N° D'ORDRE : **10/2018 – D/MT**

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté de Mathématiques

THÈSE

Présentée pour l'obtention du **grade** de **DOCTEUR EN SCIENCES**

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : ANALYSE-EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Par : **MOKRANE Amira**

Thème

Sur la relaxation et le comportement asymptotique des solutions de quelques problèmes liés à la mécanique

---

Soutenue publiquement, le 13 / 05 / 2018, devant le jury composé de :

Mr M.S. MOULAY	Professeur à l'U.S.T.H.B.	Président
Mr M. BOUSSELSAL	Professeur à l'E.N.S-Kouba	Directeur de thèse
Mr D. TENIOU	Professeur à l'U.S.T.H.B	Co-directeur de thèse
Mr S. DJEBALI	Professeur à l' E.N.S-Kouba	Examinateur
Mr M.MOUSSAOUI	Professeur à l' E.N.S-Kouba	Examinateur
Mr H. LE DRET	Professeur à l'Université Paris 6, (LJLL)	Invité

Remerciements

Mes premiers remerciements sont évidemment destinés à mon directeur de thèse le Professeur Mahmoud Bousselsal, de m'avoir donné la chance de travailler sous sa direction, pour tout ce qui j'ai appris avec lui depuis qu'il m'a initié à l'univers du calcul des variations, soit d'un point de vue mathématique, soit d'un point de vus humain, son soutien, son orientation, sa rigueur et ses encouragements m'ont beaucoup apporté. je lui en suis très reconnaissantes.

Je remercie mon co-directeur de thèse le Professeur Djamel Eddine Teniou, pour tout son aide et encouragements, qu'il trouve ici l'expression de mes plus respectueux remerciements.

J'exprimer ma gratitude au Professeur Mouhamed Said Moulay, et je le remercie pour avoir accepté de présider le jury.

Je remercie vivement les Professeurs Smail Djebali et Mouhand Moussaoui pour l'honneur qu'il m'ont fait en rapportant sur cette thèse.

Je voudrais exprimer mes sincères remerciements au Professeur Hervé Le Dret, d'abord d'avoir fait l'honneur de participé au jury de ma thèse, de m'avoir donné le privilège de travailler avec lui, malgré ses occupations, d'avoir partagé de ses connaissances, son expérience et sa façon de faire de la recherche. Travailler avec Professur Le Dret a été pour moi très enrichissant, je lui en suis très reconnaissante.

J'exprime toute ma reconnaissance au Professeur François Murat, de m'avoir permis de bénéficier de bonnes conditions de travail au niveau du laboratoire Jacques Louis Lions à l'université Paris 6, où j'ai préparé une bonne partie de ma thèse, pour tout son aide et sa grande gentillesse.

Un grand merci aux membres du LJLL pour leur accueil sympathique, et en particulier au Professeur Tahar Zamène Boulmezaoud pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Ses remarques et ses suggestions m'ont été très utiles.

J'exprime également ma gratitude au Professeur Michel Chipot pour m'avoir accueilli et financé au sein du laboratoire de mathématique à l'université de Zurich durant une année, où il m'a fait découvrir les problèmes "ℓ geos to plus infinity", un grand merci.

Mes remerciements vont également à tous mes collègues du département de Mathématiques de l'ENS de kouba et en particulier du Laboratoire des équations aux dérivées partielles non linéaires et histoire de mathématiques, sans oublier l'aide des chefs de département les Professeurs Abdallah Derbal et Toufik Moussaoui.

Mes pensées vont à mes amies, pour tout ce qu'elles m'apportent, mais surtout pour leur amitié.

Enfin, je tiens à exprimer ma profonde affection à ma famille, qui m'a toujours soutenue, surtout mon père Abdelhafid Mokrane et mon mari Djamel. Ce travail n'aurait pu aboutir sans leur inépuisable soutien et leurs encouragements. Qu'ils trouvent dans la réalisation de ce travail, l'aboutissement de leurs efforts ainsi que l'expression de ma plus affectueuse gratitude, milles merci.

Une maman n'oublie jamais ses petits, merci Anès, merci Sarah et merci Samy, les fleurs de mon coeur.

Je dédie ce travail à la mémoire de ceux qui ont laissé leurs places vides dans ma vie, mais dont l'esprit m'accompagne quotidiennement.

Amira Mokrane
Alger, le 15 janvier 2018

Résumé

L'objectif principal de cette thèse est l'étude de quelques problèmes en calcul des variations. La thèse est composée essentiellement d'une introduction et de deux parties.

La première partie est consacrée à l'étude du comportement asymptotique des minimiseurs de quelques problèmes en calcul des variations. Ces problèmes sont posés dans une suite de domaines cylindriques $\Omega_\ell = \omega'_\ell \times \omega''$, dont la taille tend vers l'infini dans certaines directions et de sorte que les données ne dépendent que des coordonnées de ω''.

Nous avons étudié, le comportement asymptotique des minimiseurs des problèmes $(\mathcal{P}_\ell)$ suivants : $\ell > 0$

$$(\mathcal{P}_\ell)\begin{cases} J_\ell(u_\ell) = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega_\ell)} J_\ell(v), \\ \\ J_\ell(v) = \int_{\Omega_\ell} \Big(F(\nabla v(x)) - f(x'')v(x) \Big)\, dx. \end{cases}$$

Selon l'hypothèse d'uniforme convexité ou de stricte convexité sur F, nous avons réussi à démontrer deux résultats de convergence des minimiseurs u_ℓ dans un espace approprié vers le minimiseur d'une fonctionnelle du même type posé dans les directions indépendante du paramètre ℓ.

Sous d'autres conditions de croissance et de coercivité sur F et sous certaines régularité sur les données, nous avons aussi réussi à améliorer le taux de convergence, par l'obtention de deux résultats différents de convergence exponentielle.

Dans la deuxième partie nous nous somme intéressés à la relaxation en calcul des variations (quasiconvexification) plus précisément le calcul de l'enveloppe quasi-convexe des fonctions définies par l'intermédiaire des fonctions positivement homogène de degré p et des mineurs d'ordre n de la matrice ξ. du type :

$$F(\xi) = g(\psi(\xi), T_{m,n}(\xi)), \quad \xi \in \mathbb{M}^{m,n}(\mathbb{R})$$

Après avoir démontré un résultat de décomposition de matrices, nous avons calculé l'enveloppe quasi-convexe qui constitue le résultat principal de cette partie. Ensuite, un résultat nécessaire d'existence de minimiseurs pour les fonctionnelles associées du type

$$J(v) = \int_\Omega \{g(\psi(\nabla v(x)), T_{m,n}(\nabla v(x)))\} \, dx, \quad v \in u_0 + W^{1,\infty}(\Omega).$$

est obtenu.

Mots-clés : Calcul des variations, domaines devenant non bornés, comportement asymptotique, enveloppe quasi-convexe, relaxation, quasiconvexification, minimiseurs, fonction homogène.

Abstract

The aim of this thesis is the study of some problems in calculus of variations. The thesis consists essentially of an introduction and two parts.

The first part deals with minimization problems in the calculus of variations, set in a sequence of cylindrical domains $\Omega_\ell = \omega'_\ell \times \omega''$, the size of which tends to infinity in certain directions and such that the data only depend on the coordinates in the directions that remain constant ω''.

We study the asymptotic behavior of minimizers of problems $(\mathcal{P}_\ell)$, $\ell > 0$

$$(\mathcal{P}_\ell) \begin{cases} J_\ell(u_\ell) = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega_\ell)} J_\ell(v), \\ \\ J_\ell(v) = \int_{\Omega_\ell} \Big(F(\nabla v(x)) - f(x'')v(x) \Big)\, dx. \end{cases}$$

in various situations, according to the assumption of uniform convexity or strict convexity on F, we show two convergence results of the minimizers u_ℓ in an appropriate space towards the minimizer of a functional of the same type set in the constant directions.

Under other growth and coerciveness hypothesis on F and under some regularity on the data, we prove that not only does convergence hold without restrictions on the elongated dimension , but that it also occurs at an exponential rate, by obtaining two different convergence results

In the second part we are interested in relaxation in calculus of variations (quasiconvexification) more precisely in the calculus of the quasi-convex envelope of functions defined through functions positively homogeneous of degree p and minors of order n matrix, of the type :

$$F(\xi) = g(\psi(\xi), T_{m,n}(\xi)), \quad \xi \in \mathbb{M}^{m,n}(\mathbb{R})$$

We prove first some results on decomposition of matrices then, we compute the quasi-convex envelope which is the principal result of this part.

At the end we give a necessary condition for the existence of minimizers of functional of the kind :

$$J(v) = \int_{\Omega} \{g(\psi(\nabla v(x)), T_{m,n}(\nabla v(x)))\} \; dx, \quad v \in u_0 + W^{1,\infty}(\Omega).$$

Keywords : Calculus of variations, domains becoming unbounded, asymptotic behavior, quasi-convex envelope, relaxation, quasiconvexification, minimizers, homogeneous function.

Notations

$A \backslash B$	Complémentaire de B dans A.
$\mathbf{1}_A$	Fonction indicatrice de A ; $1_A(x) = 1$ si $x \in A$, 0 si $x \notin A$.
$\mathcal{L}^d$	La mesure de Lebesgue d-dimensionnelle.
$\lvert\xi\rvert$	Norme Euclidienne de $\xi \in \mathbb{R}^d$.
ω''	Ouvert borné de $\mathbb{R}^{n-r}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq r < n$.
ω'	Ouvert borné de $\mathbb{R}^r$ et partie étoilée par rapport à 0.
$\ell > 0$	Paramètre réel strictement positif.
ω'_ℓ	Ouvert de $\mathbb{R}^r$, $\omega'_\ell = \ell\omega'$
Ω_ℓ	Ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\Omega_\ell = \omega'_\ell \times \omega''$.
Ω_∞	Ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\Omega_\infty = \mathbb{R}^r \times \omega''$.
$\rho_{s,t}$	Fonction troncature entre ω'_s et ω'_t, $0 < t < s \leq \ell$.
$x \in \Omega_\ell$	$x = (x', x'')$, avec,
$x' \in \omega'_\ell$	$x' = (x_1, \ldots, x_r)$ pour $1 \leq r < n$.
$x'' \in \omega''$	$x'' = (x_{r+1}, \ldots, x_n)$ pour $1 \leq r < n$.
∇	Gradient, $\nabla = (\partial_1, \ldots, \partial_n) = (\nabla', \nabla'')$ avec,
∇'	Gradient horizontal, $\nabla' = (\partial_1, \ldots, \partial_r)$
∇''	Gradient vertical, $\nabla'' = (\partial_{r+1}, \ldots, \partial_n)$
Ω	Ouvert de $\mathbb{R}^n$.
$\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$	Fonctions de $\mathcal{C}^m(\Omega)$ qui se prolonge continûment sur $\overline{\Omega}$ ainsi que leurs dérivées partielles d'ordre $k \leq m$.
L^p, L^∞	Espace de Lebesgue, $1 \leq p \leq \infty$, cf. Définition 1.1.1.
$L^{p,q}(\Omega)$	Espaces de Lorentz, $1 \leq p, q < +\infty$ cf. Définition 1.1.6.

$H^1, W^{1,p}$	Espaces de Sobolev, $1 \le p \le +\infty$, cf. Définition 1.1.9.
$W_0^{1,p}(\Omega)$	la fermeture de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.
$W_{loc}^{1,p}(\Omega)$	Fonctions mesurables sur Ω telle que $f 1_K \in W^{1,p}(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.
$\langle .;. \rangle$	Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.
$m \wedge n$	Pour $m,n \in \mathbb{N}$, $m \wedge n = \min\{m,n\}$.
$\binom{m}{s}$	Pour $1 \le s \le m$, $\binom{m}{s} = \frac{m!}{s!(m-s)!}$.
$\tau(m,n)$	$\tau(m,n) = \sum_{s=1}^{m\wedge n} \binom{m}{s}\binom{n}{s}$.
$adj_s\xi$	La matrice de tous les mineurs d'ordre s de $\xi \in \mathbb{M}^{m,n}$.
$T(\xi)$	Si $\xi \in \mathbb{M}^{m,n}$, $T(\xi) = (\xi, adj_2\xi, \dots, adj_{m\wedge n}\xi)$.
$a \otimes b$	Pour $a \in \mathbb{R}^m$ et $b \in \mathbb{R}^n$ on dénote $a \otimes b$ la matrice de rang 1 de $\mathbb{M}^{m,n}$ dont la composante (i,j) a la valeur $a_i b_j$.
CF	Enveloppe convexe de $F : \mathbb{M}^{m,n} \to \mathbb{R}$.
PF	Enveloppe poly-convexe de $F : \mathbb{M}^{m,n} \to \mathbb{R}$.
QF	Enveloppe quasi-convexe de $F : \mathbb{M}^{m,n} \to \mathbb{R}$.
RF	Enveloppe rang-un-convexe de $F : \mathbb{M}^{m,n} \to \mathbb{R}$.
ξ_i	$i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $\xi \in \mathbb{M}^{m,n}$
ξ^j	$j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $\xi \in \mathbb{M}^{m,n}$
$\widehat{\xi}^{i_1,i_2,\dots,i_{m-n}}$	La matrice de $\mathbb{M}^{n,n}$ obtenue de $\xi \in \mathbb{M}^{m,n}$ en supprimant les $(m-n)$ lignes $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{m-n}}$, avec $m \ge n$.
$T_{m,n}(\xi)$	Si $\xi \in \mathbb{M}^{m,n}$, $T_{m,n}(\xi) = (\det \widehat{\xi}^{i_1,i_2,\dots,i_{m-n}})_{1 \le i_1 \le \dots \le i_{m-n} \le m}$.
$\mathbf{mes}(\Omega)$	Mesure de Lebesgue de Ω.
u_{ξ_0}	Pour $\xi_0 \in \mathbb{M}^{m,n}$, application affine telle que $Du_{\xi_0} = \xi_0$.
$W_{\xi_0}^{1,\infty}(\Omega)$	Pour $\xi_0 \in \mathbb{M}^{m,n}$, $W_{\xi_0}^{1,\infty}(\Omega) = W_0^{1,\infty}(\Omega) + u_{\xi_0}$.

Table des matières

Introduction

Historique

Le problème fondamental en calcul des variations consiste à minimiser dans un espace X des fonctionnelles du type :

$$I(u) = \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))dx,$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$,
$u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$ et $u = (u^1, \ldots, u^m)$ et par conséquent

$$Du = \left(\frac{\partial u^j}{\partial x_i}\right)_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq m} \in \mathbb{M}^{mn}$$

et $F : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{M}^{mn} \to \mathbb{R}$ une fonction (le lagrangien).

Ce type de problème remonte, à Bernoulli où il a résolu en 1696 le problème de la courbe *brachistochrone* c'est-à-dire avec

$$F(x, u, \xi) = \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{2g(u - a)}}$$

où $g, a \in \mathbb{R}$ et $u > a$.

En 1744, Euler donna une première condition nécessaire générale d'existence de solutions sous forme d'une équation aux dérivées partielles, à laquelle contribue ensuite Lagrange. Cette équation est connue aujourd'hui sous le nom d'équation d'Euler-Lagrange et constitue la base de la méthode dite classique. Durant le 19 ème siècle, cette méthode a été développée et d'importantes contributions ont été faites par Riemann, Weierstrass, Jacobi, Hamilton,. . . .

Au début du 20 ème siècle, différentes techniques ont été introduites par Hilbert et Lebesgue en relation avec l'étude de l'intégrale de Dirichlet. Ces méthodes sont ensuite généralisées par Tonelli, connus aujourd'hui sous le nom des méthodes directes en calcul des variations. Depuis elles sont largement utilisées et généralisées ultérieurement, par exemple pour étudier des problèmes d'élasticité non linéaires pour W et Ψ des caractéristiques d'un matériau hyper élastique donné avec

$$F(x,u,\xi) = W(x,\xi) + \Psi(x,u).$$

Les méthodes directes reposent sur deux points essentiels, la compacité dans l'espace X et la semi-continuité inférieure faible de la fonctionnelle I. Or cette dernière, dans le cas scalaire $n = m = 1$, est assurée par la convexité de F, par contre dans le cas vectoriel n, $m > 1$ la semi-continuité inférieure faible de la fonctionnelle I devient plus délicate.

En 1952, Morrey introduit une nouvelle notion, celle de la quasi-convexité de F, qui caractérise la semi-continuité inférieure faible de I. Cependant, la quasi-convexité est une condition difficile à vérifier, ce qui a conduit Morrey et Ball à introduire deux autres nouvelles notions de convexités l'une plus forte la poly-convexité et l'autre plus faible la rang-1-convexité et on a d'ailleurs

$$F \text{ convexe } \Rightarrow F \text{ poly-convexe} \Rightarrow F \text{ quasi-convexe} \Rightarrow F \text{ rang-1-convexe}$$

La réciproque de chacune des implications ci-dessus est fausse en général :

Dans le cas $m = n = 3$, Serre [49] a montré en 1983 que les formes quadratiques fournissent un contre-exemple des fonctions quasi-convexe qui ne sont pas poly-convexes. Pour le cas $m = n = 2$, en 1992, Dacorogna et Alibert [1] ont établi leur contre-exemple.

Pour décider que la rang-1-convexité n'implique pas la convexité, c'est seulement en 1992, que Svérak [50] a fourni un contre-exemple dans le cas $m = 3$ et $n = 2$.

Par contre le cas $n \geq m = 2$ reste toujours ouvert.

Toutes ces notions sont équivalentes dans le cas scalaire $m = n = 1$, voir [29].

Dans le cas où I n'est pas faiblement semi-continue inférieurement donc F n'est pas quasi-convexe, l'une des techniques pour surmonter cette difficulté est de remplacer F par son enveloppe quasi-convexe QF, c'est-à-dire par la plus grande fonction quasi-convexe inférieure ou égale à F et nous considérons le problème dit relaxé c'est-à-dire de minimiser la fonctionnelle

$$\overline{I}(u) = \int_{\Omega} QF(x, u(x), Du(x))dx$$

On a $\inf I = \inf \overline{I}$ voir [29] ce qui nous amène à chercher parmi les minimiseurs du problème relaxé ceux qui réalisent le minimum pour la fonctionnelle I.

Alors, pour ce type de problèmes de minimisation, les trois questions naturelles suivantes se posent :

- L'existence et l'unicité des minimiseurs.
- Le calcul de l'enveloppe quasi-convexe.
- Régularité et propriétés des minimiseurs.

Nous démontrons dans cette thèse composée de deux parties, des résultats sur ces questions.

La première partie est constituée de 4 chapitres et la deuxième de 3 chapitres. Nous allons présenter d'une manière détaillée le contenu de chaque partie séparément.

Première partie

Notre but principal dans cette partie est l'étude du comportement asymptotique des minimiseurs de quelques problèmes en calcul des variations.

Les problèmes considérés, d'une part, sont posés dans une suite de domaines dont la taille tend vers l'infini dans certaines directions- par exemple des cylindres de même axe, de même diamètre mais d'une longueur ℓ qui devient de plus en plus grande- d'autre part les données sont supposées indépendantes des coordonnées de la dimension allongée- c'est-à-dire elles sont les mêmes sur chaque section du cylindre-.

Cette classe de problèmes a été introduite en 2000 par Chipot et Rougirel dans [20] et [21] pour quelques problèmes elliptiques et paraboliques.

En fait, beaucoup de problèmes physiques sont posés dans des domaines cylindriques, sous certaines conditions de symétrie et quand la taille du cylindre devient très grande, il est raisonnable de s'attendre à ce que la solution soit la même sur chaque section du cylindre.

Suite aux travaux de Chipot et Rougirel plusieurs questions intéressantes se posent :

- A-t-on toujours convergence de la solution quand ℓ tend vers l'infini ?
- Si oui, le problème limite est-il du même type ?,
- Dans quel espace ?,
- Et avec quel taux de convergence ?

La monographie de Chipot [16] "ℓ goes to plus infinity" répond à ces questions au moins partiellement pour plusieurs cas d'équations aux dérivées partielles, d'inéquations variationnelles et également pour des systèmes.

Par la suite de nombreux travaux ont été abordés par différents auteurs et pour divers cas. Nous citons au fur et à mesure ceux qui ont un lien avec nos résultats.

Illustration (Exemple modèle)

Illustrons tout d'abord le genre de problèmes " ℓ goes to plus infinity" à travers l'exemple modèle simple suivant voir [16] (chap. 2) :

Soit $\omega =]-1,1[$, $\ell > 0$ et $\Omega_\ell \subset \mathbb{R}^2$ le rectangle illustré dans la Figure 1.1

$$\Omega_\ell =]-\ell,\ell[\times]-1,1[=]-\ell,\ell[\times\omega \tag{1}$$

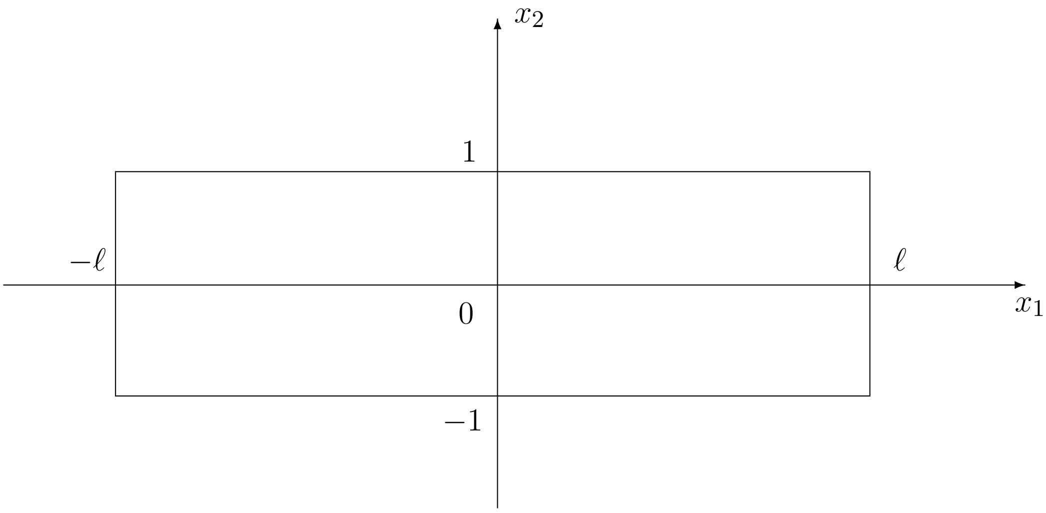

Figure 1 – L'ouvert Ω_ℓ

On note $x = (x_1, x_2) \in \Omega_\ell$. Toute fonction $f \in L^2(\omega)$ donc $f = f(x_2)$ donnera lieu a une fonction de deux variables encore noté f :

$$f : \begin{array}{lcl} \Omega_\ell & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & f(x_1, x_2) = f(x_2) \end{array}$$

nous pouvons alors considérer les deux problèmes aux limite suivants avec un même second membre :

Trouver une fonction u_ℓ de (x_1, x_2) tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_\ell = f & \text{dans } \Omega_\ell \\ u_\ell = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\ell. \end{array} \right. \tag{2}$$

Trouver une fonction u_∞ de x_2 tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\partial^2_{x_2} u_\infty = f & \text{dans } \omega \\ u_\infty = 0 & \text{sur } \partial\omega. \end{array} \right. \tag{3}$$

Rappelons que Δ désigne l'opérateur de Laplace définie par $\Delta = \partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2}$ où $\partial^2_{x_i}$ désigne la dérivée partielle d'ordre deux dans la direction x_i ici $i \in \{1, 2\}$. Les formulations variationnelles respective associées aux problèmes (2) et (3) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \; u_\ell \in H^1_0(\Omega_\ell) \\ \displaystyle\int_{\Omega_\ell} \nabla u_\ell(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_{\Omega_\ell} f(x_2) v(x)\, dx, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega_\ell). \end{array} \right. \tag{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \; u_\infty \in H^1_0(\omega) \\ \displaystyle\int_{\omega} \partial_{x_2} u_\infty(x_2) \partial_{x_2} v(x_2)\, dx_2 = \int_{\omega} f(x_2) v(x_2)\, dx_2, \quad \forall v \in H^1_0(\omega). \end{array} \right. \tag{5}$$

L'existence et l'unicité de u_ℓ, u_∞ solutions respective de (4), (5), sont assurées par le théorème de Lax-Milgram.

Maintenant, la fonction u_∞ peut être considérée comme fonction de deux variable (x_1, x_2) autrement dit indépendante de x_1. Dans ce cas il est possible de démontrer que :

Théorème 0.0.1 *Pour tout $\ell_0 > 0$ fixé, on a*

$$u_\ell \to u_\infty \quad \textit{dans} \quad H^1(\Omega_{\ell_0}) \quad \textit{quand} \quad \ell \to +\infty \tag{6}$$

Preuve. On procède en trois étapes :
a) Pour tout $v \in H_0^1(\Omega_\ell)$ on a

$$v(x_1,.) \in H_0^1(\omega) \text{ p.p. } x_1 \in]-\ell,\ell[.$$

cela veut dire que toute fonction test pour (4) l'est aussi pour (5) par conséquent

$$\int_{\Omega_\ell} \nabla(u_\ell - u_\infty)(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_\ell). \tag{7}$$

Observons aussi que $(u_\ell - u_\infty)$ ne peut pas être choisit comme fonction test dans (7) car elle ne s'annule pas sur tout le bord $\partial\Omega_\ell$, pour cela nous introduisons la fonction troncature ρ illustrée dans la Figure 2

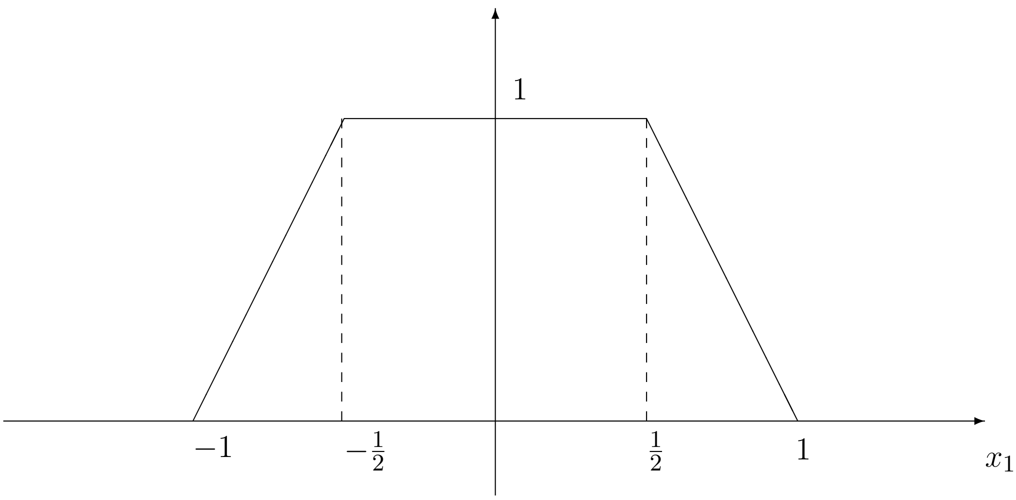

Figure 2 – La fonction troncature ρ

on a

$$0 \le \rho \le 1 \quad \text{et} \quad |\partial_{x_1}\rho| \le 2.$$

Maintenant le choix $v(x) = (u_\ell - u_\infty)(x)\rho^2(\frac{x_1}{\ell})$ comme fonction test donne que $v \in H_0^1(\Omega_\ell)$ et

$$\nabla v(x) = \rho^2(\frac{x_1}{\ell})\nabla(u_\ell - u_\infty)(x) + (u_\ell - u_\infty)(x)(\frac{2\rho(x_1)}{\ell}\partial_{x_1}\rho(\frac{x_1}{\ell}), 0).$$

reportant cette fonction test dans (7), on obtient

$$\int_{\Omega_\ell} \rho^2(\frac{x_1}{\ell})|\nabla(u_\ell - u_\infty)(x)|^2\, dx = \frac{-2}{\ell}\int_{\Omega_\ell} \rho(\frac{x_1}{\ell})(u_\ell - u_\infty)(x)\partial_{x_1}u_\ell(x)\partial_{x_1}\rho(\frac{x_1}{\ell})\, dx,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il en résulte que

$$\int_{\Omega_\ell} \rho^2(\frac{x_1}{\ell})|\nabla(u_\ell - u_\infty)|^2\,dx \le \frac{4}{\ell}\left(\int_{\Omega_\ell} \rho^2(\frac{x_1}{\ell})|(u_\ell - u_\infty)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega_\ell} |\partial_{x_1} u_\ell|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

pour contrôler le terme de droit on aura besoin d'une :

b) Inégalité du type Poincaré

Lemme 0.0.2 *Pour tout* $v \in H^1(\Omega_\ell)$ *tel que* $v = 0$ *sur* $]-\ell,\ell[\times\{-1\}$ *on a*

$$\int_{\Omega_\ell} |v(x)|^2\,dx \le 2\int_{\Omega_\ell} |\partial_{x_2} v(x)|^2\,dx$$

notons ici que la constante de Poincaré est indépendante de ℓ. Comme ρ est indépendante de x_2 on en déduit que

$$\left(\int_{\Omega_\ell} \rho^2(\frac{x_1}{\ell})|\nabla(u_\ell - u_\infty)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{4\sqrt{2}}{\ell}\left(\int_{\Omega_\ell} |\partial_{x_1} u_\ell|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

c) Estimation grossière

Lemme 0.0.3 *Soit* u_ℓ, u_∞ *les solutions faible de (2), (3) on a*

$$\int_{\Omega_\ell} |\nabla u_\ell(x)|^2\,dx \le 2\ell\int_{\omega} |\partial_{x_2} u_\infty(x)|^2\,dx_2.$$

de ce lemme on peut déduire que

$$\left(\int_{\Omega_\ell} \rho^2(\frac{x_1}{\ell})|\nabla(u_\ell - u_\infty)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{8}{\sqrt{\ell}}\left(\int_{\omega} |\partial_{x_2} u_\infty(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{C}{\sqrt{\ell}}$$

du fait que $\rho(\frac{x_1}{\ell}) = 1$ dans $\Omega_{\frac{\ell}{2}}$, on aura

$$\left(\int_{\Omega_{\ell_0}} |\nabla(u_\ell - u_\infty)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_{\Omega_{\frac{\ell}{2}}} |\nabla(u_\ell - u_\infty)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{C}{\sqrt{\ell}}$$

pour tout $0 < \ell_0 < \frac{\ell}{2}$ fixé d'où le résultat désiré en faisant tendre ℓ vers $+\infty$.

