N° d'ordre : 03/2019-C/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des sciences et de la technologie

"HOUARI BOUMEDIENE"

Faculté de Mathématiques

Thèse de doctorat

Présentée pour l'obtention du grade de : ***Docteur***

En : ***Mathématiques***

Spétialité : ***Analyse : Systèmes Dynamiques***

Par : ***CHERFAOUI Saïda***

Thème

Etude, dans les espaces de Sobolev, d'un problème 2m-parabolique dans des domaines non cylindriques

Soutenue publiquement le 26/01/2019, devant le jury composé de :

M^{r} MEDJDEN Mohamed	Professeur à l'U.S.T.H.B.	Président
M^{r} KESSAB Amor	Professeur à l'U.S.T.H.B.	Directeur
M^{r} KHELOUFI Arezki	Maître de Conferences/A, à l'U.A.M. de Bejaia	Co-Directeur
M^{r} KHEMMOUDJ Ammar	Professeur à l'U.S.T.H.B.	Examinateur
M^{r} CHOUTRI Abdelaziz	Professeur à l'E.N.S. de Kouba	Examinateur
M^{r} MOKHTARI Fares	Maître de Conferences/A, à l'U. d'Alger 1	Examinateur

Remerciements

Je remercie le bon Dieu de m'avoir donné la patience et le courage d'accomplir ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes plus vifs remerciements à :

Mes Directeurs de thèse **Kessab Amor**, Professeur à l'USTHB et **Kheloufi Arezki**, Maître de conférences à université de Bejaïa, pour l'intéressant sujet qu'ils m'ont proposé. Je les remercie vivement, pour leur disponibilité alliée à leur gentillesse naturelle et leurs encouragements. Ils m'ont bien guidés et apportés leurs soutiens tout au long de la préparation de la thèse. Leurs conseils ont été des éléments décisifs dans l'aboutissement de cette thèse.

Monsieur **Medjden Mohamed**, Professeur à l'USTHB, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Monsieur **Khemmoudj Ammar**, Professeur à l'USTHB, Monsieur **Choutri Abdelaziz**, Professeur à E.N.S. de Kouba, et Monsieur **Mokhtari Fares**, Maître de conférences à l'université d'Alger 1 qui ont accepté d'examiner cette thèse.

Mes remerciements tout aussi vifs à Monsieur **Djema Amar** qui m'a beaucoup guidé dans mes recherches, ainsi qu'à tous les membres du l'équipe "dynamique des fluides", du Laboratoire de Physique Théorique. Un grand merci à tous les membres du Laboratoire Systèmes Dynamiques de l'USTHB et ceux de Laboratoire Mathématiques Appliquées de l'Université de Bejaïa.

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents, pour leur soutien et leur confiance en moi, ainsi qu'au reste de la famille, sans oublier mes amis et tous ceux qui m'ont servis, de près ou de loin pour accomplir mon travail.

Dieu merci.

Table des matières

Liste des principales notations **1**

Introduction générale **2**

1 Préliminaires **8**
- 1.1 Espaces fonctionnels 8
- 1.2 Lemmes techniques 11
- 1.3 Problèmes paraboliques modèles 16

2 Résultats d'existence, d'unicité et de régularité maximale pour une équation parabolique d'ordre $2m$ dans des domaines coniques symétriques de $\mathbb{R}^{N+1}$ **17**
- 2.1 Introduction 17
- 2.2 Résolution du problème (2.1) dans des domaines tronqués Q_n 20
- 2.3 Estimation uniforme 22
- 2.4 Résultats principaux 29
  - 2.4.1 Un résultat local en temps 30
  - 2.4.2 Un résultat global en temps 32

3 Sur une équation parabolique d'ordre $2m$ associée à des conditions aux limites mixtes dans des domaines non rectangulaires **34**
- 3.1 Introduction 34
- 3.2 Unicité de la solution 37
- 3.3 Résultats locaux en temps 39
  - 3.3.1 Cas d'un domaine tronqué Ω_n 39
  - 3.3.2 Cas d'un domaine triangulaire 42
- 3.4 Résultats globaux en temps 49

Conclusion et perspectives **51**

Bibliographie **52**

Liste des principales notations

Ω : Ouvert de $\mathbb{R}^N$.

$\partial\Omega$: Frontière de Ω.

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$: Un vecteur de $\mathbb{R}^N$.

$|.| : |x| = \left(\sum\limits_{j=1}^{N} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$

$\partial_t = d/dt$: Dérivée partielle par rapport à t.

$\partial_{x_j} = \partial/\partial x_j$: Dérivée partielle par rapport à x_j.

$\Delta = \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j}^2$: Opérateur de Laplace.

$\nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_N})$: Gradient par rapport à x.

$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}.\partial_{x_2}^{\alpha_2}...\partial_{x_N}^{\alpha_N}}$: Dérivée d'ordre $\alpha, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N), |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N$.

$L^p(\Omega)$: Espace des fonctions de puissances p^{me} intégrable sur Ω.

$W^{s,p}(\Omega)$: Espace de Sobolev construit sur $L^p(\Omega)$ et s un réel.

$H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$.

$L^2(0, T; H)$: Espace des fonctions u mesurables de $(0, T)$ dans H telles que $\int_0^T \|u(t)\|_H^2 dt < +\infty$.

$\mathcal{D}(\Omega)$: Espace des fonctions indéfiniment différentiables à supports compacts dans Ω.

$\mathcal{D}'(\Omega)$: Espace des distributions sur Ω.

ν : La normeale extérieure à $\partial\Omega$.

$\partial/\partial\nu$: Dérivée normale.

$< ., . >$: Produit scalaire dans un espace de Hilbert H.

$\|.\|_X$: La norme sur X.

p.p. : presque par tout.

Introduction générale

Plusieurs phénomènes venant de la physique, l'ingénierie, la biologie, etc., se modélisent par des problèmes aux limites où interviennent des équations aux dérivées partielles (EDP) de différents types (elliptiques, paraboliques ou hyperboliques). Parmi les équations les plus célèbres, on peut citer l'équation de Boltzmann en mécanique statistique, les équations de Navier Stokes en mécanique des fluides, les équations de Von Karman des plaques planes, l'équation de Schrödinger en mécanique quantique, etc. La modélisation par les EDP est suivie par une analyse théorique et/ou numérique. Parmi les méthodes analytiques on trouve : la méthode variationnelle, la méthode du point fixe, la méthode des opérateurs monotones, la méthode de somme d'opérateurs, la méthode de décomposition des domaines, etc. Des solutions explicites sont en général impossibles à déterminer et les méthodes numériques (méthode des différences finies, méthode spectrale, méthodes des volumes finis et la méthode des éléments finis, etc.) sont devenues alors une démarche de base d'approximation des solutions. Mais avant cela le travail des mathématiciens est l'établissement de l'existence et de l'unicité de la solution ainsi que sa régularité pour que les méthodes numériques puissent s'assurer de bonnes solutions. Notre étude est purement théorique et porte sur l'existence et l'unicité ainsi que la régularité maximale de la solution.

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse à une équation parabolique d'ordre supérieur particulière, à savoir

$$\partial_t u + (-1)^m \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j}^{2m} u = f,\ m \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Il s'agit du cas le plus simple des équations paraboliques d'ordre supérieur, mais nos résultats peuvent être généralisés à des larges classes d'équations paraboliques d'ordre supérieur (semi linéaires ou non linéaires). Les particularités des problèmes étudiés sont les suivantes :

1. Nous nous plaçons dans le cadre hilbertien (le second membre f de l'équation (1) sera pris dans L^2), mais nous pouvons penser à travailler dans d'autres cadres fonctionnels non hilbertiens comme L^p, $p \neq 2$, ou les espaces de Hölder, par exemple.

2. L'équation (1) sera associée à différentes conditions aux limites (Cauchy-Dirichlet et mixtes), mais nous pouvons considérer d'autres conditions aux limites, de Neumann ou périodiques par exemple.
3. L'équation (1) sera posée dans des domaines non cylindriques de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^{N+1}$. Ce sont des domaines qui varient avec le temps et qui ne peuvent pas s'écrire comme produits cartésiens d'un intervalle en temps et d'un domaine en espace. Les domaines considérés sont du type

$$Q = \{(t, x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1} : (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \Omega_t, 0 < t < T\}$$

   où T est un nombre positif et pour t fixé dans l'intervalle $]0, T[$, Ω_t est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et Ω_0 peut être vide. Dans le deuxième chapitre nous considérons des domaines coniques correspondant à

$$\Omega_t = \{(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : 0 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2} < \varphi(t)\},$$

   où φ est une fonction réelle lipschitzienne sur $[0, T]$ et telle que $\varphi(0) = 0$ et dans le troisième chapitre nous considérons des domaines plans correspondant à

$$\Omega_t = \{x \in \mathbb{R} : \varphi_1(t) < x < \varphi_2(t)\},$$

   où φ_1 et φ_2 sont des fonctions réelles lipschitziennes sur $[0, T]$ vérifiant $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$.

La difficulté liée à ce genre de problèmes provient de la "pointe" en $t = 0$ qui empêche de se ramener par des transformations régulières à des domaines cylindriques sans l'apparition de quelques termes dégénérés dans l'équation parabolique, voir par exemple Sadallah [51]. C'est l'hypothèse Ω_0 est vide qui est à l'origine de cette situation singulière pour les problèmes d'évolution.

Il est bien connu qu'il existe deux approches principales pour l'étude des problèmes aux limites pour les équations paraboliques dans de tels domaines non réguliers. Nous pouvons travailler directement dans les domaines non réguliers et nous obtenons des solutions singulières (voir par exemple [32], [36], [37] et [52]), ou bien nous imposons des conditions sur les domaines non réguliers pour obtenir des solutions régulières (voir par exemple [27], [30], [46] et [51]). C'est la deuxième approche que nous suivons dans ce travail. En effet, nous nous sommes intéressés à la question, quelles sont les conditions (suffisantes) que nous devons imposer sur les ouverts non réguliers Q pour que l'opérateur $\mathcal{L} = \partial_t + (-1)^m \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j}^{2m}, m \in \mathbb{N}^*$ soit un isomorphisme de $H_\omega^{1,2m}(Q)$ dans $L_\omega^2(Q)$, où

$$H_\omega^{1,2m}(Q) = \{u : \partial_t u, \partial^\alpha u \in L_\omega^2(Q), |\alpha| \leq 2m\}$$

avec

$$\alpha = (i_1, i_2, \ldots, i_N) \in \mathbb{N}^N, |\alpha| = i_1 + i_2 + \cdots + i_N, \partial^\alpha u = \partial_{x_1}^{i_1} \partial_{x_2}^{i_2} \ldots \partial_{x_N}^{i_N} u$$

et $L^2_\omega(Q)$ représente l'espace des fonctions de carré intégrable sur Q avec la mesure $\omega(t) dt dx_1 dx_2 \ldots dx_N$ (où ω est une fonction réelle positive définit sur $[0, T]$). En d'autres termes quelles sont les conditions suffisantes (aussi minimales que possible) qui doivent être imposées aux fonctions φ et ω qui assurent une régularité maximale de la solution du problème (1), dans l'espace de Sobolev anisotrope $H_\omega^{1,2m}(Q)$.

La méthode qui sera utilisée dans notre étude est basée sur la technique de décomposition des domaines. En premier lieu, nous approximons le domaine Q par une suite de domaines tronqués $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

$$Q_n = \{(t, x_1, x_2, \ldots, x_N) \in Q : \frac{1}{n} < t < T\}.$$

Puis, nous établirons une estimation uniforme du type

$$\|u_n\|_{H_\omega^{1,2m}(Q_n)} \leq K \|f\|_{L^2_\omega(Q)}$$

où u_n est une solution de l'équation (1) (associée à des conditions aux limites) dans Q_n et K est une constante indépendante de n. Cette estimation uniforme nous garantira l'existence de la solution de l'équation (1) (associée à des conditions aux limites).

L'étude des problèmes aux limites de type parabolique d'ordre deux (correspondant à $m = 1$ dans l'équation (1), par exemple) dans des domaines non cylindriques a commencé au début du 20ème siècle avec le fameux travail de M. Gevrey [21] en 1913. Gevrey a montré qu'il existe une solution classique si les fonctions de paramétrisation du domaine (non cylindrique) sont höldérienne et d'exposant (de höldérianité) supérieur à $1/2$. Des résultats de type Gevrey ont été obtenus par I. G. Petrovskii [49], [50], A. N. Tikhonov [56], G. Fichera [19] et J. L. Lions [43]. De 1960 à nos jours, plusieurs travaux sur le même thème ont été publiés. Nous pouvons citer : Kondrat'ev [36], Landis [42], Grisvard [24], Maghnoudji [46], Savaré [54], Aref'ev et Bagirov [3], Hofmann et Lewis [26], Labbas, Medeghri et Sadallah [38], [39], Alkhutov [2], Kheloufi et al. [31].

Concernant les problèmes paraboliques d'ordre supérieur ($m > 2$) dans des domaines non cylindriques, il semble que c'est Mikhailov [47], [48] qui, le premier, a étudié ce type de problèmes dans le cadre fonctionnel des espaces de Sobolev. Depuis, plusieurs travaux ont été réalisés, nous pouvons citer : Baderko [4], [5] et [6], Cherepova [10], [11] et [12], Sadallah [51] et [52], Di Cristo [16], Galaktionov [20], Grimaldi [22], Kheloufi et al. [30] et [35].

Cette thèse comporte, en plus de cette introduction, trois chapitres et une conclusion.

Le premier chapitre est consacré aux rappels et définitions utiles dans les chapitres ultérieurs. Nous commencerons par donner les définitions de quelques espaces fonctionnels, notamment les espaces de Sobolev anisotropes qui sont les espaces naturels adaptés à l'étude des problèmes paraboliques. Dans la deuxième section, nous donnerons quelques lemmes techniques avec leurs démonstrations. Ces résultats seront très utiles pour la suite de notre travail, notamment dans l'établissement des estimations uniformes. Nous terminerons ce chapitre par la présentation de quelques résultats sur certains problèmes paraboliques modèles.

Dans le deuxième chapitre, nous démontrons un résultat d'existence, d'unicité et de régularité optimale de la solution pour l'équation (1), associée à des conditions aux limites de Cauchy-Dirichlet. Plus exactement, nous considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + (-1)^m \sum\limits_{j=1}^{N} \partial_{x_j}^{2m} u = f \in L^2_\omega(Q), \; m \in \mathbb{N}^*, \\ \\ \partial_\nu^k u\big|_{\partial Q \smallsetminus \Gamma_T} = 0, \; k = 0, ..., m-1, \end{cases} \tag{2}$$

posé dans des domaines coniques symétriques de $\mathbb{R}^{N+1}$:

$$Q = \left\{ (t, x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1} : 0 < t < T, (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \Omega_t \right\},$$

où T est un nombre positif et pour un t fixé dans $]0,T[$, $\Omega_t \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné défini par :

$$\Omega_t = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : 0 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2} < \varphi(t) \right\}.$$

Ici, φ est une fonction réelle, définie et lipschitzienne sur $[0,T]$ et telle que

$$\varphi(0) = 0 \text{ et } \; \varphi(t) > 0 \text{ pour tout } t \in]0,T].$$

Dans le problème (2), ∂Q est le bord de Q, Γ_T est la partie du bord de Q où $t = T$, ∂_ν représente l'opérateur dérivé normal et $L^2_\omega(Q)$ est l'espace des fonctions de carré intégrable sur Q muni de la mesure $\omega dt dx_1 dx_2 \ldots dx_N$, où le poids ω est une fonction strictement positive, définie sur $[0,T]$ et dérivable sur $]0,T]$.

Sous certaines conditions sur la fonction de paramétrisation φ et sur la fonction poids ω, nous montrons que le problème (2) admet une unique solution dans l'espace de Sobolev anisotrope

$$H^{1,2m}_{0,\omega}(Q) := \left\{ u \in H^{1,2m}_\omega(Q) : \partial_\nu^k u\big|_{\partial Q \smallsetminus \Gamma_T} = 0, \; k = 0, ..., m-1 \right\},$$

avec

$$H^{1,2m}_\omega(Q) = \left\{ u : \partial_t u, \partial^\alpha u \in L^2_\omega(Q), |\alpha| \leq 2m \right\}$$

où

$$\alpha = (i_1, i_2, \ldots, i_N) \in \mathbb{N}^N, |\alpha| = i_1 + i_2 + \cdots + i_N, \partial^\alpha u = \partial_{x_1}^{i_1} \partial_{x_2}^{i_2} \ldots \partial_{x_N}^{i_N} u.$$

L'espace $H^{1,2m}_\omega(Q)$ est muni de la norme naturelle

$$\|u\|_{H^{1,2m}_\omega(Q)} = \left(\|\partial_t u\|^2_{L^2_\omega(Q)} + \sum_{|\alpha| \leq 2m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2_\omega(Q)} \right)^{1/2}.$$

La méthode utilisée pour démontrer ce résultat consiste à montrer que le problème (2) admet une unique solution lorsque Q est remplacé par le domaine tronqué

$$Q_n = \{(t, x_1, x_2, \ldots, x_N) \in Q : \frac{1}{n} < t < T\},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Ensuite nous approximons Q par une suite de tels domaines $(Q_n), n \in \mathbb{N}^*$, et nous établirons (dans le cas où T est suffisamment petit) une estimation uniforme du type

$$\|u_n\|_{H^{1,2m}_\omega(Q_n)} \leq K \|f\|_{L^2_\omega(Q)}$$

où u_n est la solution du problème (2) dans Q_n et K est une constante indépendante de n. Finalement, nous construisons en premier lieu une solution u du problème (2), en considérant $\widetilde{u_n}$ le prolongement par 0 à Q des solutions u_n, et en montrant que $\widetilde{u_{n_k}} \rightharpoonup u$, faiblement dans $L^2_\omega(Q)$, pour une suite croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$. En second lieu, nous étendons le résultat local en temps à un résultat global en temps en utilisant un résultat de trace.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'équation (1) associée à des conditions aux limites de type mixte. Plus exactement, nous considérons les deux problèmes aux limites suivants :

$$\begin{cases} \partial_t u + (-1)^m \partial_x^{2m} u = f_1 \in L^2_\omega(\Omega), \\ \partial_x^k u\big|_{\Gamma_1} = 0,\ k = 0, 1, ..., m-1, \\ \partial_x^l u\big|_{\Gamma_2} = 0,\ \ l = m, m+1, ..., 2m-1, \end{cases} \tag{3}$$

et

$$\begin{cases} \partial_t v + (-1)^m \partial_x^{2m} v = f_2 \in L^2_\omega(\Omega), \\ \partial_x^k v\big|_{\Gamma_2} = 0,\ k = 0, 1, ..., m-1, \\ \partial_x^l v\big|_{\Gamma_1} = 0,\ \ l = m, m+1, ..., 2m-1, \end{cases} \tag{4}$$

posés dans le domaine non rectangulaire

$$\Omega = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T, \varphi_1(t) < x < \varphi_2(t)\right\},$$

où T est un nombre positif, φ_1 et φ_2 sont deux fonctions réelles définies et lipschitziennes sur $[0, T]$, et telles que

$$\varphi(t) := \varphi_2(t) - \varphi_1(t) > 0,\ \text{pour chaque } t \in]0, T] \text{ et } \varphi(0) = 0.$$

Dans les problèmes (3) et (4), $\Gamma_i, i = 1, 2$ est la frontière latérale de Ω définie par

$$\Gamma_i = \left\{(t, \varphi_i(t)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T\right\}$$

et $L^2_\omega(\Omega)$ désigne l'espace de fonctions de carré intégrable sur Ω muni de la mesure $\omega\ dt\ dx$, où ω est une fonction réelle définie sur $[0, T]$, dérivable sur $]0, T]$ et telle que

$$\forall t \in [0, T] : \omega(t) > 0.$$

Sous certaines conditions sur les fonctions de paramétrisation φ_1 et φ_2 et sur la fonction poids ω, nous montrons que le problème (3) (respectivement, (4)) admet une unique solution, avec une régularité optimale, à savoir une solution u (respectivement, v) appartenant à l'espace de Sobolev anisotrope

$$\mathcal{H}_{\gamma,\omega}^{1,2m}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{H}_{\omega}^{1,2m}(\Omega) : \begin{array}{l} \partial_x^k u\big|_{\Gamma_1} = \partial_x^l u\big|_{\Gamma_2} = 0, \\ k = 0, 1, ..., m-1; \; l = m, ..., 2m-1 \end{array} \right\},$$

(respectivement,

$$\mathcal{H}_{\delta,\omega}^{1,2m}(\Omega) = \left\{ v \in \mathcal{H}_{\omega}^{1,2m}(\Omega) : \begin{array}{l} \partial_x^k v\big|_{\Gamma_2} = \partial_x^l v\big|_{\Gamma_1} = 0, \\ k = 0, 1, \ldots, m-1; \; l = m, \ldots, 2m-1 \end{array} \right\}),$$

avec

$$\mathcal{H}_{\omega}^{1,2m}(\Omega) = \left\{ w \in L_{\omega}^2(\Omega) : \partial_t w, \partial_x^j w \in L_{\omega}^2(\Omega), j = 1, 2, \ldots, 2m \right\}.$$

L'espace $\mathcal{H}_{\omega}^{1,2m}(\Omega)$ est muni de la norme naturelle

$$\|w\|_{\mathcal{H}_{\omega}^{1,2m}(\Omega)} = \left(\|\partial_t w\|_{L_{\omega}^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=0}^{2m} \left\|\partial_x^j w\right\|_{L_{\omega}^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

La méthode utilisée pour démontrer ces résultats repose sur une approximation du domaine non rectangulaire Ω par des domaines se ramenant à des domaines rectangulaires par des changements de variables réguliers. Moyennant des estimations uniformes, nous démontrons l'existence et l'unicité des solutions des problèmes (3) et (4) en utilisant la méthode de recollement des solutions.

Nous terminons cette thèse par une conclusion et des perspectives.

