N° d'ordre: 40/2018-C/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LATECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de
Doctorat 3ème cycle (LMD)

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Équations aux dérivées partielles et applications

Présentée par: BENNOUR Abdelaziz

THÈME

La méthode des moments et contrôle pour un système d'évolution

Soutenu publiquement, le 01/07/2018, devant le jury composé de:

Mr	A. KHEMMOUDJ	Prof	à l'USTHB	Président
Mr.	D. E. TENIOU	Prof	à l'USTHB	Directeur de thèse
Mr.	F. AMMAR KHODJA	MC	à l'U.Bourgogne.FR	Co-Directeur de thèse
Mr.	A. BENAISSA	Prof	à l'U.Sidi Bel abbes	Examinateur
Mr.	A. HAKEM	Prof	à l'U.Sidi Bel abbes	Examinateur
Mme.	O. ZAIR	Prof	à l'USTHB	Examinatrice

REMERCIEMENT

Dieu merci pour m'avoir donné la santé, la volonté, le courage et la patience qui m'ont permis de réaliser ce travail.

C'est avec beaucoup de reconnaissance que j'exprime mes remerciements à mes encadreurs de thèse, **M. Djamel Teniou** et **M. Farid Ammar Khodja**, pour m'avoir guidé et encadré pendant ces années de doctorat. Leur disponibilité, leur écoute, leur confiance et leurs encouragements ont permis d'instaurer un climat propice pour travailler. Je les remercie de m'avoir initié à la théorie du contrôle et de m'avoir transmis leur passion de la recherche.

J'adresse aussi mes sincères remerciments à tous les membres du jury qui m'ont fait l'honneur de participer à évaluer ce travail par leurs connaissances et leur esprit critique constructif.

Mes vifs remerciements à **M KHEMMOUDJ AMMAR** Professeur à L'USTHB, de nous faire l'honneur de présider le jury de ce travail. Qu'il veuille bien trouver ici toute ma gratitude et mon respect.

Je remercie également **Prof. A. BENAISSA, Prof. A. HAKEM, Prof. O. ZAIR,** d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury.

Durant mes années de recherche dans le Laboratoire AMNEDP à l'USTHB, le cadre de travail était idéal et l'ambiance était conviviale. Je remercie en particulier le Professeur Aliziane Tarik le directeur de ce laboratoire et sans oublier **M. le Professeur Djamel Teniou**, pour avoir su créer un climat propice à la recherche.

J'ai une pensée reconnaissante pour tous mes professeurs qui, tout au long de mes études, ont aiguillonné mon goût pour les mathématiques.

Pour finir, mes dernières expressions de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents et mes frères : **Fouad**, **Hanan**, **Ridha**, **Amina**, **Ahmed** et **Hiba** pour leur soutien tout au long de mes études.

Résumé

Dans cette thèse, nous présentons quelques méthodes dans le but d'étudier la contrôlabilité de systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Dans le cas du contrôle des EDP, qui constitue le cadre de cette thèse, les modèles étudiés prennent en compte les variations temporelles et spatiales des phénomènes qui traduisent l'état du système.

L'objet principal de cette thèse est d'étudier les propriétés du contrôle simultané de deux équations d'ondes unidimensionnelles (fortement couplées) lorsque le contrôle agit sur le bord. Plus précisément on s'intéresse plus à la contrôlabilité approchée et exacte de systèmes hyperboliques formés de deux équations des ondes linéaires couplées, le couplage est une fonction régulière mais elle peut changer de signe, avec un seul contrôle par le bord, nous choisissons d'étudier le cas avec des vitesses d'ondes identiques et différents.

On commence par rappeler des résultats généraux d'existence et d'unicité de solutions pour ces systèmes et de dualité entre contrôlabilité et observabilité, puis on présente deux outils (la méthods des moments et l'inégalité de Ingham) permettant d'établir des inégalités d'observabilité.

Notre preuve du résultat principal est basée sur une description précise du spectre associé au système et qui se comporte asymptotiquement comme le spectre de l'équation des ondes. On prouve des conditions nécessaires et suffisantes pour la contrôlabilité approchée et exacte.

Mots clés: Existence et unicité; La méthode des transpositions, Inégalité d'observabilité,; Spectre ; Base de Riesz; Contrôlabilité approchée; Contrôlabilité exacte.

Table des Matières

Introduction générale

Au cours des quinze dernières années, on commence à s'intéresser de plus en plus à l'étude de la contrôlabilité des équations couplées. L'étude de la contrôlabilité de systèmes d'équations paraboliques a fait l'objet de plusieurs travaux (voir, par exemple l'article de F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos et L. de Teresa [8], et les références contenues), mais très peu d'articles ont été consacrés au sujet de la contrôlabilité des équations d'ondes couplées. Pour autant que nous sachions, seuls quelques articles ont été publiés traitant ce problème (voir [2], [3], [4], [5], [44]...)
Le but de ce travail est d'étudier la contrôlabilité exacte et approchée d'un système de deux équations hyperpoliques avec un seul contrôle. Les outils utilisés pour atteindre ce but sont essentiellement la méthods des moments et inégalités de type Ingham.
Considérons dans un premier temps le système d'équations hyperpoliques

$$\begin{cases} y_{tt} = Dy_{xx} + A(x)\, y_t & \text{dans } Q_T = (0,\pi) \times (0,T) \\ \\ Dy(0,t) = Bv(t) \ \ , \ \ y(\pi,t) = 0 & t \in (0,T) \\ \\ y(x,0) = y^0 \ , \ y_t(x,0) = y^1 & \text{dans } \ (0,\pi) \end{cases} \tag{1}$$

avec les notations suivantes:

- $D = \operatorname{diag}(1, d^2)$ où d est un nombre réel positif;
- $A \in W^{1,\infty}(0,\pi; \mathcal{L}(\mathbb{R}^2))$ est donné par $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & a(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
- $B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ et $v \in L^2(0,T)$ est la fonction de contrôle;
- y est un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

Le point de départ du travail est les résultats établis pour les propriétés de contrôlabilité du système parabolique

$$
\begin{cases}
y_t = Dy_{xx} + A(x)\,y & \text{dans } Q_T = (0,\pi)\times(0,T) \\
\\
Dy(0,t) = Bv(t) \quad , \quad y(\pi,t) = 0 & t \in (0,T) \\
\\
y(x,0) = y^0 \, , & x \in (0,\pi)\, ,
\end{cases}
\tag{2}
$$

avec A, B et D définis précédemment. Il ressort de [8], [10] et [11] qu'il peut exister un temps minimal strictement positif de contrôlabilité à zéro pour ce type de systèmes paraboliques dès lors que $D \neq Id$ ou que le support de la fonction a est contenu dans $(0,\pi)$. Plus précisément, dans [11] les auteurs ont étudié le système (2) avec $A \in L^\infty(0,\pi;\mathcal{L}(\mathbb{R}^2))$ et $B \in \mathbb{R}^2$ respectivement donnés par:

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & -q(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Ils ont établis l'existence d'un temps minimal de contrôle $T_0 \in [0,\infty]$ tel que le système (2) soit contrôlable à zéro à tout $T > T_0$ et ne l'est pas si $T < T_0$.
Une question naturelle était de comprendre ce qui se passe pour un système hyperbolique similaire. Nous pouvons citer les travaux de Dehman, Le Rousseau et Léautaud [24], Alabau et Léautaud [5] et Alabau [3] (voir aussi [4]) qui abordent ce type de problème. Dans ces articles, les auteurs considèrent le problème de contrôlabilité exacte simultanée de deux équations d'ondes couplées en dimension quelconque.

On donne maintenant une description du résultat de [24, Theorem 1.3.]. Soit $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine régulier borné et ω un sous-ensemble ouvert de Ω, et considérons le système:

$$
\begin{cases}
y_{tt} = \Delta y_{xx} + A(x)\,y + Bmu & \text{dans } Q_T = \Omega \times (0,T) \\
\\
y = 0 & \text{sur } \Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T) \\
\\
(y, y_t)_{|t=0} = (y^0, y^1) & \text{dans } \Omega
\end{cases}
\tag{3}
$$

où $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & a(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, a et m des fonctions régulières de la variable spatiale et $u \in L^2(Q_T)$ est le contrôle (qui agit sur le support de m et seulement sur la deuxième équation). En supposant que $\omega = \{m \neq 0\}$ et $\mathcal{O} = \{a \neq 0\}$ satisfont tous les deux la condition géométrique de contrôle (**CGC**) définie dans [16], et $a \geq 0$ sur Ω, les auteurs prouvent qu'il existe $T^* = T^*(\omega, \mathcal{O}) > 0$ tel que (3) est exactement contrôlable si $T > T^*$ et n'est pas exactement contrôlable si $T < T^*$. Cette contrôlabilité exacte se produit pour les données initiales

$$\left(y^0, y^1\right) \in \left[\left(H^2 \cap H_0^1\right)(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right] \times \left[H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)\right]. \tag{4}$$

Le cas de différentes vitesses d'ondes est également considéré dans ce travail et un résultat similaire de contrôlabilité est prouvé pour des données initiales dans l'espace:

$$\left[\left(H^3 \cap H_0^1\right)(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right] \times \left[\left(H^2 \cap H_0^1\right)(\Omega) \times L^2(\Omega)\right]$$

sachant que $\omega \cap \mathcal{O}$ satisfait la **CGC** , et un résultat de non contrôlabilité est aussi établi quand $\overline{\omega} \cap \overline{\mathcal{O}}$ ne satisfait pas la **CGC**, i.e. le couple (ω, T) satisfait la condition géométrique de contrôle (**CGC**) si tout rayon parcouru à vitesse 1 dans Ω et suivant les lois de l'optique géométrique entre dans ω en un temps $t < T$. On dit aussi que ω satisfait la condition géométrique de contrôle s'il existe un temps T pour lequel (ω, T) satisfait cette condition, (voir [24, Theorem 1.8., p. 121] pour une description plus précise).

Les résultats décrits précédemment suivent ceux qui sont obtenus dans [5] où le système (3) est considéré avec un couplage faible de la forme:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & a(x) \\ \delta a(x) & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

où $a \geq 0$ est une fonction régulière et $\delta > 0$ est un paramètre. Ces auteurs montrent qu'il existe $\delta_* > 0$ tel que si (δ, a) satisfait la condition $\delta \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta_*$, et $\omega = \{m \neq 0\}$ et $\mathcal{O} = \{a \neq 0\}$ } satisfont tous les deux la condition géométrique de contrôle (**CGC**), alors il existe $T^* = T^*(\omega, \mathcal{O}) > 0$ tel que (3) est exactement contrôlable si $T > T^*$ pour les données initiales satisfaisant (2.3). Les résultats dans [24] correspondent au cas $\delta = 0$.

Nous soulignons que le coefficient de couplage (à savoir la fonction a) est positif sur Ω dans ces deux articles. La deuxième observation est que le couplage est faible dans le sens où l'opérateur $y \mapsto Ay$ de $H_0^1(\Omega)^2$ dans $L^2(\Omega)^2$ est compact et ceci exclut la propriété de contrôlabilité exacte pour des données initiales dans $\left[H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)\right]^2$.

En dimension un d'espace, nous pouvons également citer le résultat de [12] où est considéré le problème de contrôle frontière pour le système hyperbolique :

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + az = 0 & \text{dans } (0,\pi) \times (0,T)\,, \\ z_{tt} - z_{xx} + by = 0 & \text{dans } (0,\pi) \times (0,T)\,, \\ y\,(0,t) = v(t),\ y\,(\pi,t) = 0 & \text{sur } (0,T)\,, \\ z\,(0,t) = 0,\ z\,(\pi,t) = 0 & \text{sur } (0,T)\,, \\ (y,z,y_t,z_t)_{|t=0} = (y^0,z^0,y^1,z^1) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{6}$$

avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $v \in L^2\,(0,\pi)$ est un contrôle et des donnée initiales

$$\left(y^0, z^0, y^1, z^1\right) \in L^2\,(0,\pi) \times H_0^1\,(0,\pi) \times H^{-1}\,(0,\pi) \times L^2\,(0,\pi)\,.$$

Les auteurs ramènent ce problème de contrôlabilité exacte à un problème de moments: trouver $v \in L^2\,(0,T)$ tel que

$$\int_0^T v\,(t)\, f_k\,(t)\, dt = c_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

où $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille d'exponentielles imaginaires et $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2\,(\mathbb{R})\,.$

Ils démontrent que le système (6) est approximativement contrôlable si, et seulement si le spectre de l'opérateur induit par le système adjoint vérifie cette condition,

$$k^2 - \sqrt{ab} \neq j^2 + \sqrt{ab}, \quad k, j \in \mathbb{N}.$$

et exactement contrôlable pour tout $T \geq 4\pi$ si, et seulement, si le système est approximativement contrôlable.

De ces observations, des questions naturelles apparaissent. Nous traitons dans ce travail la version unidimensionnelle de (3) quand le contrôle agit sur la frontière. Dans le système (1), d'une part les vitesses d'ondes peuvent être différentes et la fonction de couplage est régulière *mais elle peut changer de signe* et d'autre part, le couplage est fort (la matrice A agit sur y_t au lieu de y). Nous établissons le résultat suivant concernant la contrôlabilité approchée:

Théorème 0.1 *Soit $a \in L^\infty(0,\pi)$ et $d > 0$. Le système (1) est approximativement* *contrôlable si, et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites:*

$$b_2 \neq 0,$$
$$\int_0^\pi a(\pi - x)\sin(kx)\sin\left(\frac{k}{d}x\right)dx \neq \frac{i(-1)^k d^2 b_1}{b_2}\sin\left(\frac{k}{d}\pi\right), \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*.$$

Pour la contrôlabilité exacte, on a:

Théorème 0.2 *Soit $a \in W^{1,\infty}(0,\pi)$. Le système (1) est exactement contrôlable dans $L^2(0,\pi) \times L^2(0,\pi) \times H^{-1}(0,\pi) \times H^{-1}(0,\pi)$ si, et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites:*

1. *Le système (1) est approximativement contrôlable*

2. $$D = Id\ , T \geq 4\pi, \quad \int_0^\pi a(x)\,dx \neq 0.$$

Dans le dernier chapitre on considère le même problème (1) avec $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -\delta^2 a & 0 \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}^*$, $\delta \in \mathbb{R}^*$ et $B = (0,1) \in \mathbb{R}^2$.
Nous trouvons que:

Théorème 0.3 *Soit*
$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -\delta^2 a & 0 \end{pmatrix},$$
où $a \in \mathbb{R}^*$, $\delta \in \mathbb{R}^*$ et $B = (0,1) \in \mathbb{R}^2$.

1. *Le système (1) est approximativement contrôlable si, et seulement si,*
$$\delta^2 a^2 \neq \frac{(k^2 - \ell^2)^2}{2(k^2 + \ell^2)}, \quad \forall k,\ \forall \ell \in \mathbb{Z}^*.$$

2. *Il existe $T_0 > 0$ tel que le système (1) est exactement contrôlable pour tout $T > T_0$ si et seulement, si il est approximativement contrôlable et*
$$\delta a \notin \mathbb{Z}^*.$$

Cette thèse est divisée en trois chapitres.
Dans le chapitre 1, nous présenterons quelques aspects de la contrôlabilité. Nous rappellerons entre autres certains résultats connus concernant les systèmes d'évolution

linéaires et les systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires, et présenterons deux outils utilisés pour démontrer la contrôlabilité d'équations aux dérivées partielles comme l'équation des ondes et l'équation de la chaleur : la méthode des moments et des inégalités de type Ingham. On présente également des applications de ces deux outils à la contrôlabilité de certains systèmes hyperboliques et paraboliques.

Le reste de la thèse est divisé en deux chapitres 2 et 3. Les résultats principaux qui ont été obtenus au cours de ces années de doctorat sont présentés: les deux chapitres concernent la contrôlabilité de systèmes hyperboliques linéaires couplés. Nous montrons les résultats de contrôlabilité approchée et exacte que nous avons précédemment décrits (Voir les théorèmes 0.1, 0.2 et 0.3).

Chapitre 1

Contrôlabilité de systèmes d'équations aux dérivées partielles

Il existe différentes notions de contrôlabilité qui sont toutes équivalentes en dimension finie (c'est-à- dire pour le cas des systèmes d'équations différentielles ordinaires) mais qui sont bien distinctes en dimension infinie (c'est-à-dire pour le cas des systèmes d'équations aux dérivées partielles). Chacune de ces notions de contrôlabilité est équivalente à une notion duale que l'on appelle observabilité et qui est le moyen par lequel, en général, on établit la contrôlabilité d'un système.
Dans la première partie de ce chapitre, on va considèrer un système de contrôle abstrait, i.e. un système de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = A(t)u(t) + B(t)v(t), \quad t \in (T_0, T), \\ u(T_0) = u^0, \end{cases} \tag{1.1}$$

où T_0 et T sont deux réels positifs tels que $T_0 < T$ et où on suppose que pour tout $t \in [0; T]$, $A(t) : D(A(t)) \subset H \longrightarrow H$ et $B(t) : D(B(t)) \subset U \longrightarrow V$ sont des opérateurs non bornés, U, H et V désignant des espaces de Hilbert séparables, H s'injectant de manière continue et dense dans V. Les espaces U et H sont appelés respectivement espace des contrôles et espace des états. On suppose, en outre, que A est tel que pour tout $T_0 > 0$, tout $T > T_0$, tout $u_0 \in H$ et tout $f \in L^2(0, T; H)$, le problème

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = A(t)u(t) + f(t), \quad t \in (T_0, T), \\ u(T_0) = u^0, \end{cases} \tag{1.2}$$

admet une unique solution faible $u \in \mathcal{C}([T_0, T], H)$ qui dépend de manière continue des données u^0 et f. On note $\mathcal{U}_{T_0,T}$ l'ensemble des contrôles $v \in L^2(T_0, T; U)$ tels que la solution u de (1.1) pour $u^0 = 0$ vérifie $u(T) \in H$. Pour tout $v \in \mathcal{U}_{T_0,T}$, on note $u(t; T_0, u^0, v)$ la solution du système (1.1) à l'instant t. Lorsque $T_0 = 0$, on note simplement $u(t; u^0, v)$ et on pose $\mathcal{U}_T = \mathcal{U}_{T_0,T}$. On définit alors l'opérateur non borné

$$L_T : D(L_T) \subset L^2(0, T; U) \longrightarrow H, \qquad D(L_T) = \mathcal{U}_T, \qquad L_T v = u(T; 0, v). \tag{1.3}$$

En d'autres termes, pour tout $v \in \mathcal{U}_T$, $L_T v = u(T)$ où u est la solution de (1.1) pour $u^0 = 0$ et $T_0 = 0$. On suppose dans la suite que L_T est fermé de domaine dense.

1.1 Définition des différentes notions de contrôlabilité

Différents concepts de contrôlabilité existent. Donnons celle qui vont nous intéresser dans ce travail

Définition 1.1 *Soit $T > 0$ fixé et $T_0 = 0$.*
– ***Contrôlabilité exacte:*** *On dit que le système (1.1) est exactement contrôlable au temps $T > 0$ si :*

$$\forall (u^0; u^1) \in H \times H, \qquad \exists v \in \mathcal{U}_T \ \ / \ u(T; u^0, v) = u^1.$$

– ***Contrôlabilité approchée:*** *On dit que le système (1.1) est approximativement contrôlable au temps $T > 0$ si :*

$$\forall (u^0; u^1) \in H \times H, \qquad \forall \epsilon > 0, \qquad \exists v \in \mathcal{U}_T \ \ / \ \left\| u(T; u^0, v) - u^1 \right\|_H < \epsilon.$$

– ***Contrôlabilité aux trajectoires:*** *On dit que le système (1.1) est contrôlable aux trajectoires au temps $T > 0$ si :*

$$\forall u^0 \in H, \qquad \forall \left(u^0_*, v_*\right) \in H \times \mathcal{U}_T, \qquad \exists v \in \mathcal{U}_T \ \ / \ u(T; u^0, v) = u(T; u^0_*, v_*).$$

– ***Contrôlabilité à zéro:*** *On dit que le système (1.1) est contrôlable à zéro au temps $T > 0$ si :*

$$\forall u^0 \in H, \qquad \exists v \in \mathcal{U}_T \ \ / \ u(T; u^0, v) = 0.$$

On peut également définir ces mêmes notions de contrôlabilité pour des systèmes non linéaires. On remarque immédiatement que, pour des systèmes linéaires ou non linéaires, la contrôlabilité exacte entraîne toujours la contrôlabilité approchée, la contrôlabilité aux trajectoires et la contrôlabilité à zéro. Le système (1.1) que l'on considère ici étant linéaire les concepts de contrôlabilité aux trajectoires et de contrôlabilité à zéro sont équivalentes.

1.2 Dualité contrôlabilité-observabilité

Les différentes notions de contrôlabilité admettent chacune une formulation duale équivalente. Plus précisément, étudier la contrôlabilité d'un système peut se ramener à étudier certaines propriétés d'un système dit adjoint. Nous pouvons caractériser la contrôlabilité par une inégalité d'observabilité et la contrôlabilité approchée par une propriété de continuation unique. Ceci est un résultat classique en contrôlabilité et a été observé par S. Dolecki et D.L. Russell dans [25].
On considère maintenant le système (1.1) pour $T_0 = 0$, i.e.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = A(t)u(t) + B(t)v(t), \quad t \in (0,T)\,, \\ u(0) = u^0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Dans cette partie, on utilise la dualité pour caractériser chacune des différentes notions de contrôlabilité pour le système (1.4) en termes d'une inégalité d'observabilité que doit vérifier le système adjoint. On commençe d'abord par remarquer que, par linéarité du système, la solution de (1.4) se décompose en la somme de la solution homogène ($v = 0$) et de la solution avec donnée initiale nulle ($u^0 = 0$) :

$$\forall t \in [0,T], \qquad u(t; u^0, v) = u(t; u^0; 0) + u(t; 0, v).$$

En particulier, pour $t = T$, on a

$$u(T; u^0, v) = \mathcal{S}_T u^0 + \mathcal{L}_T v, \tag{1.5}$$

où $\mathcal{L}_T = L_T$ est donné par (1.3) et $\mathcal{S}_T$ est défini par $\mathcal{S}_T u^0 = u(T; u^0, 0)$ pour tout $u^0 \in H$. En utilisant la décomposition (1.5), on peut réécrire les différentes notions de contrôlabilité de la Définition (2.2) de la façon suivante :

Proposition 1.2 *Le système (1.4) est*
– exactement contrôlable au temps T si, et seulement si, $\mathcal{L}_T$ est surjectif,
– approximativement contrôlable au temps T si, et seulement si, $Im(\mathcal{L}_T)$ est dense dans H,

– *contrôlable aux trajectoires (ou encore contrôlable à zéro) au temps T si, et seulement si,* $\mathrm{Im}(\mathcal{S}_T) \subset \mathrm{Im}(\mathcal{L}_T)$.

Pour traduire en termes de dualité ces propriétés sur les images des opérateurs $\mathcal{L}_T$ et $\mathcal{S}_T$, on fait appel aux résultats d'analyse fonctionnelle suivants :

Théorème 1.3 *Soient E et F deux espaces de Hilbert et $L : D(L) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur fermé et de domaine dense. On a*

1. $\overline{\mathrm{Im}(L)} = (\ker(L^*))^\perp$. *En particulier,* $\mathrm{Im}(L)$ *est dense dans F si et seulement si L^* est injectif.*

2. *L est surjectif si, et seulement si, il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\forall x \in D(L^*), \qquad \|x\|_F \leq c\,\|L^* x\|_E .$$

Théorème 1.4 *Soient E, F et G trois espaces de Hilbert, $K \in \mathcal{L}(G, F)$ et $L : D(L) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur fermé et de domaine dense. L'inclusion*

$$\mathrm{Im}(K) \subset \mathrm{Im}(L)$$

est satisfaite si, et seulement si, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall x \in D(L^*), \qquad \|K^* x\|_G \leq c\,\|L^* x\|_E .$$

On renvoie au livre de Brezis [19] (Corollary 2.18 p. 45 et Theorem 2.20 p.47) pour la démonstration du Théorème 1.3 et au livre de Coron [21] (Lemma 2.48 p.58 et ses références) pour un énoncé plus complet du Théorème 1.4.

En appliquant les Théorèmes 1.3 et 1.4 avec $E := L^2(0, T; U)$, $F := H$, $G := H$, $L := \mathcal{L}_T$ et $S := \mathcal{S}_T$, on peut alors exprimer la contrôlabilité de (1.4) comme suit :

Corollaire 1.5 *Le système (1.4) est*
– *exactement contrôlable au temps T si, et seulement si, il existe une constante $C_T > 0$ telle que*

$$\forall\ \theta^0 \in D(L_T^*), \qquad \left\|\theta^0\right\|_H \leq C_T \left\|L^*\theta^0\right\|_{L^2(0,T;U)}, \tag{1.6}$$

– *approximativement contrôlable au temps T si, et seulement si,*

$$\forall\ \theta^0 \in D(L_T^*), \qquad \left(L^*\theta^0 = 0 \Longrightarrow \theta^0 = 0\right), \tag{1.7}$$

– *contrôlable aux trajectoires (ou encore contrôlable à zéro) au temps T si, et seulement si, il existe une constante $C_T > 0$ telle que*

$$\forall\ \theta^0 \in D(L_T^*), \qquad \left\|S_T^*\theta^0\right\|_H \leq C_T \left\|L^*\theta^0\right\|_{L^2(0,T;U)}. \tag{1.8}$$

Les inégalités (1.6) et (1.8) sont appelées inégalités d'observabilité respectivement exacte et aux trajectoires. La propriété (1.7) est appelée principe de continuation unique.
Dans la pratique, on caractérise ces trois propriétés de $\mathcal{L}_T^*$ en termes du système adjoint associé à (1.4). Pour cela, on va supposer que, pour tout $\theta^0 \in H$, le problème adjoint

$$\begin{cases} -\dfrac{d\theta}{dt}(t) = A^*(t)\theta(t), \qquad t \in (0,T)\,, \\ \theta(T) = \theta^0, \end{cases} \tag{1.9}$$

admet une unique solution faible $\theta \in C([0,T],H)$. On peut alors facilement montrer que $\mathcal{S}_T^*$ est défini par

$$\forall\ \theta^0 \in H, \quad \mathcal{S}_T^*\theta^0 = \theta(0),$$

où θ est la solution de (1.9) et que $\mathcal{L}_T^* : D(\mathcal{L}_T^*) \subset H \longrightarrow L^2(0,T;U)$, vérifie :

$$\forall\ \theta^0 \in D(L_T^*),\ \text{p.p.}\ \ t \in [0,T], \quad \left(\mathcal{L}_T^*\theta^0\right)(t) = B(t)^*\phi(t),$$

où θ est la solution de (1.9).
Cela permet d'obtenir pour chacune des notions de contrôlabilité du système (1.4) une formulation en termes d'observabilité du système (1.9) qui est utilisable en pratique :

Théorème 1.6 *Le système (1.4) est*
– *exactement contrôlable au temps T si, et seulement si, il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour tout $\phi^0 \in D(L_T^*)$, la solution du système (1.9) vérifie*

$$\left\|\theta^0\right\|_H^2 \leq C_T \int_0^T \|B(t)^*\theta(t)\|_U^2\, dt,$$

– *approximativement contrôlable au temps T si, et seulement si, pour tout $\phi^0 \in D(L_T^*)$ la solution ϕ de (1.9) vérifie le principe de continuation unique suivant : si $B^*(.)\phi = 0$ dans $L^2(0,T;U)$, alors $\phi^0 = 0$,*
– *contrôlable aux trajectoires (ou encore contrôlable à zéro) au temps T si, et seulement si, il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour tout $\theta^0 \in D(L_T^*)$, la solution*

du système (1.9) vérifie

$$\forall\ \theta^0 \in D(L_T^*), \qquad \|\theta\,(0)\|_H^2 \leq C_T \int_0^T \|B(t)^*\theta(t)\|_U^2\, dt.$$

1.3 Quelques outils pour l'étude de la contrôlabilité des systèmes d'évolution

Dans cette partie, on présente certaines techniques permettant d'étudier la contrôlabilité des systèmes d'évolution. Afin de comprendre comment et dans quelles situations les utiliser, nous les appliquerons à des problèmes de contrôlabilité déjà résolus.

1.3.1 Contrôlabilité en dimension finie

Dans le cadre de la dimension finie i.e. pour le cas d'un système d'équations différentielles ordinaires, on va voir que toutes ces notions de contrôlabilité coïncident et qu'elles peuvent être caractérisées par une condition algébrique sur les coefficients du système appelée condition de **Kalman**.
Considérons le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y = Au + Bv \quad \text{dans } (0,T)\,, \\ u(0) = u^0, \end{cases} \tag{1.10}$$

où u est toujours l'état, u^0 la donnée initiale, v le contrôle, et $A,\ B$ sont des matrices réelles de tailles $n \times n$ et $n \times m$.
On rappelle que pour tout $u^0 \in \mathbb{R}^n$ et $v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ il existe un unique $u \in C^0([0,T];\mathbb{R}^n)$ solution de (1.10) qui dépend continûment des données.
Les définitions de contrôlabilités restent inchangées. Cependant, sachant qu'un sous-espace vectoriel de dimension finie est toujours fermé, on voit qu'il n'y a en fait pas lieu de distinguer toutes les notions de contrôlabilité en dimension finie. On dira donc simplement que le système (1.10) est contrôlable au temps T ou qu'il ne l'est pas.

On va maintenant rappeler deux critères très simples de contrôlabilité pour le système (1.10).

La condition de rang de Kalman En dimension finie on peut en fait complètement calculer l'image de l'opérateur $\mathcal{L}_T$:

Théorème 1.7 *On a*

$$\operatorname{Im} \mathcal{L}_T = \operatorname{Im} [A : B]_n \,,$$

où $[A : B]_n = \left(B \,|AB| \cdots |A^{n-1}B \right)$ *est une matrice de taille* $n \times mn$.