Motivation

La majorité des travaux sur les problèmes "ℓ goes to plus infinity" utilisent le problème aux limites lui même c'est-à-dire l'équation aux dérivées partielles et les conditions aux limites. Une exception à cette règle se trouve dans les papiers récents de [17] et [19] dans lesquels les auteurs considèrent plutôt une suite de problèmes en calcul des variations posés dans des domaines allongés. C'est l'approche que nous adoptons ici également.

Notre motivation principale et que certains modèles, tel que l'hyper élasticité non linéaire, sont naturellement posés comme des problèmes de calcul des variations, voir [3]. De plus, certains problèmes concernant le principe de l'élasticité de Saint-Venant, voir [43], [51] sont typiquement définis dans des domaines allongés, même dans une seule direction, et par conséquent, il est logique d'essayer de traiter des problèmes "ℓ goes to plus infinity" en utilisant uniquement les propriétés de minimisation de fonctionnelles et de ne faire aucun recours aux équations d'Euler-Lagrange.

Nous sommes cependant loin d'atteindre l'objectif de traiter l'élasticité non linéaire, puisque l'approche que nous développons dans cette thèse utilise beaucoup la notion de convexité, alors que cette dernière n'est pas une hypothèse appropriée de l'élasticité non linéaire.

Description Partie I

Nous sommes néanmoins en mesure d'englober une large classe d'énergies non linéaires, y compris le p-Laplacien avec des restrictions techniques sur le nombre de dimensions allongées par rapport à l'exposant p.

Nos hypothèses sont plus faibles et nos résultats sont parfois plus forts que ceux de [19]. Les techniques à un certain moment sont totalement différentes, mettant particulièrement l'accent sur la convergence faible, les techniques de la semi continuité inférieure faible et en s'appuyant sur quelques techniques classiques telle que la méthode dite de "De Giorgi's slicing argument".

Décrivons un peu plus précisément nos résultats.

Pour $\ell > 0$. On note Ω_ℓ les ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$ qui sont des produits cartésiens de la forme $\ell\omega' \times \omega''$ avec $\omega' \subset \mathbb{R}^r$, $\omega'' \subset \mathbb{R}^{n-r}$ et $1 \leq r \leq n-1$. On pose $x = (x', x'')$ avec $x' \in \mathbb{R}^r$ étant la variable allongée et $x'' \in \mathbb{R}^{n-r}$ la variable non allongée. De même, pour une fonction scalaire $v : \Omega_\ell \to \mathbb{R}$ nous décomposons le gradient $\nabla v = (\nabla' v, \nabla'' v)$ suivant la même notation.

Nous considérons une densité d'énergie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et une fonction f sur ω'' et on introduit le problème de minimisation. Trouver $u_\ell \in W_0^{1,p}(\Omega_\ell)$ tel que

$$\begin{cases} J_\ell(u_\ell) = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega_\ell)} J_\ell(v), \\ \\ J_\ell(v) = \int_{\Omega_\ell} \Big(F(\nabla v(x)) - f(x'')v(x) \Big)\, dx. \end{cases} \tag{8}$$

On suppose que F est convexe, et vérifie les conditions de p-croissance et p-coercivité suivantes :

$$\exists p \in]1,+\infty[,\ \exists \lambda > 0,\ \exists \Lambda > 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n\ :\ \lambda|\xi|^p \le F(\xi) \le \Lambda(|\xi|^p + 1) \tag{9}$$

Ensuite on introduit $F''\colon \mathbb{R}^{n-r} \to \mathbb{R}$ définie par $F''(\xi'') = F(0,\xi'')$, il est clair que F'' est aussi convexe, et vérifie les même conditions de p-croissance et p-coercivité. De même on introduit le problème de minimisation. Trouver $u_\infty \in W_0^{1,p}(\omega)$ tel que

$$\begin{cases} J_\infty(u_\infty) = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\omega'')} J_\infty(v), \\ \\ J_\infty(v) = \int_{\omega''} \Big(F''(\nabla'' v(x'')) - f(x'')v(x'') \Big)\, dx''. \end{cases} \tag{10}$$

Par le Théorème 1.2.5 il est clair qu' on a au moins existence d'une solution u_ℓ, u_∞ des problèmes (8), (10) respectivement (dans la suite on va supposer d'autres hypothèses supplémentaires pour assurer l'unicité du minimiseur u_∞). Il s'avère que, sous des hypothèses supplémentaires, le problème (10) est la limite " ℓ goes to plus infinity" de la famille des problèmes de minimisation (8) à l'étude.

Ce sont des hypothèses de croissance et de coercivité appropriées sur la fonction

$$G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
$$G(\xi) = F(\xi) - F''(\xi'')$$

de la forme

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda(|\xi'|^p + k|\xi''|^{p-k}|\xi'|^k) \le G(\xi) \le \Lambda(|\xi'|^p + k|\xi''|^{p-k}|\xi'|^k),$$

ou même de la forme

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda(|\xi'|^2 + |\xi'|^p + k|\xi''|^{p-k}|\xi'|^k) \le G(\xi) \le \Lambda(|\xi'|^2 + |\xi'|^p + k|\xi''|^{p-k}|\xi'|^k),$$

pour certains $0 < \lambda \le \Lambda$ et $k \in [0,p[$.

Les techniques utilisées pour démontrer la convergence sont différentes. Ceci nous a amené à diviser la première partie de la thèse en quatre chapitres, qui peuvent être lus plus au moins indépendamment, à l'exception des sections 2.1 et 2.2 du second chapitre.

Chapitre 1

Dans le premier chapitre, section 1.1, nous commençons par donner un bref rappel sur quelques définitions et résultats de base, concernant les espaces fonctionnelle de Lebesgue, Lorentz et de Sobolev. Dans la section 1.2 nous rappelons également quelques résultats d'analyse convexe ainsi que les méthodes de résolutions d'un problème de calcul des variations où, nous présentons le théorème d'existence de minimiseurs dans sa version étudié dans cette thèse, nous parlons aussi de la technique dite "De Giorgi slicing argument". Dans la dernière section nous donnons quelques notions tels la fonction jauge d'une partie étoilée et ses propriétés.

Le deuxième, le troisième et le quatrième chapitre, sont consacrés à l'étude du comportement asymptotique des minimiseurs u_ℓ de la famille de problèmes (8) dans différentes cas.

Chapitre 2

Dans ce chapitre nous avons visé deux objectifs. Le premier est d'établir un résultat de convergence des minimiseurs dans le cas où le lagrangien F'' est uniformément convexe. Le second objectif est d'avoir une convergence pour des dimensions supérieures. Le résultat (voir théorème 0.0.5) obtenu dans ce chapitre couvre au moins partiellement celui de Chipot-Mojsic-Roy obtenu uniquement pour la dimension $r = 1$ suivant :

Théorème 0.0.4 (**Chipot-Mojsic-Roy** *cf. [19]) Soient u_ℓ, u_∞ les minimiseurs des fonctionnelle dans (8), (10) respectivement. Supposons que*

(H_1) $r = 1$

(H_2) *F est uniformément convexe,*

(H_3) $\exists p \in]1, +\infty[$, $\exists \lambda$, $\Lambda > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$: $\lambda|\xi|^p \le F(\xi) \le \Lambda(|\xi|^p + 1)$,

(H_4) $f \in L^{p'}(\omega'')$ *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$$\textit{Alors} \quad \exists c > 0,\ \forall \ell_0 > 0,\ ||\nabla(u_\ell - u_\infty)||_{L^p(\Omega_{\ell_0})} \le c\ell^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Le résultat principal de ce chapitre, auquel nous avons abouti avec la restriction sur la dimension $r < \frac{kp}{p-k}$, s'énonce ainsi :

Théorème 0.0.5 *Soient u_ℓ, u_∞ les minimiseurs des fonctionnelle dans (8), (10) respectivement. Supposons que*

(H_1) *F est convexe,*

(H_2) F'' *est uniformément convexe,*

(H_3) $\exists p \in]1, +\infty[, \; \exists \lambda, \, \Lambda > 0, \, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \, : \, \lambda |\xi|^p \leq F(\xi) \leq \Lambda(|\xi|^p + 1),$

(H_4) $\exists k \in]0, p[, \, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda(|\xi'|^p + k|\xi''|^{p-k}|\xi'|^k) \leq G(\xi) \leq \Lambda(|\xi'|^p + k|\xi''|^{p-k}|\xi'|^k),$

(H_5) $r < \frac{kp}{p-k}$

(H_6) $f \in L^{p'}(\omega'')$ *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Alors

$$\exists c > 0, \, \forall \ell_0 > 0, \, ||\nabla(u_\ell - u_\infty)||_{L^p(\Omega_{\ell_0})} \leq c\ell^{r - \frac{kp}{p-k}}$$

Remarque 1

(i) *L'une des difficultés rencontrèes dans étude du comportement asymptotique des minimisers* u_ℓ *de la famille de problème (8) est la non-linéarité du lagrangien* F*. Ce qui nous a amenée à imposer l'hypothèse* (H_4) *sur* G *qui est en fait, naturelle et vérifier par de nombreux lagrangiens.*

(ii) *Le théorème 0.0.5 a plusieurs avantages pratiques. D'abord, il ne fait appel à que des hypothèses naturelles sur les données. De plus, il est bon même en dimensions supérieures avec la restriction sur la dimension allongée* $r < \frac{kp}{p-k}$*, il nous donne aussi une information sur le taux de convergence.*

(iii) *Il est intéressant de comparer ce théorème à d'autre résultats dans le domaine, notamment, avec le Théorème 0.0.4 de Chipot, Mosjic et Roy dans [19].*

- *Sous l'hypothèse de l'uniforme convexité du lagrangien* F*,*
- *Leur résultat de convergence est établi pour la restriction* $r = 1$*.*
- *Par contre sans aucune hypothèse sur* G*.*

Le théorème 0.0.5 apporte les améliorations suivantes :

- F'' *est supposé uniformément convexe (non-nécessairement toute la fonction* F*.)*
- *Le résultat de convergence est établi pour la restriction* $r < \frac{kp}{p-k}$*.*

(iv) *Le problème modèle est le cas de l'énergie :* $F(\xi) = \frac{|\xi|^p}{p}$*, or la restriction* $r < \frac{2p}{p-2}$ *est exactement celle établie par Chipot et Xie dans [22] dans l'étude de problème quasi-linéaire associé au p-Laplacien :*

$$\begin{cases} -\Delta_p(u_\ell) = f & \text{dans } \Omega_\ell \\ u_\ell = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\ell. \end{cases}$$

Le deuxième chapitre est organisé comme suit : la première section 2.1 est réservée à la position de problème. Une fois bien posée notre problématique, dans la section 2.2 nous démontrons plusieurs estimations, que nous utiliserons à plusieurs reprise pour démontrer nos résultats de convergences, dans le chapitre 2, 3 et également dans le chapitre 4. Dans la dernière section 2.3, nous démontrons le résultat principal du chapitre, (Théorème 0.0.5) mentionné ci-dessus.

Chapitre 3

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à la généralisation du résultat de chapitre 2 en affaiblissant l'hypothèse de convexité imposé à F'', c'est-à-dire au cas de lagrangiens F'' strictement convexes. Il s'agit d'un cas nettement plus difficile que le précédent, car à partir d'une certaine étape la démarche de l'étude est totalement différente.

En fait, le théorème principal du troisième chapitre est donné par :

Théorème 0.0.6 *Soient u_ℓ, u_∞ les minimiseurs des fonctionnelle dans (8), (10) respectivement. Supposons que*

(H_1) *F est convexe,*

(H_2) *F'' est strictement convexe,*

(H_3) $\exists p \in]1,+\infty[$, $\exists \lambda$, $\Lambda > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$: $\lambda|\xi|^p \leq F(\xi) \leq \Lambda(|\xi|^p + 1)$,

(H_4) $\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda|\xi'|^p \leq G(\xi) \leq \Lambda|\xi'|^p$,

(H_5) $r < p$

(H_6) $f \in L^{p'}(\omega'')$ *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Alors, $\forall\, \ell_0 > 0$ *on a*

$$u_\ell \longrightarrow u_\infty \quad \text{dans } W^{1,p}(\Omega_{\ell_0}) \quad \text{quand } \ell \to +\infty$$

Remarque 2

(i) *Plusieurs difficultés apparaissent. La première est due à l'absence d'un terme du type $|\xi - \eta|^p$ dans la définition de la stricte convexité de F'' contrairement au cas où F'' est uniformément convexe. Cela ne nous permit pa d'estimer $\nabla(u_\ell - u_\infty)$ dans $L^p(\Omega_{\ell_0})$ par un $\frac{c}{\ell^\alpha}$. On aura seulement une estimation pour $\nabla' u_\ell$. Ceci nous amène à d'identifier la limite autrement.*

(ii) *Notons que contrairement au Théorème 0.0.5 nous obtenons, avec une hypothèse plus faible un résultat de convergence, mais sans aucune information sur le taux de convergence.*

(iii) *Si on regarde le problème quasi-linéaire associé à notre problème de minimisation*

$$\begin{cases} -div(\nabla F(\nabla u_\ell)) = f \ \ dans \ \ \Omega_\ell \\ u_\ell = 0 \ \ sur \ \ \partial\Omega_\ell \end{cases}$$

la stricte, uniforme convexité de F se traduit par la stricte, uniforme monotonie de l'opérateur ∇F respectivement, or le cas uniformément monotone à été étudié au moins pour :

- *Le problème du p-Laplacien par Chipot et Xie dans [22], pour la dimension allongée $r < \frac{2p}{p-2}$.*
- *Le cas parabolique par Guesmia [33], [34], pour $r = 1$,*
- *Le cas elliptique et parabolique à données mesures par Bruyère [15], pour $r < \frac{p}{p-2}$.*

Toutefois, le cas strictement monotone, au moins à notre connaissance, reste ouvert, exceptès quelques résultats partiels voir aussi Bruyère [15].

On a réparti le chapitre 3 en quatre sections. Dans la section 3.1 on établit une estimation pour $\nabla' u_\ell$ d'une façon presque analogue à celle du chapitre 2. Dans la section suivante on a obtenu la convergence faible des minimiseurs, la section 3.3 a été réservée à l'identification de la limite. Enfin le théorème principal est prouvé dans la section 3.4.

Le contenu des chapitres deux, trois et la première partie du chapitre quatre, est basé sur le papier *On problems in the calculus of variations in increasingly elongated domains* en collaboration avec le Professeur *Hérvé Le Dret* publié dans *Chinese annals of mathematics.*

Chapitre 4

L'intérêt du dernier chapitre de cette partie, est de développer quelques résultats où le taux de convergence est exponentiel dans le cadre de calcul des variations. Examiner le taux de convergence est très important, si on veut effectuer des calculs numériques. Signalons que le premier papier concernant le taux de convergence exponentiel est du à Chipot et Yeressan [23] dans le cas des équations aux dérivées partielles linéaires. Pour le cas particulier $F(\xi) = A\xi \cdot \xi$ où A est une matrice $n \times n$ à coefficients bornés, ils démontrent

Théorème 0.0.7 (Chipot-Yeressan) *Soient u_ℓ, u_∞ les minimiseurs des fonctionnelle dans (8), (10) respectivement. Alors pour tout $r \leq n-1$*

$$\exists C > 0, \exists \alpha > 0, \forall \ell_0 > 0, \int_{\Omega_{\ell_0}} |\nabla(u_\ell - u_\infty)|^2 \, dx \leq Ce^{-\alpha \ell}.$$

Notons que le cas $F(\xi) = \frac{|\xi|^p}{p}$ associé au problème quasi-linéaire du p-Laplacien reste toujours ouvert. Néanmoins, le cas de l'équation de la chaleur généralisée a été traité par Chipot dans [18]

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}(|\partial_{x_i} u_\ell|^{p-2}\partial_{x_i} u_\ell) = f \;\text{ dans }\; \Omega_\ell \\ u_\ell = 0 \;\text{ sur }\; \partial\Omega_\ell \end{cases}$$

qui correspond à $F(\xi) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{|\xi_i|^p}{p}$.

Nous allons établir ici deux résultats indépendants. Le premier résultat est donné par le théorème suivant :

Théorème 0.0.8 *Soient u_ℓ, u_∞ les minimiseurs des fonctionnelles (8), (10) respectivement. Supposons que*

(H_1) *F est convexe,*

(H_2) *F'' est uniformément convexe,*

(H_3) $\exists p \in]1,+\infty[$, $\exists \lambda$, $\Lambda > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$: $\lambda|\xi|^p \leq F(\xi) \leq \Lambda(|\xi|^p + 1)$,

(H_4) $\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda|\xi'|^p \leq G(\xi) \leq \Lambda|\xi'|^p$,

(H_5) $f \in L^{p'}(\omega'')$ *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Alors pour tout $r \leq n-1$

$$\exists C > 0, \exists \alpha > 0, \forall \ell_0 > 0, \; ||\nabla(u_\ell - u_\infty)||_{L^p(\Omega_{\ell_0})} \leq Ce^{-\alpha\ell}$$

Remarque 3

(i) *Comme application du théorème 0.0.8 on a $F(\xi) = F'(\xi') + F''(\xi'')$ qui couvre le cas des EDP linéaires, le cas de l'équation de la chaleur généralisée étudié par Chipot dans [18] et d'autre de problèmes non linéaires. Malheureusement il n'inclut pas le cas du p-Laplacien qui reste toujours ouvert.*

Dans le deuxième résultat, nous supposons quelques régularités supplémentaires sur les données (ω'' et f) pour y arriver :

Théorème 0.0.9 *Soit ω'' un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^{n-r}$, $n-r \geq 3$. Soient u_ℓ, u_∞ les minimiseurs des fonctionnelles dans (8), (10) respectivement.*

Supposons que

(H_1) *F est convexe,*

(H_2) *F'' est uniformément convexe,*

(H_3) $\exists p \in]1,+\infty[$, $\exists \lambda$, $\Lambda > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$: $\lambda|\xi|^p \leq F(\xi) \leq \Lambda(|\xi|^p + 1)$,

(H_4) $\exists k \in]0,p[$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda(|\xi|^k + |\xi'|^p + k|\xi''|^{p-k}|\xi'|^k) \leq G(\xi) \leq \Lambda(|\xi|^k + |\xi'|^p + k|\xi''|^{p-k}|\xi'|^k)$,

(H_5) *$f \in L^{n-r,1}(\omega'')$ (un espace de Lorentz inclus dans $L^{p'}(\omega'')$).*
Alors

$$\exists C > 0, \exists \alpha > 0, \forall \ell_0 > 0, \ ||\nabla(u_\ell - u_\infty)||_{L^p(\Omega_{\ell_0})} \leq Ce^{-\alpha\ell}$$

Remarque 4

(i) *Les équations $(p,2)$ -Laplacien entrent dans le cadre du théorème 0.0.9 en prenant $F(\xi) = \frac{|\xi|^2}{2} + \frac{|\xi|^p}{p}$ qui correspond à*

$$\begin{cases} -\Delta u_\ell - \Delta_p u_\ell = f \quad dans \ \ \Omega_\ell \\ u_\ell = 0 \quad sur \ \ \partial\Omega_\ell. \end{cases}$$

(ii) *Les deux hypothèses, ω'' convexe et f appartient à un espace de Lorentz sont introduites pour garantir que $\nabla u_\infty \in L^\infty(\omega'')$, grâce à un résultat récent de régularité du à Cianchi et Maz'ya [24], [25].*

Conclusion et perspectives

Enfin, nous concluons la première partie de la thèse par quelques remarques :

- Calcul des variations cas vectoriel

Nous discutons la question de généraliser les résultats des chapitres précédents obtenues dans le cas scalaire au cas vectoriel.

- Equations aux dérivées partielles à forme divergentielle

L'étude du comportement asymptotique pour les problèmes de calcul des variations veut dire aussi étudier une large classe de problèmes quasi-linéaires. Malheureusement cette étude ne couvre pas les opérateurs quasi-linéaires qui ne correspondent pas à la différentielle au sens de Gâteau d'une fonctionnelle du calcul des variations. Un exemple explicite pour cela est donné.

Nous espérons, dans la suite étudier cette classe d'opérateurs.

Deuxième partie

Dans cette deuxième partie de la thèse, nous nous intéressons à la question de la relaxation de certaines fonctions non quasi-convexe définie par l'intermédiaire des fonctions homogène de degré p.

Plus précisément nous considérons le problème de minimisation suivant :

$$\inf\{I(u)=\int_\Omega F(Du(x))dx, \quad u\in u_0+W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^m)\} \qquad (P)$$

- où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n>1$
- $u:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $m>1$, $u_0\in W^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^m)$
- et $F:\mathbb{M}^{mn}\to\mathbb{R}$, est une fonction non quasi-convexe.

Comme nous l'avons déjà indiqué, en méthodes directe pour minimiser la fonctionnelle I, la quasi-convexité de F joue un rôle central, c'est une condition nécessaire et suffisante pour que I soit séquentiellement faible $*$ semi continue inférieurement dans $W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ voir [44].

Puisque F est supposée non quasi-convexe, les méthodes directe ne peuvent pas être appliqué à I. Cependant, une façon pour s'en sortir, est de considérer ce que nous appelons le problème relaxé voir [29]

$$\inf\{\overline{I}(u)=\int_\Omega QF(Du(x))dx, \quad u\in u_0+W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^m)\} \qquad (QP)$$

où

$$QF(\xi)=\inf_{\varphi\in W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^m)}\frac{1}{meas(\Omega)}\int_\Omega F(\xi+D\varphi(x))dx.$$

La fonction QF est appelée l'enveloppe $W^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^m)-$ quasi-convexe de F, c'est la plus grande fonction quasi-convexe qui minore F. Par le théorème de relaxation voir [29] (Théorème 9.1), on a

$$\inf(P)=\inf(QP),$$

et avec certaine condition de coercivité, l'infinimum de (QP) est atteint. Autrement dit, si $\overline{u}$ est un minimiseur pour (QP), alors il existe une suite minimisante $\{u_\nu\}$ pour (P) telle que

$$\begin{cases} u_\nu \rightharpoonup \overline{u} \quad \text{dans } W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^m) \\ I(u_\nu)\to\overline{I}(\overline{u})=\inf(P)=\inf(QP)\end{cases}$$

Ce résultat a été établi dans le cas scalaire par plusieurs auteurs, par L.C. Young dans le cas $n=m=1$, puis il a été généralisé pour le cas $n=1$ ou $m=1$ notamment par Berliocchi et Lasry, Ekeland, Iffe et Tihomirov, MacShane, Marcellini et Sbordone. Le cas vectoriel d'abord par Dacorogna pour les fonctions $F=F(\xi)$, puis par Acerbi et Fusco dans le cas général $F=F(x,u,\xi)$.

Le théorème de relaxation est un outil qui nous aide soit à chercher parmi les minimiseurs de (QP) celui qui minimise le problème (P) soit de conclure que (P) n'admet pas de solution. Néanmoins, on doit d'abord calculer explicitement l'enveloppe quasi-convexe QF qui est en général un problème difficile. Une des façons de le faire est de calculer l'enveloppe poly-convexe PF et l'enveloppe rang-1-convexe RF, pour ensuite montrer qu'ils sont égaux voir [29] pour quelques exemples ; mais ce n'est pas toujours le cas.

Notre but ici est de calculer l'enveloppe quasi-convexe de certaines fonctions F qui dépendent du gradient à travers les fonctions homogènes de degré p, et des mineurs de matrices d'ordre n, c'est-à-dire

$$F(\xi) = g(\psi(\xi), T_m(\xi)), \text{ pour } \xi \in \mathbb{M}^{m,n}(\mathbb{R})$$

- où $\xi \in \mathbb{M}^{m,n}$ avec $m \geq n$
- $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\binom{n}{m}} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $g(.,s)$ est bornée inférieurement pour tout $s \in \mathbb{R}^{\binom{n}{m}}$ avec $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} g(x,s) = h(s)$.
- $\psi : \mathbb{M}^{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}$, est une fonction continue homogène de degré $p > 0 : \psi(t\xi) = t^p \psi(\xi)$ pour tout $t > 0$ et $\xi \in \mathbb{M}^{m,n}$.
- $h : \mathbb{R}^{\binom{n}{m}} \longrightarrow \mathbb{R}$
- $T_{m,n}(\xi)$ désigne le vecteur de tous les $n \times n$ mineurs de la matrice ξ.

On a abouti a

$$QF(\xi) = h(T_{m,n}(\xi)),$$

si $m \geq n$ et la fonction h est convexe. Et a

$$QF(\xi) = Ch(T_{m,n}(\xi)),$$

si $m = n$ ou bien $m = n+1$ et la fonction h est juste continue.

Plusieurs travaux ont été fait au paravant. D'abord le cas des formes quadratiques $F(\xi) = \varphi(q(\xi))$ par Bousselsal et Brighi dans [9], après par Bousselsal et Mokrane dans [13] ils l'ont généralisé pour $F(\xi) = \varphi(q(\xi)) + h(T_m(\xi))$, par ailleurs Bousselsal et Le Dret dans [11] ont relaxé $F(\xi) = \varphi(q(\xi)) + h(\overline{\xi})$, où $\overline{\xi}$ est la matrice obtenue en supprimant la m ème ligne de ξ puis dans [12] pour $F(\xi) = \varphi(\psi(\xi))$.

La motivation principale, pour tous ces travaux est l'étude d'une fonction élastique d'énergie stockée proposée par James et Ericksen pour modeler des transitions de phase dans des cristaux élastiques en dimension deux, voir par exemple [26]. La densité de James-Ericksen est donnée par

$$F(\xi) = \tilde{F}(C) = \kappa_1 (tr(C) - 2)^2 + \kappa_2 c_{21}^2 + \kappa_3 \left((\frac{c_{11} - c_{12}}{2})^2 - \varepsilon^2 \right)^2$$

où $C = \xi^T \xi = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ est le tenseur de Cauchy-Green, les constantes non négatifs κ_1, κ_2 et κ_3 sont les modules d'élasticité et ε est un petit paramètre.

L'enveloppe quasi-convexe de la densité de James-Ericksen a été calculée pour les cas $\kappa_1 = 0$ ou $\kappa_3 = 0$ par Bousselsal et Brighi [9] et l'ensemble des matrices sur lequel $QF = 0$ a été déterminé par Bousselsal et Le Dret dans [11] et [12]. Le cas général $\kappa_1\kappa_2\kappa_3 > 0$ semblent malheureusement être hors de portée des méthodes actuelles.

Cette partie est divisée en trois chapitres :

Chapitre 5

Ce chapitre est consacré à des rappels et définitions, nous introduisons dans la section 5.1 les différentes notions de convexité des fonctions, puis dans la section 5.2 nous définissons les enveloppes convexe, poly-convexe, quasi-convexe et rang-1-convexe et nous donnons leurs caractérisation.

Chapitre 6

Dans ce chapitre nous commençons par démontrer un lemme préliminaire sur la décomposition des matrices. Nous montrons ensuite deux résultats de relaxation (théorèmes principaux) où nous calculons explicitement QW, puis nous traitons en particulier le cas des fonctions homogène du degré 2. Nous terminons le chapitre par quelques exemples en relation avec l'énergie de densité proposée par James-Ericksen.

Chapitre 7

Enfin dans ce chapitre, nous concluons cette partie en donnant une condition nécessaire pour l'existence d'un minimiseur pour la fonctionnelle associée à la classe de fonctions relaxées dans le chapitre 6.

Les résultats obtenus dans cette partie à fait l'objet d'un article en collaboration avec le Professeur *Bousselsal Mahmoud* (soumis).

Première partie

Comportement asymptotique des minimiseurs

Chapitre 1

Rappels et définitions

Nous allons rappeler brièvement certaines définitions et résultats d'analyse fonctionnelle et d'analyse convexe que nous utiliserons dans les chapitres qui suivent. Pour plus de détails, on pourra se référer à [14], [48], [53], [52], [28], [39], [45] et [46].

1.1 Analyse fonctionnelle

1.1.1 Espaces de Lebesgue L^p

Définition 1.1.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $1 \leq p \leq \infty$. Pour $1 \leq p < \infty$, on définit $L^p(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que f^p soit intégrable, $L^\infty(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables f telles que f est presque partout bornée par une constante finie. Les espaces L^p muni de :*

$$||f||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

et

$$||f||_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{M; |f(x)| \leq M \text{ presque partout sur } \Omega\}.$$

Sont des espaces de Banach.

Notation 1 *Soit $1 \leq p \leq \infty$; on désigne par p' l'***exposant conjugué** *de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

Rappelons l'**inégalité de Young**

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}, \quad \forall a \geq 0, \forall b \geq 0, \tag{1.1}$$

que l'on utilisera aussi sous la forme

$$ab \leq \varepsilon a^p + \varepsilon^{\frac{-1}{p-1}} b^{p'}.$$

Théorème 1.1.2 *(***Inégalité de Holder***(cf. [14]) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et*

$$||fg||_{L^1(\Omega)} \leq ||f||_{L^p(\Omega)} ||g||_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Remarque 5 *En déduit que si Ω est un ouvert borné alors la famille des espaces $L^p(\Omega)$ est décroissante i.e.,*

$$1 \leq q \leq p \leq +\infty \Rightarrow L^\infty(\Omega) \subseteq L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega) \subseteq \cdots \subseteq L^2(\Omega) \subseteq L^1(\Omega).$$

Définition 1.1.3 *Soit $1 \leq p \leq \infty$; on dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{Loc}(\Omega)$ si $f1_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$, où 1_K est la fonction caractéristique de K.*

Théorème 1.1.4 *(cf. [28]) Soient $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $1 < p \leq \infty$. Si $f_\nu \in L^p(\Omega)$ et s'il existe une constante $K > 0$ telle que $||f_\nu||_{L^p(\Omega)} \leq K$, Alors il existe une sous suite $\{f_{\nu_i}\}$ et $f \in L^p(\Omega)$ tels que $f_{\nu_i} \rightharpoonup f$ (au sens de la topologie faible si $1 < p < \infty$ et faible $*$ si $p = \infty$, sur L^p).*

1.1.2 Espaces de Lorentz

Les espaces de Lorentz est une généralisation et l'un des espaces plus fins qui viennent s'intercaler entre les espaces de Lebesgue. Pour (X,μ) un espace mesurable, ils sont définis en termes de la fonctions de distribution des valeurs de f, $d_f(s)$ et du réarrangement dérecroissant $f^*(t)$ donné par

Définition 1.1.5 *(réarrangement décroissant). Soit $f : (X,\mu) \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, tendant vers 0 à l'infini, au sens où*

$$\forall a > 0, \ \ \mu\{x : |f(x)| > a\} < +\infty.$$

On note $d_f(s) = \mu(\{x : |f(x)| > s\})$

On définit le réarrangement décroissant f^* de f sur $\mathbb{R}_+$ par la formule

$$f^*(t) = \inf\{s \geq 0; \ d_f(s) \leq t\}$$

C'est une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, décroissante, continue à droite, telle que pour tout $t > 0$ et pour tout $\varepsilon < t$,

$$\mu(\{x : |f(x)| > t-\varepsilon\}) \leq \lambda(\{f^* > t\}) \leq \mu(\{x : |f(x)| > t\}),$$

où λ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Définition 1.1.6 *(***espaces de Lorentz***). Soient (X,μ) un espace mesuré, et $1 \leq p, q < +\infty$. On définit l'espace de Lorentz $L^{p,q}(X)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables f, tendant vers 0 à l'infini, pour lesquelles*

$$||f||_{L^{p,q}(X)} = \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

Remarque 6

(i) *Avec ces caractérisation il n'est pas compliqué de voir que $L^{p,p} = L^p$.*

(ii) *Pour $1 \leq q_1 < q_2 < \infty$ on a l'injection $L^{p,q_1} \subset L^{p,q_2}$.*

Dans le cas où $q = \infty$, la définition est plus simple :

Définition 1.1.7 *(***espaces de Marcinkiewicz***). Soit $1 \leq p < \infty$ et (X,μ) un espace mesuré. On note $M^p(X) = L^{p,\infty}(X)$, l'espace des fonctions f telles que*

$$\forall t \geq 0, \quad \mu[\{x; \quad |f(x)| \geq t\}] \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{p}}}$$

pour une certaine constante $C \geq 0$.