Chapitre 1

Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. En premier lieu, nous rappelons quelques définitions concernant quelques espaces fonctionnels, notamment les espaces de Sobolev anisotropes. Par suite, nous démontrons quelques lemmes techniques. Finalement, nous présentons quelques résultats sur certains problèmes paraboliques modèles. Pour plus de détails, on pourra consulter [8], [18], [23] et [45].

1.1 Espaces fonctionnels

Espaces de Sobolev

Considérons Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.1.1. On définit l'espace de Sobolev d'ordre $m, m \in \mathbb{N}$, sur $L^p(\Omega), 1 \leq p < +\infty$ que l'on note $W^{m,p}(\Omega)$ par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{tel que } |\alpha| \leq m\}$$

où

$$\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_N) \in \mathbb{N}^N, |\alpha| = i_1 + i_2 + \cdots + i_N, D^\alpha u = \partial_{x_1}^{i_1} \partial_{x_2}^{i_2} \dots \partial_{x_N}^{i_N} u.$$

Toutes les dérivées ici sont au sens des distributions, c'est à dire $D^\alpha u = \partial_{x_1}^{i_1} \partial_{x_2}^{i_2} \dots \partial_{x_N}^{i_N} u = v$ est la dérivée d'ordre α dans le sens suivant :

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

où $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à supports compacts dans Ω. Muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Remarque 1.1.1. Lorsque $p = 2$, nous notons

$$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega).$$

Muni du produit scalaire

$$< u, v >_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} < D^\alpha u, D^\alpha v >_{L^2(\Omega)},$$

$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Définition 1.1.2. Espaces $H_0^1, W_0^{m,p}$

1. On appelle $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

2. Pour $m > 0$ et $1 \leq p < +\infty$, on définit le sous espace $W_0^{m,p}$ de $W^{m,p}$ comme l'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}$:

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

où $C_0^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à supports compactes dans Ω.

Lemme 1.1.1. *Si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ et $\widetilde{u}$ est définie par*

$$\widetilde{u} := \begin{cases} u, & \text{dans } \Omega \\ 0, & \text{dans } \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

alors $\widetilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

La démonstration de ce résultat peut être trouvée dans [1].

Espaces de Sobolev anisotropes

Nous introduisons ici les espaces de Sobolev dit anisotropes construits sur l'espace de Lebesgue des fonctions de carré intégrable L^2. Ces espaces fonctionnels sont les espaces naturels adoptés dans l'étude des équations paraboliques et ils sont différents de ceux utilisés dans l'étude des équations elliptiques puisque la variable d'espace x et la variable de temps t jouent des rôles différents dans les équations paraboliques. Pour plus de détails concernant ces espaces, voir [45]. Soit X un espace de Banach, commençons d'abord par définir les espaces $L^p(0, T; X)$.

Définition 1.1.3. Soit T un nombre positif, pour $p \in [1, +\infty[$, $L^p(0,T;X)$ dénote l'espace des classes de fonctions $f :]0,T[\longrightarrow X$ qui sont mesurables et telles que

$$\left(\int_0^T |f(t)|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T |f(t)|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.1.4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on définit

$$H^s(0,T;L^2(\Omega)) = \{u \mid \quad D^\alpha u \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \forall |\alpha| \leq s\}$$

où s est un entier positif.
C'est espace de Hilbert muni de la norme

$$\|u\|_{H^s(0,T;L^2(\Omega))} = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \int_0^T \|D^\alpha u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \, dt \right)^{1/2}.$$

Définition 1.1.5. Soient r et s deux entiers positifs. Pour Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on définit

$$H^{r,s}(]0,T[\times\Omega) = L^2(0,T;H^r(\Omega)) \cap H^s(0,T;L^2(\Omega)),$$

qui est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit de la norme

$$\|u\|_{H^{r,s}(]0,T[\times\Omega)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^2_{H^r(\Omega)} \, dt + \|u\|^2_{H^s(0,T;L^2(\Omega))} \right)^{1/2}.$$

$H^r(\Omega)$ et $H^s(0,T;L^2(\Omega))$ sont les espaces définis précédemment.

Le résultat suivant concernant les espaces de Sobolev usuels $H^{2m}, m \in \mathbb{N}$, peut être étendu aux espaces de Sobolev anisotropes $H^{1,2m}$.

Théorème 1.1.1. *[23] Soient Q un ouvert de $\mathbb{R}^N$, borné de frontière lipschitzienne et Q_1, Q_2 deux sous-ensembles ouverts de Q de frontières lipschitziennes, tels que*

$$\begin{aligned} \overline{Q_1} \cup \overline{Q_2} &= \overline{Q}, \\ Q_1 \cap Q_2 &= \emptyset. \end{aligned}$$

On note $\Gamma = \partial Q_1 \cap \partial Q_2$. Soient $u_1 \in H^{2m}(Q_1)$ et $u_2 \in H^{2m}(Q_2)$ satisfaisant

$$\partial^k_{x_j} u_1 = \partial^k_{x_j} u_2 \ \text{ sur } \Gamma, \ j = 1, \ldots, N, \ k = 0, 1, \ldots, 2m.$$

Alors la fonction u définie par

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{dans } Q_1 \\ u_2 & \text{dans } Q_2, \end{cases}$$

appartient à $H^{2m}(Q)$.

Démonstration. Il est clair que $u \in L^2(Q)$. Pour chaque $j \in \{1, 2, ..., N\}, k = 0, 1, ..., 2m$ et pour $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ une fonction test fixée, nous avons

$$\begin{aligned} < \partial_{x_j}^k u, \varphi > &= (-1)^k < u, \partial_{x_j}^k \varphi > \\ &= (-1)^k \int_{Q_1} u_1.\partial_{x_j}^k \varphi dx + (-1)^k \int_{Q_2} u_2.\partial_{x_j}^k \varphi dx. \end{aligned}$$

Pour $i = 1, 2$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{Q_i} u_i.\partial_{x_j}^k \varphi dx &= -\int_{Q_i} \partial_{x_j} u_i.\partial_{x_j}^{k-1} \varphi dx + \int_\Gamma u_i.\partial_{x_j}^{k-1} \varphi \nu_j^i dx \\ &= +\int_{Q_i} \partial_{x_j}^2 u_i.\partial_{x_j}^{k-2} \varphi dx - \int_\Gamma \partial_{x_j} u_i.\partial_{x_j}^{k-2} \varphi \nu_j^i dx + \int_\Gamma u_i.\partial_{x_j}^{k-1} \varphi \nu_j^i dx \\ &\vdots \\ &= (-1)^k \int_{Q_i} \partial_{x_j}^k u_i.\varphi dx + (-1)^{k-1} \int_\Gamma \partial_{x_j}^{k-1} u_i.\varphi \nu_j^i dx \\ &\quad +... - \int_\Gamma \partial_{x_j} u_i.\partial_{x_j}^{k-2} \varphi \nu_j^i dx + \int_\Gamma u_i.\partial_{x_j}^{k-1} \varphi \nu_j^i dx \\ &= (-1)^k \int_{Q_i} \partial_{x_j}^k u_i.\varphi dx + \int_\Gamma \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p \partial_{x_j}^p u_i.\partial_{x_j}^{k-1-p} \varphi \nu_j^i dx \end{aligned}$$

car φ est nulle sur $\partial Q_i \backslash \Gamma$, ici ν^i est le vecteur normal extérieur à ∂Q_i. Comme $\nu^2 = -\nu^1$ sur Γ, donc nous aurons

$$\begin{aligned} < \partial_{x_j}^k u, \varphi > &= \int_{Q_1} \partial_{x_j}^k u_1.\varphi dx + \int_{Q_2} \partial_{x_j}^k u_2.\varphi dx \\ &\quad + (-1)^k \int_\Gamma \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p \left(\partial_{x_j}^p u_1 - \partial_{x_j}^p u_2 \right) .\partial_{x_j}^{k-1-p} \varphi \nu_j^1 dx. \end{aligned}$$

L'intégrale sur Γ s'annule, donc nous obtenons pour $k = 0, \ldots, 2m$

$$\partial_{x_j}^k u = \begin{cases} \partial_{x_j}^k u_1 & \text{dans } Q_1 \\ \partial_{x_j}^k u_2 & \text{dans } Q_2. \end{cases}$$

Comme chaque $\partial_{x_j}^k u_i$ appartient à $L^2(Q_i)$, nous concluons que $\partial_{x_j}^k u \in L^2(Q),\ k = 0, ..., 2m.$ $\square$

1.2 Lemmes techniques

Le résultat suivant est bien connu (voir, par exemple, [45])

Lemme 1.2.1. *Soit $B(0,1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^N$. Alors, l'opérateur*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{A}: & H^{2m}(B(0,1)) \cap H_0^m(B(0,1)) & \longrightarrow & L^2(B(0,1)) \\ & v & \longmapsto & \mathcal{A}v = (-1)^m \sum_{j=1}^N \partial_{x_j}^{2m} v \end{array}$$

est un isomorphisme. De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|_{H^{2m}(B(0,1))} \leq C \|\mathcal{A}v\|_{L^2(B(0,1))}, \forall v \in H^{2m}(B(0,1)) \cap H_0^m(B(0,1)).$$

Dans le lemme ci-dessus, H^{2m} et H_0^m sont les espaces de Sobolev usuels définis, par exemple, dans Lions-Magenes [45].

Lemme 1.2.2. *Il existe une constante positive K_1 telle que pour chaque $(u,v) \in H_\gamma^{2m}(0,1) \times H_\delta^{2m}(0,1)$,*

$$\left\|u^{(j)}\right\|_{L^2(0,1)} \leq K_1 \left\|u^{(2m)}\right\|_{L^2(0,1)} \text{ et } \left\|v^{(j)}\right\|_{L^2(0,1)} \leq K_1 \left\|v^{(2m)}\right\|_{L^2(0,1)},$$

$j = 0, 1, ..., 2m-1$, où

$$H_\gamma^{2m}(0,1) = \left\{ u \in H^{2m}(0,1) : \begin{array}{l} u^{(k)}(0) = u^{(l)}(1) = 0, \\ k = 0, 1, ..., m-1; \ l = m, ..., 2m-1 \end{array} \right\},$$

et

$$H_\delta^{2m}(0,1) = \left\{ v \in H^{2m}(0,1) : \begin{array}{l} v^{(k)}(1) = v^{(l)}(0) = 0, \\ k = 0, 1, ..., m-1; \ l = m, ..., 2m-1 \end{array} \right\}.$$

Ici, $w^{(j)}$, $j = 1, 2, ..., 2m$ est la dérivée d'ordre j de w sur $(0,1)$ et $w^{(0)} = w$.

Démonstration. Soient h_1 et h_2 deux éléments quelconques de $L^2(0,1)$. Toute solution de l'équation différentielle ordinaire $u^{(2m)} = h_1$, (respectivement, $v^{(2m)} = h_2$,) est de la forme

$$u(x) = \int_0^x \int_0^{x_{2m-1}} \int_0^{x_{2m-2}} ... \int_0^{x_1} h_1(s)\, ds dx_1 ... dx_{2m-2} dx_{2m-1} + \sum_{j=0}^{2m-1} \frac{u^{(j)}(0)}{j!} x^j,$$

$x \in [0,1]$, (respectivement,

$$v(x) = \int_0^x \int_0^{x_{2m-1}} \int_0^{x_{2m-2}} ... \int_0^{x_1} h_2(s)\, ds dx_1 .... dx_{2m-2} dx_{2m-1} + \sum_{j=0}^{2m-1} \frac{v^{(j)}(0)}{j!} x^j,$$

$x \in [0,1]$). Les constantes $u^{(j)}(0)$, $j = 0, 1, ..., 2m-1$, (respectivement, $v^{(j)}(0), j = 0, 1, ..., 2m-1$) sont à déterminer de manière unique de sorte que les conditions aux limites $u^{(k)}(0) = u^{(l)}(1) = 0$, (respectivement, $v^{(k)}(1) = v^{(l)}(0) = 0$) $k = 0, 1, ..., m-1$; $l = m, m+1, ..., 2m-1$, soient satisfaites.

De la représentation précédente de la solution ainsi que de celles de ses dérivées

$$u^{(2m-p)}(x) = \int_0^x \int_0^{x_{p-1}} \cdots \int_0^{x_1} h_1(s)\, ds dx_1 \ldots dx_{p-1} + \sum_{q=0}^{p-1} \frac{1}{q!} u^{(2m+q-p)}(0)\, x^q,$$

$x \in [0,1]$, (respectivement,

$$v^{(2m-p)}(x) = \int_0^x \int_0^{x_{p-1}} \cdots \int_0^{x_1} h_2(s)\, ds dx_1 \ldots dx_{p-1} + \sum_{q=0}^{p-1} \frac{1}{q!} v^{(2m+q-p)}(0)\, x^q,$$

$x \in [0,1]$) pour $p = 1, 2, \ldots, 2m$, et à partir des conditions aux limites, nous obtenons le système suivant :

$$AX = b$$

avec $A = (a_{ij})$ est une matrice triangulaire supérieure, $X = (X_i)$, $b = (b_i)$ pour $i, j = 0, 1, \ldots, 2m-1$, où

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j;\ i, j = 1, \ldots, m-1 \\ \frac{1}{(j-i)!} & \text{si } i < j;\ i = 0, \ldots, 2m-2;\ j = m, \ldots, 2m-1 \\ -1 & \text{si } i = j;\ i = 0, ..., m-1 \\ 1 & \text{si } i = j;\ i = m, ..., 2m-1 \\ 0 & \text{si } i > j, \end{cases}$$

$$X_i = \begin{cases} u^{(i)}(1) & \text{si } i = 0, \ldots, m-1 \\ u^{(i)}(0) & \text{si } i = m, \ldots, 2m-1 \end{cases}$$

et

$$b_i = -\int_0^1 \int_0^{x_{2m-i-1}} \ldots \int_0^{x_1} h_1(s)\, ds dx_1 \ldots dx_{2m-i-1},\ i = 0, \ldots, 2m-1$$

(respectivement,

$$BY = b'$$

avec $B = (b_{ij})$ est une matrice triangulaire inférieure, $Y = (Y_i)$, $b' = (b'_i)$ pour $i, j = 0, 1, \ldots, 2m-1$, où

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ -1 & \text{si } i = j;\ i = 0, \ldots, m-1 \\ 1 & \text{si } i = j;\ i = m, \ldots, 2m-1 \\ 0 & \text{si } i > j;\ i = 1, \ldots, m-1;\ j = 0, \ldots, m-1 \\ \frac{1}{(i-j)!} & \text{si } i > j;\ i = m+1, \ldots, 2m-1;\ j = m, \ldots, 2m-2, \end{cases}$$

$$Y_i = \begin{cases} v^{(2m-i-1)}(1) & \text{si } i = 0, \ldots, m-1 \\ v^{(2m-i-1)}(0) & \text{si } i = m, \ldots, 2m-1 \end{cases}$$

et

$$b'_i = -\int_0^1 \int_0^{x_i} \ldots \int_0^{x_1} h_2(s)\, ds dx_1 \ldots dx_i,\ i = 0, \ldots, 2m-1).$$

Finalement, l'unique solution du problème

$$\begin{cases} u^{(2m)} = h_1, \\ u^{(k)}(0) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, m-1, \\ u^{(l)}(1) = 0,\ l = m, \ldots, 2m-1, \end{cases}$$

(respectivement,

$$\begin{cases} v^{(2m)} = h_2, \\ v^{(k)}(1) = 0, \ k = 0, 1, \ldots, m-1, \\ v^{(l)}(0) = 0, \ l = m, \ldots, 2m-1,) \end{cases}$$

est donnée par

$$u(x) = \int_0^x \int_0^{x_{2m-1}} \int_0^{x_{2m-2}} \ldots \int_0^{x_1} h_1(s)\, ds dx_1 \ldots dx_{2m-2} dx_{2m-1} + \sum_{j=m}^{2m-1} \frac{u^{(j)}(0)}{j!} x^j,$$

$x \in [0,1]$, (respectivement,

$$v(x) = \int_0^x \int_0^{x_{2m-1}} \int_0^{x_{2m-2}} \ldots \int_0^{x_1} h_2(s)\, ds dx_1 \ldots dx_{2m-2} dx_{2m-1} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{v^{(j)}(0)}{j!} x^j,$$

$x \in [0,1]$,) où

$$u^{(2m-p)}(0) = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{k+1} \int_0^1 \int_0^{x_{p-k-1}} \ldots \int_0^{x_1} h_1(s)\, ds dx_1 \ldots dx_{p-k-1},$$

pour $p = 1, \ldots, m$, (respectivement,

$$v^{(2m-p)}(0) = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{k+1} \int_0^1 \int_0^{x_{p-k-1}} \ldots \int_0^{x_1} h_2(s)\, ds dx_1 \ldots dx_{p-k-1},$$

pour $p = m+1, \ldots, 2m$).

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \left| u^{(k)}(0) \right| &\leq C \|h_1\|_{L^2(0,1)}, \ k = m, m+1, \ldots, 2m-1 \\ \left| u^{(l)}(1) \right| &\leq C \|h_1\|_{L^2(0,1)}, \ l = 0, 1, \ldots, m-1, \end{aligned}$$

(respectivement,

$$\begin{aligned} \left| v^{(k)}(1) \right| &\leq C \|h_2\|_{L^2(0,1)}, \ k = m, m+1, \ldots, 2m-1 \\ \left| v^{(l)}(0) \right| &\leq C \|h_2\|_{L^2(0,1)}, \ l = 0, 1, \ldots, m-1,) \end{aligned}$$

où C est une constante positive, ce qui nous permettra d'obtenir les estimations souhaitées. $\square$

Lemme 1.2.3. *Il existe une constante positive K_2 (indépendante de a et b) telle que pour chaque $(u,v) \in H_\gamma^{2m}(a,b) \times H_\delta^{2m}(a,b)$,*

$$\left\| u^{(k)} \right\|_{L^2(a,b)}^2 \leq K_2 (b-a)^{2(2m-k)} \left\| u^{(2m)} \right\|_{L^2(a,b)}^2, \ k = 0, \ldots, 2m-1$$

et

$$\left\| v^{(k)} \right\|_{L^2(a,b)}^2 \leq K_2 (b-a)^{2(2m-k)} \left\| v^{(2m)} \right\|_{L^2(a,b)}^2, \ k = 0, \ldots, 2m-1,$$

où
$$H_{\gamma}^{2m}(a,b)=\left\{u\in H^{2m}(a,b):\begin{array}{l}u^{(k)}(a)=u^{(l)}(b)=0,\\ k=0,\ldots,m-1;\ l=m,\ldots,2m-1\end{array}\right\},$$
et
$$H_{\delta}^{2m}(a,b)=\left\{v\in H^{2m}(a,b):\begin{array}{l}v^{(k)}(b)=v^{(l)}(a)=0,\\ k=0,\ldots,m-1;\ l=m,\ldots,2m-1\end{array}\right\}.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du lemme 1.2.2 en utilisant le changement de variable affine suivant :

$$[0,1]\longrightarrow[a,b],\ x\mapsto(1-x)\,a+xb=y.$$

En effet, posons $w(x)=u(y)$. Donc si $w\in H_{\gamma}^{2m}(0,1)$, u appartient à $H_{\gamma}^{2m}(a,b)$. Nous avons pour $k\in\{0,1,...,2m-1\}$

$$\begin{array}{rcl}\left\|w^{(k)}\right\|_{L^2(0,1)}^2 & = & \int_0^1\left(w^{(k)}\right)^2(x)\,dx\\ & = & \int_a^b\left(u^{(k)}\right)^2(y)\,(b-a)^{2k}\frac{dy}{b-a}\\ & = & \int_a^b\left(u^{(k)}\right)^2(y)\,(b-a)^{2k-1}dy\\ & = & (b-a)^{2k-1}\left\|u^{(k)}\right\|_{L^2(a,b)}^2.\end{array}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{array}{rcl}\left\|w^{(2m)}\right\|_{L^2(0,1)}^2 & = & \int_0^1\left(w^{(2m)}\right)^2(x)\,dx\\ & = & \int_a^b\left(u^{(2m)}\right)^2(y)\,(b-a)^{4m-1}dy\\ & = & (b-a)^{4m-1}\left\|u^{(2m)}\right\|_{L^2(a,b)}^2.\end{array}$$

En utilisant l'inégalité

$$\left\|w^{(k)}\right\|_{L^2(0,1)}^2\ \le\ K_2\left\|w^{(2m)}\right\|_{L^2(0,1)}^2$$

du lemme 1.2.2, nous obtenons l'inégalité souhaitée, à savoir

$$\left\|u^{(k)}\right\|_{L^2(a,b)}^2\ \le\ K_2\,(b-a)^{2(2m-k)}\left\|u^{(2m)}\right\|_{L^2(a,b)}^2,\ k=0,1,\ldots,2m-1,$$

avec $K_2=K_1^2$. De la même manière nous pouvons démontrer l'inégalité

$$\left\|v^{(k)}\right\|_{L^2(a,b)}^2\le K_2\,(b-a)^{2(2m-k)}\left\|v^{(2m)}\right\|_{L^2(a,b)}^2,\ k=0,\ldots,2m-1.$$

□

Remarque 1.2.1. Dans les lemmes 1.2.2 et 1.2.3 nous pouvons remplacer $\|.\|_{L^2}$ par $\|.\|_{L^2_\omega}$, où $L^2_\omega(a,b)$ représente l'espace de Lebesgue des fonctions de carré intégrable sur (a,b) muni de la mesure $\omega(t)\,dt$. Ici, le poids ω est une fonction réelle définie sur (a,b) et telle que

$$\forall t\in(a,b),\ \omega(t)>0.$$

1.3 Problèmes paraboliques modèles

Nous avons les résultats suivants qui sont des conséquences du théorème 4.3 ([45], Vol.2).