On obtient que le système (1.10) est contrôlable au temps T si, et seulement si, la condition de rang de Kalman est vérifiée, c'est-à-dire,

$$\operatorname{rank} [A : B]_n = n. \tag{1.11}$$

Cette condition donne un critère algébrique simple. Par exemple, considérons le système $2 \times\ 2$ avec un seul contrôle

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} u_1 = a u_1 + c u_2 + v & \text{dans } (0, T) \\ \\ \dfrac{d}{dt} u_2 = b u_1 + d u_2 & \text{dans } (0, T) \end{cases}$$

où $u_1, u_2,\ [0; T] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a,\ b,\ c,\ d$ sont des constantes réelles. Dans ce cas, on se demande sous quelles conditions deux équations couplées peuvent être contrôlées au moyen d'un seul contrôle. Le critère de Kalman nous donne la réponse suivante : le système (1.10) est contrôlable si et seulement si le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

est 2, autrement dit, si et seulement si $b \neq 0$. Cela signifie en fait que v contrôle l'état u_1 et qu'ensuite le terme bu_1 agit comme un contrôle sur l'équation en u_2. Cela montre que le coefficient de couplage b est le seul dont il faut vraiment se soucier.

Caractérisation de Fattorini - test de Hautus Nous énonçons maintenant un critère dual à la condition de Kalman

Théorème 1.8 *Le système (1.10) est contrôlable au temps T si, et seulement,*

$$\ker \left(A^* - \lambda \right) \cap \ker B^* = \{0\} \,, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.12}$$

La condition (1.12) n'est autre que la propriété de continuation unique dans les sous-espaces propres de A^* . Ce que dit donc ce théorème, c'est qu'il suffit de vérifier cette propriété dans les sous-espaces propres de A^* pour qu'elle soit en fait vérifiée

dans tout l'espace $\mathbb{R}^n$.
Ce théorème, dû à Fattorini, est en fait plus connu en dimension finie sous le nom de test de Hautus, bien que le papier de Fattorini [26] soit antérieur à celui de Hautus [37]. Qui plus est, contrairement au résultat de Hautus, celui de Fattorini ne se restreint pas seulement à la dimension finie, il reste vrai dans un cadre beaucoup plus général, dont nous reparlerons plus loin. Les preuves sont cependant bien différentes puisque Hautus donne une preuve directe de l'équivalence entre la caractérisation (1.12) et la condition de Kalman (1.11).

Remarque 1.9 *La condition de Fattorini peut également s'écrire sous forme de condition d'indépendance linéaire des familles* $\{B^*V_{\lambda_i,1}, ..., B^*V_{\lambda_i,m_i}\}$*,* $i = 1, ..., p$*, où* $V_{\lambda_i,1}, ..., V_{\lambda_i,m_i}$ *est une base du sous-espace propre de* A^* *associé à la valeur propre* λ_i *(qui est donc de dimension* m_i*). Cela fait ressortir une condition nécessaire sur le nombre de contrôle dont on doit disposer. En effet, pour avoir une chance de contrôler le système, il faut au moins que*

$$m \ \geq \max_{1\leq i\leq p} m_i.$$

La théorie des semi-groupes simplifie également l'étude de la contrôlabilité d'un système en la ramenant à celle d'une inégalité vérifiée par les solutions du système adjoint: l'inégalité d'observabilité. Dans le cas de nombreux systèmes unidimensionnels ou multidimensionnels à géometrie simple, cette inégalité d'observabilité est une conséquence de l'inégalité inverse d'Ingham. la section qui suit consiste en l'étude des conditions dans lesquelles les inégalités d'Ingham sont satisfaites.

1.4 La méthode des moments et les inégalités d'Ingham

Plusieurs méthodes sont envisageables pour démontrer une telle inégalité, et, bien entendu, les outils à utiliser dépendent fortement du type de problème considéré. Dans le cadre auquel on s'intéresse ici, i.e. la contrôlabilité frontière d'un système dont on connaît explicitement les valeurs propres et qui se "comporte" asymptotiquement comme l'équation des ondes, on a été amené à utiliser deux outils: la méthode des moments et les inégalités de type Ingham. On présente l'application de ces outils à la contrôlabilité en dimension un d'espace. On commence par la définition d'une base de Riesz

1.4.1 Base de Riesz

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, $a_k \in \mathbb{C}$ de carré sommable et $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la base canonique de ℓ^2 définie par

$$e_k = \left(0, \cdots, 0, \underset{k^{\text{ème}}}{\underset{\uparrow}{1}}, 0, 0, 0, \cdots\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Définition 1.10 *On appelle base de Riesz de H toute famille $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \subset H$ pour laquelle il existe un opérateur inversible $B \in L(H, \ell^2)$ tel que*

$$B\varphi_k = e_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

La famille $(\theta_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\theta_k = B^* B\varphi_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

est alors une famille biorthogonale à la base de Riesz $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Exemple d'une base de Riesz

Proposition 1.11 *La famille $\left\{\phi_k^\pm\right\} \cup \left\{\psi_k^\pm\right\}$ forme une base de Riesz dans $\mathbb{H} = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \times H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$. tel que*

$$\left\{\phi_k^\pm, \psi_k^\pm\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \pm\dfrac{\sin(k\pi x)}{ik\pi} \\ \sin(kx) \\ \pm\dfrac{\sin(k\pi x)}{ik\pi} \\ \sin(k\pi x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{\sin(k\pi x)}{\mu_k^\pm} \\ 0 \\ -\dfrac{\sin(k\pi x)}{\mu_k^\pm} \\ \sin(k\pi x) \end{pmatrix} \right\}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

tel que $\mu_k^\pm = -1 \pm i\sqrt{1+\pi^2 k^2}$.

Proof. Notons d'abord que les suites de fonctions suivantes forment une base orthonormale dans $\mathbb{H}$

$$\begin{aligned} \theta_k &= \left(\frac{\sin(k\pi x)}{ik\pi}, 0, \frac{\sin(k\pi x)}{ik\pi}, 0\right)^T, \\ \eta_k &= (0, \sin(k\pi x), 0, \sin(k\pi x))^T, \\ \gamma_k &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{\pi^2 k^2}}} \left(\frac{\sin(k\pi x)}{ik\pi}, 0, -\frac{\sin(k\pi x)}{ik\pi}, 0\right)^T, \\ \delta_k &= (0, \sin(k\pi x), 0, -\sin(k\pi x))^T. \end{aligned} \tag{1.13}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Ensuite, nous avons les relations suivantes entre $\phi_k^{\pm} \cup \psi_k^{\pm}$ et $\theta_k \cup \eta_k \cup \gamma_k \cup \delta_k$

$$\begin{aligned} \theta_k &= \tfrac{1}{2}\left(\phi_k^+ - \phi_k^-\right), \qquad \gamma_k = \frac{\sqrt{2+\pi^2k^2}}{i\left(\mu_k^- - \mu_k^+\right)}\left(\psi_k^+ - \psi_k^-\right), \\ \eta_k &= \tfrac{1}{2}\left(\phi_k^+ + \phi_k^-\right), \qquad \delta_k = \frac{1}{\mu_k^+ - \mu_k^-}\left(\mu_k^+\psi_k^+ - \mu_k^-\psi_k^-\right), \end{aligned} \tag{1.14}$$

On remarque

$$\begin{array}{cc} \phi_k^+ = \theta_k + \eta_k, & \phi_k^- = \theta_k - \eta_k, \\ \psi_k^+ = \left(\frac{i\sqrt{2+\pi^2k^2}}{\mu_k^+}\right)\gamma_k + \delta_k, & \psi_k^- = \frac{i\sqrt{2+\pi^2k^2}}{\mu_k^-}\gamma_k + \delta_k. \end{array}$$

Chaque $u \in \mathbb{H}$ peut être écrit de manière unique en utilisant la combinaison linéaire des fonctions orthonormales comme suit:

$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left(a_k\theta_k + b_k\eta_k + c_k\gamma_k + d_k\delta_k\right)$$

En utilisant les relations dans (1.14) nous pouvons aussi écrire u comme suit:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{a_k}{2}\left(\phi_k^+ - \phi_k^-\right) + \frac{b_k}{2}\left(\phi_k^+ + \phi_k^-\right) + c_k\frac{\sqrt{2+\pi^2k^2}}{i\left(\mu_k^- - \mu_k^+\right)}\left(\psi_k^+ - \psi_k^-\right) \\ &\quad + d_k\frac{1}{\left(\mu_k^+ - \mu_k^-\right)}\left(\mu_k^+\psi_k^+ - \mu_k^-\psi_k^-\right). \end{aligned}$$

On définit l'application B par:

$$B\theta_k = \phi_k^+, \quad B\eta_k = \phi_k^+, \quad B\gamma_k = \psi_k^+, \quad B\delta_k = \psi_k^-.$$

Alors,

$$\begin{aligned} Bu &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k\left(\theta_k + \eta_k\right) + b_k\left(\theta_k - \eta_k\right) + c_k\left(\left(\frac{i\sqrt{2+\pi^2k^2}}{\mu_k^+}\right)\gamma_k + \delta_k\right) \\ &\quad + d_k\left(\left(\frac{i\sqrt{2+\pi^2k^2}}{\mu_k^-}\right)\gamma_k + \delta_k\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left(a_k - b_k\right)\theta_k + \left(a_k + b_k\right)\eta_k + +i\sqrt{2+k^2\pi^2}\left(\frac{c_k}{\mu_k^+} + \frac{d_k}{\mu_k^-}\right)\gamma_k \\ &\quad + \left(c_k - d_k\right)\delta_k \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\|Bu\|_{\mathbb{H}}^2 &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} |a_k-b_k|^2+|a_k+b_k|^2+\left(2+k^2\pi^2\right)\left|\frac{c_k}{\mu_k^+}+\frac{d_k}{\mu_k^-}\right|^2+|c_k+d_k|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} 2|a_k|^2+2|b_k|^2+\frac{\left|\mu_k^- c_k+\mu_k^+ d_k\right|^2}{(2+k^2\pi^2)}+|c_k+d_k|^2 \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}^*} 2|a_k|^2+2|b_k|^2+4|c_k|^2+4|d_k|^2 \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}^*} 4\left(|a_k|^2+2|b_k|^2+|c_k|^2+|d_k|^2\right)=4\|u\|_{\mathbb{H}}^2 .
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
B^{-1}u &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{a_k}{2}(\theta_k-\eta_k)+\frac{b_k}{2}(\theta_k+\eta_k)+\frac{c_k\sqrt{2+k^2\pi^2}}{i\left(\mu_k^- - \mu_k^+\right)}(\gamma_k-\delta_k) \\
&\quad +d_k\frac{\left(\mu_k^+\gamma_k-\mu_k^-\delta_k\right)}{\left(\mu_k^+-\mu_k^-\right)} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2}(a_k+b_k)\,\theta_k+\frac{1}{2}(b_k-a_k)\,\eta_k+ \\
&\quad \left(\frac{c_k\sqrt{2+k^2\pi^2}}{i\left(\mu_k^- - \mu_k^+\right)}+d_k\frac{\mu_k^+}{\left(\mu_k^+-\mu_k^-\right)}\right)(\gamma_k+\delta_k) .
\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\left\|B^{-1}u\right\|_{\mathbb{H}}^2 &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2}\left(|a_k|^2+|b_k|^2\right)+\frac{\left|c_k\sqrt{2+k^2\pi^2}+id_k\mu_k^+\right|^2}{2\left(1+k^2\pi^2\right)} \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2}\left(|a_k|^2+|b_k|^2\right)+2\left(|c_k|^2+|d_k|^2\right) \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}^*} 2\left(|a_k|^2+|b_k|^2+|c_k|^2+|d_k|^2\right)=2\|u\|_{\mathbb{H}}^2 .
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons construit un opérateur borné inversible $B:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ qui transforme la base orthonormée $\{\theta_k\cup\eta_k\cup\gamma_k\cup\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ à $\left\{\phi_k^\pm\cup\psi_k^\pm\right\}_{k\in\mathbb{N}}$. ■

Remarque 1.12 *Comme conséquence de la proposition 1.11, il existe une famille*

$\left\{\tilde{\phi}_j^{\pm} \cup \tilde{\psi}_j^{\pm}\right\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ *biorthogonale à* $\left\{\phi_k^{\pm} \cup \psi_k^{\pm}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ *avec*

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{\phi}_j^{\pm} = \left(\pm\dfrac{\sin(j\pi x)}{ij\pi}, \sin(j\pi x), \pm\dfrac{\sin(j\pi x)}{ij\pi}, \sin(j\pi x)\right)^T, \\ \tilde{\psi}_j^{\pm} = q_j^{\pm}\left(\dfrac{\sin(j\pi x)}{\mu_j^{\mp}}, -\sin(j\pi x), \dfrac{\sin(j\pi x)}{\mu_j^{\mp}}, \sin(j\pi x)\right)^T, \end{array}\right. \quad j \in \mathbb{N}^*,$$

tel que

$$q_j^{\pm} = \left(\frac{\left(\mu_j^{\mp}\right)^2}{2\left(1 + j^2\pi^2 \mp i\sqrt{1 + j^2\pi^2}\right)}\right) \text{ et } \left|q_j^{\pm}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2 + j^2\pi^2}{1 + j^2\pi^2}}.$$

Remarque 1.13 *Remarquons qu'une base Hilbertienne (ou encore, base orthonormale), c'est-à-dire une base telle que pour tous* k *et* j *dans* $\mathbb{N}^*$*, on ait*

$$\|\varphi_k\|_H = 1, \quad \left\langle\varphi_k, \varphi_j\right\rangle_H = 0 \text{ si } k \neq j,$$

est une base de Riesz : l'opérateur B *de la Définition 1.10 est dans ce cas un opérateur unitaire* (i.e. $B^*B = BB^* = I$) *et la famille biorthogonale* $(\tilde{\varphi}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *est la base Hilbertienne* $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *elle-même. De plus, si* $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *est une base Hilbertienne de* H*, alors tout élément* $x \in H$ *s'écrit*

$$x = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle x, \varphi_k\rangle_H \ \varphi_k,$$

avec $\|x\|_H^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle x, \varphi_k\rangle_H|^2$*, et pour tout* $(a_k)_k \in \ell^2$*,*

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k\varphi_k\right\|_H = \|(a_k)_k\|_{\ell^2}.$$

Ce résultat se généralise aux bases de Riesz, mais les égalités se transforment, dans ce cas, en équivalence de normes. Plus précisément,

Proposition 1.14 *Soit* $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *une base de Riesz de* H *et soient* B *et* $(\tilde{\varphi}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *comme dans la Définition 1.10. Soient* $m = \dfrac{1}{\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(\ell^2,H)}}$ *et* $M = \|B\|_{\mathcal{L}(\ell^2,H)}$*. Tout* $x \in H$ *se décompose de la façon suivante:*

$$x = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle x, \tilde{\varphi}_k\rangle_H \ \varphi_k,$$

avec

$$m^2 \|x\|_H^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle x, \tilde{\varphi}_k\rangle_H|^2 \leq M^2 \|x\|_H^2 .$$

Un critère pour montrer qu'une famille est une base de Riesz est le lemme suivant (cf [32])

Lemme 1.15 *Soit $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ une suite d'un espace de Hilbert H. Alors les propositions suivantes sont équivalentes*
(i) $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ est une base de Riesz dans H.
(ii) $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ est une famille totale de Bessel dans H et admet une famille bi-orthogonale $\{\eta_k\}_{k\geq 1}$ qui est aussi une famille totale de Bessel dans H.

On rappelle qu'une suite $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ d'un espace de Hilbert H est une suite de Bessel si elle vérifie

$$\sum_{k\geq 1} |(\varphi, \varphi_k)_H|^2 < \infty, \quad \forall \varphi \in H.$$

Exemple 1.16 *La famille*

$$\mathcal{B} = \left\{ \Phi_{k,1} := \begin{pmatrix} \varphi_k \\ 0 \end{pmatrix}, \ \Phi_{k,2} := \begin{pmatrix} \psi_k \\ \varphi_k \end{pmatrix}, \quad k \geq 1 \right\}$$

est une famille de Bessel et admet une famille bi-orthogonale $\mathcal{B}^*$

$$\mathcal{B}^* = \left\{ \Phi_{k,1}^* := \begin{pmatrix} \varphi_k \\ \psi_k \end{pmatrix}, \ \Phi_{k,2}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_k \end{pmatrix}, \quad k \geq 1 \right\}$$

où $\varphi_k(x) = \sqrt{2/\pi}\sin(kx)$ et $\int_0^\pi \psi_\ell \varphi_k = 0$. De plus, si on suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\psi_k\|_{L^\infty(0,\pi)} \leq \frac{C}{k}, \quad k \geq 1, \tag{1.15}$$

alors $\mathcal{B}$ est une base de Riesz de $X := L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$.

Démonstration: Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base de Riesz de $L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$, on utilisera le lemme 1.15.
1- Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une famille totale de $L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$, il suffit de prouver que

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \perp \Phi_{k,i}, \quad \forall k \geq 1, \quad \forall i = 1,2 \Longrightarrow y = 0.$$

En considérant la famille $\Phi_{k,1}$, et en tenant compte que $\{\varphi_k,\ k \geq 1\}$ est une base (hilbertienne) de $L^2((0,\pi);\mathbb{R})$, on obtient $y_1 = 0$. Puis, en considérant $\Phi_{k,2}$ et en tenant compte que $y_1 = 0$, on obtient $y_2 = 0$. Ceci démontre que la famille est totale dans $L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$.
2- Pour montrer que $\mathcal{B}^*$ est biorthogonale, calculons $\left\langle \Phi_{k,i}, \Phi^*_{k',i'} \right\rangle$. Par construction de ψ_k orthogonale à φ_k, $\Phi_{k,2}$ est orthogonale à $\Phi^*_{k,1}$, de plus elle est orthogonale $\Phi^*_{j,2}$ pour tout $j \neq k$. De même, $\Phi_{k,1}$ est orthogonale $\Phi^*_{j,2}$ pour tout j et à $\Phi^*_{j,1}$ pour tout $j \neq k$. De plus

$$\left\langle \Phi_{k,1}, \Phi^*_{k,1} \right\rangle = (\varphi_k, \varphi_k) = 1, \quad \left\langle \Phi_{k,2}, \Phi^*_{k,2} \right\rangle = (\varphi_k, \varphi_k) = 1.$$

Puisque la famille $\mathcal{B}$ admet une famille biothogonale dans $L^2((0,\pi);\mathbb{R}^2)$, elle est libre. En effet, en faisant le produit scalaire d'une combinaison linéaire finie et nulle d'éléments de $\mathcal{B}$ avec les élements de la famille bi-orthogonale, on en déduit que tous les coefficients sont nuls.
3- On va maintenant montrer que $\mathcal{B}$ est de Bessel. On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dans $L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est de Bessel, il suffit de montrer que pour tout $y \in L^2((0,\pi);\mathbb{R}^2)$, chacune des séries de terme général $|\langle y, \Phi_{k,1} \rangle|^2$, $|\langle y, \Phi_{k,2} \rangle|^2$ convergent.
On a :

$$|\langle y, \Phi_{k,1} \rangle|^2 \leq \left| \int_0^\pi y_1(x)\, \varphi_k(x)\, dx \right|^2,$$

et

$$|\langle y, \Phi_{k,2} \rangle|^2 \leq \left| \int_0^\pi y_1(x)\, \psi_k(x)\, dx \right|^2 + \left| \int_0^\pi y_2(x)\, \varphi_k(x)\, dx \right|^2.$$

de (1.15), on obtient

$$|\langle y, \Phi_{k,2} \rangle|^2 \leq \frac{C \left\| y_1 \right\|^2_{L^2(0,\pi;\mathbb{R})}}{k^2} + \left| \int_0^\pi y_2(x)\, \varphi_k(x)\, dx \right|^2.$$

Comme $y_1, y_2 \in L^2(0,\pi;\mathbb{R})$, pour $i = 1,\ 2$, les séries de terme général $\left| \int_0^\pi y_i(x)\, \varphi_k(x)\, dx \right|^2$ sont convergentes et en conséquence, les estimations précédentes assurent la convergence des séries de terme général $|\langle y, \Phi_{k,i} \rangle|^2$, $i = 1, 2$.
On démontre de la même manière que $\mathcal{B}^*$ est totale et de Bessel. En conclusion, $\mathcal{B}$ est une base de Riesz de $L^2(0,\pi;\mathbb{R}^2)$

Exemple 1.17 *[13]La famille*

$$\left\{ e^{ikt}, te^{ikt}, t^2 e^{ikt}, ..., t^m e^{ikt} \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}^*.$$

forme une base de Riesz dans $L^2(0,T)$ pour tout $T \geq 2(m+1)\pi$.

1.4.2 La méthode des moments

Le but de la méthode des moments est de transformer un problème de contrôlabilité pour un système linéaire en un problème de moments sur le contrôle. La méthode des moments a été utilisée dans [27] pour obtenir le tout premier résultat de contrôlabilité pour l'équation de la chaleur.

Contrôlabilité l'équation de la chaleur en 1D par la méthode des moments

C'est un résultat en dimension 1 avec un contrôle frontière. Pour être plus précis, considérons

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = 0 & \text{dans } (0,T)\times(0,1), \\ y(t,0) = v(t), \qquad y(t,1) = 0 & \text{sur } (0,T), \\ y(0) = y_0 & \text{dans } (0,1). \end{cases} \tag{1.16}$$

où y est l'état, y_0 est la donnée initiale, v est le contrôle.
On rappelle (1.16) que pour tout $y_0 \in L^2(0,1)$ et $v \in L^2(0,T)$ il existe une unique solution (faible) $y \in C^0([0,T];L^2(0,1))$ qui dépend continûment des données : il existe une constante $C > 0$ (indépendante de T) telle que

$$\|y\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} \leq C\left(\|y_0\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(Q_T)}\right).$$

De plus, la régularité parabolique nous dit aussi que $y \in L^2(0,T;H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1))$ si $y_0 \in H_0^1(\Omega)$.
On introduit le système adjoint à (1.16), c'est-à-dire l'équation rétrograde en temps

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varphi_{xx} = 0 & \text{dans } (0,T)\times(0,1), \\ \varphi = 0 & \text{sur } (0,T), \\ \varphi(T) = \varphi_T & \text{dans } (0,1). \end{cases} \tag{1.17}$$

On rappelle que pour tout $\varphi_T \in L^2(0,1)$ il existe une unique solution faible $C^0([0,T];L^2(0,1))$ qui dépend continûment des données. En effectuant des intégrations par parties on obtient la relation fondamentale entre la solution y du problème initial (1.16) et la solution φ du problème adjoint (1.17):

$$\langle y(T), \varphi_T\rangle_{H^{-1},H_0^1} - \langle y_0, \varphi(0)\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int_0^T v(t)\partial_x\varphi(t,0)dt.$$

pour tout $\varphi_T \in H_0^1(0,1)$, où φ est toujours la solution du système adjoint (1.17). Il est alors facile de voir que l'équation (1.16) est contrôlable à zéro au temps T si, et seulement si, pour tout $y_0 \in H^{-1}(0,1)$, il existe un contrôle $v \in L^2(0,T)$ tel que

$$-\langle y_0, \varphi(0)\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int_0^T v(t)\partial_x\varphi(t,0)dt.$$

En décomposant maintenant y_0 et φ en séries de Fourier dans la base de fonctions propres $\{\phi_k\}_{k\geq 1}$ de $-\partial_x^2$ (avec conditions au bord de Dirichlet), la relation précédente est équivalente à

$$c_k = \int_0^T v(T-t)e^{-\lambda_k t}dt, \qquad \forall k \geq 1, \tag{1.18}$$

où on a posé $c_k = \dfrac{-e^{-\lambda_k T}}{\partial_x\phi_k(0)}\langle y_0, \phi_k\rangle_{H^{-1},H_0^1}$, $\partial_x\phi_k(0) \neq 0$. Le problème des moments est alors le suivant étant une suite $(c_k) \in \ell^2$ est-il possible de trouver $v \in L^2(0,T)$ tel que la relation (1.18) soit vérifiée.
Pour le résoudre, on construit une famille $\{q_k\}_{k\geq 1} \in L^2(0,T)$ biorthogonale à la famille des exponentielles $\{e^{-\lambda_k t}\}_{k\geq 1}$, c'est-à-dire telle que

$$\left\langle q_k, e^{-\lambda_l t}\right\rangle_{L^2(0,T)} = \delta_{kl},$$

et qui vérifie de plus l'estimation

$$\|q_k\|_{L^2(0,T)} \leq \rho_T e^{C\sqrt{\lambda_k}}, \qquad \forall k \geq 1, \tag{1.19}$$

où $\rho_T > 0$ est une constante qui dépend de T. Une fois cette famille construite (c'est la tâche la plus difficile), il suffit de prendre v de la forme

$$v(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k q_k(T-t).$$

Vérifions que cette série converge bien dans $L^2(0,T)$. De l'estimation (1.19) et l'inégalité de Young $C\sqrt{\lambda_k} \leq \frac{\lambda_k T}{2} + \frac{C^2}{2T}$ on a

$$\begin{cases} \|q_k\|_{L^2(0,T)} \leq \rho_T e^{\frac{\lambda_k T}{2} + \frac{C^2}{2T}}, \\ |c_k| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\lambda_k T}\|y_0\|_{H^{-1}(0,1)}. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\|v\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\rho_T e^{\frac{C^2}{2T}}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda_k T}{2}}\right)\|y_0\|_{H^{-1}(0,1)}.$$

Comme $\lambda_k = k^2\pi^2$, cette série est comparable à l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2 T}{2}x^2}dx$, qui vaut $\sqrt{\dfrac{1}{2\pi T}}$.

Par ailleurs, sachant qu'on peut en fait prendre $\rho_T = Ce^{C/T}$ (voir [53]), cela fournit aussi une estimation du coût du contrôle en $Ce^{C/T}$.

1.4.3 Contrôlabilité exacte d'un système hyperbolique couplé par la méthode des moments

On s'inspire ici de la présentations faites dans [13]. Soit $\Omega = (0,\pi)$, $T > 0$. On étudie la contrôlabilité du système suivant:

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + \alpha q = 0 & \text{dans } (0,\pi)\times(0,T), \\ q_{tt} - q_{xx} = 0 & \text{dans } (0,\pi)\times(0,T), \\ y(0,t) = v(t), \quad y(\pi,t) = 0 & t \in (0,T), \\ q(0,t) = 0, \quad q(\pi,t) = 0 & t \in (0,T), \\ y(x,0) = y^0(x), \quad y_t(x,0) = y^1(x) & \text{dans } (0,\pi), \\ q(x,0) = q^0(x), \quad q_t(x,0) = q^1(x) & \text{dans } (0,\pi). \end{cases} \tag{1.20}$$

tel que $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $v \in L^2(0,T)$ est une fonction de contrôle.

On pose

$$\mathcal{V} = L^2(0,\pi) \times H_0^1(0,\pi) \times H^{-1}(0,\pi) \times L^2(0,\pi).$$

Théorème 1.18 *Pour $(y^0, q^0, y^1, q^1) \in \mathcal{V}$, la solution $(y,q) = (y^v(x,t), q^v(x,t))$ de système (1.20) existe est unique et satisfait*

$$(y, q, y_t, q_t) \in \mathcal{C}([0,T];\mathcal{V}).$$

cela signifie que pour tout $t \in [0,T]$, $(y(\cdot,t), q(\cdot,t), y_t(\cdot,t), q_t(\cdot,t)) \in \mathcal{V}$. est continue en t pour la norme de $\mathcal{V}$.

Définition 1.19 *Le système (1.20) est exactement contrôlable au temps $t \in [0,T]$ si, pour toute donnée initiale $(y^0, q^0, y^1, q^1) \in \mathcal{V}$, l'ensemble*

$$\left\{(y^v(\cdot,t), q^v(\cdot,t), y_t^v(\cdot,t), q_t^v(\cdot,t)) : v \in L^2(0,T)\right\}$$

est égal à $\mathcal{V}$.

Le problème des moments du système (1.20)

En reprenant la démarche suivie dans la section précédente pour le problème parapolique, le problème des moments pour le système (1.20) s'écrit

$$\int_0^T v(t)\, f_k(t)\, dt = c_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.21}$$

D'après [13, Ch. I.2] ce problème admet une solution $v \in L^2(0,T)$ pour tout $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R})$ si et seulement si, la famille $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ forme une base de Riesz dans $L^2(0,T)$.

Explicitons ce qu'est la famille $\{f_k\}$ dans la situation présente.