L'espace M^p est aussi appelé $''$ espace L^p faible $''$.

Exemple. 1.1.1 Les espaces de Lebesgue ne permettent pas de faire la différence entre les fonctions

$$h_{\alpha,\beta} : x \to \frac{[\log(1/|x|)]^\beta}{|x|^\alpha}$$

pour des valeurs différentes de β. En effet, si X est la boule unité de $\mathbb{R}^n$, la fonction $h_{\alpha,\beta}$ pour $\beta > 0$ appartient à $L^p(X)$ si et seulement si $p < n/\alpha$.

Les espaces de Lorentz au contraire voient la différence : la fonction $h_{\alpha,\beta}$ pour $\beta > 0$ appartient à $L^{p,q}$ si et seulement si $p < n/\alpha$ ou $p = n/\alpha$ et $q < 1/\beta$. Pour $\beta = 0$, cette fonction appartient à $M^p = L^{p,\infty}$.

1.1.3 Espaces de Sobolev

Avant d'introduire les définitions et les propriétés élémentaires des espaces de Sobolev signalons que la notion de dérivée utilisée est celle comprise au sens des distributions.

Commençons par rappeler la notion d'ouvert régulier

Notation 2 *étant donné* $x \in \mathbb{R}^n$ *on écrit* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. *On note*
$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < 1, j = 1, 2, \ldots, n\}$ *le cube unité*
$Q_+ = \{x \in Q : x_n > 0\}$
$Q_0 = \{x \in Q : x_n = 0\}$

Définition 1.1.8 *On dit qu'un ouvert* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *est de classe* $\mathcal{C}^m$, $m \geq 0$, *si pour tout* $x \in \partial\Omega$, *il existe un voisinage* U *de* x *dans* $\mathbb{R}^n$ *et une application* $M : Q \to U$ *bijective telle que*

$$M \in \mathcal{C}^m(\overline{Q}), M^{-1} \in \mathcal{C}^m(\overline{U}), M(Q_+) = U \cap \Omega, M(Q_0) = U \cap \partial\Omega.$$

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.1.9 *L'espace de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *est définit par*

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) \quad = \quad & \{f\,; \Omega \to \mathbb{R} \text{ dérivable au sens des distributions telle que :} \\ & f \in L^p(\Omega) \text{ et } \nabla f \in (L^p(\Omega))^n\}. \end{aligned}$$

On pose $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$

L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$||f||_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(||f||^p_{L^p(\Omega)} + ||\nabla f||^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}$$

Voici des résultats de compacité très utiles concernant ces espaces

Théorème 1.1.10 *(***Rellich-Kondrachov** *cf. [14]) On suppose* Ω *borné de classe* $\mathcal{C}^1$. *On a*

$$\begin{array}{llll} \text{si} & p < n & \text{alors} & W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*[\text{ où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \\ \text{si} & p = n & \text{alors} & W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, +\infty[\\ \text{si} & p > n & \text{alors} & W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \end{array}$$

avec injections compactes.

Nous allons reformuler ce théorème en termes de suites, car c'est de cette façon que nous l'utiliserons.

Corollaire 1.1.11 *(cf. [28]) Soient* Ω *un ouvert borné de classe* $\mathcal{C}^1$ *et* $1 \leq p < \infty$. *Si* $f_n \rightharpoonup f$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$. *Alors* $f_n \to f$ *dans* $L^p(\Omega)$

Finalement on introduit un sous espace important de l'espace $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.1.12 *Soit* $1 \leq p < \infty$ *;* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *désigne la fermeture de* $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$.

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{1,p}(\Omega),\ u_{/\partial\Omega} = 0\right\}.$$

Pour conclure ce paragraphe, il nous faut mentionner l'inégalité dite de Poincaré

Théorème 1.1.13 *(***Inégalité de Poincaré** *cf. [14]) Soient* Ω *un ouvert borné et* $1 \leq p < \infty$*. Alors il existe* $c = c(\Omega, p) > 0$ *telle que*

$$||f||_{L^p(\Omega)} \leq c||\nabla f||_{L^p(\Omega)} \quad \forall f \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Remarque 7 *L'inégalité de Poincaré reste valable si* Ω *est de mesure finie.*

1.2 Analyse convexe

1.2.1 Convexité

Définition 1.2.1 *Soit* E *un espace normé et* C *un ensemble non vide de* E*,*

(i) C *est dit convexe si :*

$\lambda\xi + (1-\lambda)\eta \in C$ *pour tout* $\xi, \eta \in C,\ \lambda \in [0,1]$.

(ii) *Une fonction* $F : C \to \mathbb{R}$ *est dite convexe si :*

$$F(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) \leq \lambda F(\xi) + (1-\lambda)F(\eta)$$

pour tout $\xi, \eta \in C,\ \lambda \in [0,1]$.

(iii) *Une fonction* $F : C \to \mathbb{R}$ *est dite strictement convexe si :*

$$F(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) < \lambda F(\xi) + (1-\lambda)F(\eta)$$

pour tout $\xi, \eta \in C$ *distincts,* $\lambda \in]0,1[$.

(iv) *Une fonction* $F : C \to \mathbb{R}$ *est dite uniformément convexe s'il existe une fonction croissante* $\delta : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *avec* $\delta(0) = 0$ *et* $\delta(t) > 0$ *pour* $t > 0$ *telle que*

$$F(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) \leq \lambda F(\xi) + (1-\lambda)F(\eta) - \delta(||\xi - \eta||_E)$$

pour tout $\xi, \eta \in C,\ \lambda \in [0,1]$.

Si $\delta(t) = t^2$*,* F *est dite fortement convexe.*

Remarque 8 *Il est clair que*

$$F \text{ uniformément convexe } \Rightarrow F \text{ strictement convexe } \Rightarrow F \text{ convexe },$$

mais les réciproques sont fausses.

1.2.2 Semi-continuité

Définition 1.2.2 *Soit X un espace topologique.*

(i) *Une fonction $J : X \to \mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) si pour tout $x \in X$ on a*

$$J(x) \leq \liminf_{y \to x} J(y).$$

(ii) *Une fonction $J : X \to \mathbb{R}$ est dite (séqentiellement) semi-continue inférieurement si pour toute suite $(v_n)_n$ convergente vers un $v \in X$ on a*

$$J(v) \leq \liminf_{n \to \infty} J(v_n).$$

(iii) *Une fonction $J : X \to \mathbb{R}$ est dite faiblement semi-continue inférieurement si pour toute suite $(v_n)_n$ qui converge faiblement vers un $v \in X$ dans $\sigma(X, X')$ on a*

$$J(v) \leq \liminf_{n \to \infty} J(v_n).$$

1.2.3 Calculs des variations

Le problème fondamental de calculs des variations consiste à chercher une fonction u dans un espace de fonctions admissibles X, qui minimise la fonction intégrale suivante :

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx, \tag{1.2}$$

- avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert,
- $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n, m \geq 1$ ou $\nabla u = (\frac{\partial u_i}{\partial x_j})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m}$ étant une matrice.
- $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{M}^{nm}$ continue.

Nous disons que le problème est *scalaire* si n où $m = 1$; sinon nous parlons du cas *vectoriel.*

On note le problème de minimisation par :

$$\inf\{J(v); v \in X\} \tag{1.3}$$

Il y a deux façons de procéder pour le résoudre,

1. Les méthodes classiques : le principe de ces méthodes consiste à trouver les points critiques de J, c'est-à-dire établir l'équation d'Euler-Lagrange associée qui s'écrit :

$$\begin{cases} \forall i = 1, \ldots, m, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_{ij}}\right)(x, u(x), \nabla u(x)) = \frac{\partial F}{\partial u_i}(x, u(x), \nabla u(x)), \forall x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

Indépendamment de la question de l'existence de solutions à un tel système d'E.D.P, une telle méthode n'est en général pas efficace, car d'une part elle suppose a priori une propriété de régularité de la solution et d'autre part, elle ne permet pas toujours de décider si le point critique ainsi trouvé est effectivement un minimum.

1. Les méthodes directes : l'idée de ces méthodes repose sur trois points :

- vérifier que J est minorée (ce point peut être assurée si, nous imposons une condition de croissance sur F) dans la classe des fonctions admissibles X, ceci dit
$$-\infty < m = \inf\{J(v); v \in X\}$$
donc on a l'existence d'une suite minimisante i.e. $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de X telle que
$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) = \inf\{J(v); v \in X\} = m.$$
- **(Compacité)** montrer qu'il existe une suite minimisante, qui soit compacte pour une certaine topologie sur X,(ce point peut être assuré si, nous imposons une condition de coercivité sur F)
- **(Semi-continuité) :** montrer que J est semi-continue inférieurement pour cette topologie.
Ainsi la limite u de la suite minimisante obtenue fournit un minimum, puisque on a
$$m = \liminf_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u) \geq m.$$

L'introduction de la semi-continuité est la clé pour traiter les problèmes de calculs des variations en méthodes directes. Or une condition nécessaire et suffisante pour que J soit faiblement semi continue inférieurement dans le cas scalaire est la convexité de F, le théorème suivant voir [29] le montre dans l'espace $W^{1,p}(\Omega)$:

Théorème 1.2.3 *(cf. [29]) Soient $n, m \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne,*
$$F : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{M}^{n,m} \to \mathbb{R},$$

une fonction continue non négative et

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u(x),\nabla u(x))\,dx.$$

Alors on a

Partie 1. *Si la fonction $\xi \to F(x,u,\xi)$ est convexe, alors J est faiblement semi-continue inférieurement dans $W^{1,p}$*

Partie 2. *Inversement, si n ou $m = 1$ et J est faiblement semi-continue inférieurement dans $W^{1,p}$, alors la fonction $\xi \to F(x,u,\xi)$ est convexe.*

Remarque 9

(i) *Nous devrions souligner que dans le cas vectoriel, $n,m \geq 2$, la partie 1 du théorème est valide, mais dans la partie 2. On a besoin d'une autre notion de convexité sur F, c'est la notion de quasi-convexité (à voir plus tard).*

(ii) *Il est possible de remplacer la condition $F(x,u,\xi) \geq 0$ par des hypothèses plus générales, comme par exemple dans le théorème 1.2.4 qui suit.*

Voici la version du résultat principal de semi-continuité, qui s'applique au calcul des variations..

Théorème 1.2.4 *(cf. [29]) Soient $p \geq 1$, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière lipschitzienne et*

$$F : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{M}^{n,m} \to \mathbb{R},$$

une fonction de Carathéodory satisfaisant

$$F(x,u,\xi) \geq \langle a(x);\xi\rangle + b(x) + c|u|^r$$

$$\begin{cases} \textit{pour p. p. } x \in \Omega, \textit{ pour tout } (u,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{M}^{n,m},, \\ \textit{pour certains } a \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{M}^{n,m}),\ b \in L^1(\Omega),\ c \in \mathbb{R},, \\ 1 \leq r < \frac{np}{(n-p)} \ \textit{ si } p < n \quad \textit{et} \quad 1 \leq r < \infty \ \textit{ si } \ p \geq n., \end{cases}$$

Soit

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u(x),\nabla u(x))\,dx.$$

Supposons que $\xi \to F(x,u,\xi)$ est convexe et que

$$u_\nu \rightharpoonup \bar{u} \ \textit{ dans } W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^n).$$

Alors

$$\liminf_{\nu\to\infty} J(u_\nu) \geq J(\bar{u}).$$

où $\langle;\rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{M}^{n,m}$, défini par :

$$(A,B) \in \mathbb{M}^{n,m} \times \mathbb{M}^{n,m} \mapsto \langle A;B\rangle = trace(A^tB).$$

Remarque 10

(i) *Les hypothèses du théorème sont presque optimales. Avant d'avoir cette version, ce théorème a une longue histoire et beaucoup de contributions, pour plus de détails voir [29].*

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème d'existence d'un minimum pour notre problème.

Théorème 1.2.5 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière lipschitzienne et*

$$F : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{M}^{n,m} \to \mathbb{R}$$

une fonction de Carathéodory satisfaisant

$$F(x,u,\xi) \geq \alpha_1 |\xi|^p + \alpha_2 |u|^q + \alpha_3(x)$$

pour presque partout $x \in \Omega$, pour tout $(u,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{M}^{n,m}$, pour certains $\alpha_3 \in L^1(\Omega)$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 > 0$ et $p > q \geq 1$. Supposons que $\xi \to F(x,u,\xi)$ est convexe. Soit

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u(x),\nabla u(x))\, dx.$$

Supposons que $J(u_0) < \infty$, alors

$$\inf\left\{ J(u) \,:\, u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^n) \right\}.$$

De plus, si $(u,\xi) \to F(x,u,\xi))$ est strictement convexe pour presque tout $x \in \Omega$, alors le minimum est unique.

Preuve. La démonstration ce fait en deux étapes.
Première étape : (Existence). Posons

$$\inf\left\{ J(u) \,:\, u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n) \right\} = m$$

et comme $J(u_0) < +\infty$, on a alors $m < +\infty$. Noter aussi que grâce à la borne inférieur de F, on a que $m > -\infty$. Soit $\{u_\nu\}$ une suite minimisante, c'est-à-dire : $J(u_\nu) \to m$. De la condition de coercivité sur F on déduit que pour ν suffisamment grand

$$m+1 \geq J(u_\nu) \geq \alpha_1 \, ||\nabla u_\nu||_{L^p}^p - |\alpha_2| \, ||u_\nu||_{L^q}^q - \int_\Omega |\alpha_3(x)|\, dx.$$

Désormais on notera par $\gamma_k > 0$ une constante indépendante de ν. A l'aide de l'inégalité de Hölder on a

$$||u_\nu||_{L^q}^q = \int_\Omega |u_\nu|^q \leq \left(\int_\Omega |u_\nu|^p \right)^{q/p} \left(\int_\Omega dx \right)^{(p-q)/p} = (\text{ meas } \Omega)^{(p-q)/p} ||u_\nu||_{L^p}^q,$$

on déduit que l'on peut trouver deux constantes γ_1 et γ_2 de sorte que

$$\begin{aligned} m+1 &\geq \alpha_1 \|\nabla u_\nu\|_{L^p}^p - \gamma_1 \|u_\nu\|_{L^p}^q - \gamma_2 \\ &\geq \alpha_1 \|\nabla u_\nu\|_{L^p}^p - \gamma_1 \|u_\nu\|_{W^{1,p}}^q - \gamma_2 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on peut trouver γ_3, γ_4, γ_5, telles que

$$m+1 \geq \gamma_3 \|u_\nu\|_{W^{1,p}}^p - \gamma_4 \|u_0\|_{W^{1,p}}^p - \gamma_1 \|u_\nu\|_{W^{1,p}}^q - \gamma_5$$

et par conséquent, il existe une constante γ_6 telle que :

$$m+1 \geq \gamma_3 \|u_\nu\|_{W^{1,p}}^p - \gamma_1 \|u_\nu\|_{W^{1,p}}^q - \gamma_6.$$

Puisque $1 \leq q < p$, on peut trouver γ_7, γ_8 telles que

$$m+1 \geq \gamma_7 \|u_\nu\|_{W^{1,p}}^p - \gamma_8$$

combiné avec le fait que $m < \infty$, cela nous conduit à conclure, c'est-à-dire

$$\|u_\nu\|_{W^{1,p}} \leq \gamma_9.$$

On peut donc extraire une sous-suite, toujours notée u_ν, qui converge faiblement dans $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ vers un $\bar{u} \in u_0 + W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ c'est-à-dire

$$u_\nu \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{dans } \; W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m).$$

En appliquant le théorème 1.2.4, on obtient

$$\liminf_{\nu \to +\infty} J(u_\nu) \geq J(\bar{u})$$

et donc $\bar{u}$ réalise le minimum de (1.3).

Deuxième étape : (Unicité). Montrons maintenant qu'un tel $\bar{u}$ est unique.

Supposons donc qu'il existe aussi $\bar{v} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que

$$J(\bar{u}) = J(\bar{v}) = m.$$

Notons par $\bar{w} = (\bar{u}+\bar{v})/2$ et que $\bar{w} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$. Comme la fonction $(u,\xi) \to F(x,u,\xi)$ est convexe, on a

$$m \leq J(\bar{w}) \leq \frac{1}{2}J(\bar{u}) + \frac{1}{2}J(\bar{v}) = m$$

et donc $\bar{w}$ est aussi un minimum ce qui implique que

$$\int_\Omega [\frac{1}{2}F(x,\bar{u},\nabla\bar{u}) + \frac{1}{2}F(x,\bar{v},\nabla\bar{v}) - F(x, \frac{u \bar{+} v}{2}, \frac{\nabla\bar{u}+\nabla\bar{v}}{2})]\, dx = 0.$$

La convexité de $(u,\xi) \to f(x,u,\xi)$ implique que l'intégrale est non négative, tandis qu'il est 0. Cela n'est possible que si

$$\frac{1}{2}F(x,\bar{u},\nabla\bar{u})+\frac{1}{2}F(x,\bar{v},\nabla\bar{v})-F(x,\frac{u\bar{+}v}{2},\frac{\nabla\bar{u}+\nabla\bar{v}}{2})=0 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

En utilisant maintenant la stricte convexité $(u,\xi) \to F(x,u,\xi)$ pour obtenir que $\bar{u}=\bar{v}$ et $\nabla\bar{u}=\nabla\bar{v}$ p.p. dans Ω, on a alors l'unicité du minimum, $\bar{u}=\bar{v}$ p.p. dans Ω. $\square$

Application. Comme application des résultats abstraits précédents à des problèmes de calcul des variations, on se place dans le cadre suivant :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et F une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, convexe, telle qu'il existe $p \in]1,+\infty[$, $\lambda > 0$, $\Lambda > 0$ avec pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|F(\xi)| \leq \Lambda(1+|\xi|^p)$$

$$F(\xi) \geq \lambda|\xi|^p$$

Pour tout $f \in L^{p'}(\Omega)$,, on introduit la fonctionnelle

$$J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

par

$$J(v) = \int_\Omega F(\nabla v)\,dx - \int_\Omega fv\,dx. \tag{1.5}$$

Alors d'après le théorème 1.2.5 Il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ qui minimise J sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. Si en outre F est strictement convexe, alors le point de minimum est unique.

Remarque 11

(i) *Passer d'un problème de calcul des variations, qui consiste à minimiser une fonctionnelle du type (1.5) sur un espace de fonctions, à un problème aux limites est ce que l'on appelle trouver l'équation d'Euler-Lagrange du problème de minimisation. Plus précisément, si nous supposons que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sa différentielle est donc une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que cette application satisfait une condition de croissance compatible avec celle satisfaite par F, à savoir*

$$|DF(\xi)| \leq C(1+|\xi|^{p-1}).$$

Théorème 1.2.6 *(cf. [39]) Tout point $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de minimum de J est solution du problème variationelle*

$$\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \int_\Omega DF(\nabla u)\cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f v dx.$$

Son problème aux limites quasi-linéaire associé s'écrit

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ -div(DF(\nabla u)) = f \quad \text{au sens de } \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases}$$

qui rentre dans le cadre

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ -div(a(\nabla u)) = f \quad \text{au sens de } \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases}$$

où

- $\begin{cases} a : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ \xi & \mapsto & (a_i(\xi))_{1\le i\le n} \end{cases}$
- *est continue et il existe un $p \in]1,+\infty[$ tels que :*
- $\exists c > 0 : \quad |a(\xi)| \le c|\xi|^{p-1} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ *(condition de croissance)*
- $\exists \alpha > 0 : \quad a(\xi)\cdot\xi \ge \alpha|\xi|^p \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ *(condition de coercivité)*
- $\exists \beta > 0 : \quad (a(\xi)-a(\eta))\cdot(\xi-\eta) > 0$ *for all* $\xi,\eta \in \mathbb{R}^n$ *(condition de monotonie.)*

1.2.4 Technique de " De Giorgi's slicing "

Nous allons illustrer l'idée de la technique dite "De Giorgi's slicing argument" et son utilité en calcul des variations, à travers la démonstration d'une version allégée du Théorème 1.2.4 suivant :

Théorème 1.2.7 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière lipschitzienne et $F : \mathbb{M}^{n,m} \to \mathbb{R}$ une fonction continue non négative satisfaisant $|F(\xi| \le c(1+|\xi|^p)$ pour tout $(u,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{M}^{n,m}$, pour certains $c > 0$ et $p \ge 1$. Supposons que F est quasi-convexe. Soit*

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u(x),\nabla u(x))\, dx.$$

Alors J est faiblement semi-continue inférieurement dans $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Une des étapes pour démontrer ce théorème voir [39] (démonstration intégrale) est d'obtenir la semi-continuité inférieur faible de J pour les suites dont la limite est affine :

Lemme 1.2.8 *Soit* $A \in \mathbb{M}^{m,n}$ *une matrice fixée,* $b \in \mathbb{R}^n$ *et* $(u_n)_n$ *une suite de fonctions de* $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ *telle que* $u_n \rightharpoonup u = Ax+b$*. Alors* $\liminf J(u_n) \geq J(u)$*.*

Preuve du Lemme Si les valeurs au bord de u_n étaient les mêmes que celles de u, alors le résultat serait une conséquence immédiate de la quasi-convexité. Posons $v = u_n - u$. Pour cela, on emploie la technique dite du slicing de De Giorgi. Soit $\Omega_0 \subset \Omega$ un ouvert dont l'adhérence est un compact de Ω. On pose $R = \frac{1}{2}d(\overline{\Omega_0}, \partial\Omega) > 0$, on fixe un entier k et pour $i = 1, ..., k$, on note

$$\Omega_i = \left\{x \in \Omega;\, d(x, \Omega_0) < \frac{i}{k}R\right\}$$

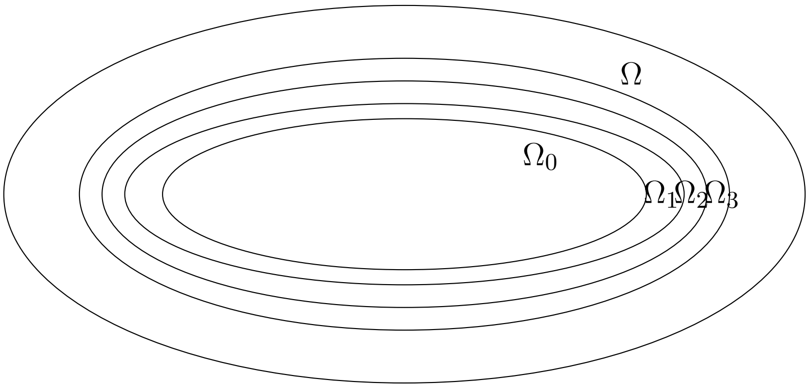

FIGURE 1.1 – Un "slicing" à trois tranches

Par construction, Ω_i est un ouvert inclus dans Ω, dont l'adhérence est compacte dans Ω et qui contient $\overline{\Omega_0}$. Pour $i = 1, ..., k$, il existe des fonctions régulières ϕ_i de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telles que

$$0 \leq \phi_i \leq 1,\ \phi_i = 1 \text{ sur } \Omega_{i-1},\ \phi_i = 0 \text{ sur } \Omega \backslash \Omega_i \text{ et } |\nabla \phi_i| \leq \frac{k+1}{R}.$$

Posons alors

$$v_{n,i} = u + \phi_i(u_n - u).$$

L'intérêt de cette construction est que $v_{n,i} = u_n$ sur Ω_{i-1}, c'est-à-dire sur la plus grande partie de Ω et se recolle à u au voisinage de Ω. De plus, comme $\phi_i(u_n - u) \in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, par quasi-convexité, il vient

$$mes(\Omega)F(A) = \int_\Omega F(\nabla u)\, dx \leq \int_\Omega F(\nabla v_{n,i})\, dx.$$

Par construction des fonctions $v_{n,i}$, on a aussi

$$\int_\Omega F(\nabla v_{n,i})\,dx = \int_{\Omega\backslash\Omega_i} F(\nabla u)\,dx + \int_{\Omega_i\backslash\Omega_{i-1}} F(\nabla v_{n,i})\,dx + \int_{\Omega_{i-1}} F(\nabla u_n)dx. \quad (1.6)$$

L'intégrale du milieu est une intégrale sur une tranche. On remarque que comme $F \geq 0$,

$$\int_{\Omega\backslash\Omega_i} F(\nabla u)dx \leq \int_{\Omega\backslash\Omega_0} F(\nabla u)\,dx \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_{i-1}} F(\nabla u_n)dx \leq \int_\Omega F(\nabla u_n)dx.$$

Par conséquent, en additionnant les inégalités (1.6) de $i=1$ à $i=k$ et en divisant par k, on obtient l'estimation

$$\int_\Omega F(\nabla u)\,dx \leq \int_{\Omega\backslash\Omega_0} F(\nabla u)dx + \frac{1}{k}\int_{\Omega_k\backslash\Omega_0} \sum_i 1_{\Omega_i\backslash\Omega_{i-1}} F(\nabla v_{n,i})\,dx + \int_\Omega F(\nabla u_n)\,dx. \quad (1.7)$$

Les deux termes extrêmes sont bien adaptés à un passage à la limite inférieure en n. Il reste à contrôler le terme du milieu en montrant qu'on peut le rendre aussi petit que l'on veut. Pour cela, on revient à la définition de $v_{n,i}$, d'où il vient

$$\nabla v_{n,i} = (1-\phi_i)\nabla u + \phi_i \nabla u_n + (u_n - u)\otimes \nabla\phi_i.$$

Par conséquent,

$$|\nabla v_{n,i}|^p \leq C\left(1 + |\nabla u|^p + |\nabla u_n|^p + \left(\frac{k+1}{R}\right)^p |u_n - u|^p\right).$$

Par l'hypothèse de croissance sur F, on en déduit que

$$\int_{\Omega_k\backslash\Omega_0} \sum_i 1_{\Omega_i\backslash\Omega_{i-1}} F(\nabla v_{n,i})\,dx \leq C\Big(1 + ||\nabla u||^p_{L^p(\Omega,\mathbb{M}^{m,n})} + ||\nabla u_n||^p_{L^p(\Omega,\mathbb{M}^{m,n})} + \left(\frac{k+1}{R}\right)^p ||u_n - u||^p_{L^p(\Omega_k\backslash\Omega_0,\mathbb{M}^{m,n})}\Big). \quad (1.8)$$

où la constante C ne dépend pas de k. Comme $u_n \rightharpoonup u$, on a que ∇u_n est borné dans L^p, et (c'est là qu'est la subtilité !) $u_n \to u$ dans $L^p_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ fort, par le Théorème 1.1.10 de Rellich-Kondrachov . En particulier, on voit que $||u_n - u||_{L^p(\Omega_k\backslash\Omega_0,\mathbb{M}^{m,n})} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Par conséquent, faisant tendre n vers $+\infty$ dans les inégalités (1.7) et (1.8), on obtient,

$$\int_\Omega F(\nabla u)\,dx \leq \int_{\Omega\backslash\Omega_0} F(\nabla u)\,dx + \frac{C}{k} + \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega F(\nabla u_n)\,dx,$$

avec C encore une fois indépendante de k. On conclut alors en faisant tout d'abord tendre k vers $+\infty$, puis en prenant une suite d'ouverts Ω_0 tels que $mes(\Omega\backslash\Omega_0) \to 0$. $\square$

1.2.5 Parties étoilées et jauges

Nous rappelons maintenant la notion de jauge d'une partie étoilée

Partie étoilée par rapport à 0

Définition 1.2.9 *Soit E un espace vectoriel. Une parie S non vide de E est dite étoilée par rapport à 0 si*

$$\forall x \in S, \qquad [0,x] \subset S.$$

Jauge d'une partie étoilée

Définition 1.2.10 *Soit E un espace vectoriel réel et S une partie étoilée par rapport à 0 de E. Alors la jauge associée à S est l'application*

$$j_S(x) = \inf \{\lambda > 0 \ : \ x \in \lambda S\}.$$

Les principales propriétés des jauges de parties étoilées sont résumées dans la proposition suivante voir [47]

Proposition 1.2.11 *Soit E un espace vectoriel normé et S une partie étoilée par rapport à 0, ouverte et bornée de E. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) *j_S la jauge associée à S est partout finie, et satisfait à*

  (a) $j_S(x) > 0, \ \forall x \neq 0,$

  (b) $j_S(tx) = tj_S(x) \ \forall x \in E, \forall t > 0.$

(ii) $S = \{x \in E \ : \ j_S(x) < 1\}.$

(iii) $\exists m, M > 0,\ m||x||_E \leq j_S(x) \leq M||x||_E.$

1.2.6 Théorème de Rademacher

Enfin, nous énonçons le théorème de Rademacher suivant :

Théorème 1.2.12 *(cf. [38]) Si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une fonction lipschitzienne, alors f est presque partout différentiable et sa différentielle est une fonction mesurable.*

Chapitre 2

Comportement asymptotique, cas uniformément convexe

Dans ce chapitre nous considérons la famille des problèmes de minimisation

$$(\mathcal{P}_\ell) \quad \inf\left\{\int_\Omega F(\nabla v(x) - f''(x'')v(x))\,dx, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega_\ell)\right\}$$

pour lesquels nous montrons un résultat de convergence des minimiseurs u_ℓ sous certaine hypothèse d'uniforme convexité sur F.

Nous commençons par fixer les notations et les hypothèses qui seront utilisées tout au long des chapitres 2, 3 et 4.