Proposition 1.3.1. Soient R le cylindre $]0,T[\times B(0,1)$ où $B(0,1)$ est la boule unité de $\mathbb{R}^N$, $f\in L^2(R)$ et $u_0\in H^m(\gamma_0)$. Alors, le problème

$$\begin{cases} \partial_t u+\mathcal{A}u=f \text{ dans } R,\\ u|_{\gamma_0}=u_0,\\ \partial_\nu^k u\big|_{\gamma_1}=0,\ k=0,...,m-1, \end{cases}$$

où $\mathcal{A}=(-1)^m\sum\limits_{j=1}^{N}\partial_{x_j}^{2m},\ m\in\mathbb{N}^*,\ \gamma_0=\{0\}\times B(0,1)$ et $\gamma_1=]0,T[\times\partial B(0,1)$, admet une solution (unique) $u\in H^{1,2m}(R)$ si et seulement si les conditions de compatibilité suivantes sont satisfaites

$$\partial_\nu^k u_0\big|_{\partial\gamma_0}=0,\ k=0,...,m-1.$$

Proposition 1.3.2. Soient Q le rectangle $]0,T[\times]0,1[$, $l_1,l_2\in L^2_\omega(Q)$ et $\phi_1,\phi_2\in H^m(\gamma_0)$. Alors, les problèmes

$$\begin{cases} \partial_t u+(-1)^m\partial_x^{2m}u=l_1\in L^2(Q),\\ u|_{\gamma_0}=\phi_1,\\ \partial_x^k u\big|_{\gamma_1}=0,\ k=0,\dots,m-1\\ \partial_x^l u\big|_{\gamma_2}=0,\ l=m,\dots,2m-1, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \partial_t v+(-1)^m\partial_x^{2m}v=l_2\in L^2(Q),\\ v|_{\gamma_0}=\phi_2,\\ \partial_x^k v\big|_{\gamma_2}=0,\ k=0,\dots,m-1\\ \partial_x^l v\big|_{\gamma_1}=0,\ l=m,\dots,2m-1, \end{cases}$$

où $\gamma_0=\{0\}\times]0,1[$, $\gamma_1=]0,T[\times\{0\}$ et $\gamma_2=]0,T[\times\{1\}$, admettent des solutions (uniques) $u,v\in\mathcal{H}^{1,2m}(Q)$.

Remarque 1.3.1. Dans l'application du théorème 4.3 ([45], Vol.2), nous pouvons remarquer qu'il n'y a pas de conditions de compatibilité à satisfaire car $\partial_x\phi_1$ et $\partial_x\phi_2$ sont uniquement dans $L^2(\gamma_0)$.

Chapitre 2

Résultats d'existence, d'unicité et de régularité maximale pour une équation parabolique d'ordre $2m$ dans des domaines coniques symétriques de $\mathbb{R}^{N+1}$

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence, l'unicité et la régularité optimale dans des espaces de Sobolev anisotropes de la solution d'une équation parabolique d'ordre supérieur, associée à des conditions de Cauchy-Dirichlet, dans des domaines multidimensionnels symétriques non cylindriques, voir [15]

2.1 Introduction

Soit φ une fonction réelle, définie et lipschitzienne sur $[0, T]$, $T > 0$ et telle que

$$\varphi(0) = 0 \text{ et } \varphi(t) > 0 \text{ pour tout } t \in]0, T].$$

Considérons Q un sous ensemble ouvert de type conique de $\mathbb{R}^{N+1}$, $N > 1$, défini par

$$Q = \left\{(t, x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1} : 0 < t < T, (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \Omega_t\right\},$$

où pour un t fixé dans $]0, T[$, $\Omega_t \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné défini par

$$\Omega_t = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : 0 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2} < \varphi(t)\right\}.$$

Dans Q, nous considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{A}u = f \in L^2_\omega(Q), \\ \\ \partial^k_\nu u\big|_{\partial Q \smallsetminus \Gamma_T} = 0,\ k = 0, ..., m-1, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\mathcal{A} = (-1)^m \sum\limits_{j=1}^{N} \partial^{2m}_{x_j},\ m \in \mathbb{N}^*$, ∂Q est le bord de Q, Γ_T est la partie du bord de Q où $t = T$ et ∂_ν représente l'opérateur dérivé normal. Ici, $L^2_\omega(Q)$ désigne l'espace de Lebesgue des fonctions de carré intégrable sur Q muni de la mesure $\omega dt dx_1 dx_2 \ldots dx_N$, où le poids ω est une fonction à valeurs réelles, définie sur $[0, T]$ et dérivable sur $]0, T]$.

La difficulté liée à ce genre de problèmes provient de la "pointe" en $t = 0$ qui empêche de se ramener par des transformations régulières à des domaines cylindriques sans l'apparition de quelques termes dégénérés dans l'équation parabolique, voir par exemple Sadallah [51]. C'est l'hypothèse $\varphi(0) = 0$ qui est à l'origine de cette situation singulière pour les problèmes d'évolution. D'autre part, le semigroupe générant la solution ne peut pas être défini puisque la condition initiale est définie sur un ensemble de mesure nulle.

Il est bien connu qu'il existe deux lignes principales de résultats pour ce type de problèmes. La première ligne consiste à travailler directement dans les domaines non réguliers et nous obtenons des solutions singulières, voir par exemple [32], [36], [37] et [52]. La deuxième ligne consiste à imposer des conditions sur les domaines non réguliers pour obtenir des solutions régulières, voir par exemple [27], [30], [46] et [51]. C'est cette deuxième ligne que nous suivrons dans ce chapitre. En effet, nous nous intéressons particulièrement à la question de savoir quelles conditions suffisantes, aussi minimales que possible, les fonctions φ et ω doivent vérifier pour que le problème (2.1) admette une unique solution ayant une régularité optimale, c'est à dire une solution u appartenant à l'espace de Sobolev anisotrope

$$H^{1,2m}_{0,\omega}(Q) := \left\{ u \in H^{1,2m}_\omega(Q) : \partial^k_\nu u\big|_{\partial Q \smallsetminus \Gamma_T} = 0,\ k = 0, ..., m-1 \right\},$$

avec

$$H^{1,2m}_\omega(Q) = \{u : \partial_t u, \partial^\alpha u \in L^2_\omega(Q), |\alpha| \le 2m\}$$

où

$$\alpha = (i_1, i_2, \ldots, i_N) \in \mathbb{N}^N, |\alpha| = i_1 + i_2 + \cdots + i_N, \partial^\alpha u = \partial^{i_1}_{x_1} \partial^{i_2}_{x_2} \ldots \partial^{i_N}_{x_N} u.$$

L'espace $H^{1,2m}_\omega(Q)$ est muni de la norme naturelle

$$\|u\|_{H^{1,2m}_\omega(Q)} = \left(\|\partial_t u\|^2_{L^2_\omega(Q)} + \sum_{|\alpha| \le 2m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2_\omega(Q)} \right)^{1/2}.$$

Le cas $m = 1$ correspondant à une équation parabolique du second ordre a été étudié dans [53] et [33] dans les deux cas bidimensionnel et multidimensionnel, respectivement. Dans [35], le problème (2.1) a été étudié dans le cas $N = 2$. Bien que les équations paraboliques du second ordre dans des domaines non réguliers sont largement étudiées, la littérature concernant les problèmes paraboliques d'ordre supérieur dans des domaines non cylindriques ne semble pas être très riche. Nous pouvons trouver dans [51] une étude de ce genre de problèmes dans le cas planaire. Dans [22] les auteurs ont obtenu des résultats d'existence et d'unicité pour la solution d'un problème aux limites pour l'équation parabolique

$$\mathcal{L}u = \partial_t u + (-1)^m \left(\sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j}^{2m} + \partial_{x_{N+1}}^{2m} \right) u = f$$

dans un domaine non cylindrique par rapport à une variable spatiale. Plus précisément, le domaine spatial considéré est

$$D = \left\{ (x, x_{N+1}) : x \in \mathbb{R}^N, \alpha_1(x) < x_{N+1} < \alpha_2(x) \right\}$$

avec $\alpha_k \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $k \in \{1, 2\}$. Il existe d'autres références sur l'analyse des problèmes paraboliques d'ordre supérieur dans des domaines non cylindriques. Nous pouvons citer : Baderko [4], Cherepova [10], Labbas et Sadallah [40], Galaktionov [20], Mikhailov [47], [48], Kheloufi [28] et Cherfaoui *et al.* [14].

Ce chapitre, est organisé comme suit :
Dans la section 2.2, nous montrons que le problème (2.1) admet une solution (unique) dans le cas de domaines tronqués. Dans la section 2.3, nous établissons (pour T assez petit) une estimation uniforme (dans un sens à définir ultérieurement) pour la solution du problème (2.1) dans de tels domaines tronqués. Enfin, dans la section 2.4, nous démontrons les deux principaux résultats de ce travail.

Les hypothèses principales sur les fonctions φ et ω sont les suivantes :

$$\varphi'(t)\, \varphi^m(t) \quad \to \quad 0 \qquad \text{lorsque} \;\; t \to 0, \quad m \in \mathbb{N}^*, \tag{2.2}$$

$$\omega(t) > 0, \text{ pour tout } t \in [0, T], \tag{2.3}$$

et

$$\omega \text{ est une fonction décroissante sur } \;]0, T]. \tag{2.4}$$

Notons que ce travail peut être généralisé dans les directions suivantes :

1. La fonction f du membre du côté droit de l'équation du problème (2.1), peut être prise dans $L^p_\omega(Q)$, $p \in]1, \infty[$. La méthode de décomposition des domaines utilisée ici ne semble pas être appropriée pour l'espace $L^p_\omega(Q)$ lorsque $p \neq 2$.

2. La fonction φ peut aussi dépendre de $\theta \in (0, 2\pi)$. Donc, le domaine conique Q peut être remplacé par le domaine suivant :

$$\left\{ (t, x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1} : 0 < t < T, 0 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2} < \varphi(t, \theta) \right\},$$

où φ est une fonction réelle, définie et lipschitzienne sur $[0,T] \times [0,2\pi]$ et satisfaisant aux conditions $\varphi(0,\theta) = 0$ pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $\varphi(t,0) = \varphi(t,2\pi)$.

2.2 Résolution du problème (2.1) dans des domaines tronqués Q_n

Dans cette section, nous remplaçons Q par Q_n, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\frac{1}{n} < T$:

$$Q_n = \left\{ (t, x_1, x_2, \ldots, x_N) \in Q : \frac{1}{n} < t < T \right\}.$$

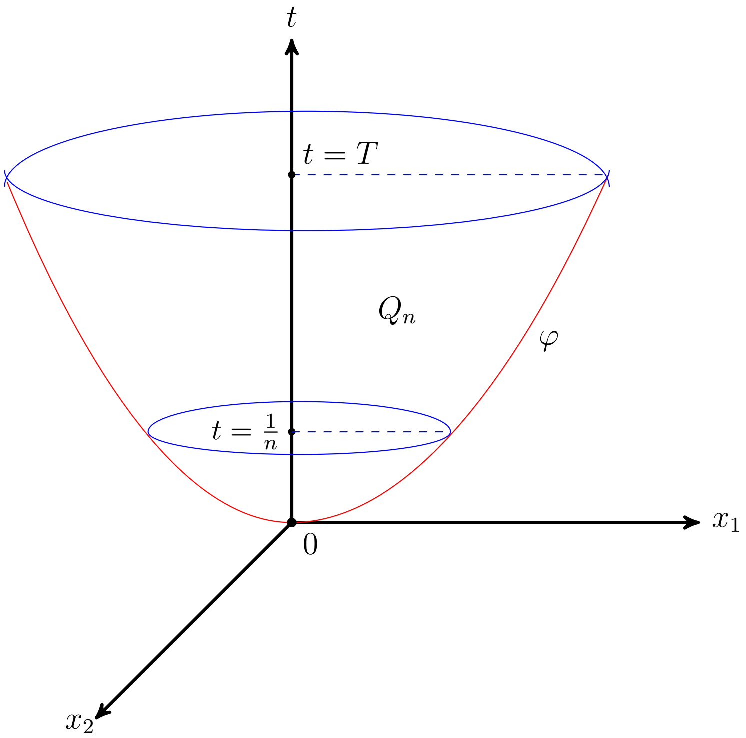

FIGURE 2.1 : LES DOMAINES Q ET Q_n.

Théorème 2.2.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < T$, le problème*

$$\begin{cases} \partial_t u_n + \mathcal{A} u_n = f_n \in L^2_\omega(Q_n), \\ u_n|_{t=\frac{1}{n}} = 0, \\ \partial_\nu^k u_n \big|_{\partial Q_n \smallsetminus (\Gamma_T \cup \{t=\frac{1}{n}\})} = 0, \; k = 0, 1, ..., m-1, \end{cases} \tag{2.5}$$

où $f_n = f|_{Q_n}$, admet une unique solution $u_n \in H^{1,2m}_\omega(Q_n)$.

Démonstration : Le changement de variables

$$(t, x_1, x_2, \ldots, x_N) \mapsto (t, y_1, y_2, \ldots, y_N) = \left(t, \tfrac{x_1}{\varphi(t)}, \tfrac{x_2}{\varphi(t)}, \ldots, \tfrac{x_N}{\varphi(t)}\right)$$

transforme Q_n en le cylindre $P_n = \left]\frac{1}{n}, T\right[\times B(0,1)$, où $B(0,1)$ est la boule unité de $\mathbb{R}^N$. Posons

$$u_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_N) = v_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_N) \text{ et } f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_N) = g_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_N),$$

alors le problème (2.5) est transformé, dans P_n, en le problème parabolique à coefficients variables suivant :

$$\begin{cases} \partial_t v_n + \frac{1}{\varphi^{2m}(t)} \mathcal{A} v_n - \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \sum_{j=1}^N y_j \partial_{y_j} v_n = g_n, \\ v_n|_{t=\frac{1}{n}} = 0, \\ \partial_\nu^k v_n\big|_{\partial P_n \smallsetminus (\Sigma_T \cup \{t=\frac{1}{n}\})} = 0, \ k = 0, 1, ..., m-1, \end{cases}$$

où Σ_T est la partie de la frontière de P_n où $t = T$. Le changement de variables mentionné ci-dessus conserve les espaces L^2_ω et $H^{1,2m}_\omega$ car $\frac{1}{\varphi^{2m}(t)}$ et $-\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$ sont des fonctions bornées lorsque $t \in \left]\frac{1}{n}, T\right[$. En d'autres termes

$$f_n \in L^2_\omega(Q_n) \Longleftrightarrow g_n \in L^2_\omega(P_n) \text{ et } u_n \in H^{1,2m}_\omega(Q_n) \Longleftrightarrow v_n \in H^{1,2m}_\omega(P_n).$$

Proposition 2.2.1. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < T$, l'opérateur suivant est compact :

$$-\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \sum_{j=1}^N y_j \partial_{y_j} : H^{1,2m}_{0,\omega}(P_n) \longrightarrow L^2_\omega(P_n).$$

Démonstration. P_n possède la "propriété de la corne" de Besov (voir [7]). Donc, pour $j = 1, 2, \ldots, N$,

$$\partial_{y_j} : H^{1,2m}_{0,\omega}(P_n) \longrightarrow H^{1-\frac{1}{2m}, 2m-1}_\omega(P_n), \ v \longmapsto \partial_{y_j} v,$$

est continu. Puisque P_n est borné, l'injection canonique est compacte de $H^{1-\frac{1}{2m}, 2m-1}_\omega(P_n)$ dans $L^2_\omega(P_n)$ (voir par exemple [7]), où

$$H^{1-\frac{1}{2m}, 2m-1}(P_n) = L^2\left(\frac{1}{n}, T; H^{2m-1}(B(0,1))\right) \cap H^{1-\frac{1}{2m}}\left(\frac{1}{n}, T; L^2(B(0,1))\right).$$

Pour les définitions complètes des espaces de Sobolev hilbertien $H^{r,s}$, voir par exemple [45].

Considérons la composition

$$\partial_{y_j} : H^{1,2m}_{0,\omega}(P_n) \to H^{1-\frac{1}{2m}, 2m-1}_\omega(P_n) \to L^2_\omega(P_n), \ v \mapsto \partial_{y_j} v \mapsto \partial_{y_j} v,$$

alors ∂_{y_j} est un opérateur compact de $H^{1,2m}_{0,\omega}(P_n)$ dans $L^2_\omega(P_n)$. Comme $-\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$ est une fonction bornée pour $\frac{1}{n} < t < T$, les opérateurs $-\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} y_j \partial_{y_j}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, sont aussi compacts de $H^{1,2m}_{0,\omega}(P_n)$ dans $L^2_\omega(P_n)$. Par conséquent,

$$-\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \sum_{j=1}^N y_j \partial_{y_j}$$

est compact de $H^{1,2m}_{0,\omega}(P_n)$ dans $L^2_\omega(P_n)$. $\square$

Donc, grâce à la proposition 2.2.1 et afin de terminer la démonstration du théorème 2.2.1, il suffit de montrer que l'opérateur

$$\partial_t + \frac{1}{\varphi^{2m}(t)}\mathcal{A}$$

est un isomorphisme de $H^{1,2m}_{0,\omega}(P_n)$ dans $L^2_\omega(P_n)$.

Lemme 2.2.1. *Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < T$, l'opérateur*

$$\partial_t + \frac{1}{\varphi^{2m}(t)}\mathcal{A}$$

est un isomorphisme de $H^{1,2m}_{0,\omega}(P_n)$ dans $L^2_\omega(P_n)$.

Démonstration. Puisque le coefficient $\frac{1}{\varphi^{2m}(t)}$ est borné dans $\overline{P_n}$, la régularité optimale est donnée par Ladyzhenskaya, Solonnikov et Ural'tseva [41]. □

Nous aurons besoin du résultat suivant pour justifier les calculs de cette section.

Lemme 2.2.2. *Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < T$, l'espace*

$$\left\{v_n \in H^{2m}(P_n) : v_n|_{t=\frac{1}{n}} = 0,\ \partial^k_\nu v_n\big|_{\partial P_n \smallsetminus (\Sigma_T \cup \{t=\frac{1}{n}\})} = 0,\ k = 0, 1, ..., m-1\right\}$$

est dense dans

$$\left\{v_n \in H^{1,2m}(P_n) : v_n|_{t=\frac{1}{n}} = 0,\ \partial^k_\nu v_n\big|_{\partial P_n \smallsetminus (\Sigma_T \cup \{t=\frac{1}{n}\})} = 0,\ k = 0, 1, ..., m-1\right\}.$$

Ici, H^{2m} représente l'espace de Sobolev usuel défini, par exemple, dans Lions-Magenes [45].

La démonstration du lemme ci-dessus peut être trouvée dans [45].

Remarque 2.2.1. Dans le lemme 2.2.2, nous pouvons remplacer P_n par Q_n à l'aide du changement de variables défini précédemment.

2.3 Estimation uniforme

Maintenant, nous revenons au domaine conique Q. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < T$, nous notons $f_n = f|_{Q_n}$ et nous considérons $u_n \in H^{1,2m}_\omega(Q_n)$ la solution du problème (2.1) dans Q_n. Une telle solution existe grâce au théorème 2.2.1. Nous montrons l'existence d'une constante $K_1 > 0$ indépendante de n et satisfaisant l'estimation

$$\|u_n\|_{H^{1,2m}_\omega(Q_n)} \leq K_1 \|f_n\|_{L^2_\omega(Q_n)} \leq K_1 \|f\|_{L^2_\omega(Q)}. \tag{2.6}$$

Le résultat suivant est une conséquence directe du lemme 1.2.1.

Lemme 2.3.1. *Pour un $t \in]0,T[$ fixé, il existe une constante $C > 0$ telle que pour chaque $u \in H^{2m}(\Omega_t) \cap H_0^m(\Omega_t)$, nous avons*

$$\left\| \partial_{x_j}^l u \right\|_{L^2(\Omega_t)}^2 \leq C\varphi^{2(2m-l)}(t) \left\| \mathcal{A}u \right\|_{L^2(\Omega_t)}^2, \; l = 0,1,...,2m-1; \; j = 1,2,\ldots,N.$$

Démonstration. Soit $B(0,1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^N$ et pour $t \in]0,T[$, rappelons que

$$\Omega_t = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : 0 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2} < \varphi(t) \right\}.$$

Nous définissons alors le changement de variables suivant :

$$B(0,1) \to \Omega_t, \; (x_1, x_2, \ldots, x_N) \longmapsto (\varphi(t) x_1, \varphi(t) x_2, \ldots, \varphi(t) x_N) = (x_1', x_2', \ldots, x_N').$$

Posons $v(x_1, x_2, \ldots, x_N) = u(x_1', x_2', \ldots, x_N')$, alors si $v \in H^{2m}(B(0,1)) \cap H_0^m(B(0,1))$, u appartient à $H^{2m}(\Omega_t) \cap H_0^m(\Omega_t)$. Pour $j = 1,2,\ldots,N$, nous avons

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_{x_j}^l v \right\|_{L^2(B(0,1))}^2 &= \int_{B(0,1)} \left(\partial_{x_j}^l v \right)^2 (x_1, x_2, \ldots, x_N)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_N \\
&= \int_{\Omega_t} \left(\partial_{x_j'}^l u \right)^2 (x_1', x_2', \ldots, x_N')\, \varphi^{2l}(t) \tfrac{1}{\varphi^N(t)} dx_1' dx_2' \ldots dx_N' \\
&= \varphi^{2l-N}(t) \int_{\Omega_t} \left(\partial_{x_j'}^l u \right)^2 (x_1', x_2', \ldots, x_N')\, dx_1' dx_2' \ldots dx_N' \\
&= \varphi^{2l-N}(t) \left\| \partial_{x_j'}^l u \right\|_{L^2(\Omega_t)}^2
\end{aligned}$$

où $l \in \{0,1,...,2m-1\}$. D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
\left\| \mathcal{A}v \right\|_{L^2(B(0,1))}^2 &= \int_{B(0,1)} \left[(-1)^m \sum_{j=1}^N \partial_{x_j}^{2m} v(x_1, x_2, \ldots, , x_N) \right]^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_N \\
&= \int_{\Omega_t} \left(\sum_{j=1}^N \varphi^{2m}(t) \partial_{x_j'}^{2m} u \right)^2 (x_1', x_2', \ldots, x_N') \tfrac{1}{\varphi^N(t)} dx_1' dx_2' \ldots dx_N' \\
&= \varphi^{4m-N}(t) \int_{\Omega_t} \left(\sum_{j=1}^N \partial_{x_j'}^{2m} u \right)^2 (x_1', x_2', \ldots, x_N')\, dx_1' dx_2' \ldots dx_N' \\
&= \varphi^{4m-N}(t) \left\| \mathcal{A}u \right\|_{L^2(\Omega_t)}^2.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité

$$\left\| \partial_{x_j}^l v \right\|_{L^2(B(0,1))}^2 \leq C \left\| \mathcal{A}v \right\|_{L^2(B(0,1))}^2$$

du lemme 1.2.1, nous obtenons l'inégalité désirée

$$\left\| \partial_{x_j'}^l u \right\|_{L^2(\Omega_t)}^2 \leq C\varphi^{2(2m-l)}(t) \left\| \mathcal{A}u \right\|_{L^2(\Omega_t)}^2.$$

□

Remarque 2.3.1. Dans le lemme 2.3.1 nous pouvons remplacer $\|.\|_{L^2}$ par $\|.\|_{L^2_\omega}$.

