N° d'ordre : 23/2018-D/MT

REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

Faculté de Mathématiques

THÈSE de Doctorat EN Sciences

Présentée pour l'obtention du **grade** de **DOCTEUR EN**

En : Mathématiques

Spécialité : Algèbre et Théorie des nombres

Par : **Abdelkader BENYATTOU**

Sujet

Congruences pour quelques suites de nombres combinatoires

Soutenue publiquement, le 27- Novembre- 2018, devant le jury composé de :

Mr.	Hacène	BELBACHIR	Professeur à L'USTHB	Président
Mr.	Miloud	MIHOUBI	Professeur à L'USTHB	Directeur de Thèse
Mr.	Abdelkader	BOUYAKOUB	Professeur à L'U. Oran 1	Examinateur
Mr.	Abdellah	DERBAL	Professeur à L'ENS-Kouba	Examinateur
Mr.	Mohand ouamar	HERNANE	Professeur à L'USTHB	Examinateur
Mr.	Diffalah	LAISSAOUI	Maître de Conférence classe A à L'UYFM, Médéa	Examinateur

Congruences pour quelques suites de nombres combinatoires

Abdelkader BENYATTOU

Table des matières

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer mes remerciements à toute ma famille, particulièrement à mes parents qui m'ont tout donné. J'exprime également toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse, le Professeur Miloud MIHOUBI, pour m'avoir proposé ce sujet et orienté tout au long de mon travail. Je le remercie aussi pour la patience dont il a fait preuve avec moi, ce qui m'a permis de mener ce travail à son terme. Je suis particulièrement honoré que Monsieur le Professeur Hacène BELBACHIR ait accepté de présider ce jury et je suis également reconnaissant envers Messieurs les Professeurs Abdelkader BOUYAKOUB, Abdallah DERBAL, Diffalah LAISSAOUI et Mohand Ouamar HERNANE d'avoir accepté d'être membres du Jury. Je désire encore exprimer ma très vive reconnaissance à Monsieur le Professeur Farid BENCHERIF pour toute son aide dans la préparation de ma thèse de Magister. Je tiens à remercier aussi l'ensemble du corps enseignant et l'ensemble du corps administratif de la faculté de Mathématiques. Je tiens à remercier les membres du laboratoire RECITS et surtout Messieurs les Professeurs Mohamed El-Amine CHERGUI, Hacène BELBACHIR, Mourad BOUDHAR, et Fayçal HAMDI pour avoir mis à ma disposition tous les moyens du laboratoire pour mener à bien ce travail. Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours encouragé au cours de la réalisation de cette thèse.

Notations

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$: l'ensemble des nombres entiers naturels.
2. $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$: l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls.
3. $\mathbb{Z}$: l'ensemble des nombres entiers rationnels.
4. $\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres rationnels.
5. $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.
6. S_n : le n-ième groupe symétrique.
7. $\mathcal{B}_n$: le n-ième nombre de Bell.
8. $A[x]$: l'anneau des polynômes à une indéterminée x et à coefficients dans l'anneau A.
9. $A[[x]]$: l'anneau des séries formelles à une indéterminée x et à coefficients dans l'anneau A.
10. $[n] = \{1, 2, 3, ..., n\}$: l'ensemble des n premiers entiers rationnels ≥ 1.
11. $|E|$: le cardinal de l'ensemble E.
12. $\deg(P)$: le degré du polynôme P.
13. $a|b$ (où a et b sont deux entiers): a divise b.
14. $a \nmid b$: a ne divise pas b.
15. p : cette tettre désigne toujours un nombre premier (sauf mention contraire).
16. $\mathbb{Z}_p$: l'anneau des nombres p-adiques, où p est un nombre premier quelconque.
17. $\mathbb{Z}_{(p)}$: l'anneau des p-entiers, où p est un nombre premier quelconque. (Un p-entier étant tout nombre rationnel dont le dénominateur est premier avec p.)
18. Pour $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}^*, a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow \operatorname{num}(a-b) \equiv 0 \pmod{n}$.
    On a aussi $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a - b \in n\mathbb{Z}_{(n)}$.
19. Pour $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, $a \not\equiv b \pmod{n}$ signifie que $a - b \notin n\mathbb{Z}_{(n)}$ et se lit : a est non congru à $b \pmod{n}$.
20. Pour deux entiers n et k tels que $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

21. $\delta_{i,j}$: le symbole de Kronecker (valant 1 si $i = j$ et 0 sinon).
22. $\sum_{i\in\varnothing} = 0$ par convention.

Introduction

Les suites des nombres et des polynômes jouent un rôle très important dans plusieurs branches des mathématiques telles que la combinatoire, la théorie des nombres, la théorie des probabilités, etc.

Parmi les suites les plus connues, citons par exemple les suites des nombres et des polynômes de Stirling, Lah, dérangement, Fibonacci, Bernoulli, Euler et de Bell.

Cette thèse consiste en une étude sur des congruences concernant les nombres et les polynômes de Bell et les nombres et polynômes qui leurs sont liés.

L'étude que nous voulons présenter s'inspire des travaux sur le calcul ombral classique, tels que les travaux de Gertsch et Robert [23] sur des congruences concernant les nombres de Bell, Rota et Taylor [55] sur le calcul ombral classique, Gessel [24] sur des applications du calcul ombral classique, Mihoubi et Rahmani [41] sur une extension des polynômes partiels de Bell, Sun et al. [59] sur des congruences concernant les polynômes de Bell et les polynômes de dérangements et Sun et Wu [58] sur des propriétés des nombres de Bell sans singletons.

Rappelons que le calcul ombral classique (appelé parfois calcul symbolique) est une technique utilisée depuis le XIX-ème siècle [9] et est adoptée comme méthode mathématique puissante par Rota et Taylor [55] qui l'a donné une définition fondée sur des règles algébriques.

Pour faire une telle étude, on rappelle que le n-ème nombre de Bell $\mathcal{B}_n$ est le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments ($n \geq 1$) avec la convention $\mathcal{B}_0 = 1$. Ces nombres possèdent de remarquables propriétés arithmétiques qui font l'objet de nombreux travaux de recherche, dont certains concernant les congruences. En effet, en1933, Touchard [63] affirme que pour tout nombre premier p, on a

$$\forall n \geq 0, \mathcal{B}_{p+n} \equiv \mathcal{B}_n + \mathcal{B}_{n+1} \pmod{p}.$$

En 2011, Sun et Zagier [60] ont conjecturé que pour tout nombre premier $p \geq 3$, on a :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{\mathcal{B}_k}{(-8)^k} \equiv -1853 \pmod{p}.$$

Dans leur tentative de démonstration de cette conjecture, ils ont considéré la suite de nombres de dérangements $(\mathcal{D}_n)_{n\geq 0}$. Il ont prouvé ensuite que pour tout entier $m \geq 1$ et pour tout nombre premier p ne divisant pas m, on ait :

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{\mathcal{B}_k}{(-m)^k} \equiv (-1)^{m-1} \mathcal{D}_{m-1} \pmod{p}.$$

En 2013, Sun et al. [59] ont généralisé cette congruence en prouvant que pour tout entier $n \geq 0, m \geq 1$ et pour tout nombre premier $p \nmid m$, on ait :

$$x^m \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\mathcal{B}_{n+k}(x)}{(-m)^k} \equiv x^p \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^{m+k-1} \mathcal{D}_{m+k-1}(1-x) \pmod{p\mathbb{Z}_p[x]}.$$

Dans notre travail, nous établissons de nouvelles propriétés sur les nombres et les polynômes de Bell et de nombreuses congruences (en utilisant le calcul ombral) liant ces polynômes aux nombres et polynômes de dérangements, Lah, r-Lah ainsi qu'aux polynômes r-dérangement introduits en chapitre 2.

Nous établissons ainsi certains résultats sur les polynômes à racines réelles, en particulier sur ceux liés aux polynômes partiels de Bell, aux polynômes exponentiels et au polynôme chromatique d'un graphe.

La thèse est organisée comme suit :

Chapitre 1. Dans le chapitre 1, nous donnons un rappel sur les nombres de Stirling de première et de deuxième espèce, et nous fournissons les propriétés esssentielles des suites des nombres et polynômes suivants :

1. La suite des nombres de Bell $\mathcal{B}_n$ et les suites de polynômes de Bell $\mathcal{B}_n(x)$, $\mathcal{B}_{n,r}(x)$, $\mathcal{B}_n(x;\mathbf{r}_p)$.
2. La suite des nombres de dérangements $\mathcal{D}_n$ et la suite de polynômes de dérangements $\mathcal{D}_n(x)$.
3. Les suites des nombres de Lah $L(n,k)$, $L_r(n,k)$.

A la fin de ce chapitre, nous présentons une introduction importante sur le calcul ombral classique.

Chapitre 2. Dans ce chapitre on établira de nombreuses congruences concernant certaines suites de polynômes. Nous donnerons d'abord quelques propriétés concernant l'ombre généralisée de Bell $\mathbf{B_x}$ permettant d'établir des congruences reliant le polynôme de dérangement et le polynôme r-Bell. Nous démontrons ensuite certaines congruences concernant le polynôme r-dérangement $\mathcal{D}_{n,\,r}(x)$ et nous en déduirons des congruences pour le polynôme $\mathcal{D}_n(x)$. De plus, des congruences concernant les polynômes de Lah $\mathcal{L}_n(x)$ et r-Lah $\mathcal{L}_{n,r}(x)$ ainsi qu'une généralisation du théorème de Sun et al. [59] et de la congruence de Touchard [63] seront ainsi données. Des telles résultats de ce chapitre, on cite par exemple :

- Soit f un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Alors pour tout entier $s \geq 1$ et tout nombre premier p on a :

$$f(\mathbf{B_x})\left(\mathbf{B_x}^{p^s} - \mathbf{B_x}\right) \equiv \left(x^p + x^{p^2} + \ldots + x^{p^s}\right) f(\mathbf{B_x}) \pmod{p\mathbb{Z}_p[x]}.$$

- Pour tout entier $m \geq 1, r_q \geq \ldots \geq r_1 \geq 0$ et tout nombre premier $p \nmid m$, on a :

$$\begin{aligned} & x^{m+r_q} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\mathcal{B}_{n+k}(x; \mathbf{r}_q)}{(-m)^k} \\ \equiv\ & x^p \sum_{k=0}^{n+|\mathbf{r}_{q-1}|} (-1)^{k+r_q+m-1} \begin{Bmatrix} n+|\mathbf{r}_q| \\ k+r_q \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_q} \mathcal{D}_{k+r_q+m-1}(1-x) \pmod{p\mathbb{Z}_p[x]} \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{B}_{n+p^s}(x; \mathbf{r}_q) \equiv \left(x^p + x^{p^2} + \cdots + x^{p^s}\right) \mathcal{B}_n(x; \mathbf{r}_q) + \mathcal{B}_{n+1}(x; \mathbf{r}_q) \pmod{p\mathbb{Z}_p[x]}$$

où $\mathcal{B}_n(x; \mathbf{r}_q) := \mathcal{B}_n(x; r_1, \ldots, r_q)$ est le polynôme $\mathbf{r}_q$-Bell introduit par Mihoubi et Maamra [32, 40].

Chapitre 3. Dans ce chapitre, nous étudions la périodicité des polynômes liés à l'ombre de Bell $\mathbf{B}$, ce qui nous permet de généraliser la congruence connue

$$\mathcal{B}_{n+N_p} \equiv \mathcal{B}_n \pmod{p}$$

où $n \in \mathbb{N}$, p est un nombre premier et $N_p = \frac{p^p-1}{p-1}$.
Nous donnons ensuite une extension de cette congruence.
Les résultats principaux dans ce chapitre sont les suivants :

- Soient p un nombre premier et $s \geq 1$ un entier. Alors pour tout polynôme $f \in \mathbb{Z}[x]$ on a :

$$\mathbf{B}^{p+\cdots+p^s} f(\mathbf{B}) \equiv (\mathbf{B}+s)_s f(\mathbf{B}) \pmod{p}.$$

- Soient p un nombre premier et r un entier tel que $0 \leq r \leq p-1$. Alors pour tout polynôme $f \in \mathbb{Z}[x]$, on a :

$$(\mathbf{B}-1)_r \mathbf{B}^{1+p+\cdots+p^{p-r-1}} f(\mathbf{B}) \equiv f(\mathbf{B}) \pmod{p}.$$

En particulier, en posant $r = 0$, on obtient :

$$\mathbf{B}^{N_p} f(\mathbf{B}) \equiv f(\mathbf{B}) \pmod{p}.$$

On donne de plus un resultat concernant une congruence de l'ombre généralisée de Bell $\mathbf{B_x}$.

Chapitre 4. Dans ce chapitre, les propriétés de la suite de polynômes de Bernoulli nous permettent de déduire des identités concernant le polynôme de Bell. Nous donnons quelques exemples sur identités en question ainsi que sur certaines autres identités concernant le nombre de Bell sans singletons.
Les résultats principaux de ce chapitre sont :

-Pour tout entier naturel n, on a :

$$\frac{d}{dx}\mathbb{B}_n\left(\mathbf{B_x}+r\right)=n\mathcal{B}_{n-1,r}\left(x\right)$$

où $\mathbb{B}_n\left(x\right)$ est le n-ème polynôme de Bernoulli défini par sa fonction génératrice exponentielle donnée par :

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{B}_n\left(x\right)\frac{t^n}{n!}=\frac{t}{\exp\left(t\right)-1}\exp\left(xt\right).$$

- Soient r,s deux entiers naturels. Alors, si

$$\sum_{k=0}^{n}U\left(n,k\right)\left(x+r\right)^k=\sum_{k=0}^{n}V\left(n,k\right)\left(x+s\right)^k,$$

on aura

$$\sum_{k=0}^{n}U\left(n,k\right)\mathcal{B}_{k,r}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}V\left(n,k\right)\mathcal{B}_{k,s}\left(x\right),$$

où $\left(U\left(n,k\right);0\leq k\leq n\right),\left(V\left(n,k\right);0\leq k\leq n\right)$ sont deux suites connues de nombres réels, et, $\mathcal{B}_{n,r}\left(x\right)$ est le polynôme r-Bell.

Chapitre 5. Ce chapitre est consacré à une étude sur les polynômes à racines réelles [7].
On montre que pour tout entier naturel $r_1,...,r_p$ et pour tout polynôme $f\in\mathbb{R}\left[x\right]$, si le polynôme $f\left(\mathbf{B_x}\right)$ est à racines réelles, alors le polynôme

$$\left(\mathbf{B_x}\right)_{r_p}...\left(\mathbf{B_x}\right)_{r_1}f\left(\mathbf{B_x}\right)$$

est aussi à racines réelles.

Nous donnons ainsi des applications de ce théorème sur polynôme chromatique d'un graphe, polynômes de partitions liés aux polynômes partiels r-Bell et polynômes exponentiels. D'autres résultats auxiliaires sont ainsi établis.

Chapitre 1

Suite de polynômes et calcul ombral

Dans ce chapitre, nous rappelons certaines propriétés concernant les suites de nombres et de polynômes dont nous avons besoin dans cette thèse comme les nombres de Stirling, r-Stirling, $(r_1, \ldots, r_p)$-Stirling, Bell, Lah, r-Lah, dérangement et, enfin, les polynômes associés. Ensuite, nous présentons un rappel détaillé sur le calcul ombral classique et avec quelques applications.

1.1 Nombres de Stirling

Il est bien connu que l'ensemble $S_n := S([n])$ des permutations d'un ensemble $[n] := \{1, \ldots, n\}$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de $[n]$ dans lui-même, est un groupe munit de la loi de composition des applications, appelé, groupe symétrique de l'ensemble $[n]$. Il est facile de prouver que si $[n]$ et F sont de même cardinalité, alors les groupes $S([n])$ et $S(F)$ sont isomorphes.
On note dans toute la suite la factorielle croissante $\langle x\rangle_n$ et la factorielle décroissante $(x)_n$, définies par :

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle_n &= x(x+1)\ldots(x+n-1), \quad \langle x\rangle_0 = 1, \\
(x)_n &= x(x-1)\ldots(x-n+1), \quad (x)_0 = 1.
\end{aligned}$$

Définition 1 *Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$.*

1. *Le nombre de Stirling de première espèce non signé, noté $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, compte le nombre de permutations de l'ensemble $[n]$ composées exactement de k cycles.*

2. *Le nombre r-Stirling de première espèce, noté* $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r$*, compte le nombre de permutations de l'ensemble* $[n]$ *composées exactement de* k *cycles tels que les* r *premiers éléments appartiennent à des cycles différents.*
3. *Le nombre de Stirling de deuxième espèce, noté* $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$*, compte le nombre de partitions de l'ensemble* $[n]$ *en* k *blocs non vides.*
4. *Le nombre r-Stirling de deuxième espèce, noté* $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}_r$*, compte le nombre de partitions de l'ensemble* $[n]$ *en* k *blocs non vides tels que les* r *premiers éléments appartiennent à des blocs différents.*
5. *Le nombre* $\mathbf{r}_p$*-Stirling de deuxième espèce, noté* $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p}$*,* $p \geq 1$*, compte le nombre de partitions de l'ensemble* $[n]$ *en* k *blocs non vides tels que les éléments de chaque ensemble* R_i*,* $i \in \{1, \ldots, p\}$*, soient dans des blocs différents, où,* $\mathbf{r}_p := (r_1, ..., r_p)$ *et* $R_1 := [r_1]$*,* $R_2 := [r_1 + r_2] \diagdown [r_1]$*, ...,* $R_p := [r_1 + ... + r_p] \diagdown [r_1 + ... + r_{p-1}]$*.*

Ces nombres peuvent être ainsi définis par :

$$\begin{aligned}
(x)_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k, \\
x^n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (x)_k, \\
(x)_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r (x+r)^k, \\
(x+r)^n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n+r \\ k+r \end{Bmatrix}_r (x)_k, \\
(x+r_p)^n (x+r_p)_{r_1} \ldots (x+r_p)_{r_{p-1}} &= \sum_{k=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} \begin{Bmatrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p} (x)_k, \text{ où } |\mathbf{r}_p| = r_1 + \ldots + r_p.
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!} \left(\ln \left(\frac{1}{1-t} \right) \right)^k, \\
\sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \frac{t^n}{n!} &= \frac{(e^t-1)^k}{k!}, \\
\sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{t-1} \right)^r \left(\ln \left(\frac{1}{1-t} \right) \right)^k, \\
\sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} n+r \\ k+r \end{Bmatrix}_r \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!} e^{rt} \left(e^t - 1 \right)^k.
\end{aligned}$$

1.2 Nombres et polynômes de Bell

Dans cette section, nous donnons quelques propriétés concernant les nombres et les polynômes de Bell, r-Bell, $\mathbf{r}_q$-Bell et certaines propriétés de la suite des nombres de Bell sans singletons.

1.2.1 Nombres et polynômes de Bell

Nous commençons par les nombres et polynômes de Bell.

Définition 2 *Pour tout entier $n \geq 1$, le n-ème nombre de Bell, noté $\mathcal{B}_n$, compte le nombre de toutes les partitions de l'ensemble $[n]$ avec la convention $\mathcal{B}_0 = 1$.*

Le nombre $\mathcal{B}_n$ est aussi le nombre des relations d'équivalence que l'on peut définir sur un ensemble à n éléments. Les premières valeurs de $\mathcal{B}_n$ sont données par le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{B}_n$	1	1	2	5	15	52	203	877	4140

La suite de nombres de Bell $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ vérifie les relations suivantes :

Propriétés 1 *Soit n un entier naturel.*

1. *La suite de nombres de Bell vérifie la relation de récurrence*

$$\mathcal{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{B}_k.$$

2. *Par définition du nombre de Bell $\mathcal{B}_n$, on a :*

$$\mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}. \tag{1.1}$$

3. *Formule de Dobinski [15] : Le nombre $\mathcal{B}_n$ est donné explicitement par :*

$$\mathcal{B}_n = e^{-1} \sum_{k\geq 0} \frac{k^n}{k!} \ .$$

4. *La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de Bell est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \frac{t^n}{n!} = e^{e^t - 1}.$$

Définition 3 *Pour tout entier naturel n, le polynôme de Bell $\mathcal{B}_n(x)$ est défini par :*

$$\mathcal{B}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k. \tag{1.2}$$

Les premiers polynômes de Bell sont :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0(x) &= 1, \\
\mathcal{B}_1(x) &= x, \\
\mathcal{B}_2(x) &= x^2 + x, \\
\mathcal{B}_3(x) &= x^3 + 3x^2 + x, \\
\mathcal{B}_4(x) &= x^4 + 6x^3 + 7x^2 + x.
\end{aligned}$$

Propriétés 2 *Soit n un entier naturel.*

1. *D'après (1.1), on obtient :*

$$\mathcal{B}_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} = \mathcal{B}_n.$$

2. *Le polynôme de Bell $\mathcal{B}_n(x)$ est un polynôme de $\mathbb{Z}[x]$ de degré n et à coefficients entiers positifs et de coefficient dominant égal à 1.*
3. *Pour tout entier $n \geq 1$, on a :*

$$\mathcal{B}_n(0) = 0$$

4. *La suite $(\mathcal{B}_n(x))_{n\geq 0}$ vérifie la relation de récurrence suivante*

$$\mathcal{B}_{n+1}(x) = x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{B}_k(x). \tag{1.3}$$

5. *Formule de Dobinski [36] : le polynôme $\mathcal{B}_n(x)$ est donné explicitement par :*

$$\mathcal{B}_n(x) = e^{-x} \sum_{k\geq 0} k^n \frac{x^k}{k!}. \tag{1.4}$$

6. *La série génératrice exponentielle de la suite de polynômes $(\mathcal{B}_n(x))_{n\geq 0}$ est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{x\left(e^t - 1\right)}. \tag{1.5}$$

7. *La fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire X de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est donnée par*

$$M_x(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}, \text{ ce qui implique que } \mathbb{E}(X^n) = \mathcal{B}_n(\lambda).$$

1.2.2 Nombres et polynômes r-Bell

Dans ce paragraphe, nous rappelons les nombres et les polynômes r- Bell et nous en présentons quelques propriétés. De manière similaire à la définition des nombres et polynômes de Bell, Mező [36] a introduit les nombres et polynômes r-Bell de la façon suivante :

Définition 4 ([36]) *Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle n-ème nombre r-Bell, noté $\mathcal{B}_{n,r}$, le nombre de toutes les partitions de l'ensemble $[n+r]$ telles que les r premiers éléments appartiennent à des blocs différents, avec la convention $\mathcal{B}_{0,r} = 1$, i.e.*

$$\mathcal{B}_{n,r} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r .$$

Le tableau suivant donne les valeurs des nombres $\mathcal{B}_{n,r}$ pour $n, r \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$r \diagdown n$	0	1	2	3	4
0	1	1	2	5	15
1	1	2	5	15	52
2	1	3	10	37	151
3	1	4	17	77	372
4	1	5	26	141	799

La suite $(\mathcal{B}_{n,r})_{n\geq 0}$ vérifie les relations ci-dessous [36].