2.1 Position du problème

Notation 3 *Soient*

- $r \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $1 \leq r < n$ *;*
- $\omega' \subset \mathbb{R}^r$ *un ouvert borné avec* $0 \in \omega'$*, une partie étoilée par rapport à* 0 *;*
- $\omega'' \subset \mathbb{R}^{n-r}$ *un ouvert borné.*

Pour $\ell > 0$*, on pose*

$$\omega'_\ell = \ell\omega', \tag{2.1}$$
$$\Omega_\ell = \omega'_\ell \times \omega'' \subset \mathbb{R}^n, \tag{2.2}$$
$$\Omega_\infty = \mathbb{R}^r \times \omega''. \tag{2.3}$$

On notera les points x *de* Ω_ℓ *par* $x = (x', x'')$ *où*

- $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_r) \in \omega'_\ell$,
- $x'' = (x_{r+1}, \ldots, x_n) \in \omega''$.

De même, les vecteurs ξ *de* $\mathbb{R}^n$ *seront décomposés en* $\xi = (\xi', \xi'')$*, où*

- $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_r) \in \mathbb{R}^r$,
- $\xi'' = (\xi_{r+1}, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-r}$.

Notons que grâce à l'hypothèse géométrique sur ω', à savoir étoilé par rapport à 0, on a $\Omega_\ell \subset \Omega_{\ell'}$ dès que $\ell \leq \ell'$. Ainsi, on a affaire à une famille "croissante" d'ensembles ouverts.

Faisons une hypothèse de régularité supplémentaire sur ω', en définissant la jauge de ω' par

$$j(x') = \inf\{t \in \mathbb{R}_+^*; x'/t \in \omega'\}.$$

Comme ω' est un domaine étoilé et borné alors

- *j est bien définie,*
- $\omega'_\ell = \{x'; j(x') < \ell\}$,
- $\exists 0 < R_1 < R_2$ *tel que* $R_1|x'| \leq j(x') \leq R_2|x'|$ *pour tout* $x' \in \mathbb{R}^r$.

Maintenant on suppose que ω' est tel que j soit lipschitzienne avec une constante de Lispchitz K. Par le théorème de Rademacher j est presque partout différentiable, avec $|\nabla' j(x')| \leq K$ p.p. De plus, j appartient à $W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^r)$ et sa dérivée est presque partout égale à sa dérivée au sens des distributions. Cela est le cas par exemple si ω' est convexe. Cette hypothèse de régularité est uniquement pour la commodité : on utilise j pour construire des fonctions de troncature dans les domaines mais pas jusqu'à la frontière. Il devrait être bien clair que nos résultats peuvent s'adapter à des ensembles ouverts arbitraires ω'.

On s'intéresse ici a une suite de problèmes en calcul des variations $\mathcal{P}_\ell$ de la forme

$$J_\ell(u_\ell) = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega_\ell)} J_\ell(v), \tag{2.4}$$

avec $u_\ell \in W_0^{1,p}(\Omega_\ell)$ et

$$J_\ell(v) = \int_{\Omega_\ell} [F(\nabla v(x)) - f''(x'')v(x)]\, dx. \tag{2.5}$$

- où $f'' \in L^{p'}(\omega'')$ est une fonction donnée.

Remarque 12

(i) *On observe que f'' qui correspond au terme de force pour ce problème ne dépend que de la variable "non-allongée" x'' donc il est raisonnable de s'attendre à ce que u_ℓ se comporte en fonction principalement de x'' à la limite quand $\ell \to +\infty$, dans un sens à préciser plus tard (voir Théorème 2.3.1).*

(ii) *On peut également considérer des termes de force semi-linéaire plus généraux de la forme $h(x'', v)$ satisfaisant des hypothèses de croissance et de convexité appropriées, mais on se restreint ici au terme linéaire pour simplifier. Il est possible aussi de considérer le problème de minimisation sur d'autres espaces que $W_0^{1,p}(\Omega_\ell)$ i.e. avec d'autres conditions au bord, voir par exemple pour le cas des EDP [18].*

Hypothèses 2.1.1 *On suppose que la densité d'énergie*

$$F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

est convexe. On pose

$$\left\{\begin{array}{rcl} F''\colon \mathbb{R}^{n-r} & \to & \mathbb{R} \\ \xi'' & \mapsto & F(0,\xi'') \end{array}\right. \quad et \quad \left\{\begin{array}{rcl} G\colon \mathbb{R}^{n} & \to & \mathbb{R} \\ \xi & \mapsto & F(\xi)-F''(\xi'') \end{array}\right. \tag{2.6}$$

de sorte que :

$$F(\xi',\xi'') = F''(\xi'') + G(\xi',\xi''). \tag{2.7}$$

On suppose que ces fonctions satisfont aux hypothèses de coercivité et de croissance de type :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda|\xi|^p \leq F(\xi) \leq \Lambda(|\xi|^p+1), \tag{2.8}$$

pour F, et l'une des hypothèses suivantes pour G (selon le chapitre)

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda(|\xi'|^p + |\xi''|^{p-k}|\xi'|^k) \leq G(\xi) \leq \Lambda(|\xi'|^p + |\xi''|^{p-k}|\xi'|^k), \tag{2.9}$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda|\xi'|^p \leq G(\xi) \leq \Lambda|\xi'|^p, \tag{2.10}$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda(|\xi'|^k + |\xi'|^p + |\xi''|^{p-k}|\xi'|^k) \leq G(\xi) \leq \Lambda(|\xi'|^k + |\xi'|^p + |\xi''|^{p-k}|\xi'|^k). \tag{2.11}$$

où $0 < \lambda \leq \Lambda$, $p > 1$ et $0 < k < p$. Ici, pour $\xi \in \mathbb{R}^d$, $|\xi|$ désigne la norme euclidienne de ξ dans $\mathbb{R}^d$.

Notre problème ainsi, entre bien dans le cadre du théorème 1.2.5 ce qui assure l'existence d'au moins une solution u_ℓ pour le problème $\mathcal{P}_\ell$.

On introduit maintenant notre problème limite candidat $\mathcal{P}_\infty$ consistant à chercher $u_\infty \in W_0^{1,p}(\omega'')$ tel que

$$J_\infty(u_\infty) = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\omega'')} J_\infty(v), \tag{2.12}$$

avec

$$J_\infty(v) = \int_{\omega''} \left[F''(\nabla'' v(x'')) - f''(x'')v(x'')\right] dx''. \tag{2.13}$$

Il est aussi clair par le théorème 1.2.5 que le problème $\mathcal{P}_\infty$ admet au moins une solution u_∞.

Remarque 13

(i) *Il n'et pas nécessaire que le minimiseurs u_ℓ du problème $\mathcal{P}_\ell$ soit unique. Mais l'unicité du minimiseur u_∞ du problème $\mathcal{P}_\infty$ est nécessaire pour établir la convergence, elle est assurée soit par suposer la stricte convexité de F'' ou par supposer l'uniforme convexité de F''.*

Ici et dans la suite, on utilise le dispositif de notation suivant

$$\nabla' = (\partial_1, \ldots, \partial_r), \quad \nabla'' = (\partial_{r+1}, \ldots, \partial_n),$$

qu'on applique indifféremment aux fonctions définies sur Ω_ℓ ou sur ω''.

On veut étudier le comportement asymptotique de u_ℓ minimiseurs des $\mathcal{P}_\ell$ problème n dimensionnel lorsque ℓ tend vers $+\infty$ et le comparer avec un minimiseur u_∞ du problème $n-r$ dimensionnel $\mathcal{P}_\infty$. En fait, notre objectif est de montrer que le premier converge vers ce dernier dans un sens qui sera précisé plus tard (voir théorème 2.3.1).

2.2 Estimation préliminaire

Nous montrons d'abord quelques estimations a priori techniques sous formes de lemmes qui seront utilisés dans les preuves des résultats de convergences, dans ce chapitre et dans les chapitres qui suivent. La première estimation s'obtient immédiatement à partir de l'inégalité de Poincaré. voir [16] et [36]

Lemme 2.2.1 *Il existe une constante $c_1 = c_1(\omega'', p)$ indépendante de ℓ tel que pour tout $v \in W^{1,p}(\Omega_\ell)$ de trace nulle sur $\omega'_\ell \times \partial\omega''$, on a*

$$\|v\|_{L^p(\Omega_\ell)} \leq c_1 \|\nabla'' v\|_{L^p(\Omega_\ell;\mathbb{R}^{n-r})}. \tag{2.14}$$

Preuve. Soit $v \in W^{1,p}(\Omega_\ell, \Gamma'')$ avec $\Gamma'' = \omega'_\ell \times \partial\omega''$.

D'après le théorème de Fubini [14] on a

$$v(x', .),\ \nabla v(x', .) \in L^p(\omega'') \quad \text{pour p. p. } x' \in \omega'_\ell$$

ainsi $\nabla'' v(x', .) \in L^p(\omega'')$ pour p. p. $x' \in \omega'_\ell$
et donc

$$v(x', .) \in W^{1,p}(\omega'') \text{ pour p.p. } x' \in \omega'_\ell.$$

Il reste à vérifier que pour presque partout $x' \in \omega'_\ell$:

$$v(x', .) = 0 \text{ sur } \partial\omega''$$

or, $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}_\ell, \Gamma'')$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega_\ell, \Gamma'')$ alors, il existe une suite $(v_n)_n$ dans $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}_\ell, \Gamma'')$ tel que

$$v_n \to v \quad \text{dans } W^{1,p}(\Omega_\ell)$$

donc, pour p.p. $x' \in \omega'_\ell : v_n(x', .) \to v(x', .)$ dans $W^{1,p}(\omega)$. Par la formule de Green sur ω''

$$\int_{\omega''} v_n(x', t) \frac{\partial w}{\partial x_i}(t)\, dt = -\int_{\omega''} \frac{\partial v_n}{\partial x_i}(x', t) w(t)\, dt + \int_{\partial\omega''} v_n(x', \sigma) w(\sigma)(\nu e_i)(\sigma)\, d\sigma,$$

pour tout $w \in W^{1,p}(\omega'')$, pour p.p. $x' \in \omega_\ell$ et $r+1 \leq i \leq n$.

par un passage à la limite en déduit que pour p.p. $x' \in \omega_\ell$ on a $v(x',.) = 0$ sur $\partial\omega''$, on conclu alors que $v(x',.) \in W_0^{1,p}(\omega'')$, ω'' étant un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^{n-r}$ on peut appliquer le théorème de Poincaré,

$$\int_{\omega''} |v(x',t)|^p \, dt \leq c(\omega'',p) \int_{\omega''} |\nabla'' v(x',t)|^p \, dt$$

maintenant intégrant sur ω'_ℓ on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\ell} |v(x)|^p \, dx &\leq c(\omega'',p) \int_{\Omega_\ell} |\nabla'' v(x)|^p \, dx \\ &\leq c(\omega'',p) \int_{\Omega_\ell} |\nabla v(x)|^p \, dx \end{aligned}$$

d'où l'inégalité de Poincaré est vérifiée pour tout $v \in W^{1,p}(\Omega_\ell, \Gamma'')$ avec une constante indépendante de ℓ. □

Le lemme suivant nous donne une première estimation grossière sur u_ℓ.

Lemme 2.2.2 *Il existe une constante c_2 indépendante de ℓ, telle que*

$$\int_{\Omega_\ell} |\nabla u_\ell|^p \, dx \leq c_2 \ell^r. \tag{2.15}$$

Preuve. On prend $v = 0$ comme fonction test dans le problème (2.4). Il s'ensuit que

$$\int_{\Omega_\ell} F(\nabla u_\ell(x)) \, dx \leq \int_{\Omega_\ell} f''(x'') u_\ell(x) \, dx + A\ell^r,$$

où $A = F(0)\mathcal{L}^r(\omega')\mathcal{L}^{n-r}(\omega'')$ ne dépend pas de ℓ ($\mathcal{L}^d$ indique la mesure de Lebesgue d-dimensionnelle). Par l'inégalité de Hölder et l'hypothèse de coercivité (2.8), on déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\ell} |\nabla u_\ell(x)|^p \, dx &\leq \frac{1}{\lambda} \Big(\int_{\Omega_\ell} |f''(x'')|^{p'} \, dx \Big)^{1/p'} \Big(\int_{\Omega_\ell} |u_\ell(x)|^p \, dx \Big)^{1/p} + \frac{A}{\lambda} \ell^r \\ &\leq \frac{B}{\lambda} \ell^{r/p'} \|\nabla'' u_\ell\|_{L^p(\Omega_\ell;\mathbb{R}^{n-r})} + \frac{A}{\lambda} \ell^r, \end{aligned}$$

avec $B = c_1 \|f''\|_{L^{p'}(\omega'')} \mathcal{L}^r(\omega')^{1/p'}$, qui ne dépend pas de ℓ. Par conséquent, on obtient une estimation de la forme

$$\|\nabla u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_\ell;\mathbb{R}^n)} \leq C\ell^{r/p'} \|\nabla u_\ell\|_{L^p(\Omega_\ell;\mathbb{R}^n)} + D\ell^r, \tag{2.16}$$

où C et D sont des constantes qui ne dépendent pas de ℓ. En posant $X = \ell^{-r/p} \|\nabla u_\ell\|_{L^p}$. L'estimation (2.16) se traduit

$$X^p \leq CX + D,$$

Alors il existe une constante c_2 qui dépend uniquement de C et D tel que $X \leq c_2^{1/p}$, on obtient alors la première estimation sur u_ℓ souhaitée. □

On rappelle maintenant une estimation élémentaire similaire à ce qu'on peut trouver dans [32] par exemple, et qu'on a adapté à nos besoins :

Lemme 2.2.3 *Soit h une fonction non négative bornée définie sur l'intervalle $[\tau_0, \tau_1]$, $\tau_0 \geq 0$. On suppose que pour tout $\tau_0 \leq t < s \leq \tau_1$,*

$$h(t) \leq \theta h(s) + C(s-t)^{-\nu_1} + D(s-t)^{-\nu_2}, \tag{2.17}$$

C, D, ν_1, ν_2, et θ sont des constantes non négatives avec $0 \leq \theta < 1$. Alors, pour tout $\tau_0 \leq t < s \leq \tau_1$, on a

$$h(t) \leq c(C(s-t)^{-\nu_1} + D(s-t)^{-\nu_2}),$$

où c est une constante qui dépend uniquement de ν_1, ν_2 et θ.

Preuve. On considère l'assertion suivante :

> Pour toutes suites numériques non négatives $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall i \in \mathbb{N}, \quad a_i \leq \theta a_{i+1} + b_{i+1}$,alors on a par récurrence :
>
> $\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad a_0 \leq \theta^i a_i + \sum_{j=0}^{i-1} \theta^j b_{j+1}$.

En fait, il suffit d'écrire

$$\begin{array}{rcl} a_0 & \leq & \theta a_1 + b_1, \\ a_1 & \leq & \theta a_2 + b_2, \\ a_2 & \leq & \theta a_3 + b_3, \\ & \vdots & \\ a_{i-1} & \leq & \theta a_i + b_i, \end{array}$$

et les multiplier par 1, θ, θ^2 ..., et θ^{i-1} dans l'ordre puis les additionner, plusieurs termes s'éliminent et on obtient

$$a_0 \leq \theta^i a_i + \sum_{j=0}^{i-1} \theta^j b_{j+1},$$

Donc, on obtient pour

$$\begin{cases} a_i = h(t_i), & i \in \mathbb{N}; \\ b_{i+1} = C(t_{i+1}-t_i)^{-\nu_1} + D(t_{i+1}-t_i)^{-\nu_2}, & i \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

tels que pour t, s fixés, avec $\tau_0 \leq t < s \leq \tau_1$ la suite $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est définit par

$$\begin{cases} t_0 = t \\ t_{i+1} = t_i + (1-\tau)\tau^i(s-t), \end{cases}$$

pour un τ à choisir plus tard, on voit bien que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante dans $[\tau_0,\tau_1]$. De l'hypothèse (2.17) sur h et par itération on obtient

$$\begin{array}{rcl} h(t_0) & \leq & \theta h(t_1)+C(1-\tau)^{-\nu_1}(s-t)^{-\nu_1}+D(1-\tau)^{-\nu_2}(s-t)^{-\nu_2} \\ h(t_1) & \leq & \theta h(t_2)+C(1-\tau)^{-\nu_1}\tau^{-\nu_1}(s-t)^{-\nu_1}+D(1-\tau)^{-\nu_2}\tau^{-\nu_2}(s-t)^{-\nu_2} \\ h(t_2) & \leq & \theta h(t_3)+C(1-\tau)^{-\nu_1}\tau^{-2\nu_1}(s-t)^{-\nu_1}+D(1-\tau)^{-\nu_2}\tau^{-2\nu_2}(s-t)^{-\nu_2} \\ \vdots & & \\ h(t_{i-1}) & \leq & \theta h(t_i)+C(1-\tau)^{-\nu_1}\tau^{-(i-1)\nu_1}(s-t)^{-\nu_1}+D(1-\tau)^{-\nu_2}\tau^{-(i-1)\nu_2}(s-t)^{-\nu_2} \end{array}$$

En multipliant chaque inégalité par $1,\theta,\theta^2,\ldots,\theta^{i-1}$ respectivement puis, en faisant la somme cela conduit à l'estimation

$$h(t_0)\leq\theta^i h(t_i)+C(1-\tau)^{-\nu_1}(s-t)^{-\nu_1}\sum_{j=0}^{i-1}(\tau^{-\nu_1}\theta)^j+D(1-\tau)^{-\nu_2}(s-t)^{-\nu_2}\sum_{j=0}^{i-1}(\tau^{-V_2}\theta)^j$$

on choisit maintenant τ de tel sorte que $\tau^{-\nu_1}\theta<1$ et $\tau^{-\nu_2}\theta<1$ et passons à la limite quand $i\to+\infty$, puisque h est borné sur $[\tau_0,\tau_1]$ et $0<\theta<1$. On obtient

$$\begin{array}{rcl} h(t_0) & \leq & C\dfrac{(1-\tau)^{-\nu_1}}{1-\tau^{-\nu_1}\theta}(s-t)^{-\nu_1}+D\dfrac{(1-\tau)^{-\nu_2}}{1-\tau^{-\nu_2}\theta}(s-t)^{-\nu_2} \\ & \leq & c\left[C(s-t)^{-\nu_1}+D(s-t)^{-\nu_2}\right] \end{array}$$

donc le lemme est démontré, pour $c=\max\left\{\frac{(1-\tau)^{-\nu_1}}{1-\tau^{-\nu_1}\theta},\frac{(1-\tau)^{-\nu_2}}{1-\tau^{-\nu_2}\theta}\right\}=c(\nu_1,\nu_2,\theta)$. □

2.3 Le résultat principal, cas uniformément convexe

Dans cette section, nous montrerons le résultat de convergence dans le cas d'une densité d'énergie F'' uniformément convexe. Cette hypothèse nous assure d'une part l'unicité de u_∞ minimiseur de $\mathcal{P}_\infty$ et d'autre part la convergence elle même de u_ℓ minimiseurs de $\mathcal{P}_\ell$ vers u_∞, plus précisément, voici le résultat principal de ce chapitre

Théorème 2.3.1 *Soit $f''\in L^{p'}(\omega'')$ et soit $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction convexe satisfaisant (2.6), (2.7), (2.8) et (2.9) les hypothèses de croissance et de coercivité. Supposons de plus que F'' est uniformément convexe avec*

$$\left\{\begin{array}{l} \exists\beta>0,\ \forall t\in[0,1],\ \forall\xi,\eta\in\mathbb{R}^n: \\ F''(t\xi+(1-t)\eta)\leq\ tF''(\xi)+(1-t)F''(\eta) \\ \qquad\qquad -\beta t(1-t)\{t^{p-1}+(1-t)^{(p-1)}\}|\xi-\eta|^p \end{array}\right. \tag{2.18}$$

Alors pour tout $r < \frac{kp}{p-k}$ *et tout* $\ell_0 > 0$ *fixé,*

$$u_\ell \to u_\infty \quad \textit{dans } W^{1,p}(\Omega_{\ell_0}).$$

De plus

$$\|\nabla(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_{\ell_0};\mathbb{R}^{n-r})} \le C\ell^{r-\frac{kp}{p-k}}.$$

La démonstration de ce théorème se fait en quelques étapes :

- Estimer $\nabla(u_\ell - u_\infty)$ dans $L^p(\Omega_t)$, pour tout $0 < t < s \le \ell$,
- Estimer $\nabla(u_\ell - u_\infty)$ dans $L^p(\Omega_{\ell_0})$, pour tout $0 < \ell_0 < \ell$,
- Etablir la convergence,

On démontre la première étape à travers la proposition suivante où nous distinguons deux cas :

Proposition 2.3.2 *Sous les hypothèses du théorème2.3.1, soient* u_ℓ*,* u_∞ *les minimiseurs de (2.4), (2.12) respectivement. Il existe une constante* c_3 *indépendante de* ℓ *telle que*

Cas 1. *Si* $0 < k \le p/2$*, on a*

$$\|\nabla' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_t;\mathbb{R}^r)} + \|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_t;\mathbb{R}^{n-r})}$$
$$\le \frac{c_3}{(s-t)^p}\|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_s\setminus\Omega_t;\mathbb{R}^{n-r})} + \frac{c_3}{(s-t)^{kp/(p-k)}}\|\nabla'' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_s\setminus\Omega_t;\mathbb{R}^{n-r})}. \tag{2.19}$$

Cas 2. *Si* $p/2 < k < p$*, on a*

$$\|\nabla' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_t;\mathbb{R}^r)} + \|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_t;\mathbb{R}^{n-r})}$$
$$\le \frac{c_3}{(s-t)^{kp/(p-k)}}\Big\{\|\nabla'' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_s\setminus\Omega_t;\mathbb{R}^{n-r})} + \|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_s\setminus\Omega_t;\mathbb{R}^{n-r})}\Big\}. \tag{2.20}$$

Preuve de la proposition 2.3.2. On aura besoin des fonctions troncatures définis pour tout $0 < t < s \le \ell$ par

$$\rho_{s,t}(x') = \frac{1}{s-t}\ min\{(s - j(x'))_+, s-t\}. \tag{2.21}$$

Par la définition de la fonction jauge, on voit que

$$\begin{aligned}&\rho_{s,t} \equiv 0 \text{ sur } \omega'_\ell \setminus \omega'_s,\\ &\rho_{s,t} \equiv 1 \text{ sur } \omega'_t\\ &\text{et } 0 \le \rho_{s,t} \le 1\end{aligned}$$

par l'hypothèse de régularité sur ω', la fonction troncature $\rho_{s,t}$ est lipschitzienne et on a

$$\nabla'\rho_{s,t}(x') = -\frac{1}{s-t}\nabla' j(x')\mathbf{1}_{\omega'_s\setminus\omega'_t}(x'),$$

donc

$$|\nabla'\rho_{s,t}(x')| \leq \frac{K}{s-t}\mathbf{1}_{\omega'_s\setminus\omega'_t}(x'). \tag{2.22}$$

On choisit un nombre $0<\alpha<1$, puis on prend

$$v_1(x) = (1-\alpha\rho_{s,t}(x'))u_\ell(x) + \alpha\rho_{s,t}(x')u_\infty(x''), \tag{2.23}$$

et

$$v_2(x) = (1-\alpha\rho_{s,t}(x'))u_\infty(x') + \alpha\rho_{s,t}(x')u_\ell(x). \tag{2.24}$$

Clairement, v_1 appartient à $W_0^{1,p}(\Omega_\ell)$ elle est donc admissible comme fonction test pour le problème $\mathcal{P}_\ell$ dans (2.12), donc

$$\int_{\Omega_\ell}[F(\nabla u_\ell(x)) - f''(x'')u_\ell(x)]\,dx \\ \leq \int_{\Omega_\ell}[F(\nabla v_1(x)) - f''(x'')v_1(x)]\,dx. \tag{2.25}$$

Puis, on note que, en raison de l'injection $W_0^{1,p}(\Omega_\ell) \hookrightarrow L^p(\omega'_\ell; W_0^{1,p}(\omega''))$, $v_2(x',.)$ est aussi une fonction test admissible pour le problème $\mathcal{P}_\infty$ pour presque tout $x' \in \omega'_\ell$, donc

$$\int_{\omega''}[F''(\nabla'' u_\infty(x'')) - f''(x'')u_\infty(x'')]\,dx'' \\ \leq \int_{\omega''}[F''(\nabla'' v_2(x',x'')) - f''(x'')v_2(x',x'')]\,dx''. \tag{2.26}$$

Intégrant l'estimation (2.26) sur ω'_ℓ, on obtient

$$\int_{\Omega_\ell}[F''(\nabla'' u_\infty(x'')) - f''(x'')u_\infty(x'')]\,dx \\ \leq \int_{\Omega_\ell}[F''(\nabla'' v_2(x)) - f''(x'')v_2(x)]\,dx. \tag{2.27}$$

On additionne (2.25) et (2.27), en notant que tous les termes comportant f'' se neutralisent puisque $v_1+v_2 = u_\ell + u_\infty$. Par conséquent,

$$\int_{\Omega_\ell}[F(\nabla u_\ell(x)) + F''(\nabla'' u_\infty(x''))]\,dx \\ \leq \int_{\Omega_\ell}[F(\nabla v_1(x)) + F''(\nabla'' v_2(x))]\,dx. \tag{2.28}$$

Nous observons que sur $\Omega_\ell \setminus \Omega_s$, $v_1 = u_\ell$ et $v_2 = u_\infty$ donc (2.28) se réduit à

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} \left[F(\nabla u_\ell(x)) + F''(\nabla'' u_\infty(x''))\right] dx \leq \int_{\Omega_s \setminus \Omega_t} \left[F(\nabla v_1(x)) + F''(\nabla'' v_2(x))\right] dx \\ + \int_{\Omega_t} \left[F(\nabla v_1(x)) + F''(\nabla'' v_2(x))\right] dx. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Le membre gauche de (2.29) peut être réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_s} \left[F(\nabla u_\ell(x)) + F''(\nabla'' u_\infty(x''))\right] dx \\ &\qquad = \int_{\Omega_s} \left[G(\nabla u_\ell(x)) + F''(\nabla'' u_\ell(x)) + F''(\nabla'' u_\infty(x''))\right] dx. \end{aligned} \tag{2.30}$$

On pose

$$I_1 = \int_{\Omega_s \setminus \Omega_t} \left[F(\nabla v_1(x)) + F''(\nabla'' v_2(x))\right] dx$$

et

$$I_2 = \int_{\Omega_t} \left[F(\nabla v_1(x)) + F''(\nabla'' v_2(x))\right] dx$$

l'intégrale dans le membre-droit de (2.29). Pour estimer I_1, on utilisera la convexité de F'', puisque les gradients verticaux ∇'' de v_1 et v_2 sont des combinaisons des gradients verticaux de u_ℓ et u_∞,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega_s \setminus \Omega_t} \left[G(\nabla v_1(x)) + F''(\nabla'' v_1(x)) + F''(\nabla'' v_2(x))\right] dx \\ &\leq \int_{\Omega_s \setminus \Omega_t} \left[G(\nabla v_1(x)) + F''(\nabla'' u_\ell(x)) + F''(\nabla'' u_\infty(x))\right] dx. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Pour estimer I_2, nous observons que sur Ω_t,

$$v_1 = (1-\alpha)u_\ell + \alpha u_\infty$$

et

$$v_2 = \alpha u_\ell + (1-\alpha)u_\infty$$

Par conséquent, du fait de la convexité de F et de la convexité uniforme (2.18) de F'' pour un certain $\beta > 0$,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{\Omega_t} \big[(1-\alpha)F(\nabla u_\ell) + \alpha F(\nabla u_\infty) + (1-\alpha)F''(\nabla'' u_\infty) + \alpha F''(\nabla'' u_\ell) \\ &\qquad\qquad - \beta |\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^p\big] dx \\ &= \int_{\Omega_t} \left[(1-\alpha)G(\nabla u_\ell) + F''(\nabla'' u_\ell) + F''(\nabla'' u_\infty) - \beta |\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^p\right] dx, \end{aligned} \tag{2.32}$$

Récapitulant (2.29), (2.31), (2.32) et (2.30), on obtient

$$\int_{\Omega_s\setminus\Omega_t} G(\nabla u_\ell)\,dx + \int_{\Omega_t}\left[\alpha G(\nabla u_\ell) + \beta|\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^p\right]dx \\ \leq \int_{\Omega_s\setminus\Omega_t} G(\nabla v_1(x))\,dx, \tag{2.33}$$

Par l'hypothèse de coercivité (2.9) peut être remplacé par :

$$a\int_{\Omega_t}\left[(|\nabla' u_\ell|^p + |\nabla'' u_\ell|^{p-k}|\nabla' u_\ell|^k) + |\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^p\right]dx \\ \leq \int_{\Omega_s\setminus\Omega_t} G(\nabla v_1(x))\,dx, \tag{2.34}$$

où $a > 0$ désignent des constantes qui ne dépendent pas de ℓ, mais qui peuvent varier d'une ligne à une autre.