Maintenant, considérons la solution $u_n \in H_\omega^{1,2m}(Q_n)$ du problème (2.5) et notons le produit scalaire dans $L_\omega^2(Q_n)$ par $\langle ., . \rangle$. Alors, nous avons

$$\begin{aligned}
\left\| f_n \right\|_{L_\omega^2(Q_n)}^2 &= \langle \partial_t u_n + \mathcal{A}u_n, \partial_t u_n + \mathcal{A}u_n \rangle \\
&= \left\| \partial_t u_n \right\|_{L_\omega^2(Q_n)}^2 + \left\| \mathcal{A}u_n \right\|_{L_\omega^2(Q_n)}^2 + 2\langle \partial_t u_n, \mathcal{A}u_n \rangle.
\end{aligned}$$

Nous aurons besoin du résultat suivant qui est une conséquence du lemme 2.3.1 et du théorème 2.2 de [25].

Lemme 2.3.2. *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de n telle que*

$$\sum_{|\alpha|=2m} \|\partial^\alpha u_n\|^2_{L^2_\omega(Q_n)} \leq C \|\mathcal{A}u_n\|^2_{L^2_\omega(Q_n)}.$$

Dans la suite, nous allons estimer le produit scalaire $\langle \partial_t u_n, \mathcal{A}u_n \rangle$ en utilisant les conditions aux limites

$$u_n|_{t=\frac{1}{n}} = \partial_\nu^k u_n|_{\partial Q_n \smallsetminus (\Gamma_T \cup \{t=\frac{1}{n}\})} = 0,\ k = 0, ..., m-1,$$

qui sont équivalentes à

$$u_n|_{t=\frac{1}{n}} = \partial_{x_j}^k u_n\Big|_{\partial Q_n \smallsetminus (\Gamma_T \cup \{t=\frac{1}{n}\})} = 0,\ \ k = 0, ..., m-1; j = 1, \ldots, N.$$

Cette équivalence peut être démontrée, par exemple, par récurrence sur k.

Lemme 2.3.3. *Nous avons*

$$\begin{aligned} 2\langle \partial_t u_n, \mathcal{A}u_n \rangle &= \textstyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \ldots \int_0^{\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{T} \left(\sum_{j=1}^N \left(\partial_{x_j}^m u_n \right)^2 \right) \varphi'(t)\, \varphi(t)\, .\omega(t)\, dt d\theta_1 \ldots d\theta_{N-2} d\theta_{N-1} \\ &\quad + \textstyle\int_{\Gamma_T} \left(\sum_{j=1}^N \left(\partial_{x_j}^m u_n \right)^2 \right) (T, x_1, x_2, \ldots, x_N)\, .\omega(T)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_N \\ &\quad - \textstyle\int_{Q_n} \left(\sum_{j=1}^N \left(\partial_{x_j}^m u_n \right)^2 \right) .\omega'(t)\, dt dx_1 dx_2 \ldots dx_N. \end{aligned}$$

Démonstration. Nous avons

$$\partial_t u_n.\mathcal{A}u_n = \textstyle\sum_{j=1}^N \left[\sum_{k=0}^{m-1} \partial_{x_j} \left(\partial_{x_j}^k \partial_t u_n . \partial_{x_j}^{2m-k-1} u_n \right) (-1)^{k+m} + \frac{1}{2} \partial_t \left(\partial_{x_j}^m u_n \right)^2 \right].$$

Alors

$$\begin{aligned} 2\langle \partial_t u_n, \mathcal{A}u_n \rangle &= 2 \textstyle\int_{Q_n} \partial_t u_n . \mathcal{A}u_n . \omega(t)\, dt dx_1 dx_2 \ldots dx_N \\ &= 2 \textstyle\int_{Q_n} \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} \partial_{x_j} \left(\partial_{x_j}^k \partial_t u_n . \partial_{x_j}^{2m-k-1} u_n \right) (-1)^{k+m} .\omega(t)\, dt dx_1 dx_2 \ldots dx_N \\ &\quad + \textstyle\int_{Q_n} \partial_t \sum_{j=1}^N \left(\partial_{x_j}^m u_n \right)^2 .\omega(t)\, dt dx_1 dx_2 \ldots dx_N \\ &= 2 \textstyle\int_{\partial Q_n} \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} \left(\partial_{x_j}^k \partial_t u_n . \partial_{x_j}^{2m-k-1} u_n \right) (-1)^{k+m} \nu_{x_j} .\omega(t)\, d\sigma \\ &\quad + \textstyle\int_{\partial Q_n} \sum_{j=1}^N \left(\partial_{x_j}^m u_n \right)^2 \nu_t . \omega(t)\, d\sigma - \int_{Q_n} \sum_{j=1}^N \left(\partial_{x_j}^m u_n \right)^2 .\omega'(t)\, dt dx_1 dx_2 \ldots dx_N \end{aligned}$$

avec $\nu_t, \nu_{x_1}, \ldots, \nu_{x_N}$ sont les composantes du vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur à ∂Q_n. Nous devons réécrire l'intégrale sur la frontière en utilisant les conditions aux limites. Sur la partie du bord de Q_n où $t = \dfrac{1}{n}$, nous avons $\partial_{x_j}^k u_n = 0, k = 0, ..., m-1; j = 1, 2, \ldots, N$ et par conséquent l'intégrale sur la frontière correspondante s'annule. Sur la partie de la frontière où $t = T$, nous avons $\nu_{x_j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, N$ et $\nu_t = 1$. Par conséquent, l'intégrale sur la frontière correspondante

$$\int_{\Gamma_T} \sum_{j=1}^N \left(\partial_{x_j}^m u_n \right)^2 (T, x_1, x_2, ..., x_N)\, .\omega(T)\, dx_1 dx_2 ... dx_N$$

est positive. Sur la partie Γ_1 de ∂Q_n définie par

$$\Gamma_1 = \left\{ (t, x_1, x_2, \ldots, x_N) : \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2} = \varphi(t) \right\},$$

nous avons

$$(\nu_t,\ \nu_{x_l},\ \nu_{x_N}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi')^2(t)}} \left(-\varphi'(t),\ \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{l-1}\cos\theta_l,\ \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{N-2}\sin\theta_{N-1} \right),$$

$l = 1, 2, \ldots, N-1$, et

$$\partial_{x_j}^k u_n(t, \varphi(t)\cos\theta_1, \ldots, \varphi(t)\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{N-2}\cos\theta_{N-1}, \varphi(t)\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{N-2}\sin\theta_{N-1}) = 0,$$

$k = 0, ..., m-1;\ j = 1, 2, \ldots, N$. Notons

$$I = 2\int_{\Gamma_1} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\partial_{x_j}^k \partial_t u_n . \partial_{x_j}^{2m-k-1} u_n \right) (-1)^{k+m} \nu_{x_j} . \omega(t)\, d\sigma.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} I &= 2\int_{\Gamma_1} \textstyle\sum_{j=1}^{N} \left(\partial_t u_n . \partial_{x_j}^{2m-1} u_n \right) (-1)^m \nu_{x_j} . \omega(t)\, d\sigma \\ &\quad + 2\int_{\Gamma_1} \textstyle\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{m-2} \left(\partial_{x_j}^k \partial_t u_n . \partial_{x_j}^{2m-k-1} u_n \right) (-1)^{k+m} \nu_{x_j} . \omega(t)\, d\sigma \\ &\quad - 2\int_{\Gamma_1} \textstyle\sum_{j=1}^{N} \left(\partial_{x_j}^{m-1} \partial_t u_n . \partial_{x_j}^m u_n \right) \nu_{x_j} . \omega(t)\, d\sigma \\ &= I_0 + I_1 + I_{m-1}. \end{aligned}$$

a) Estimation de $I_0 = 2\int_{\Gamma_1} \sum_{j=1}^{N} \left(\partial_t u_n . \partial_{x_j}^{2m-1} u_n \right) (-1)^m \nu_{x_j} . \omega(t)\, d\sigma$: Nous avons

$$u_n(t, \varphi(t)\cos\theta_1, \ldots, \varphi(t)\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{N-2}\cos\theta_{N-1}, \varphi(t)\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{N-2}\sin\theta_{N-1}) = 0.$$

En dérivant par rapport à t, nous obtenons

$$\partial_t u_n = -\varphi'(t) \left[\left(\sum_{l=1}^{N-1} \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{l-1}\cos\theta_l . \partial_{x_l} u_n \right) + \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{N-1} . \partial_{x_N} u_n \right] = 0.$$

Donc, l'intégrale I_0 s'annule.

b) Estimation de $I_1 = 2\int_{\Gamma_1} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{m-2} \left(\partial_{x_j}^k \partial_t u_n . \partial_{x_j}^{2m-k-1} u_n \right) (-1)^{k+m} \nu_{x_j} . \omega(t)\, d\sigma$: Nous avons

$$\partial_{x_j}^k u_n\left(t, \varphi(t)\cos\theta_1, \ldots, \varphi(t)\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{N-2}\cos\theta_{N-1}, \varphi(t)\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{N-2}\sin\theta_{N-1}\right) = 0,$$

$k = 1, ..., m-2; j = 1, 2, \ldots, N$.
En dérivant par rapport à t, nous obtenons

$$\partial_t \partial_{x_j}^k u_n = -\varphi'(t) \left[\left(\sum_{l=1}^{N-1} \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{l-1}\cos\theta_l . \partial_{x_l} \partial_{x_j}^k u_n \right) + \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{N-1} . \partial_{x_N} \partial_{x_j}^k u_n \right]$$

$k = 1, ..., m-2; j = 1, 2, \ldots, N$. Les conditions aux limites de Dirichlet sur Γ_1 conduisent à

$$\partial_t \partial_{x_j}^k u_n = -\varphi'(t) \left[\left(\sum_{l=1, l \neq j}^{N-1} \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{l-1} \cos\theta_l . \partial_{x_l} \partial_{x_j}^k u_n \right) + \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{N-1} . \partial_{x_N} \partial_{x_j}^k u_n \right],$$

pour $k = 1, ..., m-2;\ j = 1, 2, \ldots, N-1$ et

$$\partial_t \partial_{x_N}^k u_n = -\varphi'(t) \sum_{l=1}^{N-1} \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{l-1} \cos\theta_l . \partial_{x_l} \partial_{x_N}^k u_n,\ k = 1, ..., m-2.$$

Maintenant, nous dérivons la formule

$$\partial_{x_j}^k u_n \left(t, \varphi(t) \cos\theta_1, \ldots, \varphi(t) \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{N-2} \cos\theta_{N-1}, \varphi(t) \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{N-2} \sin\theta_{N-1}\right) = 0,$$

$k = 1, ..., m-2; j = 1, 2, \ldots, N$, par rapport à $\theta_1, \ldots, \theta_{N-2}$ et θ_{N-1} et nous obtenons

$$\sin\theta_p . \partial_{x_p} \partial_{x_j}^k u_n = \cos\theta_p \left[\left(\sum_{l=p+1}^{N-1} \sin\theta_{p+1} \ldots \sin\theta_{l-1} \cos\theta_l . \partial_{x_l} \partial_{x_j}^k u_n \right) + \sin\theta_{p+1} \ldots \sin\theta_{N-1} . \partial_{x_N} \partial_{x_j}^k u_n \right],$$

pour $p = 1, \ldots, N-2$, et

$$\sin\theta_{N-1} \partial_{x_{N-1}} \partial_{x_j}^k u_n = \cos\theta_{N-1} \partial_{x_N} \partial_{x_j}^k u_n$$

où $k = 1, \ldots, m-2;\ j = 1, \ldots, N$. Les conditions aux limites de Dirichlet sur Γ_1 conduisent à

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j}^k u_n = 0,\ k = 1, ..., m-2\,;\ i = 1, \ldots, N,\ j = 1, \ldots, N$$

et par conséquent

$$\partial_t \partial_{x_j}^k u_n = 0, k = 1, \ldots, m-2; j = 1, \ldots, N.$$

Donc, l'intégrale I_1 s'annule.

c) Estimation de $I_{m-1} = -2 \int_{\Gamma_1} \sum_{j=1}^N \left(\partial_{x_j}^{m-1} \partial_t u_n . \partial_{x_j}^m u_n \right) \nu_{x_j} . \omega(t)\, d\sigma$: Nous avons

$$\partial_{x_j}^{m-1} u_n \left(t, \varphi(t) \cos\theta_1, \varphi(t) \sin\theta_1 \cos\theta_2, \ldots, \varphi(t) \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{N-2} \cos\theta_{N-1}, \varphi(t) \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{N-1}\right) = 0,$$

$j = 1, 2, \ldots, N$. En dérivant par rapport à t, nous obtenons

$$\partial_t \partial_{x_j}^{m-1} u_n = -\varphi'(t) \left[\left(\sum_{l=1}^{N-1} \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{l-1} \cos\theta_l . \partial_{x_l} \partial_{x_j}^{m-1} u_n \right) + \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{N-1} . \partial_{x_N} \partial_{x_j}^{m-1} u_n \right],$$

$j = 1, 2, \ldots, N$.

Maintenant, nous dérivons la formule

$$\partial_{x_j}^{m-1} u_n \left(t, \varphi(t) \cos\theta_1, \ldots, \varphi(t) \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{N-2} \cos\theta_{N-1}, \varphi(t) \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{N-1}\right) = 0,$$

$j=1,2,\ldots,N$, par rapport à $\theta_1,\ldots,\theta_{N-2}$ et θ_{N-1} et nous obtenons

$$\begin{aligned}\sin\theta_p.\partial_{x_p}\partial_{x_j}^{m-1}u_n &= \cos\theta_p\left[\textstyle\sum_{l=p+1}^{N-1}\sin\theta_{p+1}\ldots\sin\theta_{l-1}\cos\theta_l.\partial_{x_l}\partial_{x_j}^{m-1}u_n\right]\\ &\quad+\cos\theta_p\left[\sin\theta_{p+1}\ldots\sin\theta_{N-1}.\partial_{x_N}\partial_{x_j}^{m-1}u_n\right],\ j=1,\ldots,N\end{aligned}$$

pour $p=1,\ldots,N-2$, et

$$\sin\theta_{N-1}\partial_{x_{N-1}}\partial_{x_j}^{m-1}u_n=\cos\theta_{N-1}\partial_{x_N}\partial_{x_j}^{m-1}u_n,\ \ j=1,\ldots,N.$$

En tenant compte de ces relations, nous en déduisons

$$I_{m-1} = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\ldots\int_0^{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{T}\left[\textstyle\sum_{j=1}^{N}\left(\partial_{x_j}^{m}u_n\right)^2\right]\varphi'(t)\,\varphi(t)\,.\omega(t)\,dtd\theta_1\ldots d\theta_{N-2}d\theta_{N-1}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}2\langle\partial_t u_n,\mathcal{A}u_n\rangle &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\ldots\int_0^{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{T}\left(\textstyle\sum_{j=1}^{N}\left(\partial_{x_j}^{m}u_n\right)^2\right)\varphi'(t)\,\varphi(t)\,.\omega(t)\,dtd\theta_1\ldots d\theta_{N-2}d\theta_{N-1}\\ &\quad+\int_{\Gamma_T}\left(\textstyle\sum_{j=1}^{N}\left(\partial_{x_j}^{m}u_n\right)^2\right)(T,x_1,x_2,\ldots,x_N)\,.\omega(T)\,dx_1dx_2\ldots dx_N\\ &\quad-\int_{Q_n}\left(\textstyle\sum_{j=1}^{N}\left(\partial_{x_j}^{m}u_n\right)^2\right).\omega'(t)\,dtdx_1dx_2\ldots dx_N.\end{aligned} \tag{2.7}$$

□

Remarque 2.3.2. Remarquons que les intégrales

$$\int_{\Gamma_T}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\partial_{x_j}^{m}u_n\right)^2\right)(T,x_1,x_2,\ldots,x_N)\,.\omega(T)\,dx_1dx_2\ldots dx_N$$

et

$$-\int_{Q_n}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\partial_{x_j}^{m}u_n\right)^2\right).\omega'(t)\,dtdx_1dx_2\ldots dx_N,$$

qui apparaissent dans la dernière formule sont positives grâce aux hypothèses (2.3) et (2.4) sur la fonction poids ω. C'est un bon signe pour notre estimation car nous pouvons en déduire immédiatement que

$$\begin{aligned}\|f_n\|^2_{L^2_\omega(Q_n)} &\geq \|\partial_t u_n\|^2_{L^2_\omega(Q_n)}+\|\mathcal{A}u_n\|^2_{L^2_\omega(Q_n)}\\ &\quad+\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\ldots\int_0^{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{T}\left(\textstyle\sum_{j=1}^{N}\left(\partial_{x_j}^{m}u_n\right)^2\right)\varphi'(t)\,\varphi(t)\,.\omega(t)\,dtd\theta_1\ldots d\theta_{N-2}d\theta_{N-1}.\end{aligned}$$

Donc, si φ est une fonction croissante sur l'intervalle $(\frac{1}{n},T)$, alors

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\ldots\int_0^{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{T}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\partial_{x_j}^{m}u_n\right)^2\right)\varphi'(t)\,\varphi(t)\,.\omega(t)\,dtd\theta_1\ldots d\theta_{N-2}d\theta_{N-1}\geq 0.$$

Par conséquent,

$$\|f_n\|^2_{L^2_\omega(Q_n)} \geq \|\partial_t u_n\|^2_{L^2_\omega(Q_n)} + \|\mathcal{A}u_n\|^2_{L^2_\omega(Q_n)} . \tag{2.8}$$

Mais, grâce au lemme 2.3.1 et puisque φ est bornée sur $(0,T)$, alors il existe une constante $C' > 0$ telle que

$$\left\|\partial^l_{x_j} u_n\right\|^2_{L^2_\omega(Q_n)} \leq C' \|\mathcal{A}u_n\|^2_{L^2_\omega(Q_n)} , l = 0, 1, ..., 2m-1; j = 1, 2, \dots, N.$$

En tenant compte du lemme 2.3.2 et de l'estimation (2.8), nous obtenons l'estimation désirée (2.6).

Il reste donc à établir l'estimation (2.6) sous l'hypothèse (2.2). Pour ce faire, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3.4. *Nous avons*

$$\begin{aligned} 2\langle \partial_t u_n, \mathcal{A}u_n\rangle &= 2\int_{Q_n} \tfrac{\varphi'}{\varphi} \left(\textstyle\sum_{j=1}^N x_j \partial^m_{x_j} u_n\right) \mathcal{A}u_n.\omega\,(t)\, dt dx_1 dx_2 \dots dx_N \\ &\quad - (N-2) \int_{Q_n} \tfrac{\varphi'}{\varphi} \textstyle\sum_{j=1}^N \left(\partial^m_{x_j} u_n\right)^2 dt dx_1 dx_2 \dots dx_N \\ &\quad + \int_{\Gamma_T} \textstyle\sum_{j=1}^N \left(\partial^m_{x_j} u_n\right)^2 (T, x_1, x_2, \dots, x_N)\,.\omega\,(T)\, dx_1 dx_2 \dots dx_N. \end{aligned}$$

Démonstration. Ce résultat peut être obtenu en suivant pas à pas la démonstration du lemme 3.4 de [33]. □

Proposition 2.3.1. Supposons que la fonction poids ω vérifie les hypothèses (2.3) et (2.4). Alors, il existe une constante K_1 indépendante de n telle que

$$\|u_n\|_{H^{1,2m}_\omega(Q_n)} \leq K_1 \|f_n\|_{L^2_\omega(Q_n)} \leq K_1 \|f\|_{L^2_\omega(Q)}$$

si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

1. φ est une fonction croissante dans un voisinage de 0;
2. φ vérifie la condition (2.2).

Démonstration. Le cas où φ est une fonction croissante dans un voisinage de 0 a été traité dans la remarque 2.3.2. Supposons dans la suite que φ vérifie la condition (2.2).