Propriétés 3 *Soient n et r deux entiers naturels.*

1. *La suite $(\mathcal{B}_{n,r})_{n\geq 0}$ vérifie la relation de récurrence suivante :*

$$\mathcal{B}_{n,r} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^{n-k} \mathcal{B}_k.$$

2. *La formule de Dobinski de la suite $(\mathcal{B}_{n,r})_{n\geq 0}$ est donnée par :*

$$\mathcal{B}_{n,r} = e^{-1} \sum_{k\geq 0} \frac{(k+r)^n}{k!}.$$

3. *La fonction génératrice exponentielle de la suite de $(\mathcal{B}_{n,r})_{n\geq 0}$ est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_{n,r} \frac{t^n}{n!} = e^{e^t - 1 + rt}.$$

Définition 5 ([36]) *Pour tout entier $n \geq 0$, la suite de polynômes $(\mathcal{B}_{n,r}(x))_{n\geq 0}$ est définie par*

$$\mathcal{B}_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r x^k \tag{1.6}$$

Les premiers polynômes r-Bell sont :

$\mathcal{B}_{0,r}(x) = 1,$
$\mathcal{B}_{1,r}(x) = x + r,$
$\mathcal{B}_{2,r}(x) = x^2 + (2r+1)x + r^2,$
$\mathcal{B}_{3,r}(x) = x^3 + (3r+3)x^2 + (3r^2+3r+1)x + r^3,$
$\mathcal{B}_{4,r}(x) = x^4 + (4r+6)x^3 + (6r^2+12r+7)x^2 + (4r^3+6r^2+4r+1)x + r^4.$

Propriétés 4 *Soient n et r deux entiers naturels.*

1. *D'après (1.6), on a :*

$$\mathcal{B}_{n,r}(1) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r = \mathcal{B}_{n,r}, \ n \geq 0.$$

2. *Le polynôme $\mathcal{B}_{n,r}(x)$ admet dans la base $\{1, \mathcal{B}_1(x), \ldots, \mathcal{B}_n(x)\}$ l'expression*

$$\mathcal{B}_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^{n-k} \mathcal{B}_k(x).$$

3. *La formule de Dobinski de la suite $(\mathcal{B}_{n,r}(x))_{n\geq 0}$ est donnée par :*

$$\mathcal{B}_{n,r}(x) = e^{-x} \sum_{k\geq 0} \frac{(k+r)^n x^k}{k!} \quad [36]. \tag{1.7}$$

4. *La fonction génératrice exponentielle de la suite de polynômes $(\mathcal{B}_{n,r}(x))_{n\geq 0}$ est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_{n,r}(x) \frac{t^n}{n!} = e^{x(e^t-1)+rt} \quad [13] \tag{1.8}$$

5. *La suite $(\mathcal{B}_{n,r}(x))_{n\geq 0}$ vérifie la relation de récurrence*

$$\mathcal{B}_{n,r}(x) = r\mathcal{B}_{n-1,r}(x) + x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \mathcal{B}_{k,r}(x), \quad n \geq 1.$$

6. *La suite $(\mathcal{B}_{n,r}(x))_{n\geq 0}$ vérifie la relation :*

$$\mathcal{B}_{n,r}(x) = x \frac{d}{dx} \mathcal{B}_{n-1,r}(x) + (x+r) \mathcal{B}_{n-1,r}(x).$$

Pour plus de détails, voir [36].

1.2.3 Nombres et polynômes $\mathbf{r}_p$-Bell

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques propriétés de la suite de polynômes $\mathbf{r}_p$-Bell, notée $(\mathcal{B}_n(x;\mathbf{r}_p))_{n\geq 0}$. Cette suite est introduite par Mihoubi et Maamra [40] et généralise la suite $\mathcal{B}_{n,r}(x)$.

Définition 6 ([40]) *Pour tout entier $n \geq 0$, la suite de polynômes $(\mathcal{B}_n(x;\mathbf{r}_p))_{n\geq 0}$ est définie par*

$$\mathcal{B}_n(x;\mathbf{r}_p) := \sum_{k=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} \begin{Bmatrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p} x^k. \tag{1.9}$$

Maamra et Mihoubi [32] ont utilisé les notations $P_t(x;\mathbf{r}_p)$, $a_k(\mathbf{r}_{p-1})$, où

$$P_t(x;\mathbf{r}_p) = (x+r_p)^t (x+r_p)_{r_1} \dots (x+r_p)_{r_{p-1}}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.10}$$

$$a_k(\mathbf{r}_{p-1}) = (-1)^{|\mathbf{r}_{p-1}|-k} \sum_{|\mathbf{j}_{p-1}|=k} \begin{bmatrix} r_1 \\ j_1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} r_{p-1} \\ j_{p-1} \end{bmatrix}, |\mathbf{j}_{p-1}| = j_1 + \dots + j_{p-1},$$

et d'après l'identité

$$(u)_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \begin{bmatrix} r \\ j \end{bmatrix} u^j,$$

nous pouvons écrire

$$\sum_{k=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_k(\mathbf{r}_{p-1}) u^k = (u)_{r_1} \dots (u)_{r_{p-1}}. \tag{1.11}$$

Les propositions suivantes donnent quelques relations utiles.

Proposition 1 ([32]) *Soit $|\mathbf{r}_p| = r_1 + \cdots + r_p$. Alors, pour tout entier naturel n, on a*

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p} &= \sum_{j=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} \begin{Bmatrix} n+j+r_p \\ k+r_p \end{Bmatrix}_{r_p} a_j(\mathbf{r}_{p-1}), \\
\begin{Bmatrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p} &= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} P_n(j;\mathbf{r}_p), \\
P_n(x;\mathbf{r}_p) &= \sum_{k=0}^{n+|\mathbf{r}_{p-1}|} \begin{Bmatrix} n+|\mathbf{r}_p| \\ k+r_p \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p} (x)_k.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Proposition 2 ([40]) *Soit e_i le i-ème vecteur de la base canonique de l'espace $\mathbb{R}^p$. Alors, les nombres $\mathbf{r}_p$-Stirling de deuxième espèce satisfont la relation de récurrence :*

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p} = k \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p} + \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}_{\mathbf{r}_p}, \quad n > |\mathbf{r}_p|, \ r_1, \dots, r_p \geq 0,$$

et pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, *ils satisfont de plus la relation de récurrence :*

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p - e_i} + (r_i - 1) \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p - e_i}, \quad n \geq |\mathbf{r}_p|, \ r_1, \ldots, r_p \geq 1.$$

Proposition 3 ([40]) *Soit* $\mathbf{r}_{p,\alpha} = (r_1, \cdots, r_{\alpha-1}, r_{\alpha+1}, \cdots, r_p)$; $1 \leq \alpha \leq p$. *Alors, pour tout* $\alpha \in \{1, \ldots, p\}$, *les nombres* $\mathbf{r}_p$*-Stirling de deuxième espèce satisfont la relation de récurrence :*

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_p} = \frac{1}{(k - r_\alpha)!} \sum_{j=0}^{r_\alpha} \binom{r_\alpha}{j} \left\{ \begin{matrix} n - r_\alpha \\ k - j \end{matrix} \right\}_{\mathbf{r}_{p,\alpha}} (k-j)!.$$

Théorème 4 ([32]) *Pour tout entier naturel* n, *on a :*

1. *Pour* $r_1 \leq \ldots \leq r_p$, *on a :*

$$\mathcal{B}_n(x; \mathbf{r}_p) = \exp(-x) \sum_{k \geq 0} P_n(k; \mathbf{r}_p) \frac{x^k}{k!}.$$

   Cette identité est une version généralisée de la formule de Dobinski.

2. *Le polynôme* $\mathcal{B}_n(x; \mathbf{r}_p)$ *peut s'écrire comme combinaison linéaire des polynômes* r*-Bell comme suit :*

$$\mathcal{B}_n(x; \mathbf{r}_p) = \sum_{k=0}^{|\mathbf{r}_{p-1}|} a_k(\mathbf{r}_{p-1}) \mathcal{B}_{n+k}(x; r_p).$$

   Ici, $\mathcal{B}_n(x; r) = \mathcal{B}_{n,r}(x)$ *est le* n*-ème polynôme* r*-Bell.*

3. *Les racines du polynôme* $\mathcal{B}_n(x; \mathbf{r}_p)$ *sont réelles et non-positives.*

1.2.4 Nombres de Bell sans singletons

Dans ce paragraphe, nous donnons certains propriétés concernant la suite de nombres de Bell sans singletons, notée $(\mathcal{V}_n)_{n \geq 0}$

Définition 7 ([34]) *Un singleton d'une partition d'un ensemble de cardinal* n *est un bloc contenant un seul élément. Le nombre de partitions sans singletons (Bell sans singletons) est noté* $\mathcal{V}_n$, *avec* $\mathcal{V}_0 = 1$.

Théorème 5 ([58]) *La fonction génératrice exponentielle de* $\mathcal{V}_n$ *est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_n \frac{x^n}{n!} = e^{e^x - x - 1}.$$

Le nombre $\mathcal{V}_n$ vérifie la relation suivante [58]

$$\mathcal{B}_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \mathcal{V}_j \text{ et } \mathcal{V}_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \mathcal{B}_j. \tag{1.13}$$

Définition 8 ([58]) *Le nombre de partitions de l'ensemble $[n+1]$ tel que le plus grand singleton est $k+1$ est noté par $\mathcal{V}_{n,k}$.*

Théorème 6 ([58]) *La fonction génératrice exponentielle double de $\mathcal{V}_{n+k,k}$ est donnée par*

$$\mathcal{V}(x,y) = \sum_{n,k\geq 0} \mathcal{V}_{n+k,k} \frac{x^n}{n!} \frac{y^k}{k!} = e^{e^{x+y}-x-1}.$$

La formule de Dobinski de la suite $(\mathcal{V}_{n,k})_{n\geq 0}$ donnée dans le théorème suivant :

Théorème 7 ([58]) *Soit n, $k \geq 0$ deux entiers naturels. Alors*

$$\mathcal{V}_{n,k} = \frac{1}{e} \sum_{m\geq 0} \frac{m^k (m-1)^n}{m!}.$$

Le nombre $\mathcal{V}_{n,k}$ vérifie les relations données par le théorème suivant :

Théorème 8 ([58]) *Soit n, m, $k \geq 0$ trois entiers. Alors*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{n+m,m} &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \mathcal{B}_{m+j}, \qquad (1.14) \\ \mathcal{V}_{n+m+k,m+k} &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \mathcal{V}_{n+k+j,k}. \end{aligned}$$

En particulier, pour $n = 0$ dans la première identité, on obtient :

$$\mathcal{V}_{m,m} = \mathcal{B}_m.$$

Un théorème établi par Sun et Wu [58] s'énonce ainsi :

Théorème 9 ([58]) *Soient n, $k \geq 0$ deux entiers et p un nombre premier. Alors*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{n+N_p+k,k} &\equiv \mathcal{V}_{n+k,k} \pmod{p}, \\ \mathcal{V}_{n+N_p+k,N_p+k} &\equiv \mathcal{V}_{n+k,k} \pmod{p}, \end{aligned}$$

où $N_p = \frac{p^p-1}{p-1}$.

1.3 Nombres et polynômes de dérangement

Pour $n \geq 1$, on convient souvent de définir un élément $\sigma \in S_n$ par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Définition 9 *On appelle **point fixe** de $\sigma \in S_n$ tout entier $k \in [n]$ tel que $\sigma(k) = k$ et on appelle **dérangement** toute permutation $\sigma \in S_n$ sans points fixes. On désigne par $\mathcal{D}_n$ le nombre de dérangements de l'ensemble $[n]$.*

On a $\mathcal{D}_0 = 1$ et pour tout entier n, on a

$$\mathcal{D}_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{2\uparrow}, \tag{1.15}$$

où $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{2\uparrow} := \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_0^{2\uparrow}$ est le 2-associé nombre de Stirling de première espèce, qui compte le nombre de permutations de l'ensemble $[n]$ composées exactement de k cycles de longueur au moins 2 [41]. On a

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{D}_n$	1	0	1	2	9	44	265	1854	14833

.

La suite $(\mathcal{D}_n)_{n \geq 0}$ satisfait les relations et les identités données par le théorème suivant :

Théorème 10 ([51]) *Soient $n \geq 0$ un entier et p un nombre premier.*

1. *Relations de recurrence :*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{n+1} &= (n+1)\,\mathcal{D}_n + (-1)^{n+1}, \\ \mathcal{D}_{n+2} &= (n+1)(\mathcal{D}_{n+1} + \mathcal{D}_n), \\ n! &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{D}_{n-k}, . \end{aligned}$$

2. *Expression explicite :*

$$\mathcal{D}_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

3. *Congruence modulo p :*

$$\mathcal{D}_{n+p} \equiv -\mathcal{D}_n \pmod{p}$$

4. *Pour* n_1 *et* n_2 *entiers naturels on a*

$$n_1 \equiv n_2 \pmod p \Rightarrow (-1)^{n_1}\mathcal{D}_{n_1} \equiv (-1)^{n_2}\mathcal{D}_{n_2} \pmod p .$$

5. *La fonction génératrice exponentielle de la suite* $(\mathcal{D}_n)_{n\geq 0}$ *est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{D}_n\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{-t}}{1-t}.$$

6. *Le nombre* $\mathcal{D}_n$ *exprimé par l'opérateur de différence* Δ *vérifie :*

$$\mathcal{D}_n = (E-I)^n\, 0! = \Delta^n 0!,$$

où E *et* I *sont respectivement l'opérateur de translation et l'opérateur identique.*

Définition 10 ([59]) *Pour tout entier* $n \geq 0$, *le polynôme de dérangement* $\mathcal{D}_n(x)$ *est défini par*

$$\mathcal{D}_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k!\,(x-1)^{n-k}. \tag{1.16}$$

Les premiers polynômes de dérangement sont

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_0(x) = 1,\\
&\mathcal{D}_1(x) = x,\\
&\mathcal{D}_2(x) = x^2+1,\\
&\mathcal{D}_3(x) = x^3+3x+2,\\
&\mathcal{D}_4(x) = x^4+6x^2+8x+9.
\end{aligned}$$

Nous donnons ci-dessous quelques propriétés concernant la suite de polynômes $(\mathcal{D}_n(x))_{n\geq 0}$.

Propriétés 5 *Soit* n *un entier naturel.*

1. *Le polynôme de dérangement peut être donné sous formes explicites par :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_n(x) &= n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-1)^k}{k!}.\\
\mathcal{D}_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}D_{n,k}x^k,
\end{aligned}$$

où, $\mathcal{D}_{n,k}$ *est le nombre de toutes les permutations ayant exactement* k *points fixes et satisfait à [51] :*

$$\mathcal{D}_{n,k} = \binom{n}{k}\mathcal{D}_{n-k} \quad \textit{avec} \quad \mathcal{D}_{n,0} = \mathcal{D}_n .$$

2. *On a aussi la notation symbolique introduite par Riordan [51]* $\mathcal{D}^n = \mathcal{D}_n$, *ce qui nous permet d'écrire*

$$\mathcal{D}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{D}_{n-k} x^k = (\mathcal{D} + x)^n .$$

3. *On a ainsi*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n^{(i)}(x) &= \frac{d^i}{dx^i} \mathcal{D}_n(x) = \frac{n!}{(n-i)!} \mathcal{D}_{n-i}(x), \\ \mathcal{D}_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{\mathcal{D}_n^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathcal{D}_{n-i}(a)(x-a)^i . \end{aligned}$$

4. *La fonction génératrice exponentielle de la suite de polynômes* $(\mathcal{D}_n(x))$ *est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{-t}}{1-t} e^{xt}.$$

5. *Pour tout entier* $n \geq 0$, $\mathcal{D}_n(0) = \mathcal{D}_n$.

1.4 Nombres de Lah

Dans cette section nous rappelons les définitions et quelques propriétés des nombres et des polynômes de Lah et r-Lah.

1.4.1 Nombres de Lah

Définition 11 *Le nombre de Lah non signés* $L(n,k)$ *compte le nombre des partitions d'un ensemble de cardinal* n *en* k *listes. Ces nombres peuvent être définis ainsi par :*

$$\langle x \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} L(n,k)(x)_k \ \text{ et } \ (x)_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} L(n,k) \langle x \rangle_k .$$

Proposition 11 ([17]) *Soit* n *un entier naturel. Une relation qui relie la* n*-ème dérivée de* $e^{\frac{1}{x}}$ *et* $L(n,k)$ *est donnée par :*

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = (-1)^n e^{\frac{1}{x}} \sum_{k=0}^{n} L(n,k)\, x^{-n-k}.$$

Propriétés 6 *Soit* n *un entier naturel.*

1. *On a l'expression explicite*

$$\begin{aligned} L(n,k) &= \binom{n-1}{k-1}\frac{n!}{k!},\ n\geq k\geq 1,\\ L(0,0) &= 1,\ L(n,0)=0 \text{ et } L(n,k)=0 \text{ pour } k>n,\\ L(n,k) &= \sum_j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

2. *On a la relation de récurrence*

$$L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n-1+k)\, L(n-1,k),\ n\geq k\geq 1. \tag{1.17}$$

3. *La fonction génératrice exponentielle de la suite* $(L(n,k))_{n\geq k}$ *est donnée par :*

$$\sum_{n\geq k} L(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k.$$

Les premiers nombres de Lah sont

n/k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	2	1				
3	6	6	1			
4	24	36	12	1		
5	120	240	120	20	1	
6	720	1800	1200	300	30	1

1.4.2 Nombres r-Lah

Définition 12 ([46]) *Le nombre r-Lah* $L_r(n,k)$ *compte le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal* $n+r$ *en* $k+r$ *listes telles que les* r *premiers éléments appartiennent à des listes différentes.*

On a les cas particuliers suivants:

$$\begin{aligned} L_0(0,0) &= 1,\\ L_0(n,k) &= L(n,k),\\ L_1(n,k) &= L(n+1,k+1),\\ L_r(n,0) &= \langle 2r\rangle_n,\\ L_r(n,1) &= \langle 2r+1\rangle_n - \langle 2r\rangle_n,\ n\geq 1,\\ L_r(n,n-1) &= n(n-1)+2nr,\quad n\geq 1,\\ L_r(n,n) &= 1. \end{aligned}$$

Proposition 12 ([42]) *Soit n et r deux entiers naturels. Une relation qui relie la n-ème dérivée de $\frac{1}{x^{2r}}e^{\frac{1}{x}}$ et $L_r(n,k)$ est donnée par :*

$$D^n\left(\frac{1}{x^{2r}}\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{(-1)^n}{x^{n+2r}}\exp\left(\frac{1}{x}\right)\sum_{k=0}^{n}L_r(n+r,k+r)\frac{1}{x^k},$$

Dans [3, 46], nous trouvons plusieurs relations concernant les nombres r-Lah, dont nous citons quelques unes données par le théorème suivant :

Théorème 13 ([3, 46]) *Soient n,k,r des entiers naturels.*

1. *Pour tout k tel que $1\leq k\leq n$ on a*

$$L_r(n+1,k)=L_r(n,k-1)+(n+k+2r)L_r(n,k).$$

2. *On a*

$$\begin{aligned}\langle x+2r\rangle_n &= \sum_{k=0}^{n}L_r(n,k)(x)_k,\\ (x-2r)_n &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}L_r(n,k)\langle x\rangle_k.\end{aligned}$$

3. *Pour $0\leq k\leq n$ et $(k,r)\neq(0,0)$, on a*

$$L_r(n,k)=\frac{n!}{k!}\binom{n+2r-1}{k+2r-1}. \tag{1.18}$$

4. *La fonction génératrice exponentielle de la suite $(L_r(n,k))_{n\geq k}$ est donnée par*

$$\sum_{n\geq k}L_r(n,k)\frac{x^n}{n!}=\frac{x^k}{k!}(1-x)^{-k-2r}.$$

1.5 Calcul ombral classique

Durant l'année 1978 Rota et Roman [53] ont donné un sens algébrique au calcul ombral. En 1994, Rota et Taylor [55] ont, dans leur article intitulé "The classical umbral calculus", traduit la langue de l'Algèbre au calcul ombral. Ils ont donné une représentation simple du calcul ombral comme l'ont voulu les premiers fondateurs avec des règles et des conditions algébriques. Aussi, Gessel [24] en donne des exemples importants et pratiques. Dans ce paragraphe, nous rappelons la définition du calcul ombral classique comme il est présenté et expliqué dans [18, 19, 20, 21, 24, 55] et donnons quelques exemples illustratifs.

Définition 13 ([55]) *Le calcul ombral est défini par les données suivantes :*
(1) un ensemble $\mathcal{A}=\{\alpha_1,\alpha_2,...\}$ *appelé l'alphabet dont les éléments sont appelés lettres ou ombres ;*
(2) un anneau commutatif, intègre et unitaire $\mathcal{D}$ *(appelé parfois domaine d'intégrité) de caractéristique zéro ;*
(3) une fonction linéaire appelée évaluation notée eval*, définie sur l'anneau des polynômes* $\mathcal{D}[\mathcal{A}]$ *et prenant ses valeurs dans* $\mathcal{D}$*.*

La fonction eval vérifie les conditions suivantes :

- $\operatorname{eval} 1 = 1$, où 1 est l'identité de $\mathcal{D}$;

- $\operatorname{eval}\left(\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}...\alpha_n^{i_n}\right) = \operatorname{eval}\left(\alpha_1^{i_1}\right)\operatorname{eval}\left(\alpha_2^{i_2}\right)...\operatorname{eval}\left(\alpha_n^{i_n}\right)$ où $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ sont des ombres distinctes et $i_1,i_2,...,i_n$ des entiers non-négatifs ;

- il existe un élément distingué $\varepsilon\in\mathcal{A}$, (appelé augmentation) [53] qui vérifie pour tout entier naturel n,

$$\operatorname{eval}(\varepsilon^n) = \delta_{n,0}$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker valant 1 si $i=j$ et 0 sinon.