Pour estimer le membre droit de (2.34), d'après la définition de v_1 et v_2 on a

$$\begin{cases} \nabla' v_1 = (1-\alpha\rho_{s,t})\nabla' u_\ell + \alpha\nabla'\rho_{s,t}(u_\infty - u_\ell), \\ \nabla'' v_1 = (1-\alpha\rho_{s,t})\nabla'' u_\ell + \alpha\rho_{s,t}\nabla'' u_\infty. \end{cases} \tag{2.35}$$

Donc en utilisant (2.35) et la définition (2.21) de $\rho_{s,t}$, on obtient pour tout exposant q :

$$\begin{cases} |\nabla' v_1|^q \leq 2^{q-1}|\nabla' u_\ell|^q + 2^{q-1}\dfrac{K^q}{(s-t)^q}|u_\infty - u_\ell|^q, \\ |\nabla'' v_1|^q \leq 2^{q-1}|\nabla'' u_\ell|^q + 2^{q-1}|\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^q. \end{cases} \tag{2.36}$$

On choisit dans la première ligne de (2.36) $q = p$ puis $q = k$ et $q = p-k$ dans la seconde ligne. Grace à l'hypothèse de croissance (2.9), on aura

$$\begin{aligned} G(\nabla v_1) \leq A\Big(&|\nabla' u_\ell|^p + \frac{1}{(s-t)^p}|u_\infty - u_\ell|^p + \\ &+ (|\nabla'' u_\ell|^{p-k} + |\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^{p-k})\Big(|\nabla' u_\ell|^k + \frac{1}{(s-t)^k}|u_\infty - u_\ell|^k\Big)\Big) \\ \leq A\Big(&|\nabla' u_\ell|^p + \frac{1}{(s-t)^p}|u_\infty - u_\ell|^p + |\nabla'' u_\ell|^{p-k}|\nabla' u_\ell|^k + \\ &+ |\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^{p-k}|\nabla' u_\ell|^k + |\nabla'' u_\ell|^{p-k}\frac{1}{(s-t)^k}|u_\infty - u_\ell|^k + |\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^{p-k}\frac{1}{(s-t)^k}|u_\infty - u_\ell|^k\Big) \end{aligned} \tag{2.37}$$

où A est une constante générique qui ne dépend que des autres constantes impliquées. Pour $k \geq 1$, afin qu'on puisse arriver à notre résultat, on doit donc estimer les trois derniers termes dans (2.37). Pour cela, on utilise l'inégalité de Young pour $a, b \geq 0$ sous la forme suivante

$$a^k b^{p-k} \leq \frac{k}{p}a^p + \frac{p-k}{p}b^p,$$

Sachant que $p > k$ (d'après (2.9)), on obtient

$$\begin{aligned} G(\nabla v_1) \leq A\bigg(& |\nabla' u_\ell|^p + \frac{1}{(s-t)^p}|u_\infty - u_\ell|^p \\ & + |\nabla'' u_\ell|^{p-k}|\nabla' u_\ell|^k + |u_\infty - u_\ell|^p + \frac{1}{(s-t)^{kp/(p-k)}}|\nabla'' u_\ell|^p + |\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^p\bigg), \end{aligned} \tag{2.38}$$

On intègre cette inégalité sur $\Omega_s \setminus \Omega_t$ et on utilise l'inégalité de Poincaré (lemme 2.2.1) et on obtient

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_s \setminus \Omega_t} G(\nabla v_1)\, dx \leq \\ \displaystyle A\int_{\Omega_s \setminus \Omega_t} (|\nabla' u_\ell|^p + |\nabla'' u_\ell|^{p-k}|\nabla' u_\ell|^k + |\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^p)\, dx + \\ \displaystyle + \frac{A}{(s-t)^p}\|\nabla''(u_\infty - u_\ell)\|^p_{L^p(\Omega_s \setminus \Omega_t)} + \\ \displaystyle + \frac{A}{(s-t)^{kp/(p-k)}}\|\nabla'' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_s \setminus \Omega_t)}, \end{cases} \tag{2.39}$$

La démonstration jusqu'ici est la même pour les deux cas $0 \leq k \leq p/2$ et $p/2 < k \leq p$.

Maintenant on distingue les deux cas :

Cas 1. $0 \leq k \leq p/2$,
posons pour cela

$$h(t) = \int_{\Omega_t} (|\nabla' u_\ell|^p + |\nabla'' u_\ell|^{p-k}|\nabla' u_\ell|^k + |\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^p)\, dx. \tag{2.40}$$

L'inégalité (2.34) et (2.39), en utilisant (2.40) peuvent être réécrite sous la forme

$$\begin{cases} \displaystyle h(t) \leq \theta h(s) + \frac{1}{(s-t)^p}\|\nabla''(u_\infty - u_\ell)\|^p_{L^p(\Omega_s \setminus \Omega_t)} + \\ \displaystyle + \frac{1}{(s-t)^{kp/(p-k)}}\|\nabla'' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_s \setminus \Omega_t)}, \end{cases} \tag{2.41}$$

Soit maintenant $t \leq t_1 < s_1 \leq s$. En utilisant le lemme 2.2.3, avec

$$\begin{aligned} &\theta = \tfrac{A}{A+a} \in]0,1[, \\ &\nu_1 = p, \\ &C = \|\nabla''(u_\infty - u_\ell)\|^p_{L^p(\Omega_s \setminus \Omega_t)}, \\ &\nu_2 = kp/(p-k), \\ &D = 1\|\nabla'' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_s \setminus \Omega_t)}, \end{aligned}$$

ceci permet de conclure que

$$h(t_1) \leq c(C(s_1 - t_1)^{-\nu_1} + D(s_1 - t_1)^{-\nu_2}). \tag{2.42}$$

Le résultat obtenu dans ce cas vient du fait que $t_1 \to t$ et $s_1 \to s$ car la constante c ne dépend que de ν_1, ν_2 et θ, et de la continuité de h.
Cas 2. Si $p/2 < k < p$,

dans l'estimation (2.39) on utilise à nouveau l'inégalité de Young mais sous la forme

$$a^w b^{p-w} \leq \frac{w}{p} a^p + \frac{p-w}{p} b^p$$

avec $w = \frac{p(2k-p)}{k}$ pour déduire que

$$\frac{1}{(s-t)^p} = 1^w \left(\frac{1}{(s-t)^{p/(p-w)}} \right)^{p-w} \leq \frac{p-k}{k} + \frac{2k-p}{k} \frac{1}{(s-t)^{kp/(p-k)}},$$

afin qu'on puisse écrire

$$\begin{cases} h(t) \leq \theta h(s) + \dfrac{1}{(s-t)^{kp/(p-k)}} \|\nabla''(u_\infty - u_\ell)\|^p_{L^p(\Omega_s \setminus \Omega_t)} + \\ \\ + \dfrac{1}{(s-t)^{kp/(p-k)}} \|\nabla'' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_s \setminus \Omega_t)}, \end{cases} \tag{2.43}$$

avec le même choix de la fonction h, mais avec une autre valeur pour θ, que on n'écrit pas ici. On conclut comme précédemment par le lemme 2.2.3 avec la constante $C = 0$ cette fois çi. □

Une conséquence immédiate de la Proposition 2.3.2 :

Corollaire 2.3.3 *Sous les hypothèses du théorème 2.3.1, soient u_ℓ, u_∞ les minimiseurs respectifs de (2.4), (2.12). Il existe une constante c_3 indépendante de ℓ telle que, pour tout $\ell \geq \ell_0$, on a dans le cas $0 < k \leq p/2$:*

$$\begin{aligned} &\|\nabla' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_{\ell_0};\mathbb{R}^r)} + \|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_{\ell_0};\mathbb{R}^{n-r})} \\ &\leq \frac{c_3}{(\ell-\ell_0)^p} \|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_\ell;\mathbb{R}^{n-r})} + \frac{c_3}{(\ell-\ell_0)^{kp/(p-k)}} \|\nabla'' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_\ell;\mathbb{R}^{n-r})}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Et dans le cas $p/2 < k < p$:

$$\begin{aligned} &\|\nabla' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_t;\mathbb{R}^r)} + \|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_t;\mathbb{R}^{n-r})} \\ &\quad \leq \frac{c_3}{(\ell-\ell_0)^{kp/(p-k)}} \left\{ \|\nabla'' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_\ell;\mathbb{R}^{n-r})} + \|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_\ell;\mathbb{R}^{n-r})} \right\}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Preuve. En effet, il suffit de prendre $s = \ell$, $t = \ell_0$ et de remarquer que $\Omega_\ell \setminus \Omega_{\ell_0} \subset \Omega_\ell$.
□

Maintenant on est en mesure de démontrer notre théorème principal 2.3.1.

Preuve du Théorème 2.3.1 La démonstration est une conséquence directe du Corollaire 2.3.3 et de l'estimation grossière de u_ℓ dans le Lemme 2.2.2. Observons d'abord que dans le Corollaire 2.3.3 les deux cas se réduisent à un seul. En effet, si $0 < k \leq p/2$ alors $\frac{kp}{p-k} \leq p$ donc l'estimation dans ce cas se réécrit :

$$\|\nabla' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_{\ell_0};\mathbb{R}^r)} + \|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_{\ell_0};\mathbb{R}^{n-r})}$$

$$\leq \frac{c_3}{(\ell-\ell_0)^p}\|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_\ell;\mathbb{R}^{n-r})} + \frac{c_3}{(\ell-\ell_0)^{kp/(p-k)}}\|\nabla'' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_\ell;\mathbb{R}^{n-r})}$$

$$\leq \frac{c_3}{(\ell-\ell_0)^{kp/(p-k)}}\left\{\|\nabla'' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_\ell;\mathbb{R}^{n-r})} + \|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_\ell;\mathbb{R}^{n-r})}\right\}, \quad (2.46)$$

pour tout $\ell_0 > 0$, et elle n'est autre que l'estimation obtenu dans le cas $p/2 < k < p$. Maintenant grâce au Lemme 2.2.2 il existe une constante c_2 indépendante de ℓ, tel que

$$\int_{\Omega_\ell} |\nabla u_\ell|^p \, dx \leq c_2 \ell^r.$$

ce qui nous donne bien avec l'estimation (2.46)

$$\|\nabla(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_{\ell_0};\mathbb{R}^{n-r})} \leq C\ell^{r-\frac{kp}{p-k}},$$

où la constante C dépend de c_2, c_3, et $||\nabla'' u_\infty||_{L^p(\omega'')}$, et on obtient ainsi la convergence désirée pour tout $r < \frac{kp}{p-k}$. $\square$

Chapitre 3

Comportement asymptotique, cas strictement convexe

Dans ce chapitre nous allons étudier la convergence des minimiseurs des problèmes suivants

$$(\mathcal{P}_\ell) \quad \inf\left\{\int_\Omega F(\nabla v(x) - f''(x'')v(x))\,dx, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega_\ell)\right\}.$$

On traite le cas des énergies F'' strictement convexe. Plus précisément, nôtre but ici est d'affaiblir par rapport au chapitre précédent la condition de convexité sur F''. Ce qui nous oblige à faire appel à d'autres outils pour y arriver.

Nous allons adapter les mêmes notations et les mêmes hypothèses du chapitre 2 introduites dans la section 2.1 position du problème.

3.1 Estimation pour $\nabla' u_\ell$

Nous commençons par énoncer le théorème principal du chapitre.

Théorème 3.1.1 (principal) *Soit $f'' \in L^{p'}(\omega'')$ et soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe satisfaisant les hypothèses de croissance et de coercivité (2.6), (2.7), (2.8) et (2.10), supposons de plus que F'' est strictement convexe.*

Alors pour tout $r < p$ et tout $\ell_0 > 0$ fixé,

$$u_\ell \to u_\infty \text{ dans } W^{1,p}(\Omega_{\ell_0}).$$

Pour démontrer notre théorème de convergence, on va suivre au début les mêmes démarches que dans le chapitre précédent. Voici alors les analogues de la proposition 2.3.2 et du corollaire 2.3.3 adaptés à ce nouveau cas.

Proposition 3.1.2 *Sous les mêmes hypothèses du théorème3.1.1, soient u_ℓ, u_∞ les minimisers de (2.4), (2.12) respectivement. Il existe une constante c_5 indépendante de ℓ telle que, pour tout $0 < t < s \leq \ell$, on a*

$$\|\nabla' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_t;\mathbb{R}^r)} \leq \frac{c_5}{(s-t)^p}\|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_s\setminus\Omega_t;\mathbb{R}^{n-r})}. \tag{3.1}$$

Remarque 14

(i) *En comparant cette proposition avec la Proposition 2.3.2 du chapitre 2, on remarque que dans le membre gauche de l'estimation* (3.1)*, l'absence du terme de gradient vertical de $u_\ell - u_\infty$. Cela est du à l'absence de l'uniforme convexité de F''.*

(ii) *Dans le membre de droite il y a une différence de puissance mais cela s'explique puisque, les hypothèses (2.9) et (2.10) de croissance et de coercivité sur G sont également différentes.*

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de la proposition 3.1.2.

Corollaire 3.1.3 (estimation pour $\nabla'\mathbf{u}_\ell$) *Sous les hypothèses du théorème 3.1.1, soient u_ℓ, u_∞ les minimiseurs de (2.4), (2.12) respectivement. Il existe une constante c_5 indépendante de ℓ telle que, pour tout $\ell \geq \ell_0$, on a*

$$\|\nabla' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_{\ell_0};\mathbb{R}^r)} \leq \frac{c_5}{(\ell-\ell_0)^p}\|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_\ell;\mathbb{R}^{n-r})}. \tag{3.2}$$

Remarque 15 *Contrairement aux résultats obtenus dans le chapitre précédent, le corollaire 3.1.3 est insuffisant pour déduire la convergence des minimiseurs u_ℓ. Il nous dit seulement que si $r < p$ alors $\nabla' u_\ell \to 0$ dans $L^p(\Omega_{\ell_0})$. Par suite, la démonstration du théorème principal se poursuit autrement.*

3.2 Convergence faible

On démontre dans cette section une estimation similaire à celle obtenue dans le Lemme 2.2.2. Rappelons que u_ℓ est un minimiser sur Ω_ℓ, tandis que l'estimation suivante est sur Ω_{ℓ_0}. (Voir [17] pour un argument très similaire).

Lemme 3.2.1 *Il existe des constantes $\bar{\ell}$ et c_4, indépendantes de ℓ, tels que pour tout $\bar{\ell} \leq \ell_0 \leq \ell$,*

$$\int_{\Omega_{\ell_0}} |\nabla u_\ell|^p \, dx \leq c_4 \ell_0^r. \tag{3.3}$$

Preuve. Soit $1 \leq t \leq \ell - 1$, posons $\rho_t = \rho_{t+1,t}$. On prend

$$v_{t,\ell} = (1-\rho_t)u_\ell = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Omega_t \\ u_\ell & \text{hors } \Omega_{t+1} \end{cases}$$

comme fonction test pour le problème (2.4), on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\ell} F(\nabla u_\ell)\,dx &\leq \int_{\Omega_\ell} (F(\nabla v_{t,\ell}) - f''(v_{t,\ell} - u_\ell))\,dx \\ &= \int_{\Omega_t} F(0)\,dx + \int_{\Omega_t} f'' u_\ell\,dx + \int_{\Omega_{t+1}\setminus\Omega_t} [F(\nabla v_{t,\ell}) + f''\rho_t u_\ell)]\,dx \\ &\quad + \int_{\Omega_\ell\setminus\Omega_{t+1}} F(\nabla u_\ell)\,dx.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\int_{\Omega_{t+1}} F(\nabla u_\ell)\,dx \leq At^r + \int_{\Omega_{t+1}} \nu_t f'' u_\ell\,dx + \int_{\Omega_{t+1}\setminus\Omega_t} F(\nabla v_{t,\ell})\,dx, \tag{3.4}$$

où $A = F(0)\mathcal{L}^r(\omega')\mathcal{L}^{n-r}(\omega'')$ et $\nu_t = \mathbf{1}_{\Omega_t} + \rho_t \mathbf{1}_{\Omega_{t+1}\setminus\Omega_t}$.

Par l'hypothèse (2.8), de croissance et de coercivité imposé sur F, on déduit que

$$\lambda \int_{\Omega_{t+1}} |\nabla u_\ell|^p\,dx \leq Bt^r + \int_{\Omega_{t+1}} |f'' u_\ell|\,dx + \Lambda \int_{\Omega_{t+1}\setminus\Omega_t} |\nabla v_{t,\ell}|^p\,dx, \tag{3.5}$$

pour une certaine constante B, puisque $0 \leq \nu_t \leq 1$.
On va estimer maintenant chaque terme du second membre de (3.5).
Dans $\Omega_{t+1}\setminus\Omega_t$, on a

$$|\nabla v_{t,\ell}|^p = |(1-\rho_t)\nabla u_\ell - u_\ell \nabla\rho_t|^p \leq 2^{p-1}(|\nabla u_\ell|^p + K^p|u_\ell|^p). \tag{3.6}$$

On aura donc

$$\int_{\Omega_{t+1}\setminus\Omega_t} |\nabla v_{t,\ell}|^p\,dx \leq 2^{p-1}\int_{\Omega_{t+1}\setminus\Omega_t} (|\nabla u_\ell|^p + K^p|u_\ell|^p). \tag{3.7}$$

Clairement, l'estimation (2.14) dans le lemme 2.2.1(Inégalité de Poincaré) reste vraie sur $\Omega_{t+1}\setminus\Omega_t$ donc,

$$\int_{\Omega_{t+1}\setminus\Omega_t} |u_\ell|^p\,dx \leq c_1^p \int_{\Omega_{t+1}\setminus\Omega_t} |\nabla'' u_\ell|^p\,dx \leq c_1^p \int_{\Omega_{t+1}\setminus\Omega_t} |\nabla u_\ell|^p\,dx,$$

d'où l'estimation du premier terme de (3.5)

$$\int_{\Omega_{t+1}\setminus\Omega_t} |\nabla v_{t,\ell}|^p\,dx \leq 2^{p-1}(1 + c_1^p K^p)\int_{\Omega_{t+1}\setminus\Omega_t} |\nabla u_\ell|^p\,dx. \tag{3.8}$$

Par ailleurs, pour estimer le second terme dans (3.5) on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{t+1}} |f'' u_\ell|\,dx &\leq \frac{\varepsilon}{p}\int_{\Omega_{t+1}} |u_\ell|^p\,dx + \frac{(t+1)^r}{\varepsilon^{p'/p}p'}\mathcal{L}^r(\omega')\|f''\|^{p'}_{L^{p'}(\omega'')} \\ &\leq \frac{\varepsilon c_1^p}{p}\int_{\Omega_{t+1}} |\nabla u_\ell|^p\,dx + \frac{C}{\varepsilon^{p'/p}}t^r, \end{aligned}\tag{3.9}$$

où $\varepsilon > 0$ est à choisir plus tard.

Afin d'utiliser le lemme 2.2.3, posons

$$h(t) = \int_{\Omega_t} |\nabla u_\ell|^p \, dx.$$

de (3.5), (3.8) et (3.9), on obtient

$$\lambda' h(t+1) \leq E\big(h(t+1) - h(t)\big) + Dt^r, \tag{3.10}$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda - \tfrac{\varepsilon c_1^p}{p}, \\ D &= B + \tfrac{C}{\varepsilon^{p'/p}}, \\ E &= 2^{p-1}\Lambda(1 + c_1^p K^p). \end{aligned}$$

Maintenant, on choisit ε de sorte que $\lambda' > 0$. L'inégalité (3.10) peut être réécrite

$$h(t) \leq \theta h(t+1) + Ht^r, \tag{3.11}$$

$$\text{où } \theta = 1 - \frac{\lambda'}{E} \in]0,1[\text{ et } H = \frac{D}{E}$$

ne dépendent ni de t ni de ℓ. Par itération de l'inégalité (3.11), on voit que pour $n = \lfloor \ell - t \rfloor$, on a

$$h(t) \leq \theta^n h(t+n) + H \sum_{m=0}^{n-1} (t+m)^r \theta^m. \tag{3.12}$$

On pose maintenant $t = \ell_0$. On a par le lemme 2.2.2

$$h(\ell_0 + \lfloor \ell - \ell_0 \rfloor) \leq h(\ell) \leq c_2 \ell^r.$$

Par conséquent,

$$\theta^{\lfloor \ell - \ell_0 \rfloor} h(t + \lfloor \ell - \ell_0 \rfloor) \leq c_2 \theta^{\lfloor \ell - \ell_0 \rfloor} \ell^r \leq c_2 \theta^{\ell - \ell_0 - 1} \ell^r. \tag{3.13}$$

Maintenant, pour $\ell_0 \geq -\frac{r}{\ln\theta}$, la fonction dans le membre de droite de (3.13) est décroissante, son maximum est atteint en $\ell = \ell_0$. Donc,

$$\theta^{\lfloor \ell - \ell_0 \rfloor} h(t + \lfloor \ell - \ell_0 \rfloor) \leq \frac{c_2}{\theta} \ell_0^r,$$

pour $\ell \geq \ell_0 \geq -\frac{r}{\ln\theta}$.

De plus, pour $\ell_0 \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\lfloor \ell - \ell_0 \rfloor - 1} (\ell_0 + m)^r \theta^m &= \ell_0^r \sum_{m=0}^{\lfloor \ell - \ell_0 \rfloor - 1} \Big(1 + \frac{m}{\ell_0}\Big)^r \theta^m \\ &\leq \ell_0^r \sum_{m=0}^{\lfloor \ell - \ell_0 \rfloor - 1} (1+m)^r \theta^m \leq \frac{\sum_{m=1}^{+\infty} m^r \theta^m}{\theta} \ell_0^r, \end{aligned}$$

La démonstration du lemme 3.2.1 s'achève en choisissant $\bar{\ell} = \max(1, -\frac{r}{\ln\theta})$. $\square$

Le théorème suivant nous donne la convergence faible des minimiseurs u_ℓ. Pour cela, il suffit d'utiliser le Lemme 3.2.1. Alors on a, sans aucune restriction sur r par rapport à p le théorème suivant

Théorème 3.2.2 (convergence faible) *Il existe une sous-suite $\ell \to +\infty$ et une fonction $u^* \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega_\infty)$ telles que, pour tout ℓ_0,*

$$u_{\ell|\Omega_{\ell_0}} \rightharpoonup u^*_{|\Omega_{\ell_0}} \text{ faiblement dans } W^{1,p}(\Omega_{\ell_0}). \tag{3.14}$$

De plus, $u^* = 0$ sur $\partial\Omega_\infty$.

Remarque 16

(i) *On note que la convergence faible ci-dessus implique que $u_\ell \rightharpoonup u^*$ faiblement dans $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega_\infty)$.*

(ii) *On omettra parfois la notation de restriction dans la suite lorsque cela est inutile.*

Preuve. par les estimations (2.14) et (3.3), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_ℓ est bornée dans $W^{1,p}(\Omega_n)$. Utilisant le procédé diagonal d'extraction, nous construisons une suite ℓ_n telle que pour tout m, $u_{\ell_n|\Omega_m} \rightharpoonup u^*_m$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega_m)$, avec $u_m = 0$ sur $\omega'_m \times \partial\omega''$. Maintenant, puisque $\Omega_m \subset \Omega_{m'}$ dès que $m \leq m'$, il suit que $u^*_m = u^*_{m'|\Omega_m}$, de sorte que on a construit une seule fonction limite u^* dans la classe souhaitée. Par ailleurs, pour tout ℓ_0, si on choisit un entier $m \geq \ell_0$, on voit qu'on à démontré la convergence (3.14). $\square$

3.3 Identification de la limite

Dans la suite, nous considérerons toujours une sous-suite faiblement convergente u_ℓ dans le sens du Théorème 3.2.2.

Dans le but d'identifier la limite, on montre d'abord que le comportement asymptotique de u_ℓ est indépendant de la dimension allongée si r est assez petit.

Théorème 3.3.1 (limite indépendante de x′) *Supposons que $r < p$. Alors on a $\nabla' u^* = 0$ et u^* peut être identifié à une fonction de la variable x'' seulement, encore noté u^*, qui appartient à $W^{1,p}_0(\omega'')$.*

Preuve. Par les estimations (2.15), (3.2) et l'inégalité triangulaire, on obtient que

$$\|\nabla' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_{\ell_0};\mathbb{R}^r)} \leq \frac{c_5 \ell^r}{(\ell - \ell_0)^p} \to 0 \tag{3.15}$$

quand $\ell \to +\infty$ avec ℓ_0 fixé.
En effet, $\nabla' u_\ell \rightharpoonup \nabla' u^*$ faiblement dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega_\infty)$, et on voit que $\nabla' u^* = 0$, donc le théorème est démontré. $\square$

Afin d'identifier la fonction limite, on aura besoin d'une autre estimation.

Lemme 3.3.2 *Il existe une constante c_6 telle que pour tout $t \leq s$,*

$$\limsup_{\ell \to +\infty} \int_{\Omega_s \setminus \Omega_t} |\nabla u_\ell|^p \, dx \leq c_5(s^r - t^r). \tag{3.16}$$

Preuve. On peut supposer que $t > 0$, puisque le cas $t = 0$ est déjà couvert par le Lemme 3.2.1. On utilise ici la technique "De Giorgi's slicing argment". Soit n un entier suffisamment grand afin que

$$0 \leq t - \frac{1}{n} < s + \frac{1}{n} \leq \ell.$$

Pour tout entier m, $1 \leq m \leq n$, on considère la fonction de troncature

$$\chi_{m,n}(x') = \rho_{s+\frac{m}{n^2}, s+\frac{m-1}{n^2}}(x')\Big(1 - \rho_{t-\frac{m-1}{n^2}, t-\frac{m}{n^2}}(x')\Big).$$

Cette fonction de troncature prend ses valeurs dans $[0,1]$. Appelons $S_{m,n}$ les tranches où $0 < \chi_{m,n} < 1$ alors on a

$$\begin{cases} \chi_{m,n}(x') = 0 & \text{si } j(x') \geq s + \frac{m}{n^2} \text{ ou } j(x') \leq t - \frac{m}{n^2}; \\ \chi_{m,n}(x') = 1 & \text{si } t - \frac{m-1}{n^2} \leq j(x') \leq s + \frac{m-1}{n^2}; \\ 0 < \chi_{m,n}(x') < 1 & \text{si } x' \in S_{m,n}; \\ |\nabla \chi_{m,n}| \leq K n^2. \end{cases}$$

On observe que les tranches $S_{m,n}$ vérifient

$$\bigcup_{m=1}^{n} \overline{S_{m,n}} = \overline{\Omega_{s+\frac{1}{n}} \setminus \Omega_s} \bigcup \overline{\Omega_t \setminus \Omega_{t-\frac{1}{n}}} \subset \Omega_{s+1},$$

et que $S_{m,n} \cap S_{m',n} = \emptyset$ quand $m \neq m'$.

Considérons la fonction test $v_{\ell,m,n} = (1 - \chi_{m,n})u_\ell + \chi_{m,n}u^*$. Le problème de minimisation $\mathcal{P}_\ell$ donne l'estimation

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\ell} F(\nabla u_\ell)\, dx &\leq \int_{\Omega_\ell} F(\nabla v_{\ell,m,n})\, dx - \int_{\Omega_\ell} f'' \chi_{m,n}(u^* - u_\ell)\, dx \\ &= \int_{\Omega_\ell} F(\nabla v_{\ell,m,n})\, dx - \int_{\Omega_{s+1}} f'' \chi_{m,n}(u^* - u_\ell)\, dx. \end{aligned}$$

Tenant compte de la forme spécifique de la fonction troncature, cela implique que.

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_s\setminus\Omega_t} F(\nabla u_\ell)\,dx &\leq \int_{\Omega_{s+\frac{m}{n^2}}\setminus\Omega_{t-\frac{m}{n^2}}} F(\nabla u_\ell)\,dx\\ &\leq \int_{\Omega_{s+\frac{m}{n^2}}\setminus\Omega_{t-\frac{m}{n^2}}} F(\nabla v_{\ell,m,n})\,dx - \int_{\Omega_{s+1}} f''\chi_{m,n}(u^*-u_\ell)\,dx\\ &\leq \int_{S_{m,n}} F(\nabla v_{\ell,m,n})\,dx + \int_{\Omega_{s+\frac{m-1}{n^2}}\setminus\Omega_{t-\frac{m-1}{n^2}}} F(\nabla u^*)\,dx\\ &\qquad - \int_{\Omega_{s+1}} f''\chi_{m,n}(u^*-u_\ell)\,dx. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Estimons donc chaque terme dans le membre de droit séparément. Tout d'abord on a

$$\Big|\int_{\Omega_{s+1}} f''\chi_{m,n}(u^*-u_\ell)\,dx\Big| \leq A^{1/p'}(s+1)^{r/p'}\|f''\|_{L^{p'}(\omega'')}\|u^*-u_\ell\|_{L^p(\Omega_{s+1})}, \tag{3.18}$$

où $A=\mathcal{L}^r(\omega')$. Puis, on voit que

$$\Big|\int_{\Omega_{s+\frac{m-1}{n^2}}\setminus\Omega_{t-\frac{m-1}{n^2}}} F(\nabla u^*)\,dx\Big| \leq A\Big(\Big(s+\frac{1}{n}\Big)^r-\Big(t-\frac{1}{n}\Big)^r\Big)\|F''(\nabla'' u^*)\|_{L^1(\omega'')}. \tag{3.19}$$

On arrive maintenant à l'argument "slicing stricto sensu". Par l'estimation de croissance (2.8), on a

$$\begin{aligned}\int_{S_{m,n}} F(\nabla v_{\ell,m,n})\,dx \leq 2^{p-1}\Lambda\Big(&\int_{S_{m,n}} (|\nabla u_\ell|^p+|\nabla u^*|^p+1)\,dx\\ &+K^p n^{2p}\int_{S_{m,n}} |u^*-u_\ell|^p\,dx\Big).\end{aligned} \tag{3.20}$$

Le seul terme qui pose une difficulté est le dernier terme venant de $\nabla\chi_{m,n}$. En regroupant les estimations (3.18), (3.19) et (3.20) dans le membre droit de l'estimation (3.17), on fait la somme de $m=1$ à n et on divise le résultat par n. On observe que la somme des intégrales sur la tranche $S_{m,n}$ donne lieu à des intégrales sur la réunion de tout les tranches, qui est inclue dans Ω_{s+1}, cela permet d'écrire

$$\int_{\Omega_s\setminus\Omega_t} F(\nabla u_\ell)\,dx \leq A^{1/p'}(s+1)^{r/p'}\|f''\|_{L^{p'}(\omega'')}\|u^*-u_\ell\|_{L^p(\Omega_{s+1})} \tag{3.21}$$

$$+A\Big(\Big(s+\frac{1}{n}\Big)^r-\Big(t-\frac{1}{n}\Big)^r\Big)\|F''(\nabla'' u^*)\|_{L^1(\omega'')} \tag{3.22}$$

$$+\frac{2^p\Lambda c_4}{n}(s+1)^r+2^{p-1}\Lambda K^p n^{2p-1}\|u^*-u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_{s+1})}. \tag{3.23}$$

On fait d'abord tendre $\ell\to+\infty$. Grâce au Théorème 1.1.10 de Rellich-Kondrašov,

$$\|u^*-u_\ell\|_{L^p(\Omega_{s+1})}\to 0,$$

donc par l'estimation de coercivité (2.8) sur F il en résulte que

$$\limsup_{\ell\to+\infty}\int_{\Omega_s\setminus\Omega_t}|\nabla u_\ell|^p\,dx \leq \frac{A}{\lambda}\Big(\Big(s+\frac{1}{n}\Big)^r-\Big(t-\frac{1}{n}\Big)^r\Big)\|F''(\nabla'' u^*)\|_{L^1(\omega'')} + \frac{2^p\Lambda c_4}{n\lambda}(s+1)^r.$$

enfin on fait tendre $n\to+\infty$ pour obtenir le résultat avec le choix de $c_5=\frac{A}{\lambda}\|F''(\nabla''u^*)\|_{L^1(\omega'')}$.