Posons y, q sous la forme

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\varphi_k(x), \quad q(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\varphi_k(x) \tag{1.22}$$

tel que $\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx)$, multiplions les équations de (1.20) par $\sin(kx)$ et intégrons par parties sur $(0,\pi)$, nous trouvons

$$\begin{cases} \int_0^\pi (y_{tt}(x,t) + n^2 y(x,t) + \alpha q(x,t)) \sin(nx)dx = nv(t), \ 0 < t < T, \\ \\ \int_0^\pi (q_{tt}(x,t) + n^2 q(x,t) + \beta y(x,t)) \sin(nx)dx = 0, \ 0 < t < T. \end{cases} \tag{1.23}$$

De (1.22) et (1.23), nous trouvons

$$\begin{cases} \ddot{a}_k + k^2 a_k + \alpha b_k = \kappa_k v(t), \\ \\ \ddot{b}_k + k^2 b_k + \beta a_k = 0, \\ \\ a_k(0) = \dot{a}_k(0) = b_k(0) = \dot{b}_k(0) = 0, \end{cases} \tag{1.24}$$

avec $\kappa_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}k$. Nous pouvons alors écrire le système (1.24) sous la forme

$$\begin{cases} \dot{Y}_k(t) = A_k Y_k(t) + F_k(t) \\ \\ Y_k(0) = 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

avec

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k^2 & -\alpha & 0 & 0 \\ -\beta & -k^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_k(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \kappa_k \\ 0 \end{pmatrix} v(t).$$

La solution de système (1.25) est donnée par

$$Y_k(t) = \int_0^t e^{A_k(t-\tau)} F_k(\tau) d\tau.$$

Calculons $e^{A_k t}$. Pour cela utilisons la méthode de Cayley-Hamilton (cf [46]). Le polynôme caractéristique est égal à

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_4 - A_k) = \lambda^4 + 2k^2\lambda^2 + n^4,$$

et

$$e^{A_k t} = z_{0,k}(t) I + z_{1,k}(t) A_k + z_{2,k}(t) A_k^2 + z_{3,k}(t) A_k^3,$$

avec $z_{n,k}(t)$ la solution de cette équation différentielle (voir [46])

$$\begin{cases} z^{(4)} + 2k^2 z^{(2)} + k^4 = 0 \\ z_{n,k}^{(j)}(t) = \delta_{jn}, \quad j, n = 0, 1, 2, 3. \end{cases}$$

Nous trouvons

$$z_{0,k}(t) = \frac{1}{2} e^{ikt} - \tfrac{ik}{4} t e^{ikt} + \tfrac{1}{2} e^{-ikt} + \frac{ik}{4} t e^{-ikt},$$

$$z_{1,k}(t) = -\frac{3i}{4k} e^{ikt} - \frac{1}{4} t e^{ikt} + \frac{3i}{4k} e^{-ikt} - \frac{1}{4} t e^{-ikt},$$

$$z_{2,k}(t) = -\frac{i}{4k} t e^{ikt} + \frac{i}{4k} t e^{-ikt},$$

$$z_{3,k}(t) = -\frac{i}{4k^3} e^{ikt} - \frac{1}{4k^2} t e^{ikt} + \frac{i}{4k^3} e^{-ikt} - \frac{1}{4k^2} t e^{-ikt},$$

et donc

$$e^{A_k t} = \begin{pmatrix} \cos(kt) & 0 & \dfrac{\sin(kt)}{k} & 0 \\ -t\beta\dfrac{\sin(kt)}{2k} & \cos(kt) & -\beta\left(\dfrac{\sin(kt)}{2k^3} - \dfrac{\cos(kt)}{2k^2}t\right) & \dfrac{\sin(kt)}{k} \\ ik\cos(kt) & 0 & \cos(kt) & 0 \\ -\beta\left(\dfrac{\sin(kt)}{2k} + \dfrac{\cos(kt)}{2}t\right) & ik\cos(kt) & -t\beta\dfrac{\sin(kt)}{2k} & \cos(kt) \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que la solution de (1.24) et (1.25) est donnée par les formules:

$$\begin{aligned} a_k(t) &= \frac{\kappa_k}{k}\int_0^t \sin\left(k(t-\tau)\right) v\left(\tau\right) d\tau, \\ b_k(t) &= -\frac{\kappa_k\beta}{2k^3}\int_0^t \left(\sin\left(k(t-\tau)\right) - k(t-\tau)\cos\left(k(t-\tau)\right)\right) v\left(\tau\right) d\tau, \\ \dot{a}_k(t) &= \kappa_k\int_0^t \cos\left(k(t-\tau)\right) v\left(\tau\right) d\tau, \\ \dot{b}_k(t) &= -\frac{\kappa_k\beta}{2k}\int_0^t (t-\tau)\sin\left(k(t-\tau)\right) v\left(\tau\right) d\tau. \end{aligned}$$

Comme $\kappa_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}k$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} a_k(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t \sin\left(k(t-\tau)\right) v\left(\tau\right) d\tau, \\ kb_k(t) &= \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \left(-\frac{\sin\left(k(t-\tau)\right)}{k} + (t-\tau)\cos\left(k(t-\tau)\right)\right) v\left(\tau\right) d\tau, \\ k^{-1}\dot{a}_k(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t \cos\left(k(t-\tau)\right) v\left(\tau\right) d\tau, \\ \dot{b}_k(t) &= -\frac{\beta}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t (t-\tau)\sin\left(k(t-\tau)\right) v\left(\tau\right) d\tau. \end{aligned}$$

La résolution du problème des moments

Il est bien connu étant donné, $(g_1, g_2, g_3, g_4) \in \mathcal{V}$ sa norme est équivalente aux normes à la norme de ses coefficients de Fourier, c'est à dire

$$\begin{aligned}
& \|(g_1, g_2, g_3, g_4)\|_{\mathcal{V}} \\
\asymp & \sum_{k=1}^{\infty} \left[|\overline{a}_k (T)|^2 + \left|\overline{b}_k (T)\right|^2 + |\overline{c}_k (T)|^2 + \left|\overline{d}_k (T)\right|^2 \right]. \qquad (1.26)
\end{aligned}$$

Le problème des moments revient alors à trouver v tel que:

$$\begin{aligned}
\overline{a}_k &= a_k(T) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \sin(k(T-\tau)) \, v(\tau) \, d\tau, \\
\overline{b}_k &= k b_k(t) = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T \left(-\frac{\sin(k(t-\tau))}{k} + (t-\tau)\cos(k(t-\tau)) \right) v(\tau) \, d\tau, \\
\overline{c}_k &= k^{-1} \dot{a}_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \cos(k(t-\tau)) \, v(\tau) \, d\tau, \\
\overline{d}_k &= \dot{b}_k(t) = -\frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T (t-\tau) \sin(k(t-\tau)) \, v(\tau) \, d\tau.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que la famille des fonctions

$$\mathcal{F}_k = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kt, \quad \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{\sin kt}{k} + t\cos kt \right), \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos kt, \quad -\frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} t \sin kt \right\}$$

forme une base de Riesz dans $L^2(0,T)$ pour $T \geq 4\pi$.

Il est connu (cf [13]) que la famille

$$\mathcal{E}_k = \{\sin kt, \ t\cos kt, \ \cos kt, \ t\sin kt\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

forme une base de Riesz dans $L^2(0,T)$ pour $T \geq 4\pi$. L'opérateur $\mathcal{B} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est borné et inversible dans $L^2(0,T)$, puisque sa forme matricielle peut être présentée comme suit

$$\mathcal{B} = \operatorname{diag}(B_k)_{k=1}^{\infty},$$

avec $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{|\mathcal{E}_k}$ défini par

$$B_k = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{\pi}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{k\sqrt{2\pi}} & \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{\pi}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \end{pmatrix},$$

$$B_k^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{k} & \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} \end{pmatrix}.$$

Alors, $\mathcal{F}$ est aussi une base de Riesz dans $L^2(0,\pi)$ pour tout $T \geq 4\pi$ d'où le problème des moments car le changement de variable $T - \tau = t$ ne change pas la nature du problème.

1.5 L'inégalité de Ingham

L'inégalité de Ingham constitue une généralisation de l'identité de Parseval pour les fonctions de la forme

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t}$$

lorsque la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une propriété d'écart du type $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, avec $\gamma > 0$. Son application à la démonstration d'inégalités d'observabilité ne peut se faire que dans le cas d'opérateurs diagonalisables pour lesquels on connaît suffisamment les propriétés spectrales.

1.5.1 Le théorème d'Ingham

Théorème 1.20 *[38] Soient $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres réels et J un intervalle borné de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $\gamma > 0$ tel que*

$$\begin{cases} (1) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \mu_{n+1} - \mu_n \geq \gamma \\ (2) \qquad\qquad |J| > \dfrac{2\pi}{\gamma}. \end{cases}$$

Il existe alors deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ (ne dépendant que de $|J|$ et γ) telles que pour toute suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de carré sommable on ait la double inégalité

$$c_1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \int_J |f(t)|^2 \, dt \leq c_2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \tag{1.27}$$

où f est définie par

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n t}.$$

L'inégalité de gauche de (1.27) est appelée inégalité inverse et celle de droite est dite inégalité directe. Dans [38], Ingham avait démontré ce résultat uniquement pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à support fini, dans un premier temps, pour éviter les problèmes de convergence des séries. Puis il concluera pour les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de carré sommable en utilisant un argument de densité et la complétude. On renvoie à l'article de Ingham, [38], pour la démonstration du Théorème 1.20, ainsi qu'au livre de Komornik et Loreti, [43], pour une application de ce résultat à la contrôlabilité de l'équation des ondes en une dimension d'espace. On trouvera également dans [38], différentes améliorations et variantes du théorème de Ingham, ainsi que des applications à la contrôlabilité d'autres systèmes (par exemple, équations de poutres, de cordes, de membranes sphériques, systèmes couplés poutre-corde).
En considérant la fonction $f(t) = e^{i\mu_{n+1}t} - e^{i\mu_n t}$, et en utilisant l'inégalité des accroissements finis

$$\left| e^{i\mu_{n+1}t} - e^{i\mu_n t} \right| \leq |t| \left| \mu_{n+1} - \mu_n \right|,$$

on remarque que la condition d'écart 1 du Théorème 1.20 est nécessaire pour que l'inégalité de gauche dans (1.27) ait lieu ; on a dans ce cas, pour $J = [0, T]$,

$$\left| \mu_{n+1} - \mu_n \right|^2 \geq \frac{6c_1}{T^3}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Dans les applications de ce résultat à la contrôlabilité de systèmes d'équations aux dérivées partielles, c'est l'inégalité de gauche dans (1.27) qui est utilisée pour démontrer les inégalités d'observabilité associées.

1.5.2 Contrôlabilité de l'équation des ondes

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière et $\Gamma \subset \partial\Omega$. On étudie la contrôlabilité frontière de l'équation des ondes sur Γ :

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \Omega \times (0,T) \\ y = v & \Gamma \times (0,T) \\ y = 0 & (\partial\Omega \backslash \Gamma) \times (0,T) \\ y(0) = y^0, \ y'(0) = y^1 & \Omega \end{cases} \tag{1.28}$$

où $(y^0, y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ et $v \in L^2(\Gamma \times (0,T))$ est un contrôle.

Définition 1.21 *On dit que y est solution faible de (1.28) si y vérifie, pour tout $f \in D(\Omega \times (0,T))$, l'égalité*

$$\int_{\Omega \times (0,T)} y f \mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\left\langle y^0, \theta'(0) \right\rangle + \left\langle y^1, \theta(0) \right\rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - \int_{\Gamma \times (0,T)} v \partial_\nu \theta \mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t$$

où θ est la solution de

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta\theta = f & \Omega \times (0,T) \\ \theta = 0 & \Gamma \times (0,T) \\ \theta(T) = \theta'(T) = 0 & \Omega. \end{cases} \tag{1.29}$$

On rappelle le théorème d'existence et d'unicité des solutions de (1.28) (cf [47]):

Théorème 1.22 *[47] Pour tout $(y^0, y^1, v) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Gamma \times (0,T))$, il existe une unique solution y de (1.28) avec*

$$y \in C\left((0,T); L^2(\Omega)\right) \cap C\left((0,T); H^{-1}(\Omega)\right).$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(y^0, y^1, v) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Gamma \times (0,T))$ on ait l'inégalité

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|y'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\left(\left\|y^0\right\|_{L^2(\Omega)} + \|y'\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2((0,T)\times\Gamma)}\right).$$

On peut démontrer que la contrôlabilité du système (1.28) se ramène à l'observabilité de son système adjoint au sens du théorème suivant.

Théorème 1.23 *Soit $T > 0$. Le système (1.28) est exactement contrôlable au temps T si et seulement s'il existe une constante $C(T) > 0$ telle que pour tout $\left(\theta^0, \theta^1\right) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ on ait l'inégalité*

$$\left\|\left(\theta^0, \theta^1\right)\right\|^2_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq C(T) \int_0^T \int_\Gamma \left|\partial_\nu \varphi(t,x)\right|^2 \mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t \tag{1.30}$$

où θ est la solution du problème adjoint

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta\theta = 0 & (0,T)\times\Omega \\ \theta = 0 & (0,T)\times\Gamma \\ \theta(0) = \theta^0,\ \theta'(0) = \theta^1 & \Omega. \end{cases} \tag{1.31}$$

Observabilité du système adjoint en 1D

On considère, dans la suite, l'équation des ondes en une dimension d'espace sur le domaine $\Omega = (0,\pi)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = y_{xx}(x,t), & (x,t)\in(0,\pi)\times(0,T), \\ y(0,t) = v(t), \quad y(\pi,t) = 0, & t\in(0,T), \\ y(x,0) = y^0(x),\ \frac{dy}{dt}(x,0) = y^1(x) & x\in(0,\pi), \end{cases} \tag{1.32}$$

où le terme v désigne le contrôle recherché. Le système (1.32) est exactement contrôlable au temps T si, et seulement si, il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour tout $\left(\theta^0,\theta^1\right) \in H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)$, la solution θ du système adjoint

$$\begin{cases} \theta_{tt} - \theta_{xx} = 0 & (x,t)\in(0,\pi)\times(0,T), \\ \theta(0,t) = \theta(\pi,t) = 0, & t\in(0,T), \\ \theta(x,0) = \theta^0(x),\ \theta_t(x,0) = \theta^1(x), & t\in(0,T), \end{cases} \tag{1.33}$$

vérifie

$$\left\|\left(\theta^0,\theta^1\right)\right\|^2_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} \le C_T \int_0^T \left(\theta_x(0,t)\right)^2 \mathrm{d}t \tag{1.34}$$

Théorème 1.24 *Si $T \ge 2\pi$, alors l'équation des ondes (1.32) est exactement contrôlable au temps T.*

La technique uilisée dans notre travail étant trés proche de celle donnée dans la démonstration de ce Théorème, nous allons la présenter de manière assez détaillée.

Pour démontrer le théorème 1.24 nous allons tout d'abord déterminer les valeurs propres de l'opérateur

$$L : D(L) \subset L^2(0,\pi) \longrightarrow L^2(0,\pi),$$
$$L = -\partial_{xx},$$
$$D(L) = H^2(0,\pi)\cap H_0^1(0,\pi).$$

Valeurs propres et fonctions propres de L

Lemme 1.25 *Les valeurs propres de l'opérateur L sont égales à k^2 avec $k \in \mathbb{N}^*$. La suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies par*

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx)$$

pour tout $x \in [0,\pi]$ est une base hilbertienne formée de vecteurs propres de l'opérateur L associés à la suite de valeurs propres $(k^2)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Proof. Remarquons que L est un opérateur auto-adjoint, positif et inversible sur l'espace $L^2(0,\pi)$, donc ses valeurs propres sont toutes strictement positives. De plus, $D(L)$ s'injecte de façon compacte dans $L^2(0,\pi)$, donc $L^2(0,\pi)$ admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de L.

Soit λ une valeur propre de L et $\varphi \in D(L)\setminus\{0\}$ une fonction propre associée. Alors φ est une solution non nulle de l'équation

$$\begin{cases} \varphi_{xx} + \lambda\varphi = 0, & x \in (0,\pi) \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \end{cases} \tag{1.35}$$

Donc φ est de la forme

$$\varphi(x) = c_1\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right),$$

avec $c_1 = \varphi(0) = 0$ et $c_2\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = \varphi(\pi) = 0$. Puisque $\varphi \neq 0$, il vient $c_2 \neq 0$ donc $\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0$. On en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\sqrt{\lambda} = k$. D'où $k \in \mathbb{N}^*$, $\lambda = k^2$ et

$$\forall x \in [0,\pi] \qquad \varphi(x) = c_2\sin(kx).$$

Choisissons la constante c_2 de sorte que $\|\varphi\|_{L^2(0,\pi)} = 1$. Puisque $\int_0^\pi \sin^2(kx)dx = \frac{\pi}{2}$, il vient $c_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ et

$$\forall x \in [0,\pi] \qquad \varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx).$$

■

La solution de problème adjoint (1.33).

Soit $\left(\theta^0, \theta^1\right) \in H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$. Décomposons θ^0 et θ^1 dans la base Hilbertienne $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sous la forme

$$\theta^0 = \sum_{k\geq 1} \alpha_n \varphi_k \quad \text{et} \quad \theta^1 = \sum_{k\geq 1} \beta_n \varphi_k$$

avec $\sum\limits_{k\geq 1} k^2 (\alpha_k)^2 \leq \infty$ et $\sum\limits_{k\geq 1} (\beta_k)^2 \leq \infty$. On a alors

$$\left\| \left(\theta^0, \theta^1\right) \right\|^2_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} = \sum_{k\geq 1} \left(k^2 (\alpha_k)^2 + (\beta_k)^2\right). \tag{1.36}$$

Théorème 1.26 *La solution θ de (1.33) est donnée par*

$$\theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left[\left(\alpha_k - i\frac{\beta_k}{k}\right) e^{ikt} + \left(\alpha_k + i\frac{\beta_k}{k}\right) e^{-ikt} \right] \sin(kx). \tag{1.37}$$

Proof. On écrit θ dans la base hilbertienne $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sous la forme

$$\forall (x,t) \in (0,\pi) \times (0,T) \qquad \theta(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} b_k(t)\, \varphi_k(x).$$

θ est solution de (1.33) si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \begin{cases} b_k''(t) + k^2 b_k(t) = 0, & t \in (0,T), \\ b_k(0) = \alpha_k, \quad b_k'(0) = \beta_k, & \end{cases}$$

ce qui équivaut encore à

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \begin{cases} b_k(t) = c_{1,k} e^{ikt} + c_{2,k} e^{-ikt}, & t \in (0,T), \\ \alpha_k = c_{1,k} + c_{2,k}, \quad \beta_k = ik\left(c_{1,k} - c_{2,k}\right). & \end{cases}$$

Ainsi θ est solution de (1.33) si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in (0,T) \quad b_k(t) = \frac{1}{2}\left(\alpha_k - i\frac{\beta_k}{k}\right) e^{ikt} + \frac{1}{2}\left(\alpha_k + i\frac{\beta_k}{k}\right) e^{-ikt}.$$

Ce qui donne bien la formule annoncée pour θ. ■

Utilisation du théorème d'Ingham

Soit θ la solution de (1.33) donnée par (1.37). En dérivant la formule de (1.37) par rapport à x on obtient pour tout $t \in (0,T)$

$$\theta_x(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left[\left(\alpha_k - i\frac{\beta_k}{k} \right) e^{ikt} + \left(\alpha_k + i\frac{\beta_k}{k} \right) e^{-ikt} \right] k\cos(kx).$$

Pour $x = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} \theta_x(0,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left[\left(\alpha_k - i\frac{\beta_k}{k} \right) e^{ikt} + \left(\alpha_k + i\frac{\beta_k}{k} \right) e^{-ikt} \right] k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left[(k\alpha_k - i\beta_k)\, e^{ikt} + (k\alpha_k + i\beta_k)\, e^{-ikt} \right], \end{aligned}$$

et donc

$$\theta_x(0,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k e^{i\mu_k t} \tag{1.38}$$

avec pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mu_k = k, \qquad a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(k\alpha_k^0 - i\alpha_k^1 \right) & \text{si } k \geq 1 \\ 0 & \text{si } k = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left((-k)\, \alpha_{-k}^0 + i\alpha_{-k}^1 \right) & \text{si } k \leq -1 \end{cases}$$

Remarquons que, d'après (1.36),

$$\left\| \left(\theta^0, \theta^1 \right) \right\|^2_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} = \frac{1}{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 .$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda_{k+1} - \lambda_k = (k+1) - k = 1$. Donc le théorème de Ingham (1.20) s'applique avec $\gamma = 1$ et donne pour tout $T > 2\pi$, l'existence de deux constantes $c_1 = c_1(T) > 0$ et $c_2 = c_2(T) > 0$ telles que pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ on ait

$$c_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 \leq \int_0^T |f(t)|^2\, dt \leq c_2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 \tag{1.39}$$

où

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{i\mu_k t}.$$

En appliquant l'inégalité de gauche de (1.39) à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on obtient

$$\forall T > 2\pi, \qquad c_1 \frac{1}{\pi} \left\| \left(\theta^0, \theta^1\right) \right\|^2_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} \leq \int_0^T \left(\theta_x(0,t)\right)^2 dt,$$

ce qui démontre l'inégalité d'observabilité (1.34) avec $C_T = \dfrac{c_1}{\pi}$, pour tout $T > 2\pi$. Notons que (1.34) est encore vraie si $T = 2\pi$ d'après l'identité de Parseval. L'égalité

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2$$

signifie exactement que

$$\left\| \left(\theta^0, \theta^1\right) \right\|^2_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\theta_x(0,t)\right)^2 dt.$$

Dans ce cas, l'inégalité d'observabilité est une égalité.
En conclusion, le théorème de Ingham, a permis d'établir le résultat suivant: Si $T \geq 2\pi$, alors l'équation des ondes (1.32) est exactement contrôlable au temps T.

1.5.3 Les limites du théorème d'Ingham

Exemple 1.27 *On considère la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\begin{cases} \mu_{2n} = 2n \\ \mu_{2n+1} = 2n + 10^{-3} \end{cases} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Si n est pair, alors en écrivant $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\mu_{n+1} - \mu_n = \mu_{2k+1} - \mu_{2k} = 2k + 10^{-3} - 2k = 10^{-3}.$$

De même, si n est impair, en écrivant $n = 2k+1$ on obtient

$$\mu_{n+1} - \mu_n = \mu_{2(k+1)} - \mu_{2k+1} = 2(k+1) - \left(2k + 10^{-3}\right) = 2 - 10^{-3} \geq 10^{-3}.$$

Ainsi, l'hypothèse (1) du théorème (1.20) est satisfaite avec $\gamma = 10^{-3}$. Le théorème d'Ingham (1.20) donne alors que la double inégalité (1.27) est vérifiée pour tout intervalle J de longueur $|J| > \dfrac{2\pi}{\gamma} = 2000\pi$. Cependant, on démontrera dans la partie suivante que (1.27) est vraie dès que $|J| > 2\pi$, ce qui est beaucoup plus *satisfaisant.*

Exemple 1.28 *On considère à présent la suite* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie*

$$\mu_n = n^2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mu_{n+1} - \mu_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1.$$

En particulier l'hyothèse (1) du théorème (1.20) est satisfaite avec $\gamma = 1$*, ce qui permet de conclure que (1.27) est vraie dès que* $|J| > 2\pi$*. En revanche, la suite* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possède la propriété remarquable suivante*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) = +\infty,$$

qui pourra permettre de démontrer grâce à la partie suivante que (1.27) a lieu pour tout intervalle J.

1.5.4 Une amélioration du théorème d'Ingham

On présente dans cette partie une variante du théorème d'Ingham qui est due à J.M. Ball et M. Slemrod [15]. Dans cette partie, la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifie deux propriétés d'écart:

$$\inf_{n\in\mathbb{Z}} (\mu_{n+1} - \mu_n) \geq \gamma_1 \text{ et } \inf_{|n|\geq N} (\mu_{n+1} - \mu_n) \geq \gamma,$$

avec $\gamma \geq \gamma_1$. Le théorème qui suit affirme qu'on peut réduire la longueur de l'intervalle J en ne la minorant plus par $\dfrac{2\pi}{\gamma_1}$, mais par $\dfrac{2\pi}{\gamma}$ seulement.

Théorème 1.29 *Soient* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *une suite de nombres réels et J un intervalle borné de* $\mathbb{R}$*. On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs* $\gamma_1 > 0$ *et* $\gamma > 0$ *et un entier* $N \in \mathbb{N}$ *tels que*

$$\begin{cases} (1) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \mu_{n+1} - \mu_n \geq \gamma_1, \\ (2) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad |n| \geq N \Longrightarrow \mu_{n+1} - \mu_n \geq \gamma, \\ (3) \quad |J| > \dfrac{2\pi}{\gamma}. \end{cases}$$

Alors iI existe deux constantes $c_1 > 0$ *et* $c_2 > 0$ *telles que pour toute suite complexe* $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *de carré sommable on ait la double inégalité*

$$c_1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \int_J |f(t)|^2 \, dt \leq c_2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \tag{1.40}$$

où f est définie par

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n t}.$$

Proof. Pour la démonstration de l'inégalité directe, on s'inspire ici de la preuve donnée dans [15]. On suppose que les hypothèses du théorème sont vérifiées. En effectuant un changement d'indice, on obtient, grâce au théorème 1.20, l'existence de deux constances $m_1 > 0$ et $m_2 > 0$ telles que pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de carré sommable on ait

$$m_1 \sum_{|n|\geq\mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \int_J |g(t)|^2 \, dt \leq m_2 \sum_{|n|\geq\mathbb{Z}} |a_n|^2 ,$$

où

$$g(t) = \sum_{|n|\geq\mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n t}.$$

Pour la démonstration de l'inégalité inverse, on reprend ici l'idée de la peuve de [36]. On démontre l'inégalité inverse par récurrence sur l'entier

$$p := Card \left\{ n \in \mathbb{Z},\ \mu_{n+1} - \mu_n < \gamma \right\}$$

et pour les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à support fini (le résultat pour les suites de carré sommable se réduit de la double inégalité obtenue pour les suites à support fini. ■

Chapitre 2

Exact and approximate controllability of coupled one-dimensional hyperbolic equations

Ce chapitre est la reprise de l'article [17], publié dans "Evolution Equation End Control Theory".

http://aimsciences.org/journals/contentsListnew.jsp?pubID=986

Résumé

Nous étudions les propriétés du contrôle simultanées de deux équations d'ondes unidimensionnelles (fortement couplées) lorsque le contrôle agit sur le bord. Des conditions nécessaires et suffisantes pour la contrôlabilité approximative et exacte sont prouvées.

Abstract

We deal with the simultaneous controllability properties of two one dimensional (strongly) coupled wave equations when the control acts on the boundary. Necessary and sufficient conditions for approximate and exact controllability are proved.

2.1 Introduction

This chapter deals with the controllability properties of some systems of two coupled one dimensional hyperbolic equations. The control is exerted at one boundary point for all times. More precisely, fix $T > 0$ and consider the linear system

$$\begin{cases} y_{tt} = Dy_{xx} + A(x)\, y_t & \text{in } Q_T = (0,\pi) \times (0,T) \\ \\ Dy(0,t) = Bv(t) \ \ , \ \ y(\pi,t) = 0 & t \in (0,T) \\ \\ y(x,0) = y^0 \ , \ \ y_t(x,0) = y^1 & \text{in } \ (0,\pi) \end{cases} \tag{2.1}$$

where:

- $D = \operatorname{diag}(1, d^2)$ with d a positive real number;
- $A \in W^{1,\infty}(0,\pi; \mathcal{L}(\mathbb{R}^2))$ is given by $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & a(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
- $B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ and $v \in L^2(0,T)$ is the control function.

The starting point of the present work is the results established for the controllability properties of the parabolic system

$$\begin{cases} y_t = Dy_{xx} + A(x)\, y & \text{in } Q_T = (0,\pi) \times (0,T) \\ \\ Dy(0,t) = Bv(t) \ \ , \ \ y(\pi,t) = 0 & t \in (0,T) \\ \\ y(x,0) = y^0 \ , & \text{in } \ (0,\pi)\,. \end{cases}$$

with A, B and D as defined previously. It appears in [8], [10] and [11] that a positive minimal time of null controllability occurs for this kind of parabolic systems whenever $D \neq Id$ or if the support of the function a is contained in $(0,\pi)$. A natural question was then to understand what happens for a hyperbolic system of this kind. After we proved the results proposed in our article, some papers on this question appeared. In particular, we would like to quote the paper by Dehman, Le Rousseau and Léautaud [24] and Alabau and Léautaud [5] (see also [4]). In these articles, the authors consider the simultaneous exact controllability issue of two coupled wave equations in any space dimension. Let us describe explicitely a consequence of the result in [24, Theorem 1.3.]. Let $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a smooth bounded domain and

$\omega \subset \Omega$ an open subset, and consider the system:

$$\begin{cases} y_{tt} = \Delta y_{xx} + A(x)\, y + Bmu & \text{in } Q_T = \Omega \times (0,T) \\ y = 0 & \text{on } \Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T) \\ (y, y_t)_{|t=0} = (y^0, y^1) & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

where $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & a(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, a and m are smooth functions of the space variable and $u \in L^2(Q_T)$ is the control (which acts on the support of m and only on the second equation). Assuming that $\omega = \{m \neq 0\}$ and $\mathcal{O} = \{a \neq 0\}$ both satisfy the Geometric Control Condition (GCC) defined in [16], and that $a \geq 0$ on Ω, the authors prove that there exists $T^* = T^*(\omega, \mathcal{O}) > 0$ such that (2.2) is exactly controllable if $T > T^*$ and is not controllable if $T < T^*$. This exact controllability occurs for initial data

$$\left(y^0, y^1\right) \in \left[\left(H^2 \cap H_0^1\right)(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right] \times \left[H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)\right]. \tag{2.3}$$

The case of different wave speeds is also considered in this work and a similar controllability result is proved for initial data in the space:

$$\left[\left(H^3 \cap H_0^1\right)(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right] \times \left[\left(H^2 \cap H_0^1\right)(\Omega) \times L^2(\Omega)\right]$$

provided $\omega \cap \mathcal{O}$ satisfies the GCC , and a non controllability result whenever $\overline{\omega} \cap \overline{\mathcal{O}}$ does not satisfy the GCC (see [24, Theorem 1.8., p. 121] for a more precise description).

The previously described results follow those obtained in [5] where System (2.2) is considered with a weak coupling of the form:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & a(x) \\ \delta a(x) & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

where $a \geq 0$ is a smooth function and $\delta > 0$ is a parameter. These authors prove that there exists $\delta_* > 0$ such that if (δ, a) satisfies $\delta \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta_*$, and $\omega = \{m \neq 0\}$ and $\mathcal{O} = \{a \neq 0\}$ both satisfy the Geometric Control Condition (GCC), then there exists $T^* = T^*(\omega, \mathcal{O}) > 0$ such that (2.2) is exactly controllable if $T > T^*$ for initial data satisfying (2.3). The results in [24] correspond to the case $\delta = 0$.