Un élément p de l'anneau des polynômes $\mathcal{D}[\mathcal{A}]$ est appelé polynôme ombral. On dit que la suite $(a_i)_{i\geq 0}$ représente l'ombre α si $\operatorname{eval}(\alpha^i)=a_i$ pour tout entier $i\geq 0$. Si la suite (a_i) représente l'ombre α, on a nécessairement $a_0=1$.
Rota et Taylor [55] ont défini sur l'ensemble $\mathcal{D}[\mathcal{A}]$ par les deux relations suivantes :
1)- Pour tous polynômes $p,q\in\mathcal{D}[\mathcal{A}]$, on dit que p et q sont ombralement équivalents si $\operatorname{eval}(p)=\operatorname{eval}(q)$, et on écrit alors $p\simeq q$. Par exemple [55], si la suite (a_n) représente l'ombre α, on a pour tout entier $n\geq 0$, $\alpha^n\simeq a_n$, d'où

$$(\alpha+1)^n \simeq \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i.$$

2)- Deux polynômes quelcoques p et q sont dits échangeables si pour tout entier $n\geq 0$, on a

$$\operatorname{eval}(p^n)=\operatorname{eval}(q^n),$$

dans ce cas, on écrit $p\equiv q$.
On dit que α est l'inverse de β (respectivement β est l'inverse de α) si $\alpha+\beta\equiv\varepsilon$.

Remarque 1 ([55])

1. *L'inverse de l'ombre* α *n'est pas unique, mais deux inverses quelconques d'une ombre* α *sont échangeables.*
2. *L'élément* ε *joue un rôle similaire à celui de* 0 *car pour tout polynôme* $p\in\mathcal{D}[\mathcal{A}]$, *on a* $\varepsilon+p\equiv p$ *et* $\varepsilon.p\equiv\varepsilon$.
3. *Les polynômes* $p\in\mathcal{D}[\mathcal{A}]$ *par rapport aux relations d'équivalence ombral et de l'échangeabilité ombral ne sont pas invariants par substitution de variables*

échangeables. Par exemple, si la suite (a_n) *représente les deux ombres échangeables* α *et* β*, on a*

$$(\alpha + \alpha)^3 = 8\alpha^3 \simeq 8a_3,$$

mais

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)^3 &= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \\ &\simeq a_3 + 3a_2a_1 + 3a_1a_2 + a_3 \\ &= 2a_3 + 6a_1a_2.\end{aligned}$$

Nous donnons ainsi une autre définition, introduite par Rota et Taylor [55] appelée "Saturated umbral calculus". Un problème posé par Rota et Taylor qui dit comment on écrit une somme de la forme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ où $s = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ est un ensemble quelconque à n ombres distinctes (tels que chaque élément de l'ensemble s est échangeable avec l'ombre α donné) sous la forme d'un entier n multiplié par l'ombre α. Rota et Taylor ont montré que l'élément $n\alpha \in \mathcal{D}[\mathcal{A}]$ n'est pas échangeable avec $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, qui est ulistré par l'exemple suivant :

Exemple 1 ([55]) *Si la suite* $(a_k)_{k\geq 0}$ *représente l'ombre* α *et* $n = 2$*, on aura d'une part :*

$$\operatorname{eval}\left((2\alpha)^k\right) = 2^k a_k$$

et d'autre part, on aura :

$$\begin{aligned}\operatorname{eval}\left((\alpha_1 + \alpha_2)^k\right) &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \operatorname{eval}\left(\alpha_1^i \alpha_2^{k-i}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \operatorname{eval}\left(\alpha_1^i\right) \operatorname{eval}\left(\alpha_2^{k-i}\right) \\ &\simeq \sum_{i\geq 0} \binom{k}{i} a_i a_{k-i}.\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\alpha_1 + \alpha_2$ est équivalente à 2α, mais généralement 2α n'est ni égale, ni échangeable avec $\alpha_1 + \alpha_2$. Rota et Taylor [55] ont noté la multiplication de l'ombre α par un entier par le symbole $n \cdot \alpha$ appelé ombre auxiliaire qui est échangeable avec la somme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, de même $-n \cdot \alpha$ est échangeable avec $\beta_1 + \cdots + \beta_n$, où, $t = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ est un ensemble quelconque à n ombres distinctes, tels que chaque élément de l'ensemble t est échangeable avec l'ombre β, où α, β sont inverses l'une de l'autre.

Définition 14 ([55]) *Un calcul ombral saturé (Saturated umbral calculus) avec l'alphabet de base* $\mathcal{A}$ *est un calcul ombral sur l'alphabet* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$*, où les ombres de l'alphabet* $\mathcal{B}$ *(ombre auxiliaire) sont désignés par* $n \cdot p$*, où* $p \in \mathcal{D}[\mathcal{A}]$ *et* n *est un entier positif.*

De plus, un calcul ombral saturé satisfait aux conditions suivantes [55] :

1. Pour tout polynôme ombral $q \in \mathcal{D}[\mathcal{A} \cup \mathcal{B}]$, il existe un ensemble infini d'ombres $\alpha \in \mathcal{A}$ échangeables avec q.
2. Pour toute ombre $\alpha \in \mathcal{A}$ et pour tout entier naturel n, l'ombre $n \cdot \alpha$ dans $\mathcal{B}$ est échangeable avec $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, où $s = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ est un ensemble quelconque à n ombres distinctes de $\mathcal{A}$, tels que chaque élément de l'ensemble s est échangeable avec l'ombre α.
3. Pour toute ombre $\alpha \in \mathcal{A}$ et pour tout entier naturel n, l'ombre $-n \cdot \alpha$ dans $\mathcal{B}$ est échangeable avec $\beta_1 + \cdots + \beta_n$, où, $t = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ est un ensemble quelconque à n ombres distinctes de $\mathcal{A}$, tel que chaque élément de l'ensemble t est un inverse de α.
4. Pour toute ombre $\alpha \in \mathcal{A}$, l'ombre $0 \cdot \alpha$ est échangeable avec l'augmentation ε.
5. Pour tout polynôme ombral p de $\mathcal{D}[\mathcal{A}]$, pour tout entier n et pour toute ombre $\alpha \in \mathcal{A}$ échangeable avec p, l'ombre $n \cdot p \in \mathcal{B}$ est échangeable avec l'ombre $n \cdot \alpha$.

Rota et Taylor [55] ont démontré les propriétés suivantes :

Proposition 14 ([55]) *Soient α_1, α_2 deux ombres distinctes (échangeables avec une ombre α) et n, m deux entiers. On a alors :*

$$\begin{aligned}
(n+m) \cdot \alpha &\equiv n \cdot \alpha_1 + m \cdot \alpha_2, \\
\text{si } n \cdot \alpha &\equiv n \cdot \beta \text{ pour tout entier } n \neq 0, \text{ alors } \alpha \equiv \beta, \\
\text{si } c &\in \mathcal{D}, \text{ alors } n \cdot (c\alpha) \equiv c\,(n \cdot \alpha), \\
\text{si } c &\in \mathcal{D}, \text{ alors } n \cdot (c) \equiv nc.
\end{aligned}$$

Proposition 15 ([55]) *Soient α et β deux ombres telles que $\alpha + \beta \equiv \varepsilon$, p un polynôme à une seule variable à coefficients dans $\mathcal{D}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$\begin{aligned}
-\beta p\,(\alpha+\beta) &\simeq \alpha p\,(\alpha+\beta), \\
(n \cdot \beta)\, p\,(n \cdot \alpha + n \cdot \beta) &\simeq n\,(\beta p\,(\alpha+\beta)).
\end{aligned}$$

Gessel dans son article intitulé *"Applications of the classical umbral calculus"* [24] a utilisé le calcul ombral avec quelques modifications. Il a remplacé le symbole $\mathcal{D}$ par R,et il a travaillé dans l'anneau des polynômes à une seule variable a, notée $R[a]$ (R est souvent un anneau de polynômes ou un anneau de séries formelles contenant les rationnels) et la variable a est appelée ombre. Par convection, il écrit $a^n = a_n$ au lieu de $\mathrm{eval}\,(a^n) = a_n$. Il y a une différence entre l'approche de Gessel et celle de Rota et Taylor qui exige que $\mathrm{eval}\,(1) = 1$, tandis que Gessel a donné des exemples où $\mathrm{eval}\,(1) = 0$.

Dans le cas $a^n = a_n$ et $b^n = b_n$ (a et b sont deux ombres distinctes) nous parlons ici de deux fonctions linéaires différentes $\text{eval}_1 : R[a] \to R$ et $\text{eval}_2 : R[b] \to R$, telles que $\text{eval}_1(a^n) = a_n$ et $\text{eval}_2(b^n) = b_n$, ce qui signifie que $\text{eval}(a^m b^n)$ est déterminé par une fonction linéaire complètement différente définie sur $R[a,b]$, mais, traditionnellement, on prend $\text{eval}_3(a^m b^n) = \text{eval}_1(a^m)\,\text{eval}_2(b^n)$ [24].
Soient $f(u) \in R[[u]]$ une série formelle en l'indéterminée u et l'ombre a, Gessel affirme que $\text{eval}(f(a))$ n'a pas toujours de sens. Pour cela il a défini, parmi les séries formelles, des séries formelles dites "*admissibles*". Soit R l' anneau des séries formelles en plusieurs variables $x_1, x_2, \ldots$ on a la définition suivante :

Définition 15 (*[24]*) *Une série formelle $f(u) \in R[[u]]$ est dite admissible si pour chaque monôme $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ dans R, le coefficient de $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ dans $f(u)$ est un polynôme à une variable u.*

Si $f(u) = \sum_i f_i u^i$ est admissible, on a $\text{eval}(f(a)) = \sum_i f_i \,\text{eval}(a^i)$.

Des notations et définitions complémentaires données dans [19, 20, 21] sont comme suit :

1. La fonction linéaire eval, notée E, et le domaine d'intégrité $\mathcal{D}$, noté R.
2. L'élément u qui vérifie $E(u^n) = 1$ pour tout entier $n \geq 0$, est appelé ombre unité [21].
3. Pour tout entier $n \geq 0$, la somme disjointe $\alpha \dot{+} \beta$ et la différence disjointe $\alpha \dot{-} \beta$ de deux ombres distinctes α, β [20] sont définies par :
$$(\alpha \dot{+} \beta)^k \simeq \begin{cases} u \text{ si } k = 0 \\ \alpha^k + \beta^k \text{ si } k \geq 1 \end{cases}, \quad \left(\alpha \dot{-} \beta\right)^k \simeq \begin{cases} u \text{ si } k = 0 \\ \alpha^k - \beta^k \text{ si } k \geq 1. \end{cases}$$
4. Si $s = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ est un ensemble de n ombres distinctes et échangeables avec l'ombre α, on a $n \cdot \alpha \equiv \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ et $0 \cdot \alpha \equiv \varepsilon$.
5. Le produit de $\alpha_1 \cdots \alpha_n$, noté $\alpha^{\cdot n}$, est défini par
$$\alpha^{\cdot n} \equiv \alpha_1 \cdots \alpha_n \text{ et } \alpha^{\cdot 0} \equiv u.$$
6. Dans [21] $E\left[(n \cdot \alpha)^k\right]$ est donné par
$$E\left[(n \cdot \alpha)^k\right] = \sum_{i=1}^{k} (n)_i \, B_{k,i}(a_1, a_2, ..., a_{k-i+1}), \quad k \geq 1,$$
où, $B_{k,i}(a_1, a_2, ..., a_{k-i+1})$ est le (k,i)-ème polynôme partiel de Bell *et* $a_j = E[\alpha^j]$ pour $j = 1, ..., k - i + 1$, voir [4, 15, 38].

1.5.1 Nombres de Bernoulli et calcul ombral

Par l'utilisation du calcul ombral, Rota et Taylor [55] ont donné des applications sur les nombres de Bernoulli. L'ombre β est dite ombre de Bernoulli si pour tout polynôme $p(x)$, on a [55] :

$$\Delta p(\beta) := p(\beta+1) - p(\beta) \simeq p'(\varepsilon). \tag{1.19}$$

Ici, Δ est l'opérateur de différence, défini par

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x),$$

et $p'(x)$ est le polynôme dérivé de $p(x)$. Si $p(x) = x^n$, nous trouvons $(\beta+1)^n \simeq \beta^n$, $n > 1$ et $\beta^0 \simeq 1$. L'ombre β représente l'unique suite de nombres de Bernoulli $(\mathbb{B}_n)$. On a alors

$$(\beta+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \beta^i \simeq \beta^n,$$

ce qui entraîne que pour $n > 1$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathbb{B}_i = \mathbb{B}_n.$$

Soit $f(x,\beta)$ une série formelle d'une variable x. La relation (1.19) généraliser de la façon suivante [55] :

$$\Delta f(x,\beta) = f(x,\beta+1) - f(x,\beta) \simeq f'(x,\varepsilon). \tag{1.20}$$

où la dérivée est prise par rapport à la deuxième variable [55]. Dans le cas où

$$f(x,\beta) = e^{\beta x},$$

l'application de la relation (1.20) donne

$$e^{x(\beta+1)} - e^{x\beta} = e^{x\beta}(e^x - 1) \simeq x e^{x\varepsilon} \simeq x,$$

d'où

$$e^{x\beta} \simeq \frac{x}{e^x - 1}.$$

Par conséquent, la fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de Bernoulli est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{B}_n \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Rota et Taylor [55] ont prouvé que l'ombre de Bernoulli vérifie $\beta + 1 \equiv -\beta$, et $\beta^n \simeq (\beta+1)^n \simeq (-1)^n \beta^n$, pour $n > 1$. Ils ont conclu ensuite que $\mathbb{B}_{2n+1} = 0$

pour $n \geq 1$. Ils ont introduit de plus l'ombre concernant les nombres de Nörlund en définissant le k-ème nombre de Nörlund d'ordre n par $\mathbb{B}_k^{(n)} \simeq (n \cdot \beta)^k$ [55]. Par conséquent, toute ombre échangeable avec $n \cdot \beta$ pour certains entiers n est appelée ombre de Nörlund. Pour $n = 1$ on obtient $\mathbb{B}_k^{(1)} \simeq (\beta)^k \simeq \mathbb{B}_k$. À l'aide du calcul ombral, plusieurs relations concernant les nombres de Bernoulli et les nombres de Nörlund ont été démontrées par Rota et Taylor, voir [55].

1.5.2 Polynômes de Charlier et calcul ombral

Gessel [24] a donné plusieurs applications du calcul ombral dont une sur les polynômes de Charlier définis par

$$c_n(x;a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle -x \rangle_k \, a^{-k}$$

et a défini la version normalisée de ces polynômes par

$$C_n(u,\alpha) = u^n c_n(-\alpha;u) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \langle \alpha \rangle_i \, u^{n-i}.$$

Soit A l'ombre définie par $A^n = \langle \alpha \rangle_n$, alors $C_n(u,\alpha) = (A+u)^n$. Comme

$$e^{Ax} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \alpha \rangle_n \frac{x^n}{n!} = (1-x)^{-\alpha},$$

on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(u,\alpha) \frac{x^n}{n!} = e^{(A+u)x} = e^{ux} e^{Ax} = \frac{e^{ux}}{(1-x)^{\alpha}}.$$

Il a prouvé ensuite que la fonction génératrice bilinéaire pour les polynômes de Charlier est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(u,\alpha) C_n(v,\beta) \frac{x^n}{n!} = e^{uvx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \alpha \rangle_k \langle \beta \rangle_k}{(1-vx)^{k+\alpha} (1-ux)^{k+\beta}} \frac{x^k}{k!}.$$

Enfin, il conclut pour les nombres de dérangements que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n} \frac{x^n}{n!} &= e^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(1+2x)^{2k+1}} \frac{x^k}{k!}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} D_n^2 \frac{x^n}{n!} &= e^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(1+x)^{2k+2}} x^k. \end{aligned}$$

Rappelons que pour l'ombre α tel que $\alpha^n = a_n$, la fonction génératrice exponentielle de la suite (a_n) est donnée par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \frac{x^n}{n!} = e^{\alpha x},$$

où $f(x)$ désigne $f(x,\alpha)$.
Aussi, dans les références [24, 67], on trouve, par l'utilisation du calcul ombral, des études concernant les polynômes de Hermite, de Bell (appelé parfois polynôme de Touchard), de Carlitz et de Zeilberger's Hermite. Gessel [24] a donné des relations concernant les nombres de Bernoulli et des généralisations pour l'identité de Kaneko, de plus, il a utilisé le calcul ombral pour montrer plusieurs résultats concernant des suites satisfaisant la congruence de Kummer. Une suite d'entiers (u_n) satisfait la congruence de Kummer si elle vérifie pour tout nombre premier p et pour tout entier $n \geq 0$ et $j \geq n$, la congruence

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} u_{i(p-1)+j} \equiv 0 \pmod{p^n}. \tag{1.21}$$

Si u désigne une ombre pour u_n (i.e. $u^n = u_n$) et $j = n + k$ la congruence (1.21) pourra âtre mise sous la forme :

$$(u^p - u)^n u^k \equiv 0 \pmod{p^n}, \quad n, k \geq 0.$$

1.5.3 Nombres de Bell et calcul ombral

Pour toute indéterminée $\mathbf{B}$, on a [54] :

$$\mathbf{B}^n = \sum_{\pi} (\mathbf{B})_{N(\pi)}, \tag{1.22}$$

où π est une partition d'un ensemble à n éléments et où $N(\pi)$ est le nombre de blocs distincts dans π. Soit $\mathbb{R}[\mathbf{B}]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ en l'indéterminée $\mathbf{B}$. Dans le cas particulier où la suite de polynômes

$$(\mathbf{B})_0 = 1,\ (\mathbf{B})_1,\ (\mathbf{B})_2, ...,\ (\mathbf{B})_n, \tag{1.23}$$

est une base de $\mathbb{R}[\mathbf{B}]$, il existe une unique fonction linéaire eval_1 définie sur $\mathbb{R}[\mathbf{B}]$ ($\mathrm{eval}_1 : \mathbb{R}[\mathbf{B}] \to \mathbb{R}$), telle que $\mathrm{eval}_1(1) = 1$, et $\mathrm{eval}_1((\mathbf{B})_k) = 1$, pour $k = 1, 2, ..., n$. Si nous appliquons la fonction eval_1 sur les deux côtés de l'égalité (1.22) nous obtenons

$$\mathrm{eval}_1(\mathbf{B}^n) = \mathrm{eval}_1\left(\sum_{\pi} (\mathbf{B})_{N(\pi)}\right) = \sum_{\pi} \mathrm{eval}_1 (\mathbf{B})_{N(\pi)} = \sum_{\pi} 1,$$

et comme $\sum_{\pi} 1$ est le nombre de toutes les partitions d'un ensemble à n éléments, on a donc

$$\mathrm{eval}_1(\mathbf{B}^n) = \mathcal{B}_n.$$

Alors, comme résultat, on peut dire que l'ombre de Bell $\mathbf{B}$ est définie par

$$\mathbf{B}^n = \mathcal{B}_n,\ \text{pour } n \geq 1 \text{ et } \mathbf{B}^0 = 1.$$

Avec le calcul ombral, Rota, dans son article [54], a démontré plusieurs propriétés concernant les nombres de Bell, telle la relation de récurrence

$$\mathcal{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{B}_k.$$

En effet, on sait que $(\mathbf{B})_{n+1} = \mathbf{B}\,(\mathbf{B}-1)_n$, mais $\mathrm{eval}_1\left((\mathbf{B})_{n+1}\right) = \mathrm{eval}_1\left((\mathbf{B})_n\right) = 1$, ce qui donne

$$\mathrm{eval}_1\left(\mathbf{B}\,(\mathbf{B}-1)_n\right) = \mathrm{eval}_1\left((\mathbf{B})_n\right).$$

Comme la famille $\{(\mathbf{B})_k\,,\ k \geq 0\}$ est une base de $\mathbb{R}\,[\mathbf{B}]$, par linéarité de la fonction eval_1, on déduit que pour tout polynôme p, on a

$$\mathrm{eval}_1\left(\mathbf{B}p\,(\mathbf{B}-1)\right) = \mathrm{eval}_1\left(p\,(\mathbf{B})\right).$$

Si nous choisissons $p = (\mathbf{B}+1)^n$, nous obtenons

$$\mathrm{eval}_1\,\mathbf{B}^{n+1} = \mathrm{eval}_1\,(\mathbf{B}{+}1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{eval}_1\,\mathbf{B}^k,$$

ce qui montre que

$$\mathcal{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{B}_k.$$

Ci-dessous, nous donnons quelques exemples concernant les nombres de Bell.