□

Maintenant, on est en mesure d'annoncer le résultat suivant :

Théorème 3.3.3 (identification de la limite) *La fonction u^* est un minimiseur du problème $\mathcal{P}_\infty$.*

Preuve. Soit $z\in W_0^{1,p}(\omega'')$ arbitraire. On choisit $v_\ell=(1-\rho_t)u_\ell+\rho_t z$ comme fonction test, avec $\rho_t=\rho_{t+1,t}$, alors $v_\ell=u_\ell$ sur $\Omega_\ell\setminus\Omega_{t+1}$ et $v_\ell=z$ dans Ω_t. On a ainsi

$$\int_{\Omega_{t+1}}[F(\nabla u_\ell)-f''u_\ell]\,dx\leq\int_{\Omega_{t+1}\setminus\Omega_t}[F(\nabla v_\ell)-f''v_\ell]\,dx+\int_{\Omega_t}[F(\nabla z)-f''z]\,dx. \tag{3.24}$$

Par le Lemme 3.3.2 on peut écrire

$$\limsup_{\ell\to+\infty}\Big|\int_{\Omega_{t+1}\setminus\Omega_t}[F(\nabla v_\ell)-f''v_\ell]\,dx\Big|\leq C(t+1)^{r-1},$$

pour une certaine constante C indépendante de ℓ et de t. Le membre gauche de (3.24) est faiblement semi-continu inférieurement, de ce fait, en faisant $\ell\to+\infty$, on obtient

$$(t+1)^r\mathcal{L}^r(\omega')\int_{\omega''}[F(\nabla u^*)-f''u^*]\,dx'\leq C(t+1)^{r-1} + t^r\mathcal{L}^r(\omega')\int_{\omega''}[F(\nabla z)-f''z]\,dx',$$

et le résultat suit en faisant $t\to+\infty$, puisque $F(\nabla u^*)=F''(\nabla''u^*)$ et $F(\nabla z)=F''(\nabla''z)$. □

On applique maintenant un outil classique pour obtenir une convergence forte lorsque F'' est strictement convexe. Dans ce cas, la solution u_∞ du problème limite est unique et cette unicité implique la convergence faible de toute la suite u_ℓ.

3.4 Résultat principal, cas strictement convexe

Avant de passer à la démonstration du théorème principal de ce chapitre, on aura besoin de quelques lemmes techniques qui seront d'une grande importance.

Nous rappelons les deux lemmes suivants qui peuvent être trouvés *par exemple* dans [4].

Lemme 3.4.1 *Soient D un ouvert convexe de $\mathbb{R}^M$ et $F\colon D \to \mathbb{R}$ strictement convexe. Soit $\mu \in]0,1[$ et $a_j, a \in \mathbb{R}^M$ tels que*

$$\mu F(a_j) + (1-\mu)F(a) - F(\mu a_j + (1-\mu)a) \to 0 \textit{ lorsque } j \to +\infty.$$

Alors $a_j \to a$.

Preuve. On note d'abord que $h(b) = \mu F(b) + (1-\mu)F(a) - F(\mu b + (1-\mu)a)$ est strictement croissante le long de toute demi-droite commençant par le point a. En fait, si la demi-droite est donnée par $t \mapsto a + te$, avec $e \in \mathbb{R}^M$, alors cela est équivalent à dire que

$$\mu F(a+te) - F(a+\mu te) > \mu F(a+se) - F(a+\mu se) \text{ si } t > s > 0,$$

qui suit de la stricte convexité de F. En écrivant $a+se$, $a+\mu te$ comme combinaisons convexe de $a+te$ et $a+\mu se$. Puisque D est ouvert, et F est convexe alors F est continue. Donc pour un $\epsilon > 0$ suffisamment petit de tel sorte la boule fermé $B(a,\epsilon)$ soit incluse dans D,

$$\inf_{|b-a|=\epsilon} h(b) > 0$$

Puisque h est croissante le long de tout demi-droite, cela implique que

$$\inf_{\substack{|b-a|\geq\epsilon,\\ b\in Co}} h(b) > 0$$

d'où le résultat désiré. $\square$

Le lemme suivant qu'est une légère variation du lemme de Fatou.

Lemme 3.4.2 *Soit $F_j, F, H_j, H \in L^1(\Omega)$ avec $F_j \geq H_j \geq 0$ pour tout j, $F_j \to F$ et $H_j \to H$ p.p., et $\int_\Omega F_j\,dx \to \int_\Omega F\,dx$. Alors*

$$\int_\Omega H_j\,dx \to \int_\Omega H\,dx.$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate du théorème de convergence de Vitali voir [7]. Alternativement, le résultat suit du lemme de Fatou appliqué aux suites $F_j - H_j$ et H_j. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat principal de ce chapitre.

Preuve. On sait déjà que $\nabla' u_\ell \to 0 = \nabla' u^*$ fortement dans $L^p(\Omega_t)$ par l'estimation (3.15). Il suffit donc de prouver la forte convergence de $\nabla'' u_\ell$ vers $\nabla'' u^*$.

Nous utilisons un tranchage similaire au précédent, avec les fonctions test

$$v = \rho_{t+\frac{m}{n^2}, t+\frac{m-1}{n^2}} u_\ell$$

pour n assez grand, $1 \leq m \leq n$. Ce tranchage implique que

$$\limsup_{\ell \to +\infty} \int_{\Omega_t} F(\nabla u_\ell)\, dx \leq \int_{\Omega_t} F(\nabla u^*)\, dx.$$

D'autre part, pour presque partout x', la fonction $u_{x',\ell} \colon x'' \mapsto u_\ell(x',x'')$ est une fonction test admissible pour le problème limite, de sorte que

$$\int_{\omega''} [F''(\nabla'' u^*) - f'' u^*]\, dx'' \leq \int_{\omega''} [F''(\nabla'' u_{x',\ell}) - f'' u_{x',\ell}]\, dx''.$$

On intègre cette inégalité par rapport à $x' \in t\omega'$ on obtient

$$\int_{\Omega_t} [F''(\nabla'' u^*) - f'' u^*]\, dx \leq \int_{\Omega_t} [F''(\nabla'' u_\ell) - f'' u_\ell]\, dx.$$

On fait tendre $\ell \to +\infty$, on obtient

$$\int_{\Omega_t} F''(\nabla'' u^*)\, dx \leq \liminf_{\ell \to +\infty} \int_{\Omega_t} F''(\nabla'' u_\ell)\, dx.$$

Par l'hypothèse (2.9), $G \geq 0$, ce qui implique que $F''(\xi'') \leq F(\xi',\xi'')$ pour tout ξ'. Il s'en suit que

$$\int_{\Omega_t} F''(\nabla'' u_\ell)\, dx \to \int_{\Omega_t} F''(\nabla'' u^*)\, dx \tag{3.25}$$

quand $\ell \to +\infty$, puisque $F''(\nabla'' u^*) = F(\nabla u^*)$.

choisissons maintenant $\mu \in]0,1[$ et posons

$$g_\ell = \mu F''(\nabla'' u_\ell) + (1-\mu) F''(\nabla'' u^*) - F''(\mu \nabla'' u_\ell + (1-\mu)\nabla'' u^*).$$

Par la semicontinuité inférieur faible, il est clair que

$$\liminf_{\ell \to +\infty} \int_{\Omega_t} F''(\mu \nabla'' u_\ell + (1-\mu)\nabla'' u^*)\, dx \geq \int_{\Omega_t} F''(\nabla'' u^*)\, dx.$$

Par conséquent

$$0 \leq \limsup_{\ell \to +\infty} \int_{\Omega_t} g_\ell\, dx \leq \int_{\Omega_t} F''(\nabla'' u^*)\, dx - \int_{\Omega_t} F''(\nabla'' u^*)\, dx = 0,$$

d'où $g_\ell \to 0$ p.p. (juste pour une sous suite). Alors on applique le Lemme 3.4.1 pour déduire que $\nabla'' u_\ell \to \nabla'' u^*$ p.p. et juste pour la même sous suite.

On prend maintenant

$$H_\ell = |\nabla'' u_\ell - \nabla'' u^*|^p \leq 2^{p-1}(F''(\nabla'' u_\ell) + |\nabla'' u^*|^p) = F_\ell,$$

et on utilise le Lemme 3.4.2 et (3.25) pour obtenir le résultat pour $\ell_0 = t$. Pour conclure pour tout ℓ_0, on procède par un argument diagonal. $\square$

Chapitre 4

Taux de convergence des minimiseurs

Toujours dans l'intérêt d'étudier le comportement asymptotique des minimiseurs des problèmes

$$(\mathcal{P}_\ell) \quad \inf\left\{\int_\Omega F(\nabla v(x) - f''(x'')v(x))\,dx, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega_\ell)\right\}$$

L'objet qu'on ce propose dans le présent chapitre est de développer quelques résultats de convergence des minimiseurs où le taux de convergence est le meilleur possible.

Pour aboutir à notre but, on se restreint au cas où F'' est uniformément convexe, puis on distingue deux conditions de croissance et de coercivité imposées sur G, ce qui nous amene à élaborer deux résultats différents.

4.1 Quelques lagrangiens non linéaires

Nous montrons ici un premier résultat de convergence des minimiseurs avec un taux exponentiel pour quelques lagrangiens non linéaires.

Théorème 4.1.1 *Soit $f'' \in L^{p'}(\omega'')$ et soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe satisfaisant les hypothèses de croissance et de coercivité suivantes :*

$$\begin{cases} \exists p > 1,\ \exists \lambda,\ \Lambda > 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \ \textit{ tels que} \\ \\ \lambda|\xi|^p \leq F(\xi) \leq \Lambda(|\xi|^p + 1), \\ \\ \lambda|\xi'|^p \leq G(\xi) \leq \Lambda|\xi'|^p. \end{cases} \tag{4.1}$$

Supposons de plus que F'' est uniformément convexe c'est-à-dire,

$$\left\{\begin{array}{l} \exists\beta>0,\ \forall t\in[0,1],\ \forall\xi,\eta\in\mathbb{R}^n : \\ F''(t\xi+(1-t)\eta)\leq\ tF''(\xi)+(1-t)F''(\eta) \\ \qquad\qquad\qquad -\beta t(1-t)\{t^{p-1}+(1-t)^{(p-1)}\}|\xi-\eta|^p \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Alors pour tout $\ell_0>0$ il existent $C>0$ et $\alpha>0$ tels

$$||\nabla(u_\ell-u_\infty)||_{L^p(\Omega_{\ell_0})}\leq Ce^{-\alpha\ell}.$$

Remarque 17

(i) *Le Théorème 4.1.1 s'applique par exemple aux énergies de la forme $F(\xi)=F'(\xi')+F''(\xi'')$ qui couvre en particulier les résultats concernant les équations aux dérivées partielles linéaires étudiées par Chipot et Yeressan [23], l'équation de la chaleur généralisée étudiée par Chipot [18] et d'autre problèmes non linéaires, mais malheureusement le cas du p-Laplacien -qui reste toujours ouvert- ne rentre pas dans ce cadre.*

(ii) *Il est intéressant de constater que nous n'imposons aucune restriction sur la dimension de la variable allongée ($1\leq r\leq n-1$).*

En appliquant pratiquement les mêmes démarches que pour le Théorème 2.3.1, on obtient la proposition suivante qui est l'analogue de la proposition 2.3.2 :

Proposition 4.1.2 *Soient u_ℓ, u_∞ les minimiseurs de (2.4), (2.12) respectivement. Il existe une constante c_7 indépendante de ℓ tels que, pour tout $0<t<s\leq\ell$, on a*

$$\|\nabla' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_t;\mathbb{R}^r)}+\|\nabla''(u_\ell-u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_t;\mathbb{R}^{n-r})} \leq \frac{c_7}{(s-t)^p}\|\nabla''(u_\ell-u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_s\setminus\Omega_t;\mathbb{R}^{n-r})}. \tag{4.3}$$

Remarque 18

(i) *Grâce à l'uniforme convexité de F'', on voit clairement l'apparition du terme du gradient vertical de $u_\ell-u_\infty$ dans le membre gauche de* (4.3)*.*

(ii) *En comparant les deux estimations* (4.3) *et* (2.19)*, on remarque l'absence d'un terme dans le membre de droite. C'est naturel car l'hypothèse de croissance et de coercivité choisite cette fois ci sur G ne porte pas le terme du type $|\xi''|^{p-k}|\xi'|^k$.*

Preuve du Théorème 4.1.1. On prend $s = t+1$ dans l'estimation (4.3), on obtient que

$$\begin{aligned}\|\nabla' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_t)} &\leq C\|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_{t+1}\setminus\Omega_t)} \\ &\leq C\|\nabla' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_{t+1}\setminus\Omega_t)} \\ &\quad + C\|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_{t+1}\setminus\Omega_t)}. \quad (4.4)\end{aligned}$$

Posons maintenant

$$g(t) = \|\nabla' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_t)}, \tag{4.5}$$

d'où d'après (4.4) et (4.5), on a

$$g(t) \leq C(g(t+1) - g(t)),$$

en d'autres termes

$$g(t) \leq \theta g(t+1), \tag{4.6}$$

avec $\theta = \frac{C}{1+C} \in]0,1[$.

Par itération sur l'inéquation (4.6), en utilisant la suite $t_n = n + \ell_0$, $n = 0, \dots, \lfloor \ell - \ell_0 \rfloor$, on voit clairement

$$g(\ell_0) = g(t_0) \leq \theta^n g(t_n)$$

pour tout n, et en particulier pour $\ell_0 + \lfloor \ell - \ell_0 \rfloor$, on a

$$g(\ell_0) \leq \theta^{\lfloor \ell - \ell_0 \rfloor} g(t_{\lfloor \ell - \ell_0 \rfloor}) \leq \theta^{\ell - \ell_0 - 1} g(\ell) \leq C\theta^{-\ell_0 - 1} e^{\ell \ln\theta} \ell^r,$$

avec $\ln\theta < 0$. Maintenant, pour tout r, on peut choisir α tel que $e^{\ell\ln\theta}\ell^r \leq e^{-p\alpha\ell}$ pour ℓ assez grand, ce qui complète la démonstration puisque $\nabla' u_\infty = 0$. $\square$

4.2 Lagrangien type $(p,2)$ -Laplacien

Nous travaillons maintenant le second résultat du chapitre où nous allons démontrer la convergence des minimiseurs avec un taux de convergence exponentiel, pour le même type de problème

$$(\mathcal{P}_\ell) \quad \inf\left\{\int_\Omega F(\nabla v(x) - f''(x'')v(x))\,dx, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega_\ell)\right\}$$

mais avec une certaine non linérité sur F, et aussi une certaine régularité sur ω'' et f. Enonçons d'abord le résultat de régularité récent suivant due à Cianchi et Maz'ya [24], [25] :

Théorème 4.2.1 *(cf. [25]) Soit Ω un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Supposons que $a : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^1(0,\infty)$ tels que*

$$-1 < \inf_{t>0} \frac{ta'(t)}{a(t)} \leq \sup_{t>0} \frac{ta'(t)}{a(t)} < \infty, \tag{4.7}$$

et qu'il existe $p > 1$ et $c, C > 0$ tels que

$$ct^{p-1} \leq ta(t) \leq C(t^{p-1}+1) \text{ pour } t > 0. \tag{4.8}$$

Soit $f \in L^{n,1}(\Omega)$, et soit u la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla u|)\nabla u) = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors

$$||\nabla u||_{L^\infty(\Omega)} \leq C||f||_{Ln,1(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}$$

pour certaine constante $C = C(p,\Omega)$.

Remarque 19

(i) *On remarque que si nous supposons que la densité d'énergie F s'écrit en fonction de $|\xi|$ l'équation d'Euler associé à $\mathcal{P}_\ell$ dans ce cas sera du type*

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla u_\ell|)\nabla u_\ell) = f'' \text{ dans } \Omega_\ell \\ u_\ell = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\ell \end{cases}$$

avec $F(\xi) = \bar{F}(|\xi|)$, $\bar{F}(t) = \int_0^t a(\tau)\tau \, d\tau$ et $a : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$.

Maintenant le résultat principal de cette section est donné par le théorème suivant :

Théorème 4.2.2 *Soient ω'' un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^{n-r}$, $f'' \in L^{n-r,1}(\omega'')$ et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe satisfaisant les hypothèses de croissance et de coercivité suivante :*

$$\begin{cases} \exists p > 1, \exists k \in]0,p[, \exists \lambda, \Lambda > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ tels que} \\ \lambda|\xi|^p \leq F(\xi) \leq \Lambda(|\xi|^p + 1), \\ \lambda(|\xi'|^k + |\xi'|^p + |\xi''|^{p-k}|\xi'|^k) \leq G(\xi) \leq \Lambda(|\xi'|^k + |\xi'|^p + |\xi''|^{p-k}|\xi'|^k). \end{cases} \tag{4.9}$$

Supposons de plus que F'' est uniformément convexe c'est-à-dire,

$$\begin{cases} \exists \beta > 0,\ \forall t \in [0,1],\ \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n : \\ F''(t\xi + (1-t)\eta) \leq \ tF''(\xi) + (1-t)F''(\eta) \\ \qquad\qquad\qquad -\beta t(1-t)\{t^{p-1} + (1-t)^{(p-1)}\}|\xi - \eta|^p \\ \qquad\qquad\qquad -\beta t(1-t)\{t^{k-1} + (1-t)^{(k-1)}\}|\xi - \eta|^k \end{cases} \tag{4.10}$$

Et il existe une fonction $\bar{F} : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *tel que* (4.7) *et* (4.8) *et pour tout* $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$F(\xi) = \bar{F}(|\xi|).$$

Alors pour tout $r \leq n-3$ *et* $\ell_0 > 0$, *il existe* C, $\alpha > 0$ *tel que*

$$||\nabla(u_\ell - u_\infty)||_{L^p(\Omega_{\ell_0})} \leq Ce^{-\alpha\ell}.$$

Remarque 20

(i) *Le Théorème 4.2.2 s'applique au cas* $F(\xi) = \frac{|\xi|^2}{2} + \frac{|\xi|^p}{p}$ *qui correspond à l'équation du* $(p,2)$ *-Laplacien* $\begin{cases} -\Delta u_\ell - \Delta_p u_\ell = f \ \ dans \ \ \Omega_\ell \\ u_\ell = 0 \ \ sur \ \ \partial\Omega_\ell \end{cases}$.

(iii) *Le rôle des hypothèses,* ω'' *convexe et* f *appartient à un espace de Lorentz est de « garantir » que* ∇u_∞ *soit dans* $L^\infty(\omega'')$,

Sous les hypothèses du Théorème 4.2.2 on peut démontrer la proposition suivante :

Proposition 4.2.3 *Soient* u_ℓ, u_∞ *les minimiseurs de (2.4), (2.12) respectivement. Il existe une constante* c_8 *indépendante de* ℓ *telle que, pour tout* $0 < t < s \leq \ell$, *on a*

$$\begin{aligned} &\|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^k_{L^k(\Omega_t;\mathbb{R}^{n-r})} + \|\nabla' u_\ell\|^k_{L^k(\Omega_t;\mathbb{R}^r)} + \\ &+ \|\nabla' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_t;\mathbb{R}^r)} + \|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_t;\mathbb{R}^{n-r})} \\ &\leq \frac{c_8}{(s-t)^k}\|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^k_{L^k(\Omega_s\setminus\Omega_t;\mathbb{R}^{n-r})} + \frac{c_8}{(s-t)^p}\|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_s\setminus\Omega_t;\mathbb{R}^{n-r})}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Preuve. Pour $0 < t < s \leq \ell$, On choisit un nombre $0 < \alpha < 1$, puis on prend

$$v_1(x) = (1 - \alpha\rho_{s,t}(x'))u_\ell(x) + \alpha\rho_{s,t}(x')u_\infty(x''), \tag{4.12}$$

et

$$v_2(x) = (1 - \alpha\rho_{s,t}(x'))u_\infty(x') + \alpha\rho_{s,t}(x')u_\ell(x). \tag{4.13}$$

Clairement, v_1 appartient à $W_0^{1,p}(\Omega_\ell)$ est donc admissible comme fonction test pour le problème $\mathcal{P}_\ell$, alors

$$\int_{\Omega_\ell} [F(\nabla u_\ell(x)) - f''(x'')u_\ell(x)]\,dx \leq \int_{\Omega_\ell} [F(\nabla v_1(x)) - f''(x'')v_1(x)]\,dx. \qquad (4.14)$$

comme $W_0^{1,p}(\Omega_\ell) \hookrightarrow L^p(\omega'_\ell; W_0^{1,p}(\omega''))$, $v_2(x',.)$ est aussi une fonction test admissible pour le problème $\mathcal{P}_\infty$ pour presque tout $x' \in \omega'_\ell$, donc

$$\int_{\omega''} [F''(\nabla'' u_\infty(x'')) - f''(x'')u_\infty(x'')]\,dx'' \\ \leq \int_{\omega''} [F''(\nabla'' v_2(x',x'')) - f''(x'')v_2(x',x'')]\,dx''. \qquad (4.15)$$

Intégrant (4.15) sur ω'_ℓ, on obtient sur $\Omega_\ell = \omega'_\ell \times \omega''$

$$\int_{\Omega_\ell} [F''(\nabla'' u_\infty(x'')) - f''(x'')u_\infty(x'')]\,dx \\ \leq \int_{\Omega_\ell} [F''(\nabla'' v_2(x)) - f''(x'')v_2(x)]\,dx. \qquad (4.16)$$

En additionnant (4.14), (4.16), notons que tout les termes comportant f'' s'annulent puisque $v_1 + v_2 = u_\ell + u_\infty$, par conséquent,

$$\int_{\Omega_\ell} [F(\nabla u_\ell(x)) + F''(\nabla'' u_\infty(x''))]\,dx \leq \int_{\Omega_\ell} [F(\nabla v_1(x)) + F''(\nabla'' v_2(x))]\,dx. \qquad (4.17)$$

Nous observons que sur $\Omega_\ell \setminus \Omega_s$, $v_1 = u_\ell$ et $v_2 = u_\infty$ donc (4.17) se réduit à

$$\int_{\Omega_s} [F(\nabla u_\ell(x)) + F''(\nabla'' u_\infty(x''))]\,dx \leq \int_{\Omega_s \setminus \Omega_t} [F(\nabla v_1(x)) + F''(\nabla'' v_2(x))]\,dx \\ + \int_{\Omega_t} [F(\nabla v_1(x)) + F''(\nabla'' v_2(x))]\,dx. \qquad (4.18)$$

Le membre gauche de (4.18) peut être réécrit sous la forme

$$\int_{\Omega_s} [F(\nabla u_\ell(x)) + F''(\nabla'' u_\infty(x''))]\,dx \\ = \int_{\Omega_s} [G(\nabla u_\ell(x)) + F''(\nabla'' u_\ell(x)) + F''(\nabla'' u_\infty(x''))]\,dx. \qquad (4.19)$$

On pose

$$I_1 = \int_{\Omega_s \setminus \Omega_t} [F(\nabla v_1(x)) + F''(\nabla'' v_2(x))]\,dx$$

et

$$I_2 = \int_{\Omega_t} \left[F(\nabla v_1(x)) + F''(\nabla'' v_2(x))\right] dx$$

la première et la seconde intégrale dans le membre-droit de (4.18). Pour estimer I_1, on utilise la convexité de F'', puisque les gradients verticaux ∇'' de v_1 et v_2 sont des combinaisons des gradients verticaux de u_ℓ et u_∞,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega_s \setminus \Omega_t} \left[G(\nabla v_1(x)) + F''(\nabla'' v_1(x)) + F''(\nabla'' v_2(x))\right] dx \\ &\leq \int_{\Omega_s \setminus \Omega_t} \left[G(\nabla v_1(x)) + F''(\nabla'' u_\ell(x)) + F''(\nabla'' u_\infty(x))\right] dx. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Pour estimer I_2, nous observons que sur Ω_t,

$$v_1 = (1-\alpha)u_\ell + \alpha u_\infty$$

et

$$v_2 = \alpha u_\ell + (1-\alpha)u_\infty$$

Par conséquent, du fait de la convexité de F et de la convexité uniforme (4.10) de F'' pour certain $\beta > 0$,

$$\begin{aligned} I_2 \leq \int_{\Omega_t} &\left[(1-\alpha)F(\nabla u_\ell) + \alpha F(\nabla u_\infty) + (1-\alpha)F''(\nabla'' u_\infty) + \alpha F''(\nabla'' u_\ell)\right. \\ &\qquad \left. - \beta' |\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^k\right] dx - \beta' |\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^p\big] dx \\ = \int_{\Omega_t} &\left[(1-\alpha)G(\nabla u_\ell) + F''(\nabla'' u_\ell) + F''(\nabla'' u_\infty) - \beta |\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^p\right] dx, \end{aligned} \tag{4.21}$$

Récapitulons (4.18), (4.20), (4.21) et (4.19), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s \setminus \Omega_t} G(\nabla u_\ell)\, dx + \int_{\Omega_t} \left[\alpha G(\nabla u_\ell) + \beta' \left\{ |\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^p + |\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^k \right\}\right] dx \\ \leq \int_{\Omega_s \setminus \Omega_t} G(\nabla v_1(x))\, dx, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'hypothèse (4.10) de l'uniforme convexité sur F''. Maintenant l'hypothèse de coercivité sur G donne

$$\begin{aligned} a \int_{\Omega_t} \left[(|\nabla' u_\ell|^k + |\nabla' u_\ell|^p + |\nabla'' u_\ell|^{p-k} |\nabla' u_\ell|^k) + |\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^k + |\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^p\right] dx \\ \leq \int_{\Omega_s \setminus \Omega_t} G(\nabla v_1(x))\, dx, \end{aligned} \tag{4.22}$$

où $a>0$ est une constante générique qui ne dépend que des autres constantes impliquées. Maintenant on va estimer le membre de droite de (4.22), on a

$$\begin{cases} \nabla' v_1 = (1-\alpha\rho_{s,t})\nabla' u_\ell + \alpha\nabla'\rho_{s,t}(u_\infty - u_\ell), \\ \nabla'' v_1 = (1-\alpha\rho_{s,t})\nabla'' u_\ell + \alpha\rho_{s,t}\nabla'' u_\infty. \end{cases} \tag{4.23}$$

Par la définition de la fonction trancature $\rho_{s,t}$ et en utilisant Young, on obtient pour tout exposant q l'estimation suivante :

$$\begin{cases} |\nabla' v_1|^q \leq 2^{q-1}|\nabla' u_\ell|^q + 2^{q-1}\dfrac{K^q}{(s-t)^q}|u_\infty - u_\ell|^q, \\ |\nabla'' v_1|^q \leq 2^{q-1}|\nabla'' u_\ell|^q + 2^{q-1}|\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^q. \end{cases} \tag{4.24}$$

Maintenant, on choisit les exposants $q=p$ puis $q=k$ dans la première ligne, $q=p-k$ dans la seconde ligne de (4.24) et on utilise l'hypothèse de croissance sur G, on obtient

$$\begin{aligned} G(\nabla v_1) \leq A\Bigg(&|\nabla' u_\ell|^p + \frac{1}{(s-t)^p}|u_\infty - u_\ell|^p + |\nabla' u_\ell|^k + \frac{1}{(s-t)^k}|u_\infty - u_\ell|^k \\ &+ \left(|\nabla'' u_\ell|^{p-k} + |\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^{p-k}\right)\left(|\nabla' u_\ell|^k + \frac{1}{(s-t)^k}|u_\infty - u_\ell|^k\right)\Bigg), \end{aligned} \tag{4.25}$$

où A est une constante générique qui ne dépend que des autres constantes impliquées. Pour $k\geq 1$, trois des quatre termes du produit du second membre de (4.25) qui apparaissent doivent être estimés. Pour deux d'entre eux, on utilise l'inégalité de Young sous la forme suivante :

$$a^k b^{p-k} \leq \frac{k}{p}a^p + \frac{p-k}{p}b^p,$$

pour $a,b\geq 0$ (rappelons que $p>k$). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} G(\nabla v_1) \leq A\Bigg(&|\nabla' u_\ell|^p + \frac{1}{(s-t)^p}|u_\infty - u_\ell|^p + |\nabla' u_\ell|^k + \frac{1}{(s-t)^k}|u_\infty - u_\ell|^k \\ &+ |\nabla'' u_\ell|^{p-k}|\nabla' u_\ell|^k + |\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^p + \frac{1}{(s-t)^k}|\nabla'' u_\ell|^{p-k}|u_\ell - u_\infty|^k\Bigg), \end{aligned} \tag{4.26}$$

où A est une autre constante générique.
Estimons la troisième quantité. Comme

$$|\nabla'' u_\ell|^{p-k} \leq 2^{p-k-1}|\nabla''(u_\ell - u_\infty)|^{p-k} + 2^{p-k-1}|\nabla'' u_\infty|^{p-k},$$

on peut écrire

$$\tfrac{1}{(s-t)^k}|\nabla'' u_\ell|^{p-k}|u_\ell - u_\infty|^k$$

$$\leq \tfrac{2^{p-1}}{(s-t)^k}|\nabla''(u_\ell - u_\infty)|^{p-k}|u_\ell - u_\infty|^k + \tfrac{2^{p-1}}{(s-t)^k}|\nabla'' u_\infty|^{p-k}|u_\ell - u_\infty|^k$$

En appliquant le Théorème 4.2.1, on a donc $\nabla'' u_\infty$ est dans $L^\infty(\omega'')$, puis à l'aide de l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{(s-t)^k}|\nabla'' u_\ell|^{p-k}|u_\ell - u_\infty|^k\\ &\leq \tfrac{A}{(s-t)^p}|u_\ell - u_\infty|^p + A|\nabla''(u_\ell - u_\infty)|^p + \tfrac{c}{(s-t)^k}|u_\ell - u_\infty|^k,\end{aligned}$$

Par conséquent, en intégrant (4.26) sur $\Omega_s \setminus \Omega_t$ et en utilisant l'inégalité de Poincaré du Lemme 2.2.2 on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_s\setminus\Omega_t} G(\nabla v_1)\,dx \leq A\int_{\Omega_s\setminus\Omega_t}(|\nabla' u_\ell|^p + |\nabla'' u_\ell|^{p-k}|\nabla' u_\ell|^k + |\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^p + |\nabla' u_\ell|^k)\,dx\\ + \frac{A}{(s-t)^p}\|\nabla''(u_\infty - u_\ell)\|^p_{L^p(\Omega_s\setminus\Omega_t)} + \frac{A}{(s-t)^k}\|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^k_{L^k(\Omega_s\setminus\Omega_t)}, \quad (4.27)\end{aligned}$$

avec A encore une autre constante générique.
Posons, maintenant

$$h(t) = \int_{\Omega_t}(|\nabla' u_\ell|^k + |\nabla' u_\ell|^p + |\nabla'' u_\ell|^{p-k}|\nabla' u_\ell|^k + |\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^p)\,dx.$$

et

$$g(t) = \int_{\Omega_t}(|\nabla''(u_\infty - u_\ell)|^k)\,dx$$

Alors, (4.22) et (4.27) peuvent être réécrites

$$\begin{aligned}g(t) + h(t) \leq \theta h(s) + \frac{1}{(s-t)^p}\|\nabla''(u_\infty - u_\ell)\|^p_{L^p(\Omega_s\setminus\Omega_t)}\\ + \frac{1}{(s-t)^k}\|\nabla''(u_\infty - u_\ell)\|^k_{L^k(\Omega_s\setminus\Omega_t)}, \quad (4.28)\end{aligned}$$

où $\theta = \frac{A}{A+a} \in]0,1[$. Soit $t \leq t_1 < s_1 \leq s$. En utilisant le Lemme 2.2.3, avec

$$\begin{aligned}&\nu_1 = p,\\ &C = \|\nabla''(u_\infty - u_\ell)\|^p_{L^p(\Omega_s\setminus\Omega_t)},\\ &\nu_2 = k,\\ &D = \|\nabla''(u_\infty - u_\ell)\|^k_{L^k(\Omega_s\setminus\Omega_t)},\end{aligned}$$

cela permet de conclure que

$$g(t_1) + h(t_1) \leq c(C(s_1 - t_1)^{-\nu_1} + D(s_1 - t_1)^{-\nu_2}). \quad (4.29)$$

Pour conclure la démonstration, il suffit de faire tendre $t_1 \to t$ et $s_1 \to s$. $\square$

Preuve du Théorème 4.2.2. On prend $s=t+1$ dans (4.11), on obtient

$$\begin{cases} \|\nabla' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|\nabla' u_\ell\|^k_{L^k(\Omega_t)} + \|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^k_{L^k(\Omega_t)} \\ \leq C\|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_{t+1}\backslash\Omega_t)} + C\|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^k_{L^k(\Omega_{t+1}\backslash\Omega_t)} \\ \leq C\|\nabla' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_{t+1}\backslash\Omega_t)} + C\|\nabla' u_\ell\|^k_{L^k(\Omega_{t+1}\backslash\Omega_t)} \\ \quad + C\|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_{t+1}\backslash\Omega_t)} + C\|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^k_{L^k(\Omega_{t+1}\backslash\Omega_t)}. \end{cases} \tag{4.30}$$

On pose, maintenant

$$M(t) = \|\nabla' u_\ell\|^k_{L^k(\Omega_t)} + \|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^k_{L^k(\Omega_t)} + \|\nabla' u_\ell\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|\nabla''(u_\ell - u_\infty)\|^p_{L^p(\Omega_t)},$$

Alors (4.30) peut être réécrite

$$M(t) \leq C(k(t+1) - k(t)),$$

en d'autres termes

$$M(t) \leq \theta M(t+1), \qquad \forall 0 < t < \ell \tag{4.31}$$

avec $\theta = \frac{C}{1+C} \in]0,1[$.