Other results related to the controllability of these systems can be found in [2, Theorem 1.1., p. 873] for the case $\delta = 1$ and constant a when A is given by (2.4) (this paper contains also an interesting abstract control result for two coupled second-order equations), in [12] in the one-dimensional case and constant coupling coefficients, in [6] for results related to uniform stability.

We would like to emphasize that the coupling coefficient (namely the function a) is nonnegative on Ω in these two articles. The second observation is that the coupling is weak in the sense that the operator $y \mapsto Ay$ from $H_0^1(\Omega)^2$ in $L^2(\Omega)^2$ is compact and this excludes the exact controllability property to hold for initial data in $\left[H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)\right]^2$.

From these observations arise natural questions we deal with in this paper for the one-dimensional version of (2.2) when the control acts on the boundary. In system (2.1), the wave speeds may be different and the coupling function is smooth *but may changes sign* and, on the other hand, the coupling is strong (the matrix A acts on y_t instead of y). In this setting, our main result gives necessary and sufficient conditions for the exact controllability to hold in the natural space $L^2(0,\pi)^2 \times H^{-1}(0,\pi)^2$ (see Theorem 2.7).

This chapter is organized as follows. In Section 2.2, a description of the control issue is given and the main result is formulated. Section 2.3 reduces this controllability issue to an observability inequality to be satisfied by the solutions ot the backward adjoint problem. Our proof of the main result is based on a precise description of the spectrum associated with system (2.1). Section 2.4 is devoted to the computation of the eigenvalues and the associated (generalized) eigenfunctions. The proof of the approximate controllability result (see Theorem 2.5) is in Section 2.5. Section 2.6 is devoted to the characterization of the exact controllability (see Theorem 2.7).

2.2 The control issues and main results

Notation 2.1 *All along this chapter,* $\mathbb{X}(\alpha,\beta)$ *will refer to the space* $X(\alpha,\beta) \times X(\alpha,\beta)$ *(for instance,* $\mathbb{L}^2(0,\pi) = L^2(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$, $\mathbb{H}^{-1}(0,\pi) = H^{-1}(0,\pi) \times H^{-1}(0,\pi), \ldots$*).*

The previous problem is well-posed and a solution to (2.1) can be defined using for example the transposition method.

Définition 2.2 *For $(y^0, y^1, v) \in \mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi) \times L^2(0,T)$, a (weak) solution to system (2.1) is a function*

$$y = y\left(\cdot; y^0, y^1, v\right) \in C\left([0,T]; \mathbb{L}^2(0,\pi)\right) \cap C^1\left([0,T]; \mathbb{H}^{-1}(0,\pi)\right)$$

satisfying

$$\begin{aligned}\int_Q y \cdot f \; dxdt &= -\int_0^\pi y^0 \cdot (\theta_t(0) + A^*\theta(0))\, dx + \left\langle y^1, \theta(0)\right\rangle_{\mathbb{H}^{-1}(0,\pi), \mathbb{H}_0^1(0,\pi)} \\ &\quad + \int_0^T v(t)\, B^*\theta_x(0,t)\, dt \end{aligned} \tag{2.5}$$

for all $f \in L^1(0,T; \mathbb{L}^2(0,\pi))$, where $\theta \in C([0,T]; \mathbb{H}_0^1(0,\pi)) \cap C^1([0,T]; \mathbb{L}^2(0,\pi))$ is the unique solution to the system:

$$\begin{cases} \theta_{tt} = D\theta_{xx} - A^*(x)\,\theta_t + f & in \; Q_T \\ \\ \theta(0,t) = \theta(\pi,t) = 0 & t \in (0,T) \\ \\ \theta(T) = 0 \;,\; \theta_t(T) = 0 & in \; (0,\pi) \end{cases} \tag{2.6}$$

One has:

Proposition 2.3 *For $(y^0, y^1, v) \in \mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi) \times L^2(0,T)$, system (2.1) admits a unique solution, in the sense of Definition 2.2 , which depends continuously on the data : there is a constant $C > 0$ (independent of T) such that*

$$\begin{aligned}&\|y\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(0,\pi))} + \|y_t\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{H}^{-1}(0,\pi))} \\ &\qquad \le C\left(\|y^0\|_{\mathbb{L}^2(0,\pi)} + \|y^1\|_{\mathbb{H}^{-1}(0,\pi)} + \|v\|_{L^2(0,T)}\right).\end{aligned}$$

The proof of the previous result follows step by step the one given in [47, pp. 46-54] (for instance) for the wave equation. Let us just recall at this level that the proof consists in proving that, in (2.5), the right hand-side is a continuous linear form on $L^1(0,T; \mathbb{L}^2(0,\pi))$:

$$\begin{aligned}&\int_0^T |B^*\theta_x(0,t)|^2 + \int_0^\pi |\theta_t(x,0) + A^*\theta(x,0)|^2 + \int_0^\pi |\theta_x(x,0)|^2 \\ \le\;& C\,\|f\|^2_{L^1(0,T;\mathbb{L}^2(0,\pi))},\end{aligned}$$

where θ is the solution to (2.6). An alternative proof can be found in [58].

Définition 2.4 *System (2.1) is exactly controllable in* $\mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ *at time* $T > 0$ *if for any* $(y^0, y^1), (y_T^0, y_T^1) \in \mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$, *there exists a control function* $v \in L^2(0,T)$ *such that the associated solution to System (2.1) satisfies* $(y(T), y_t(T)) = (y_T^0, y_T^1)$.

It is said null-controllable at time $T > 0$ *if for any* $(y^0, y^1) \in \mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$, *there exists a control function* $v \in L^2(0,T)$ *such that the associated solution to System (2.1) satisfies* $y(T) = 0,\ y_t(T) = 0$.

Last, System (2.1) is said approximately controllable in $\mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ *at time* $T > 0$ *if for any* $(y^0, y^1), (y_T^0, y_T^1) \in \mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ *and* $\varepsilon > 0$, *there exists a control function* $v \in L^2(0,T)$ *such that the associated solution to System (2.1) satisfies*

$$\left\| \left(y(T) - y_T^0,\ y_t(T) - y_T^1 \right) \right\|_{\mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi)} < \varepsilon.$$

For all $x \in (0,\pi)$ and $k \in \mathbb{N}^*$, we denote by $\varphi_k(x) := \sqrt{2/\pi}\sin(kx)$ the eigenvector of the one-dimensional Laplace operator, with Dirichlet boundary conditions, associated with the eigenvalue $-k^2$. We will also need the following numbers associated with a :

$$a_{k,j} = \int_0^\pi a(x)\,\varphi_{|k|}(x)\,\varphi_{|j|}(x)\,dx,\ \ k, j \in \mathbb{Z}^*. \tag{2.7}$$

We are now ready to state our main results and we begin with those concerning the approximate controllability property.

Théorème 2.5 *Let* $a \in L^\infty(0,\pi)$ *and* $d > 0$. *Then System (2.1) is approximately controllable if, and only if, the following conditions are satisfied:*

$$\begin{gathered} b_2 \neq 0, \\ \int_0^\pi a(\pi - x)\sin(kx)\sin\left(\frac{k}{d}x\right)dx \neq \frac{i(-1)^k d^2 b_1}{b_2}\sin\left(\frac{k}{d}\pi\right), \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Remarque 2.6 *The second condition in (2.8) is always satisfied if* $b_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *and* $d \notin \mathbb{Q}$.

This result is proved in Section 2.5.

Since approximate controllability is a necessary condition for exact controllability, we will now assume this property.

Théorème 2.7 *Let* $a \in W^{1,\infty}(0,\pi)$. *Then:*

1. *If* $D \neq Id$ $(\Leftrightarrow d \neq 1)$ *then System (2.1) is not exactly controllable in* $\mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ *at any time* $T > 0$.

2. *If $D = Id$ $(\Leftrightarrow d = 1)$ then System (2.1) is exactly controllable in $\mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ at time $T > 0$ if, and only if, it is approximately controllable and*

$$T \geq 4\pi, \quad \int_0^\pi a(x)\, dx \neq 0.$$

This result is proved in Section 2.6.

Remarque 2.8 *When $D = Id$, the approximate controllability is characterized by the conditions (2.8) which write (as it can be easily checked):*

$$\begin{array}{c} b_2 \neq 0, \\ a_{k,k} = \int_0^\pi a(x)\, \varphi_{|k|}^2(x)\, dx \neq 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*. \end{array} \tag{2.9}$$

Remarque 2.9 *Note that when a is non trivial and does not change sign in $(0,\pi)$, then (2.9) is always satisfied and $\int_0^\pi a(x)\, dx \neq 0$. Thus, in this case, if $d = 1$ and $b_2 \neq 0$, System (2.1) is exactly controllable in $\mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ at any $T \geq 4\pi$.*

Remarque 2.10 *It is easy to construct a function $a \in W^{1,\infty}(0,\pi)$ such that supp$(a) \Subset (0,\pi)$, changing sign on its support, satisfying moreover (2.9) and $\int_0^\pi a(x)\, dx \neq 0$.*

2.3 Controllability and observability

The backward adjoint system associated with System (2.1) writes:

$$\begin{cases} \theta_{tt} = D\theta_{xx} - A^*(x)\,\theta_t & \text{in } Q_T \\ \\ \theta(0,t) = \theta(\pi,t) = 0 & t \in (0,T) \\ \\ \theta(T) = \theta^0\ ,\ -\theta_t(T) - A^*(x)\,\theta(T) = \theta^1 & \text{in } (0,\pi) \end{cases} \tag{2.10}$$

We have the following equivalent formulations of the controllability properties.

Proposition 2.11 1. *System (2.1) is exactly controllable in $\mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ at time $T > 0$ if and only if for any $(\theta^0,\theta^1) \in \mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$ there exists $C_T > 0$*

$$\left\| \left(\theta^0,\theta^1\right) \right\|^2_{\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)} \leq C_T \int_0^T \left| B^*\theta_x(0,t) \right|^2 dt, \tag{2.11}$$

where θ is the solution to system (2.10) associated with $(\theta^0,\theta^1) \in \mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$.

2. *System (2.1) is null-controllable in* $\mathbb{L}^2(0,\pi)\times\mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ *at time* $T>0$ *if and only if there exists* $C_T>0$ *such that for any* $(\theta^0,\theta^1)\in\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)$

$$\|(\theta(0),\theta_t(0))\|^2_{\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)}\leq C_T\int_0^T|B^*\theta_x(0,t)|^2\,dt, \tag{2.12}$$

where θ *is the solution to system (2.10) associated with* $(\theta^0,\theta^1)\in\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)$.

3. *System (2.1) is approximately controllable in* $\mathbb{L}^2(0,\pi)\times\mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ *at time* $T>0$ *if and only if*

$$B^*\theta_x(0,t)=0 \text{ in } (0,T)\Longleftrightarrow(\theta^0,\theta^1)=(0,0), \tag{2.13}$$

where θ *is the solution to system (2.10) associated with* $(\theta^0,\theta^1)\in\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)$.

Proof. Although such results are by now classical, we give, for the convenience of the reader, a sketch of the proof. Between the solution of system (2.1) and system (2.10), we have the following relation obtained by straightforward computations:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi y(T)\cdot\theta^1dx+\langle y_t(T),\theta^0\rangle_{\mathbb{H}^{-1}(0,\pi),\mathbb{H}_0^1(0,\pi)}\\
=\ &-\int_0^\pi y^0\cdot(\theta_t(0)+A^*\theta(0))\,dx+\langle y^1,\theta(0)\rangle_{\mathbb{H}^{-1}(0,\pi),\mathbb{H}_0^1(0,\pi)}\\
&+\int_0^T v(t)\,B^*\theta_x(0,t)\,dt.
\end{aligned}\tag{2.14}$$

Let us denote by $y(t,x;y^0,y^1,v)$ the solution to system (2.1) associated with the data (y^0,y^1,v) and define the bounded linear operators $\mathcal{L}_T:L^2(0,T)\to\mathbb{L}^2(0,\pi)\times\mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ and $\mathcal{S}_T:\mathbb{L}^2(0,\pi)\times\mathbb{H}^{-1}(0,\pi)\to\mathbb{L}^2(0,\pi)\times\mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ by

$$\mathcal{L}_Tv=(y(T;0,0,v),y_t(T;0,0,v)),$$

$$\mathcal{S}_T(y^0,y^1)=(y(T;y^0,y^1),y_t(T;y^0,y^1)).$$

As is well-known, the exact controllability is equivalent to the inequality:

$$\exists C>0,\ \|(\theta^0,\theta^1)\|_{\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)}\leq C\|\mathcal{L}_T^*(\theta^0,\theta^1)\|_{L^2(0,T)},$$

for all $\left(\theta^0, \theta^1\right) \in \mathbb{H}_0^1(0, \pi) \times \mathbb{L}^2(0, \pi)$. The null-controllability is equivalent to:

$$\exists C > 0, \ \left\|\mathcal{S}_T^*\left(\theta^0, \theta^1\right)\right\|_{\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)} \leq C\left\|\mathcal{L}_T^*\left(\theta^0, \theta^1\right)\right\|_{L^2(0,T)},$$

for all $\left(\theta^0, \theta^1\right) \in \mathbb{H}_0^1(0, \pi) \times \mathbb{L}^2(0, \pi)$. And, last, the approximate controllability is equivalent to $\ker\left(\mathcal{L}_T^*\right) = 0$.

But, from the identity (2.14), taking $(y^0, y^1) = (0, 0)$ gives

$$\mathcal{L}_T^*\left(\theta^0, \theta^1\right)(t) = B^*\theta_x(0, t).$$

Choosing $v = 0$, the same identity gives

$$\mathcal{S}_T^*\left(\theta^0, \theta^1\right) = \left(-\theta_t(0) - A^*\theta(0), \theta(0)\ \right).$$

In these two expressions, θ denotes the solution to the adjoint system (2.10) associated with $\left(\theta^0, \theta^1\right)$. This proves the proposition. ■

Remarque 2.12 *We point out that the characterizations in Proposition 2.11 remain true if the solution θ to system (2.10) is replaced by the solution to the following problem:*

$$\begin{cases} \theta_{tt} = D\theta_{xx} - A^*(x)\,\theta_t & \text{in } Q_T \\ \\ \theta(0,t) = \theta(\pi,t) = 0 & t \in (0,T) \\ \\ \theta(T) = \theta^0\ ,\ \theta_t(T) = \theta^1 & \text{in } (0,\pi) \end{cases} . \tag{2.15}$$

The reason is that the operator $\left(\theta^0, \theta^1\right) \mapsto \left(\theta^0\ ,\ -A^*\theta^0 - \theta^1\right)$ is clearly boundedly invertible from $\mathbb{H}_0^1(0, \pi) \times \mathbb{L}^2(0, \pi)$ into itself.

In order to apply Proposition 2.11, we will first study the spectrum of the operator induced by system (2.15). This is the content of the next section.

2.4 Spectral analysis

The aim of this section is to describe the spectrum associated with system (2.15).

The complexified Hilbert space $\mathbb{H}_0^1(0, \pi) \times \mathbb{L}^2(0, \pi)$ is equipped with the scalar product on its elements $u = (\varphi, \psi)$ and $v = (f, g)$ defined by:

$$\langle u, v\rangle = \int_0^\pi \left(D^{\frac{1}{2}}\varphi_x \cdot \overline{D^{\frac{1}{2}} f_x} + \psi \cdot \overline{g}\right) dx. \tag{2.16}$$

The associated norm will be denoted by $\|\cdot\|_{\mathbb{H}_0^1\times\mathbb{L}^2}$.

For any $d>0$, define the operator L_d^* by:

$$\left\{\begin{array}{llcl} L_d^*: & D\left(L_d^*\right)\subset\mathbb{H}_0^1\left(0,\pi\right)\times\mathbb{L}^2\left(0,\pi\right) & \rightarrow & \mathbb{H}_0^1\left(0,\pi\right)\times\mathbb{L}^2\left(0,\pi\right), \\ & u=\left(\varphi,\psi\right) & \mapsto & \left(\psi,D\varphi_{xx}-A^*\psi\right) \end{array}\right. \tag{2.17}$$

where the domain of L_d^* is given by $D\left(L_d^*\right)=\left(\mathbb{H}^2\left(0,\pi\right)\cap\mathbb{H}_0^1\left(0,\pi\right)\right)\times\mathbb{H}_0^1\left(0,\pi\right)$, and $A^*=\begin{pmatrix}0&0\\a&0\end{pmatrix}$. It is easy to check that the operator

$$\left\{\begin{array}{llcl} L_d: & D\left(L_d\right)\subset\mathbb{H}_0^1\left(0,\pi\right)\times\mathbb{L}^2\left(0,\pi\right) & \rightarrow & \mathbb{H}_0^1\left(0,\pi\right)\times\mathbb{L}^2\left(0,\pi\right), \\ & u=\left(\varphi,\psi\right) & \mapsto & -\left(\psi,D\varphi_{xx}+A\psi\right) \end{array}\right. \tag{2.18}$$

is the adjoint operator of L_d^* in $\mathbb{H}_0^1\left(0,\pi\right)\times\mathbb{L}^2\left(0,\pi\right)$ with respect to the scalar product (2.16).

As a first step, we describe the spectrum of L_d^* (and of its adjoint operator L_d). We begin by noting that the oprators L_d^* and L_d have compact resolvent since this property holds if $a=0$. Thus, the spectrum of each one of these operators reduces to its point spectrum (the set of eigenvalues of finite multiplicity).

Setting $(\varphi,\psi)\in D\left(L_d^*\right)$, the eigenvalue problem:

$$L_d^*\begin{pmatrix}\varphi\\\psi\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\varphi\\\psi\end{pmatrix},\ \text{in }\ (0,\pi) \tag{2.19}$$

is equivalent to solving

$$\left\{\begin{array}{l} \psi=\lambda\varphi,\quad \text{in }\ (0,\pi) \\ \\ D\varphi_{xx}-\lambda A^*\varphi=\lambda^2\varphi,\ \ \text{in }\ (0,\pi) \\ \\ (\varphi,\psi)\in D\left(L_d^*\right). \end{array}\right. \tag{2.20}$$

Introduce the sets:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \{ikd : k \in \mathbb{Z}^*\}, && (2.21)\\
\Lambda_2 &= \left\{ik : k \in \mathbb{Z}^*, \frac{k}{d} \notin \mathbb{Z}^*\right\}, && (2.22)\\
\Lambda_3 &= \left\{ik : k \in \mathbb{Z}^*, \frac{k}{d} \in \mathbb{Z}^*, \ \int_0^\pi a\varphi_{|k|}\varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|} = 0\right\}, && (2.23)\\
\Lambda_4 &= \left\{ik : k \in \mathbb{Z}^*, \frac{k}{d} \in \mathbb{Z}^*, \ \int_0^\pi a\varphi_{|k|}\varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|} \neq 0\right\}. && (2.24)
\end{aligned}$$

Remarque 2.13 *Of course, it may happen that the two last sets are void. Indeed:*

$$d \notin \mathbb{Q} \Leftrightarrow \Lambda_3 = \Lambda_4 = \varnothing.$$

Remark also that if $d = 1$ *then* $\Lambda_2 = \varnothing$ *and* $\Lambda_1 = \Lambda_3 \cup \Lambda_4$, *while if* $d \neq 1$ *then* $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$. *As we will see, when* $d \in \mathbb{Q}$, *all these sets are non void and play a role* .

In the following proposition, we describe the spectrum of L_d^* and its eigenspaces.

Proposition 2.14 *Let* $d > 0$ *and* $\tau, s \in \mathbb{R}^*$ *be arbitrary numbers that will be chosen later. Then:*

1. *The spectrum of* L_d^* *is given by*

$$\sigma(L_d^*) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2.$$

2. *For* $d \neq 1$, *any* $\lambda = ik \in \Lambda_2$ *is a simple eigenvalue whose eigenspace is spanned by*

$$\begin{aligned}
V_{2,\lambda}^* &= \left(\Phi_{2,\lambda}^*, \lambda\Phi_{2,\lambda}^*\right), \\
& \quad \text{with} \\
\Phi_{2,\lambda}^* &:= \left(\tau\varphi_{|\lambda|}, \psi_\lambda^*\right),
\end{aligned}$$

where ψ_λ^* *is the unique solution to:*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} = \dfrac{\lambda^2}{d^2}u + \dfrac{\lambda}{d^2}\tau a(x)\varphi_{|\lambda|}, \quad \text{in } (0,\pi) \\ \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \tag{2.25}$$

3. $\Lambda_3 \cup \Lambda_4 \subset \Lambda_1$ *and* $\Lambda_3 \cap \Lambda_4 = \varnothing$ *(by construction). Moreover if* $d \in \mathbb{Q}$*, then:*

(a) Any $\lambda \in \Lambda_3$ *is a double eigenvalue whose eigenspace is spanned by*

$$\begin{array}{c} V^*_{j,\lambda} = \left(\Phi^*_{j,\lambda}, \lambda\Phi^*_{j,\lambda}\right), \ j = 1, 2, \\ \text{with} \\ \Phi^*_{1,\lambda} = \left(0, s\varphi_{\left|\frac{\lambda}{d}\right|}\right), \ \Phi^*_{2,\lambda} = \left(\tau\varphi_{|\lambda|}, \psi^*_\lambda\right) \end{array}, \tag{2.26}$$

where ψ^*_λ *is the unique solution to the system*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} = \dfrac{\lambda^2}{d^2}u + \dfrac{\lambda}{d^2}\tau a(x)\varphi_{|\lambda|}, \quad \text{in } (0,\pi) \\ \\ u(0) = u(\pi) = 0, \\ \\ \int_0^\pi u\varphi_{\left|\frac{\lambda}{d}\right|}dx = 0. \end{cases} \tag{2.27}$$

(b) Any $\lambda = ik \in \Lambda_4$ *is algebraically double and its generalized eigenspace is spanned by:*

$$V^*_{1,\lambda} = \left(\Phi^*_{1,\lambda}, \lambda\Phi^*_{1,\lambda}\right), \ V^*_{2,\lambda} = \left(\Phi^*_{2,\lambda}, \lambda\Phi^*_{2,\lambda} + \frac{\tau}{s}c_\lambda\Phi^*_{1,\lambda}\right) \tag{2.28}$$

with

$$\begin{aligned} L^*_d V^*_{1,\lambda} &= \lambda V^*_{1,\lambda}; \quad L^*_d V^*_{2,\lambda} = \lambda V^*_{2,\lambda} + \frac{\tau}{s}c_\lambda V^*_{1,\lambda} \\ \left\langle V^*_{1,\lambda}, V^*_{2,\lambda}\right\rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^*_{1,\lambda} &= \left(0, s\varphi_{|\lambda/d|}\right), \ \Phi^*_{2,\lambda} = \left(\tau\varphi_{|\lambda|}, \psi^*_\lambda\right) \\ c_\lambda &= -\frac{1}{2}\int_0^\pi a\varphi_{|\lambda|}\varphi_{|\lambda/d|} \end{aligned}$$

where ψ_λ^* is the unique solution to:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} = \dfrac{\lambda^2}{d^2}u + \dfrac{\lambda}{d^2}\tau\left(a(x)\varphi_{|\lambda|} + 2c_\lambda\varphi_{|\lambda/d|}\right), \quad \text{in } (0,\pi) \\ \\ u(0) = u(\pi) = 0, \\ \\ \int_0^\pi u\varphi_{|\lambda/d|}dx = -\dfrac{\overline{\lambda}\tau c_\lambda}{2|\lambda|^2}. \end{cases} \tag{2.29}$$

4. *For $d \neq 1$, any $\lambda = ikd \in \Lambda_1 \backslash (\Lambda_3 \cup \Lambda_4)$ is a simple eigenvalue whose eigenspace is spanned by:*

$$\begin{gathered} V_{1,\lambda}^* = \left(\Phi_{1,\lambda}^*, \lambda\Phi_{1,\lambda}^*\right) \\ \text{with} \\ \Phi_{1,\lambda}^* = \left(0, s\varphi_{|\lambda/d|}\right). \end{gathered} \tag{2.30}$$

Proof. First, note that L_d^* has compact resolvent since this true if $A = 0$. Thus, the spectrum of L_d^* reduces to its point spectrum. Setting $\varphi = (\phi_1, \phi_2)$, the second equation of (2.20) writes:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\phi_1}{dx^2} = \lambda^2\phi_1, \quad \text{in } (0,\pi) \\ \\ \dfrac{d^2\phi_2}{dx^2} = \dfrac{\lambda^2}{d^2}\phi_2 + \dfrac{\lambda}{d^2}a(x)\phi_1, \quad \text{in } (0,\pi) \\ \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \end{cases} \tag{2.31}$$

Let $\lambda \in \Lambda_1$. It is easy to check that $\Phi_{1,\lambda}^* = \left(0, s\varphi_{|\lambda/d|}\right)$ satisfies (2.31). Thus λ is an eigenvalue of L_d^* with the associated eigenvector V_λ^* given in (2.30). This proves that $\Lambda_1 \subset \sigma(L_d^*)$.

Let $\lambda = ik \in \Lambda_2$. Since $k/d \notin \mathbb{Z}^*$, $\lambda^2/d^2 \neq -j^2$ for all $j \in \mathbb{Z}^*$. In this case, problem (2.25) admits a unique solution ψ_λ^*. Then the function $\Phi_{2,\lambda}^* := \left(\tau\varphi_{|\lambda|}, \psi_\lambda^*\right)$ satisfies (2.31). It follows that $\lambda \in \sigma(L_d^*)$ and $\Lambda_2 \subset \sigma(L_d^*)$. Thus $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \subset \sigma(L_d^*)$. The converse being clearly true, we have proved the first and second item.

To prove the third item, we note that $\Lambda_3 \cup \Lambda_4 \subset \Lambda_1$ since if $\lambda = ik \in \Lambda_3 \cup \Lambda_4$, then $k/d \in \mathbb{Z}^*$ and thus there exists $j \in \mathbb{Z}^*$ such that $k = jd$.

Assume now that $d \in \mathbb{Q}$ and let $\lambda = ik \in \Lambda_3$. Denote by ψ_λ^* the unique solution to the problem (2.27). Then $\Phi_{2,\lambda}^* := \left(\tau\varphi_{|\lambda|}, \psi_\lambda^*\right)$ satisfies (2.31) for any constant τ. But since $k/d \in \mathbb{Z}^*$, there exists $j \in \mathbb{Z}^*$ such that $k = jd$ and it follows that $\lambda = ijd$.

These facts imply that λ is a double eigenvalue since $\Phi^*_{1,\lambda} := \left(0, s\varphi_{|\lambda/d|}\right)$ satisfies (2.31) and is linearly independent of $\Phi^*_{2,\lambda}$.

Assume $d \in \mathbb{Q}^*$ and let $\lambda = ik \in \Lambda_4$. Going back to system (2.31), the solution of its first equation is of the form $\tau\varphi_{|\lambda|}$ for an arbitrary constant τ. But the conditions defining Λ_4 immediately imply that $\tau = 0$ and that the nontrivial solutions to (2.31) are of the form $\Phi^*_{1,\lambda} = \left(0, s\varphi_{|\lambda/d|}\right)$ for some $s \in \mathbb{R}$. Now, this value of λ admits a generalized eigenfunction $(\varphi, \psi) \in D(L^*_d)$ if this function solves the system:

$$L^*_d \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} \Phi^*_{1,\lambda} \\ \lambda\Phi^*_{1,\lambda} \end{pmatrix}, \text{ in } (0,\pi).$$

for some $\delta \in \mathbb{R}^*$. This system writes

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = \lambda\varphi + \delta\Phi^*_{1,\lambda}, \\ D\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} - \lambda A^*\varphi = \lambda^2\varphi + \delta\left(A^* + 2\lambda\right)\Phi^*_{1,\lambda}, \end{array} \right. \text{ in } (0,\pi). \tag{2.32}$$

Setting again $\varphi = (\phi_1, \phi_2)$, the second system of (2.32) transforms into:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2\phi_1}{dx^2} = \lambda^2\phi_1, \quad \text{in } (0,\pi) \\ \\ \dfrac{d^2\phi_2}{dx^2} = \dfrac{\lambda^2}{d^2}\phi_2 + \dfrac{\lambda}{d^2}\left(a(x)\phi_1 + 2\delta s\varphi_{|\lambda/d|}\right), \quad \text{in } (0,\pi) \\ \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \end{array} \right. \tag{2.33}$$

From the first equation of this system, we can choose $\phi_1 = \tau\varphi_{|\lambda|}$ and the second equation (which is (2.29)) admits a solution ϕ_2 if

$$\delta = \frac{\tau}{s}c_\lambda \text{ with } c_\lambda := -\frac{1}{2}\int_0^\pi a(x)\varphi_{|\lambda|}\varphi_{|\lambda/d|}.$$

Under this condition, the vector function $V = \left(\tau\varphi_{|\lambda|}, \phi_2, \lambda\tau\varphi_{|\lambda|}, \lambda\phi_2 + \tau c_\lambda\varphi_{|\lambda/d|}\right)$ is a generalized eigenfunction associated with $\lambda \in \Lambda_4$. Moreover,

$$\begin{aligned} \left\langle V, V^*_{1,\lambda}\right\rangle &= \int_0^\pi \left(sd^2\phi_2'\varphi'_{|\lambda/d|} + s\left(\lambda\phi_2 + \tau c_\lambda\varphi_{|\lambda/d|}\right)\overline{\lambda}\varphi_{|\lambda/d|}\right) \\ &= s\int_0^\pi \left(|\lambda|^2\phi_2\varphi_{|\lambda/d|} + |\lambda|^2\phi_2\varphi_{|\lambda/d|} + \overline{\lambda}\tau c_\lambda\left|\varphi_{|\lambda/d|}\right|^2\right) \\ &= s\int_0^\pi \left(2|\lambda|^2\phi_2\varphi_{|\lambda/d|} + \overline{\lambda}\tau c_\lambda\left|\varphi_{|\lambda/d|}\right|^2\right). \end{aligned}$$

From this, it follows that

$$\left\langle V, V_{1,\lambda}^{*}\right\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{0}^{\pi} \phi_{2}\varphi_{|\lambda/d|} = -\frac{\overline{\lambda}\tau c_{\lambda}}{2\left|\lambda\right|^{2}}.$$

■

As a consequence and to summarize, observe the following points:

- If $d \notin \mathbb{Q}$, then all the eigenvalues are simple.
- A geometrically double eigenvalue can occur if and only if $\Lambda_3 \neq \varnothing$ (which is, from the definition of Λ_3, a condition on d and a).
- Later, we will pay special attention to the case $d = 1$ (see section 2.6) and the condition
$$\int_{0}^{\pi} a(x)\left|\varphi_{k}\right|^{2} \neq 0, \ \forall k \geq 1.$$

2.5 Approximate controllability

In this section we will address the problem of the approximate controllability at time $T > 0$ of system (2.1), i.e, we will prove Theorem 2.5. Recall that d is a positive real number, $B^{*} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ and $a \in L^{\infty}(0, \pi)$ is a given function. From now on, in Proposition 2.14, we choose: $s = \tau = 1$.