Exemple 2 *En utilisant le calcul ombral pour démontrer la congruence de Touchard, pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout nombre premier p, on a*

$$\mathcal{B}_{n+p} \equiv \mathcal{B}_{n+1} + \mathcal{B}_n \bmod p. \tag{1.24}$$

En effet, pour tout polynôme f et tout entier n, on a [24] :

$$(\mathbf{B})_n\, f\,(\mathbf{B}) = f\,(\mathbf{B}+n)\,,$$

où $\mathbf{B}$ est l'ombre de Bell. Dans le cas $f\,(x) = x^m$ et $n = p$ il vient

$$(\mathbf{B})_p\,\mathbf{B}^m = (\mathbf{B}+p)^m\,. \tag{1.25}$$

On sait d'après la congruence de Lagrange que

$$(x)_p \equiv x^p - x \pmod p\,,$$

si nous remplaçons x par $\mathbf{B}$, nous trouvons

$$(\mathbf{B})_p \equiv \mathbf{B}^p - \mathbf{B} \pmod p\,, \tag{1.26}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{n+p}-\mathcal{B}_{n+1} &= \mathbf{B}^{n+p}-\mathbf{B}^{n+1}\\
&= \left(\mathbf{B}^{p}-\mathbf{B}\right)\mathbf{B}^{n}\\
&\equiv \left(\mathbf{B}\right)_{p}\mathbf{B}^{n}\\
&= \left(\mathbf{B}+p\right)^{n}\\
&\equiv \mathbf{B}^{n}\\
&= \mathcal{B}_{n} \pmod{p}.
\end{aligned}$$

Exemple 3 *Avec la même méthode, nous démontrons la congruence de Touchard pour les nombres r-Bell. Pour tous les entiers naturels* n, r *et tout nombre premier* p, *on a :*

$$\mathcal{B}_{n+p,r} \equiv \mathcal{B}_{n+1,r}+\mathcal{B}_{n,r} \pmod{p} \quad [37]. \tag{1.27}$$

De l'identité (1.25), on a :

$$\left(\mathbf{B}\right)_{n}\left(\mathbf{B}+r\right)^{m}=\left(\mathbf{B}+r+n\right)^{m},$$

et u fait que

$$\mathcal{B}_{n,r}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r^{n-k}\mathcal{B}_{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r^{n-k}\mathbf{B}^{k}=\left(\mathbf{B}+r\right)^{n},$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{n+p,r}-\mathcal{B}_{n+1,r} &= \left(\mathbf{B}+r\right)^{n+p}-\left(\mathbf{B}+r\right)^{n+1}\\
&= \left[\left(\mathbf{B}+r\right)^{p}-\left(\mathbf{B}+r\right)\right]\left(\mathbf{B}+r\right)^{n}\\
&\equiv \left(\mathbf{B}+r\right)_{p}\left(\mathbf{B}+r\right)^{n}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\left(r\right)_{p-k}\left(\mathbf{B}\right)_{k}\left(\mathbf{B}+r\right)^{n}\\
&\equiv \left(r\right)_{p}\left(\mathbf{B}\right)_{0}\left(\mathbf{B}+r\right)^{n}+\left(r\right)_{0}\left(\mathbf{B}\right)_{p}\left(\mathbf{B}+r\right)^{n}\\
&\equiv \left(\mathbf{B}\right)_{p}\left(\mathbf{B}+r\right)^{n}\\
&= \left(\mathbf{B}+r+p\right)^{n}\\
&\equiv \left(\mathbf{B}+r\right)^{n}\\
&= \mathcal{B}_{n,r} \pmod{p}.
\end{aligned}$$

Exemple 4 *Les nombres* $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{V}_{n,k}$ *[58] peuvent être exprimer ombralement comme ci-dessous :*

$$\mathcal{V}_{n}=\left(\mathbf{B}-1\right)^{n}, \qquad \mathcal{V}_{n,k}=\mathbf{B}^{k}\left(\mathbf{B}-1\right)^{n-k}. \tag{1.28}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_n &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \mathcal{B}_j \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \mathbf{B}^j = (\mathbf{B}-1)^n, \\
\mathcal{V}_{n,k} &= \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{n-k-j} \binom{n-k}{j} \mathcal{B}_{k+j} \\
&= \mathbf{B}^k \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{n-k-j} \binom{n-k}{j} \mathbf{B}^j \\
&= \mathbf{B}^k (\mathbf{B}-1)^{n-k}.
\end{aligned}$$

1.5.4 Polynômes de Bell et calcul ombral

De la même manière que pour la définition de l'ombre de Bell $\mathbf{B}$, nous définissons l'ombre généralisée de Bell noté $\mathbf{B_x}$. On a

$$(\mathbf{B_x})_{N(\pi)} = \mathbf{B_x}(\mathbf{B_x}-1)\ldots(\mathbf{B_x}-N(\pi)+1),$$

où π est une partition quelconque d'un ensemble de cardinal n et où $N(\pi)$ est le nombre de blocs de π où $1 \leq N(\pi) \leq n$. On sait que le nombre de partitions avec exactement $N(\pi) = k$ blocs est le nombre de Stirling de deuxième espèce $\left\{ n \atop k \right\}$. Soit $\mathbb{R}[\mathbf{B_x}]$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des polynômes en l'indéterminée $\mathbf{B_x}$. La famille des suites de polynômes $\{(\mathbf{B_x})_k, \ k \geq 0\}$ est une base de $\mathbb{R}[\mathbf{B_x}]$, alors il existe une unique fonction linéaire eval_2 définie sur $\mathbb{R}[\mathbf{B_x}]$ ($\mathrm{eval}_2 : \mathbb{R}[\mathbf{B_x}] \to \mathbb{R}$), telle que $\mathrm{eval}_2(1) = 1$, $\mathrm{eval}_2((\mathbf{B_x})_k) = x^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, où x est un nombre réel (fixé) quelconque. Par l'identité (1.22), on a pour toute indéterminée $\mathbf{B_x}$:

$$\sum_{\pi} (\mathbf{B_x})_{N(\pi)} = \mathbf{B_x}^n, \tag{1.29}$$

et par l'application de la fonction eval_2 sur les deux côtés de l'égalité (1.29), on trouve

$$\begin{aligned}
\mathrm{eval}_2(\mathbf{B_x}^n) &= \mathrm{eval}_2\left[\sum_{\pi} (\mathbf{B_x})_{N(\pi)}\right] \\
&= \sum_{\pi} x^{N(\pi)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} x^k \\
&= \mathcal{B}_n(x),
\end{aligned}$$

ce qui montre que l'ombre généralisée de Bell $\mathbf{B_x}$ est donnée par

$$\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n}=\mathcal{B}_{n}\left(x\right),\ \text{pour } n\geq 1 \text{ et } \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{0}=1.$$

Exemple 5 (Congruence de Touchard) *Pour tout entier $n\geq 0$ et tout nombre premier p, on a*

$$\mathcal{B}_{n+p}\left(x\right)-\mathcal{B}_{n+1}\left(x\right)\equiv x^{p}\mathcal{B}_{n}\left(x\right)\pmod{p\mathbb{Z}_{p}\left[x\right]}. \tag{1.30}$$

En effet, en utilisant les relations ci-dessous [59]

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{p}-\mathbf{B}_{\mathbf{x}} &\equiv \left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right)_{p}\pmod{p\mathbb{Z}_{p}\left[x\right]}, && (1.31)\\ \left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right)_{m}\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n} &= x^{m}\left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}+m\right)^{n}. && (1.32)\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{n+p}\left(x\right)-\mathcal{B}_{n+1}\left(x\right) &= \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n+p}-\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n}\\ &= \left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{p}-\mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right)\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n}\\ &\equiv \left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right)_{p}\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n}\\ &= x^{p}\left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n}+p\right)^{n}\\ &\equiv x^{p}\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n}\\ &= x^{p}\mathcal{B}_{n}\left(x\right)\pmod{p\mathbb{Z}_{p}\left[x\right]}.\end{aligned}$$

1.5.5 Polynômes de Bell et polynômes de dérangement

Un théorème établi par Sun et Zagier [60] est que, pour tout entier $m\geq 1$ et tout nombre premier p ne divisant pas m, on ait :

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\mathcal{B}_{k}}{\left(-m\right)^{k}}\equiv\left(-1\right)^{m-1}\mathcal{D}_{m-1}\pmod{p}.$$

Une extension du théorème précédent, un autre théorème établi par Sun et Zagier [60] qui relie les deux polynômes $\mathcal{B}_{n}\left(x\right)$ et $\mathcal{D}_{n}\left(x\right)$ est que, pour tout entier $m\geq 1$ et pour tout nombre premier p ne divisant pas m, on ait :

$$\left(-x\right)^{m}\sum_{n=1}^{p-1}\frac{\mathcal{B}_{n}\left(x\right)}{\left(-m\right)^{n}}\equiv -x^{p}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{\left(m-1\right)!}{l!}\left(-x\right)^{l}\pmod{p\mathbb{Z}_{p}\left[x\right]}. \tag{1.33}$$

Plus tard, Sun et al. [59], par le calcul ombral, ont prouvé une autre extension du théorème ci-dessus, en montrant que, pour tout entier $n\geq 0, m\geq 1$ et pour tout nombre premier $p\nmid m$, on ait :

$$x^{m}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\mathcal{B}_{n+k}\left(x\right)}{\left(-m\right)^{k}}\equiv x^{p}\sum_{k=0}^{n}\left\{\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right\}\left(-1\right)^{m+k-1}\mathcal{D}_{m+k-1}\left(1-x\right)\pmod{p\mathbb{Z}_{p}\left[x\right]}.$$

Chapitre 2

Congruences via l'ombre généralisée de Bell

Dans ce chapitre, nous utilisons le calcul ombral pour étudier quelques congruences concernant les suites de polynômes $\mathcal{B}_n(x)$, $\mathcal{B}_{n,r}(x)$, $\mathcal{B}_n(x;\mathbf{r}_p)$, $\mathcal{D}_n(x)$, $\mathcal{D}_{n,\,r}(x)$, $\mathcal{L}_n(x)$, $\mathcal{L}_{n,r}(x)$. Dans ce qui suit, pour des polynômes f, g et des nombres a et b, on écrit $f \equiv g$ au lieu de $f \equiv g \pmod{p\mathbb{Z}_p[x]}$ et $a \equiv b$ au lieu de $a \equiv b \pmod{p}$.

2.1 L'ombre généralisée de Bell

Dans ce paragraphe, nous fournissons certaines propriétés de $\mathbf{B_x}$. Ensuite, nous donnons des applications en congruence modulo un nombre premier p concernant la suite de polynômes $(\mathcal{B}_n(x))$.
La relation de récurrence

$$\mathcal{B}_{n+1}(x) = x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{B}_k(x),\ n \geq 0,$$

peut être mise sous la forme $\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n+1} = x(\mathbf{B_x}+1)^n$, qui est un cas particulier de l'identité [59] :

$$(\mathbf{B_x})_n f(\mathbf{B_x}) = x^n f(\mathbf{B_x}+n),\quad n \geq 0, \tag{2.1}$$

où f est un polynôme quelconque.
Cette dernière identité nous fournit les cas particuliers suivants :

1. Si $x = 1$ nous obtenons [24]

$$(\mathbf{B})_n f(\mathbf{B}) = f(\mathbf{B}+n). \tag{2.2}$$

2. Si $f(x) = 1$,

$$(\mathbf{B_x})_n = x^n. \tag{2.3}$$

3. Si $f(x)=1$ et $x=1$,
$$(\mathbf{B})_n = 1. \tag{2.4}$$

Lemme 16 *Pour tout polynôme f, on a*
$$f(\mathbf{B_x}+r) = e^{-x}\sum_{j\geq 0} f(j+r)\frac{x^j}{j!}. \tag{2.5}$$

Preuve. En utilisant la formule de Dobinski (1.7), pour tout polynôme $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, on a

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{B_x}+r) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (\mathbf{B_x}+r)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathcal{B}_{k,r}(x)\\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(e^{-x}\sum_{j\geq 0}(j+r)^k \frac{x^j}{j!}\right)\\
&= e^{-x}\sum_{j\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k (j+r)^k\right)\frac{x^j}{j!}\\
&= e^{-x}\sum_{j\geq 0} f(j+r)\frac{x^j}{j!}.
\end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve. □

Exemple 6 *Si nous choisissons $r=0$ et le polynôme $f(x)=(x)_n\, g(x)$ dans le lemme 16 nous obtenons la relation (2.1), et dans le cas où $f(x)=x^n$, nous trouvons*
$$\mathcal{B}_{n,r}(x) = e^{-x}\sum_{j\geq 0}(j+r)^n \frac{x^j}{j!}. \tag{2.6}$$

Proposition 17 *Soit f un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Alors, pour tout entier $s\geq 1$ et tout nombre premier p, on a :*
$$f(\mathbf{B_x})\left(\mathbf{B_x^{p^s}}-\mathbf{B_x}\right) \equiv \left(x^p + x^{p^2}+ ... + x^{p^s}\right) f(\mathbf{B_x}).$$

Preuve. Il suffit de montrer la proposition pour $f(x)=x^n$. Procédons par induction sur s. Pour $s=1$, en utilisant la congruence de Touchard (1.30), on trouve
$$\mathbf{B_x^n}(\mathbf{B_x^p}-\mathbf{B_x}) = \mathbf{B_x^{n+p}} - \mathbf{B_x^{n+1}} = \mathcal{B}_{n+p}(x) - \mathcal{B}_{n+1}(x) \equiv x^p \mathcal{B}_n(x),$$

ou, d'une manière équivalente
$$\mathbf{B_x^n}(\mathbf{B_x^p}-\mathbf{B_x}) = x^p\mathbf{B_x^n},$$

ce qui montre que l'assertion est vérifiée pour $s = 1$.
Supposons qu'elle le soit pour $s \geq 1$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n}\left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{p^{s+1}} - \mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right) &= \left(\left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{p^{s}} - \mathbf{B}_{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right)^{p} - \mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right)\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n} \\
&\equiv \left(\left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{p^{s}} - \mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right)^{p} + \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{p} - \mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right)\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n} \\
&= \left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{p^{s}} - \mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right)^{p}\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n} + \left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{p} - \mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right)\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n} \\
&= \left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{p^{s}} - \mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right)^{p-1}\left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{p^{s}} - \mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right)\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n} + \left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{p} - \mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right)\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n},
\end{aligned}$$

et par l'hypothèse d'induction et la relation (1.31), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n}\left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{p^{s+1}} - \mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right) &\equiv \left(x^{p} + x^{p^{2}} + \ldots + x^{p^{s}}\right)\left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{p^{s}} - \mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right)^{p-1}\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n} + x^{p}\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n} \\
&\vdots \\
&\equiv \left(x^{p} + x^{p^{2}} + \ldots + x^{p^{s}}\right)^{p}\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n} + x^{p}\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n} \\
&\equiv \left(x^{p^{2}} + x^{p^{3}} + \ldots + x^{p^{s+1}}\right)\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n} + x^{p}\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n} \\
&= \left(x^{p} + x^{p^{2}} + x^{p^{3}} + \ldots + x^{p^{s+1}}\right)\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n},
\end{aligned}$$

et l'assertion est ainsi démontrée pour $s + 1$. □

Corollaire 18 *Soient $n \geq 0, m \geq 0, s \geq 1$ des entiers, p un nombre premier et f un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Alors*

$$\begin{aligned}
f\left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right)\left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{p} - \mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right) &\equiv x^{p} f\left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right), \\
\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{p} - \mathbf{B}_{\mathbf{x}} &\equiv x^{p}, \\
\mathcal{B}_{n+p^{s}}\left(x\right) &\equiv \left(x^{p} + x^{p^{2}} + \ldots + x^{p^{s}}\right)\mathcal{B}_{n}\left(x\right) + \mathcal{B}_{n+1}\left(x\right), \\
\left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right)_{n}\left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{p^{s}} - \mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right) &\equiv \left(x^{p} + x^{p^{2}} + \ldots + x^{p^{s}}\right)x^{n}, \\
\mathcal{B}_{mp^{s}+n}\left(x\right) &\equiv \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(x^{p} + x^{p^{2}} + \ldots + x^{p^{s}}\right)^{k}\mathcal{B}_{n+m-k}\left(x\right).
\end{aligned}$$

Preuve. Pour les quatre premières congruences, on choisit $s = 1$, $f\left(x\right) = 1$, x^{n}, ou $\left(x\right)_{n}$ dans la proposition 17, et pour la dernière congruence, on a :

$$\mathcal{B}_{mp^{s}+n}\left(x\right) = \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n}\left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{p^{s}} - \mathbf{B}_{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right)^{m} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n+m-k}\left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{p^{s}} - \mathbf{B}_{\mathbf{x}}\right)^{k}.$$

□

2.2 Congruences sur les polynômes r-dérangement

Dans cette section, nous définissons le polynôme r-dérangement $\mathcal{D}_{n,r}(x)$ *[6]*, et nous établissons quelques congruences concernant ce polynôme. La suite de polynômes r-dérangement $(\mathcal{D}_{n,r}(x))$ est une extension de la suite de polynômes de dérangement $(\mathcal{D}_n(x))$. On sait par la relation (1.15) que le nombre de dérangement $\mathcal{D}_n$ est défini par

$$\mathcal{D}_n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^{2\uparrow},$$

donc, de manière similaire, nous définissons le nombre r-dérangement par

$$\mathcal{D}_{n,r} = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n+r \\ j+r \end{bmatrix}_r^{2\uparrow},$$

qui compte les permutations sans points fixes de l'ensemble $[n+r]$ tels que les éléments de l'ensemble $[r]$ se trouvent dans des cycles différents, par conséquent $\mathcal{D}_{n,0} = \mathcal{D}_n$. Pour plus de détails voir [65].

Définition 16 *Pour tout entier $n \geq 0$, le polynôme r-dérangement $\mathcal{D}_{n,r}(x)$ est défini par*

$$\mathcal{D}_{n,r}(x) = \frac{1}{r!}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (j+r)!\,(x-1)^{n-j}. \tag{2.7}$$

Remarque 2 *On a pour $r = 0$, $\mathcal{D}_{n,0}(x) = \mathcal{D}_n(x)$, et pour $x = 0$, le nombre r-dérangement $\mathcal{D}_{n,r}$ est*

$$\mathcal{D}_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}\mathcal{D}_{n-r,r}(0).$$

Les premiers polynômes r- dérangement sont

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_{0,r}(x) = 1,\\
&\mathcal{D}_{1,r}(x) = x + r,\\
&\mathcal{D}_{2,r}(x) = x^2 + 2rx + r^2 + r + 1,\\
&\mathcal{D}_{3,r}(x) = x^3 + 3rx^2 + 3\left(r^2 + r + 1\right)x + r^3 + 3r^2 + 5r + 2,\\
&\mathcal{D}_{4,r}(x) = x^4 + 4rx^3 + 6\left(r^2 + r + 1\right)x^2 + 4\left(r^3 + 5r + 2\right)x + r^4 + 6r^3 + 17r^2\\
&\qquad\qquad + 20r + 9.
\end{aligned}$$

La fonction génératrice exponentielle de la suite $(\mathcal{D}_{n,r})$ est alors *[41]*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{D}_{n,r}\frac{t^n}{n!} = \frac{t^r}{(1-t)^{r+1}}\exp(-t) = t^r\sum_{n\geq 0}\mathcal{D}_{n,r}(0)\frac{t^n}{n!},$$

et la fonction génératrice exponentielle de la suite de polynômes $(\mathcal{D}_{n,r}(x))$ est

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{D}_{n,r}(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{e^{-t}}{(1-t)^{r+1}}e^{xt}.$$

Le polynôme $\mathcal{D}_{n,r}(1-x)$ *admet ainsi une forme simple à l'aide de* l'ombre généralisée de Bell $\mathbf{B_x}$. En effet, on sait que la factorielle décroissante $(x)_n$ est une suite de type binomial, c'est-à-dire

$$(x+y)_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x)_k(y)_{n-k},$$

et par l'utilisation de la relation (2.3) et de la définition (16), on obtient

$$(\mathbf{B_x}-r)_n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-r)_j(\mathbf{B_x})_{n-j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-r)_j x^{n-j}=(-1)^n\mathcal{D}_{n,\,r-1}(1-x). \tag{2.8}$$

En particulier, pour $r=1$ on obtient le polynôme de dérangement $\mathcal{D}_n(x)=\mathcal{D}_{n,0}(x)$ avec

$$(\mathbf{B_x}-1)_n=(-1)^n\mathcal{D}_n(1-x). \tag{2.9}$$

Maintenant, nous proposons quelques congruences générales sur les polynômes de dérangement et nous commençons par la proposition suivante.

Proposition 19 *Soient $m\geq 0,\ q\geq 0,\ r\geq 1$ des entiers et p un nombre premier. Alors*

$$\mathcal{D}_{mp+q,r-1}(1-x)\equiv(-x)^{mp}\mathcal{D}_{q,r-1}(1-x).$$

En particulier, pour $r=1$, on trouve

$$\mathcal{D}_{mp+q}(1-x)\equiv(-x)^{mp}\mathcal{D}_q(1-x).$$

Preuve. L'outil mathématique utilisé ici est constitué de l'identité et de la congruence donnée par

$$(x)_{n+m}=(x)_n(x-n)_m \text{ et } \binom{p}{j}\equiv 0,\quad 1\leq j\leq p-1. \tag{2.10}$$

On procède par induction sur m. Pour $m=1$, les relations (2.8), (2.1), l'identité et la congruence ci-dessus prouvent que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{p+q,r-1}(1-x) &= (-1)^{p+q}(\mathbf{B_x}-r)_{p+q} \\
&= (-1)^{p+q}(\mathbf{B_x}-r)_p(\mathbf{B_x}-r-p)_q \\
&= (-1)^{p+q}\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}(-r)_{p-j}(\mathbf{B_x})_j(\mathbf{B_x}-r-p)_q \\
&\equiv (-1)^{p+q}(-r)_p(\mathbf{B_x}-r)_q+(-1)^{p+q}(\mathbf{B_x})_p(\mathbf{B_x}-r)_q \\
&\equiv (-1)^{p+q}x^p(\mathbf{B_x}+p-r)_q \\
&\equiv (-1)^{p+q}x^p(\mathbf{B_x}-r)_q \\
&= (-x)^p\mathcal{D}_{q,r-1}(1-x)
\end{aligned}$$

ce qui montre que l'assertion est vraie pour $m=1$.
Supposons que $\mathcal{D}_{mp+q,r-1}(1-x)\equiv(-x)^{mp}\mathcal{D}_{q,r-1}(1-x)$, $m\geq 1$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{(m+1)p+q,r-1}(1-x) &= (-1)^{(m+1)p+q}(\mathbf{B_x}-r)_{(m+1)p+q} \\
&= (-1)^{(m+1)p+q}(\mathbf{B_x}-r)_p(\mathbf{B_x}-r-p)_{mp+q} \\
&= (-1)^{(m+1)p+q}\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}(-r)_{p-j}(\mathbf{B_x})_j(\mathbf{B_x}-r-p)_{mp+q} \\
&\equiv (-1)^{(m+1)p+q}(-r)_p(\mathbf{B_x}-r)_{mp+q}+(-1)^{(m+1)p+q}(\mathbf{B_x})_p(\mathbf{B_x}-r)_{mp+q} \\
&\equiv (-1)^{(m+1)p+q}x^p(\mathbf{B_x}+p-r)_{mp+q} \\
&\equiv (-1)^{(m+1)p+q}x^p(\mathbf{B_x}-r)_{mp+q} \\
&\equiv (-1)^p x^p\mathcal{D}_{mp+q,\,r-1}(1-x) \\
&\equiv (-1)^p x^p(-x)^{mp}\mathcal{D}_{q,r-1}(1-x) \\
&= (-x)^{(m+1)p}\mathcal{D}_{q,r-1}(1-x)
\end{aligned}$$

et l'assertion est ainsi démontrée pour $m+1$. □

Corollaire 20 *Pour tout entier $r\geq 1$, $s\geq 1$ et tout nombre premier p, on a :*

$$x^r\left(\mathcal{B}_{p^s-1,\,r}(x)-1\right)\equiv(-1)^{r-1}\left(x^p+x^{p^2}+...+x^{p^s}\right)\mathcal{D}_{r-1}(1-x).$$