Remarque 2.3.3. Soit $\epsilon > 0$ un réel que nous choisirons assez petit. L'hypothèse (2.2) implique l'existence d'un nombre réel $T > 0$ suffisamment petit tel que

$$\forall t \in (0,T)\,, |\varphi'(t)\,\varphi^m(t)| \leq \epsilon. \tag{2.9}$$

Maintenant, nous continuons la démonstration de la proposition 2.3.1. Nous avons

$$\begin{aligned} &\left|\int_{Q_n} \tfrac{\varphi'}{\varphi} \left(\textstyle\sum_{j=1}^N x_j \partial^m_{x_j} u_n\right) \mathcal{A}u_n.\omega\,(t)\, dt dx_1 dx_2 \dots x_N\right| \\ &\leq \|\mathcal{A}u_n\|_{L^2_\omega(Q_n)} \textstyle\sum_{j=1}^N \left\|\tfrac{\varphi'}{\varphi} x_j \partial^m_{x_j} u_n\right\|_{L^2_\omega(Q_n)} , \end{aligned}$$

mais le lemme 2.3.1 donne pour $j = 1, 2, \ldots, N$

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\varphi'}{\varphi} x_j \partial_{x_j}^m u_n \right\|_{L^2_\omega(Q_n)}^2 &= \int_{\frac{1}{n}}^T \varphi'^2(t) \int_{\Omega_t} \left(\frac{x_j}{\varphi(t)} \right)^2 \left(\partial_{x_j}^m u_n \right)^2 .\omega(t)\, dt dx_1 dx_2 \ldots dx_N \\
&\leq \int_{\frac{1}{n}}^T \varphi'^2(t) \int_{\Omega_t} \left(\partial_{x_j}^m u_n \right)^2 .\omega(t)\, dt dx_1 dx_2 \ldots dx_N \\
&\leq C^2 \int_{\frac{1}{n}}^T \left(\varphi^m(t) \varphi'(t) \right)^2 \int_{\Omega_t} (\mathcal{A} u_n)^2 .\omega(t)\, dt dx_1 dx_2 \ldots dx_N \\
&\leq C^2 \epsilon^2 \left\| \mathcal{A} u_n \right\|_{L^2_\omega(Q_n)}^2,
\end{aligned}$$

car $|\varphi'(t)\, \varphi^m(t)| \leq \epsilon$ grâce à la condition (2.9). Alors

$$\left| \int_{Q_n} \frac{\varphi'}{\varphi} \left(\sum_{j=1}^N x_j \partial_{x_j}^m u_n \right) \mathcal{A} u_n .\omega(t)\, dt dx_1 dx_2 \ldots dx_N \right| \leq NC\epsilon \left\| \mathcal{A} u_n \right\|_{L^2_\omega(Q_n)}^2 .$$

Par conséquent, le lemme 2.3.3 montre que

$$\begin{aligned}
|2\langle \partial_t u_n, \mathcal{A} u_n \rangle| &\geq -2 \left| \int_{Q_n} \frac{\varphi'}{\varphi} \left(\sum_{j=1}^N x_j \partial_{x_j}^m u_n \right) \mathcal{A} u_n .\omega(t)\, dt dx_1 dx_2 \right| \\
&\quad - \left| (N-2) \int_{Q_n} \sum_{j=1}^N \left(\partial_{x_j}^m u_n \right)^2 \frac{\varphi'}{\varphi} .\omega(t)\, dt dx_1 dx_2 \right| \\
&\quad + \int_{\Gamma_T} \sum_{j=1}^N \left(\partial_{x_j}^m u_n \right)^2 (T, x_1, x_2, \ldots, x_N) .\omega(T)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_N \\
&\geq -N^2 C\epsilon \left\| \mathcal{A} u_n \right\|_{L^2_\omega(Q_n)}^2 .
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_{L^2_\omega(Q_n)}^2 &= \|\partial_t u_n\|_{L^2_\omega(Q_n)}^2 + \|\mathcal{A} u_n\|_{L^2_\omega(Q_n)}^2 + 2\langle \partial_t u_n, \mathcal{A} u_n \rangle \\
&\geq \|\partial_t u_n\|_{L^2_\omega(Q_n)}^2 + (1 - N^2 C\epsilon) \|\mathcal{A} u_n\|_{L^2_\omega(Q_n)}^2 .
\end{aligned}$$

Donc, il suffit de choisir ϵ de sorte que $1 - N^2 C\epsilon > 0$ pour obtenir une constante $K_0 > 0$ indépendante de n telle que

$$\|f_n\|_{L^2_\omega(Q_n)} \geq K_0 \|u_n\|_{H^{1,2m}_\omega(Q_n)},$$

et puisque

$$\|f_n\|_{L^2_\omega(Q_n)} \leq \|f\|_{L^2_\omega(Q)},$$

alors, il existe une constante $K_1 > 0$, indépendante de n et qui satisfait

$$\|u_n\|_{H^{1,2m}_\omega(Q_n)} \leq K_1 \|f_n\|_{L^2_\omega(Q_n)} \leq K_1 \|f\|_{L^2_\omega(Q)} .$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 2.3.1. □

2.4 Résultats principaux

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer les principaux résultats de ce travail.

2.4.1 Un résultat local en temps

Théorème 2.4.1. *Supposons que la fonction poids ω vérifie les conditions (2.3) et (2.4). Alors, l'opérateur parabolique d'ordre $2m$, $L = \partial_t + \mathcal{A}$ est un isomorphisme de $H^{1,2m}_{0,\omega}(Q)$ dans $L^2_\omega(Q)$ si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. *φ est une fonction croissante dans un voisinage de 0;*
2. *φ vérifie la condition (2.2).*

Démonstration. **1) Injectivité de l'opérateur** L :
Considérons $u \in H^{1,2m}_{0,\omega}(Q)$ une solution de problème (2.1) correspondant à un second membre nul. Alors,

$$\partial_t u + \mathcal{A}u = 0 \text{ dans } Q.$$

De plus, u vérifie les conditions aux limites suivantes :

$$\partial_\nu^k u\big|_{\partial Q \setminus \Gamma_T} = 0,\ k = 0, 1, ..., m-1.$$

En utilisant la formule de Green, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_Q (\partial_t u + \mathcal{A}u)\, u\, \omega(t)\, dt\ dx_1 dx_2 \dots dx_N \\
&= \textstyle\int_{\partial Q} \left[\frac{1}{2}|u|^2 \nu_t + \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} (\partial_{x_j}^{2m-k-1} u . \partial_{x_j}^k u)(-1)^{k+m} \nu_{x_j}\right] \omega(t)\, d\sigma \\
&+ \textstyle\int_Q \left(\left|\partial_{x_1}^m u\right|^2 + \left|\partial_{x_2}^m u\right|^2 + \dots + \left|\partial_{x_N}^m u\right|^2\right) dt\ dx_1 dx_2 \dots dx_N - \int_Q \frac{1}{2}|u|^2 \omega'(t)\, dt\ dx_1 dx_2 \dots dx_N,
\end{aligned}$$

où $\nu_t, \nu_{x_1}, \dots, \nu_{x_N}$ sont les composantes du vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur à ∂Q. En tenant compte des conditions aux limites, toutes les intégrales sur le bord de Q s'annulent sauf $\int_{\partial Q} |u|^2 \omega(t)\, \nu_t d\sigma$. Nous avons

$$\int_{\partial Q} |u|^2 \omega(t)\, \nu_t d\sigma = \int_{\Gamma_T} |u|^2 \omega(T)\, dx_1 dx_2 \dots dx_N.$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_Q (\partial_t u + \mathcal{A}u)\, u\, \omega(t)\, dt\ dx_1 dx_2 \dots dx_N \\
&= \textstyle\int_{\Gamma_T} \frac{1}{2}|u|^2 \omega(T)\, dx_1 dx_2 \dots dx_N - \int_Q \frac{1}{2}|u|^2 \omega'(t)\, dt\ dx_1 dx_2 \dots dx_N \\
&+ \textstyle\int_Q \left(\left|\partial_{x_1}^m u\right|^2 + \left|\partial_{x_2}^m u\right|^2 + \dots + \left|\partial_{x_N}^m u\right|^2\right) dt\ dx_1 dx_2 \dots dx_N.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_Q (\partial_t u + \mathcal{A}u)\, u\, \omega(t)\, dt\ dx_1 dx_2 \dots dx_N = 0$$

donne

$$\int_Q \left(\left|\partial_{x_1}^m u\right|^2 + \left|\partial_{x_2}^m u\right|^2 + \dots + \left|\partial_{x_N}^m u\right|^2\right) dt dx_1 dx_2 \dots dx_N = 0,$$

car

$$\int_{\Gamma_T} \frac{1}{2}|u|^2 \omega(T)\, dx_1 dx_2 \dots dx_N - \int_Q \frac{1}{2}|u|^2 \omega'(t)\, dt\ dx_1 dx_2 \dots dx_N \geq 0$$

grâce aux conditions (2.3) et (2.4). Cela implique que $\left|\partial_{x_1}^m u\right|^2 + \left|\partial_{x_2}^m u\right|^2 + \cdots + \left|\partial_{x_N}^m u\right|^2 = 0$ et par conséquent $\partial_{x_1}^{2m} u = \partial_{x_2}^{2m} u = \cdots = \partial_{x_N}^{2m} u = 0$, c'est à dire, $\mathcal{A}u = 0$. Par suite, l'hypothèse $\partial_t u + \mathcal{A}u = 0$ donne $\partial_t u = 0$. Ainsi, u est constante. Les conditions aux limites impliquent que $u = 0$ dans Q. Cela démontre l'unicité de la solution du problème (2.1).

2) Surjectivité de l'opérateur L **:**

Choisissons une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des domaines définis dans la section 2, tels que $Q_n \subseteq Q$. Alors, nous avons $Q_n \to Q$, lorsque $n \to \infty$. Considérons la solution $u_n \in H_\omega^{1,2m}(Q_n)$ du problème de Cauchy-Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u_n + \mathcal{A}u_n = f_n \in L_\omega^2(Q_n), \\ u_n|_{t=\frac{1}{n}} = 0, \\ \partial_\nu^k u_n\big|_{\partial Q_n \setminus (\Gamma_T \cup \{t=\frac{1}{n}\})} = 0,\ k = 0, 1, ..., m-1, \end{cases}$$

où $f_n = f|_{Q_n}$. Une telle solution u_n existe grâce au théorème 2.2.1. Soit $\widetilde{u_n}$ le prolongement par 0 de u_n à Q. En vertu de la proposition 2.3.1, nous savons qu'il existe une constante C telle que

$$\|\widetilde{u_n}\|_{L_\omega^2(Q)} + \left\|\widetilde{\partial_t u_n}\right\|_{L_\omega^2(Q)} + \sum_{1\leq|\alpha|\leq 2m} \left\|\widetilde{\partial^\alpha u_n}\right\|_{L_\omega^2(Q)} \leq C \|f\|_{L_\omega^2(Q)}.$$

Cela signifie que pour $1 \leq |\alpha| \leq 2m$, les fonctions $\widetilde{u_n}$, $\widetilde{\partial_t u_n}$, $\widetilde{\partial^\alpha u_n}$ sont bornées dans $L_\omega^2(Q)$. Ainsi, pour une suite croissante d'entiers n_k, $k = 1, 2, ...$, et pour $1 \leq |\alpha| \leq 2m$, il existe des fonctions u, v et v_α dans $L_\omega^2(Q)$ telles que

$$\widetilde{u_{n_k}} \rightharpoonup u,\ \widetilde{\partial_t u_{n_k}} \rightharpoonup v,\ \widetilde{\partial^\alpha u_{n_k}} \rightharpoonup v_\alpha$$

faiblement dans $L_\omega^2(Q)$ lorsque $k \to \infty$. Et donc

$$v = \partial_t u, v_\alpha = \partial^\alpha u, 1 \leq |\alpha| \leq 2m,$$

au sens des distributions dans Q et donc dans $L_\omega^2(Q)$. Par suite, $u \in H_\omega^{1,2m}(Q)$ et

$$\partial_t u + \mathcal{A}u = f \text{ dans } Q.$$

D'autre part, la solution u vérifie les conditions aux limites

$$\partial_\nu^k u\big|_{\partial Q \setminus \Gamma_T} = 0,\ k = 0, 1, ..., m-1,$$

puisque

$$u|_{Q_n} = u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ceci démontre l'existence d'une solution au problème (2.1) et termine la démonstration du théorème 2.4.1. □

2.4.2 Un résultat global en temps

Dans le cas où T est quelconque, nous posons $Q = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma_{T_1}$ où

$$D_1 = \{(t, x_1, x_2, \dots, x_N) \in Q : 0 < t < T_1\}, \; D_2 = \{(t, x_1, x_2, \dots, x_N) \in Q : T_1 < t < T\}$$

et

$$\Gamma_{T_1} = \left\{ (T_1, x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1} : \; 0 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N} \leq \varphi(T_1) \right\}$$

avec T_1 assez petit. Dans la suite, f représente un élément quelconque fixé dans $L^2_\omega(Q)$ et $f_i = f|_{D_i}$, $i = 1, 2$. Nous savons (voir la sous section 2.4.1) qu' il existe une solution unique $w_1 \in H^{1,2m}_\omega(D_1)$ au problème

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + \mathcal{A} w_1 = f_1 \in L^2_\omega(D_1), \\ \\ \partial_\nu^k w_1 \big|_{\partial D_1 \setminus \Gamma_{T_1}} = 0, \; k = 0, ..., m-1. \end{cases} \tag{2.10}$$

Dans ce qui suit, nous notons la trace $w_1|_{\Gamma_{T_1}}$ par ψ qui est un élément de l'espace de Sobolev $H^m_\omega(\Gamma_{T_1})$ car $w_1 \in H^{1,2m}_\omega(D_1)$ (voir [45]). Maintenant, nous considérons le problème suivant dans D_2 :

$$\begin{cases} \partial_t w_2 + \mathcal{A} w_2 = f_2 \; \in L^2_\omega(D_2), \\ w_2|_{\Gamma_{T_1}} = \psi, \\ \partial_\nu^k w_2 \big|_{\partial D_2 \setminus (\Gamma_{T_1} \cup \Gamma_T)} = 0, \; k = 0, ..., m-1. \end{cases} \tag{2.11}$$

Nous utilisons le résultat de la proposition 1.3.1, qui est une conséquence du théorème 4.3 de [45, Vol. 2], pour résoudre le problème (2.11).

Grâce à la transformation

$$(t, x_1, x_2, \dots, x_N) \longmapsto (t, y_1, y_2, \dots, y_N) = (t, \varphi(t) x_1, \varphi(t) x_2, \dots, \varphi(t) x_N),$$

nous déduisons le résultat suivant :

Proposition 2.4.1. Le problème (2.11) admet une (unique) solution $w_2 \in H^{1,2m}_\omega(D_2)$ si et seulement si les conditions de compatibilité suivantes sont satisfaites

$$\partial_\nu^k \psi \big|_{\partial \Gamma_{T_1}} = 0, \; k = 0, ..., m-1.$$

Remarque 2.4.1. Nous pouvons remarquer que les conditions aux limites des problèmes (2.10) et (2.11) donnent

$$w_1|_{\Gamma_{T_1}} = w_2|_{\Gamma_{T_1}}$$

et $\partial_\nu^k w_i \big|_{\Gamma_{T_1}} \in H^{1-\frac{1}{2m}}_\omega(\Gamma_{T_1})$, $i = 1, 2$. Donc, les conditions de compatibilité

$$\partial_\nu^k \psi \big|_{\partial \Gamma_{T_1}} = 0, \; k = 0, ..., m-1,$$

sont satisfaites puisque $w_1|_{\Gamma_{T_1}} = \psi$.

Maintenant, nous définissons la fonction u dans Q par

$$u := \begin{cases} w_1 \text{ dans } D_1, \\ w_2 \text{ dans } D_2, \end{cases}$$

où w_1 et w_2 sont les solutions du problème (2.10) et du problème (2.11), respectivement. Remarquons que $w_1|_{\Gamma_{T_1}} = w_2|_{\Gamma_{T_1}}$, voir la remarque 2.4.1, donc

$$\partial_\nu^k w_1\big|_{\Gamma_{T_1}} = \partial_\nu^k w_2\big|_{\Gamma_{T_1}}, \, k = 0, ..., m-1.$$

Cela implique que $u \in H_\omega^{1,2m}(Q)$ et u est la solution (unique) de problème (2.1) pour un T quelconque. Notre deuxième résultat principal est le suivant :

Théorème 2.4.2. *Le résultat du théorème 2.4.1 est vrai pour un T quelconque.*

Chapitre 3

Sur une équation parabolique d'ordre $2m$ associée à des conditions aux limites mixtes dans des domaines non rectangulaires

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'existence et l'unicité ainsi qu'à la régularité optimale de la solution d'une équation parabolique d'ordre supérieur, associée à des conditions aux limites mixtes. Ce problème est posé dans des domaines plans non rectangulaires (non réguliers).

3.1 Introduction

Soit Ω un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\Omega = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T, \varphi_1(t) < x < \varphi_2(t)\right\},$$

où T est un nombre positif, φ_1 et φ_2 sont deux fonctions continues à valeurs réelles définies sur $[0,T]$, lipschitzienne sur $[0,T]$ et telles que

$$\varphi(t) := \varphi_2(t) - \varphi_1(t) > 0,$$

pour tout $t \in \left]0,T\right]$ et avec l'hypothèse fondamentale $\varphi(0) = 0$. La frontière latérale de Ω est définie par

$$\Gamma_i = \left\{(t, \varphi_i(t)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T\right\},\ i = 1,\ 2.$$

Nous supposerons alors que

$$(-1)^{i+1}\varphi_i'(t) \geq 0 \ \text{ p.p. } t \in \left]0,T\right[,\ i = 1,\ 2, \tag{3.1}$$

$$\varphi_i'(t)\,\varphi^m(t) \quad \to \quad 0 \qquad \text{lorsque } t \to 0,\ m \in \mathbb{N}^*,\ i = 1,\ 2. \tag{3.2}$$

Dans Ω, nous considérons les problèmes aux limites

$$\begin{cases} \partial_t u + (-1)^m \partial_x^{2m} u = f_1 \in L^2_\omega(\Omega)\,, \\ \partial_x^k u\big|_{\Gamma_1} = 0,\ k = 0, 1, ..., m-1, \\ \partial_x^l u\big|_{\Gamma_2} = 0,\ \ l = m, m+1, ..., 2m-1, \end{cases} \tag{3.3}$$

et

$$\begin{cases} \partial_t v + (-1)^m \partial_x^{2m} v = f_2 \in L^2_\omega(\Omega)\,, \\ \partial_x^k v\big|_{\Gamma_2} = 0,\ k = 0, 1, ..., m-1, \\ \partial_x^l v\big|_{\Gamma_1} = 0,\ \ l = m, m+1, ..., 2m-1, \end{cases} \tag{3.4}$$

où $L^2_\omega(\Omega)$ représente l'espace de Lebesgue des fonctions de carré intégrable sur Ω muni de la mesure $\omega\ dt\ dx$. Ici, le poids ω est une fonction réelle définie sur $[0, T]$, dérivable sur $]0, T]$ et telle que

$$\forall t \in [0, T]\,,\ \omega(t) > 0. \tag{3.5}$$

Nous supposons aussi que

$$\omega \text{ est une fonction décroissante sur }]0, T]\,. \tag{3.6}$$

Observons que dans le cas $m = 1$, les problèmes (3.3) et (3.4) correspondent à des équations paraboliques du second ordre associées à des conditions aux limites de type Dirichlet-Neumann et nous pouvons trouver des études de tels types de problèmes dans [54] et [34] dans des domaines non cylindriques bornés et non bornés, respectivement. Notons que les conditions aux limites mixtes

$$\partial_x^k u\big|_{\Gamma_1} = \partial_x^l u\big|_{\Gamma_2} = 0,\ \partial_x^k v\big|_{\Gamma_2} = \partial_x^l v\big|_{\Gamma_1} = 0,\ \ k = 0, 1, \ldots, m-1;\ l = m, \ldots, 2m-1,$$

ont été utilisées dans le cas $m = 2$ dans [9], où l'existence de solutions positives multiples pour un problème aux limites à deux points pour une équation du quatrième ordre a été démontrée. Dans le cas $m = 3$ correspondant à un problème du sixième ordre, nous pouvons trouver un tel type de conditions aux limites dans Dugundji [17] et dans Shi *et al.* [55]. Ces conditions aux limites spécifiques sont importantes pour l'originalité de ce travail. En effet, à nos connaissances, des résultats concernant les équations paraboliques d'ordre supérieur posées dans des domaines non cylindriques et associées à de telles conditions aux limites, ne sont pas apparus dans la littérature à ce jour.

Sous les conditions mentionnées ci-dessus sur les fonctions de paramétrisation $\varphi_i,\ i = 1,\ 2$ et sur la fonction poids ω, nous démontrons que le problème (3.3) (respectivement, (3.4)) admet une solution unique avec une régularité optimale, c'est une solution u (respectivement,

v) appartenant à l'espace de Sobolev anisotrope

$$\mathcal{H}_{\gamma,\omega}^{1,2m}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{H}_{\omega}^{1,2m}(\Omega) : \begin{array}{l} \partial_x^k u\big|_{\Gamma_1} = \partial_x^l u\big|_{\Gamma_2} = 0, \\ k = 0, 1, ..., m-1;\ l = m, ..., 2m-1 \end{array} \right\},$$

(respectivement,

$$\mathcal{H}_{\delta,\omega}^{1,2m}(\Omega) = \left\{ v \in \mathcal{H}_{\omega}^{1,2m}(\Omega) : \begin{array}{l} \partial_x^k v\big|_{\Gamma_2} = \partial_x^l v\big|_{\Gamma_1} = 0, \\ k = 0, 1, \ldots, m-1;\ l = m, \ldots, 2m-1 \end{array} \right\}),$$

avec

$$\mathcal{H}_{\omega}^{1,2m}(\Omega) = \left\{ w \in L_{\omega}^{2}(\Omega) : \partial_t w, \partial_x^j w \in L_{\omega}^{2}(\Omega), j = 1, 2, \ldots, 2m \right\}.$$

L'espace $\mathcal{H}_{\omega}^{1,2m}(\Omega)$ est muni de la norme naturelle

$$\|w\|_{\mathcal{H}_{\omega}^{1,2m}(\Omega)} = \left(\|\partial_t w\|_{L_{\omega}^{2}(\Omega)}^{2} + \sum_{j=0}^{2m} \left\|\partial_x^j w\right\|_{L_{\omega}^{2}(\Omega)}^{2} \right)^{1/2}.$$

Bien que les équations paraboliques du second ordre dans des domaines non réguliers sont bien étudiées, la littérature concernant les problèmes paraboliques d'ordre supérieur dans des domaines non cylindriques ne semble pas être très riche. Un problème aux limites pour des équations paraboliques d'ordre supérieur associées à des conditions de Cauchy-Dirichlet dans des domaines non cylindriques (dans le cadre fonctionnel des espaces de Sobolev) a été considéré par Mikhailov [47] et [48] dans les deux cas unidimensionnel et multidimensionnel, respectivement. Dans le cadre fonctionnel des espaces de Hölder, nous pouvons trouver dans [6] et [13] des résultats de résolution de problèmes aux limites pour une équation parabolique d'ordre 2m posée dans des domaines non cylindriques (du même genre que le domaine Ω considéré dans ce travail mais qui ne peuvent pas l'inclure). D'autres références sur l'analyse des problèmes paraboliques d'ordre supérieur dans des domaines non cylindriques sont : Galaktionov [20], Grimaldi Piro [22], Kheloufi [28], [29], [35] et Labbas *et al.* [40].