Proposition 2.15 *Assume that $d \notin \mathbb{Q}$. Then for any $T > 0$, system (2.1) is approximately controllable at time T if and only if, the following conditions are satisfied:*

$$\begin{gathered} b_2 \neq 0, \\ \textstyle\int_0^\pi a(\pi - x)\sin(kx)\sin\left(\frac{k}{d}x\right)dx \neq \frac{i(-1)^k d^2 b_1}{b_2}\sin\left(\frac{k}{d}\pi\right), \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*. \end{gathered} \tag{2.34}$$

Proof. The task now is to prove that the unique continuation property for the solutions of the adjoint problem (2.15) holds. If $d \notin \mathbb{Q}$, from Proposition 2.14, $\lambda_{1,k} = idk, \ \lambda_{2,k} = ik \in \sigma\left(L_d^*\right)$ for all $k \in \mathbb{Z}^*$ and their associated eigenspaces are respectively spanned by:

$$V_{1,\lambda_{1,k}}^{*} = \left(\Phi_{1,\lambda_{1,k}}^{*}, ikd\Phi_{1,\lambda_{1,k}}^{*}\right), \ V_{2,\lambda_{2,k}}^{*} = \left(\Phi_{2,\lambda_{2,k}}^{*}, ik\Phi_{2,\lambda_{2,k}}^{*}\right)$$

where

$$\Phi_{1,\lambda_{1,k}}^{*} = \left(0, \varphi_{|k|}\right), \ \Phi_{2,\lambda_{2,k}}^{*} = \left(\varphi_{|k|}, \psi_{k}^{*}\right),$$

and ψ_k^* is the unique solution to (2.25) and it is given by the formula:

$$\begin{aligned}
\psi_k^*(x) &= m_k^* \sin\left(\frac{k}{d}x\right) + \frac{i}{d}\int_0^x \sin\left(\frac{k}{d}(x-\xi)\right) a(\xi)\,\varphi_{|k|}(\xi)\,d\xi, \\
m_k^* &= -\frac{i}{d\sin\left(\frac{k}{d}\pi\right)}\int_0^\pi \sin\left(\frac{k}{d}(\pi-\xi)\right) a(\xi)\,\varphi_{|k|}(\xi)\,d\xi.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

From a simple computation, we get:

$$\frac{d\psi_k^*}{dx}(0) = \frac{k}{d}m_k^*. \tag{2.36}$$

Let $(\alpha_k, \beta_k) \in \mathbb{R}^2$. We consider the sequence of solutions to (2.15) given by

$$\begin{aligned}
\theta_k(x,t) &= e^{\lambda_{1,k}(T-t)}\alpha_k \Phi_{1,\lambda_{1,k}}^* + e^{\lambda_{2,k}(T-t)}\beta_k \Phi_{2,\lambda_{2,k}}^* \\
&= e^{idk(T-t)}\alpha_k \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{|k|} \end{pmatrix} + e^{ik(T-t)}\beta_k \begin{pmatrix} \varphi_{|k|} \\ \psi_k^* \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Thus, using (2.36):

$$B^*\frac{\partial\theta_k}{\partial x}(0,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}kb_2\alpha_k e^{idk(T-t)} + e^{ik(T-t)}\beta_k\left(b_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}k + b_2\frac{k}{d}m_k^*\right).$$

Assuming $B^*\frac{\partial\theta_k}{\partial x}(0,\cdot) = 0$ on the interval $(0,T)$ amounts to:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}kb_2\alpha_k e^{idk(T-t)} + \left(b_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}k + b_2\frac{k}{d}m_k^*\right)\beta_k e^{ik(T-t)} = 0, \ \forall t \in [0,T].$$

This condition is equivalent to

$$\begin{gathered}
\sqrt{\frac{2}{\pi}}kb_2\alpha_k = 0, \\
k\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_1 + \frac{b_2}{d}m_k^*\right)\beta_k = 0
\end{gathered}$$

From this system, it follows that $\alpha_k = \beta_k = 0$ if, and only if:

$$\begin{gathered} b_2 \neq 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}b_1 + \frac{b_2}{d}m_k^* \neq 0 \end{gathered} \Leftrightarrow \begin{gathered} b_2 \neq 0, \\ m_k^* \neq -\sqrt{\frac{2}{\pi}}d\frac{b_1}{b_2} \end{gathered}$$

From (2.35), we get

$$\alpha_k = \beta_k = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{c} b_2 \neq 0, \\ \int_0^\pi \sin\left(\frac{k}{d}(\pi - \xi)\right) a(\xi)\,\varphi_{|k|}(\xi)\,d\xi \neq -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}d^2\frac{b_1}{b_2}\sin\left(\frac{k}{d}\pi\right) \end{array}$$

With the change of variable $x = \pi - \xi$ in the integral, we arrive to (2.34). ■

Proposition 2.16 *Assume that $d \in \mathbb{Q}^*$. Then for any $T > 0$, system (2.1) is approximately controllable if, and only if*

$$\begin{array}{c} b_2 \neq 0, \\ \int_0^\pi a(\pi - x)\sin(kx)\sin\left(\frac{k}{d}x\right)dx \neq i\frac{(-1)^k d^2 b_1}{b_2}\sin\left(\frac{k}{d}\pi\right), \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*. \end{array} \tag{2.37}$$

Proof. Let $d \in \mathbb{Q}^*$. Assume that $\Lambda_3 \neq \varnothing$ and let $\lambda = ik \in \Lambda_3$. From Proposition 2.14, the eigenspace of λ is two-dimensional and spanned by:

$$V_{j,\lambda}^* = \left(\Phi_{j,\lambda}^*, \lambda\Phi_{j,\lambda}^*\right), \ j = 1, 2,$$
$$\text{with}$$
$$\Phi_{1,\lambda}^* = \left(0, \varphi_{\left|\frac{\lambda}{d}\right|}\right), \ \Phi_{2,\lambda}^* = \left(\varphi_{|\lambda|}, \psi_\lambda^*\right)$$

where ψ_λ^* is the unique solution to (2.27). Let θ_λ the solution of the backward adjoint problem (2.15) associated with the initial data:

$$\left(\theta^0, \theta^1\right) = \alpha V_{1,\lambda}^* + \beta V_{2,\lambda}^*.$$

for some real numbers α, β. Then, as previously, we have:

$$(\theta_\lambda, \theta_\lambda') = e^{\lambda(T-t)}\left(\alpha V_{1,\lambda}^* + \beta V_{2,\lambda}^*\right)$$

Thus

$$\theta_\lambda = e^{\lambda(T-t)}\begin{pmatrix} \beta\varphi_{|\lambda|} \\ \alpha\varphi_{\left|\frac{\lambda}{d}\right|} + \beta\psi_\lambda^* \end{pmatrix}$$

and

$$\begin{aligned}
B^* \frac{\partial \theta_\lambda}{\partial x}(0,t) &= e^{\lambda(T-t)} B^* \begin{pmatrix} \beta \dfrac{\partial \varphi_{|\lambda|}}{\partial x}(0) \\ \alpha \dfrac{\partial \varphi_{\left|\frac{\lambda}{d}\right|}}{\partial x}(0) + \beta \dfrac{\partial \psi_\lambda^*}{\partial x}(0) \end{pmatrix} \\
&= e^{\lambda(T-t)} \left(\beta \left(b_1 \frac{\partial \varphi_{|\lambda|}}{\partial x}(0) + b_2 \frac{\partial \psi_\lambda^*}{\partial x}(0) \right) + b_2 \alpha \frac{\partial \varphi_{\left|\frac{\lambda}{d}\right|}}{\partial x}(0) \right)
\end{aligned}$$

If $b_2 \neq 0$, then choosing

$$\alpha = -\frac{b_1 \dfrac{\partial \varphi_{|\lambda|}}{\partial x}(0) + b_2 \dfrac{\partial \psi_\lambda^*}{\partial x}(0)}{b_2 \dfrac{\partial \varphi_{\left|\frac{\lambda}{d}\right|}}{\partial x}(0)} \beta$$

we get

$$B^* \frac{\partial \theta_\lambda}{\partial x}(0,t) = 0, \ t \in (0,T).$$

This already shows that the sytem is not approximately controllable since θ_λ is not trivial with the previous choice of α, β.

Assume now that $\Lambda_3 = \varnothing$. If $\lambda \in \sigma(L_d^*)$, then either $\lambda \in (\Lambda_1 \cup \Lambda_2) \setminus \Lambda_4$ and in this case, as in the proof of Proposition 2.15, we get the two conditions in (2.37), or $\lambda = ik \in \Lambda_4$ and from Proposition 2.14, this eigenvalue is algebraically double and its generalized eigenspace is spanned by:

$$V_{1,\lambda}^* = \left(\Phi_{1,\lambda}^*, ik\Phi_{1,\lambda}^*\right), \ V_{2,\lambda}^* = \left(\Phi_{2,\lambda}^*, ik\Phi_{2,\lambda}^* - \frac{1}{2} a_{k,\frac{k}{d}} \Phi_{1,\lambda}^*\right)$$

with

$$\Phi_{1,\lambda}^* = \left(0, \varphi_{|\lambda/d|}\right), \ \Phi_{2,\lambda}^* = \left(\varphi_{|\lambda|}, \psi_\lambda^*\right)$$

where ψ_λ^* is the unique solution to (2.29). Its expression is:

$$\begin{aligned}
\psi_k^*(x) &= m_k^* \sin\left(\frac{k}{d}x\right) + \frac{i}{d} \int_0^x \sin\left(\frac{k}{d}(x-\xi)\right) \left(a(\xi)\varphi_{|k|}(\xi) - a_{k,\frac{k}{d}} \varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|}(\xi)\right) d\xi, \\
m_k^* &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i a_{k,\frac{k}{d}}}{4k} \\
&\quad -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{d} \int_0^\pi \int_0^x \sin\left(\frac{k}{d}(x-\xi)\right) \left(a(\xi)\varphi_{|k|}(\xi) - a_{k,\frac{k}{d}} \varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|}(\xi)\right) \varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|}(x)\, d\xi dx.
\end{aligned}$$

Consider the solution θ_λ to (2.15) associated with the initial data:

$$\left(\theta^0, \theta^1\right) = \alpha V_{1,\lambda}^* + \beta V_{2,\lambda}^*.$$

It is given by:

$$\begin{aligned}
\theta_\lambda(x,t) &= e^{ik(T-t)}\left(\alpha_k \Phi_{1,\frac{k}{d}}^* + \beta_k\left(-\frac{1}{2}a_{k,\frac{k}{d}}\left(T-t\right)\Phi_{1,k}^* + \Phi_{2,k}^*\right)\right)\\
&= e^{ik(T-t)}\left(\alpha_k\begin{pmatrix}0\\ \varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|}\end{pmatrix} + \beta_k\left(-\frac{1}{2}a_{k,\frac{k}{d}}\left(T-t\right)\begin{pmatrix}0\\ \varphi_{|k|}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\varphi_{|k|}\\ \psi_k^*\end{pmatrix}\right)\right).
\end{aligned}$$

Thus

$$B^*\frac{\partial\theta_\lambda}{\partial x}(0,t) = e^{ik(T-t)}\left(\alpha_k\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_2\frac{k}{d} + \beta_k\left(b_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}k + b_2\frac{k}{d}m_k^*\right) - \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{2}b_2\beta_k a_{k,\frac{k}{d}}k\left(T-t\right)\right).$$

Assuming $B^*\dfrac{\partial\theta_\lambda}{\partial x}(0,t) = 0$ on the interval $(0,T)$ amounts to:

$$\left\{\begin{array}{l}
\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{b_2}{d}\alpha_k + \left(b_1\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{b_2}{d}m_k^*\right)\beta_k = 0,\\[2ex]
\qquad\qquad\dfrac{b_2 a_{k,\frac{k}{d}}}{\sqrt{2\pi}}\beta_k = 0.
\end{array}\right. \tag{2.38}$$

From (2.38), we deduce that

$$\alpha_k = \beta_k = 0 \Leftrightarrow b_2^2 a_{k,\frac{k}{d}} \neq 0 \Leftrightarrow b_2 \neq 0$$

since by assumption $\lambda \in \Lambda_4$ (and thus $a_{k,\frac{k}{d}} \neq 0$). ■

Proposition 2.15 and Proposition 2.16 imply Theorem 2.5.

2.6 Exact controllability results

From now on, in Proposition 2.14, we choose:

$$s = \frac{1}{2dk} \quad \text{and} \quad \tau = \frac{1}{k}, \quad \text{for all} \quad k \in \mathbb{Z}^*.$$

The reason of this choice of the parameters s, τ will appear in the proofs of all the results of this section.

Proposition 2.17 *Assume that $d \notin \mathbb{Q}$. Then for any $T > 0$, system (2.1) is not exactly controllable.*

Proof. Since $d \notin \mathbb{Q}$, from diophantine approximation (see [42, Theorem 9, p. 9] for instance), there exists a sequence $(p_n/q_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{Q}$ such that

$$\begin{cases} q_n \geq 1, \ \forall n \geq 1 \\ \\ q_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty, \\ \\ \left|\frac{p_n}{q_n} - d\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}. \end{cases} \tag{2.39}$$

Consider now the sequence $\{\lambda_{1,q_n} := idq_n, \lambda_{2,p_n} := ip_n\}_{n\geq 1} \subset \Lambda_1 \times \Lambda_2$. From Proposition 2.14, $\{\lambda_{1,q_n}, \lambda_{2,p_n}\}_{n\geq 1} \in \sigma\left(L_d^*\right)$ and

$$|\lambda_{1,q_n} - \lambda_{2,p_n}| = |p_n - dq_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Thus the gap condition is not satisfied. We now prove that this implies the non exact (or null) controllability. Consider the eigenvectors:

$$V^*_{1,\lambda_{1,q_n}} = \left(\Phi^*_{1,\lambda_{1,q_n}}, ikd\Phi^*_{1,\lambda_{1,q_n}}\right), \ V^*_{2,\lambda_{2,p_n}} = \left(\Phi^*_{2,\lambda_{2,p_n}}, ik\Phi^*_{2,\lambda_{2,p_n}}\right)$$

where

$$\Phi^*_{1,\lambda_{1,q_n}} = \left(0, \frac{1}{2dq_n}\varphi_{|q_n|}\right), \ \Phi^*_{2,\lambda_{2,p_n}} = \left(\frac{1}{p_n}\varphi_{|p_n|}, \psi^*_{p_n}\right).$$

Let $(\alpha_n, \beta_n) \subset \mathbb{R}^2$. We consider the sequence of solutions to (2.15) given by

$$\begin{aligned} \theta_n &= e^{\lambda_{1,q_n}(T-t)}\alpha_n\Phi^*_{1,\lambda_{1,q_n}} + e^{\lambda_{2,p_n}(T-t)}\beta_n\Phi^*_{2,\lambda_{2,p_n}} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\beta_n}{p_n}e^{\lambda_{2,p_n}(T-t)}\varphi_{|p_n|} \\ \\ \frac{\alpha_n}{2dq_n}e^{\lambda_{1,q_n}(T-t)}\varphi_{|q_n|} + \beta_n e^{\lambda_{2,p_n}(T-t)}\psi^*_{p_n} \end{pmatrix}, \ n \geq 1. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} B^{*}\frac{\partial\theta_{n}}{\partial x}(0,t) &= \beta_{n}\left(\frac{b_{1}}{p_{n}}\varphi'_{|p_{n}|}(0)+b_{2}\psi'^{*}_{p_{n}}(0)\right)e^{ip_{n}(T-t)}+\alpha_{n}\left(\frac{b_{2}}{2dq_{n}}\varphi'_{|q_{n}|}(0)\right)e^{idq_{n}(T-t)} \\ &= \beta_{n}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_{1}+b_{2}\psi'^{*}_{p_{n}}(0)\right)e^{ip_{n}(T-t)}+\alpha_{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{b_{2}}{d}\right)e^{idq_{n}(T-t)}. \end{aligned}$$

Now choosing α_n and β_n such that

$$\beta_{n}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_{1}+b_{2}\psi'^{*}_{p_{n}}(0)\right)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{b_{2}}{d}\alpha_{n}, \tag{2.40}$$

we get

$$B^{*}\frac{\partial\theta_{n}}{\partial x}(0,t)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{b_{2}}{d}\alpha_{n}\left(e^{ip_{n}(T-t)}-e^{idq_{n}(T-t)}\right).$$

Note that if $\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_{1}+b_{2}\psi'^{*}_{p_{n}}(0)=0$, then (2.40) implies that $\alpha_n=0$ and the observability inequality fails to be true with $\beta_n=1$. Now, if $\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_{1}+b_{2}\psi'^{*}_{p_{n}}(0)\neq 0$, then, C denoting some generic positive constant independent of $n\geq 1$ and $t\in[0,T]$:

$$\left|e^{ip_{n}(T-t)}-e^{idq_{n}(T-t)}\right|\leq C\left|p_{n}-dq_{n}\right|(T-t).$$

It follows that

$$\int_{0}^{T}\left|B^{*}\frac{\partial\theta_{n}}{\partial x}(0,t)\right|^{2}dt\leq CT^{3}\left|\frac{b_{2}}{d}\alpha_{n}\right|^{2}\left|p_{n}-dq_{n}\right|^{2}. \tag{2.41}$$

Now choosing

$$\beta_{n}=\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_{1}+b_{2}\psi'^{*}_{p_{n}}(0)}$$

in (2.40), we get

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{b_{2}}{d}\alpha_{n}=-1,\ \forall n\geq 1.$$

From (2.41) and (2.39), it follows that

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{T}\left|B^{*}\frac{\partial\theta_{n}}{\partial x}(0,t)\right|^{2}dt=0$$

while, for $b_2\neq 0$,

$$\left\|\left(\theta_{n}(0),\theta_{n,t}(0)\right)\right\|^{2}_{\mathbb{H}^{1}_{0}(0,\pi)\times\mathbb{L}^{2}(0,\pi)}\geq\sigma\left(\left|\alpha_{n}\right|^{2}+\left|\beta_{n}\right|^{2}\right)\geq\delta>0,\forall n\geq 1,$$

by our choice of (α_n, β_n), contradicting the observability inequalities (2.11) and (2.12). ■

From the last proposition and the previous section, we see that it remains to study the exact controllability in the case:

$$d \in \mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\backslash \{0\} \quad \text{and} \quad \Lambda_3 = \varnothing.$$

We first need the following estimates:

Lemme 2.18 *Assume that $d \neq 1$, $a \in W^{1,\infty}(0,\pi)$, $\Lambda_4 \neq \varnothing$ and let $\lambda = ik \in \Lambda_4$. Then there exists a constant C such that*

$$|m_k^*| \leq \frac{C}{k^2}, \tag{2.42}$$

where

$$\begin{aligned}
m_k^* &= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{i a_{k,\frac{k}{d}}}{k^2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{dk} \int_0^\pi S_k(x)\, \varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|}(x)\, dx, \\
S_k(x) &= \int_0^x \left(a(\xi)\varphi_{|k|}(\xi) - a_{k,\frac{k}{d}} \varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|}(\xi) \right) \sin\!\left(\frac{k}{d}(\xi - x)\right) d\xi, \\
a_{k,\frac{k}{d}} &= \int_0^\pi a(x)\, \varphi_{|k|}(x)\, \varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|}(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Proof. Let $\lambda = ik \in \Lambda_4$, in this situation, the set of eigenvalues is $\Lambda_1 = \{ik, k \in \mathbb{Z}^*\}$ and the associated generalized eigenfunctions are for $k \geq 1$:

$$V_{1,\lambda}^* = \left(\Phi_{1,\lambda}^*, ik\Phi_{1,\lambda}^*\right), \; V_{2,\lambda}^* = \left(\Phi_{2,\lambda}^*, ik\Phi_{2,\lambda}^* - d a_{k,\frac{k}{d}} \Phi_{1,\lambda}^*\right)$$

with

$$L_d^* V_{1,\lambda}^* = ikV_{1,\lambda}^*; \quad L_d^* V_{2,\lambda}^* = ikV_{2,\lambda}^* - d a_{k,\frac{k}{d}} V_{1,\lambda}^*$$

$$\left\langle V_{1,\lambda}^*, V_{2,\lambda}^* \right\rangle = 0.$$

$$\Phi_{1,\lambda}^* = \left(0, \frac{1}{2dk}\varphi_{|\lambda/d|}\right), \; \Phi_{2,\lambda}^* = \left(\frac{1}{k}\varphi_{|\lambda|}, \psi_\lambda^*\right)$$

and ψ_λ^* is the unique solution to (2.29),

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\psi_\lambda^*}{dx^2} = \left(\dfrac{\lambda}{d}\right)^2 \psi_\lambda^* + \dfrac{i}{d^2}\left(a(x)\varphi_{|\lambda|}(x) - a_{k,\frac{k}{d}}\varphi_{\left|\frac{\lambda}{d}\right|}(x)\right), \quad \text{in } (0,\pi) \\ \\ \psi_\lambda^*(0) = \psi_\lambda^*(\pi) = 0, \\ \\ \int_0^\pi \psi_\lambda^* \varphi_{\left|\frac{\lambda}{d}\right|} dx = \dfrac{-ia_{k,\frac{k}{d}}}{4\left|\lambda\right|^2}, \end{cases}$$

given by

$$\psi_k^*(x) = m_k^* \sin\left(\frac{k}{d}x\right) - \frac{i}{dk} S_k(x),$$

with

$$S_k(x) = \int_0^x \left(a(\xi)\varphi_{|k|}(\xi) - a_{k,\frac{k}{d}}\varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|}(\xi)\right)\sin(\frac{k}{d}(\xi - x))d\xi$$

and m_k^* is defined by

$$m_k^* = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{ia_{k,\frac{k}{d}}}{2k^2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{i}{dk}\int_0^\pi S_k(x)\varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|}(x)\,dx.$$

Integrating by parts, we get:

$$\begin{aligned} S_k(x) \quad = \quad & \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(1-\frac{1}{d}\right)k}\left(a(x)\sin(kx) - a(0)\sin\left(\frac{k}{d}x\right)\right) \\ & -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(1-\frac{1}{d}\right)k}\int_0^x a'(\xi)\sin\left(k\left(\left(1-\frac{1}{d}\right)\xi + \frac{1}{d}x\right)\right)d\xi \\ & -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{d}\right)k}\left(a(x)\sin(kx) + a(0)\sin\left(\frac{k}{d}x\right)\right) \\ & +\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{d}\right)k}\int_0^x a'(\xi)\sin(k\left(\left(1+\frac{1}{d}\right)\xi - \frac{1}{d}x\right))d\xi \\ & -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}a_{k,\frac{k}{d}}x\cos\left(\frac{k}{d}x\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}a_{k,\frac{k}{d}}\frac{d}{k}\sin(\frac{k}{d}x). \end{aligned}$$

Using this new formula for S_k, integration by parts leads to:

$$\begin{aligned}
m_k^* &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{ia_{k,\frac{k}{d}}}{2k^2} \\
&+\frac{i}{(d-1)\,\pi k^2}\int_0^\pi \left(a(x)\sin(kx)-a(0)\sin\left(\frac{k}{d}x\right)\right)\varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|}(x)\,dx \\
&-\frac{i}{(d-1)\,\pi k^2}\int_0^\pi\int_0^x a^{'}(\xi)\sin\left(k\left(\left(1-\frac{1}{d}\right)\xi+\frac{1}{d}x\right)\right)\varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|}(x)\,d\xi dx \\
&-\frac{i}{(d+1)\,\pi k^2}\int_0^\pi \left(a(x)\sin(kx)+a(0)\sin\left(\frac{k}{d}x\right)\right)\varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|}(x)\,dx \\
&+\frac{i}{(d+1)\,\pi k^2}\int_0^\pi\int_0^x a^{'}(\xi)\sin\left(k\left(\left(1+\frac{1}{d}\right)\xi-\frac{1}{d}x\right)\right)\varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|}(x)\,d\xi dx \\
&-\frac{ia_{k,\frac{k}{d}}}{2\pi\sqrt{2\pi}k^2}\left[-\pi+\int_0^\pi\cos\left(\frac{2k}{d}x\right)dx\right]+\frac{i}{\pi k^2}a_{k,\frac{k}{d}}\int_0^\pi\sin(\frac{k}{d}x)\varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|}(x)\,dx.
\end{aligned}$$

The property (2.42) can be easily deduced since each integral appearing in this last equality is uniformly bounded with respect to k. ■

Proposition 2.19 *Assume that* $d\in\mathbb{Q}^*\setminus\{1\}$ *and* $\Lambda_3=\varnothing$. *Then for any* $T>0$, *system (2.1) is not exactly controllable.*

Proof. Since $d\in\mathbb{Q}^*\setminus\{1\}$ and $\Lambda_3=\varnothing$, we first observe that $\mathrm{card}\,(\Lambda_4)=\infty$. For any $ik\in\Lambda_4$, consider the associated solutions to (2.15) given by

$$\begin{aligned}
\theta_k(x,t) &= \alpha_k e^{ik(T-t)}\Phi^*_{1,\frac{k}{d}} \\
&+\beta_k e^{ik(T-t)}\left(-da_{k,\frac{k}{d}}(T-t)\,\Phi^*_{1,k}+\Phi^*_{2,k}\right),
\end{aligned}$$

for any $\alpha_k,\beta_k\in\mathbb{R}$ such that $\alpha_k^2+\beta_k^2=1$. Thus

$$B^*\theta_k(x,t)=\left[\alpha_k B^*\Phi^*_{1,\frac{k}{d}}+\beta_k\left(-da_{k,\frac{k}{d}}(T-t)\,B^*\Phi^*_{1,k}+B^*\Phi^*_{2,k}\right)\right]e^{ik(T-t)}.$$

Differentiating with respect to x, and putting $x=0$, we get after some computations (recall that $B^*=(b_1,b_2)$):

$$\begin{aligned}
B^*\frac{\partial\theta_k(0,t)}{\partial x} &= \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{b_2}{2d^2}\alpha_k-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}a_{k,\frac{k}{d}}b_2\beta_k(T-t)+\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_1+\frac{k}{d}m_k^*b_2\right)\beta_k\right]e^{ik(T-t)} \\
&= \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{b_2}{2d^2}\alpha_k+b_1\beta_k\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}a_{k,\frac{k}{d}}b_2\beta_k(T-t)+\frac{k}{d}m_k^*b_2\beta_k\right]e^{ik(T-t)}
\end{aligned}$$

Then the right-hand side of the observability inequality writes:

$$\int_0^T \left| B^* \frac{\partial \theta_k (0,t)}{\partial x} \right|^2 dt = \int_0^T \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{b_2}{2d^2} \alpha_k + b_1 \beta_k \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a_{k,\frac{k}{d}} b_2 \beta_k (T-t) + \frac{k}{d} m_k^* b_2 \beta_k \right|^2 dt.$$

Choosing:

$$\alpha_k = -b_1 \text{ and } \beta_k = \frac{b_2}{2d^2},$$

we get:

$$\int_0^T \left| B^* \frac{\partial \theta_k (0,t)}{\partial x} \right|^2 dt = \int_0^T \left| -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} a_{k,\frac{k}{d}} b_2 \beta_k (T-t) + \frac{k}{d} m_k^* b_2 \beta_k \right|^2 dt. \qquad (2.43)$$

Note that since

$$\int_0^\pi a(x) \varphi_{|k|}(x) \varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|}(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi a(x) \left(\cos\left(|k| - \left|\frac{k}{d}\right| \right) x - \cos\left(|k| + \left|\frac{k}{d}\right| \right) x \right) dx$$

then:

$$\lim_{\substack{|k|\to\infty \\ ik\in\Lambda_4}} \left| a_{k,\frac{k}{d}} \right| = \lim_{\substack{|k|\to\infty \\ ik\in\Lambda_4}} \int_0^\pi a(x) \varphi_{|k|}(x) \varphi_{\left|\frac{k}{d}\right|}(x)\, dx = 0$$

and from lemma 2.18

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{d} m_k^* = 0.$$

As a consequence, going back to (2.43), we arrive to

$$\lim_{\substack{|k|\to\infty \\ ik\in\Lambda_4}} \int_0^T \left| B^* \frac{\partial \theta_k (0,t)}{\partial x} \right|^2 dt = 0.$$

Since $|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 = b_1^2 + \frac{b_2^2}{4d^4} > 0$ for all $k \in \mathbb{Z}^*$, this contradicts the observability inequality and, therefore, the system is not controllable at time T. ■

After this last result, the only possibility for exact controllability is in the case $d = 1$.