Preuve. La proposition 17 et les relations (2.1), (2.9) montrent que

$$\begin{aligned}
x^r\left(\mathcal{B}_{p^s-1,\,r}(x)-1\right) &\equiv x^r\left((\mathbf{B_x}+r)^{p^s-1}-1\right) \\
&= (\mathbf{B_x})_r\left(\mathbf{B_x}^{p^s-1}-1\right) \\
&= (\mathbf{B_x}-1)_{r-1}\left(\mathbf{B_x}^{p^s}-\mathbf{B_x}\right) \\
&= \left(x^p+x^{p^2}+...+x^{p^s}\right)(\mathbf{B_x}-1)_{r-1} \\
&= (-1)^{r-1}\left(x^p+x^{p^2}+...+x^{p^s}\right)\mathcal{D}_{r-1}(1-x).
\end{aligned}$$

□

Une curieuse congruence sur les polynômes r-dérangement *est donnée par :*

Théorème 21 *Soient $n \geq 0, m \geq 0, r \geq 1$ des entiers et p un nombre premier. Alors*

$$\begin{aligned} & x^{m+1} \sum_{k=0}^{p-1} (m+n+r)_{p-1-k} \mathcal{D}_{n+k,\, r-1}(1-x) \\ \equiv \; & (-1)^m \frac{x^p}{(r-1)!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (n-j+r-1)! \mathcal{D}_{m+j}(1-x). \end{aligned}$$

En particulier, pour $r = 1$, on obtient :

$$x^{m+1} \sum_{k=0}^{p-1} (m+n+1)_{p-1-k} \mathcal{D}_{n+k}(1-x) \equiv (-1)^m n! x^p \sum_{j=0}^{n} \frac{\mathcal{D}_{m+j}(1-x)}{j!}.$$

Preuve. De la congruence connue $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^{p-1-k}$ et des relations (2.8), (2.10), on obtient

$$\begin{aligned} & x^{m+1} \sum_{k=0}^{p-1} (m+n+r)_{p-1-k} \mathcal{D}_{n+k,\, r-1}(1-x) \\ \equiv \; & (-1)^n x^{m+1} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} (m+n+r)_{p-1-k} (\mathbf{B_x} - r)_{n+k} \\ = \; & (-1)^n x^{m+1} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} (m+n+r)_{p-1-k} (\mathbf{B_x} - r - n)_k (\mathbf{B_x} - r)_n \\ = \; & (-1)^n x^{m+1} (\mathbf{B_x} + m)_{p-1} (\mathbf{B_x} - r)_n , \end{aligned}$$

et par la relation (2.1) et la proposition (17), on trouve

$$\begin{aligned} & (-1)^n x^{m+1} (\mathbf{B_x} + m)_{p-1} (\mathbf{B_x} - r)_n \\ = \; & (-1)^n (\mathbf{B_x})_{m+1} (\mathbf{B_x} - 1)_{p-1} (\mathbf{B_x} - r - m - 1)_n \\ = \; & (-1)^n (\mathbf{B_x} - 1)_m (\mathbf{B_x})_p (\mathbf{B_x} - r - m - 1)_n \\ \equiv \; & (-1)^n (\mathbf{B_x} - 1)_m (\mathbf{B_x}^p - \mathbf{B_x}) (\mathbf{B_x} - r - m - 1)_n \\ \equiv \; & (-1)^n x^p (\mathbf{B_x} - 1)_m (\mathbf{B_x} - r - m - 1)_n \\ = \; & (-1)^n x^p \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-r)_{n-j} (\mathbf{B_x} - 1)_m (\mathbf{B_x} - m - 1)_j \\ = \; & (-1)^n x^p \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-r)_{n-j} (\mathbf{B_x} - 1)_{m+j} \\ = \; & (-1)^m \frac{x^p}{(r-1)!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (n-j+r-1)! \mathcal{D}_{m+j}(1-x), \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve. □

Corollaire 22 *Pour tout entier $n \geq 0$ et tout nombre premier p, on a*

$$\begin{aligned} x\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\mathcal{D}_{n+k}(1-x)}{k!} &\equiv (-1)^n n! x^{n+2}\sum_{j=0}^{n}\frac{\mathcal{D}_{j+p-2-n}(1-x)}{j!},\ 0\leq n\leq p-2, \\ x\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\mathcal{D}_{n+k}(1-x)}{(k-1)!} &\equiv (-1)^n n! x^{n+3}\sum_{j=0}^{n}\frac{\mathcal{D}_{j+p-3-n}(1-x)}{j!},\ 0\leq n\leq p-3. \end{aligned}$$

En particulier, pour $n = 0$ ou $n = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} x\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\mathcal{D}_{k}(1-x)}{k!} &\equiv x^2\mathcal{D}_{p-2}(1-x), \\ x\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\mathcal{D}_{k}(1-x)}{(k-1)!} &\equiv x^3\mathcal{D}_{p-3}(1-x),\ p\geq 3, \\ x\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\mathcal{D}_{k+1}(1-x)}{k!} &\equiv -x^3\left(\mathcal{D}_{p-3}(1-x)+\mathcal{D}_{p-2}(1-x)\right),\ p\geq 3, \\ x\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\mathcal{D}_{k+1}(1-x)}{(k-1)!} &\equiv -x^4\left(\mathcal{D}_{p-4}(1-x)+\mathcal{D}_{p-3}(1-x)\right),\ p\geq 5. \end{aligned}$$

Preuve. Il suffit de prendre $r = 1$ et $m + n + 1 = p - 1$ ou $p - 2$ dans le théorème 21 et utiliser les congruences connues suivantes

$$\begin{aligned} k!\,(p-1)_{p-1-k} &\equiv -1,\ 0\leq k\leq p-1, \\ (k-1)!\,(p-2)_{p-1-k} &\equiv 1,\ 1\leq k\leq p-1. \end{aligned}$$

□

2.3 Congruences sur les polynômes de Lah

Dans cette section, nous proposons quelques congruences pour le polynôme de Lah $\mathcal{L}_n(x)$.

Définition 17 *Pour tout entier n, le polynôme de Lah $\mathcal{L}_n(x)$ est défini par :*

$$\mathcal{L}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)\, x^k.$$

Les premiers polynômes de Lah sont

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0(x) &= 1, \\
\mathcal{L}_1(x) &= x, \\
\mathcal{L}_2(x) &= x^2 + 2x, \\
\mathcal{L}_3(x) &= x^3 + 6x^2 + 6x, \\
\mathcal{L}_4(x) &= x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 24x, \\
\mathcal{L}_5(x) &= x^5 + 20x^4 + 120x^3 + 240x^2 + 120x.
\end{aligned}$$

La fonction génératrice exponentielle de la suite des polynômes $(\mathcal{L}_n(x))_{n\geq 0}$ est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n(x) \frac{t^n}{n!} = \exp\left(\frac{t}{1-t}x\right).$$

La suite des polynômes de Lah satifait la relation donnée par :

Proposition 23 *Pour tout entier n, on a :*

$$\mathcal{L}_n(x) = (x+n-1)\mathcal{L}_{n-1}(x) + x\mathcal{L}'_{n-1}(x).$$

Par l'ombre généralisée de Bell $\mathbf{B_x}$, nous proposons quelques congruences reliant le polynôme de Lah et le polynôme de dérangement. De l'identité bien connue

$$\langle x \rangle_n = (x+n-1)_n = \sum_{k=1}^{n} L(n,k)(x)_k \tag{2.11}$$

il s'ensuit que

$$(\mathbf{B_x}+n-1)_n = \langle \mathbf{B_x} \rangle_n = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)(\mathbf{B_x})_k = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)\,x^k = \mathcal{L}_n(x). \tag{2.12}$$

Ceci montre que pour tout entier n, le polynôme $\mathcal{L}_n(x)$ peut être défini par :

$$\mathcal{L}_n(x) = \langle \mathbf{B_x} \rangle_n.$$

Proposition 24 *Soient $n \geq 0, q \geq 0$ des entiers et p un nombre premier. Alors*

$$\mathcal{L}_{mp+q}(x) \equiv x^{mp}\mathcal{L}_q(x).$$

Preuve. On procède par induction sur m. Par les relations (2.12), (2.1), (2.11) et la propriété de la factorielle croissante

$$\langle x \rangle_{n+m} = \langle x \rangle_n \langle x+n \rangle_m \tag{2.13}$$

on déduit, pour $m = 1$, que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{p+q}(x) &= \langle \mathbf{B_x} \rangle_{p+q} \\
&= \langle \mathbf{B_x} \rangle_p \langle \mathbf{B_x} + p \rangle_q \\
&\equiv \langle \mathbf{B_x} \rangle_p \langle \mathbf{B_x} \rangle_q \\
&= (\mathbf{B_x} + p - 1)_p \langle \mathbf{B_x} \rangle_q \\
&\equiv (\mathbf{B_x} - 1)_p \langle \mathbf{B_x} \rangle_q \\
&= (\mathbf{B_x} - p)(\mathbf{B_x} - 1)_{p-1} \langle \mathbf{B_x} \rangle_q \\
&\equiv (\mathbf{B_x})_p \langle \mathbf{B_x} \rangle_q \\
&= x^p \langle \mathbf{B_x} + p \rangle_q \\
&\equiv x^p \langle \mathbf{B_x} \rangle_q \\
&= x^p \mathcal{L}_q(x),
\end{aligned}$$

ce qui montre que l'assertion est vérifiée pour $m = 1$. Supposons que $\mathcal{L}_{mp+q}(x) \equiv x^{mp}\mathcal{L}_q(x)$ pour un certain entier $m \geq 1$. Alors, par les relations (2.12), (2.13), (2.1), il résulte que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(m+1)p+q}(x) &= \langle \mathbf{B_x} \rangle_{(m+1)p+q} \\
&= \langle \mathbf{B_x} \rangle_p \langle \mathbf{B_x} + p \rangle_{mp+q} \\
&\equiv \langle \mathbf{B_x} \rangle_p \langle \mathbf{B_x} \rangle_{mp+q} \\
&= (\mathbf{B_x} + p - 1)_p \langle \mathbf{B_x} \rangle_{mp+q} \\
&\equiv (\mathbf{B_x} - 1)_p \langle \mathbf{B_x} \rangle_{mp+q} \\
&= (\mathbf{B_x} - p)(\mathbf{B_x} - 1)_{p-1} \langle \mathbf{B_x} \rangle_{mp+q} \\
&\equiv (\mathbf{B_x})_p \langle \mathbf{B_x} \rangle_{mp+q} \\
&\equiv x^p \langle \mathbf{B_x} + p \rangle_{mp+q} \\
&\equiv x^p \langle \mathbf{B_x} \rangle_{mp+q} \\
&= x^p \mathcal{L}_{mp+q}(x) \\
&\equiv x^{(m+1)p} \mathcal{L}_q(x),
\end{aligned}$$

et l'assertion est ainsi démontrée pour $m + 1$. □

Le théorème ci-dessous donne une congruence reliant le polynôme de Lah et le polynôme de dérangement.

Théorème 25 *Soient $n \geq 0, m \geq 0$ des entiers et p un nombre premier tels que $n + m \geq 2$. Alors*

$$(-x)^{m+n-2} \sum_{k=0}^{p-1} (-m)_{p-1-k} \mathcal{L}_{n+k}(x) \equiv x^{p-1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j L(n,j) \mathcal{D}_{j+m+n-2}(1-x).$$

Preuve. En utilisant la congruence $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k$, les relations (2.12), (2.9), (2.10), (2.13) et la suite de type binomial $(\langle x\rangle_n)$, on trouve

$$\begin{aligned}
& x^{m+n-2}\sum_{k=0}^{p-1}(-m)_{p-1-k}\,\mathcal{L}_{n+k}(x) \\
= \;& x^{m+n-2}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\langle m\rangle_{p-1-k}\,\mathcal{L}_{n+k}(x) \\
\equiv \;& x^{m+n-2}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{k}\langle m\rangle_{p-1-k}\,\langle \mathbf{B_x}\rangle_{n+k} \\
= \;& x^{m+n-2}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{k}\langle m\rangle_{p-1-k}\,\langle \mathbf{B_x}+n\rangle_{k}\,\langle \mathbf{B_x}\rangle_{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \;& x^{m+n-2}\langle \mathbf{B_x}+m+n\rangle_{p-1}\langle \mathbf{B_x}\rangle_n \\
= \;& x^{m+n-2}(\mathbf{B_x}+m+n+p-2)_{p-1}(\mathbf{B_x}+n-1)_n\,.
\end{aligned}$$

Comme $(\mathbf{B_x}+l+p)_{p-1} \equiv (\mathbf{B_x}+l)_{p-1}$ pour tout entier l, alors par la relation (2.1) on peut écrire

$$\begin{aligned}
& x^{m+n-2}\sum_{k=0}^{p-1}(-m)_{p-1-k}\,\mathcal{L}_{n+k}(x) \\
\equiv \;& x^{m+n-2}(\mathbf{B_x}+m+n-2)_{p-1}(\mathbf{B_x}+n-1)_n \\
= \;& (\mathbf{B_x})_{p-1}(\mathbf{B_x})_{m+n-2}(\mathbf{B_x}-m+1)_n \\
= \;& x^{p-1}(\mathbf{B_x}+p-1)_{m+n-2}(\mathbf{B_x}-m+p)_n \\
\equiv \;& x^{p-1}(\mathbf{B_x}-1)_{m+n-2}(\mathbf{B_x}-m)_n \\
\equiv \;& x^{p-1}(\mathbf{B_x}-1)_{m+n-2}(\mathbf{B_x}-m-n+1+n-1)_n \\
= \;& x^{p-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(n-1)_{n-j}(\mathbf{B_x}-1)_{m+n-2}(\mathbf{B_x}-m-n+1)_j \\
= \;& x^{p-1}\sum_{j=0}^{n}L(n,j)(\mathbf{B_x}-1)_{j+m+n-2} \\
= \;& (-1)^{m+n}x^{p-1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j L(n,j)\,\mathcal{D}_{j+m+n-2}(1-x)\,,
\end{aligned}$$

ce qui est la congruence recherchée. $\square$

Corollaire 26 *Pour tout entier n et tout nombre premier p, on a :*

$$\begin{aligned} x^n \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\mathcal{L}_{n+k}(x)}{k!} &\equiv x^p \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} L(n,j)\, \mathcal{D}_{j+n-1}(1-x), \ n \geq 1, \\ x^n \sum_{k=1}^{p-2} \frac{\mathcal{L}_{n+k}(x)}{(k-1)!} &\equiv x^{p-1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} L(n,j)\, \mathcal{D}_{j+n}(1-x), \ n \geq 0. \end{aligned}$$

Preuve. Il suffit de prendre $m = 1$ ou $m = 2$ dans le théorème (25) et d'utiliser les congruences

$$\begin{aligned} k!\,(-1)_{p-1-k} &\equiv -1, \quad 0 \leq k \leq p-1, \\ k!\,(-2)_{p-1-k} &\equiv k, \quad 1 \leq k \leq p-1. \end{aligned}$$

□

Remarque 3 *Du fait que $\mathcal{D}_1(x) = x$ et $\mathcal{D}_2(x) = x^2 + 1$, alors si on choisit $n = 0$ ou $n = 1$ dans le corollaire 26, on obtiendra les congruences :*

$$\begin{aligned} x \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\mathcal{L}_{k+1}(x)}{k!} &\equiv x^p - x^{p+1}, \\ \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\mathcal{L}_k(x)}{(k-1)!} &\equiv x^{p-1}, \\ x \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\mathcal{L}_{k+1}(x)}{(k-1)!} &\equiv x^{p+2} + x^p. \end{aligned}$$

2.4 Congruences sur les polynômes r-Lah

Dans cette section, comme dans le cas des polynômes de Lah, nous proposons certaines congruences concernant le polynôme r-Lah.

Définition 18 *Pour tout entier $n \geq 0$, le polynôme r-Lah $\mathcal{L}_{n,r}(x)$ est défini par*

$$\mathcal{L}_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} L_r(n,k)\, x^k.$$

Les premiers polynômes r-Lah sont

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{0,r}(x) = 1, \\ &\mathcal{L}_{1,r}(x) = x + 2r, \\ &\mathcal{L}_{2,r}(x) = x^2 + 2(2r+1)x + 2r(2r+1), \\ &\mathcal{L}_{3,r}(x) = x^3 + 6(r+1)x^2 + 6(2r+1)(r+1)x + 4r(2r+1)(r+1). \end{aligned}$$

La fonction génératrice exponentielle de la suite de polynômes $(\mathcal{L}_{n,r}(x))_{n\geq 0}$ est

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}_{n,r}(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{(1-t)^{2r}}\exp\left(\frac{t}{1-t}x\right).$$

Les relations (2.3), (1.18), (2.11) montrent que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B_x}+n+2r-1)_n &= \langle\mathbf{B_x}+2r\rangle_n\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n+2r-1)_{n-k}(\mathbf{B_x})_k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\binom{n+2r-1}{k+2r-1}x^k\\
&= \mathcal{L}_{n,r}(x),
\end{aligned}$$

ce qui montre que le polynôme $\mathcal{L}_{n,r}(x)$ peut être défini par

$$\mathcal{L}_{n,r}(x)=\langle\mathbf{B_x}+2r\rangle_n. \tag{2.14}$$

La proposition 24 et le théorème 25 peuvent généraliser comme suit :

Proposition 27 *Soient $m\geq 0, q\geq 0$ des entiers et p un nombre premier. Alors*

$$\mathcal{L}_{mp+q,r}(x)\equiv x^{mp}\mathcal{L}_{q,r}(x).$$

Preuve. Par induction sur m. Pour $m=1$ et par (2.14), (2.13), (2.11), on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{p+q,r}(x) &= \langle\mathbf{B_x}+2r\rangle_{p+q}\\
&= \langle\mathbf{B_x}\rangle_p\langle\mathbf{B_x}+2r+p\rangle_q\\
&\equiv \langle\mathbf{B_x}\rangle_p\langle\mathbf{B_x}+2r\rangle_q\\
&= (\mathbf{B_x}+p-1)_p\langle\mathbf{B_x}+2r\rangle_q\\
&\equiv (\mathbf{B_x}-1)_p\langle\mathbf{B_x}+2r\rangle_q\\
&= (\mathbf{B_x}-p)(\mathbf{B_x}-1)_{p-1}\langle\mathbf{B_x}+2r\rangle_q\\
&\equiv (\mathbf{B_x})_p\langle\mathbf{B_x}+2r\rangle_q\\
&= x^p\langle\mathbf{B_x}+2r+p\rangle_q\\
&\equiv x^p\langle\mathbf{B_x}+2r\rangle_q\\
&\equiv x^p\mathcal{L}_{q,r}(x),
\end{aligned}$$

ce qui montre que l'assertion est vérifiée pour $m = 1$.
Supposons que $\mathcal{L}_{mp+q,r}(x) \equiv x^{mp}\mathcal{L}_{q,r}(x)$, pour $m \geq 1$. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(m+1)p+q,r}(x) &= \mathcal{L}_{p+mp+q,r}(x) \\
&= \langle \mathbf{B_x} + 2r \rangle_{p+mp+q} \\
&= \langle \mathbf{B_x} \rangle_p \langle \mathbf{B_x} + 2r + p \rangle_{mp+q} \\
&= (\mathbf{B_x} + p - 1)_p \langle \mathbf{B_x} + 2r + p \rangle_{mp+q} \\
&\equiv (\mathbf{B_x} - 1)_p \langle \mathbf{B_x} + 2r \rangle_{mp+q} \\
&= (\mathbf{B_x} - p)(\mathbf{B_x} - 1)_{p-1} \langle \mathbf{B_x} + 2r \rangle_{mp+q} \\
&\equiv (\mathbf{B_x})_p \langle \mathbf{B_x} + 2r \rangle_{mp+q} \\
&= x^p \langle \mathbf{B_x} + 2r + p \rangle_{mp+q} \\
&\equiv x^p \langle \mathbf{B_x} + 2r \rangle_{mp+q} \\
&= x^p \mathcal{L}_{mp+q,r}(x) \\
&\equiv x^{(m+1)p}\mathcal{L}_{q,r}(x),
\end{aligned}$$

et l'assertion est ainsi démontrée pour $m + 1$. $\square$

Théorème 28 *Soient $m, n, r \geq 0$ des entiers et p un nombre premier tels que $m + n + 2r \geq 2$. Alors*

$$(-x)^{m+n+2r-2} \sum_{k=0}^{p-1} (-m)_{p-1-k} \mathcal{L}_{n+k,r}(x) \equiv x^{p-1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j L_r(n,j) \mathcal{D}_{j+m+n+2r-2}(1-x).$$

Preuve. D'après la congruence $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k$ et les relations (2.14), (2.9), on obtient

$$\begin{aligned}
& x^{m+n+2r-2} \sum_{k=0}^{p-1} (-m)_{p-1-k} \mathcal{L}_{n+k,r}(x) \\
= \; & x^{m+n+2r-2} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \langle m \rangle_{p-1-k} \mathcal{L}_{n+k,r}(x) \\
\equiv \; & x^{m+n+2r-2} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} \langle m \rangle_{p-1-k} \langle \mathbf{B_x} + 2r \rangle_{n+k} \\
= \; & x^{m+n+2r-2} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} \langle m \rangle_{p-1-k} \langle \mathbf{B_x} + n + 2r \rangle_k \langle \mathbf{B_x} + 2r \rangle_n \\
= \; & x^{m+n+2r-2} \langle \mathbf{B_x} + m + n + 2r \rangle_{p-1} \langle \mathbf{B_x} + 2r \rangle_n \\
= \; & x^{m+n+2r-2} (\mathbf{B_x} + m + n + 2r + p - 2)_{p-1} (\mathbf{B_x} + 2r + n - 1)_n,
\end{aligned}$$

et par le fait que $(\mathbf{B_x}+l+p)_{p-1} \equiv (\mathbf{B_x}+l)_{p-1}$ pour tout entier l, d'après la relation (2.1) on peut écrire

$$\begin{aligned}
& x^{m+n+2r-2} \sum_{k=0}^{p-1} (-m)_{p-1-k} \mathcal{L}_{n+k,r}(x) \\
\equiv\ & x^{m+n+2r-2} (\mathbf{B_x}+m+n+2r-2)_{p-1} (\mathbf{B_x}+2r+n-1)_n \\
=\ & (\mathbf{B_x})_{p-1} (\mathbf{B_x})_{m+n+2r-2} (\mathbf{B_x}-m+1)_n \\
=\ & x^{p-1} (\mathbf{B_x}+p-1)_{m+n+2r-2} (\mathbf{B_x}-m+p)_n \\
\equiv\ & x^{p-1} (\mathbf{B_x}-1)_{m+n+2r-2} (\mathbf{B_x}-m)_n \\
=\ & x^{p-1} (\mathbf{B_x}-1)_{m+n+2r-2} (\mathbf{B_x}-m-n+2r-2r+1+n-1)_n \\
=\ & x^{p-1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (n+2r-1)_{n-j} (\mathbf{B_x}-1)_{m+n+2r-2} (\mathbf{B_x}-m-n-2r+1)_j \\
=\ & x^{p-1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (n+2r-1)_{n-j} (\mathbf{B_x}-1)_{j+m+n+2r-2},
\end{aligned}$$

la congruence souhaitée découle en remplacant du facteur $\binom{n}{j}(n+2r-1)_{n-j}$ par $L_r(n,j)$. □