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la section 2, nous commençons par démontrer un résultat d'unicité des solutions pour les deux problèmes considérés. Dans la section 3, nous démontrons d'abord que les problèmes (3.3) et (3.4) admettent des solutions (uniques) dans le cas de domaines tronqués. Ensuite, nous approximons Ω par une suite $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de tels domaines tronqués et nous établissons (pour T assez petit) des estimations uniformes du type

$$\|u_n\|_{\mathcal{H}_{\omega}^{1,2m}(\Omega_n)} \leq K \|f_1\|_{L_{\omega}^{2}(\Omega_n)}, \quad \|v_n\|_{\mathcal{H}_{\omega}^{1,2m}(\Omega_n)} \leq K \|f_2\|_{L_{\omega}^{2}(\Omega_n)},$$

où u_n et v_n sont des solutions des problèmes (3.3) et (3.4), respectivement, dans Ω_n et K est une constante indépendante de n. Ces estimations nous permettront de passer à la limite et de démontrer des résultats locaux en temps. Enfin, en utilisant un résultat de trace, nous montrons dans la section 4 que les résultats locaux en temps obtenus peuvent être étendus à des résultats globaux en temps.

3.2 Unicité de la solution

Proposition 3.2.1. Le problème (3.3) (respectivement, (3.4)) admet au plus une solution.

Démonstration. Considérons $u \in \mathcal{H}^{1,2m}_{\gamma,\omega}(\Omega)$ (respectivement, $v \in \mathcal{H}^{1,2m}_{\delta,\omega}(\Omega)$) une solution du problème (3.3) (respectivement, (3.4)) correspondant à un second membre nul. Alors,

$$\partial_t u + (-1)^m \partial_x^{2m} u = \partial_t v + (-1)^m \partial_x^{2m} v = 0 \text{ dans } \Omega.$$

De plus, u et v vérifient les conditions aux limites

$$\partial_x^k u\big|_{\Gamma_1} = \partial_x^l u\big|_{\Gamma_2} = 0;\ \partial_x^k v\big|_{\Gamma_2} = \partial_x^l v\big|_{\Gamma_1} = 0,\ k = 0, 1, ..., m-1,\ l = m, ..., 2m-1.$$

En utilisant la formule de Green, nous aurons

$$\int_\Omega \left[(\partial_t u + (-1)^m \partial_x^{2m} u)\, u + (\partial_t v + (-1)^m \partial_x^{2m} v)\, v\right] \omega(t)\, dt\ dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} \sum_{k=0}^{m-1} (\partial_x^{2m-k-1} u . \partial_x^k u + \partial_x^{2m-k-1} v . \partial_x^k v)(-1)^{k+m} \nu_x \omega(t)\, d\sigma$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \tfrac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2) \nu_t \omega(t)\, d\sigma + \int_\Omega (|\partial_x^m u|^2 + |\partial_x^m v|^2) \omega(t)\, dt dx$$

$$- \int_\Omega \tfrac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2) \omega'(t)\, dt\ dx,$$

où ν_t et ν_x sont les composantes du vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur à $\partial\Omega$. Nous devons réécrire l'intégrale sur le bord de Ω en utilisant les conditions aux limites. Sur la partie de la frontière de Ω où $t = T$, nous avons $\nu_x = 0$ et $\nu_t = 1$. Par conséquent, l'intégrale sur la frontière correspondante

$$\int_{\varphi_1(T)}^{\varphi_2(T)} [\frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2] \omega(T)\, dx,$$

est positive. Sur la partie de la frontière de Ω où $x = \varphi_i(t)$, $i = 1,\ 2$, nous avons

$$\nu_x = \frac{(-1)^i}{\sqrt{1 + (\varphi_i')^2(t)}},\ \nu_t = \frac{(-1)^{i+1} \varphi_i'(t)}{\sqrt{1 + (\varphi_i')^2(t)}},$$

et

$$\partial_x^k u(t, \varphi_1(t)) = \partial_x^l u(t, \varphi_2(t)) = \partial_x^k v(t, \varphi_2(t)) = \partial_x^l v(t, \varphi_1(t)) = 0,$$

$k = 0, 1, ..., m-1;\ l = m, m+1, ..., 2m-1$. Par conséquent, l'intégrale sur la frontière correspondante est

$$\int_0^T -\frac{\varphi_2'(t)}{2} u^2(t, \varphi_2(t))\, \omega(t)\, dt + \int_0^T \frac{\varphi_1'(t)}{2} v^2(t, \varphi_1(t))\, \omega(t)\, dt.$$

Donc, nous obtenons

$$\int_{\Omega}[(\partial_t u+(-1)^m\partial_x^{2m}u)\,u+(\partial_t v+(-1)^m\partial_x^{2m}v)\,v]\;\omega\,(t)\,dt\;dx$$

$$=\int_0^T-\frac{\varphi_2'\,(t)}{2}u^2\,(t,\varphi_2\,(t))\,\omega\,(t)\,dt+\int_0^T\frac{\varphi_1'\,(t)}{2}v^2\,(t,\varphi_1\,(t))\,\omega\,(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\varphi_1(T)}^{\varphi_2(T)}[u^2\,(T,x)+v^2\,(T,x)]\;\omega\,(T)\,dx+\int_{\Omega}[|\partial_x^m u|^2+|\partial_x^m v|^2]\omega\,(t)\,dt\;dx$$

$$-\int_{\Omega}\tfrac{1}{2}[|u|^2+|v|^2]\omega'\,(t)\,dt\;dx.$$

Par conséquent,

$$\int_{\Omega}\left(\partial_t u+(-1)^m\partial_x^{2m}u\right)u\;\omega\,(t)\;\;dt\;dx=\int_{\Omega}\left(\partial_t v+(-1)^m\partial_x^{2m}v\right)v\;\omega\,(t)\;\;dt\;dx=0$$

donne

$$\int_{\Omega}\left(|\partial_x^m u|^2\right)\omega\,(t)\,dt\;dx=\int_{\Omega}\left(|\partial_x^m v|^2\right)\omega\,(t)\,dt\;dx=0,$$

car

$$\int_{\varphi_1(T)}^{\varphi_2(T)}\frac{1}{2}[|u|^2+|v|^2]\omega\,(T)\,dx-\int_{\Omega}\frac{1}{2}[|u|^2+|v|^2]\omega'\,(t)\,dt\;dx\geq 0,$$

grâce aux conditions (3.5) et (3.6) et

$$\int_0^T-\frac{\varphi_2'\,(t)}{2}u^2\,(t,\varphi_2\,(t))\,\omega\,(t)\,dt+\int_0^T\frac{\varphi_1'\,(t)}{2}v^2\,(t,\varphi_1\,(t))\,\omega\,(t)\,dt\geq 0,$$

grâce à la condition (3.1). Cela implique que $|\partial_x^m u|^2=|\partial_x^m v|^2=0$ et par conséquent $\partial_x^{2m}u=\partial_x^{2m}v=0$. Donc, l'hypothèse $\partial_t u+(-1)^m\partial_x^{2m}u=\partial_t v+(-1)^m\partial_x^{2m}v=0$ donne $\partial_t u=\partial_t v=0$. Ainsi, $u=\sum_{k=0}^{m-1}a_k x^k,\;\; v=\sum_{k=0}^{m-1}b_k x^k,\;\; a_k,b_k\in\mathbb{R},\;\; k=0,1,...,m-1$. Les conditions aux limites impliquent que $u=v=0$ dans Ω. Cela démontre l'unicité des solutions des problèmes (3.3) et (3.4). □

Remarque 3.2.1. Dans la suite, nous nous intéresserons uniquement à la question de l'existence de solutions des problèmes (3.3) et (3.4).

3.3 Résultats locaux en temps

3.3.1 Cas d'un domaine tronqué Ω_n

Dans cette sous section, nous remplaçons Ω par

$$\Omega_n := \left\{(t,x) \in \Omega : \frac{1}{n} < t < T\right\},\ n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \frac{1}{n} < T.$$

Théorème 3.3.1. *Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < T$, le problème*

$$\begin{cases} \partial_t u_n + (-1)^m \partial_x^{2m} u_n = f_{1,n} \in L^2_\omega(\Omega_n), \\ u_n|_{t=\frac{1}{n}} = 0, \\ \partial_x^k u_n\big|_{\Gamma_{1,n}} = \partial_x^l u_n\big|_{\Gamma_{2,n}} = 0,\ k = 0, \dots, m-1;\ l = m, \dots, 2m-1, \end{cases} \tag{3.7}$$

(respectivement,

$$\begin{cases} \partial_t v_n + (-1)^m \partial_x^{2m} v_n = f_{2,n} \in L^2_\omega(\Omega_n), \\ v_n|_{t=\frac{1}{n}} = 0, \\ \partial_x^k v_n\big|_{\Gamma_{2,n}} = \partial_x^l v_n\big|_{\Gamma_{1,n}} = 0,\ k = 0, \dots, m-1;\ l = m, \dots, 2m-1,) \end{cases} \tag{3.8}$$

admet une solution unique $u_n \in \mathcal{H}^{1,2m}_\omega(\Omega_n)$ (respectivement, $v_n \in \mathcal{H}^{1,2m}_\omega(\Omega_n)$). Ici,

$$f_{i,n} = f_i|_{\Omega_n} \text{ et } \Gamma_{i,n} = \{(t, \varphi_i(t)) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} < t < T\},\ i = 1, 2.$$

Démonstration. L'unicité de la solution est facile à vérifier, grâce aux conditions aux limites. Montrons l'existence de la solution. Le changement de variables

$$\Phi : (t,x) \mapsto (t,y) = \left(t, \frac{x - \varphi_1(t)}{\varphi(t)}\right),$$

transforme Ω_n en le rectangle $R_n = \left]\frac{1}{n}, T\right[\times]0,1[$. Posons

$$u_n(t,x) = w_{1,n}(t,y),\ v_n(t,x) = w_{2,n}(t,y) \text{ et } f_{i,n}(t,x) = g_{i,n}(t,y),\ i = 1, 2,$$

alors les problèmes (3.7) et (3.8) deviennent

$$\begin{cases} \partial_t w_{1,n} + a(t,y)\,\partial_y w_{1,n} + c(t)\,\partial_y^{2m} w_{1,n} = g_{1,n}, \\ w_{1,n}|_{t=\frac{1}{n}} = 0, \\ \partial_y^k w_{1,n}\big|_{y=0} = \partial_y^l w_{1,n}\big|_{y=1} = 0,\ k = 0, \dots, m-1;\ l = m, \dots, 2m-1, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \partial_t w_{2,n} + a(t,y)\,\partial_y w_{2,n} + c(t)\,\partial_y^{2m} w_{2,n} = g_{2,n}, \\ w_{2,n}|_{t=\frac{1}{n}} = 0, \\ \partial_y^k w_{2,n}\big|_{y=1} = \partial_y^l w_{2,n}\big|_{y=0} = 0,\ k = 0, \dots, m-1;\ l = m, \dots, 2m-1, \end{cases}$$

où $a(t,y) = -\dfrac{y\varphi'(t) + \varphi_1'(t)}{\varphi(t)}$ et $c(t) = \dfrac{(-1)^m}{\varphi^{2m}(t)}$.
Le changement de variables défini ci-dessus conserve les espaces L^2_ω et $\mathcal{H}^{1,2m}_\omega$ car les fonctions a et c sont bornées pour $t \in \left]\frac{1}{n}, T\right[$. En d'autres termes

$$f_{i,n} \in L^2_\omega(\Omega_n) \Longleftrightarrow g_{i,n} \in L^2_\omega(R_n),\ i = 1,\ 2,$$

et

$$u_n, v_n \in \mathcal{H}^{1,2m}_\omega(\Omega_n) \Longleftrightarrow w_{1,n}, w_{2,n} \in \mathcal{H}^{1,2m}_\omega(R_n).$$

Lemme 3.3.1. *Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < T$, l'opérateur suivant est compact :*

$$\mathcal{H}^{1,2m}_{\gamma,\omega}(R_n) \longrightarrow L^2_\omega(R_n),\ w_{1,n} \mapsto a(t,y)\,\partial_y w_{1,n},$$

(respectivement, $\mathcal{H}^{1,2m}_{\delta,\omega}(R_n) \longrightarrow L^2_\omega(R_n),\ w_{2,n} \mapsto a(t,y)\,\partial_y w_{2,n}$), où

$$\mathcal{H}^{1,2m}_{\gamma,\omega}(R_n) = \left\{ w_{1,n} \in \mathcal{H}^{1,2m}_\omega(R_n) : \begin{array}{l} w_{1,n}|_{t=\frac{1}{n}} = \partial_y^k w_{1,n}\big|_{y=0} = \partial_y^l w_{1,n}\big|_{y=1} = 0, \\ k = 0, \dots, m-1; l = m, \dots, 2m-1 \end{array} \right\}$$

(respectivement,

$$\mathcal{H}^{1,2m}_{\delta,\omega}(R_n) = \left\{ w_{2,n} \in \mathcal{H}^{1,2m}_\omega(R_n) : \begin{array}{l} w_{2,n}|_{t=\frac{1}{n}} = \partial_y^k w_{2,n}\big|_{y=1} = \partial_y^l w_{2,n}\big|_{y=0} = 0, \\ k = 0, \dots, m-1; l = m, \dots, 2m-1 \end{array} \right\}).$$

Démonstration. R_n possède la "propriété de la corne" de Besov [7], donc

$$\partial_y : \mathcal{H}^{1,2m}_{\gamma,\omega}(R_n) \longrightarrow \mathcal{H}^{1-\frac{1}{2m},2m-1}_\omega(R_n),\ w_{1,n} \mapsto \partial_y w_{1,n},$$

(respectivement,

$$\partial_y : \mathcal{H}^{1,2m}_{\delta,\omega}(R_n) \longrightarrow \mathcal{H}^{1-\frac{1}{2m},2m-1}_\omega(R_n),\ w_{2,n} \mapsto \partial_y w_{2,n}),$$

est continu. Comme R_n est borné, l'injection canonique est compacte de $\mathcal{H}^{1-\frac{1}{2m},2m-1}_\omega(R_n)$ dans $L^2_\omega(R_n)$, (voir par exemple [7]), où

$$\mathcal{H}^{1-\frac{1}{2m},2m-1}_\omega(R_n) = L^2_\omega\left(\frac{1}{n}, T; H^{2m-1}_\omega]0,1[\right) \cap H^{1-\frac{1}{2m}}_\omega\left(\frac{1}{n}, T; L^2_\omega]0,1[\right).$$

Pour les définitions des espaces de Sobolev hilbertien $\mathcal{H}^{r,s}$, voir par exemple [45]. Donc, ∂_y est un opérateur compact de $\mathcal{H}^{1,2m}_{\gamma,\omega}(R_n)$ dans $L^2_\omega(R_n)$, (respectivement, de $\mathcal{H}^{1,2m}_{\delta,\omega}(R_n)$ dans $L^2_\omega(R_n)$). De plus, comme $a(.,.)$ est une fonction bornée, l'opérateur $a\partial_y$ est alors compact de $\mathcal{H}^{1,2m}_{\gamma,\omega}(R_n)$ dans $L^2_\omega(R_n)$, (respectivement, de $\mathcal{H}^{1,2m}_{\delta,\omega}(R_n)$ dans $L^2_\omega(R_n)$). □

Donc, il suffit de montrer que l'opérateur $\partial_t + \dfrac{(-1)^m}{\varphi^{2m}}\partial_y^{2m}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}^{1,2m}_{\gamma,\omega}(R_n)$ dans $L^2_\omega(R_n)$, (respectivement, de $\mathcal{H}^{1,2m}_{\delta,\omega}(R_n)$ dans $L^2_\omega(R_n)$). Un simple changement de variable $t = h(s)$ avec $h'(s) = \varphi^{2m}(t)$, transforme les problèmes

$$\begin{cases} \partial_t w_{1,n} + \dfrac{(-1)^m}{\varphi^{2m}(t)}\partial_y^{2m} w_{1,n} = g_{1,n}, \\ w_{1,n}\big|_{t=\frac{1}{n}} = 0, \\ \partial_y^k w_{1,n}\big|_{y=0} = \partial_y^l w_{1,n}\big|_{y=1} = 0,\ k = 0,\dots,m-1;\ l = m,\dots,2m-1, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \partial_t w_{2,n} + \dfrac{(-1)^m}{\varphi^{2m}(t)}\partial_y^{2m} w_{2,n} = g_{2,n}, \\ w_{2,n}\big|_{t=\frac{1}{n}} = 0, \\ \partial_y^k w_{2,n}\big|_{y=1} = \partial_y^l w_{2,n}\big|_{y=0} = 0,\ k = 0,\dots,m-1;\ l = m\dots,2m-1, \end{cases}$$

en les problèmes suivants :

$$\begin{cases} \partial_s w_n^1(s,y) + (-1)^m \partial_y^{2m} w_n^1(s,y) = \xi_n^1(s,y), \\ w_n^1|_{s=h^{-1}(\frac{1}{n})} = 0, \\ \partial_y^k w_n^1\big|_{y=0} = \partial_y^l w_n^1\big|_{y=1} = 0,\ k = 0,\dots,m-1;\ l = m,\dots,2m-1, \end{cases} \tag{3.9}$$

et

$$\begin{cases} \partial_s w_n^2(s,y) + (-1)^m \partial_y^{2m} w_n^2(s,y) = \xi_n^2(s,y), \\ w_n^2|_{s=h^{-1}(\frac{1}{n})} = 0, \\ \partial_y^k w_n^2\big|_{y=1} = \partial_y^l w_n^2\big|_{y=0} = 0,\ k = 0,\dots,m-1;\ l = m,\dots,2m-1, \end{cases} \tag{3.10}$$

avec

$$\xi_n^i(s,y) = \frac{g_{i,n}(t,y)}{h'(s)} \text{ et } w_n^i(s,y) = w_{i,n}(t,y),\ i = 1,2.$$

Notons que ce changement de variables préserve les espaces L^2_ω et $\mathcal{H}^{1,2m}_\omega$. Il s'ensuit qu'il existe un unique $w_n^1 \in \mathcal{H}^{1,2m}_\omega$ (respectivement, $w_n^2 \in \mathcal{H}^{1,2m}_\omega$) solution du problème (3.9) (respectivement, (3.10)). Cela implique que le problème (3.7) (respectivement, (3.8)) admet une unique solution $u_n \in \mathcal{H}^{1,2m}_\omega(\Omega_n)$ (respectivement, $v_n \in \mathcal{H}^{1,2m}_\omega(\Omega_n)$). Nous obtenons les fonctions u_n et v_n en posant

$$u_n(t,x) = w_{1,n}(t,y) = w_n^1\left(h^{-1}(t), y\right) \text{ et } v_n(t,x) = w_{2,n}(t,y) = w_n^2(h^{-1}(t),y).$$

□

Nous aurons besoin du résultat suivant pour justifier les calculs de la section suivante.

Lemme 3.3.2. *Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < T$, l'espace*

$$\left\{ u_n \in D\left([\frac{1}{n}, T]; H^{2m}_\omega(0,1)\right) : \begin{array}{c} u_n|_{t=\frac{1}{n}} = \partial_y^k u_n\big|_{y=0} = \partial_y^l u_n\big|_{y=1} = 0, \\ k = 0,\dots,m-1;\ l = m,\dots,2m-1 \end{array} \right\},$$

(respectivement,

$$\left\{ v_n \in D\left([\frac{1}{n}, T]; H_\omega^{2m}(0,1) \right) : \begin{array}{l} v_n|_{t=\frac{1}{n}} = \partial_y^k v_n\big|_{y=1} = \partial_y^l v_n\big|_{y=0} = 0, \\ k = 0, \ldots, m-1;\ l = m, \ldots, 2m-1 \end{array} \right\}),$$

est dense dans

$$\left\{ u_n \in \mathcal{H}_\omega^{1,2m}\left(\left] \frac{1}{n}, T \right[\times]0,1[\right) : \begin{array}{l} u_n|_{t=\frac{1}{n}} = \partial_y^k u_n\big|_{y=0} = \partial_y^l u_n\big|_{y=1} = 0, \\ k = 0, \ldots, m-1;\ l = m, \ldots, 2m-1 \end{array} \right\},$$

(respectivement,

$$\left\{ v_n \in \mathcal{H}_\omega^{1,2m}\left(\left] \frac{1}{n}, T \right[\times]0,1[\right) : \begin{array}{l} v_n|_{t=\frac{1}{n}} = \partial_y^k v_n\big|_{y=1} = \partial_y^l v_n\big|_{y=0} = 0, \\ k = 0, \ldots, m-1;\ l = m, \ldots, 2m-1 \end{array} \right\}).$$

C'est un cas particulier de théorème 2.1 de [45].

Remarque 3.3.1. Nous pouvons remplacer dans le lemme 3.3.2 $R_n = \left] \frac{1}{n}, T \right[\times]0,1[$ par Ω_n à l'aide du changement de variables Φ défini précédemment.

3.3.2 Cas d'un domaine triangulaire

Maintenant, nous revenons au domaine non rectangulaire Ω et nous supposons que la fonction φ_2 (respectivement, φ_1) satisfait les conditions (3.1) et (3.2) dans le cas du problème (3.3) (respectivement, (3.4)).
Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < T$, notons $f_{i,n} = f_i|_{\Omega_n} \in L^2_\omega(\Omega_n)$, $i = 1, 2$ et $u_n \in \mathcal{H}^{1,2m}_{\gamma,\omega}(\Omega_n)$ (respectivement, $v_n \in \mathcal{H}^{1,2m}_{\delta,\omega}(\Omega_n)$) la solution de problème (3.3) (respectivement, (3.4)) dans Ω_n. Les solutions u_n et v_n existent grâce au théorème 3.3.1.

