoulli schedules and a single vacation policy*, Applied Mathematics and Computation, 145(2003), 59-71.
- [48] H., Masuyama, T., Takine, *Stationary Queue Length in a FIFO Single Server Queue with Service Interruptions and Multiple Batch Markovian Arrival Streams*, Journal of the Operations Research Society of Japan 46(2003), 319-341.
- [49] R.G., Miller, *A Contribution to the Theory of Bulk Queues*, Statistical Society Series B 21 (1959), 320-337.
- [50] L.W., Miller, *Alternating priorities in multi-class queue*, Ph.D. dissertation, Cornell University, Ithaca, N.Y. (1964).
- [51] P. Moreno, *An M/G/1 retrial queue with recurrent customers and general retrial times*, Applied Mathematics and Computation 159 (2004), 651-666.
- [52] H., Saggou, I., Lachemot, M., Ourbih-Tari, *Performance measures of M/G/1 retrial queues with recurrent customers, breakdowns, and general delays*, Communications in Statistics-Theory and Methods 46 (2017), 7998-8015.

- [53] H., Saggou, I., Sadeg, M., Ourbih-Tari, E.B., Bourennane, *The analysis of unreliable $M^{[X]}/G/1$ queuing system with loss, vacation and two delays of verification*, Communications in Statistics-Simulation and Computation (2018), 1-16. <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/03610918.2017.1414245>
- [54] L.D., Servi S.G., Finn, *M/M/1 Queues with Working Vacations (M/M/1/WV)*, Performance Evaluation 50 (2002), 41-52.
- [55] H., Takagi, *Queueing Analysis : A Foundation of Performance Evaluation*, Vacation and priority systems, Elsevier Science Publishers, Amsterdam (1991).
- [56] Y., Tang , *Some reliability problems arising in GIvbGvb1 queueing system with-repairable service station*, Microelectronics Reliability 35 (1997), 707-712.
- [57] Y. H., Tang , *A Single-Server M/G/1 Queueing System Subject to Breakdowns*, Some Reliability and Queueing Problems, Microelectronics and Reliability 37 (1997), 315-321.
- [58] J.G.C., Templeton, *Retrial Queues*, Queueing Systems 7, (1990), 125-227.
- [59] K., Thiruvengadam , *Queueing with Breakdownst*, Operations Research 11 (1963), 62-71.
- [60] N., Tian, Z. G., Zhang *The discrete-time GI/Geo/1 queue with multiple vacations*, Queueing systems, 40(2002), 283-294.
- [61] K.H., Wang, *Optimal control of a removable and non-reliable server in an M/M/1 queueing system with exponential startup time*, Mathematical Methods of Operations Research 58 (2003), 29-39.
- [62] K.H., Wang, H.T., Kao, G., Chen, *Optimal Management of a Removable and non-Reliable Server in an Infinite and a Finite $M/H_k/1$ Queueing System*, Quality Technology and Quantitative Management 1 (2004), 325-339.
- [63] C., Wenway, R., Bartoszynski Pearl, *Queues with breakdowns and customer discouragement*, Probability and Mathematical Statistics 14 (1993), 77-87.
- [64] H., White, L., Christie, *Queueing with preemptive priorities or with breakdown*, Operations research 6.1 (1958), 79-95