2.5 Congruences sur les polynômes r-Bell

Dans cette section, nous établissons une extension de la congruence de Touchard pour le polynôme r-Bell. Notons ici, que le polynôme $\mathcal{B}_{n,r}(x)$ puisse être mis sous la forme

$$\mathcal{B}_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k \mathcal{B}_{n-k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n-k} = (\mathbf{B_x}+r)^n, \tag{2.15}$$

Proposition 29 *Soient $n, r \geq 0$ des entiers et p un nombre premier. Alors*

$$\mathcal{B}_{n+p,r}(x) \equiv \mathcal{B}_{n+1,r}(x) + x^p \mathcal{B}_{n,r}(x). \tag{2.16}$$

Preuve. Par (2.15), on trouve

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{n+p,r}(x) - \mathcal{B}_{n+1,r}(x) &= (\mathbf{B_x}+r)^{n+p} - (\mathbf{B_x}+r)^{n+1} \\
&= [(\mathbf{B_x}+r)^p - (\mathbf{B_x}+r)] (\mathbf{B_x}+r)^n,
\end{aligned}$$

et en utilisant la congruence $(\mathbf{B_x}+r)^p-(\mathbf{B_x}+r)\equiv(\mathbf{B_x}+r)_p$ et l'identité (2.1), la congruence recherchée découle comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{n+p,r}(x)-\mathcal{B}_{n+1,r}(x) &\equiv (\mathbf{B_x}+r)_p(\mathbf{B_x}+r)^n \\
&= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(r)_{p-k}(\mathbf{B_x})_k(\mathbf{B_x}+r)^n \\
&= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(r)_{p-k}\,x^k(\mathbf{B_x}+r+k)^n \\
&\equiv (r)_p(\mathbf{B_x}+r)^n+x^p(\mathbf{B_x}+r+p)^n \\
&\equiv x^p(\mathbf{B_x}+r)^n \\
&= x^p\mathcal{B}_{n,r}(x).
\end{aligned}$$

□

D'autres congruences liées aux polynômes r-Bell sont données par :

Théorème 30 *Soient $n\geq 0, m\geq 1$ des entiers et p un nombre premier. Alors*

$$\sum_{r=0}^{p-1}\langle -m\rangle_{p-1-r}\,x^{m+r}\mathcal{B}_{n,r}(x)\equiv x^{p-1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+m}\left\{ {n \atop j} \right\}\mathcal{D}_{j+m}(1-x).$$

Preuve. Par la congruence $\binom{p-1}{k}\equiv(-1)^k$ et les relations (2.15) et (2.1), on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{p-1}\langle -m\rangle_{p-1-r}\,x^{m+r}\mathcal{B}_{n,r}(x) \\
\equiv\ & x^m\sum_{r=0}^{p-1}\binom{p-1}{r}(m)_{p-1-r}\,x^r(\mathbf{B_x}+r)^n \\
=\ & x^m\sum_{r=0}^{p-1}\binom{p-1}{r}(m)_{p-1-r}(\mathbf{B_x})_r\,\mathbf{B_x}^n \\
=\ & x^m(\mathbf{B_x}+m)_{p-1}\mathbf{B_x}^n \\
=\ & (\mathbf{B_x})_{p-1}(\mathbf{B_x})_m(\mathbf{B_x}-m)^n \\
=\ & x^{p-1}(\mathbf{B_x}+p-1)_m(\mathbf{B_x}-m+p-1)^n \\
\equiv\ & x^{p-1}(\mathbf{B_x}-1)_m(\mathbf{B_x}-m-1)^n \\
=\ & x^{p-1}\sum_{j=0}^{n}\left\{ {n \atop j} \right\}(\mathbf{B_x}-1)_m(\mathbf{B_x}-m-1)_j \\
=\ & x^{p-1}\sum_{j=0}^{n}\left\{ {n \atop j} \right\}(\mathbf{B_x}-1)_{j+m} \\
=\ & x^{p-1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{m+j}\left\{ {n \atop j} \right\}\mathcal{D}_{j+m}(1-x).
\end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve. □

Si on prend $m = p - 1$ ou $m = p - 2$ dans le théorème (30) nous obtenons :

Corollaire 31 *Pour tout entier $n \geq 0$ et tout nombre premier p, on a*

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{p-1} \frac{x^r \mathcal{B}_{n,r}(x)}{r!} &\equiv -\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left\{ {n \atop j} \right\} \mathcal{D}_{j+p-1}(1-x), \\ \sum_{r=1}^{p-1} \frac{x^r \mathcal{B}_{n,r}(x)}{(r-1)!} &\equiv -x \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left\{ {n \atop j} \right\} \mathcal{D}_{j+p-2}(1-x). \end{aligned}$$

En particulier, pour $n = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{p-1} \frac{x^r}{r!} &\equiv -\mathcal{D}_{p-1}(1-x), \\ \sum_{r=1}^{p-1} \frac{x^r}{(r-1)!} &\equiv -x\mathcal{D}_{p-2}(1-x). \end{aligned}$$

2.6 Congruences reliant les polynômes $\mathbf{r}_q$-Bell et r-dérangement

Dans ce paragraphe, on propose une extension aux polynômes $\mathbf{r}_q$-Bell du théorème suivant :

Théorème 32 ([59, Th. 1.2]) *Soient $n \geq 0, m \geq 1$ des entiers et $p \nmid m$ un nombre premier. Alors*

$$x^m \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\mathcal{B}_{n+k}(x)}{(-m)^k} \equiv x^p \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{m+k-1} \mathcal{D}_{m+k-1}(1-x).$$

D'aprés les relations (1.10) et (1.12), on a

$$\sum_{j=0}^{n+|\mathbf{r}_{q-1}|} \left\{ {n + |\mathbf{r}_q| \atop j + r_q} \right\}_{\mathbf{r}_q} (x)_j = (x + r_q)_{r_1} \ldots (x + r_q)_{r_{q-1}} (x + r_q)^n, \tag{2.17}$$

où

$$\mathbf{r}_q = (r_1, ..., r_q) \text{ et } |\mathbf{r}_q| = r_1 + ... + r_q,$$

et par la définition (6), on a

$$\mathcal{B}_n(x; \mathbf{r}_q) = \sum_{j=0}^{n+|\mathbf{r}_{q-1}|} \left\{ {n + |\mathbf{r}_q| \atop j + r_q} \right\}_{\mathbf{r}_q} x^j = \sum_{j=0}^{n+|\mathbf{r}_{q-1}|} \left\{ {n + |\mathbf{r}_q| \atop j + r_q} \right\}_{\mathbf{r}_q} (\mathbf{B_x})_j, \ n \geq 0,$$

qui s'exprime, en utilisant (2.17), en fonction de $\mathbf{B_x}$ comme suit :

$$\mathcal{B}_n\left(x;\mathbf{r}_q\right)=\left(\mathbf{B_x}+r_q\right)^n\left(\mathbf{B_x}+r_q\right)_{r_1}...\left(\mathbf{B_x}+r_q\right)_{r_{q-1}}. \tag{2.18}$$

Les relations (2.18), (2.1), (1.11) montrent que

$$x^{r_q}\mathcal{B}_n\left(x;\mathbf{r}_q\right)=\mathbf{B}_\mathbf{x}^n\left(\mathbf{B_x}\right)_{r_1}...\left(\mathbf{B_x}\right)_{r_q}=\sum_{k=0}^{|\mathbf{r}_q|}a_k\left(\mathbf{r}_q\right)\mathcal{B}_{n+k}\left(x\right), \tag{2.19}$$

où $\sum\limits_{k=0}^{|\mathbf{r}_q|}a_k\left(\mathbf{r}_q\right)u^k=\left(u\right)_{r_1}...\left(u\right)_{r_q}$.
L'extension est donnée par le théorème suivant.

Théorème 33 *Soient $n\geq 0, m\geq 1, r_q\geq ...\geq r_1\geq 0$ des entiers et $p\nmid m$ un nombre premier. Alors*

$$x^{m+r_q}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\mathcal{B}_{n+k}\left(x;\mathbf{r}_q\right)}{\left(-m\right)^k}\equiv x^p\sum_{k=0}^{n+|\mathbf{r}_{q-1}|}\left(-1\right)^{k+r_q+m-1}\left\{\begin{matrix}n+|\mathbf{r}_q|\\k+r_q\end{matrix}\right\}_{\mathbf{r}_q}\mathcal{D}_{k+r_q+m-1}\left(1-x\right).$$

Preuve. D'après le théorème (32) et par la relation (2.19), on a

$$\begin{aligned}x^{m+r_q}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\mathcal{B}_{n+k}\left(x;\mathbf{r}_q\right)}{\left(-m\right)^k} &= x^m\sum_{i=0}^{|\mathbf{r}_q|}a_i\left(\mathbf{r}_q\right)\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\mathcal{B}_{n+k+i}\left(x\right)}{\left(-m\right)^k}\\ &\equiv x^p\sum_{i=0}^{|\mathbf{r}_q|}a_i\left(\mathbf{r}_q\right)\sum_{k=0}^{n+i}\left\{\begin{matrix}n+i\\k\end{matrix}\right\}\left(-1\right)^{m+k-1}\mathcal{D}_{m+k-1}\left(1-x\right)\\ &\equiv x^p\sum_{k=0}^{n+|\mathbf{r}_q|}\left(-1\right)^{m+k-1}\left(\sum_{i=0}^{|\mathbf{r}_q|}a_i\left(\mathbf{r}_q\right)\left\{\begin{matrix}n+i\\k\end{matrix}\right\}\right)\mathcal{D}_{m+k-1}\left(1-x\right)\\ &\equiv x^p\sum_{k=r_q}^{n+|\mathbf{r}_q|}\left(-1\right)^{m+k-1}\left\{\begin{matrix}n+|\mathbf{r}_q|\\k\end{matrix}\right\}_{\mathbf{r}_q}\mathcal{D}_{m+k-1}\left(1-x\right),\end{aligned}$$

et le théorème est ainsi démontré. □

Pour $q=1$ on a $r_q=r$, le théorème précédent fournit plusieurs cas donnés le corollaire suivant.

Corollaire 34 *Soient $n\geq 0, r\geq 0, m\geq 1$ des entiers et $p\nmid m$ un nombre premier. Alors*

$$x^{m+r}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\mathcal{B}_{n+k,r}\left(x\right)}{\left(-m\right)^k}\equiv x^p\sum_{k=0}^{n}\left\{\begin{matrix}n+r\\k+r\end{matrix}\right\}_r\left(-1\right)^{k+m+r-1}\mathcal{D}_{k+m+r-1}\left(1-x\right).$$

En particulier, pour $n=0$, $n=1$, $n=2$ et $x=1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\mathcal{B}_{k,r}}{(-m)^k} &\equiv (-1)^{m+r-1}\mathcal{D}_{m+r-1}, \quad \mathcal{B}_{n,r}:=\mathcal{B}_{n,r}(1),\\
\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\mathcal{B}_{k+1,r}}{(-m)^k} &\equiv (-1)^{m+r-1}\left(r\mathcal{D}_{m+r-1}-\mathcal{D}_{m+r}\right),\\
\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\mathcal{B}_{k+2,r}}{(-m)^k} &\equiv (-1)^{m+r-1}\left(r^2\mathcal{D}_{m+r-1}-(2r+1)\mathcal{D}_{m+r}+\mathcal{D}_{m+r+1}\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 35 *Soit f un polynome à coefficient dans $\mathbb{Z}$, p un nombre premier p et $n\geq 0$, $r_q\geq\ldots\geq r_1\geq 0$, $s\geq 1$ des entiers. Alors*

$$\mathcal{B}_{n+p^s}(x;\mathbf{r}_q)\equiv\left(x^p+x^{p^2}+\cdots+x^{p^s}\right)\mathcal{B}_n(x;\mathbf{r}_q)+\mathcal{B}_{n+1}(x;\mathbf{r}_q).$$

Preuve. Par la proposition (17) et la relation (2.19), nous obtenons

$$\begin{aligned}
x^{r_q}\mathcal{B}_{n+p^s}(x;\mathbf{r}_q) &= x^{r_q}\left(\mathcal{B}_{n+p^s}(x;\mathbf{r}_q)-\mathcal{B}_{n+1}(x;\mathbf{r}_q)\right)+x^{r_q}\mathcal{B}_{n+1}(x;\mathbf{r}_q)\\
&= (\mathbf{B}_\mathbf{x})_{r_1}\cdots(\mathbf{B}_\mathbf{x})_{r_q}\mathbf{B}_\mathbf{x}^n\left(\mathbf{B}_\mathbf{x}^{p^s}-\mathbf{B}_\mathbf{x}\right)+x^{r_q}\mathcal{B}_{n+1}(x;\mathbf{r}_q)\\
&\equiv \left(x^p+x^{p^2}+\cdots+x^{p^s}\right)(\mathbf{B}_\mathbf{x})_{r_1}\cdots(\mathbf{B}_\mathbf{x})_{r_q}\mathbf{B}_\mathbf{x}^n+x^{r_q}\mathcal{B}_{n+1}(x;\mathbf{r}_q)\\
&= x^{r_q}\left(x^p+x^{p^2}+\cdots+x^{p^s}\right)\mathcal{B}_n(x;\mathbf{r}_q)+x^{r_q}\mathcal{B}_{n+1}(x;\mathbf{r}_q),
\end{aligned}$$

et la congruence souhaitée est démontrée. □

2.7 Congruences sur les nombres de Bell sans singletons

La suite des nombres $(\mathcal{V}_n)_{n\geq 0}$ vérifie les congruences fournies par le théorème suivant.

Théorème 36 *Soient $n\geq 0, m\geq 1$ des entiers et $p\nmid m$ un nombre premier. Alors*

$$\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\mathcal{V}_{n+k} \equiv \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\mathcal{B}_{j+p-1}, \tag{2.20}$$

$$\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\mathcal{V}_{n+k}}{(-m)^k} \equiv (-1)^m\sum_{j=0}^{n}\left\{ {n+p-1 \atop j+p-1} \right\}_{p-1}(-1)^j\mathcal{D}_{j+m-2}. \tag{2.21}$$

Preuve. L'identité (1.28) et les congruences $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k$ et $m^p \equiv m$, nous permettent d'établir ce qui suit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \mathcal{V}_{n+k} &\equiv \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} (\mathbf{B}-1)^{n+k} \\
&\equiv (\mathbf{B}-1)^n \mathbf{B}^{p-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \mathbf{B}^{j+p-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \mathcal{B}_{j+p-1}.
\end{aligned}$$

De la même manière, par les identités (2.2), (2.4) et la congruence de Lagrange

$$(\mathbf{B})_p \equiv \mathbf{B}^p - \mathbf{B} \mod p, \tag{2.22}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p-1} \frac{\mathcal{V}_{n+k}}{(-m)^k} &\equiv \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p-1}{k} m^{p-1-k} (\mathbf{B}-1)^{n+k} \\
&= (\mathbf{B}-1)^n \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p-1}{k} m^{p-1-k} (\mathbf{B}-1)^k \\
&= (\mathbf{B}-1)^n \left[(\mathbf{B}+m-1)^{p-1} - m^{p-1}\right] \\
&\equiv (\mathbf{B})_{m-1} \left(\mathbf{B}^{p-1}-1\right) (\mathbf{B}-m)^n \\
&= (\mathbf{B}-1)_{m-2} (\mathbf{B}^p - \mathbf{B}) (\mathbf{B}-m)^n \\
&\equiv (\mathbf{B}-1)_{m-2} (\mathbf{B}-m)^n \\
&\equiv (\mathbf{B}-1)_{m-2} (\mathbf{B}-m+1+p-1)^n \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left\{ {n+p-1 \atop j+p-1} \right\}_{p-1} (\mathbf{B}-1)_{m-2} (\mathbf{B}-m+1)_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n} \left\{ {n+p-1 \atop j+p-1} \right\}_{p-1} (\mathbf{B}-1)_{j+m-2} \\
&= (-1)^m \sum_{j=0}^{n} \left\{ {n+p-1 \atop j+p-1} \right\}_{p-1} (-1)^j \mathcal{D}_{j+m-2},
\end{aligned}$$

et la congruence souhaitée est démontrée. □

Si nous choisissons $n = 0$ ou $n = 1$ dans le théorème 36, nous obtenons des congruences données par le corollaire suivant.

Corollaire 37 *Soient $n \geq 0, m \geq 2$ des entiers et $p \nmid m$ un nombre premier. Alors*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \mathcal{V}_k &\equiv \mathcal{B}_{p-1}, \\
\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \mathcal{V}_{k+1} &\equiv \mathcal{B}_p - \mathcal{B}_{p-1} \equiv 2 - \mathcal{B}_{p-1}, \\
\sum_{k=1}^{p-1} \frac{\mathcal{V}_k}{(-m)^k} &\equiv (-1)^m \mathcal{D}_{m-2}, \\
\sum_{k=1}^{p-1} \frac{\mathcal{V}_{k+1}}{(-m)^k} &\equiv (-1)^{m+1} \left(\mathcal{D}_{m-2} + \mathcal{D}_{m-1}\right).
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Périodicité des polynômes liés à l'ombre généralisée de Bell

La périodicité de la suite $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ modulo un nombre premier p a été étudiée par plusieurs auteurs. On a la congruence :

$$\mathcal{B}_{n+N_p} \equiv \mathcal{B}_n \pmod{p}, \text{ où } N_p = \frac{p^p - 1}{p - 1}.$$

Le nombre N_p a été testé pour différentes valeurs de p, par exemple Williams [66] a montré que la période minimale est exactement N_p pour $p = 2, 3, 5$. Radoux [49] a conjecturé que N_p est la période minimale de la suite $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ pour tout nombre premier p. Levine et Dalton [30] ont montré que la période minimale est exactement N_p pour $p = 7, 11, 13, 17$. Ils ont également étudié la période pour les nombres premiers ≤ 50. Récemment, Montgomery, Nahm et Wagstaff [45] ont montré que la période minimale est exactement N_p pour les nombres premiers ≤ 180. Dans ce qui suit, nous donnons quelques résultats concernant certains nombres et polynômes à périodes liées à l'ombre de Bell.

3.1 Périodicité des polynômes liés à l'ombre de Bell

Lemme 38 *Soit f un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Alors, pour tout entier $s \geq 1$ et tout nombre premier p, on a*

$$\mathbf{B}^{p+\cdots+p^s} f(\mathbf{B}) \equiv (\mathbf{B} + s)_s \, f(\mathbf{B}). \tag{3.1}$$

Preuve. Il suffit de prouver le lemme pour $f(x) = x^n$. Pour cela, nous procédons par induction sur s. Pour $s = 1$, en utilisant la congruence de Touchard (1.24), on trouve

$$\mathbf{B}^{n+p} \equiv \mathbf{B}^{n} + \mathbf{B}^{n+1} = (\mathbf{B}+1)\,\mathbf{B}^{n},$$

donc l'assertion est vérifiée pour $s=1$. Si $\mathbf{B}^{n+p+\cdots+p^{s}} \equiv (\mathbf{B}+s)_{s}\,\mathbf{B}^{n}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^{n+p+\cdots+p^{s+1}} &= \mathbf{B}^{p^{s+1}}\mathbf{B}^{n+p+\cdots+p^{s}} \\
&\equiv \mathbf{B}^{p^{s+1}}\,(\mathbf{B}+s)_{s}\,\mathbf{B}^{n} \\
&= (\mathbf{B}+s)_{s}\,\mathbf{B}^{n+p^{s+1}},
\end{aligned}$$

et par la congruence $\mathbf{B}^{n+p^{s+1}} \equiv (s+1)\,\mathbf{B}^{n} + \mathbf{B}^{n+1}$ (choisir $f(x) = x^{n}$, $x = 1$ et remplacer s par $s+1$ dans la proposition 17), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^{n+p+\cdots+p^{s+1}} &\equiv (\mathbf{B}+s)_{s}\,\mathbf{B}^{n+p^{s+1}} \\
&\equiv (\mathbf{B}+s)_{s}\left((s+1)\,\mathbf{B}^{n} + \mathbf{B}^{n+1}\right) \\
&= (\mathbf{B}+s)_{s}\,(s+1+\mathbf{B})\,\mathbf{B}^{n} \\
&= (\mathbf{B}+s+1)_{s+1}\,\mathbf{B}^{n},
\end{aligned}$$

et l'assertion est ainsi démontrée pour $s+1$. □

Théorème 39 *Soient p un nombre premier et r un entier tel que $0 \leq r \leq p-1$. Alors, pour tout polynôme $f \in \mathbb{Z}[x]$, on a*

$$(\mathbf{B}-1)_{r}\,\mathbf{B}^{1+p+\cdots+p^{p-r-1}} f(\mathbf{B}) \equiv f(\mathbf{B}).$$

En particulier, pour $r=0$, on obtient

$$\mathbf{B}^{N_p} f(\mathbf{B}) \equiv f(\mathbf{B}), \tag{3.2}$$

où, $N_p := \frac{p^{p}-1}{p-1}$.