Théorème 3.3.2. *Pour T assez petit, il existe une constante $C > 0$ indépendante de n telle que*

$$\|u_n\|^2_{\mathcal{H}^{1,2m}_\omega(\Omega_n)} \leq C \|f_{1,n}\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} \leq C \|f_1\|^2_{L^2_\omega(\Omega)},$$

$$\|v_n\|^2_{\mathcal{H}^{1,2m}_\omega(\Omega_n)} \leq C \|f_{2,n}\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} \leq C \|f_2\|^2_{L^2_\omega(\Omega)}.$$

Afin de démontrer le théorème 3.3.2, nous aurons besoin de quelques résultats préliminaires.

Lemme 3.3.3. *Pour tout $\epsilon > 0$ satisfaisant $(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) \leq \epsilon$, il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de n, telle que*

$$\left\|\partial_x^j u_n\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} \leq C_1 \epsilon^{2(2m-j)} \left\|\partial_x^{2m} u_n\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)}, j = 0, 1, \ldots, 2m-1$$

$$\left\|\partial_x^j v_n\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} \leq C_1 \epsilon^{2(2m-j)} \left\|\partial_x^{2m} v_n\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)}, j = 0, 1, \ldots, 2m-1.$$

Démonstration. Nous remplaçons dans le lemme 1.2.3 u par u_n, v par v_n et $]a,b[$ par $]\varphi_1(t), \varphi_2(t)[$, pour un t fixé. Nous obtenons pour $j = 0, 1, \ldots, 2m-1$

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \left(\partial_x^j u_n\right)^2 dx &\leq C_1 \left(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\right)^{2(2m-j)} \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \left(\partial_x^{2m} u_n\right)^2 dx \\ &\leq C_1 \epsilon^{2(2m-j)} \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \left(\partial_x^{2m} u_n\right)^2 dx, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \left(\partial_x^j v_n\right)^2 dx &\leq C_1 \left(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\right)^{2(2m-j)} \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \left(\partial_x^{2m} v_n\right)^2 dx \\ &\leq C_1 \epsilon^{2(2m-j)} \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \left(\partial_x^{2m} v_n\right)^2 dx, \end{aligned}$$

où C_1 est la constante de lemme 1.2.3. En multipliant l'inégalité précédente par $\omega(t)$ (qui est positive) et en intégrant par rapport à t, nous obtenons les estimations souhaitées. □

Démonstration du Théorème 3.3.2 : Notons par $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire dans $L^2_\omega(\Omega_n)$ et posons $L = \partial_t + (-1)^m \partial_x^{2m}$, alors nous avons

$$\|f_{1,n}\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} = \langle Lu_n, Lu_n \rangle = \|\partial_t u_n\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} + \left\|\partial_x^{2m} u_n\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} + 2\langle \partial_t u_n, (-1)^m \partial_x^{2m} u_n \rangle,$$

et

$$\|f_{2,n}\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} = \langle Lv_n, Lv_n \rangle = \|\partial_t v_n\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} + \left\|\partial_x^{2m} v_n\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} + 2\langle \partial_t v_n, (-1)^m \partial_x^{2m} v_n \rangle.$$

Estimation de $2\langle \partial_t u_n, (-1)^m \partial_x^{2m} u_n \rangle$: Nous avons

$$(-1)^m \partial_t u_n . \partial_x^{2m} u_n = \sum_{k=0}^{m-1} \partial_x \left(\partial_x^k \partial_t u_n . \partial_x^{2m-k-1} u_n\right) (-1)^{m+k} + \frac{1}{2} \partial_t \left(\partial_x^m u_n\right)^2 .$$

Donc

$$\begin{aligned} 2\langle \partial_t u_n, (-1)^m \partial_x^{2m} u_n \rangle &= 2 \int_{\Omega_n} \sum_{k=0}^{m-1} \partial_x \left(\partial_x^k \partial_t u_n . \partial_x^{2m-k-1} u_n\right) (-1)^{m+k} \omega(t) dt dx \\ &\quad + \int_{\Omega_n} \partial_t \left(\partial_x^m u_n\right)^2 \omega(t) dt dx \\ &= 2 \int_{\partial\Omega_n} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\partial_x^k \partial_t u_n . \partial_x^{2m-k-1} u_n\right) (-1)^{m+k} \nu_x \omega(t) d\sigma \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_n} \left(\partial_x^m u_n\right)^2 \nu_t \omega(t) d\sigma - \int_{\Omega_n} \left(\partial_x^m u_n\right)^2 \omega'(t) dt dx \end{aligned}$$

où ν_t et ν_x sont les composantes du vecteur unitaire normal orienté vers l'extérieur à $\partial\Omega_n$. Nous réécrirons l'intégrale sur la frontière en utilisant les conditions aux limites. Sur la partie du bord de Ω_n où $t = \frac{1}{n}$, nous avons $u_n = 0$ et par conséquent $\partial_x^k u_n = 0, k = 0, \ldots, 2m-1$. L'intégrale au bord correspondante s'annule. Sur la partie de la frontière où $t = T$, nous avons $\nu_x = 0$ et $\nu_t = 1$. Par conséquent, l'intégrale au bord correspondante

$$\int_{\varphi_1(T)}^{\varphi_2(T)} \left(\partial_x^m u_n\right)^2 (T, x) \, \omega(T) \, dx$$

est positive. Sur les parties de la frontière de Ω_n où $x=\varphi_i(t)$, $i=1,2$, nous avons

$$\nu_x=\frac{(-1)^i}{\sqrt{1+(\varphi_i')^2(t)}},\ \nu_t=\frac{(-1)^{i+1}\varphi_i'(t)}{\sqrt{1+(\varphi_i')^2(t)}},$$

et

$$\partial_x^k u_n(t,\varphi_1(t))=\partial_x^l u_n(t,\varphi_2(t))=0,\ k=0,\dots,m-1;\ l=m,\dots,2m-1.$$

En dérivant $\partial_x^k u_n(t,\varphi_1(t))$, $k=0,\dots,m-1$ par rapport à t, nous obtenons

$$\partial_t\partial_x^k u_n(t,\varphi_1(t))=-\varphi_1'(t)\,\partial_x^{k+1}u_n(t,\varphi_1(t)).$$

Les conditions aux limites sur $\Gamma_{1,n}=\{(t,\varphi_1(t))\in\mathbb{R}^2:\frac{1}{n}<t<T\}$, conduisent à

$$\partial_t\partial_x^k u_n(t,\varphi_1(t)) = \begin{cases} 0 & \text{si } k=0,\dots,m-2,\\ -\varphi_1'(t)\,\partial_x^m u_n(t,\varphi_1(t)) & \text{si } k=m-1.\end{cases}$$

Par conséquent, l'intégrale correspondante est

$$I_{n,1}=-\int_{\frac{1}{n}}^{T}\varphi_1'(t)\left[\partial_x^m u_n(t,\varphi_1(t))\right]^2\omega(t)dt.$$

Par suite, nous avons

$$2\langle\partial_t u_n,(-1)^m\partial_x^{2m}u_n\rangle\geq-\left|I_{n,1}\right|. \tag{3.11}$$

Estimation de $2\langle\partial_t v_n,(-1)^m\partial_x^{2m}v_n\rangle$: Nous avons

$$(-1)^m\partial_t v_n.\partial_x^{2m}v_n = \textstyle\sum_{k=0}^{m-1}\partial_x\left(\partial_x^k\partial_t v_n.\partial_x^{2m-k-1}v_n\right)(-1)^{m+k}+\frac{1}{2}\partial_t\left(\partial_x^m v_n\right)^2.$$

Donc

$$\begin{aligned}2\langle\partial_t v_n,(-1)^m\partial_x^{2m}v_n\rangle &= 2\int_{\Omega_n}\sum_{k=0}^{m-1}\partial_x\left(\partial_x^k\partial_t v_n.\partial_x^{2m-k-1}v_n\right)(-1)^{m+k}\omega(t)dtdx\\ &\quad+\int_{\Omega_n}\partial_t\left(\partial_x^m v_n\right)^2\omega(t)dtdx\\ &= 2\int_{\partial\Omega_n}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\partial_x^k\partial_t v_n.\partial_x^{2m-k-1}v_n\right)(-1)^{m+k}\nu_x\omega(t)d\sigma\\ &\quad+\int_{\partial\Omega_n}\left(\partial_x^m v_n\right)^2\nu_t\omega(t)d\sigma-\int_{\Omega_n}\left(\partial_x^m v_n\right)^2\omega'(t)dtdx\end{aligned}$$

où ν_t et ν_x sont les composantes du vecteur normal orienté vers l'extérieur à $\partial\Omega_n$. Nous devons réécrire l'intégrale sur la frontière en utilisant les conditions aux limites. Sur la partie du bord de Ω_n où $t=\frac{1}{n}$, nous avons $v_n=0$ et par conséquent $\partial_x^k v_n=0, k=0,\dots,2m-1$. L'intégrale au bord correspondante s'annule. Sur la partie de la frontière où $t=T$, nous avons $\nu_x=0$ et $\nu_t=1$. Par conséquent, l'intégrale au bord correspondante

$$\int_{\varphi_1(T)}^{\varphi_2(T)}\left(\partial_x^m v_n\right)^2(T,x)\,\omega(T)\,dx$$

est positive. Sur les parties de la frontière de Ω_n où $x = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2$, nous avons

$$\nu_x = \frac{(-1)^i}{\sqrt{1 + (\varphi_i')^2(t)}}, \ \nu_t = \frac{(-1)^{i+1}\varphi_i'(t)}{\sqrt{1 + (\varphi_i')^2(t)}},$$

et

$$\partial_x^k v_n(t, \varphi_2(t)) = \partial_x^l v_n(t, \varphi_1(t)) = 0, \ k = 0, \ldots, m-1; \ l = m, \ldots, 2m-1.$$

En dérivant $\partial_x^k v_n(t, \varphi_2(t))$, $k = 0, \ldots, m-1$ par rapport à t, nous obtenons

$$\partial_t \partial_x^k v_n(t, \varphi_2(t)) = -\varphi_2'(t)\, \partial_x^{k+1} v_n(t, \varphi_2(t)).$$

Les conditions aux limites sur $\Gamma_{2,n} = \{(t, \varphi_2(t)) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} < t < T\}$, conduisent à

$$\partial_t \partial_x^k v_n(t, \varphi_2(t)) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0, \ldots, m-2, \\ -\varphi_2'(t)\, \partial_x^m v_n(t, \varphi_2(t)) & \text{si } k = m-1. \end{cases}$$

Par conséquent, l'intégrale correspondante est

$$I_{n,2} = \int_{\frac{1}{n}}^{T} \varphi_2'(t) \left[\partial_x^m v_n(t, \varphi_2(t))\right]^2 \omega(t) dt.$$

Par suite, nous avons

$$2\langle \partial_t v_n, (-1)^m \partial_x^{2m} v_n \rangle \geq -\left| I_{n,2} \right|. \tag{3.12}$$

Estimation de $I_{n,k}, k = 1, 2$: Il existe une constante $K_3 > 0$ indépendante de n telle que

$$\left| I_{n,1} \right| \leq K_3 \epsilon \left\| \partial_x^{2m} u_n \right\|_{L_\omega^2(\Omega_n)}^2 \ \text{ et } \ \left| I_{n,2} \right| \leq K_3 \epsilon \left\| \partial_x^{2m} v_n \right\|_{L_\omega^2(\Omega_n)}^2. \tag{3.13}$$

En effet, nous transformons l'intégrale au bord $I_{n,1}$ en une intégrale sur Ω_n en posant

$$\begin{aligned} \left[\partial_x^m u_n(t, \varphi_1(t))\right]^2 &= -\tfrac{\varphi_2(t)-x}{\varphi(t)} \left[\partial_x^m u_n(t, x)\right]^2 \Big|_{x=\varphi_1(t)}^{x=\varphi_2(t)} \\ &= -\int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \partial_x \left\{ \tfrac{\varphi_2(t)-x}{\varphi(t)} \left[\partial_x^m u_n\right]^2 \right\} dx \\ &= -2\int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \tfrac{\varphi_2(t)-x}{\varphi(t)} \partial_x^m u_n . \partial_x^{m+1} u_n dx + \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \tfrac{1}{\varphi(t)} \left[\partial_x^m u_n\right]^2 dx. \end{aligned}$$

Donc, nous avons

$$\begin{aligned} I_{n,1} &= -\int_{\frac{1}{n}}^{T} \varphi_1'(t) \left[\partial_x^m u_n(t, \varphi_1(t))\right]^2 \omega(t)\, dt \\ &= -\int_{\Omega_n} \tfrac{\varphi_1'(t)}{\varphi(t)} \left[\partial_x^m u_n(t, x)\right]^2 \omega(t)\, dt dx \\ &\quad +2\int_{\Omega_n} \tfrac{\varphi_2(t)-x}{\varphi(t)} \varphi_1'(t) \left(\partial_x^m u_n\right) \left(\partial_x^{m+1} u_n\right) \ \omega(t)\, dt dx. \end{aligned}$$

Grâce au lemme 3.3.3, nous pouvons écrire

$$\int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \left[\partial_x^m u_n\right]^2 dx \leq K_2 \left[\varphi(t)\right]^{2m} \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \left[\partial_x^{2m} u_n\right]^2 dx.$$

Par suite

$$\int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \left[\partial_x^m u_n\right]^2 \frac{|\varphi_1'|}{\varphi} \omega(t)\, dx \quad \leq \quad K_2 |\varphi_1'| \left[\varphi(t)\right]^{2m-1} \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \left[\partial_x^{2m} u_n\right]^2 \omega(t)\, dx,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} |I_{n,1}| \quad \leq \quad & K_2 \int_{\Omega_n} |\varphi_1'| \left[\varphi(t)\right]^{2m-1} \left(\partial_x^{2m} u_n\right)^2 \omega(t)\, dtdx \\ & +2 \int_{\Omega_n} |\varphi_1'| \left|\partial_x^m u_n\right| \left|\partial_x^{m+1} u_n\right| \; \omega(t)\, dtdx, \end{aligned}$$

puisque $\left|\frac{\varphi_2(t)-x}{\varphi(t)}\right| \leq 1$. En utilisant l'inégalité

$$2 \left|\varphi_1' \partial_x^m u_n\right| \left|\partial_x^{m+1} u_n\right| \quad \leq \quad \epsilon \left(\partial_x^{m+1} u_n\right)^2 + \frac{1}{\epsilon} \left(\varphi_1'\right)^2 \left(\partial_x^m u_n\right)^2$$

pour tout $\epsilon > 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} |I_{n,1}| \quad \leq \quad & K_2 \int_{\Omega_n} |\varphi_1'| \left[\varphi\right]^{2m-1} \left(\partial_x^{2m} u_n\right)^2 \omega(t)\, dtdx \\ & + \int_{\Omega_n} \epsilon \left(\partial_x^{m+1} u_n\right)^2 \omega(t)\, dtdx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega_n} \left(\varphi_1'\right)^2 \left(\partial_x^m u_n\right)^2 \omega(t)\, dtdx. \end{aligned}$$

Le lemme 3.3.3 nous donne

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega_n} \left(\varphi_1'\right)^2 \left(\partial_x^m u_n\right)^2 \omega(t)\, dtdx \leq K_2 \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega_n} \left(\varphi_1'\right)^2 \left[\varphi\right]^{2m} \left(\partial_{x_1}^{2m} u_n\right)^2 \omega(t)\, dtdx.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |I_{n,1}| \quad \leq \quad & K_2 \int_{\Omega_n} \left[|\varphi_1'| \left[\varphi\right]^{2m-1} + \frac{1}{\epsilon} \left(\varphi_1'\right)^2 \left[\varphi\right]^{2m}\right] \left(\partial_x^{2m} u_n\right)^2 \omega(t)\, dtdx \\ & + \int_{\Omega_n} \epsilon \left(\partial_x^{m+1} u_n\right)^2 \omega(t)\, dtdx \\ \leq \quad & \left(K_2 + 1\right) \epsilon \int_{\Omega_n} \left(\partial_x^{2m} u_n\right)^2 \omega(t)\, dtdx, \end{aligned}$$

puisque $\left|\varphi_1' \varphi^m \left(\varphi^{m-1} + \varphi_1' \varphi^m\right)\right| \leq \epsilon$. Enfin, en prenant $K_3 = K_2 + 1$, nous obtenons

$$|I_{n,1}| \quad \leq \quad K_3 \epsilon \left\|\partial_x^{2m} u_n\right\|_{L^2_\omega(\Omega_n)}.$$

L'inégalité

$$|I_{n,2}| \quad \leq \quad K_3 \epsilon \left\|\partial_x^{2m} v_n\right\|_{L^2_\omega(\Omega_n)},$$

peut être démontrée par un argument similaire.

Maintenant, nous pouvons terminer la démonstration du théorème 3.3.2. En regroupant les estimations (3.11), (3.12) et (3.13), et en utilisant le lemme 3.3.3, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left\|f_{1,n}\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} \quad \geq \quad & \left\|\partial_t u_n\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} + \left\|\partial_x^{2m} u_n\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} - K_3 \epsilon \left\|\partial_x^{2m} u_n\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} \\ \geq \quad & \left\|\partial_t u_n\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} + \left(1 - K_3 \epsilon\right) \left\|\partial_x^{2m} u_n\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left\|f_{2,n}\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} \quad \geq \quad & \left\|\partial_t v_n\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} + \left\|\partial_x^{2m} v_n\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} - K_3 \epsilon \left\|\partial_x^{2m} v_n\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} \\ \geq \quad & \left\|\partial_t v_n\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} + \left(1 - K_3 \epsilon\right) \left\|\partial_x^{2m} v_n\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)}, \end{aligned}$$

où K_3 est un nombre positif. Donc, il suffit de choisir ϵ de sorte que $(1 - K_3\epsilon) > 0$, pour obtenir une constante $K_4 > 0$ indépendante de n telle que

$$\|f_{1,n}\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} \geq K_4 \|u_n\|^2_{\mathcal{H}^{1,2m}_\omega(\Omega_n)} \quad \text{et} \quad \|f_{2,n}\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} \geq K_4 \|v_n\|^2_{\mathcal{H}^{1,2m}_\omega(\Omega_n)} .$$

Mais

$$\|f_{1,n}\|_{L^2_\omega(\Omega_n)} \leq \|f_1\|_{L^2_\omega(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|f_{2,n}\|_{L^2_\omega(\Omega_n)} \leq \|f_2\|_{L^2_\omega(\Omega)} ,$$

alors, il existe une constante $C > 0$, indépendante de n satisfaisant

$$\|u_n\|^2_{\mathcal{H}^{1,2m}_\omega(\Omega_n)} \leq C \|f_{1,n}\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} \leq C \|f_1\|^2_{L^2_\omega(\Omega)}$$

et

$$\|v_n\|^2_{\mathcal{H}^{1,2m}_\omega(\Omega_n)} \leq C \|f_{2,n}\|^2_{L^2_\omega(\Omega_n)} \leq C \|f_2\|^2_{L^2_\omega(\Omega)} .$$

Ceci termine la démonstration du théorème 3.3.2.

Passage à la limite

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le premier résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.3.3. *Supposons que la fonction de paramétrisation φ_2, (respectivement, φ_1) satisfait les conditions (3.1) et (3.2) et que la fonction poids ω vérifie les conditions (3.5) et (3.6). Alors, pour T assez petit, le problème (3.3) (respectivement, le problème (3.4)) admet une unique solution u (respectivement, v) appartenant à $\mathcal{H}^{1,2m}_{\gamma,\omega}(\Omega)$ (respectivement, $\mathcal{H}^{1,2m}_{\delta,\omega}(\Omega)$).*

Démonstration. Choisissons une suite $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de domaines définis dans la sous section 3.3.1. Alors, nous avons $\Omega_n \to \Omega$, lorsque $n \to +\infty$. Considérons les solutions $u_n, v_n \in \mathcal{H}^{1,2m}_\omega(\Omega_n)$ des problèmes aux limites

$$\begin{cases} \partial_t u_n + (-1)^m \partial_x^{2m} u_n = f_{1,n} \in L^2_\omega(\Omega_n), \\ u_n|_{t=\frac{1}{n}} = 0, \\ \partial_x^k u_n\big|_{\Gamma_{1,n}} = \partial_x^l u_n\big|_{\Gamma_{2,n}} = 0, \ k = 0, \dots, m-1; \ l = m, \dots, 2m-1, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \partial_t v_n + (-1)^m \partial_x^{2m} v_n = f_{2,n} \in L^2_\omega(\Omega_n), \\ v_n|_{t=\frac{1}{n}} = 0, \\ \partial_x^k v_n\big|_{\Gamma_{2,n}} = \partial_x^l v_n\big|_{\Gamma_{1,n}} = 0, \ k = 0, \dots, m-1; \ l = m, \dots, 2m-1, \end{cases}$$

où $\Gamma_{i,n}, \ i = 1, 2$, sont les parties du bord de Ω_n où $x = \varphi_i(t)$. Ces solutions u_n et v_n existent grâce au théorème 3.3.1. Soient $\widetilde{u_n}$ et $\widetilde{v_n}$ les prolongements par 0 de u_n et v_n à Ω, respectivement.