On peut alors considérer (4.31) pour les éléments de la suite $t_n = n + \ell_0$, $n = 0,\dots,\lfloor \ell - \ell_0 \rfloor$. On voit clairement que

$$M(\ell_0) = M(t_0) \leq \theta^n M(t_n),$$

pour tout n, et en particulier pour $\lfloor \ell - \ell_0 \rfloor$,

$$M(\ell_0) \leq \theta^{\lfloor \ell - \ell_0 \rfloor} M(t_{\lfloor \ell - \ell_0 \rfloor}) \leq \theta^{\ell - \ell_0 - 1} M(\ell) \leq C\theta^{-\ell_0 - 1} e^{\ell \ln \theta} \ell^r,$$

Maintenant, pour tout $1 \leq r < n$, on peut choisir α tel que $e^{\ell \ln \theta} \ell^r \leq e^{-\alpha \ell}$ pour ℓ assez grand, puisque $\ln \theta < 0$. Ce qui complète la démonstration du Théorème 4.2.2. $\square$

Conclusion et perspectives

Conclusion

On peut résumer les résultats obtenue dans le tableau suivant

Hypothèse G / **Convexité** F	G_1	G_2	G_3
Stricte convexité.	Convergence Taux ?	? Taux ?	? Taux ?
Uniforme convexité.	Convergence Taux exp.	Convergence Taux polyn.	Convergence Taux exp.

G_1	$\lambda\|\xi'\|^p \leq G(\xi) \leq \Lambda\|\xi'\|^p$
G_2	$\lambda(\|\xi'\|^p + \|\xi''\|^{p-k}\|\xi'\|^k) \leq G(\xi) \leq \Lambda(\|\xi'\|^p + \|\xi''\|^{p-k}\|\xi'\|^k)$
G_3	$\lambda(\|\xi'\|^k + \|\xi'\|^p + \|\xi''\|^{p-k}\|\xi'\|^k) \leq G(\xi) \leq \Lambda(\|\xi'\|^k + \|\xi'\|^p + \|\xi''\|^{p-k}\|\xi'\|^k)$

Perspectives

Après avoir fait l'étude du comportement asymptotique pour quelques problèmes en calcul des variations dans le cas scalaire, il est raisonnable de voir si cette étude peut apporter des éléments de réponse à deux types de problèmes.

Le premier concerne l'étude du comportement asymptotique des problèmes en calcul des variations dans le cas vectoriel.

Le deuxième problème concerne l'étude du comportement asymptotique des équations aux dérivées partielles de type divergentiel.

Calcul des variations cas vectoriel

Notre étude a été faite jusqu'ici dans le contexte d'un problème scalaire, c'est-à-dire que les fonctions $u : \Omega_\ell \to \mathbb{R}$ sont scalaires. Et où nous avons utilisé seulement le problème de minimisation, sans aucun recours aux équations aux dérivées partielles et sous diverses hypothèses de convexité.

Cas convexe : Il est absolument clair, qu'on peut procéder de manière analogue pour traiter les problèmes du calcul des variations dans le cas vectoriels c'est-à-dire avec des fonctions $u : \Omega_\ell \to \mathbb{R}^m$, et cela si les énergies sont supposées satisfaire les **mêmes hypothèses** de croissance, de coercivité et **de convexité** qu'auparavant, alors les mêmes résultats de convergence restent toujours vrais.

Cas quasi-convexe : La semi-continuité inférieure de la fonctionnelle intégrale dans le cas vectoriel du calcul des variations, est assurée par la quasi-convexité, En effet, la convexité n'est pas adaptée par exemple en élasticité non linéaire pour des raisons de modélisation. **Cependant** certaines utilisations de la convexité **fonctionnent également** avec la rang-un-convexité, qui est une hypothèse raisonnable dans le cas vectoriel. Il y a aussi des notions de stricte uniforme quasi-convexité qui peuvent s'appliquer, voir [31].

Cas non convexe : Nous ne savons pas encore comment attaquer le problème "ℓ goes to plus infinity" dans de tels cas vectoriels **non convexes**, puisque nous nous appuyons encore fortement sur la convexité (rigoureusement uniforme) aux points cruciaux des preuves. De plus, **la condition** de Dirichlet **au bord** considéré ici n'est pas nécessairement la plus intéressante dans le contexte de l'élasticité non linéaire, en particulier si l'on se réfère au principe de Saint Venant.

Même **formuler le problème limite n'est pas aussi clair**. Dans un autre contexte de réduction dimensionnelle, lorsqu'on considère un corps dont l'épaisseur est nulle et avec des conditions aux limites différentes, on constate que **la quasi-convexité n'est pas conservée** et qu'**une relaxation est nécessaire** , voir par exemple [41]. Physiquement, cela est dû à la possibilité de froisser un corps si mince. Un phénomène similaire peut très probablement se produire ici, mais peut-être pas de la même manière. À notre connaissance, le cas vectoriel non convexe reste ouvert.

Equations aux dérivées partielles de type divergentiel

En étudiant le comportement asymptotique pour les problèmes de calcul des variations cela veut dire aussi étudier une grande classe de problèmes quasi-linéaires de type divergenciel. En faite considérons d'abord le cas général d'un problème quasi-linaire à forme divergentielle dans Ω_ℓ

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(a(\nabla u_\ell)) = f(x'') & \text{dans } \Omega_\ell, \\ u_\ell = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\ell. \end{cases} \tag{4.32}$$

Sous les même notations, avec

$$\begin{array}{rcl} a:\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ \xi & \mapsto & (a_i(\xi))_{1\leq i\leq n} \end{array}.$$

S'il existe une fonction $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tel que

$$a(\xi) = \nabla F(\xi)$$

c'est-à-dire l'opérateur a est la différentielle au sens de Gâteau de la fonctionnelle F et si F satisfait les mêmes hypothèses de croissance, de coercivité et de convexité qu'auparavant alors la solution u_ℓ du problème (4.32) converge vers la solution u_∞ du problème quasi-linaire à forme divergentielle dans ω suivant

$$\begin{cases} -\mathrm{div}''(a(0,\nabla'' u_\infty)) = f(x'') & \text{dans } \omega, \\ u_\infty = 0 & \text{sur } \partial\omega. \end{cases}$$

Mais, malheureusement les opérateurs quasi-linéaires ne correspondent pas toujours à la différentielle au sens de Gâteau d'une fonctionnelle du calcul des variations. Voici un exemple explicite qui met l'accent sur cette remarque.

- Supposons $2 \leq p \leq 4$
- Soit $a(\xi) = (a'(\xi), a''(\xi))$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$,
- avec $a'(\xi) = (\xi_i|\xi'|^{p-2})_{1\leq i\leq r}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$,
- et $a''(\xi) = (\xi_i|\xi|^{p-2})_{r+1\leq i\leq n}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$,

on remarque que cet opérateur satisfait à

(H_1) $\exists c>0:\quad |a(\xi)| \leq c|\xi|^{p-1} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ (condition de croissance)

(H_2) $\exists \alpha>0:\quad a(\xi)\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^p \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ (condition de coercivité)

(H_3) $\exists \beta>0:\quad (a(\xi)-a(\eta))\cdot(\xi-\eta) \geq \beta|\xi-\eta|^p \quad \forall \xi,\eta \in \mathbb{R}^n$ (la monotonie uniforme)

(H_4) $a_i(\xi_1,\ldots,\xi_r,\xi_{r+1},\ldots,\xi_n) = a_i(\xi_1,\ldots,\xi_r) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \forall 1\leq i\leq r$

Maintenant, on rappelle un résultat de [30] qui est une condition suffisante sur les fonctions a_i qui assure la condition (H_3) voir aussi [6] pour cet exemple.

Proposition 4.2.4 *(cf. [30]) Supposons que* $p \geq 2$ *et que les* a_i *sont continûment différentiables pour tout* $1 \leq i \leq n$. *De plus supposons qu'il existe un* $\lambda > 0$ *tel que pour tout* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *et tout* $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial \xi_j}(\xi) z_i z_j \geq \lambda \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^{p-2} z_i^2$$

Alors $a = (a_i)_{1\leq i\leq n}$ *est un opérateur uniformément monotone.*

Sous les hypothèses précédentes, on peut étudier le comportement asymptotique de la solution u_ℓ qui va converger vers u_∞ solution du problème p-Laplacien dans ω suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mathrm{div}'' \left(|\nabla'' u_\infty|^{p-2} \nabla'' u_\infty) \right) = f(x'') & \text{dans } \omega, \\ u_\infty = 0 & \text{sur } \partial\omega. \end{array} \right.$$

Et même avec un taux de convergence exponentiel. Mais cet opérateur a n'est la différentielle au sens de Gâteau d'aucune fonctionnelle de calcul des variations !

Deuxième partie

Relaxation cas vectoriel

Chapitre 5

Définitions et quelques résultats préliminaires

On rappel dans ce chapitre les extensions de la notion de convexité pour les fonctions, qui concerne les problèmes vectoriels du calcul des variations.

Une fois données ces différentes notions, on définit les différentes enveloppes convexe généralisées.

5.1 Notions de convexité pour les fonctions

La notion de fonction quasi-convexe joue un rôle central pour traiter les problèmes du calcul des variations, pour $m, n \geq 1$, est défini par :

Définition 5.1.1 *Une fonction $F : \mathbb{M}^{m,n} \to \mathbb{R}$ mesurable au sens de Borel, est dite quasi-convexe si*

$$F(\xi) \leq \frac{1}{\mathsf{mes}(D)} \int_D F(\xi + \nabla v(x))dx \tag{5.1}$$

pour tout domaine borné $D \subset \mathbb{R}^n$ de frontière ∂D, pour tout $v \in W_0^{1,\infty}(D, R^m)$ et pour tout $\xi \in \mathbb{M}^{m,n}$.
où $\mathsf{mes}(D)$ désigne la mesure de Lebesgue de D.

Sauf dans quelques cas, cette notion est analytiquement presque intraitable, ce qui a conduit à introduire une notion plus forte et une autre plus faible, à savoir, la poly-convexité et la rang-1-convexité.

La notation suivante est utile pour définir la notion de poly-convexité d'une fonction

Notation 4 *Soit* $T : \mathbb{M}^{m,n} \to \mathbb{R}^{\tau(m,n)}$ *définie pour tout* $\xi \in \mathbb{M}^{m,n}$ *par*

$$T(\xi) = (\xi, adj_2\xi, \ldots, adj_{m\wedge n}\xi)$$

où pour $1 \leq s \leq m \wedge n = \min\{m,n\}$ *,*
$adj_s\xi$ *dénote la matrice de tous les mineurs de* ξ *d'ordre* s *et*

$$\tau = \tau(m,n) = \sum_{s=1}^{m\wedge n} \binom{m}{s}\binom{n}{s}$$

avec

$$\binom{m}{s} = \frac{m!}{s!(m-s)!}.$$

En particulier, si $m = n = 2$*, alors* $T(\xi) = (\xi, \det\xi)$.

Définition 5.1.2 *Une fonction* $F : \mathbb{M}^{m,n} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est dite poly-convexe s'il existe une fonction convexe* $\hat{F} : \mathbb{R}^{\tau(m,n)} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *telle que*

$$F(\xi) = \hat{F}(T(\xi))$$

Définition 5.1.3 *Une fonction* $F : \mathbb{M}^{m,n} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est dite rang-1-convexe si*

$$F(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) \leq \lambda F(\xi) + (1-\lambda)F(\eta) \tag{5.2}$$

pour tout $\lambda \in [0,1]$ *et pour tout* $\xi, \eta \in \mathbb{M}^{m,n}$ *avec* ***rang*** $(\xi - \eta) \leq 1$.

Remarque 21 *Dans la définition d'une fonction quasi-convexe, on a supposé que* F *ne prend que des valeurs finies. Or si on suppose qu'elle peut prendre des valeurs infinies* $+\infty$ *la définition de la quasi-convexité dans ce cas ne sera plus équivalente à la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle intégrale. D'autre part, on perd aussi l'implication connue dans le cas fini voir ci-dessus :*

$$F \text{ quasi-convexe } \Rightarrow F \text{ rang-1-convexe .}$$

Le théorème suivant illustre bien le lien entre ces différentes notions voir [29] et [27].

Théorème 5.1.4 *(cf. [29]) Soit* $F : \mathbb{M}^{m,n} \to \mathbb{R}$ *une fonction. Alors*

1. F *convexe* $\Rightarrow F$ *poly-convexe* $\Rightarrow F$ *quasi-convexe* $\Rightarrow F$ *rang-1-convexe.* (5.3)
2. *Dans le cas scalaire* ($m = 1$ *ou* $n = 1$) *toutes ces notions sont équivalentes.*

Remarque 22 *La réciproque de chacune des implications ci-dessus est fausse en général. Cependant, par exemple*

$$F \text{ rang-1-convexe} \not\Rightarrow F \text{ quasi-convexe ,}$$

a été prouvé par V. Svérak [50] pour la dimension $m \geq 3$ *et* $n \geq 2$.

5.2 Les enveloppes convexes des fonctions

On définit les enveloppes convexes, poly-convexes, quasi-convexes et rang-1-convexes d'une fonction $F : \mathbb{M}^{m,n} \to \mathbb{R}$ respectivement par, la plus grande fonction convexe, poly-convexe, quasi-convexe et rang-1-convexe qui minore F. On les dénote respectivement par,

$$\begin{aligned}
CF(\xi) &= \sup\{f(\xi), f \text{ convexe }, f \leq F\},\\
PF(\xi) &= \sup\{f(\xi), f \text{ poly-convexe }, f \leq F\},\\
QF(\xi) &= \sup\{f(\xi), f \text{ quasi-convexe } f \leq F\},\\
RF(\xi) &= \sup\{f(\xi), f \text{ rang-1-convexe } f \leq F\}.
\end{aligned}$$

A l'aide du théorème de Carathéodory, ces différentes enveloppes ont été caractérisées par Dacorogna [27] et on a

Théorème 5.2.1 *(cf. [29]) Soit $F : \mathbb{M}^{m,n} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $\xi \in \mathbb{M}^{m,n}$, $\alpha \leq F(\xi)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*
Alors

$$\begin{aligned}
CF(\xi) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{nm+1} \lambda_i F(\xi_i) \, : \, \sum_{i=1}^{nm+1} \lambda_i \xi_i = \xi\right\},\\
PF(\xi) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\tau(n,m)+1} \lambda_i F(\xi_i) \, : \, \sum_{i=1}^{\tau(n,m)+1} \lambda_i T(\xi_i) = T(\xi)\right\},\\
RF(\xi) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{I} \lambda_i F(\xi_i) \, : \, \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \xi_i = \xi \textit{ et } (\lambda_i, \xi_i)_{1\leq i\leq I} \textit{ satisfont } (H_I)\right\}.
\end{aligned}$$

De plus CF, PF et QF sont localement lipschitziennes. Enfin, si on suppose en outre que F est continue alors

$$QF(\xi) = \inf_{\varphi \in W_0^{1,\infty}(D;\mathbb{R}^m)} \frac{1}{mes(D)} \int_D F(\xi + \nabla\varphi(x))\, dx,$$

où $D \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné, QF est également localement lipschitzienne.

Pour caractériser l'enveloppe rang-1-convexe, la propriété (H_I) des matrices, d'après la présentation dans [29] est donnée par la définition suivante

Définition 5.2.2 *Soit $\lambda_i > 0$ avec $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$ où N est un entier. Soit $\xi_{(i)} \in \mathbb{M}^{m,n}$, $1 \leq i \leq N$. On dit que $(\lambda_i, \xi_{(i)})$ satisfont (H_N) si*

1. *$N = 2$, alors rang$\{\xi_{(1)} - \xi_{(2)}\} \leq 1$*

2. $N > 2$, *alors à une permutation prés, rang*$\{\xi_{(1)} - \xi_{(2)}\} \leq 1$ *et si l'on pose*

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2, & \eta_{(1)} = \frac{\lambda_1 \xi_{(1)} + \lambda_2 \xi_{(2)}}{\lambda_1 + \lambda_2}, \\ \mu_i = \lambda_{i+1}, & \eta_{(i)} = \xi_{(i+1)} \quad 2 \leq i \leq N. \end{cases}$$

alors $(\mu_i, \eta_{(i)})$ *pour* $1 \leq i \leq N-1$, *satisfont* (H_{N-1}) *à une permutation prés.*

Remarque 23

1. *Clairement par le Théorème 5.1.4 on a*

$$CF \leq PF \leq QF \leq RF \leq F \tag{5.4}$$

2. *Dans le cas scalaire (quand* $m = 1$ *ou* $n = 1$*) les différentes enveloppes sont toutes les mêmes et ainsi que dans le cas général si* RF *est convexe.*

Chapitre 6

Résultats de relaxation

Le but de ce chapitre est de calculer explicitement l'enveloppe quasi-convexe de certaine classe de fonctions du type suivant

$$F(\xi) = g(\psi(\xi), T_{m,n}(\xi)), \xi \in \mathbb{M}^{m,n}, \tag{6.1}$$

qui dépendent du gradient à travers une fonction positivement homogène ψ de degré p et le vecteur $(T_{m,n})$ de tous les mineurs d'ordre n de la matrice ξ simultanément.

Comme nous l'avons déjà mentionné il est en général difficile de calculer explicitement QF l'enveloppe quasi-convexe. Voir à ce sujet par exemple [29], [42], [37].

Dans notre cas, nous avons calculé les deux enveloppes poly-convexe PF et rang-1-convexe RF puis par les inégalités dans (5.4) nous avons obtenu l'enveloppe quasi-convexe QF.

6.1 Notations et hypothèses

Laissez-nous d'abord introduire les notations et les hypothèses concernant la classe de fonctions à étudier.

Notation 5 *Pour $\xi \in \mathbb{M}^{m,n}$ avec $m \geq n$ on note par*

– $\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_m$ *les vecteurs ligne de la matrice ξ.*

– $\xi^1, \ldots, \xi^j, \ldots, \xi^n$ *les vecteurs colonne de la matrice ξ.*

– $\widehat{\xi}^{i_1, i_2, \ldots, i_{m-n}} \in \mathbb{M}^{n,n}$, $\;_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{m-n} \leq m}$ *la $n \times n$ matrice obtenue de ξ en supprimant les $(m-n)$ lignes $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_{m-n}}$.*

– $T_{m,n} : \mathbb{M}^{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}^{\binom{n}{m}}$ *est telle que*

$$T_{m,n}(\xi) = (\det \widehat{\xi}^{i_1,i_2,\ldots,i_{m-n}})_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{m-n}\le m},$$

autrement dit $T_{m,n}(\xi)$ désigne le vecteur de tout les mineurs d'ordre n de la matrice ξ. En particulier,

si $m = n$ on a $T_{n,n}(\xi) = \det\xi$,
si $m = n+1$ on a $T_{n+1,n}(\xi) = adj_n(\xi)$ avec un signe près.

Hypothèses 6.1.1 *Pour $m \ge n$ on considère les fonctions suivantes :*

– *ψ est une fonction homogène de degré $p > 0$ et continue,*

$$\psi : \mathbb{M}^{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(t\xi) = t^p\psi(\xi) \text{ pour tout } t > 0 \text{ et } \xi \in \mathbb{M}^{m,n},$$

– *$g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\binom{n}{m}} \to \mathbb{R}$ tel que $g(\cdot,s)$ est bornée inférieurement pour tout $s \in \mathbb{R}^{\binom{n}{m}}$,*

– *$h : \mathbb{R}^{\binom{n}{m}} \to \mathbb{R}$, est une fonction continue définie par $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x,s) = h(s)$.*

6.2 Quelques résultats de décomposition des matrices

Avant de procéder aux principaux théorèmes de relaxation, on aura besoin de quelques résultats de décomposition des matrices.

Concernant les fonctions homogènes de degré p, rappelons d'abord un résultat de décomposition du à Bousselsal et Le Dret [12] suivant :

Lemme 6.2.1 *(cf. [12] théorème 2.1) Soit ξ dans $\mathbb{M}^{m,n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{M}^{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue homogène de degré $p > 0$ telle que $\psi(\xi) < \alpha$. On suppose qu'il existe une matrice de rang un $c\otimes d \in \mathbb{M}^{m,n}$ tels que*

$$\psi(\pm c\otimes d) > 0$$

Alors il existe $\lambda \in [0,1]$ et $t > 0$ tels que

$$\psi(\xi + tc\otimes d) = \psi\left(\xi - \frac{\lambda t}{1-\lambda} c\otimes d\right) = \alpha. \tag{6.2}$$

Le lemme précédent est insuffisant dans notre cas, car les fonctions à étudier dépendent également du vecteur des mineurs d'ordre n. Ce qui nous a conduit à démontrer le résultat de décomposition des matrices compatible avec la classe de fonctions dans (6.1) suivant :

Lemme 6.2.2 *Soit* $\psi : \mathbb{M}^{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}$, $m \geq n$ *une fonction continue homogène de degré* $p > 0$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Soit* $\xi \in \mathbb{M}^{m,n}$ *avec* $T_{m,n}(\xi) \neq 0$. *On suppose qu'il existe deux vecteurs* a, $b \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *tels que*

$$\psi(\pm\{-\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_1}\xi^1 + \sum_{k=2}^{n} \xi^k\} \otimes a) > 0 \tag{6.3}$$

et

$$\psi(\pm\{-\sum_{k=2}^{n} \frac{b_k}{b_1}\xi^1 + \sum_{k=2}^{n} \xi^k\} \otimes b) < 0 \tag{6.4}$$

Alors il existe $\lambda \in [0,1]$, A *et* B *dans* $\mathbb{M}^{m,n}$ *tels que :*

$$\begin{gathered}\xi = \lambda A + (1-\lambda) B \\ \mathbf{rang}(A - B) \leq 1 \\ \psi(A) = \psi(B) = \alpha \\ T_{m,n}(A) = T_{m,n}(B) = T_{m,n}(\xi).\end{gathered}$$

Remarque 24

(i) *Pour alléger l'écriture, on a supposé, sans perte de généralité, que* $a_1 \neq 0$ *et* $b_1 \neq 0$. *Si ce n'est pas le cas, comme* $a, b \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *il existe toujours des composantes* a_{i_0} *et* b_{j_0} *non nuls, dans cette situation il suffit juste de remplacer les hypothèses* (6.3), (6.4) *dans le Lemme 6.2.2 par*

$$\psi(\pm\{-\sum_{k=1_{k\neq i_0}}^{n} \frac{a_k}{a_{i_0}}\xi^1 + \sum_{k=1, k\neq i_0}^{n} \xi^k\} \otimes a) > 0,$$

$$\psi(\pm\{-\sum_{k=1_{k\neq j_0}}^{n} \frac{b_k}{b_{j_0}}\xi^1 + \sum_{k=1, k\neq i_0}^{n} \xi^k\} \otimes b) > 0,$$

respectivement et on obtient le même résultat.

(ii) *Dorénavant et afin de simplifier l'écriture on pose*

$$c = -\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_1}\xi^1 + \sum_{k=2}^{n} \xi^k.$$

Preuve du Lemme 6.2.2
Soit $\xi \in \mathbb{M}^{m,n}$ satisfaisant les hypothèses (6.3) et (6.4) avec $T_{m,n}(\xi) \neq 0$. On distingue trois cas.
cas 1. Le cas $\psi(\xi) = \alpha$.

les hypothèses (6.3) et (6.4) ne sont pas nécessaires, le lemme est évident dans ce cas, il suffit de choisir $A = B = \xi$.
cas 2. Le cas $\psi(\xi) < \alpha$.

Par l'hypothèse (6.3) on peut ainsi appliquer le lemme 6.2.1 qui nous donne l'existence de $\lambda \in [0,1]$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que

$$\psi(\xi - (1-\lambda)tc \otimes a) = \psi(\xi + \lambda tc \otimes a) = \alpha.$$

Il suffit de prendre

$$A = \xi - (1-\lambda)tc \otimes a \quad \text{et} \quad B = \xi + \lambda tc \otimes a. \tag{6.5}$$

pour obtenir

$$\xi = \lambda A + (1-\lambda)B$$

$$\textbf{rang } (A-B) \leq 1$$

$$\psi(A) = \psi(B)$$

Il reste encore à montrer que

$$T_{m,n}(A) = T_{m,n}(B) = T_{m,n}(\xi)$$

ce qui est équivalent à

$$\det \widehat{A}^{i_1,\dots,i_{m-n}} = \det \widehat{B}^{i_1,\dots,i_{m-n}} = \det \widehat{\xi}^{i_1,\dots,i_{m-n}}, \quad \forall_{1 \leq i_1 < \dots < i_{m-n} \leq m}.$$

Il suit de (6.5) que

$$\widehat{A}^{i_1,\dots,i_{m-n}} = \widehat{\xi}^{i_1,\dots,i_{m-n}} - (1-\lambda)t \left\{ -\sum_{k \neq 1}^{n} \frac{a_k}{a_1} \widehat{\xi^1}^{i_1,\dots,i_{m-n}} + \sum_{k=2}^{n} \widehat{\xi^k}^{i_1,\dots,i_{m-n}} \right\} \otimes a$$

$$\forall_{1 \leq i_1 < \dots < i_{m-n} \leq m}$$

En effet, pour tout $d \in \mathbb{R}^m$ et $a \in \mathbb{R}^n$, $d \otimes a \in \mathbb{M}^{m,n}$ est une matrice de rang 1 et on a

$$\widehat{d \otimes a}^{i_1,\dots,i_{m-n}} = \widehat{d}^{i_1,\dots,i_{m-n}} \otimes a.$$

Les vecteurs $\widehat{\xi^j}^{i_1,\dots,i_{m-n}}$, $\quad j = 1\dots,n$ sont exactement les vecteurs colonnes de la matrice $\widehat{\xi}^{i_1,\dots,i_{m-n}}$. Donc on en déduit que

$$\det \widehat{A}^{i_1,\dots,i_{m-n}} = \det \widehat{\xi}^{i_1,\dots,i_{m-n}} - (1-\lambda)t \sum_{j=1}^{n} a_j \det X(i_1,\dots,i_{m-n},j), \quad \forall_{1 \leq i_1 < \dots < i_{m-n} \leq m}$$

où la matrice $X(i_1,\dots,i_{m-n},j)$ est obtenue en remplaçant dans la matrice $\widehat{\xi}^{i_1,\dots,i_{m-n}}$ le vecteur colonne $\widehat{\xi^j}^{i_1,\dots,i_{m-n}}$ par le vecteur colonne

$$-\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_1} \widehat{\xi^1}^{i_1,\dots,i_{m-n}} + \sum_{k=2}^{n} \widehat{\xi^k}^{i_1,\dots,i_{m-n}}$$

c'est-à-dire les vecteurs colonnes de la matrice $X(i_1,\dots,i_{m-n},j)$ sont données par

$$X^l(i_1,\dots,i_{m-n},j)=\begin{cases} \widehat{\xi^l}^{i_1,\dots,i_{m-n}} & \text{si }: l\neq j \\ -\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{a_1}\widehat{\xi^1}^{i_1,\dots,i_{m-n}}+\sum_{k=2}^{n}\widehat{\xi^k}^{i_1,\dots,i_{m-n}} & \text{si }: l=j \end{cases}$$

On obtient alors

$$\det X(i_1,\dots,i_{m-n},j)=\begin{cases} -\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{a_1}\det\widehat{\xi}^{i_1,\dots,i_{m-n}} & \text{si } j=1 \\ \det\widehat{\xi}^{i_1,\dots,i_{m-n}} & \text{si } j\neq 1 \end{cases}\quad \forall_{1\leq i_1<\dots<i_{m-n}\leq m}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\det\widehat{A}^{i_1,\dots,i_{m-n}} &= \\ &= \det\widehat{\xi}^{i_1,\dots,i_{m-n}}-(1-\lambda)t\left\{a_1\left(-\sum_{k\neq 1}^{n}\frac{a_k}{a_1}\right)\det\widehat{\xi}^{i_1,\dots,i_{m-n}}+\dots+a_n\det\widehat{\xi}^{i_1,\dots,i_{m-n}}\right\} \\ &= \det\widehat{\xi}^{i_1,\dots,i_{m-n}}-(1-\lambda)t\left\{a_1\left(-\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{a_1}\right)\det\widehat{\xi}^{i_1,\dots,i_{m-n}}+\sum_{k=2}^{n}a_k\det\widehat{\xi}^{i_1,\dots,i_{m-n}}\right\} \\ &= \det\widehat{\xi}^{i_1,\dots,i_{m-n}}.\quad \forall 1\leq i_1<\dots<i_{m-n}\leq m.\end{aligned}$$

Pour la matrice B, le même argument conduit à

$$\det\widehat{B}^{i_1,\dots,i_{m-n}}=\det\widehat{\xi}^{i_1,\dots,i_{m-n}}{}_{1\leq i_1<\dots<i_{m-n}\leq m},$$

ce qui termine la preuve dans ce cas.

cas 3. Le cas $\psi(\xi)>\alpha$.