Preuve. Par le lemme (38) et les relations (2.10), (2.2), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B}-1)_{r}\,\mathbf{B}^{1+p+\cdots+p^{p-r-1}} f(\mathbf{B}) &= \mathbf{B}^{p+\cdots+p^{p-r-1}}\mathbf{B}\,(\mathbf{B}-1)_{r}\,f(\mathbf{B}) \\
&\equiv (\mathbf{B}+p-r-1)_{p-r-1}\,(\mathbf{B})_{r+1}\,f(\mathbf{B}) \\
&\equiv (\mathbf{B}-r-1)_{p-r-1}\,(\mathbf{B})_{r+1}\,f(\mathbf{B}) \\
&= (\mathbf{B})_{p}\,f(\mathbf{B}) \\
&= f(\mathbf{B}+p) \\
&\equiv f(\mathbf{B}).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 40 *Soient n, k des entiers naturels et p un nombre premier p. Alors*

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{n+N_p} &\equiv \mathcal{B}_n, \\
\mathcal{B}_{n+N_p,r} &\equiv \mathcal{B}_{n,r}, \\
\mathcal{V}_{n+N_p,k+N_p} &\equiv \mathcal{V}_{n,k}, \\
\mathcal{V}_{n+1+N_p,k+1} &\equiv \mathcal{V}_{n,k}, \\
\mathcal{B}_{n+N_p}\left(r_1,...,r_q\right) &\equiv \mathcal{B}_n\left(r_1,...,r_q\right).
\end{aligned}$$

Preuve. De l'identité $(\mathbf{B})_n f(\mathbf{B}) = f(\mathbf{B}+n)$, qui est l'identité (2.1) avec $x=1$, il s'ensuit, en choisissant dans le théorème 39, $f(x) = x^n$, $(x)_r x^n$, $x^k(x-1)^{n-k}$, que

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{n+N_p} &= \mathbf{B}^{n+N_p} = \mathbf{B}^{N_p}\mathbf{B}^n \equiv \mathbf{B}^n = \mathcal{B}_n, \\
\mathcal{B}_{n+N_p,r} &= (\mathbf{B}+r)^{n+N_p} = \mathbf{B}^{N_p}\mathbf{B}^n(\mathbf{B})_r \equiv \mathbf{B}^n(\mathbf{B})_r = (\mathbf{B}+r)^n = \mathcal{B}_{n,r}, \\
\mathcal{V}_{n+N_p,k+N_p} &= \mathbf{B}^{k+N_p}(\mathbf{B}-1)^{n-k} = \mathbf{B}^{N_p}\mathbf{B}^k(\mathbf{B}-1)^{n-k} \equiv \mathbf{B}^k(\mathbf{B}-1)^{n-k} = \mathcal{V}_{n,k}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{n+1+N_p,k+1} &= \mathbf{B}^{k+1}(\mathbf{B}-1)^{n+N_p-k} \\
&= (\mathbf{B})_1\mathbf{B}^k(\mathbf{B}-1)^{n+N_p-k} \\
&= (\mathbf{B}+1)^k\mathbf{B}^{n+N_p-k} \\
&= \mathbf{B}^{N_p}(\mathbf{B}+1)^k\mathbf{B}^{n-k} \\
&\equiv (\mathbf{B}+1)^k\mathbf{B}^{n-k} \\
&= (\mathbf{B})_1\mathbf{B}^k(\mathbf{B}-1)^{n-k} \\
&= \mathbf{B}^k(\mathbf{B}-1)^{n-k} \\
&= \mathcal{V}_{n,k}.
\end{aligned}$$

Si on choisit, de plus, $f(x) = x^n(x)_{r_1}...(x)_{r_q}$, il s'ensuit en utilisant l'identité (2.19) avec $x=1$, que

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{n+N_p}\left(r_1,...,r_q\right) &= \mathbf{B}^{n+N_p}(\mathbf{B})_{r_1}...(\mathbf{B})_{r_q} \\
&= \mathbf{B}^{N_p}\mathbf{B}^n(\mathbf{B})_{r_1}...(\mathbf{B})_{r_q} \\
&\equiv \mathbf{B}^n(\mathbf{B})_{r_1}...(\mathbf{B})_{r_q} \\
&= \mathcal{B}_n\left(r_1,...,r_q\right).
\end{aligned}$$

□

3.2 Congruences pour des polynômes liés à l'ombre généralisée de Bell

D'une manière générale, on a le résultat suivant.

Théorème 41 *Pour tout nombre premier p et tout entier $s \geq 1$, on a*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{n+p+\cdots+p^s}(x) &\equiv \sum_{k=0}^{s} e_{s-k}(a_1,\ldots,a_s)\,\mathcal{B}_{n+k}(x),\\ a_j &= x^p + x^{p^2} + \cdots + x^{p^j},\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{s} e_{s-k}(a_1,\ldots,a_s)\,x^k &= (x+a_1)\cdots(x+a_s),\\ e_{s-k}(a_1,\ldots,a_s) &= \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq s} a_{i_1}\cdots a_{i_k}.\end{aligned}$$

En particulier, pour $s = 1, 2$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{n+p}(x) &\equiv x^p\mathcal{B}_n(x) + \mathcal{B}_{n+1}(x),\\ \mathcal{B}_{n+p+p^2}(x) &\equiv x^p\left(x^p + x^{p^2}\right)\mathcal{B}_n(x) + \left(2x^p + x^{p^2}\right)\mathcal{B}_{n+1}(x) + \mathcal{B}_{n+2}(x).\end{aligned}$$

Preuve. Nous procédons par induction sur s. Pour $s = 1$, en utilisant (1.30), on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{1} e_{1-k}(x^p)\,\mathcal{B}_{n+k}(x) &= \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^n\sum_{k=0}^{1} e_{1-k}(a_1)\,(\mathbf{B}_{\mathbf{x}})^k\\ &= \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^n(\mathbf{B}_{\mathbf{x}} + a_1)\\ &= \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^n(\mathbf{B}_{\mathbf{x}} + x^p)\\ &= \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n+1} + x^p\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^n\\ &= \mathcal{B}_{n+1}(x) + x^p\mathcal{B}_n(x)\\ &\equiv \mathcal{B}_{n+p}(x),\end{aligned}$$

et l'assertion est donc vérifiée pour $s = 1$. Supposons que

$$\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^n\sum_{k=0}^{s-1} e_{s-1-k}(a_1,\ldots,a_{s-1})\,\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^k \equiv \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n+p+\ldots+p^{s-1}}.$$

Pour $f(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}) = \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n+p+\ldots+p^{s-1}}$ dans la proposition 17, on obtient d'une part

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n+p+\ldots+p^{s-1}+p^s} &\equiv \left[\left(x^p + x^{p^2} + \cdots + x^{p^s}\right)\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n+p+\ldots+p^{s-1}} + \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n+p+\ldots+p^{s-1}+1}\right]\\ &= \left(x^p + x^{p^2} + \cdots + x^{p^s}\right)\mathcal{B}_{n+p+\ldots+p^{s-1}}(x) + \mathcal{B}_{1+n+p+\ldots+p^{s-1}}(x),\end{aligned}$$

et d'autre part, on a

$$\begin{aligned}
& \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n}\sum_{k=0}^{s}e_{s-k}\left(a_{1},\ldots,a_{s}\right)\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{k} \\
= \; & \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n}\left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}+a_{1}\right)\cdots\left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}+a_{s-1}\right)\left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}+a_{s}\right) \\
= \; & \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n}\left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}+a_{s}\right)\sum_{k=0}^{s-1}e_{s-1-k}\left(a_{1},\ldots,a_{s-1}\right)\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{k} \\
= \; & \left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}+a_{s}\right)\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n+p+\ldots+p^{s-1}} \\
\equiv \; & \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n+p+\cdots+p^{s-1}}\left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}+a_{s}\right) \\
= \; & \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{1+n+p+\cdots+p^{s-1}}+\left(x^{p}+\cdots+x^{p^{s}}\right)\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{n+p+\cdots+p^{s-1}} \\
= \; & \mathcal{B}_{1+n+p+\cdots+p^{s-1}}\left(x\right)+\left(x^{p}+\cdots+x^{p^{s}}\right)\mathcal{B}_{n+p+\cdots+p^{s-1}}\left(x\right),
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

Pour $x=1$, nous retrouvons la congruence donnée dans par le théorème 39 comme suit.

Corollaire 42 *Pour n,s des entiers naturels et p un nombre premier, on a*

$$\mathcal{B}_{n+p+\cdots+p^{s}}=\mathbf{B}^{n+p+\cdots+p^{s}}\equiv\mathbf{B}^{n}\left(\mathbf{B}+s\right)_{s}.$$

Preuve. Par l'utilisation de l'identité [15]

$$e_{s-k}\left(a_{1},\ldots,a_{s}\right)=\sum_{1\leq i_{1}<\cdots<i_{k}\leq s}i_{1}\cdots i_{k}=\begin{bmatrix}s+1\\k+1\end{bmatrix},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{n+p+\cdots+p^{s}} & \equiv \sum_{k=0}^{s}e_{s-k}\left(a_{1},\ldots,a_{s}\right)\mathcal{B}_{n+k} \\
& = \sum_{k=0}^{s}\begin{bmatrix}s+1\\k+1\end{bmatrix}\mathcal{B}_{n+k} \\
& = \left(-1\right)^{s+1}\mathbf{B}^{n-1}\sum_{k=1}^{s+1}\left(-1\right)^{s+1-k}\begin{bmatrix}s+1\\k\end{bmatrix}\left(-\mathbf{B}\right)^{k} \\
& = \left(-1\right)^{s+1}\mathbf{B}^{n-1}\left(-\mathbf{B}\right)_{s+1} \\
& = \mathbf{B}^{n}\left(\mathbf{B}+1\right)\cdots\left(\mathbf{B}+s\right) \\
& = \mathbf{B}^{n}\left(\mathbf{B}+s\right)_{s}.
\end{aligned}$$

□

Voici quelques cas spéciaux :

1. Dans le cas $x = 1$ et $s = p$, on trouve
$$\mathcal{B}_{n+p+\cdots+p^p} = \mathbf{B}^n (\mathbf{B}+p)_p \equiv \mathbf{B}^n (\mathbf{B})_p = (\mathbf{B}+p)^n \equiv \mathbf{B}^n = \mathcal{B}_n.$$
2. Pour $x = 1$ et $s = p-1$, on trouve
$$\mathcal{B}_{n+p+\cdots+p^{p-1}} = \mathcal{B}_{n-1+1+p+\cdots+p^{p-1}} \equiv \mathbf{B}^{n-1+N_p} \equiv \mathbf{B}^{n-1} = \mathcal{B}_{n-1}.$$
3. Pour $x = 1$, on trouve
$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{n+\frac{p^p-1}{p-1}} &= \mathcal{B}_{n+1+p+\cdots+p^{p-1}} \\
&\equiv \mathbf{B}^{n+1} (\mathbf{B}+p-1)_{p-1} \\
&\equiv \mathbf{B}^{n+1} (\mathbf{B}-1)_{p-1} \\
&= \mathbf{B}^n (\mathbf{B})_p \\
&= (\mathbf{B}+p)^n \\
&\equiv \mathbf{B}^n \\
&\equiv \mathcal{B}_n.
\end{aligned}$$

Corollaire 43 *Pour tout polynôme $f \in \mathbb{Z}[x]$ et pour tout nombre premier p, on a*
$$\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{p+\cdots+p^s} f(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}) \equiv \sum_{j=0}^{s} e_{s-j}(a_1, \ldots, a_s) \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^j f(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}).$$
En particulier, si $x = 1$ et $s = p-1$, on obtient
$$\mathbf{B}^{N_p} f(\mathbf{B}) \equiv f(\mathbf{B}),$$
où, $N_p := \frac{p^p-1}{p-1}$.

Preuve. Soit le polynôme $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \delta_k x^k \in \mathbb{Z}[x]$. Par le théorème 41, on a
$$\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{k+p+\cdots+p^s} \equiv \sum_{j=0}^{s} e_{s-j}(a_1, \ldots, a_s) \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{k+j}.$$
Par suite, on a
$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{p+\cdots+p^s} f(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}) &= \sum_{k=0}^{n} \delta_k \mathcal{B}_{k+p+\cdots+p^s}(x) \\
&\equiv \sum_{k=0}^{n} \delta_k \sum_{j=0}^{s} e_{s-j}(a_1, \ldots, a_s) \mathcal{B}_{k+j}(x) \\
&= \sum_{j=0}^{s} e_{s-j}(a_1, \ldots, a_s) \sum_{k=0}^{n} \delta_k \mathcal{B}_{k+j}(x) \\
&\equiv \sum_{j=0}^{s} e_{s-j}(a_1, \ldots, a_s) \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^j f(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}).
\end{aligned}$$

Pour $x=1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^{p+\cdots+p^s} f(\mathbf{B}) &\equiv \sum_{j=0}^{s} \begin{bmatrix} s+1 \\ j+1 \end{bmatrix} \mathbf{B}^j f(\mathbf{B}), \\
&= (-1)^{s+1} \sum_{j=1}^{s+1} (-1)^{s+1-j} \begin{bmatrix} s+1 \\ j \end{bmatrix} (-\mathbf{B})^{j-1} f(\mathbf{B}) \\
&= (-1)^{s+1} \mathbf{B}^{-1} ((-\mathbf{B}))_{s+1} f(\mathbf{B}) = (\mathbf{B}+s)_s f(\mathbf{B}).
\end{aligned}$$

De plus, si $x=1$ et $s=p-1$, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^{N_p} f(\mathbf{B}) &\equiv (\mathbf{B}+p-1)_{p-1} \mathbf{B} f(\mathbf{B}) \\
&\equiv (\mathbf{B}-1)_{p-1} \mathbf{B} f(\mathbf{B}) \\
&= (\mathbf{B})_p f(\mathbf{B}) \\
&= f(\mathbf{B}+p) \\
&\equiv f(\mathbf{B}).
\end{aligned}$$

□

Chapitre 4

Extensions des identités connues

Récemment, de nombreux auteurs se sont intéressés aux identités symétriques concernant les polynômes de Bernoulli. Citons par exemple, les travaux de Kaneko [29], Gessel [24] et He et Zhang [28]. Dans ce chapitre, nous utilisons le calcul ombral pour déduire, à partir des identités connues, des identités pour des différents polynômes liés à ceux de Bell. Pour cela, on utilise les représentations ombrales suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_n(x) &= \mathbf{B}_{\mathbf{x}}^n, \\
\mathcal{B}_{n,r}(x) &= (\mathbf{B}_{\mathbf{x}} + r)^n, \\
\mathcal{V}_n &= (\mathbf{B} - 1)^n, \\
\mathcal{V}_{n,k} &= \mathbf{B}^k (\mathbf{B} - 1)^{n-k}, \\
\mathcal{D}_{n,r-1}(1-x) &= (-1)^n (\mathbf{B}_{\mathbf{x}} - r)_n, \\
\mathcal{L}_{n,r}(x) &= \langle \mathbf{B}_{\mathbf{x}} + 2r \rangle_n.
\end{aligned}$$

4.1 Polynôme de Bernoulli et l'ombre généralisée de Bell

La proposition suivante donne une identité reliant la dérivée du polynôme de Bernoulli et le polynôme de Bell, qui sera utilisée ultérieurement.

Proposition 44 *Soient n et r deux entiers naturels. Alors*

$$\frac{d}{dx}\mathbb{B}_n(\mathbf{B}_{\mathbf{x}} + r) = n\mathcal{B}_{n-1,r}(x), \tag{4.1}$$

où $\mathbb{B}_n(x)$ est le n-ème polynôme de Bernoulli défini par sa fonction génératrice *exponentielle :*

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{B}_n\left(x\right)\frac{t^n}{n!}=\frac{t}{\exp\left(t\right)-1}\exp\left(xt\right).$$

Preuve. Par définition des polynômes de Bernoulli et par la fonction génératrice

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{B}_{n,r}\left(x\right)\frac{t^n}{n!}=e^{x\left(e^t-1\right)+rt}$$

donnée par (1.8), l'dentité recherchée découle de ce qui suit :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{d}{dx}\mathbb{B}_n\left(\mathbf{B_x}+r\right)\frac{t^n}{n!} &= \frac{t}{\exp\left(t\right)-1}\frac{d}{dx}\exp\left(\left(\mathbf{B_x}+r\right)t\right)\\ &= \frac{t}{\exp\left(t\right)-1}\frac{d}{dx}\sum_{n\geq 0}\left(\mathbf{B_x}+r\right)^n\frac{t^n}{n!}\\ &= \frac{t}{\exp\left(t\right)-1}\frac{d}{dx}\sum_{n\geq 0}\mathcal{B}_{n,r}\left(x\right)\frac{t^n}{n!}\\ &= \frac{t}{\exp\left(t\right)-1}\frac{d}{dx}\left(\exp\left(x\left(\exp\left(t\right)-1\right)+rt\right)\right)\\ &= t\exp\left(x\left(\exp\left(t\right)-1\right)+rt\right)\\ &= \sum_{n\geq 1}n\mathcal{B}_{n-1,r}\left(x\right)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

$\square$

Exemple 7 *Pour tout entier $n\geq 0$, on a*

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{k}\left(-1\right)^k k\mathcal{B}_{k-1}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(-1\right)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{m+k}{k}\left(n-k\right)\mathcal{B}_{n-k-1,1}\left(x\right).$$

En effet, par l'identité ci-dessous [43, Exp. 14]

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{k}\left(-1\right)^k\mathbb{B}_k\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{m+k}{k}\mathbb{B}_{n-k}\left(x+1\right),$$

en dérivant (par rapport à x) l'identité précédente, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{k}\left(-1\right)^k\mathbb{B}'_k\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(-1\right)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{m+k}{k}\mathbb{B}'_{n-k}\left(x+1\right),$$

et il suffit alors de remplacer x par $\mathbf{B_x}$ et d'appliquer la relation (4.1) dans l'identité ci-dessus.

Exemple 8 *De l'identité [43, Cor. 2]*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m+k}{p}r^{n-k}\mathbb{B}_{m-p+k}(x)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{p}(-r)^{m-k}\mathbb{B}_{n-p+k}(x+r)$$

on déduit

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m+k}{p}r^{n-k}\frac{d}{dx}\mathbb{B}_{m-p+k}(\mathbf{B_x})\\ =\;&\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{p}(-r)^{m-k}\frac{d}{dx}\mathbb{B}_{n-p+k}(\mathbf{B_x}+r)\end{aligned}$$

qui est équivalente à

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m+k}{p}(m-p+k)\,r^{n-k}\mathcal{B}_{m-p-1+k}(x)\\ =\;&\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{p}(n-p+k)(-r)^{m-k}\mathcal{B}_{n-p-1+k,r}(x).\end{aligned}$$

4.2 Identités sur les nombres et polynômes de Bell

Dans cette section, nous exploitons la méthode utilisée par Mihoubi et Taharbouchet [43, 44] pour obtenir des identités sur les polynômes de Bell ou r-Bell.

Proposition 45 *Soient r,s deux entiers naturels. Alors, si*

$$\sum_{k=0}^{n}U(n,k)(x+r)^{k}=\sum_{k=0}^{n}V(n,k)(x+s)^{k},$$

on aura

$$\sum_{k=0}^{n}U(n,k)\mathcal{B}_{k,r}(x)=\sum_{k=0}^{n}V(n,k)\mathcal{B}_{k,s}(x),$$

où, $(U(n,k);0\leq k\leq n)$ et $(V(n,k);0\leq k\leq n)$ sont deux suites connues de nombres réels.

Preuve. Remplaçons x par $\mathbf{B_x}$ pour avoir

$$\sum_{k=0}^{n}U(n,k)(\mathbf{B_x}+r)^{k}=\sum_{k=0}^{n}V(n,k)(\mathbf{B_x}+s)^{k},$$

ensuite, utilisons le fait que $\mathcal{B}_{n,r}(x)=(\mathbf{B_x}+r)^{n}$, l'identité souhaitée résulte. □

Exemple 9 *Si nous remplaçons x par $\mathbf{B_x}$ dans les identités de Simons [57] ci-dessous*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}(x+1)^{k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}x^{k},\\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}k(x+1)^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}kx^{k-1},\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\mathcal{B}_{k+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\mathcal{B}_{k}(x),\\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}k\mathcal{B}_{k}(x) &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}k\mathcal{B}_{k-1}(x).\end{aligned}$$

Exemple 10 *Il suffit de remplacer x par $\mathbf{B_x}$ dans l'identité ci-dessous [31]*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{\lambda}{k}r^{k}(x+r)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{\lambda+k}{k}r^{k}x^{n-k},$$

pour montrer que pour tout entier n et tout nombre réel λ, on a

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{\lambda}{k}r^{k}\mathcal{B}_{n-k,r}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{\lambda+k}{k}r^{k}\mathcal{B}_{n-k}(x). \tag{4.2}$$

Dans le cas où λ est un entier $\lambda=q$ et $n=p$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{p,r}(x) &\equiv \mathcal{B}_{p}(x)+\binom{q+p}{p}r-\binom{q}{p}r\\ &\equiv \mathcal{B}_{p}(x)+r\\ &\equiv x^{p}+x+r\ .\end{aligned}$$

Exemple 11 *Si nous remplaçons x par $\mathbf{B_x}+s$ dans l'identité d'Abel ci-dessous*

$$(x+r)^{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((x+mk)^{k}-mk(x+mk)^{k-1}\right)(r-mk)^{n-k},$$

on obtient

$$\mathcal{B}_{n,r+s}(x)=r^{n}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\mathcal{B}_{k,mk+s}(x)+mk\mathcal{B}_{k-1,mk+s}(x)\right)(r-mk)^{n-k}.$$

Exemple 12 *Pour m, s des entiers naturels, on a*

$$\sum_{k \leq m} \binom{-r}{k} (-s)^k \mathcal{B}_{m-k,s}(x) = \sum_{k \leq m} \binom{m+r}{k} s^k \mathcal{B}_{m-k}(x).$$

Il suffit de remplacer x par s et y par $\mathbf{B_x}$ dans l'identité suivante [26, pp. 166, Id. 5.19]

$$\sum_{k \leq m} \binom{m+r}{k} x^k y^{m-k} = \sum_{k \leq m} \binom{-r}{k} (-x)^k (x+y)^{m-k}. \tag{4.3}$$

Exemple 13 *Pour $n, v \geq 1$ des entiers et p un nombre premier p, on a*

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (k+1)^{k-1} \mathcal{B}_{n-k,k}, && (4.4)\\
\mathcal{V}_p &\equiv 1,\\
\mathcal{V}_{p^v} &\equiv v,\\
\mathcal{V}_{p-1} &\equiv \sum_{k=0}^{p-1} (k+1)^{k-1} \mathcal{B}_{p-1-k,k}.
\end{aligned}$$

En effet, l'identité suivante est un cas spécial de l'identité d'Abel [25, pp. 15, Id. 1.117]

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^{n-k} (k+1)^{k-1} = (x-1)^n,$$

Pour (4.4) il suffit de remplacer x par $\mathbf{B}$ dans l'identité ci-dessus et utiliser le fait que $(\mathbf{B}+r)^k = \mathcal{B}_{k,r}$. Pour $n = p$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_p &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (k+1)^{k-1} \mathcal{B}_{p-k,k}\\
&\equiv \mathcal{B}_p + (-1)^p (p+1)^{p-1} \mathcal{B}_{0,p}\\
&\equiv \mathcal{B}_p + (-1)^p\\
&\equiv 1.
\end{aligned}$$

De plus, pour tout entier $v \geq 1$ et tout nombre premier p, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{p^v} &= \sum_{k=0}^{p^v} (-1)^k \binom{p^v}{k} (k+1)^{k-1} \mathcal{B}_{p^v-k,k}\\
&\equiv \mathcal{B}_{p^v} + (-1)^{p^v} \mathcal{B}_{0,p^v}\\
&\equiv v.
\end{aligned}$$

Pour $n = p - 1$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{p-1} &= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \binom{p-1}{k} (k+1)^{k-1} \mathcal{B}_{p-1-k,k} \\ &\equiv \sum_{k=0}^{p-1} (k+1)^{k-1} \mathcal{B}_{p-1-k,k}.\end{aligned}$$

Exemple 14 *Si nous remplaçons x par $\mathbf{B}$ dans l'identité [25, pp. 30, Id. 65]*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2n-k}{n} (x-1)^k, \ n \in \mathbb{N},$$

nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \mathcal{B}_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2n-k}{n} \mathcal{V}_k.$$

Exemple 15 *Si nous remplaçons z par $\mathbf{B}$ dans l'identité [25, pp. 24, Id. 3.17]*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{x}{k} z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{x+n-k}{n} (z-1)^k,$$

nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{x}{k} \mathcal{B}_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{x+n-k}{n} \mathcal{V}_k.$$

Exemple 16 *Pour tout entier n, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \left\{ (-1)^{n+1} \mathcal{V}_{n+k+1,k} + (-1)^k \mathcal{V}_{n+k+1,n+1} \right\} = 1.$$

En effet, par l'identité suivante [25, pp.10, Id. 1.78]

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \left\{ (1-x)^{n+1} x^k + x^{n+1} (1-x)^k \right\} = 1,$$

qui s'ecrit :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \left\{ (-1)^{n+1} (x-1)^{n+1} x^k + (-1)^k x^{n+1} (x-1)^k \right\} = 1,$$

en remplaçant x par $\mathbf{B}$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \left\{ (-1)^{n+1} (\mathbf{B}-1)^{n+1} \mathbf{B}^k + (-1)^k \mathbf{B}^{n+1} (\mathbf{B}-1)^k \right\} = 1.$$

L'identité souhaitée résulte en utilisant la représentation ombrale $\mathbf{B}^k (\mathbf{B}-1)^{n-k} = \mathcal{V}_{n,k}$.