En vertu de théorème 3.3.2, nous savons qu'il existe une constante $K > 0$ indépendante de n telle que

$$\|\widetilde{u_n}\|^2_{L^2_\omega(\Omega)} + \left\|\widetilde{\partial_t u_n}\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega)} + \sum_{j=1}^{2m} \left\|\widetilde{\partial_x^j u_n}\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega)} \leq K \|f_1\|^2_{L^2_\omega(\Omega)},$$

et

$$\|\widetilde{v_n}\|^2_{L^2_\omega(\Omega)} + \left\|\widetilde{\partial_t v_n}\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega)} + \sum_{j=1}^{2m} \left\|\widetilde{\partial_x^j v_n}\right\|^2_{L^2_\omega(\Omega)} \leq K \|f_2\|^2_{L^2_\omega(\Omega)}.$$

Cela signifie que pour $j = 1, \ldots, 2m$, les fonctions $\widetilde{u_n}$, $\widetilde{v_n}$, $\widetilde{\partial_t u_n}$, $\widetilde{\partial_t v_n}$, $\widetilde{\partial_x^j u_n}$ et $\widetilde{\partial_x^j v_n}$ sont bornées dans $L^2_\omega(\Omega)$. Ainsi, pour une suite croissante d'entiers n_k, $k = 1, 2, \ldots$, il existe des fonctions

$$u, v, w^1, w^2, w_j^1 \text{ et } w_j^2,\ j = 1, \ldots, 2m,$$

dans $L^2_\omega(\Omega)$ telles que

$$\widetilde{u_{n_k}} \rightharpoonup u,\ \ \widetilde{\partial_t u_{n_k}} \rightharpoonup w^1,\ \ \widetilde{\partial_x^j u_{n_k}} \rightharpoonup w_j^1,\ j = 1, \ldots, 2m,$$

et

$$\widetilde{v_{n_k}} \rightharpoonup v,\ \ \widetilde{\partial_t v_{n_k}} \rightharpoonup w^2,\ \ \widetilde{\partial_x^j v_{n_k}} \rightharpoonup w_j^2,\ j = 1, \ldots, 2m,$$

faiblement dans $L^2_\omega(\Omega)$, lorsque $k \to +\infty$. Et donc

$$w^1 = \partial_t u,\ w_j^1 = \partial_x^j u, \text{ et } w^2 = \partial_t v,\ w_j^2 = \partial_x^j v,\ j = 1, \ldots, 2m,$$

au sens de distributions dans Ω. Alors, $u, v \in \mathcal{H}^{1,2m}(\Omega)$ et

$$\partial_t u + (-1)^m \partial_x^{2m} u = f_1 \text{ et } \partial_t v + (-1)^m \partial_x^{2m} v = f_2,$$

dans Ω. D'autre part, les solutions u et v satisfont aux conditions aux limites

$$\partial_x^k u\big|_{\Gamma_1} = \partial_x^l u\big|_{\Gamma_2} = 0,\ k = 0, \ldots, m-1;\ l = m, \ldots, 2m-1$$

et

$$\partial_x^k v\big|_{\Gamma_2} = \partial_x^l v\big|_{\Gamma_1} = 0,\ k = 0, \ldots, m-1;\ l = m, \ldots, 2m-1,$$

car

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u\big|_{\Omega_n} = u_n \text{ et } v\big|_{\Omega_n} = v_n.$$

Cela démontre l'existence de solutions aux problèmes (3.3) et (3.4). □

3.4 Résultats globaux en temps

Dans le cas où T n'est pas au voisinage de zéro, nous posons $\Omega = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma_{T_1}$, où

$$D_1 = \{(t,x) \in \Omega : 0 < t < T_1\}, \; D_2 = \{(t,x) \in \Omega : T_1 < t < T\},$$

et

$$\Gamma_{T_1} = \left\{(T_1, x) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_1(T_1) < x < \varphi_2(T_1)\right\},$$

avec T_1 assez petit. Dans la suite, k_1 et k_2 représentent deux éléments quelconques fixés dans $L^2_\omega(\Omega)$ et $k_{1,i} = k_1|_{D_i}, k_{2,i} = k_2|_{D_i}, \; i = 1, 2$.

Le théorème 3.3.3 appliqué au domaine triangulaire D_1, montre qu'il existe des solutions uniques $w_1, w_2 \in \mathcal{H}^{1,2m}_\omega(D_1)$ aux problèmes

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + (-1)^m \partial_x^{2m} w_1 = k_{1,1} \in L^2_\omega(D_1), \\ \partial_x^k w_1\big|_{\Gamma_{1,1}} = \partial_x^l w_1\big|_{\Gamma_{2,1}} = 0, \; k = 0, \dots, m-1; \; l = m, \dots, 2m-1 \end{cases} \tag{3.14}$$

et

$$\begin{cases} \partial_t w_2 + (-1)^m \partial_x^{2m} w_2 = k_{2,1} \in L^2_\omega(D_1), \\ \partial_x^k w_2\big|_{\Gamma_{2,1}} = \partial_x^l w_2\big|_{\Gamma_{1,1}} = 0, \; k = 0, \dots, m-1; \; l = m, \dots, 2m-1, \end{cases} \tag{3.15}$$

où $\Gamma_{i,1}, \; i = 1, 2$, sont les parties de la frontière de D_1 où $x = \varphi_i(t)$.

Lemme 3.4.1. *si $u \in \mathcal{H}^{1,2m}_\omega(]0, T[\times]0, 1[)$, alors*

$$u|_{t=0} \in H^m_\omega(\gamma_0), \; u|_{x=0} \in H^{1-\frac{1}{2m}}_\omega(\gamma_1) \; \text{ et } \; u|_{x=1} \in H^{1-\frac{1}{2m}}_\omega(\gamma_2),$$

où $\gamma_0 = \{0\} \times]0, 1[, \; \gamma_1 =]0, T[\times \{0\}$ et $\gamma_2 =]0, T[\times \{1\}$.

C'est un cas particulier du Théorème 2.1 de ([45], Vol.2).

La transformation

$$(t, x) \longmapsto (t', x') = (t, \varphi(t)\, x + \varphi_1(t)),$$

conduit au lemme suivant :

Lemme 3.4.2. *Si $u \in \mathcal{H}^{1,2m}_\omega(D_2)$, alors*

$$u|_{\Gamma_{T_1}} \in H^m_\omega(\Gamma_{T_1}), \; u|_{x=\varphi_1(t)} \in H^{1-\frac{1}{2m}}_\omega(\Gamma_{1,2}), \; \text{ et } \; u|_{x=\varphi_2(t)} \in H^{1-\frac{1}{2m}}_\omega(\Gamma_{2,2}),$$

où $\Gamma_{i,2}, \; i = 1, 2$, sont les parties de la frontière de D_2 où $x = \varphi_i(t)$.

Dans ce qui suit, nous notons la trace $w_1|_{\Gamma_{T_1}}$ par ψ_1 et $w_2|_{\Gamma_{T_1}}$ par ψ_2, qui sont dans l'espace de Sobolev $H^m_\omega(\Gamma_{T_1})$ car $w_1, w_2 \in \mathcal{H}^{1,2m}_\omega(D_1)$ (voir lemme 3.4.2). Maintenant, considérons les problèmes suivants dans D_2 :

$$\begin{cases} \partial_t w_3 + (-1)^m \partial_x^{2m} w_3 = k_{1,2} \in L^2_\omega(D_2), \\ w_3|_{\Gamma_{T_1}} = \psi_1, \\ \partial_x^k w_3\big|_{\Gamma_{1,2}} = 0, \; k = 0, \dots, m-1, \\ \partial_x^l w_3\big|_{\Gamma_{2,2}} = 0, \; l = m, \dots, 2m-1, \end{cases} \tag{3.16}$$

et

$$
\begin{cases}
\partial_t w_4 + (-1)^m \partial_x^{2m} w_4 = k_{2,2} \in L^2_\omega(D_2), \\
w_4|_{\Gamma_{T_1}} = \psi_2, \\
\partial_x^k w_4|_{\Gamma_{2,2}} = 0, \ k = 0, \ldots, m-1, \\
\partial_x^l w_4|_{\Gamma_{1,2}} = 0, \ l = m, \ldots, 2m-1,
\end{cases}
\tag{3.17}
$$

où $\Gamma_{i,2},\ i = 1, 2$, sont les parties de la frontière de D_2 où $x = \varphi_i(t)$.
Nous utilisons les résultats de la proposition 1.3.2, qui sont des conséquences du théorème 4.3 de ([45], Vol.2), pour résoudre les problèmes (3.16) et (3.17).

Grâce à la transformation

$$
(t, x) \longmapsto (t, y) = (t, \varphi(t)\, x + \varphi_1(t)),
$$

nous déduisons le résultat suivant :

Proposition 3.4.1. Les problèmes (3.16) et (3.17) admettent des solutions (uniques) $w_3, w_4 \in \mathcal{H}^{1,2m}_\omega(D_2)$.

Donc, la fonction u (respectivement, v) définie par

$$
u := \begin{cases} w_1 \text{ dans } D_1, \\ w_3 \text{ dans } D_2, \end{cases}
$$

(respectivement

$$
v := \begin{cases} w_2 \text{ dans } D_1, \\ w_4 \text{ dans } D_2), \end{cases}
$$

est la solution (unique) du problème (3.3) (respectivement, (3.4)) pour un T quelconque.
Notre deuxième résultat principal est ainsi démontré et est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.4.1. *Supposons que la fonction de paramétrisation φ_2, (respectivement, φ_1) satisfait les hypothèses (3.1) et (3.2) et la fonction poids ω vérifie les conditions (3.5) et (3.6). Alors, le problème (3.3) (respectivement, le problème (3.4)) admet une unique solution u (respectivement, v) appartenant à $\mathcal{H}^{1,2m}_{\gamma,\omega}(\Omega)$ (respectivement, $\mathcal{H}^{1,2m}_{\delta,\omega}(\Omega)$).*

Conclusion et perspectives

Les résultats sur les équations aux dérivées partielles paraboliques d'ordre $2m,\ m \in \mathbb{N}^*$, étudiées dans des domaines assez réguliers peuvent être résumés comme suit :
"Si le second membre est un élément d'une certaine régularité donnée (dans un espace de Sobolev par exemple), alors la solution admet cette régularité $+2m$."
L'objectif principal de cette thèse est de faire vivre ce résultat appelé "Schift theorem" lorsque les domaines sont non cylindriques et le second membre est dans l'espace de Lebesgue des fonctions de carré intégrable, L^2. Donc, nous avons donné des conditions suffisantes sur les fonctions de paramétrisation du domaine pour que tout se passerait comme si nous étions dans le cas régulier.

Deux études ont été faites pour une équation parabolique d'ordre $2m,\ m \in \mathbb{N}^*$:
- Dans la première étude, l'équation est associée à des conditions aux limites de Cauchy-Dirichlet et est posée dans un domaine conique de $\mathbb{R}^{N+1},\ N > 1$.
- Dans la deuxième étude, l'équation est associée à des conditions aux limites de type mixte et est posée dans un domaine non rectangulaire.
La méthode utilisée dans ces deux travaux est basée sur la technique de décomposition des domaines. Dans des travaux à venir, les résultats obtenus dans cette thèse seront étendus au moins dans les directions suivantes :

1. Le second membre f de l'équation du problème (2.1), peut être pris dans $L^p_\omega(Q)$, $p \in]1, \infty[$. La méthode de décomposition du domaine utilisée ici ne semble pas être appropriée pour l'espace $L^p_\omega(Q)$ lorsque $p \neq 2$.
2. Le domaine conique Q considéré au chapitre 2 peut être remplacé par un domaine où la fonction φ dépend aussi d'un angle $\theta \in (0, 2\pi)$, i.e.,

$$Q = \left\{ (t, x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1} : 0 < t < T, 0 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2} < \varphi(t, \theta) \right\},$$

où φ est une fonction réelle, définie et lipschitzienne sur $[0, T] \times [0, 2\pi]$ et vérifiant les conditions suivantes :

$$\varphi(0,\theta)=0 \text{ pour } 0\leq\theta\leq 2\pi \text{ et } \varphi(t,0)=\varphi(t,2\pi)\,,\ t\in[0,T].$$

3. Nous pouvons considérer d'autres conditions aux limites.
4. Nous pouvons aussi remplacer les espaces de Sobolev par les espaces de Hölder.

Bibliographie

[1] R. A. Adams. *Sobolev spaces.* Acadamic Press, 1975.

[2] Yu. A. Alkhutov. L_p-estimates of solutions of the Dirichlet problem for the heat equation in a ball. *Journ. Math. Sc.*, 142(3) :2021–2032, 2007.

[3] V. N. Aref'ev and L. A. Bagirov. Solution of the heat equation in domains with singularities. *Math. Notes*, 64(2) :139–153, 1998.

[4] E. A. Baderko. The solvability of boundary value problems for higher order parabolic equations in domains with curvilinear lateral boundaries. *Differ. Uravn.*, 10(12) :1781–1792, 1976.

[5] E. A. Baderko. Etude d'un problème de Dirichlet pour une équation 2p-parabolique dans un domaine non rectangulaire. *C.R.A.S. Paris*, 287 :221–224, 1978.

[6] E. A. Baderko. *On the solution of boundary value problems for linear parabolic equations of arbitrary order in noncylindrical domains by the method of boundary integral equations.* Thèse doctorat, Moscow, 1992.

[7] O. V. Besov. Continuation of functions from L_p^1 and W_p^1. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 89 :5–17, 1967.

[8] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications.* Masson, Paris, New York, Barcelone, Milan, Mexico, Sao Paulo, 1983.

[9] A. Cabada, R. Precup, L. Saavedra, and S. Tersian. Multiple positive solutions to a fourth order boundary value problem. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2016 :1–18, 2016.

[10] M. F. Cherepova. On the solvability of boundary value problems for a higher order parabolic equation with growing coefficients. *Dokl. Math.*, 74(3) :819–820, 2006.

[11] M. F. Cherepova. Regularity of solution of the Cauchy problem for a higher-order parabolic equation. *Differ. Uravn.*, 46(4) :540–549, 2010.

[12] M. F. Cherepova. Regularity of solutions of boundary-value problems for high-order parabolic equations in weighted Hölder spaces. *Differ. Uravn.*, 440(1) :25–27, 2011.

[13] M. F. Cherepova. Regularity of solutions of boundary value problems for a second-order parabolic equation in weighted Hölder spaces. *Differ. Uravn.*, 49(1) :79–87, 2013.

[14] S. Cherfaoui, A. Kessab, and A. Kheloufi. On $2m$-th order parabolic equations with mixed boundary conditions in non-rectangular domains. *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 14 :73–91, 2017.

[15] S. Cherfaoui, A. Kessab, and A. Kheloufi. Well-posedness and regularity results for a $2m$-th order parabolic equation in symmetric conical domains of $\mathbb{R}^{N+1}$. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 40 :6035–6047, 2017.

[16] M. Di Cristo, D. Guidetti, and A. Lorenzi. Abstract parabolic equations with applications to problems in cylindrical space domains. *Advances in Differential Equations*, 15(1-2) :1–42, 2010.

[17] J. Dugundji. Cantilever boundary condition, deflections, and stresses of sandwich beams. *AIAA Journal*, 40(5) :987–995, 2002.

[18] L.C. Evans. Partial Differential Equations. *Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society*, 19, 1998.

[19] G. Fichera. alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno. *Convegno Trieste, 1954, Roma*, pp. :174–227, 1955.

[20] V. A. Galaktionov. On regularity of a boundary point for higher-order parabolic equations : towards Petrovskii-type criterion by blow-up approach. *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 5(16) :597–655, 2009.

[21] M. Gevrey. Sur les équations aux dérivées partielles de type parabolique. *Journ. Math. pures et applquées*, 6(9) :305–471, 1913.

[22] A. Grimaldi and F. Ragnedda. Higher order parabolic operators in domains with a nonsmooth boundary. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, 54 :45–62, 1984.

[23] P. Grisvard. Caractérisation de quelques espaces d'interpolation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1(25) :40–63, 1967.

[24] P. Grisvard. Elliptic problems in nonsmooth domains. *Monographs and Studies in Mathematics24, Pitman, Boston*, 1985.

[25] P. Grisvard and G. Looss. Problèmes aux limites unilatéraux dans des domaines non réguliers. *Bollettino V. M. I.*, pages 1–26, 1976.

[26] S. Hofmann and J. L. Lewis. The L^p regularity problems for the heat equation in non-cylindrical domains. *Journ. Funct. Anal.*, 220 :1–54, 2005.

[27] A. Kheloufi. Existence and uniqueness results for parabolic equations with Robin type boundary conditions in a non-regular domain of $\mathbb{R}^3$. *Appl. Math. Comput.*, 220 :756–769, 2013.

[28] A. Kheloufi. On a fourth order parabolic equation in a nonregular domain of $\mathbb{R}^3$. *Mediterr. J. Math.*, 12 :803–820, 2015.

[29] A. Kheloufi. On a fourth order parabolic equation with mixed type boundary conditions in a nonrectangular domain. *Moroccan J. Pure and Appl. Anal.*, 1(2) :76–90, 2015.

[30] A. Kheloufi. Study of a $2m$-th order parabolic equation in a non-regular type of prism of $\mathbb{R}^{N+1}$. *Georgian Math. J.*, 23(2) :227–237, 2016.

[31] A. Kheloufi, R. Labbas, and B. K. Sadallah. On the resolution of a parabolic equation in a nonregular domain of $\mathbb{R}^3$. *Differ. Equat. Appl.*, 2(2) :251–263, 2010.

[32] A. Kheloufi and B. K. Sadallah. On the regularity of the heat equation solution in non-cylindrical domains : two approaches. *Appl. Math. Comput.*, 218 :1623–1633, 2011.

[33] A. Kheloufi and B. K. Sadallah. Study of the heat equation in a symmetric conical type domain of $\mathbb{R}^{N+1}$. *Math. Methods Appl. Sci.*, 37 :1807–1818, 2014.

[34] A. Kheloufi and B. K. Sadallah. Study of a parabolic equation with mixed Dirichlet-Neumann type boundary conditions in unbounded noncylindrical domains. *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics*, 7(4) :62–77, 2015.

[35] A. Kheloufi and B. K. Sadallah. Resolution of a high-order parabolic equation in conical time-dependent domains of $\mathbb{R}^3$. *Arab J. Math. Sci.*, 22 :165–181, 2016.

[36] V. A. Kondrat'ev. Boundary value problems for parabolic equations in closed regions. *Trans. Moscow Math. Soc., Am. Math. Soc., Providence, R I*, 15 :450–504, 1966.

[37] V. A. Kozlov. Coefficients in the asymptotic solutions of the Cauchy boundary-value parabolic problems in domains with a conical point. *Siberian Math. J.*, 29 :222–233, 1988.

[38] R. Labbas, A. Medeghri, and B. K. Sadallah. On a parabolic equation in a triangular domain. *Appl. Math. Comput.*, 130 :511–523, 2002.

[39] R. Labbas, A. Medeghri, and B. K. Sadallah. An L^p approach for the study of degenerate parabolic equation. *Appl. Math. Comput.*, 2005(36) :1–20, 2005.

[40] R. Labbas and B. K. Sadallah. Smoothness of the solution of a fourth order parabolic equation in a polygonal domain. *Int. J. Appl. Math.*, 1 :75–90, 1999.

[41] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva. *Linear and quasilinear equations of parabolic type.* A.M.S., Providence, Rhode Island, 1968.

[42] E. M. Landis. Necessary and sufficient condition for the regularity of a boundary point for the heat equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 185 :517–520, 1969.

[43] J. L. Lions. Sur les problèmes mixtes pour certains systèmes paraboliques dans des ouverts non cylindriques. pages 143–182, 1957.

[44] J. L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites linéaires.* Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[45] J. L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications, 1, 2.* Dunod, Paris, 1968.

[46] A. Maghnoudji. Problèmes aux limites paraboliques dans un domaine non régulier. *C.R.A.S.*, 316 :331–336, 1993.

[47] V. P. Mikhailov. The Dirichlet problem for a parabolic equation I. *Mat. Sb. (N.S.)*, 61(103) :40–64, 1963.

[48] V. P. Mikhailov. The Dirichlet problem for a parabolic equation II. *Mat. Sb. (N.S.)*, 62(104) :140–159, 1963.

[49] I. G. Petrovskii. Solution of a boundary value problem for the heat equation. *Uchenye Zapiski MGU*, (2) :55–59, 1934.

[50] I. G. Petrovskii. Zur ersten randwertaufgabe der wärmeleitungsgleichung. *Comp. Math.*, (1) :383–419, 1935.

[51] B. K. Sadallah. Etude d'un problème $2m$-parabolique dans des domaines plan non rectangulaires. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 2B(5) :51–112, 1983.

[52] B. K. Sadallah. Singularities of the solution of a $2m$-parabolic problem in a polygonal domain. *Arab J. Math. Sci.*, 4(2) :31–41, 1998.

[53] B. K. Sadallah. Study of a parabolic problem in a conical domain. *Math. J. Okayama Univ.*, (56) :157–169, 2014.

[54] G. Savaré. Parabolic problems with mixed variable lateral conditions : an abstract approach. *J. Math. Pures Appl.*, 76(9) :321–351, 1997.

[55] G. Shi and G. Z. Voyiadjis. A sixth-order theory of shear deformable beams with variational consistent boundary conditions. *J. Appl. Mech.*, 78(2) :1–11, 2010.

[56] A. N. Tikhonov. On the equation of heat conduction in several variables. *Byul. Moskov. Gos. Univ. Sekts.*, (A 1) :1–49, 1937.

Résumé

L'objectif de cette thèse est l'étude de l'existence et l'unicité ainsi que la régularité maximale des solutions d'une équation parabolique d'ordre supérieur, associée à différentes conditions aux limites, dans le cadre fonctionnel des espaces de Sobolev anisotropes construits sur l'espace de Lebesgue des fonctions de carré intégrable L^2, en utilisant la méthode de décomposition des domaines.

En premier lieu, nous avons démontré l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution pour une équation parabolique d'ordre supérieur, associée à des conditions aux limites de type Cauchy-Dirichlet, dans des domaines coniques non cylindriques de $\mathbb{R}^{N+1}$, $N > 1$. Ensuite nous avons démontré l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution pour une équation parabolique d'ordre supérieur posée dans un domaine non rectangulaire, et associée à des conditions aux limites mixtes.

Mots clés : Équations paraboliques d'ordre supérieur, espaces de Sobolev anisotropes, domaines non cylindriques, méthode de décomposition des domaines.

Abstract

The objective of this thesis is the study of the existence and uniqueness as well as the maximal regularity of the solutions of a higher order parabolic equation, associated with different boundary conditions, in the functional framework of anisotropic Sobolev built on the Lebesgue space of square integrable functions L^2, by using the domain decomposition method.

First, we proved the existence, uniqueness, and maximal regularity of the solution for a higher order parabolic equation subject to Cauchy-Dirichlet boundary conditions and posed in non-cylindrical conical domains of $\mathbb{R}^{N+1}$, $N > 1$. Then, we have proved the existence, uniqueness and maximal regularity of the solution for a higher order parabolic equation subject to mixed boundary conditions and posed in a non-rectangular.

Keywords : High-order parabolic equations, anisotropic Sobolev spaces, non-cylindrical domains, Domain decomposition method.