Proposition 2.20 *Assume that System (2.1) is approximately controllable and*

$$d = 1, \quad \int_0^\pi a(x)\, dx \neq 0.$$

Then system (2.1) is exactly controllable if and only if $T \geq 4\pi$.

To prove this result, we need to clarify a little bit more the spectral analysis. As already noted, the spectrum of L^* reduces to Λ_1 :

$$\sigma(L^*) = \{ik : k \in \mathbb{Z}^*\}.$$

Under the assumption $\Lambda_3 = \varnothing$, each $\lambda_k = ik$ is algebraically double and the condition defining Λ_4 writes

$$\int_0^\pi a(x) \left|\varphi_{|k|}\right|^2 \neq 0, \ \forall k \geq 1.$$

In this situation, the set of eigenvalues is $\Lambda_1 = \{ik, k \in \mathbb{Z}^*\}$ and the associated generalized eigenfunctions are for $k \geq 1$:

$$V_{1,k}^* = \left(\Phi_{1,k}^*, ik\Phi_{1,k}^*\right), \ V_{2,k}^* = \left(\Phi_{2,k}^*, ik\Phi_{2,k}^* + 2c_k\Phi_{1,k}^*\right)$$

with

$$\begin{gathered} L_1^* V_{1,k}^* = ikV_{1,k}^*; \quad L_1^* V_{2,k}^* = ikV_{2,k}^* + 2c_k V_{1,k}^* \\ \left\langle V_{1,k}^*, V_{2,k}^* \right\rangle = 0. \end{gathered} \tag{2.44}$$

$$\Phi_{1,k}^* = \left(0, \frac{1}{2k}\varphi_{|k|}\right), \ \Phi_{2,k}^* = \left(\frac{1}{k}\varphi_{|k|}, \psi_k^*\right) \tag{2.45}$$

$$c_k = -\frac{1}{2}\int_0^\pi a\varphi_{|k|}^2 = -\frac{1}{2}a_{k,k}, \tag{2.46}$$

and ψ_k^* is the unique function satisfying

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\psi_k^*}{dx^2} = -k^2\psi_k^* + i\left(a(x) + 2c_k\right)\varphi_{|k|}, \quad \text{in } (0,\pi) \\ \psi_k^*(0) = \psi_k^*(\pi) = 0, \\ \int_0^\pi \psi_k^*\varphi_{|k|} = i\dfrac{c_k}{2k^2}. \end{cases} \tag{2.47}$$

Let us set $\mathcal{E}^* = \left\{V_{1,k}^*, V_{2,k}^*\right\}_{k\in\mathbb{Z}^*}$. We begin by proving that $\mathcal{E}^*$ is a (Riesz) basis in $\mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$. Some lemmas are necessary for this.

Lemme 2.21 *Assume that $d = 1$ and $\Lambda_3 = \varnothing$. The family $\mathcal{E}^*$ is complete in $\mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$.*

Proof. It suffices to prove that if $F = (f,g) \in \mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$ is orthogonal to the subspace spanned by $\mathcal{E}^*$ then $F = 0$. But the orthogonality of F to the subsapce spanned by $\mathcal{E}^*$ writes (recall that $D = I_d$ if $d = 1$):

$$\begin{aligned} \left\langle F, V_{1,k}^* \right\rangle &= \int_0^\pi \left(f_x \cdot \frac{\overline{d\Phi_{1,k}^*}}{dx} - ikg \cdot \overline{\Phi_{1,k}^*} \right) dx = 0, \\ & & k \in \mathbb{Z}^*. \quad (2.48) \\ \left\langle F, V_{2,k}^* \right\rangle &= \int_0^\pi \left(f_x \cdot \frac{\overline{d\Phi_{2,k}^*}}{dx} + g \cdot \left(-ik\overline{\Phi_{2,k}^*} + 2c_k \overline{\Phi_{1,k}^*} \right) \right) dx = 0, \end{aligned}$$

Then in particular, if $f = (f_1, f_2)$ and $g = (g_1, g_2)$, we have from the first equalities in (2.48):

$$\frac{1}{2k} \int_0^\pi \left(\frac{df_2}{dx} \frac{d\varphi_{|k|}}{dx} - ikg_2 \cdot \varphi_{|k|} \right) = 0, \ k \in \mathbb{Z}^*,$$

and integrating by parts

$$\int_0^\pi (kf_2 - ig_2) \varphi_{|k|} = 0, \ k \in \mathbb{Z}^*.$$

Since for every $k \in \mathbb{Z}^*$, we also have $-k \in \mathbb{Z}^*$, it follows that

$$\int_0^\pi (-kf_2 - ig_2) \varphi_{|k|} = 0, \ k \in \mathbb{Z}^*.$$

From these two last equalities, it appears that

$$\begin{array}{l} \int_0^\pi f_2 \varphi_{|k|} = 0 \\ \int_0^\pi g_2 \varphi_{|k|} = 0 \end{array}, k \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow f_2 = g_2 = 0, \text{ on } (0, \pi),$$

since $\{\varphi_k\}_{k \geq 1}$ is a basis in $L^2(0, \pi)$.

Since $f_2 = g_2 = 0$ on $(0, \pi)$, the second equation in (2.48) writes:

$$\frac{1}{k} \int_0^\pi \left(\frac{df_1}{dx} \frac{d\varphi_{|k|}}{dx} - ikg_1 \varphi_{|k|} \right) = 0, \ k \in \mathbb{Z}^*,$$

and again integrating by parts and simplifying by k, we get:

$$\int_0^\pi \left(kf_1 \varphi_{|k|} - ig_1 \varphi_{|k|} \right) = 0, \ k \in \mathbb{Z}^*.$$

These equalities being true for k and $-k$, we get $f_1 = g_1 = 0$ on $(0, \pi)$. ■

Lemme 2.22 *Assume that $d = 1$ and $\Lambda_3 = \varnothing$. The family $\mathcal{E}^*$ admits a biorthogonal* *family* $\mathcal{E} = \{V_{1,k}, V_{2,k}\}_{k\in\mathbb{Z}^*}$ *where*

$$V_{1,k} = (\Phi_{2,k}, ik\Phi_{2,k} - 2c_k\Phi_{1,k}), \ V_{2,k} = (\Phi_{1,k}, ik\Phi_{1,k}) \tag{2.49}$$

with

$$\Phi_{1,k} = \left(\frac{1}{2k}\varphi_{|k|}, 0\right), \ \Phi_{2,k} = \left(\psi_k, \frac{1}{k}\varphi_{|k|}\right). \tag{2.50}$$

where c_k *is given in (2.46) and* ψ_k *is the unique solution to*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\psi_k}{dx^2} = -k^2\psi_k - i\left(a(x) + 2c_k\right)\varphi_{|k|}, \quad \text{in } (0,\pi) \\ \\ \psi_k(0) = \psi_k(\pi) = 0, \\ \\ \int_0^\pi \psi_k\varphi_{|k|} = -i\dfrac{c_k}{2k^2}. \end{cases} \tag{2.51}$$

Moreover $\mathcal{E}$ *is complete in* $\mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$.

Proof. Indeed, it can be checked that for all $k \geq 1$:

$$L_1V_{2,k} = -ikV_{2,k}, \ L_1V_{1,k} = -ikV_{1,k} - 2c_kV_{2,k},$$

and

$$\langle V_{1,k}, V_{2,k}\rangle = 0.$$

Thus $\mathcal{E}$ is the family of generalized eigenvectors of L_1. From (2.44), it readily follows by classical results (or by direct computations) that

$$\left\langle V_{j,k}, V_{m,\ell}^*\right\rangle = 0, \ k \neq \ell \geq 1, \ j,m = 1,2.$$

Simple computations also give

$$\begin{aligned} \left\langle V_{1,k}, V_{2,k}^*\right\rangle &= \left\langle V_{2,k}, V_{1,k}^*\right\rangle = 0, \\ \left\langle V_{1,k}, V_{1,k}^*\right\rangle &= 1 = \left\langle V_{2,k}, V_{2,k}^*\right\rangle. \end{aligned}$$

The completeness of this family is proved in exactly the same way than for $\mathcal{E}^*$.

This ends the proof. ■

Our next aim is to prove that if a is sufficiently smooth then the families $\mathcal{E}$ and $\mathcal{E}^*$ are Bessel sequences of $\mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$. We recall that a sequence $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$

in a Hilbert space $\mathbb{X}$ is a Bessel sequence if it satisfies

$$\sum_{k\geq 1} |\langle \varphi, \varphi_k \rangle_{\mathbb{X}}|^2 < \infty \ , \quad \forall \varphi \in \mathbb{X}.$$

We need some preliminary results.

Lemme 2.23 *Assume that $a \in W^{1,\infty}(0,\pi)$. The solutions ψ_k^* and ψ_k to (2.47) and (2.51) respectively write*

$$\psi_k^*(x) = \left(m_k^* + \frac{H_k(x)}{k^2}\right)\sin(kx) + \left(\frac{A_k(x)}{k} + \frac{P_k(x)}{k^2}\right)\cos(kx), \tag{2.52}$$

$$\psi_k(x) = \left(m_k - \frac{H_k(x)}{k^2}\right)\sin(kx) - \left(\frac{A_k(x)}{k} + \frac{P_k(x)}{k^2}\right)\cos(kx), \tag{2.53}$$

where

$$\begin{cases} A_k(x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x (a(\xi) + 2c_k)\, d\xi, \\ \\ H_k(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left[\left(\dfrac{a(x)+a(0)}{2} + 2c_k\right) + \frac{1}{2}\int_0^x a'(\xi)\cos(2k\xi)d\xi\right], \\ \\ P_k(x) = -\frac{i}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^x a'(\xi)\sin(2k\xi)d\xi. \end{cases} \tag{2.54}$$

and

$$\begin{aligned} m_k^* &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ic_k}{2k^2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{i}{k}\int_0^\pi\int_0^x (a(\xi)+2c_k)\,\varphi_{|k|}(\xi)\sin(k(\xi - x))d\xi\varphi_{|k|}(x)dx. \\ m_k &= -m_k^* \end{aligned}$$

Proof. With

$$S_k(x) = \int_0^x (a(\xi) + 2c_k)\,\varphi_{|k|}(\xi)\sin(k(\xi - x))d\xi,$$

we first note the following formulas for ψ_k and ψ_k^* (solutions to (2.47) and (2.51) respectively) : for $x \in (0,\pi)$,

$$\begin{cases} \psi_k^*(x) = m_k^*\sin(kx) - \dfrac{i}{k}S_k(x), \\ \\ m_k^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\dfrac{ic_k}{2k^2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\dfrac{i}{k}\int_0^\pi S_k(x)\,\varphi_{|k|}(x)dx. \end{cases} \tag{2.55}$$

And

$$\begin{cases} \psi_k(x) = m_k \sin(kx) + \dfrac{i}{k} S_k(x), \\ \\ m_k = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \dfrac{ic_k}{2k^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \dfrac{i}{k} \int_0^\pi S_k(x) \varphi_{|k|}(x) dx. \end{cases} \tag{2.56}$$

We have, after integrating by parts:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} S_k(x) &= \int_0^x (a(\xi) + 2c_k) [\cos(kx) - \cos(k(2\xi - x))] d\xi \\ &= \int_0^x (a(\xi) + 2c_k) d\xi \cos(kx) - \int_0^x (a(\xi) + 2c_k) \cos(k(2\xi - x)) d\xi \\ &= \int_0^x (a(\xi) + 2c_k) d\xi \cos(kx) - \left(\frac{a(x) + a(0) + 4c_k}{2k} \right) \sin(kx) \\ &\quad + \frac{1}{2k} \int_0^x a'(\xi) \sin(k(2\xi - x)) d\xi \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} S_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^x (a(\xi) + 2c_k) d\xi + \frac{1}{2k} \int_0^x a'(\xi) \sin(2k\xi) d\xi \right) \cos(kx) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{a(x) + a(0) + 4c_k}{2k} + \frac{1}{2k} \int_0^x a'(\xi) \cos(2k\xi) d\xi \right) \sin(kx) \end{aligned} \tag{2.57}$$

Hence, this formula of S_k justifies the forms (2.52) and (2.53) of the solutions ψ_k^* and ψ_k respectively. ■

The functions ψ_k^* and ψ_k will play an important role in this paper and we will need the following straightforward estimates.

Lemme 2.24 *Assume that $a \in W^{1,\infty}(0, \pi)$. Then there exists a constant C such that*

$$\|A_k\|_{W^{1,\infty}(0,\pi)} \leq C, \ \|H_k\|_{W^{1,\infty}(0,\pi)} \leq C, \ \|P_k\|_{W^{1,\infty}(0,\pi)} \leq C, \ \forall k \in \mathbb{Z}^*. \tag{2.58}$$

$$\begin{cases} |m_k^*| \leq \dfrac{C}{k^2}, & |m_k| \leq \dfrac{C}{k^2}, \\ \\ \|\psi_k^*\|_{L^\infty(0,\pi)} \leq \dfrac{C}{|k|}, & \|\psi_k\|_{L^\infty(0,\pi)} \leq \dfrac{C}{|k|}, \quad , \ \forall k \in \mathbb{Z}^*. \\ \\ \left\| \dfrac{d\psi_k^*}{dx} \right\|_{L^\infty(0,\pi)} \leq C, & \left\| \dfrac{d\psi_k}{dx} \right\|_{L^\infty(0,\pi)} \leq C, \end{cases} \tag{2.59}$$

Proof. Let us fix $k \in \mathbb{Z}^*$. Starting from formulae (2.55) and (2.56).
We have, using the new formula (2.57) for S_k and after integration by parts:

$$\begin{aligned}
m_k^* &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ic_k}{2k^2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{i}{k}\int_0^\pi S_k(x)\,\varphi_{|k|}(x)dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ic_k}{2k^2} + \frac{i}{2\pi k^2}\int_0^\pi\int_0^x a'(\xi)\sin(2k\xi)\cos(kx)\varphi_{|k|}(x)d\xi dx \\
&+\frac{i}{2\pi k^2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\pi (a(x)+2c_k)\,dx + \int_0^\pi (a(x)+2c_k)\cos(2kx)dx\right) \\
&-\frac{i}{2\pi k^2}\int_0^\pi\left(a(x)+a(0)+4c_k+\int_0^x a'(\xi)\cos(2k\xi)d\xi\right)\sin(kx)\varphi_{|k|}(x)dx,
\end{aligned} \tag{2.60}$$

and

$$\begin{aligned}
m_k &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ic_k}{2k^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{i}{k}\int_0^\pi S_k(x)\,\varphi_{|k|}(x)dx \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ic_k}{2k^2} - \frac{i}{2\pi k^2}\int_0^\pi\int_0^x a'(\xi)\sin(2k\xi)\cos(kx)\varphi_{|k|}(x)d\xi dx \\
&-\frac{i}{2\pi k^2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\pi (a(x)+2c_k)\,dx + \int_0^\pi (a(x)+2c_k)\cos(2kx)dx\right) \\
&+\frac{i}{2\pi k^2}\int_0^\pi\left(a(x)+a(0)+4c_k+\int_0^x a'(\xi)\cos(2k\xi)d\xi\right)\sin(kx)\varphi_{|k|}(x)dx.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

The properties (2.58) and (2.59) can be easily deduced from the formula (2.60), (2.61), (2.52), (2.53) and (2.54). This ends the proof. ■

We have the following corollary regarding the input elements.

Corollaire 2.25 *Assume that $a \in W^{1,\infty}(0,\pi)$. Then*

$$f \in L^2(0,\pi) \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|k\int_0^\pi f\psi_k^* dx\right|^2 < \infty,$$

and

$$f \in H_0^1(0,\pi) \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|k^2\int_0^\pi f\psi_k^* dx\right|^2 < \infty.$$

Proof. Now, we estimate $\left|k\int_0^\pi f\psi_k^* dx\right|^2$ and $\left|k^2\int_0^\pi f\psi_k^* dx\right|^2$ using lemma 2.23 and lemma 2.24.

For $f \in L^2(0,\pi)$

$$\begin{aligned}
k\int_0^\pi f\psi_k^* dx &= k\int_0^\pi f(x)\left(m_k^* + \frac{H_k(x)}{k^2}\right)\sin(kx)\,dx \\
&\quad + k\int_0^\pi f(x)\left(\frac{A_k(x)}{k} + \frac{P_k(x)}{k^2}\right)\cos(kx)dx \\
&= km_k^* \int_0^\pi f(x)\sin(kx)\,dx + \frac{1}{k}\int_0^\pi f(x)H_k(x)\sin(kx)dx \\
&\quad + \int_0^\pi f(x)A_k(x)\cos(kx)dx + \frac{1}{k}\int_0^\pi f(x)P_k(x)\cos(kx)dx
\end{aligned}$$

Using the Cauchy-Schwarz inequality and the definition of H_k and P_k in (2.54), we obtain

$$\left|\int_0^\pi f(x)H_k(x)\sin(kx)dx\right|^2 \leq C\,\|f\|^2_{L^2(0,\pi)},$$

$$\left|\int_0^\pi f(x)P_k(x)\cos(kx)dx\right|^2 \leq C\,\|f\|^2_{L^2(0,\pi)}.$$

From the definition of A_k in (2.54), we obtain

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\pi f(x)A_k(x)\cos(kx)dx\right| &\leq C\left(\left|\int_0^\pi \left(f(x)\int_0^x a(\xi)\,d\xi\right)\sin(kx)dx\right|^2\right. \\
&\quad \left. + \left|\int_0^\pi (xf(x))\sin(kx)dx\right|^2\right).
\end{aligned}$$

Using the previous result, we obtain

$$\begin{aligned}
\left|k\int_0^\pi f(x)\psi_k^* dx\right|^2 &\leq C\left(\frac{1}{k^2}\left|\int_0^\pi f(x)\sin(kx)\right|^2 + \frac{1}{k^2}\|f\|^2_{L^2(0,\pi)}\right. \\
&\quad \left. + \left|\int_0^\pi \left(f(x)\int_0^x a(\xi)\,d\xi\right)\cos(kx)\right|^2 + \left|\int_0^\pi xf(x)\cos(kx)\right|^2\right).
\end{aligned}$$

Since $f \in L^2(0,\pi)$ and $a \in W^{1,\infty}(0,\pi)$, then the functions $x \mapsto f(x)\int_0^x a(\xi)\,d\xi$ and $x \mapsto xf(x)$ are in $L^2(0,\pi)$, and therefore $\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|\left(f(x)\int_0^x a(\xi)\,d\xi\right)\cos(kx)\right|^2 < \infty$ and $\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|\int_0^\pi xf(x)\cos(kx)\right|^2 < \infty$. We conclude that

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|k\int_0^\pi f(x)\psi_k^* dx\right|^2 < \infty.$$

And, by similar computations, we have for $f \in H_0^1(0,\pi)$

$$\begin{aligned} k^2 \int_0^\pi f \psi_k^* dx &= k^2 m_k^* \int_0^\pi f(x) \sin(kx)\, dx + \frac{1}{k} \int_0^\pi (f(x) H_k(x))^{'} \cos(kx) dx \\ &\quad - \int_0^\pi (f A_k(x))^{'} \sin(kx) dx - \frac{1}{k} \int_0^\pi (f(x) P_k(x))^{'} \sin(kx) dx. \end{aligned}$$

Again, using the Cauchy-Schwarz inequality and the definition of H_k and P_k in (2.54), we obtain

$$\left| \int_0^\pi (f(x) H_k(x))^{'} \cos(kx) dx \right|^2 \leq C \|f\|_{H_0^1(0,\pi)}^2,$$

$$\left| \int_0^\pi (f(x) P_k(x))^{'} \sin(kx) dx \right|^2 \leq C \|f\|_{H_0^1(0,\pi)}^2.$$

From the definition of A_k in (2.54), we obtain

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi (f A_k(x))^{'} \sin(kx) dx \right|^2 &\leq C \left(\left| \int_0^\pi \left(f(x) \int_0^x a(\xi)\, d\xi \right)^{'} \sin(kx) dx \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^\pi (x f(x))^{'} \sin(kx) dx \right|^2 \right). \end{aligned}$$

From the previous inequalities, we get

$$\begin{aligned} \left| k^2 \int_0^\pi f \psi_k^* dx \right|^2 &\leq C \left(\left| \int_0^\pi f(x) \sin(kx)\, dx \right|^2 + \frac{1}{k^2} \|f\|_{H_0^1(0,\pi)}^2 \right. \\ &\quad + \left| \int_0^\pi \left(f(x) \int_0^x a(\xi)\, d\xi \right)^{'} \sin(kx) dx \right|^2 \\ &\quad \left. + \left| \int_0^\pi (x f(x))^{'} \sin(kx) dx \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Since $f \in H_0^1(0,\pi)$ and $a \in W^{1,\infty}(0,\pi)$, then $x \mapsto \left(f(x) \int_0^x a(\xi)\, d\xi \right)^{'}$ and $x \mapsto (x f(x))^{'}$ are functions of $L^2(0,\pi)$. Therefore:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left| \int_0^\pi \left(f(x) \int_0^x a(\xi)\, d\xi \right)^{'} \sin(kx) dx \right|^2 &< \infty, \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left| \int_0^\pi (x f(x))^{'} \sin(kx) dx \right|^2 &< \infty. \end{aligned}$$

This proves that $\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|k^2\int_0^\pi f\psi_k^* dx\right|^2<\infty$ and ends the proof. ■

We are now ready to prove that $\mathcal{E}$ and $\mathcal{E}^*$ are Bessel sequences of $\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)$.

Lemme 2.26 *Assume that $d=1$ and $\Lambda_3=\varnothing$. Given a function $a\in W^{1,\infty}(0,\pi)$, the sequences $\mathcal{E}$ and $\mathcal{E}^*$ are Bessel sequences of $\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)$.*

Proof. We will denote $\langle\cdot,\cdot\rangle$ the scalar product in $\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)$. To show that $\mathcal{E}^*$ and $\mathcal{E}$ are Bessel sequences amounts to prove that for all $F\in\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left[\left|\left\langle F,V_{1,k}^*\right\rangle\right|^2+\left|\left\langle F,V_{2,k}^*\right\rangle\right|^2\right]<\infty,$$

and

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left[\left|\left\langle F,V_{1,k}\right\rangle\right|^2+\left|\left\langle F,V_{2,k}\right\rangle\right|^2\right]<\infty.$$

Let $a\in W^{1,\infty}(0,\pi)$. Note first that the sequence $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}^*}$ is bounded. Indeed:

$$|c_k|:=\left|-\frac{1}{2}\int_0^\pi a(x)\varphi_{|k|}^2dx\right|\le\frac{1}{2}\|a\|_{L^\infty(0,\pi)},\quad\forall k\in\mathbb{Z}^*. \tag{2.62}$$

If $F=(f,g)$ then from (2.44) and (2.49):

$$\left\langle F,V_{1,k}^*\right\rangle=\int_0^\pi f_x\frac{d\Phi_{1,k}^*}{dx}dx-ik\int_0^\pi g\Phi_{1,k}^*dx,$$

$$\left\langle F,V_{2,k}^*\right\rangle=\int_0^\pi f_x\frac{d\Phi_{2,k}^*}{dx}dx-ik\int_0^\pi g\Phi_{2,k}^*dx+2c_k\int_0^\pi g\Phi_{1,k}^*dx,$$

$$\left\langle F,V_{1,k}\right\rangle=\int_0^\pi f_x\frac{d\Phi_{2,k}}{dx}dx-ik\int_0^\pi g\Phi_{2,k}dx-2c_k\int_0^\pi g\Phi_{1,k}dx,$$

$$\left\langle F,V_{2,k}\right\rangle=\int_0^\pi f_x\frac{d\Phi_{1,k}}{dx}dx-ik\int_0^\pi g\Phi_{1,k}dx.$$

Then in particular, if $f=(f_1,f_2)$ and $g=(g_1,g_2)$, and integrating by parts, we obtain

$$\begin{aligned}
\left\langle F, V_{1,k}^{*}\right\rangle &= \frac{1}{2k}\int_{0}^{\pi}\frac{df_2}{dx}\frac{d\varphi_{|k|}}{dx}dx-\frac{i}{2}\int_{0}^{\pi}g_2\varphi_{|k|}dx\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{|k|}{2k}\int_{0}^{\pi}\frac{df_2}{dx}\cos(|k|\,x)dx-\frac{i}{2}\int_{0}^{\pi}g_2\varphi_{|k|}dx,
\end{aligned}$$

and hence

$$\left|\left\langle F, V_{1,k}^{*}\right\rangle\right|^2\leq C_1\left(\left|\int_{0}^{\pi}\frac{df_2}{dx}\cos(kx)\right|^2+\left|\int_{0}^{\pi}g_2\varphi_{|k|}\right|^2\right).$$

On the other hand:

$$\begin{aligned}
\left\langle F, V_{2,k}^{*}\right\rangle &= \frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\frac{df_1}{dx}\frac{d\varphi_{|k|}}{dx}dx+\int_{0}^{\pi}\frac{df_2}{dx}\frac{d\psi_k^*}{dx}dx-i\int_{0}^{\pi}g_1\varphi_{|k|}dx\\
&\quad -ik\int_{0}^{\pi}g_2\psi_k^*dx+\frac{c_k}{k}\int_{0}^{\pi}g_2\varphi_{|k|}dx\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{|k|}{k}\int_{0}^{\pi}\frac{df_1}{dx}\cos(kx)dx+k^2\int_{0}^{\pi}f_2\psi_k^*dx-i\int_{0}^{\pi}f_2\left(a(x)+2c_k\right)\varphi_{|k|}dx\\
&\quad -i\int_{0}^{\pi}g_1\varphi_{|k|}dx-i\int_{0}^{\pi}kg_2\psi_k^*dx+\frac{c_k}{k}\int_{0}^{\pi}g_2\varphi_{|k|}dx,
\end{aligned}$$

and it follows that:

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle F, V_{2,k}^{*}\right\rangle\right|^2 &\leq C\left(\frac{2}{\pi}\left|\int_{0}^{\pi}\frac{df_1}{dx}\cos(kx)\right|^2+\left|k^2\int_{0}^{\pi}f_2\psi_k^*\right|^2+\left|\int_{0}^{\pi}f_2\varphi_{|k|}\right|^2\right.\\
&\quad \left.+\left|\int_{0}^{\pi}g_1\varphi_{|k|}\right|^2+\left|k\int_{0}^{\pi}g_2\psi_k^*\right|^2+\frac{c_k^2}{k^2}\left|\int_{0}^{\pi}g_2\varphi_{|k|}\right|^2\right).
\end{aligned}$$

Since $(f_1,f_2)\in\mathbb{H}_0^1(0,\pi)$ and $(g_1,g_2)\in\mathbb{L}^2(0,\pi)$, for $i=1,2$ the series

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|\int_{0}^{\pi}\frac{df_i}{dx}\cos(kx)\right|^2,\ \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|\int_{0}^{\pi}\frac{df_i}{dx}\sin(kx)\right|^2,\\
&\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|\int_{0}^{\pi}f_i\varphi_{|k|}\right|^2,\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|\int_{0}^{\pi}g_i\varphi_{|k|}\right|^2,\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left|\int_{0}^{\pi}g_i\cos(kx)\right|^2
\end{aligned}$$

are convergent and, using corollary (2.25), it follows that

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left[\left|\left\langle F, V_{1,k}^{*}\right\rangle\right|^2+\left|\left\langle F, V_{2,k}^{*}\right\rangle\right|^2\right]<\infty.$$

Similar arguments will prove that $\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left[|\langle F,V_{1,k}\rangle|^2+|\langle F,V_{2,k}\rangle|^2\right]<\infty.$ ■

Now, recall the following characterization of Riesz bases (which can be found in [32] for instance):

Lemme 2.27 *Let $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ be a sequence in a Hilbert space $\mathbb{X}$. Then the following statements are equivalent.*

1. *$\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ is a Riesz basis in $\mathbb{X}$.*
2. *$\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ is a complete Bessel sequence in $\mathbb{X}$ and possesses a biorthogonal system $\{\psi_k\}_{k\geq 1}$ that is also a complete Bessel sequence in $\mathbb{X}$.*

With this last characterization and from what we have previously proved, it follows:

Proposition 2.28 *Assume that $d=1$ and $\Lambda_3=\varnothing$. Given a function $a\in W^{1,\infty}(0,\pi)$, the sequences $\mathcal{E}$ and $\mathcal{E}^*$ are Riesz bases in $\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)$.*

We are now ready to prove Proposition 2.20.