Pour traiter ce cas, on pose $\tilde{\psi}=-\psi$, qui est aussi une fonction homogène de degré $p>0$ et on a $\tilde{\psi}(\xi)<-\alpha$ puisque $\psi(\xi)>\alpha$. Maintenant par l'hypothèse (6.4) on procède de la même manière que dans le deuxième cas (cas 2.). $\square$

6.3 Quelques résultats de relaxation

Pour calculer l'enveloppe quasi-convexe de la classe de fonction

$$F(\xi)=g(\psi(\xi),T_{m,n}(\xi)),\xi\in\mathbb{M}^{m,n},$$

proposée, nous distinguons deux cas, cas des fonctions h quelconque si $T_{m,n}$ est le det ou bien adj_n puis cas des fonctions h convexe dans le cas général.

Nous présentons maintenant notre premier résultat principal

Théorème 6.3.1 *Soient $m \geq n$, $\psi : \mathbb{M}^{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré $p > 0$, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\binom{n}{m}} \to \mathbb{R}$ telle que $g(.,s)$ est bornée inférieurement pour tout $s \in \mathbb{R}^{\binom{n}{m}}$ et $h : \mathbb{R}^{\binom{n}{m}} \to \mathbb{R}$ définie par $h(s) = \inf_{x\in\mathbb{R}} g(.,s)$ est supposée convexe.*

On définit $F : \mathbb{M}^{m,n} \to \mathbb{R}$ par

$$F(\xi) = g(\psi(\xi), T_{m,n}(\xi)).$$

Alors sous les hypothèses de Lemme 6.2.2 on a

$$PF(\xi) = QF(\xi) = RF(\xi) = h(T_{m,n}(\xi)),\ \forall F \in \mathbb{M}^{m,n}.$$

Preuve.

Puisque $\inf_{x\in\mathbb{R}} g(x,s) = h(s)$ et h est supposé convexe alors la fonction

$$\xi \in \mathbb{M}^{m,n} \to h(T_{m,n}(\xi))$$

est poly-convexe et minore F. On a alors

$$h(T_{m,n}(\xi)) \leq F(\xi),$$

par définition de l'enveloppe poly-convexe on obtient

$$h(T_{m,n}(\xi)) \leq PF(\xi) \leq QF(\xi) \leq RF(\xi). \tag{6.6}$$

Il reste à montrer que

$$RF(\xi) \leq h(T_{m,n}(\xi)). \tag{6.7}$$

Pout tout $s \in \mathbb{R}^{\binom{n}{m}}$ la fonction $g(.,s)$ est minorée. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\alpha_\epsilon \in \mathbb{R}$ tel que

$$h(s) \leq g(\alpha_\epsilon, s) < h(s) + \epsilon. \tag{6.8}$$

Soit ξ dans $\mathbb{M}^{m,n}$, avec $T_{m,n}(F) \neq 0$. Par le lemme 6.2.2, il existe deux matrices $A(\varepsilon), B(\varepsilon)$ dans $\mathbb{M}^{m,n}$, $\lambda_\varepsilon \in [0,1]$ tels que

$$\xi = \lambda_\varepsilon A(\varepsilon) + (1-\lambda_\varepsilon) B(\varepsilon)$$
$$\mathbf{rang}(A(\varepsilon) - B(\varepsilon)) \leq 1$$
$$\psi(A(\varepsilon)) = \psi(B(\varepsilon)) = \alpha_\varepsilon$$
$$T_{m,n}(A(\varepsilon)) = T_{m,n}(B(\varepsilon)) = T_{m,n}(\xi).$$

Utilisant la rang-un convexité de l'enveloppe RF il vient :

$$RF(\xi) < \epsilon + h(T_{m,n}(\xi)) \forall \epsilon > 0, \forall \xi \in \mathbb{M}^{m,n}, T_{m,n}(\xi) \neq 0. \tag{6.9}$$

On fait tendre ε vers zéro dans les inégalités (6.9) on obtient que

$$RF(\xi) \leq h(T_{m,n}(\xi)), \forall \xi \in \mathbb{M}^{m,n}, T_{m,n}(\xi) \neq 0, \tag{6.10}$$

par la continuité des enveloppes et de la fonction h (6.10) devient

$$RF(\xi) \leq h(T_{m,n}(F)), \forall \xi \in \mathbb{M}^{m,n}, \tag{6.11}$$

combinant (6.6) et (6.11) on déduit que

$$PF(\xi) = QF(\xi) = RF(\xi) = h(T_{m,n}(\xi)), \forall \xi \in \mathbb{M}^{m,n}$$

et le théorème est établi. $\square$

Notre second résultat de relaxation concerne le cas $m = n$ ou bien $m = n+1$, c'est le cas où le vecteur des mineurs d'ordre n est le det ou bien adj_n

Théorème 6.3.2 *Soient $m \geq n$, $\psi : \mathbb{M}^{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré $p > 0$, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\binom{n}{m}} \to \mathbb{R}$ telle que $g(.,s)$ est bornée inférieurement pour tout $s \in \mathbb{R}^{\binom{n}{m}}$ et $h : \mathbb{R}^{\binom{n}{m}} \to \mathbb{R}$ définie par $h(s) = \inf_{x \in \mathbb{R}} g(.,s)$ supposée continue.*

On définit $F : \mathbb{M}^{m,n} \to \mathbb{R}$ par

$$F(\xi) = g(\psi(\xi), T_{m,n}(\xi))$$

Alors sous les hypothèses de Lemme 6.2.2 on a

– *Si $m = n$*

$$PF(\xi) = QF(\xi) = RF(\xi) = Ch(\det(\xi)), \forall F \in \mathbb{M}^{n,n}.$$

– *Si $m = n+1$*

$$PF(\xi) = QF(\xi) = RF(\xi) = Ch(adj_n(\xi)), \forall F \in \mathbb{M}^{n+1,n}.$$

Commençons par mentionner d'abord un résultat de relaxation dû à Daccorogna

Lemme 6.3.3 *(cf. [Da.]) Soient $m = n$ ou $m = n+1$, $F : \mathbb{M}^{m,n} :\longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^{\binom{n}{m}} \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que*

$$F(\xi) = h(T_{m,n}(\xi))$$

Alors

$$PF(\xi) = QF(\xi) = RF(\xi) = Ch(T_{m,n}(\xi)) \quad \forall \xi \in \mathbb{M}^{m,n}$$

Remarque 25 *Le lemme est vérifié dans deux cas exactement*

1. *Si $m = n$ on a $T_{n,n}(\xi) = \det \xi$.*
2. *Si $m = n+1$ on a $adj_n(\xi) = (\det \widehat{\xi}^1, -\det \widehat{\xi}^2, \ldots, (-1)^{n+2} \det \widehat{\xi}^{n+1})$.*

Preuve du Théorème 6.3.2. Pour $m = n$ où $m = n + 1$ et pour un h quelconque alors par le Lemme 6.3.3, la fonction

$$\xi \to Ch(T_{m,n}(\xi))$$

est poly-convexe et par les inégalités (5.4) entre les enveloppes on a

$$Ch(T_{m,n}(\xi)) \leq h(T_{m,n}(\xi))$$

ou encore

$$Ch(T_{m,n}(\xi)) \leq h(T_{m,n}(\xi)) \leq g(\psi(\xi)), T_{m,n}(\xi)) = F(\xi)$$

donc

$$h(T_{m,n}(\xi)) \leq F(\xi). \tag{6.12}$$

comme la fonction dans le membre gauche de (6.12) est poly-convexe, par définition des enveloppes on déduit que

$$Ch(T_{m,n}(\xi)) \leq PF(\xi) \leq QF(\xi) \leq RF(\xi) \tag{6.13}$$

il reste à montrer que

$$RF(\xi) \leq Ch(T_{m,n}(\xi)). \tag{6.14}$$

De façon analogue à la preuve de (6.7) et en s'appuyant sur le lemme 6.2.2 on obtient :

$$Ch(T_{m,n}(\xi)) \leq RF(\xi) \leq h(T_{m;n}(\xi)) \tag{6.15}$$

$RF(\xi)$ est une fonction rang un convexe et d'autre part $Ch(T_{m,n}(\xi))$ n'est autre que l'enveloppe rang un convexe de $h(T_{m,n}(\xi))$ (la plus grande fonction rang un convexe qui la minore), donc nécessairement

$$Ch(T_{m,n}(F)) = RF(\xi)$$

par conséquent

$$PF(\xi) = QF(\xi) = RF(\xi) = Ch(T_{m,n}(\xi)).$$

□

Remarque 26 *Les fonctions de la forme $g(\det \xi)$, $g(adj_n(\xi))$ et $g(\psi(\xi))$ dont les enveloppes étaient déjà connues, voir [29] et [12], sont des cas particuliers de fonctions $F(\xi) = g(\psi(\xi), (T_{m;n}(\xi))$.*

6.4 Fonctions homogène de degré 2

Les formes quadratiques sont des fonctions positivement homogènes de degré 2, nous allons revoir de près nos résultats de relaxation pour quelques formes quadratiques définies sur les espaces de matrices où nous allégeons les hypothèses.

Voici quelques notations concernant ces formes quadratiques

Notation 6

– *On note par* $q : \mathbb{M}^{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}$, *une forme quadratique définie sur* $\mathbb{M}^{m,n}, m \geq n$,

– $S = (S_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *est une matrice symétrique dans* $\mathbb{M}^{n,n}$,

– $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *les valeurs propres de la matrice* S,

– $\xi^i \cdot \xi^j$ *le produit scalaire dans* $\mathbb{R}^m$ *des deux vecteurs* ξ^i *et* ξ^j.

– $q_s : \mathbb{M}^{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}$, *la forme quadratique définie par*

$$\begin{array}{rcl} q_s : \mathbb{M}^{m,n} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \xi & \longmapsto & q_s(F) = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} S_{ij} \xi^i \cdot \xi^j \end{array} \tag{6.16}$$

Remarque 27 *Soit* $a \otimes b$ *une matrice de rang un dans* $\mathbb{M}^{m,n}$ *on a*

$$q_s(a \otimes b) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} S_{ij}(b_i a) \cdot (b_j a) = |a|_2^2 \sum_{1 \leq i,j \leq n} S_{ij} b_i b_j = |a|_2^2 b^t S b, \tag{6.17}$$

$$\textit{et } q_s(a \otimes b) = q_s(-a \otimes b)$$

où $|\cdot|_2$ *désigne la norme Euclidienne dans* $\mathbb{R}^m$.

Le résultat de relaxation pour la classe des fonctions

$$F(\xi) = g(q_s(\xi), T_{m,n}(\xi)), \xi \in \mathbb{M}^{m,n}$$

est donné dans la proposition suivante :

Proposition 6.4.1 *Soient* $m \geq n$, $q_s : \mathbb{M}^{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ *la forme quadratique définie dans* (6.16), $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\binom{n}{m}} \to \mathbb{R}$ *telle que* $g(.,y)$ *est bornée inférieurement pour tout* $y \in \mathbb{R}^{\binom{n}{m}}$
et $h : \mathbb{R}^{\binom{n}{m}} \to \mathbb{R}$ *définie par* $h(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}} g(x,y)$.
On définit $F : \mathbb{M}^{m,n} \to \mathbb{R}$ *par*

$$F(\xi) = g(q_s(\xi), T_{m,n}(\xi))$$

On suppose qu'il existe deux valeurs propres $\lambda_{i_0}, \lambda_{i_1}$ *de la matrice* S *telles que*

$$\lambda_{i_0} > 0 \quad \textit{et} \quad \lambda_{i_1} < 0.$$

Alors on a

– *Si h est convexe*

$$PF(\xi) = QF(\xi) = RF(\xi) = h(T_{m,n}(\xi)), \quad \forall \xi \in \mathbb{M}^{m,n}, m \geq n.$$

– *Si h est continue*

$$PF(\xi) = QF(\xi) = RF(\xi) = Ch(T_{m,n}(\xi)), \quad \forall \xi \in \mathbb{M}^{m,n}.$$

Preuve de la Proposition 6.4.1 On note par $u, v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, les vecteurs propres de la matrice S associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_{i_0}, \lambda_{i_1}$ c'est-à-dire

$$Su = \lambda_{i_0} u \quad \text{et} \quad Sv = \lambda_{i_1} v.$$

on a

$$u^t Su = |u|_2^2 \lambda_{i_0} > 0 \quad \text{et} \quad v^t Sv = |v|_2^2 \lambda_{i_1} < 0.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $u_1 \neq 0$ et $v_1 \neq 0$ tels que

$$u^t = (u_1, \ldots, u_n), \quad v^t = (v_1, \ldots, v_n).$$

Soit $\xi \in \mathbb{M}^{m,n}$, $m \geq n$ tels que $T_{m,n}(\xi) \neq 0$. On choisit

$$a = \left\{ -\sum_{k=2}^{n} \frac{u_k}{u_1} \xi^1 + \sum_{k=2}^{n} \xi^k \right\} \quad \text{et} \quad b = u,$$

et par la remarque 27 on obtient

$$q_s \left(\left\{ -\sum_{k=2}^{n} \frac{u_k}{u_1} \xi^1 + \sum_{k \neq 1}^{n} \xi^k \right\} \otimes u \right) = \lambda_{i_0} |a|_2^2 |u|_2^2 > 0. \tag{6.18}$$

Avec le choix

$$a = \left\{ -\sum_{k=2}^{n} \frac{v_k}{v_1} \xi^1 + \sum_{k=2}^{n} \xi^k \right\} \quad \text{et} \quad b = v,$$

et encore par la remarque 27 on déduit que

$$q_s \left(\left\{ -\sum_{k=2}^{n} \frac{v_k}{v_1} \xi^1 + \sum_{k \neq 1}^{n} \xi^k \right\} \otimes v \right) = \lambda_{i_1} |a|_2^2 |v|_2^2 < 0. \tag{6.19}$$

En tenant compte du deuxième point de la remarque 27 et des relations (6.18) et (6.19) les hypothèses des théorèmes 6.3.1 et 6.3.2 sont satisfaites, ainsi la preuve de la proposition est achevée. □

6.5 Applications

Nous terminons ce chapitre par calculer l'enveloppes quasi-convexe pour quelques exemples en relation avec l'énergie de densité proposée par James-Ericksen, donné pour $\xi \in \mathbb{M}^{2,2}$ par

$$F(\xi) = \kappa_1 \left(|\xi^1|^2 + |\xi^2|^2 - 2\right)^2 + \kappa_2 \left(\xi^1 \cdot \xi^2\right)^2 + \kappa_3 \left(\left(\frac{|\xi^1|^2 - |\xi^2|^2}{2}\right) - \varepsilon^2\right)$$

avec $\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \geq 0$.

Exemple. 6.5.1 Considérons la fonction $F : \mathbb{M}^{m,n} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$F(\xi) = \left(\sum_{i=1}^{s} |\xi^i|^p - \sum_{i=s+1}^{n} |\xi^i|^p\right)^2 + h(T_{m,n}(\xi)) \quad \xi \in \mathbb{M}^{m,n}, m \geq n$$

où la fonction h *est supposée convexe et* $p > 0$*.*

Alors l'enveloppe quasi-convexe de F *est donnée par*

$$QF(\xi) = h(T_{m,n}(\xi))$$

il suffit donc de vérifier que $\psi(\xi) = \sum_{i=1}^{s} |\xi^i|^p - \sum_{i=s+1}^{n} |\xi^i|^p$ *est une fonction homogène de degré* $p > 0$ *et satisfait l'hypothèse du théorème 6.3.1 pour* $a = (1, 0, \ldots, 0)^t$ *et* $b = (0, \ldots, 0, 1)^t$*.*

Exemple. 6.5.2 Considérons la fonction $F : \mathbb{M}^{2,2} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$F(\xi) = \left|\xi^1 \cdot \xi^2\right|^2 + h(\det \xi) \quad \xi \in \mathbb{M}^{2,2},$$

où la fonction h *est supposée continue.*

Alors l'enveloppe quasi-convexe de F *est donnée par*

$$QF(\xi) = Ch(\det \xi),$$

puisque la fonction homogène $\psi(\xi) = \left|\xi^1 \cdot \xi^2\right|^2$ *est de degré 2, du type* q_s *avec*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

qui admet deux valeurs propres $\lambda_{i_0} = \frac{1}{2}$ *et* $\lambda_{i_1} = -\frac{1}{2}$*, donc satisfait les hypothèses de la proposition 6.4.1.*

Exemple. 6.5.3 Considérons la fonction $F : \mathbb{M}^{m,n} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$F(\xi) = \varphi(q(\xi)) + h(\det \xi), \quad \xi \in \mathbb{M}^{2,2},$$

− *où la fonction* h *est supposée continue,*
− *la fonction* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est bornée inférieurement, donc il existe un* $\mu \in \mathbb{R}$ *tel que* $\inf_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x) = \mu$
− *et la forme quadratique* q *est donné par* $q(\xi) = \mid \xi^1 \mid^2 + 4(\xi^1 \cdot \xi^2) + \mid \xi^2 \mid^2$ *peut être réécrite*

$$q(\xi) = S_{11} \mid \xi^1 \mid^2 + 2S_{12}(\xi^1 \cdot \xi^2) + S_{22} \mid \xi^2 \mid^2 .$$

Alors par la proposition 6.4.1 on a

$$QF(\xi) = \mu + h(\det \xi),$$

puisque $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *admet deux valeurs propres* $\lambda_1 = -1$ *et* $\lambda_2 = 3$ *de signes différents.*

Remarque 28 *Les résultats prouvés dans [9] ne peuvent pas être appliquée aux exemples ci-dessus.*

Chapitre 7

Condition nécessaire pour l'existence d'un minimiseur

On s'intéresse dans ce chapitre à considérer le problème de calcul des variations associé à la classe de fonctions relaxées dans le chapitre 6. On donne dans un premier temps une condition nécessaire pour l'existence d'un minimiseur.

Soit $F(\cdot) = g(\psi(\cdot), T_{m,n}(\cdot))$ la fonction relaxée au chapitre précédent, avec les mêmes hypothèses (Hypothèse 6.1.1) sur les fonctions g, h, et ψ on a

Théorème 7.0.1 *soit*

$$(P)\begin{cases} u \in W^{1,\infty}_{\xi_0}(\Omega, \mathbb{R}^m) \\ \inf_{v \in W^{1,\infty}_{\xi_0}} \int_\Omega F(\nabla v(x))dx = \int_\Omega F(\nabla u(x))dx \end{cases}$$

Une condition nécessaire pour que (P) admette une solution, est que le minimum de $g(.,s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}^{\binom{n}{m}}$ soit atteint,
Où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $\xi_0 \in \mathbb{M}^{m,n}$ et $W^{1,\infty}_{\xi_0} = \{u \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m), v(x) = \xi_0 x \text{ sur } \partial\Omega\}$.

Preuve. Par le théorème de relaxation classique (c.f [Da.] page 228) on a

$$\begin{aligned} \inf_{v \in W^{1,\infty}_{\xi_0}} \int_\Omega F(\nabla v(x))dx = \min_{v \in W^{1,\infty}_{\xi_0}} \int_\Omega QF(\nabla v(x))dx &= |\Omega| QF(\xi_0) \\ &= |\Omega| h(T_{m,n}(\xi_0)), \end{aligned} \tag{7.1}$$

La dernière égalité vient du théorème 6.3.1 de relaxation. D'une part on a

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} g(x,s) = h(s) \quad \text{pour tout} \quad s \in \mathbb{R}^{\binom{n}{m}}, \tag{7.2}$$

alors pour tout v dans $W^{1,\infty}_{\xi_0}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ on a

$$\int_\Omega h(T_{m,n}(\nabla v(x)))dx \le \int_\Omega g(\psi(\nabla v(x)), T_{m,n}(\nabla v(x)))dx. \tag{7.3}$$

D'autre part, la fonction $h(T_{m,n}(\cdot))$ est quasi-convexe c'est-à-dire :

$$|\Omega| h(T_{m,n}(\xi_0)) \leq \int_{\Omega} h(T_{m;n}(\nabla v(x)))dx. \tag{7.4}$$

On suppose maintenant que (P) admet une solution $u \in W^{1,\infty}_{\xi_0}$, alors de (7.1) on obtient immédiatement que

$$\int_{\Omega} F(\nabla u(x))dx = |\Omega| h(T_{m,n}(\xi_0)),$$

donc

$$\int_{\Omega} g(\psi(\nabla u(x)), T_{m,n}(\nabla u(x)))dx = |\Omega| h(T_{m,n}(\xi_0)).$$

Combinant (7.3) et (7.4) on obtient

$$\int_{\Omega} g(\psi(\nabla u(x),, T_{m,n}(\nabla u(x)))dx = \int_{\Omega} h(T_{m,n}(\nabla u(x)))dx$$

c'est-à-dire

$$\int_{\Omega} [g(\psi(\nabla u(x), T_{m,n}(\nabla u(x))) - h(T_{m,n}(\nabla u(x)))]dx = 0.$$

D'après (7.2) $g(.,s)$ est minorée alors on peut écrire

$$g(\psi(\nabla u(x), T_{m,n}(\nabla u(x))) = h(T_{m,n}(\nabla u(x))) \quad p.p$$

d'où le résultat désiré.

Bibliographie

[1] Alibert, J. J., Dacorogna, B., An example of a quasiconvex function that is not polyconvex in two dimensions, *Arch. Rational. Anal.* 117, 1992, 155–166.

[2] Attouch, H., Aze, D., Approximation and regularization of arbitrary functions in Hilbert spaces by the Lasry-Lions method, *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 10, 1993, 289–312.

[3] Ball, J.M., Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 63, 1977, 337–403.

[4] Ball, J. M., Marsden, J.E., Quasiconvexity at the boundary, positivity of the second variation and elastic stability, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 86,1984, 251–277.

[5] Benzoni-Gavage, S., Méthodes directes en calcul des variations, *Journal de maths des élèves*, vol. 1, No. 3, 1995.

[6] Besenyei, Á., Examples for uniformly monotone operators arising in weak forms of elliptic problems, *preprint version : http ://www.cs.elte.hu/badam/publications/uniform.pdf.*

[7] Bogachev, V. I., Measure theory, *Springer, Berlin*, vol. 1,2007.

[8] Bousselsal, M., Etude de quelques problèmes de calcul des variations liés à la mécanique, *Thèse de Doctorat de l'Université de Metz*, 1993.

[9] Bousselsal, M., Brighi, B., Rank-one-convex and quasiconvex envelopes for functions depending on quadratic forms. *J. conv. Anal* 4, 1997, 305–319.

[10] Bousselsal, M., Chipot, M., Relaxation of some functionals of the calculus of variations. *Arch. der Mathematik* , 1995, 316 –326.

[11] Bousselsal, M., Le Dret, H., Remarks on the quasiconvex envelope of some functions depending on quadratic forms. *Bolletino U.M.I* (8) 5-B, 2002 469–486.

[12] Bousselsal, M., Le Dret, H., Relaxation of functionals involving homogeneous functions and invariance of envelopes. *Chin. Ann. of Math.*, series B. No. 1, 23, 2002, 37–53.

[13] Bousselsal, M., Mokrane, Am., Sur les différentes notions de convexité des fonctions dépendant d'une forme quadratique. *Rencontre des Mathématiciens Algériens, Alger, Mai,* 2000.

[14] Brezis, H., Analyse fonctionnelle : Theorie et applications, *Paris, Masson*, 1983.

[15] Bruyère, N., Comportement asymptotique de problèmes posés dans des cylindres. Problèmes d'unicité pour les systèmes de Boussinesq, *Thèse de Doctorat de L'Uinversité de Rouen*, 2007.

[16] Chipot, M., ℓ goes to plus infinity, *Birkhäuser*, 2002.

[17] Chipot, M., On the asymptotic behaviour of some problems of the calculus of variations, *J. Elliptic Parabol. Equ.*, 1, 2015, 307–323.

[18] Chipot, M., Asymptotic Issues for Some Partial Differential Equations, World Scientific, 2016.

[19] Chipot, M., Mojsic, A., Roy, P., On some variational problems set on domains tending to infinity. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 36, No. 7, 2016, 3603–3621.

[20] Chipot, M., Rougirel, A., Sur le comportement asymptotique de la solution de problèmes elliptiques dans des domaines cylindriques tendant vers l'infini, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 331, No. 6, 2000, 435–440.

[21] Chipot, M., Rougirel, A., On the asymptotic behaviour of the solution of parabolic problems in cylindrical domains of large size in some directions. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, Ser. B 1, No. 3, 2001, 319–338.

[22] Chipot, M., Xie, Y., Some issues on the p-Laplace equation in cylindrical domains. (English summary) *Differ. Uravn. i Din. Sist.*, 293–300 ; translation in *Proc. Steklov Inst. Math.* 261, No. 1, 2008, 287–294.

[23] Chipot, M., Yeressian, K., Exponential rates of convergence by an iteration technique, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I 346, 2008, 21–26.

[24] Cianchi, A., Maz'ya, W., Gradient regularity via rearrangements for p-Laplacian type elliptic boundary value problems, *J. Eur. Math. Soc.*, 16, no.3, 2014, 571– 595.

[25] Cianchi, A., Maz'ya, W., Global gradient estimates in elliptic problems under minimal data and domain regularity, *Comm.. Pure Appl. An.*, 14 (1), 2015, 285–311.403–438.

[26] C. Collins, M. Luskin : Numerical modeling of the microstructure of crystals with symmetry-related variants, *in Proceedings of the AROUS-Japan Workshop on Smart /Intelligent Materials and Systems, Honolulu, Hawaii,Technomic Publishing Company, Lancaster, PA*, 1990.

[27] Dacorogna, D., Remarques sur les notions de polyconvexité, quasi-convexité et convexité de rang 1, *J. Math pures Appl.*, 64, 1985,

[28] Dacorogna, D., Introduction au Calcul des Variations, *Press Polytechiques et Universitaires Romandes*, 1992.

[29] Dacorogna, B., Direct Methods in the Calculus of Variations, *second edition. Springer Verlag,* 2000.

[30] Dubinskiy, A., Nonlinear elliptic and parabolic equations(in Russian) *in Modern problems in mathematics, Vol. 9, Moscow,* 1976.

[31] Evans, L.C., Quasiconvexity and partial regularity in the calculus of variations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 95, 1986, 227–252.

[32] Giaquinta, M., Introduction to regularity theory for nonlinear elliptic systems. *Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel*, 1993.

[33] Guesmia, S., Etude du comportement asymptotique de certaines équations aux dérivées partielles dans des domaines cylindriques, *Thèse Université de Haute Alsace*, 2006.

[34] Guesmia, S., Some convergence results for quasilinear parabolic boundary value problems in cylindrical domain of large size. *Nonlinear Anal.* 70(9), 2009, 3320-3331.

[35] Juditsky, A., Nesterov, Y., Deterministic and stochastic primal-dual subgradient algorithms for uniformly convex minimization, *Stoch. Syst.*, Vol. 4, No. 1, 2014, 44–80.

[36] Kesavan, S., Topics in functional analysis and applications, *Wiley Eastern Limited,New Delhi*, 1989.

[37] Kohn, R.V., Strang, G. optimal design and relaxation of variational problems I, II, III *Commun. Pure. Appl. Math.*, 39, 1986, 113-182,139-182, 353-377.

[38] Krantz, S. G., Parks, H. R., Geometric integration theory. *Cornerstones. Birkhäuser Boston Inc., Boston*, 2008. URL : http ://dx.doi.org/10.1007/978-0-8176-4679-0.

[39] Le Dret, H., Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires. *Mathématiques et applications (Paris)*, 72, Springer, 2013.

[40] Le Dret, H., Mokrane, A., On problems in the calculus of variations in increasingly elongated domains, to appear in *Chin. Ann. of Math.* No.2, 2018.

[41] Le Dret, H., Raoult, A., The nonlinear membrane model as variational limit of nonlinear three-dimensional elasticity. *J. Maths. Pures Appl.* 74, 1995, 549–578.

[42] Le Dret, H., Raoult, A., The quasi-convex envelope of the Saint Venant-Kirchhoff stored energie function.*Proc. Roy. Soc. Edinburgh A*, 125, 1995, 1179-1192.

[43] Mielke, A., Normal hyperbolicity of center manifolds and Saint-Venant's principle, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 110, 1990, 353–372.

[44] Morrey, C.B., Quasiconvexity and the lower semicontinuity of multiple integrals, *Pacific J. Math.* 2, 1952, 25–53.

[45] Roberts, A. W., Varberg, D. E., Convex Functions, *Academic Press, New York and London*, 1973.

[46] Rockafellar, R. T., Convex Analysis, *Princeton Math. Ser. No. 28, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey,* 1970.

[47] Rubinov, A. M., Yagubov, A. A., The space of starshaped sets and its applications in nonsmooth optimization, *Mathematical Programming study* vol. 29, 1986, 176– 202.

[48] Rudin, W., Functional analysis, *Tata Mc Graw-Hill,* 1974.

[49] Serre, D., Formes quadratiques et calcul des variations, *J. Math. pures et appl.*, 62, 1983, 177–196.

[Men15] U. Menne. Sobolev functions on varifolds. ArXiv e-prints, September 2015. arXiv :1509.0117

[50] Svérak, V., Rank-one convexity does not imply quasiconvexity, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 120*, 1992, 185–189.

[51] Toupin, R.A., Saint-Venant's principle, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 18, 1965, 83–96.

[52] Triebel, H., Theory of function spaces II, *Monogr. In Math. 84, Birkhäuser Verlag, Basel*, 1992.

[53] Villani, C., Notes de cours : Cours d'analyse approfondie, *E.N.S de Lyon,* 2003-2004.

[54] Xie, Y., On Asymptotic Problems in Cylinders and Other Mathematical Issues, *Ph.D. thesis, Univ. Zürich*, 2006.