Proof. The solution of adjoint problem (2.15) is given by the series

$$\theta(x,t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\alpha_k e^{ik(T-t)}\Phi_{1,k}^*+\beta_k e^{ik(T-t)}\left(2c_k\left(T-t\right)\Phi_{1,k}^*+\Phi_{2,k}^*\right).$$

Thus:

$$B^*\theta(x,t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\alpha_k e^{ik(T-t)}B^*\Phi_{1,k}^*+\beta_k e^{ik(T-t)}\left(2c_k\left(T-t\right)B^*\Phi_{1,k}^*+B^*\Phi_{2,k}^*\right).$$

Taking the derivative with respect to x, and putting $x=0$, we get

$$\begin{aligned}B^*\theta_x(0,t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left(\alpha_k e^{ik(T-t)}B^*\frac{d\Phi_{1,k}^*(0)}{dx}\right.\\ &\quad\left.+\beta_k e^{ik(T-t)}\left(2c_k\left(T-t\right)B^*\frac{d\Phi_{1,k}^*(0)}{dx}+B^*\frac{d\Phi_{2,k}^*(0)}{dx}\right)\right).\end{aligned}$$

Therefore

$$
\begin{aligned}
B^*\theta_x(0,t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \alpha_k e^{ik(T-t)} B^* \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \end{pmatrix} \\
&\quad + \beta_k e^{ik(T-t)} \left(c_k \left(T-t\right) B^* \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \end{pmatrix} + B^* \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ m_k^* k \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

Since $B^* = (b_1, b_2)$, we can write

$$
\begin{aligned}
B^*\theta_x(0,t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \left(\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_2 \right) \alpha_k + \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_1 + k m_k^* b_2 \right) \beta_k \right) e^{ik(T-t)} \\
&\quad + \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_2 c_k \right) \beta_k \left(T-t\right) e^{ik(T-t)},
\end{aligned}
$$

and hence

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \left| B^*\theta_x(0,t) \right|^2 dt &= \int_0^T \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \left(\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_2 \right) \alpha_k + \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_1 + k m_k^* b_2 \right) \beta_k \right) e^{ik(T-t)} \right. \\
&\quad \left. + \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_2 c_k \right) \beta_k \left(T-t\right) e^{ik(T-t)} \right|^2 dt. \qquad (2.63)
\end{aligned}
$$

We will use the following result (see for instance [59, Theorem 2, p. 51], [14, Theorem 3, p. 808.], [43, Theorem 9.4, p. 177.]):

Lemme 2.29 *The system $\mathcal{F} = \left\{ e^{ikt}, te^{ikt} \right\}_{k\in\mathbb{Z}^*}$ is a Riesz basis of its closed span on $L^2\left(0,T\right)$ if $T \geq 4\pi$.*

If $T < 4\pi$, then there exists a proper subfamily $\mathcal{F}_0$ of $\mathcal{F}$ which is a Riesz basis on $L^2\left(0,T\right)$.

Thus, using this lemma, we can write (2.63) for $T \geq 4\pi$ in the form

$$
\int_0^T \left| B^*\theta_x(0,t) \right|^2 dt \geq C_T \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \left(\left| \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_2 \alpha_k + \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} b_1 + k m_k^* b_2 \right) \beta_k \right|^2 + \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} b_2 c_k \beta_k \right|^2 \right).
$$

We have

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left(\left|\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_2\alpha_k+\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_1+km_k^*b_2\right)\beta_k\right|^2+\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_2c_k\beta_k\right|^2\right)\\
=&\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left[\frac{b_2^2}{2\pi}\alpha_k^2+\left(\frac{2}{\pi}b_1b_2+\sqrt{\frac{2}{\pi}}km_k^*b_2^2\right)\alpha_k\beta_k+\left(\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_1+km_k^*b_2\right)^2+\frac{2b_2^2c_k^2}{\pi}\right)\beta_k^2\right]\\
=&\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}Q_k\begin{pmatrix}\alpha_k\\ \beta_k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_k\\ \beta_k\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

The matrix Q_k in the canonical base of $\mathbb{R}^2$ is given by:

$$Q_k=\begin{pmatrix}\frac{b_2^2}{2\pi} & \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}b_1b_2+\sqrt{\frac{2}{\pi}}km_k^*b_2^2\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}b_1b_2+\sqrt{\frac{2}{\pi}}km_k^*b_2^2\right) & \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_1+km_k^*b_2\right)^2+\frac{2b_2^2c_k^2}{\pi}\end{pmatrix}.$$

We have

$$\det(Q_k-\lambda I_2)=\lambda^2-\left(\frac{b_2^2}{2\pi}+\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_1+km_k^*b_2\right)^2+\frac{2b_2^2c_k^2}{\pi}\right)\lambda+\frac{b_2^4c_k^2}{\pi^2}=0$$

and

$$\begin{aligned}
\Delta_k\ =\ &\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_1+km_k^*b_2\right)^4+\left(1-4c_k^2\right)^2\frac{b_2^4}{4\pi^2}\\
&+2\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_1+km_k^*b_2\right)^2\left(\frac{b_2^2}{2\pi}+\frac{2b_2^2c_k^2}{\pi}\right)>0,\ \forall k\in\mathbb{Z}^*
\end{aligned}$$

Thus Q_k is positive definite and we denote by $\left(q_k^-,q_k^+\right)$ its eigenvalues with $0<q_k^-<q_k^+$, we get:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}Q_k\begin{pmatrix}\alpha_k\\ \beta_k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_k\\ \beta_k\end{pmatrix}\geq\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}q_k^-\left(|\alpha_k|^2+|\beta_k|^2\right).$$

But

$$
\begin{aligned}
q_k^- &= \frac{2b_2^4c_k^2}{\pi^2\left(\left(\frac{b_2^2}{2\pi}+\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_1+km_k^*b_2\right)^2+\frac{2b_2^2c_k^2}{\pi}\right)+\sqrt{\Delta_k}\right)}>0\\
:&= \frac{2b_2^4c_k^2}{h_k}
\end{aligned}
$$

Since

$$
\lim_{|k|\to\infty}c_k^2=\lim_{|k|\to\infty}\left(\frac{1}{2}\int_0^\pi a\left(x\right)\varphi_{|k|}^2\left(x\right)dx\right)^2=\frac{\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi a\left(x\right)dx\right)^2}{4}
$$

and $km_k^*\to 0$ as $|k|\to\infty$, it can be easily verified that there exists a positive constant C such that:

$$
h_k\leq C\left(b_1^2+b_2^2\right)=C\left\|B^*\right\|^2,\ \forall k\in\mathbb{Z}^*.
$$

Thus

$$
q_k^-\geq C\frac{b_2^4}{\left\|B^*\right\|^2}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi a\left(x\right)dx\right)^2,\ \forall k\in\mathbb{Z}^*.
$$

Then, we obtain

$$
Q(\alpha_k,\beta_k)\geq C\frac{b_2^4\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi a\left(x\right)dx\right)^2}{\left\|B^*\right\|^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left(|\alpha_k|^2+|\beta_k|^2\right).
$$

Thus

$$
\int_0^T\left|B^*\theta_x(0,t)\right|^2dt\geq C_T\frac{b_2^4\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi a\left(x\right)dx\right)^2}{\left\|B^*\right\|^2}\left\|\left(\theta^0,\theta^1\right)\right\|^2_{\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)}.
$$

Assume that $T<4\pi$ and let $\left\{e^{i\sigma(n)t},te^{i\sigma(n)t}\right\}$ be the Riesz basis given by the second point of Lemma 2.29. Then, in particular, this allows to write:

$$
e^{int}=\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\left(a_ke^{i\sigma(k)t}+b_kte^{i\sigma(k)t}\right),\ t\in(0,T)
$$

this clearly excludes the observability inequality and ends the proof. ■

To end the proof of Theorem 2.7, we prove the following

Proposition 2.30 *Assume that*

$$
d=1,\ \Lambda_3=\varnothing,\ \int_0^\pi a\left(x\right)dx=0.
$$

Then system (2.1) is not exactly controllable at any $T > 0$.

Proof. We consider the sequence of solutions to (2.15) given by

$$\theta_k(x,t) = \alpha_k e^{ik(T-t)}\Phi^*_{1,k} + \beta_k e^{ik(T-t)}\left(2c_k\,(T-t)\,\Phi^*_{1,k} + \Phi^*_{2,k}\right),$$

where c_k is defined in (2.46) and α_k, β_k are some parameters. Then for $k \geq 1$

$$\begin{aligned} B^*\theta_{x,k}(0,t) &= \left(\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_2\right)\alpha_k + \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_1 + km^*_k b_2\right)\beta_k\right)e^{ik(T-t)} \\ &\quad + \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_2 c_k\right)\beta_k\,(T-t)\,e^{ik(T-t)} \end{aligned}$$

We choose our parameters in the following way:

$$\beta_k = 1 \text{ and } \alpha_k = -\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_1 + km^*_k b_2}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}b_2}.$$

Then the right-hand side of observability inequality becomes

$$\begin{aligned} \int_0^T \left|B^*\theta_{x,k}(0,t)\right|^2 dt &= \int_0^T \left|\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}b_2 c_k\right)(T-t)\,e^{ik(T-t)}\right|^2 dt \\ &= \frac{2T^3 b_2^2}{3\pi}c_k^2. \end{aligned}$$

Note that

$$\lim_{k\to+\infty} c_k^2 = \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{2}a_{k,k}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi a(x)dx\right)^2 = 0.$$

We get

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^T \left|B^*\theta_{x,k}(0,t)\right|^2 dt = 0,$$

and in the same time we have $\beta_k^2 + \alpha_k^2 \geq 1$ for all $k \in \mathbb{Z}^*$. This is a contradiction to the observability inequalitie (2.11) and (2.12). ■

Chapitre 3

Control of coupled hyperbolic systems via the method of moments

3.1 Introduction: the control problem

This chapter deals with the controllability properties of some systems of two coupled one dimensional hyperbolic equations using the Ingham method, where the control is exerted at one boundary point for all times.

Thus, let $\Omega = (0,\pi)\,,\, T>0,\, Q = \Omega \times (0,\pi)\,.$ We consider the linear system

$$\begin{cases} q_{tt} = q_{xx} + az_t & \text{in } Q, \\ z_{tt} = z_{xx} - \delta^2 a q_t & \text{in } Q, \\ q(0,t) = 0, \quad q(\pi,t) = 0 & t \in (0,T) \\ z(0,t) = v(t), \quad z(\pi,t) = 0 & t \in (0,T) \\ q(x,0) = q^0, \quad q_t(x,0) = q^1 & \text{in } \Omega, \\ z(x,0) = z^0, \quad z_t(x,0) = z^1 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

where $a \in \mathbb{R}^*$, $\delta \in \mathbb{R}$ and $v \in L^2(0,T)$ is a control function.

Setting $y = (q,z)\,,$ the system (3.1) can be written:

$$\begin{cases} y_{tt} = y_{xx} + Ay_t & \text{in } Q_T = (0,\pi) \times (0,T) \\ \\ y(0,t) = Bv(t) \;\;,\;\; y(\pi,t) = 0 & t \in (0,T) \\ \\ y(x,0) = y^0 \;,\; y_t(x,0) = y^1 & \text{in } \;(0,\pi) \end{cases} \tag{3.2}$$

where:

- $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -\delta^2 a & 0 \end{pmatrix}$ with δ a positive real number;
- $B = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ and $v \in L^2(0,T)$ is the control function.

3.2 The control issues and main results

Notation 3.1 *All along this chapter, $\mathbb{X}(\alpha,\beta)$ will refer to the space $X(\alpha,\beta) \times X(\alpha,\beta)$ (for instance, $\mathbb{L}^2(0,\pi) = L^2(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$, $\mathbb{H}^{-1}(0,\pi) = H^{-1}(0,\pi) \times H^{-1}(0,\pi)$, ...).*

The previous problem is well-posed and a solution to (3.2) can be defined using for example the transposition method.

Définition 3.2 *For $(y^0, y^1, v) \in \mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi) \times L^2(0,T)$, a (weak) solution to system (3.2) is a function*

$$y = y\left(\cdot; y^0, y^1, v\right) \in C\left([0,T]; \mathbb{L}^2(0,\pi)\right) \cap C^1\left([0,T]; \mathbb{H}^{-1}(0,\pi)\right)$$

satisfying

$$\begin{aligned} \int_Q y \cdot f \; dxdt &= -\int_0^\pi y^0 \cdot (\theta_t(0) + A^*\theta(0))\, dx + \left\langle y^1, \theta(0)\right\rangle_{\mathbb{H}^{-1}(0,\pi), \mathbb{H}_0^1(0,\pi)} \\ &\quad + \int_0^T v(t)\, B^*\theta_x(0,t)\, dt \end{aligned} \tag{3.3}$$

for all $f \in L^1(0,T; \mathbb{L}^2(0,\pi))$, where $\theta \in C([0,T]; \mathbb{H}_0^1(0,\pi)) \cap C^1([0,T]; \mathbb{L}^2(0,\pi))$ is the unique solution to the system:

$$\begin{cases} \theta_{tt} = \theta_{xx} - A^*\theta_t + f & \text{in } Q_T \\ \theta(0,t) = \theta(\pi,t) = 0 & t \in (0,T) \\ \theta(T) = 0\ ,\ \theta_t(T) = 0 & \text{in } (0,\pi) \end{cases} \tag{3.4}$$

One has:

Proposition 3.3 *For $(y^0, y^1, v) \in \mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi) \times L^2(0,T)$, system (3.2) admits a unique solution, in the sense of Definition 3.2 , which depends continuously* *on the data : there is a constant $C > 0$ (independent of T) such that*

$$\begin{aligned} &\|y\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(0,\pi))} + \|y_t\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{H}^{-1}(0,\pi))} \\ &\qquad \leq C\left(\|y^0\|_{\mathbb{L}^2(0,\pi)} + \|y^1\|_{\mathbb{H}^{-1}(0,\pi)} + \|v\|_{L^2(0,T)}\right). \end{aligned}$$

The proof of the previous result follows step by step the one given in [47, pp. 46-54] (for instance) for the wave equation. Let us just recall at this level that the proof consists in proving that, in (3.3), the right hand-side is a continuous linear form on $L^1(0,T;\mathbb{L}^2(0,\pi))$:

$$\begin{aligned} &\int_0^T |B^*\theta_x(0,t)|^2 + \int_0^\pi |\theta_t(x,0) + A^*\theta(x,0)|^2 + \int_0^\pi |\theta_x(x,0)|^2 \\ \leq\ & C\|f\|^2_{L^1(0,T;\mathbb{L}^2(0,\pi))}, \end{aligned}$$

where θ is the solution to (3.4). An alternative proof can be found in [58].

Définition 3.4 *System (3.2) is exactly controllable in $\mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ at time $T > 0$ if for any $(y^0, y^1), (y^0_T, y^1_T) \in \mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$, there exists a control function $v \in L^2(0,T)$ such that the associated solution to System (3.2) satisfies $(y(T), y_t(T)) = (y^0_T, y^1_T)$.*

It is said null-controllable at time $T > 0$ if for any $(y^0, y^1) \in \mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$, there exists a control function $v \in L^2(0,T)$ such that the associated solution to System (3.2) satisfies $y(T) = 0,\ y_t(T) = 0$.

Last, System (3.2) is said approximately controllable in $\mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ at time $T > 0$ if for any $(y^0, y^1), (y^0_T, y^1_T) \in \mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ and $\varepsilon > 0$, there exists a control function $v \in L^2(0,T)$ such that the associated solution to System (3.2) satisfies

$$\left\|\left(y(T) - y^0_T,\ y_t(T) - y^1_T\right)\right\|_{\mathbb{L}^2(0,\pi)\times\mathbb{H}^{-1}(0,\pi)} < \varepsilon.$$

For all $x \in (0,\pi)$ and $k \in \mathbb{N}^*$, we denote by $\varphi_k(x) := \sqrt{2/\pi}\sin(kx)$ the eigenvector of the one-dimensional Laplace operator, with Dirichlet boundary conditions, associated with the eigenvalue $-k^2$.

3.3 Controllability and observability

The backward adjoint system associated with System (3.2) writes:

$$\begin{cases} \theta_{tt} = \theta_{xx} - A^*\theta_t & \text{in } Q_T \\ \\ \theta(0,t) = \theta(\pi,t) = 0 & t \in (0,T) \\ \\ \theta(T) = \theta^0 \ , \ -\theta_t(T) - A^*\theta(T) = \theta^1 & \text{in } (0,\pi) \end{cases} \tag{3.5}$$

We have the following equivalent formulations of the controllability properties.

Proposition 3.5 1. *System (3.2) is exactly controllable in* $\mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ *at time* $T > 0$ *if and only if for any* $(\theta^0, \theta^1) \in \mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$ *there exists* $C_T > 0$

$$\left\| \left(\theta^0, \theta^1\right) \right\|^2_{\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)} \leq C_T \int_0^T \left| B^*\theta_x(0,t) \right|^2 dt, \tag{3.6}$$

where θ *is the solution to system (3.5) associated with* $(\theta^0, \theta^1) \in \mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$.

2. *System (3.2) is null-controllable in* $\mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ *at time* $T > 0$ *if and only if there exists* $C_T > 0$ *such that for any* $(\theta^0, \theta^1) \in \mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$

$$\left\| \left(\theta(0), \theta_t(0)\right) \right\|^2_{\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)} \leq C_T \int_0^T \left| B^*\theta_x(0,t) \right|^2 dt, \tag{3.7}$$

where θ *is the solution to system (3.5) associated with* $(\theta^0, \theta^1) \in \mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$.

3. *System (3.2) is approximately controllable in* $\mathbb{L}^2(0,\pi) \times \mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ *at time* $T > 0$ *if and only if*

$$B^*\theta_x(0,t) = 0 \text{ in } (0,T) \Longleftrightarrow \left(\theta^0, \theta^1\right) = (0,0), \tag{3.8}$$

where θ *is the solution to system (3.5) associated with* $(\theta^0, \theta^1) \in \mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$.

Proof. Voir [17]. ■

Remarque 3.6 *We point out that the characterizations in Proposition 3.5 remain true if the solution* θ *to system (3.5) is replaced by the solution to the following* *problem:*

$$\begin{cases} \theta_{tt} = \theta_{xx} - A^* \theta_t & \text{in } Q_T \\ \\ \theta(0,t) = \theta(\pi,t) = 0 & t \in (0,T) \\ \\ \theta(T) = \theta^0 \ , \ \theta_t(T) = \theta^1 & \text{in } (0,\pi) \end{cases} . \tag{3.9}$$

The reason is that the operator $(\theta^0, \theta^1) \mapsto (\theta^0 \ , \ -A^*\theta^0 - \theta^1)$ *is clearly boundedly invertible from* $\mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$ *into itself.*

In order to apply Proposition 3.5, we will first study the spectrum of the operator induced by system (3.9). This is the content of the next section.

3.4 Spectrum of the system

The aim of this section is to describe the spectrum associated with system (3.9).

The complexified Hilbert space $\mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$ is equipped with the scalar product on its elements $u = (\varphi, \psi)$ and $v = (f, g)$ defined by:

$$\langle u, v \rangle = \int_0^\pi \left(\varphi_x \cdot \overline{f_x} + \psi \cdot \overline{g} \right) dx. \tag{3.10}$$

The associated norm will be denoted by $\|\cdot\|_{\mathbb{H}_0^1 \times \mathbb{L}^2}$.

Define the operator L^* by:

$$\begin{cases} L^* : & D(L^*) \subset \mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi) & \to & \mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi), \\ & u = (\varphi, \psi) & \mapsto & (\psi, \varphi_{xx} - A^*\psi) \end{cases} \tag{3.11}$$

where the domain of L^* is given by $D(L^*) = (\mathbb{H}^2(0,\pi) \cap \mathbb{H}_0^1(0,\pi)) \times \mathbb{H}_0^1(0,\pi)$, and

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^2 a \\ a & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Setting $(\varphi, \psi) \in D(L^*)$, the eigenvalue problem:

$$L^* \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \text{ in } (0,\pi) \tag{3.13}$$

is equivalent to solving

$$\begin{cases} \psi = \lambda\varphi, \quad \text{in } (0,\pi) \\ \\ \varphi_{xx} - \lambda A^*\varphi = \lambda^2\varphi, \quad \text{in } (0,\pi) \\ \\ (\varphi,\psi) \in D(L^*). \end{cases} \tag{3.14}$$

Since in view of (3.12), we have

$$-A^* = aPDP^{-1}, \; D = \begin{pmatrix} -i\delta & 0 \\ 0 & i\delta \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} i\delta & -i\delta \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

we see that, setting $\varphi = PY$, $\psi = PZ$ we are led to the problem

$$\begin{cases} Z = \lambda Y \\ Y_{xx} + \lambda aDY = \lambda^2 Y, \\ (Y,Z) \in D(L^*) \end{cases} \tag{3.15}$$

If $Y = (u,v)$ the equation satisfied by Y writes

$$\begin{cases} u_{xx} = \left(\lambda^2 + i\delta a\lambda\right) u, \\ v_{xx} = \left(\lambda^2 - i\delta a\lambda\right) v, \\ (u,v) \in \mathbb{H}^2(0,\pi) \cap \mathbb{H}_0^1(0,\pi). \end{cases} \tag{3.16}$$

We observe that if we set $\lambda = i\omega$, the previous system writes:

$$\begin{cases} -u_{xx} = \left(\omega^2 + \delta a\omega\right) u, \\ -v_{xx} = \left(\omega^2 - \delta a\omega\right) v, \\ (u,v) \in \mathbb{H}^2(0,\pi) \cap \mathbb{H}_0^1(0,\pi). \end{cases} \tag{3.17}$$

It can be easily shown that if (u,v) is a nontrivial solution of (3.17) then $\omega \in \mathbb{R}$. Furthermore, if $(\omega,u) \in \mathbb{R} \times H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)$ is a nontrivial solution of $-u_{xx} = (\omega^2 + \delta a\omega) u$ then $(-\omega,u)$ is a solution of $-v_{xx} = (\omega^2 - \delta a\omega) v$ and the converse is true.

3.4.1 The constant coefficient case

An immediate consequence of the previous computations concerns the constant case.

Proposition 3.7 *Assume that a is a positive constant. Then:*

1. *The spectrum of $\sigma(A^*)$ reduces to the sequence of eigenvalues*

$$\left\{ i\omega_k^{\pm}(a),\ i\omega_k^{\pm}(-a),\quad k \in \mathbb{N}^* \right\}$$

where

$$\omega_k^{\pm}(a) = \frac{-\delta a \pm \sqrt{4k^2 + \delta^2 a^2}}{2},\ k \in \mathbb{N}^*. \tag{3.18}$$

2. *The associated normalized sequence of eigenfunctions is given by*

$$\left\{ \begin{array}{c} V^*_{\omega_k^{\pm}(a)} = \begin{pmatrix} \Phi^*_{\omega_k^{\pm}(a)} \\ i\omega_k^{\pm}(a)\,\Phi^*_{\omega_k^{\pm}(a)} \end{pmatrix},\quad V^*_{\omega_k^{\pm}(-a)} = \begin{pmatrix} \Phi^*_{\omega_k^{\pm}(-a)} \\ i\omega_k^{\pm}(-a)\,\Phi^*_{\omega_k^{\pm}(-a)} \end{pmatrix} \\ \text{with} \\ \Phi^*_{\omega_k^{\pm}(a)} = \frac{1}{\sqrt{\left(k^2 + \left|\omega_k^{\pm}(a)\right|^2\right)\left(1+\delta^2\right)}} \begin{pmatrix} i\delta \\ 1 \end{pmatrix} \varphi_k, \\ \Phi^*_{\omega_k^{\pm}(-a)} = \frac{1}{\sqrt{\left(k^2 + \left|\omega_k^{\pm}(-a)\right|^2\right)\left(1+\delta^2\right)}} \begin{pmatrix} -i\delta \\ 1 \end{pmatrix} \varphi_k, \end{array} \right. ,\ k \in \mathbb{N}^*. \tag{3.19}$$

where $\varphi_k(x) = \sqrt{2/\pi}\sin(kx)$.

Proof. Consider the Sturm-Liouville problems

$$\left\{ \begin{array}{l} -u_{xx} = \left(\omega^2 \pm \delta a\omega\right)u, \\ u \in H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi). \end{array} \right.$$

As is well-known, this problem admits a nontrivial solution if, and only if, ω satisfies for some $k \in \mathbb{Z}^*$ the equation:

$$\omega^2 \pm \delta a\omega - k^2 = 0,$$

and, for such ω, a normalized solution is $u(x) = \sqrt{2/\pi}\sin(kx)$. The previous equations give the formula (3.18) for $\omega_k^{\pm}(a)$ and $\omega_k^{\pm}(-a)$.

For each $k \geq 1$, to $i\omega_k^{\pm}(a)$ (resp. $i\omega_k^{\pm}(-a)$) is associated the space of solution of system (3.15):

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} Y_k^{\pm}(a) \\ Z_k^{\pm}(a) \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i\omega_k^{\pm}(a) \\ 0 \end{pmatrix} \varphi_k \right\},$$

$$resp.\ \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} Y_k^{\pm}(-a) \\ Z_k^{\pm}(-a) \end{pmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ i\omega_k^{\pm}(-a) \end{pmatrix}\varphi_k\right\},$$

from which is deduced the associated eigenspace:

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} PY_k^{\pm}(a) \\ PZ_k^{\pm}(a) \end{pmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} i\delta \\ 1 \\ -\omega_k^{\pm}(a)\,\delta \\ i\omega_k^{\pm}(a) \end{pmatrix}\varphi_k\right\}$$

$$resp.\ \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} PY_k^{\pm}(-a) \\ PZ_k^{\pm}(-a) \end{pmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -i\delta \\ 1 \\ \omega_k^{\pm}(-a)\,\delta \\ i\omega_k^{\pm}(-a) \end{pmatrix}\varphi_k\right\}.$$

These eigenfunctions when normalized with respect to the norm of $\mathbb{H} = \mathbb{H}_0^1(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$ give (3.19). ■

Remarque 3.8 *Note that*

$$\begin{aligned} \omega_k^-(a) &< 0 < \omega_k^+(a),\ \omega_k^-(-a) < 0 < \omega_k^+(-a), \\ \omega_k^+(a) &= -\omega_k^-(-a),\ \omega_k^-(a) = -\omega_k^+(-a). \end{aligned}$$

We now focus on the condition allowing a gap between eigenvalues in order to apply the Ingham theorem. Of course, we will assume in what follows that the condition (3.20) holds (we will see later that otherwise the null-controllability does not occur).

Lemme 3.9 *Assume that a is a positive constant. Then:*

1. *All the eigenvalues are simple if, and only if:*

$$\delta^2 a^2 \neq \frac{(k^2-\ell^2)^2}{2(k^2+\ell^2)},\text{for all } k,\ell \geq 1,\ k \neq \ell. \tag{3.20}$$

2. *Let $m = [\delta a]$. Under the condition (3.20), one has:*

$$\omega_{k+m}^+(a) < \omega_k^+(-a) < \omega_{k+m+1}^+(a),\ \forall k \geq 1. \tag{3.21}$$

Proof. In order to prove that all the eigenvalues are simple, we have to check that the polynomials $p_k^{\pm}(\omega) = \omega^2 \pm \delta a\omega - k^2$ and $p_\ell^{\pm}(\omega) = \omega^2 \pm \delta a\omega - \ell^2$ do not have common roots for $k \neq \ell$. This is clearly the case for p_k^+ and p_ℓ^+(resp. p_k^- and p_ℓ^-). A necessary and sufficient condition for p_k^+ and p_ℓ^- to have a common root is provided by the determinant of the Sylvester matrix associated with this two polynomials, namely

$$\begin{aligned} |S| \quad : &= \det\begin{pmatrix} 1 & \delta a & -k^2 & 0 \\ 0 & 1 & \delta a & -k^2 \\ 1 & -\delta a & -\ell^2 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta a & -\ell^2 \end{pmatrix} \\ &= \quad -2a^2\delta^2\left(k^2+\ell^2\right) + \left(k^2-\ell^2\right)^2. \end{aligned}$$

Thus p_k^+ and p_ℓ^- have a common root if and only if $|S| = 0$, which is exactly (3.20).

We look for integers $j \geq 1$ such that $\omega_{k+j}^+(a) < \omega_k^+(-a)$ for $k \geq 1$. Since from (3.18)

$$\omega_k^+(-a) - \omega_{k+j}^+(a) = \delta a + \frac{\sqrt{4k^2+\delta^2a^2} - \sqrt{4(k+j)^2+\delta^2a^2}}{2}$$

Using that the function $x \mapsto f(x) = \sqrt{4x^2+\delta^2a^2}$ is convex and increasing on $(0,\infty)$, we get the following inequalities for all $k \geq 1$

$$\delta a - \frac{1}{2}f'(k+j)\,j \leq \omega_k^+(-a) - \omega_{k+j}^+(a) \leq \delta a - \frac{1}{2}f'(k)\,j. \tag{3.22}$$

Since f' is increasing and $f'(x) \to 2$ as $x \to \infty$, it follows in particular that for all $k \geq 1$ and $j \leq \delta a$

$$\omega_k^+(-a) - \omega_{k+j}^+(a) \geq \delta a - j \geq 0. \tag{3.23}$$

And, by similar computations, we have for all $k \geq 1$

$$-\delta a + \frac{1}{2}f'(k)(j+1) \leq \omega_{k+j+1}^+(a) - \omega_k^+(-a) \leq -\delta a + \frac{1}{2}f'(k+j+1)(j+1).$$

Since f' is increasing and $f'(x) \to 2$ as $x \to \infty$, it follows in particular that for all $k \geq 1$ and $j \geq \delta a$,

$$\omega_{k+j+1}^+(a) - \omega_k^+(-a) \geq -\delta a + j + 1 \geq 0. \tag{3.24}$$

From (3.23) (3.24) we get (3.21). ■

This last lemma induces an ordering for $\left(\omega_k^+(\pm a)\right)_{k\geq 1}$ (with $m=[\delta a]$)

$$\omega_k^+(a)<\omega_{k+1}^+(a)<\cdots<\omega_{k+m}^+(a)<\omega_k^+(-a)<\omega_{k+m+1}^+(a)<\omega_{k+m+2}^+(a)<\cdots<\omega_{k+2m}^+<\omega_{k+1}^+(-$$

It allows to renumber the sequence $\left(\omega_k^+(\pm a)\right)_{k\geq 1}$ in an increasing sequence $(\mu_k)_{k\geq 1}$ by setting:

$$\mu_{k+j}=\begin{cases}\omega_{k+j}^+(a), & 0\leq j\leq m\\ \omega_k^+(-a) & j=m+1\end{cases},k\geq 1.$$

Proposition 3.10 *There exists $\gamma>0$ such that for all $k,j\geq 1,\ k\neq j$,*

$$\min\left(\left|\omega_k^\pm(\pm a)-\omega_j^\pm(\pm a)\right|,\left|\omega_k^+(\pm a)-\omega_j^-(\pm a)\right|,\left|\omega_k^+(a)-\omega_j^+(-a)\right|,\left|\omega_k^+(a)-\omega_j^-(-a)\right|\right)\geq\gamma\left|k-\right. \tag{3.25}$$

if, and only if,

$$\delta a\neq n,\ \forall n\in\mathbb{Z}^*.$$

Proof. For all k,j sufficiently large , we have

$$\begin{aligned}\left|\omega_k^\pm(a)-\omega_j^\pm(a)\right| &= \frac{1}{2}\left|\sqrt{4k^2+\delta^2a^2}-\sqrt{4j^2+\delta^2a^2}\right|\\ &= \frac{2\left|k^2-j^2\right|}{\sqrt{4k^2+\delta^2a^2}+\sqrt{4j^2+\delta^2a^2}}\\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left|k-j\right|,\quad\left(k,j\geq\frac{\delta a}{2}\right)\end{aligned}$$

and by symmetry we also get:

$$\left|\omega_k^\pm(-a)-\omega_j^\pm(-a)\right|\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\left|k-j\right|.$$

This can be summarised into:

$$\left|\omega_k^\pm(\pm a)-\omega_j^\pm(\pm a)\right|\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\left|k-j\right|.$$

Now, in the same way:

$$\begin{aligned}\left|\omega_k^+(\pm a)-\omega_j^-(\pm a)\right| &= \left|\sqrt{4k^2+\delta^2a^2}+\sqrt{4j^2+\delta^2a^2}\right|\\ &\geq 2\left|k+j\right|\geq 2\left|k-j\right|,\end{aligned}$$

and

$$
\begin{aligned}
\left|\omega_k^+(a)-\omega_j^-(-a)\right| &= \frac{1}{2}\left|-2\delta a+\sqrt{4k^2+\delta^2a^2}+\sqrt{4j^2+\delta^2a^2}\right| \\
&\geq \left|-\delta a+k+j\right| \\
&\geq \left|k-j\right|, \ \left(\ k,j\geq \delta a/2\right).
\end{aligned}
$$

We see that the gap condition relies on the following evaluation:

$$
\begin{aligned}
\left|\omega_k^+(a)-\omega_j^+(-a)\right| &= \left|\frac{-\delta a+\sqrt{4k^2+\delta^2a^2}}{2}-\frac{\delta a+\sqrt{4j^2+\delta^2a^2}}{2}\right| \\
&= \left|-\delta a+2\frac{(k+j)(k-j)}{\sqrt{4k^2+\delta^2a^2}+\sqrt{4j^2+\delta^2a^2}}\right|
\end{aligned}
$$

Assume that there exists an integer $n\geq 1$ such that $\delta a=n$. Then choosing increasing sequences of integers k and j such that $k-j=n$, we get

$$
2\frac{(k+j)(k-j)}{\sqrt{4k^2+\delta^2a^2}+\sqrt{4j^2+\delta^2a^2}}=2n\frac{2j+n}{\sqrt{4(j+n)^2+\delta^2a^2}+\sqrt{4j^2+\delta^2a^2}}\underset{j\to\infty}{\to} n.
$$

This shows that

$$
\lim_{j\to\infty}\left|\omega_{j+n}^+(a)-\omega_j^+(-a)\right|=0 \text{ if } \ \delta a=n,
$$

and makes the gap condition (3.25) impossible.

Assume now that $\delta a\neq n$ for all $n\geq 1$. If $j-k\geq 1$, then

$$
\begin{aligned}
\left|\omega_k^+(a)-\omega_j^+(-a)\right| &= \delta a+2\frac{(k+j)(j-k)}{\sqrt{4k^2+\delta^2a^2}+\sqrt{4j^2+\delta^2a^2}} \\
&\geq 2\frac{(k+j)}{\sqrt{4k^2+\delta^2a^2}+\sqrt{4j^2+\delta^2a^2}}(j-k) \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left|k-j\right|, \left(k,j\geq\frac{\delta a}{2}\right).
\end{aligned}
$$

If $k-j=n\geq 1$, then:

$$
\begin{aligned}
\left|\omega_k^+(a)-\omega_j^+(-a)\right| &= n\left|-\frac{\delta a}{n}+2\frac{2j+n}{\sqrt{4(j+n)^2+\delta^2a^2}+\sqrt{4j^2+\delta^2a^2}}\right| \\
&: = n\left|r_j\right|
\end{aligned}
$$

Either $\delta a > n$ for some (k,j) (and thus for an infinite number of (k,j)) and, since $r_j \to 1$ as $j \to \infty$ and $\frac{\delta a}{n} - 1 \geq \frac{\delta a}{[\delta a]} - 1 > 0$, then for some $\rho > 0$

$$\left|\omega_k^+ (a) - \omega_j^+ (-a)\right| \geq \rho n,\ k, j \geq 1,\ k \neq j.$$

Or $\delta a < 1 \leq n$ and, again, since $r_j \to 1$ as $j \to \infty$ and $1 - \frac{\delta a}{n} \geq 1 - \frac{\delta a}{[\delta a]} > 0$, the same conclusion holds true. This ends the proof. ■

To conclude this subsection, we observe that conditions are necessary to get simple eigenvalues and to ensure a gap between eigenvalues. The issue now is to understand how can these conditions be translated in the nonconstant case.

For the system (3.2), Ingham-type theorems (see i.e. [43]) can be used to obtain the observability inequality since they require a uniform gap between the eigenvalues.

For convenient, we note for $k \in \mathbb{N}^*$

$$V_{1,k}^* = V_{\omega_k^+ (a)}^*, \quad V_{2,k}^* = V_{\omega_k^- (a)}^*, \quad V_{3,k}^* = V_{\omega_k^+ (-a)}^*, \quad V_{4,k}^* = V_{\omega_k^- (-a)}^*.$$

It is easy to show that the eigenfunctions $\left\{V_{j,k}^*,\ j = 1,2,3,4 \quad, k \in \mathbb{N}^*\right\}$ are mutually orthogonal in $\mathbb{H}_0^1 (0,\pi) \times \mathbb{L}^2 (0,\pi)$ (with respect to the inner product (3.10)). Therefore, they form a Riesz basis in $\mathbb{H}_0^1 (0,\pi) \times \mathbb{L}^2 (0,\pi)$.

We state and prove the main result of this article in the constant coefficient case.

Théorème 3.11 *System (3.2) is approximately controllable at any T if, and only if*

$$\delta^2 a^2 \neq \frac{\left(k^2 - \ell^2\right)^2}{2\left(k^2 + \ell^2\right)}, \quad \forall k,\ \forall \ell \in \mathbb{Z}^*. \tag{3.26}$$

Proof. Assume that $\delta^2 a^2 = \dfrac{\left(k^2 - \ell^2\right)^2}{2\left(k^2 + \ell^2\right)}$ for some $k,\ \ell$, in this case $\omega_k^+ (a) = \omega_\ell^+ (-a)$ and $\omega_k^- (a) = \omega_\ell^- (-a)$, therefore the eigenspace is two-dimensional.

Let $\theta_{k,\ell}$ the solution of the backward adjoint problem (3.9) associated with the initial data:

$$\left(\theta^0, \theta^1\right) = C_{1,k} V_{1,k}^* + C_{2,k} V_{2,k}^* + C_{3,\ell} V_{3,\ell}^* + C_{4,\ell} V_{4,\ell}^*.$$

Then, as previously, we have

$$\left(\theta_{k,\ell}, \theta_{k,\ell}'\right) = \left(C_{1,k} V_{1,k}^* + C_{3,\ell} V_{3,\ell}^*\right) e^{i\omega_k^+ (a)(T-t)} + \left(C_{2,k} V_{2,k}^* + C_{4,\ell} V_{4,\ell}^*\right) e^{i\omega_k^- (a)(T-t)}.$$

Thus

$$\theta_{k,\ell} (x,t) = \left(C_{1,k} \Phi_{\omega_k^+ (a)}^* + C_{3,\ell} \Phi_{\omega_\ell^+ (-a)}^*\right) e^{i\omega_k^+ (a)(T-t)} + \left(C_{2,k} \Phi_{\omega_k^- (a)}^* + C_{4,\ell} \Phi_{\omega_\ell^- (-a)}^*\right) e^{i\omega_k^- (a)(T-t)}.$$

and hence

$$
\begin{aligned}
\theta_{k,\ell}(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\left(\frac{C_{1,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^+(a)\right|^2\right)}}\begin{pmatrix} i\delta\varphi_k \\ \varphi_k \end{pmatrix}+\frac{C_{3,\ell}}{\sqrt{\left(\ell^2+\left|\omega_k^+(a)\right|^2\right)}}\begin{pmatrix} -i\delta\varphi_\ell \\ \varphi_\ell \end{pmatrix}\right)e^{i\omega_k^+(a)(T-t)} \\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{\left(1+\delta^2\right)}}\left(\frac{C_{2,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^-(a)\right|^2\right)}}\begin{pmatrix} i\delta\varphi_k \\ \varphi_k \end{pmatrix}+\frac{C_{4,k}}{\sqrt{\left(\ell^2+\left|\omega_k^-(a)\right|^2\right)}}\begin{pmatrix} -i\delta\varphi_\ell \\ \varphi_\ell \end{pmatrix}\right)e^{i\omega_k^-(a)(T-t)}.
\end{aligned}
$$

Differentiating with respect to x, and putting $x=0$, we get (recall that $B^*=(0,1)$)

$$
\begin{aligned}
B^*\frac{\partial\theta_{k,\ell}(0,t)}{\partial x} &= \sqrt{\frac{2}{\left(1+\delta^2\right)\pi}}\left(\frac{kC_{1,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^+(a)\right|^2\right)}}B^*\begin{pmatrix} i\delta \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{\ell C_{3,\ell}}{\sqrt{\left(\ell^2+\left|\omega_k^+(a)\right|^2\right)}}B^*\begin{pmatrix} -i\delta \\ 1 \end{pmatrix}\right)e^{i\omega_k^+(a)(T-t)} \\
&\quad+\sqrt{\frac{2}{\left(1+\delta^2\right)\pi}}\left(\frac{kC_{2,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^-(a)\right|^2\right)}}B^*\begin{pmatrix} i\delta \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{\ell C_{4,\ell}}{\sqrt{\left(\ell^2+\left|\omega_k^-(a)\right|^2\right)}}B^*\begin{pmatrix} -i\delta \\ 1 \end{pmatrix}\right)e^{i\omega_k^-(a)(T-t)}.
\end{aligned}
$$

and so

$$
\begin{aligned}
B^*\frac{\partial\theta_{k,\ell}(0,t)}{\partial x} &= \sqrt{\frac{2}{\left(1+\delta^2\right)\pi}}\left(\frac{kC_{1,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^+(a)\right|^2\right)}}+\frac{\ell C_{3,\ell}}{\sqrt{\left(\ell^2+\left|\omega_k^+(a)\right|^2\right)}}\right)e^{i\omega_k^+(a)(T-t)} \\
&\quad+\sqrt{\frac{2}{\left(1+\delta^2\right)\pi}}\left(\frac{kC_{2,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^-(a)\right|^2\right)}}+\frac{\ell C_{4,\ell}}{\sqrt{\left(\ell^2+\left|\omega_k^-(a)\right|^2\right)}}\right)e^{i\omega_k^-(a)(T-t)}.
\end{aligned}
$$

Now choosing

$$
C_{1,k}=\frac{\ell}{\sqrt{\left(\ell^2+\left|\omega_k^+(a)\right|^2\right)}},\quad C_{3,\ell}=-\frac{k}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^+(a)\right|^2\right)}}
$$

$$
C_{2,k}=\frac{\ell}{\sqrt{\left(\ell^2+\left|\omega_k^-(a)\right|^2\right)}},\quad C_{4,\ell}=-\frac{k}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^-(a)\right|^2\right)}}
$$

We get

$$
B^*\frac{\partial\theta_{k,\ell}(0,t)}{\partial x}=0,\quad t\in(0,T).
$$

This already shows that the sytem is not approximately controllable since $\theta_{k,\ell}$ is not trivial with the previous choice of $C_{1,k},\ C_{2,k},\ C_{3,\ell}$ and $C_{4,\ell}$. ■

Since approximate controllability is a necessary condition for exact controllability, we will now assume this property.

We have proved the next result.

Théorème 3.12 *The system (3.2) is exactly controllable in* $\mathbb{L}^2(0,\pi)\times\mathbb{H}^{-1}(0,\pi)$ *at time* $T>T_0$ *if and only if, it is approximately controllable and*

$$\delta a\notin\mathbb{Z}^*.$$

Proof. The function

$$\begin{aligned}(\theta,\theta_t) &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\Big(C_{1,k}V_{1,k}^* e^{i\omega_k^+(a)(T-t)}+C_{2,k}V_{2,k}^* e^{i\omega_k^-(a)(T-t)}\\ &\qquad + C_{3,k}V_{3,k}^* e^{i\omega_k^+(-a)(T-t)}+C_{4,k}V_{4,k}^* e^{i\omega_k^-(-a)(T-t)}\Big) \qquad (3.27)\end{aligned}$$

solves (3.9) for the initial data

$$\left(\theta^0,\theta^1\right)=\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left[C_{1,k}V_{1,k}^*+C_{2,k}V_{2,k}^*+C_{3,k}V_{3,k}^*+C_{4,k}V_{4,k}^*\right]$$

where $\{C_{j,k},\ j=1,2,3,4\quad ,k\in\mathbb{N}^*\}$ are complex numbers such that

$$\left\|\left(\theta^0,\theta^1\right)\right\|^2_{\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)}=\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(|C_{1,k}|^2+|C_{2,k}|^2+|C_{3,k}|^2+|C_{4,k}|^2\right).$$

We have $\forall\,(x,t)\in(0,\pi)\times(0,T)$,

$$\left\{\begin{aligned}B^*\theta\,(x,t) &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\left(\frac{C_{1,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^+(a)\right|^2\right)}}e^{i\omega_k^+(a)(T-t)}+\frac{C_{2,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^-(a)\right|^2\right)}}e^{i\omega_k^-(a)(T-t)}\right.\\ &\left.+\frac{C_{3,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^+(-a)\right|^2\right)}}e^{i\omega_k^+(-a)(T-t)}+\frac{C_{4,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^-(-a)\right|^2\right)}}e^{i\omega_k^-(-a)(T-t)}\right)\varphi_k(x).\end{aligned}\right. \qquad (3.28)$$

Taking the derivative with respect to x, and putting $x=0$, we get

$$\left\{\begin{aligned}B^*\theta_x\,(0,t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\left(1+\delta^2\right)}}\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{kC_{1,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^+(a)\right|^2\right)}}e^{i\omega_k^+(a)(T-t)}+\frac{kC_{2,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^-(a)\right|^2\right)}}e^{i\omega_k^-(a)(T-t)}\right.\\ &\left.+\frac{kC_{3,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^+(-a)\right|^2\right)}}e^{i\omega_k^+(-a)(T-t)}+\frac{C_{4,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^-(-a)\right|^2\right)}}e^{i\omega_k^-(-a)(T-t)}\right),\end{aligned}\right.$$

and hence

$$\int_0^T |B^*\theta_x(0,t)|^2\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi\left(1+\delta^2\right)}}\int_0^T \left|\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{kC_{1,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^+(a)\right|^2\right)}}e^{i\omega_k^+(a)(T-t)}\right.$$
$$+\frac{kC_{2,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^-(a)\right|^2\right)}}e^{i\omega_k^+(-a)(T-t)}$$
$$+\frac{kC_{3,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^+(-a)\right|^2\right)}}e^{i\omega_k^+(-a)(T-t)}$$
$$\left.+\frac{C_{4,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^-(-a)\right|^2\right)}}e^{i\omega_k^-(-a)(T-t)}\right|^2 dt. \tag{3.29}$$

The left-hand side of observability inequality is given by

$$\left\|\left(\theta^0,\theta^1\right)\right\|^2_{\mathbb{H}^1_0(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)} = \sum_{\substack{k=1\\1\le l\le 4}}^{+\infty}|C_{l,k}|^2.$$

Thus, using Ingham theorem and Proposition 3.10, we can write (3.29) for $T > \dfrac{2\pi}{\gamma}$ in the form

$$\int_0^T |B^*\theta_x(0,t)|^2\,dt \ \ge\ \sqrt{\frac{2}{\pi\left(1+\delta^2\right)}}\sum_{k\ge 1}\left(\left|\frac{kC_{1,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^+(a)\right|^2\right)}}\right|^2+\left|\frac{kC_{2,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^-(a)\right|^2\right)}}\right|^2\right.$$
$$\left.+\left|\frac{kC_{3,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^+(-a)\right|^2\right)}}\right|^2+\left|\frac{kC_{4,k}}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^-(-a)\right|^2\right)}}\right|^2\right).$$

Since

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty}\frac{k}{\sqrt{\left(k^2+\left|\omega_k^\pm(\pm a)\right|^2\right)}} = \lim_{k\longrightarrow+\infty}\frac{k}{\sqrt{k^2+\frac{1}{4}\left(-\delta a\pm\sqrt{4k^2+\delta^2a^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Then, we obtain

$$\int_0^T \left|B^*\theta_x\left(0,t\right)\right|^2 dt \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi\left(1+\delta^2\right)}}\sum_{k\geq 1}\left(\left|C_{1,k}\right|^2+\left|C_{2,k}\right|^2+\left|C_{3,k}\right|^2+\left|C_{4,k}\right|^2\right).$$

Thus

$$\int_0^T \left|B^*\theta_x\left(0,t\right)\right|^2 dt \geq C_T\left\|\left(\theta^0,\theta^1\right)\right\|^2_{\mathbb{H}_0^1(0,\pi)\times\mathbb{L}^2(0,\pi)}.$$

■

Conclusion et Perspectives

Ce travail a été l'occasion, pour moi, de voir de très près et d'approfondir mes connaissances en théorie de contrôle.

Pendant ces années de doctorat, sous l'encadrement de mes responsable de doctorat, j'ai fait appel à mes capacités d'organisation et de recherche d'informations. J'ai notamment acquis de nouvelles connaissances mathématiques et physiques.

Ils ont été, pour moi, une occasion en or, pour élargir mon champ de vision et de constater le lien étroit qui existe en particulier entre la physique et les mathématiques.

La problématique de cette thèse a été d'étudier la contrôlabilité, par un nombre réduit de contrôles, de certaines classes de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. On commence par rappeler des résultats généraux sur la controlabilité , puis on présente deux outils l'inégalité de Ingham et la méthode des moments permettant d'établir des inégalités d'observabilité. Dans la deuxième partie, on étudie tout d'abord la contrôlabilité exacte et approchée, par le bord et avec un seul contrôle, d'un système hyperbolique formé d'une équation des ondes couplée avec une équation différentielle du second ordre en temps.

Cette thèse traite certains problèmes de contrôlabilité, mais il reste encore beaucoup de problèmes ouverts. On va en mentionner quelques uns, mais tout d'abord, si on devait résumer la différence entre la contrôlabilité d'une équation et celle d'un système d'équations, est que la contrôlabilité dans ce dernièr dépend également:

- du nombre de contrôles,
- de la nature du couplage (par exemple s'il a un signe,...).

Parmi les problèmes ouverts, il y a celui où la matrice de couplage est pleine.

J'avais souhaité finaliser cette partie sur le système

$$
\begin{cases}
y_{tt} = y_{xx} + A(x)\, y_t & \text{dans } Q_T = (0,\pi) \times (0,T) \\
\\
y(0,t) = Bv(t) \quad , \quad y(\pi,t) = 0 & t \in (0,T) \\
\\
y(x,0) = y^0 \ , \ y_t(x,0) = y^1 & \text{dans } (0,\pi)
\end{cases}
$$

avec les notations suivantes:

- $A \in H^1([0,\pi]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^2))$ est donné par $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & a(x) \\ -\delta^2 a(x) & 0 \end{pmatrix}$ où δ est un nombre réel positif;
- $B = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ et $v \in L^2(0,T)$ est une fonction de contrôle.

Pour m'attaquer aux d'autres systèmes hyperboliques couplées. C'est un problème qui me prend à cœur. Je me ferai un plaisir de compléter ce travail dans le futur.

Bibliographie

[1] R. A. ADAMS. *Sobolev spaces.* Academic Press, New York San Francisco London, (1975).

[2] F. ALABAU-BOUSSOUIRA. A two-level energy method for indirect boundary observability and controllability of weakly coupled hyperbolic systems. *SIAM J. Control Optim. (2003) 871-906.*

[3] F. ALABAU-BOUSSOUIRA. On the influence of the coupling on the dynamics of single observed cascade systems of PDE'S, *Mathematical Control and Related Fields, 5 (2015) 1-30.*

[4] F. ALABAU-BOUSSOUIRA, M. LÉAUTAUD. Indirect controllability of locally coupled systems under geometric conditions. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 395–400.*

[5] F. ALABAU-BOUSSOUIRA, M. LÉAUTAUD. Indirect controllability of locally coupled wave-type systems and applications. *J. Math. Pures Appl. 99 (2013) 544–576.*

[6] F. AMMAR KHODJA, A. BADER. Stabilizability of systems of one-dimensional wave equations by one internal or boundary control force. *SIAM J. Control Optim. 39-6 (2001) 1833–1851.*

[7] F. AMMAR-KHODJA, A. BENABDALLAH, AND C. DUPAIX. Null controllability of some reaction-diffusion systems with one control force. *J. Math. Anal. Appl, 320 (2006) 928-943.*

[8] F. AMMAR KHODJA, A. BENABDALLAH, M. GONZÁLEZ-BURGOS, L. DE TERESA. Recent results on the controllability of linear coupled parabolic problems: a survey. *Math. Control Relat. Fields 1, (2011) 267–306.*

[9] F. AMMAR KHODJA, A. BENABDALLAH, M. GONZÁLEZ-BURGOS, L. DE TERESA. The Kalman condition for the boundary controllability of coupled

parabolic systems. Bounds on biorthogonal families to complex matrix exponentials. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 96(6) (2011) 555-590.*

[10] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos, L. de Teresa. A new relation between the condensation index of complex sequences and the null controllability of parabolic systems. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris 351/19-20 (2013) 743-746.*

[11] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos, L. de Teresa. New phenomena for the null controllability of parabolic systems: Minimal time and geometrical dependence. *J. Math. Anal. Appl. 444 (2016) 1071–1113.*

[12] S. Avdonin, A. Choque Rivero and L. de Teresa. Exact boundary controllability of coupled hyperbolic equations. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 23-4 (2013) 701-710.*

[13] S. A. Avdonin and S.A. Ivanov. *Families of Exponentials. The Method of Moments in Controllability Problems for Distributed Parameter Systems.* Cambridge University Press, Cambridge, (1995).

[14] S. Avdonin, W. Moran. Ingham-type inequalities and Riesz bases of divided differences. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 11-4 (2001) 803-820.*

[15] J.M. Ball et M. Slemrod. Nonharmonic Fourier Serie and the Stabilization of Distributed Semilinear Control Systems. *Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXXII (1979) 555-587.*

[16] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control Optim. 30 (1992) 1024–1065.*

[17] A. Bennour, F. Ammar Khodja, D. Teniou. Exact and approximate controllability of coupled one-dimensional hyperbolic equations. *J. EECT. 25 (2017) 487–516.*

[18] F. Boyer and G. Olive. Approximate controllability conditions for some linear 1d parabolic systems with space-dependent coefficients, *(2013) hal-00848709.*

[19] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext, Springer, New York, (2011).

[20] T. Cazenave, A. Haraux. *Introduction aux problèmes sémi-linéaires.* Mathématiques et Applications, Ellipses, Paris, (1990).

[21] J.-M. Coron. *Control and nonlinearity.* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 136, American Mathematical Society, Providence, RI (2007).

[22] J.-M. Coron, S. Guerrero, and L. Rosier. Null controllability of a parabolic system with a cubic coupling term. *SIAM J. Control Optim. 48(8) (2010) 5629-5653.*

[23] J.-M. Coron, P. Lissy. Local null controllability of the three-dimensional Navier-Stokes system with a distributed control having two vanishing components. *Invent. Math. 198 (2014) 833-880.*

[24] B. Dehman, J. Le Rousseau & M. Léautaud. Controllability of Two Coupled Wave Equations on a Compact Manifold. *Arch. Rational Mech. Anal. 211 (2014) 113–187.*

[25] S. Dolecki and D.L. Russell. A general theory of observation and control. *SIAM J. Control Optimization 15 (1977) 185–220.*

[26] H.O. Fattorini. Some remarks on complete controllability, *SIAM J. Control 4 (1966) 686–694.*

[27] H.O. Fattorini and D. L. Russell. Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension. *Arch. Rational Mech. Anal. 43 (1971) 272–292.*

[28] E. Fernàndez-Cara, M. Gonzàlez-Burgos, and L. de Teresa. Boundary controllability of parabolic coupled equations. *J. Funct. Anal. 259(7) (2010) 1720-1758.*

[29] A. V. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov. *Controllability of evolution equations.* Seoul National University Research Institute of Mathematics Global Analysis Research Center, Seoul. 34 (1996).

[30] R.A. Gatenby, A.S. Silva, R.. Gillies, B.R. Frieden. Adaptive therapy, Cancer Res. *69, no. 11, (2009) 4894-4903.*

[31] J.-M. Ghidaglia. Some backward uniqueness results, *Nonlinear Anal. 10 no. 8 (1986) 777-790.*

[32] I. Gohberg & M. Krein. *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators.* Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18, AMS, Providence, R.I. (1969).

[33] M. Gonzàlez-Burgos and R. Pérez-Garcia. Controllability results for some nonlinear coupled parabolic systems by one control force. *Asymptotic Analysis. 46 (2006) 123-162.*

[34] M. Gonzàlez-Burgos and L. de Teresa. Controllability results for cascade systems of m coupled parabolic PDEs by one control force. *Port. Math. 67(1) (2010) 91-113.*

[35] S. Guerrero. Null controllability of some systems of two parabolic equations with one control force. *SIAM J. Control Optim. 46(2) (2007) 379-394.*

[36] A. Haraux. Quelques méthodes et résultats récents en théorie de la contrôlabilité exacte. *Rapport de recherche INRIA N°1317 (1990).*

[37] M. L. J. Hautus. Controllability and observability conditions for linear autonomous systems, *Ned. Akad. Wetenschappen, Proc. Ser. A 72 (1969) 443-448.*

[38] A. E. Ingham – « Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series », Math. Z. 41 no. 1 p. (1936) 367-379.

[39] R. E. Kalman. Contributions to the theory of optimal control. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) 5 (1960) 102-119.*

[40] R. E. Kalman. On the general theory of control systems. *Proc. First Internat. Congress Automat. Contr, Moscow. (1960) 481-491.*

[41] O. Kavian and L. de Teresa. Unique continuation principle for systems of parabolic equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var. 16(2) (2010) 247-274.*

[42] A. Ya. Kinchin. *Continued fractions.* The University of Chicago Press (1964).

[43] V. Komornik and P. Loreti. *Fourier Series in Control Theory.* Springer, New York. (2005).

[44] I. Lasiecka & R. Triggiani. Carleman estimates and exact boundary controllability for a system of coupled, nonconservative second-order hyperbolic equations, *In: "Partial Differential Equation Methods in Control and Shape optimization". G. Da Prato & J-P Zolésio (editors). Marcel and Dekker. INC (1997) 215-244.*

[45] G. Lebeau and L. Robbiano. Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Comm. Partial Differential Equations. 20 (1995) 335-356.*

[46] Leonard. The matrix exponential. *SIAM Review. 38(3) 247-274.*

[47] J.L. Lions. *Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisations de Systèmes Distribués.* Masson, Paris. 1988.

[48] J.-L. Lions. Sentinelles pour les systèmes distribués a données incomplètes. *Volume 21 of Recherches en Mathématiques Appliquées. Masson, Paris. 1992.*

[49] J. L. Lions, E. Magenes. Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod, Paris. 1968.

[50] J. Panovska, H.M. Byrne, P.K. Maini. A theoretical study of the response of vascular tumours to diferent types of chemotherapy. *Math. Comput. Modelling 47 , no. 5-6 (2008) 560-579.*

[51] D.L. Russell. A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations. *Studies in Appl. Math. 52 (1973) 189-221.*

[52] L. Schwartz. *Théorie des distributions.* Hermann, Paris. 1966.

[53] T. I. Seidman. Two results on exact boundary control of parabolic equations. *Appl. Math. Optim. 11 no. 2 (1984) 145-152.*

[54] L. M. Silverman & H. E. Meadows. Controllability and observability in timevariable linear systems. *SIAM J. Control. 5 (1967) 64-73.*

[55] S. L. Sobolev. On a theorem of functional analysis. Transl. Amer. Math. Soc., 34, 2, 39-68, 1963; translation of Math. Sbornik. 45 (1938) 471-496.

[56] R. Temam. *Problèmes mathématiques en plasticité, Méthodes mathématiques de l'informatique*, Collection dirigée par J. L. Lions, Gautiers-Villars. 1983.

[57] L. de Teresa. Insensitizing controls for a semilinear heat equation. Comm. Partial Differential Equations. 25(1-2) (2000) 39-72.

[58] M. Tucsnak and G. Weiss. *Observation and Control for Operator Semigroups.* Birkhauser Advanced Texts: Basler Lehrbucher, Birkhauser Verlag, Basel. 2009.

[59] D. Ullrich. Divided differences and systems of nonharmonic Fourier series. *Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980) 47–57.*

[60] K. Yosida. *Functional analysis.* Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg. 1965.

[61] J. Zabczyk. *Mathematical control theory.* An introduction, Systems & Control : Foundations & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA. 1992.

[62] E. Zuazua. Controllability and observability of partial differential equations, some results and open problems. *In Handbook of differential equations : evolutionary equations. Vol. III, Handb. D. Equ. (2007) 527-621.*