4.3 Identités sur les polynômes r-Dérangement

Dans cette section, nous exploitons la méthode utilisée par Mihoubi et Tahar-bouchet [43, 44] pour obtenir des identités sur les polynômes de dérangement et r-dérangement.

Proposition 46 *Soient r, s deux entiers naturels. Alors, si*

$$\sum_{k=0}^{n} U(n,k)(x-r)_k = \sum_{k=0}^{n} V(n,k)(x-s)_k,$$

on aura

$$\sum_{k=0}^{n} U(n,k)(-1)^k \mathcal{D}_{k,r-1}(1-x) = \sum_{k=0}^{n} V(n,k)(-1)^k \mathcal{D}_{k,s-1}(1-x),$$

où, $(U(n,k); 0 \leq k \leq n)$ et $(V(n,k); 0 \leq k \leq n)$ sont deux suites connues de nombres réels.

Preuve. Remplaçons x par $\mathbf{B_x}$ pour avoir

$$\sum_{k=0}^{n} U(n,k)(\mathbf{B_x}-r)_k = \sum_{k=0}^{n} V(n,k)(\mathbf{B_x}-s)_k,$$

ensuite, en utilisant le fait que $\mathcal{D}_{n,r-1}(1-x) = (-1)^n(\mathbf{B_x}-r)_n$, on obtient l'identité souhaitée. □

Exemple 17 *De l'dentité*

$$(x)_n - (x-1)_n = n(x-1)_{n-1},$$

ou encore

$$(-1)^n(x-r)_n - (-1)^n(x-r-1)_n = -n(-1)^{n-1}(x-r-1)_{n-1},$$

on obtient l'identité

$$(-1)^n(\mathbf{B_x}-r)_n - (-1)^n(\mathbf{B_x}-r-1)_n = -n(-1)^{n-1}(\mathbf{B_x}-r-1)_{n-1},$$

qui est équivalente à

$$\mathcal{D}_{n,r-1}(1-x) = \mathcal{D}_{n,r}(1-x) - n\mathcal{D}_{n-1,r}(1-x).$$

Exemple 18 *De l'identité [13]*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r (x-r)_k ,$$

on obtient l'identité

$$\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r (\mathbf{B}_{\mathbf{x}} - r)_k ,$$

qui est équivalente à

$$\mathcal{B}_n (x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r \mathcal{D}_{k,r-1} (1-x) .$$

4.4 Identités sur les polynômes r-Lah

Dans cette section, nous exploitons la méthode utilisée par Mihoubi et Taharbouchet [43, 44] pour obtenir des identités sur les polynômes de Lah et r-Lah.

Proposition 47 *Soient r, s deux entiers naturels. Alors, si*

$$\sum_{k=0}^{n} U (n,k) \langle x+2r \rangle_k = \sum_{k=0}^{n} V (n,k) \langle x+2s \rangle_k ,$$

on aura

$$\sum_{k=0}^{n} U (n,k) \mathcal{L}_{k,r} (x) = \sum_{k=0}^{n} V (n,k) \mathcal{L}_{k,s} (x) ,$$

où, $(U (n,k) ; 0 \leq k \leq n)$ et $(V (n,k) ; 0 \leq k \leq n)$ sont deux suites connues de nombres réels.

Preuve. Remplaçons x par $\mathbf{B}_{\mathbf{x}}$ pour avoir

$$\sum_{k=0}^{n} U (n,k) \langle \mathbf{B}_{\mathbf{x}} + 2r \rangle_k = \sum_{k=0}^{n} V (n,k) \langle \mathbf{B}_{\mathbf{x}} + 2s \rangle_k ,$$

ensuite, en utilisant le fait que $\mathcal{L}_{n,r} (x) = \langle \mathbf{B}_{\mathbf{x}} + 2r \rangle_n$, on obtient l'identité souhaitée.
□

Exemple 19 *De l'identité*

$$\langle x+2r+2 \rangle_n - \langle x+2r+1 \rangle_n = n \langle x+2r+2 \rangle_{n-1} , \ n \geq 1$$

on obtient l'identité

$$\langle \mathbf{B}_{\mathbf{x}} + 2r+2 \rangle_n - \langle \mathbf{B}_{\mathbf{x}} + 2r+1 \rangle_n = n \langle \mathbf{B}_{\mathbf{x}} + 2r+2 \rangle_{n-1} ,$$

qui est équivalente à

$$\sum_{k=0}^{n} (n)_k \mathcal{L}_{n-k,r}(x) = \mathcal{L}_{n,r+1}(x) - n\mathcal{L}_{n-1,r+1}(x).$$

Exemple 20 *De l'identité [46, Th. 3.2]*

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} L_r(n,k) \langle x+2r \rangle_k$$

on obtient l'identité

$$(\mathbf{B_x})_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} L_r(n,k) \langle \mathbf{B_x}+2r \rangle_k ,$$

qui est équivalente à

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} L_r(n,k) \mathcal{L}_{k,r}(x).$$

Chapitre 5

Note sur les polynômes à racines réelles

Récemment les polynômes ayant uniquement des racines réelles ont reçu beaucoup d'attention par de nombreux chercheurs pour plusieurs raisons. L'une des raisons est que tout polynôme à coefficients positifs ou nuls possedant que des racines réelles entraîne la concavité logarithmique et\ou l'unimodalité de ses coefficients, dûs aux inégalités de Newton et Darroch, données par les deux théorèmes suivants. Ces propriétés apparaissent dans différents domaines de mathématiques, voir [11, 50].

Théorème 48 (L'inégalité de Newton [27]) *Soit P un polynôme à coefficients réels défini par $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Si P n'admet que des racines réelles, alors les coefficients du polynôme P satisfont l'inégalité :*

$$a_i^2 \geq \left(1 + \frac{1}{i}\right)\left(1 + \frac{1}{n-i}\right) a_{i+1} a_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Théorème 49 (L'inégalité de Darroch [16]) *Soit P un polynôme à coefficients réels défini par $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Si toutes les racines du polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_i x^i$ sont réelles et negatives et $P(1) > 0$, alors la valeur k^* de k pour laquelle a_{k^*} est maximum est telle que*

$$|a_{k^*} - P'(1)/P(1)| < 1.$$

Dans ce chapitre, nous donnons certains résultats sur les polynômes à racines réelles. On distingue, en particulier, les polynômes chromatiques associés aux graphes, des polynômes exponentiels, des polynômes de Sheffer et polynômes liés aux polynômes partiels de Bell. Les outils mathématiques utilisés pour établir un tel résultat sont le théorème de Rolle et les propriétés de l'ombre généralisée de Bell.

5.1 Polynômes à racines réelles et l'ombre généralisée de Bell

Dans cette section, nous donnons un résultat sur les polynômes à racines réelles et nous l'enrichons par quelques applications. Notons par $\mathbf{RZ}$ l'ensemble des polynômes $f \in \mathbb{R}[x]$ n'ayant que des racines réelles. Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

Théorème 50 *Soient r un entier naturel et f un polynôme. Si $f(\mathbf{B_x}) \in \mathbf{RZ}$, alors*

$$x^r f(\mathbf{B_x} + r) = (\mathbf{B_x})_r f(\mathbf{B_x}) \in \mathbf{RZ}.$$

De plus, pour tous les entiers naturels $r_1, ..., r_p$, on a

$$(\mathbf{B_x})_{r_p} ... (\mathbf{B_x})_{r_1} f(\mathbf{B_x}) \in \mathbf{RZ}.$$

Preuve. On fait un raisonnement par récurrence sur r. Pour $r = 0$, on a $f(\mathbf{B_x}) \in \mathbf{RZ}$ par hypothèse. On suppose que l'assertion est vraie pour $r - 1 \geq 0$ et on montre qu'elle reste vraie pour r. en utilisant l'identité

$$e^x f(\mathbf{B_x} + r - 1) = \sum_{k \geq 0} f(k + r - 1) \frac{x^k}{k!}$$

donnée par (2.5) pour avoir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(e^x f(\mathbf{B_x} + r - 1)\right) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k \geq 0} f(k + r - 1) \frac{x^k}{k!}\right) \\ &= \sum_{k \geq 0} f(k + r) \frac{x^k}{k!} \\ &= e^x f(\mathbf{B_x} + r). \end{aligned}$$

Donc, si la fonction $e^x f(\mathbf{B_x} + r - 1)$ admet n racines réelles (f est un polynôme de degré n), il résulte par application du théorème de Rolle à la fonction $e^x f(\mathbf{B_x} + r - 1)$ que la fonction $e^x f(\mathbf{B_x} + r)$ s'annulle $n - 1$ fois, c-à-d, la fonction $f(\mathbf{B_x} + r)$ admet $n - 1$ racines réelles, et par le fait que $\deg f = n$, la racine manquante ne peut être que réelle. Plus généralement, comme les racines du polynôme $g(x) = (\mathbf{B_x})_{r_1} f(\mathbf{B_x})$ sont réelles, le polynôme $(\mathbf{B_x})_{r_2} g(\mathbf{B_x}) = (\mathbf{B_x})_{r_2} (\mathbf{B_x})_{r_1} f(\mathbf{B_x})$, n'admet également que des racines réelles, et ainsi de suite. □

Exemple 21 *Pour $f(x) = x^n$, on a $f(\mathbf{B_x}) = \mathcal{B}_n(x)$ qui n'a que des racines réelles [35], ce qui montre que*

$$(\mathbf{B_x})_r f(\mathbf{B_x}) = (\mathbf{B_x})_r \mathbf{B_x^n} = x^r (\mathbf{B_x} + r)^n = x^r \mathcal{B}_{n,r}(x) \in \mathbf{RZ}.$$

De plus, nous déduisons que, pour $r_p \geq ... \geq r_1 \geq 0$, *on a*

$$(\mathbf{B_x})_{r_p} ... (\mathbf{B_x})_{r_1} \mathbf{B_x^n} = x^{r_p} \mathcal{B}_n (x; \mathbf{r}_p) \in \mathbf{RZ}.$$

Exemple 22 *Pour* $f(x) = (x)_n$, *on a* $f(\mathbf{B_x}) = x^n$ *qui n'admet que des racines réelles. Ceci montre que*

$$(\mathbf{B_x})_r f(\mathbf{B_x}) = x^r (\mathbf{B_x} + r)_n = x^r \sum_{k=0}^{\min(n,\, r)} \binom{n}{k} \frac{r!}{(r-k)!} x^{n-k} \in \mathbf{RZ}.$$

De manière similaire, nous en déduisons que

$$(\mathbf{B_x})_{r_p} ... (\mathbf{B_x})_{r_1} (\mathbf{B_x})_n = x^{r_p} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \mathcal{B}_k (x; \mathbf{r}_p) \in \mathbf{RZ}.$$

Exemple 23 *Pour* $f(x) = (x+n-1)_n$ *on a* $f(\mathbf{B_x}) = (\mathbf{B_x} + n - 1)_n = \mathcal{L}_n(x)$ *(le* n*-ème polynôme de Lah) qui est dans* $\mathbf{RZ}$, *alors*

$$(\mathbf{B_x})_r f(\mathbf{B_x}) = x^r (\mathbf{B_x} + r + n - 1)_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n+r-1}{k+r-1} x^{r+k} \in \mathbf{RZ}.$$

De plus, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B_x})_{r_p} ... (\mathbf{B_x})_{r_1} (\mathbf{B_x} + n - 1)_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-1)_{n-k} (\mathbf{B_x})_{r_p} ... (\mathbf{B_x})_{r_1} (\mathbf{B_x})_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} L(n,k)\, x^{\max\{k, r_1, ..., r_p\}} \mathcal{B}_{0; k, r_1, ..., r_p}(x) \in \mathbf{RZ}.
\end{aligned}$$

Pour plus d'applications du théorème 50, nous présentons une application sur le σ-polynôme associé à un graphe $G = (V, E)$. Nous rappelons qu'une coloration λ de G, où $\lambda \in \mathbb{N}$, est une application $f : V \to \{1, 2, ..., \lambda\}$ telle que $f(u) \neq f(v)$ chaque fois que les sommets u et v sont adjacents dans G. Deux colorations de G, f et g, sont distinctes si $f(x) \neq g(x)$ pour certains sommets x dans G. Le nombre des colorations λ de G est appelé polynôme chromatique, noté $P(G, \lambda)$, et peut être mis sous la forme :

$$P(G, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k(G) (\lambda)_k,$$

où, $a_k(G)$ est le nombre de partitions de V en k sous-ensembles (disjoints et non vides). Le σ-polynôme associé à G est défini par :

$$\sigma(G, x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(G) x^k$$

et on remarque qu'on a :

$$P(G,\mathbf{B_x}) = \sum_{k=0}^{n} a_k(G)(\mathbf{B_x})_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(G)\, x^k = \sigma(G,x)\,.$$

Pour plus de détails sur les polynômes chromatiques, voir [22].

Corollaire 51 *Soient G un graphe et $f(\mathbf{B_x})$ un σ-polynôme associé à G. Si $f(\mathbf{B_x}) \in$* **RZ**, *alors le σ-polynôme*

$$(\mathbf{B_x})_r\, f(\mathbf{B_x}) = x^r f(\mathbf{B_x}+r)$$

associé au graphe $G \cup K_r$ n'a que des racines réelles. Plus généralement, le σ -polynôme

$$(\mathbf{B_x})_{r_1} \ldots (\mathbf{B_x})_{r_p}\, f(\mathbf{B_x})$$

associé au graphe $G \cup K_{r_1} \cup \ldots \cup K_{r_p}$ n'a que des racines réelles, où K_r est un graphe complet à r sommets.

Exemple 24 *Le polynôme chromatique d'un arbre T_n, $n \geq 1$ à n sommets est*

$$f(x) = x\,(x-1)^{n-1}\,.$$

Par l'identité $(\mathbf{B_x})_n\, f(\mathbf{B_x}) = x^n f(\mathbf{B_x}+n)$, le σ-polynôme associé à T_n est

$$f(\mathbf{B_x}) = \mathbf{B_x}(\mathbf{B_x}-1)^{n-1} = x\mathbf{B_x}^{n-1} = x\mathcal{B}_{n-1}(x) \in \mathbf{RZ}.$$

Alors, le σ-polynôme du graphe $T_n \cup K_r$ défini par

$$\begin{aligned} x^r f(\mathbf{B_x}+r) &= x^r(\mathbf{B_x}+r)(\mathbf{B_x}+r-1)^{n-1} \\ &= x^r\left[\mathbf{B_x}(\mathbf{B_x}+r-1)^{n-1} + r(\mathbf{B_x}+r-1)^{n-1}\right] \\ &= x^r\left[x(\mathbf{B_x}+r)^{n-1} + r(\mathbf{B_x}+r-1)^{n-1}\right] \\ &= x^r\left[x\mathcal{B}_{n-1,r}(x) + r\mathcal{B}_{n-1,r-1}(x)\right] \end{aligned}$$

appartient à **RZ**.

Du lemme 16, on déduit que :

Corollaire 52 *Pour tout polynôme f, on a*

$$f(\mathbf{B_x}+r) = e^{-x}\frac{d^r}{dx^r}\left(e^x f(\mathbf{B_x})\right).$$

Corollaire 53 *Pour n, r, $s \geq 0$ des entiers, on a*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n(x) &= (-1)^n e^{-x} \frac{d^r}{dx^r}\left(e^x \mathcal{D}_n(1-x)\right), & (5.1)\\
\mathcal{L}_{n,r}(x) &= (-1)^n e^{-x} \frac{d^{2r}}{dx^{2r}}\left(e^x \mathcal{L}_n(x)\right) & (5.2)\\
&= (-1)^n e^{-x} \frac{d^{n+2r}}{dx^{n+2r}}\left(e^x \mathcal{D}_n(1-x)\right), &\\
\mathcal{D}_{n,s}(1-x) &= e^{-x} \frac{d^r}{dx^r}\left(e^x \mathcal{D}_{n,r+s}(1-x)\right), & (5.3)
\end{aligned}$$

tels que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{n,r}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}\binom{n+2r-1}{k+2r-1} x^k,\\
\mathcal{D}_{n,r}(x) &= \frac{1}{r!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(j+r)!\,(x-1)^{n-j}.
\end{aligned}$$

Preuve. Pour (5.1), nous choisissons $f(x) = (x-1)_n$ dans le corollaire 52 et par les relations (2.12), (2.9), on a

$$f(\mathbf{B_x}) = (\mathbf{B_x} - 1)_n = (-1)^n \mathcal{D}_n(1-x),$$

par suite,

$$\begin{aligned}
e^{-x}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^x f(\mathbf{B_x})\right) &= (-1)^n e^{-x}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^x \mathcal{D}_n(1-x)\right)\\
&= f(\mathbf{B_x} + n)\\
&= (\mathbf{B_x} + n - 1)_n\\
&= \mathcal{L}_n(x).
\end{aligned}$$

Pour (5.2), nous choisissons $f(x) = (x+n-1)_n$ dans le corollaire 52 et par les relations (2.12), (2.9), on a

$$f(\mathbf{B_x}) = (\mathbf{B_x} + n - 1)_n = \mathcal{L}_n(x),$$

par la suite, on a d'une part

$$\begin{aligned}
e^{-x}\frac{d^{2r}}{dx^{2r}}\left(e^x f(\mathbf{B_x})\right) &= e^{-x}\frac{d^{2r}}{dx^{2r}}\left(e^x \mathcal{L}_n(x)\right)\\
&= f(\mathbf{B_x} + 2r)\\
&= (\mathbf{B_x} + n + 2r - 1)_n\\
&= \langle \mathbf{B_x} + 2r \rangle\\
&= \mathcal{L}_{n,r}(x),
\end{aligned}$$

et d'autre part, si nous choisissons $f(x) = (x-1)_n$, nous obtenons

$$\begin{aligned} e^{-x}\frac{d^{n+2r}}{dx^{n+2r}}\left(e^x f(\mathbf{B_x})\right) &= e^{-x}\frac{d^{n+2r}}{dx^{n+2r}}\left(e^x(\mathbf{B_x}-1)_n\right) \\ &= (-1)^n e^{-x}\frac{d^{n+2r}}{dx^{n+2r}}\left(e^x\mathcal{D}_n(1-x)\right) \\ &= f(\mathbf{B_x}+n+2r) \\ &= (\mathbf{B_x}+n+2r-1)_n \\ &= \langle\mathbf{B_x}+2r\rangle_n \\ &= \mathcal{L}_{n,r}(x). \end{aligned}$$

Pour (5.3), si nous choisissons $f(x) = (x-r-s)_n$, nous trouvons

$$f(\mathbf{B_x}) = (\mathbf{B_x}-r-s)_n = (-1)^n\mathcal{D}_{n,r+s}(1-x),$$

qui entraîne

$$\begin{aligned} e^{-x}\frac{d^{r}}{dx^{r}}\left(e^x f(\mathbf{B_x})\right) &= e^{-x}\frac{d^{r}}{dx^{r}}\left(e^x(-1)^n\mathcal{D}_{n,r+s}(1-x)\right) \\ &= (-1)^n e^{-x}\frac{d^{r}}{dx^{r}}\left(e^x\mathcal{D}_{n,r+s}(1-x)\right) \\ &= f(\mathbf{B_x}+r) \\ &= (\mathbf{B_x}-s)_n \\ &= (-1)^n\mathcal{D}_{n,s}(1-x), \end{aligned}$$

d'où

$$e^{-x}\frac{d^{r}}{dx^{r}}\left(e^x\mathcal{D}_{n,r+s}(1-x)\right) = \mathcal{D}_{n,s}(1-x).$$

□

5.2 Polynômes de partition à racines réelles

Considérons maintenant le (n,k)-ème polynôme partiel de Bell $B_{n,k}(\mathbf{a}) := B_{n,k}(a_1, a_2, \ldots)$ introduit par Bell [4] (voir aussi [15, 38, 39]) qui est défini par sa fonction génératrice exponentielle donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty}\mathcal{B}_{n,k}(\mathbf{a})\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_j\frac{t^j}{j!}\right)^k, \quad k = 0,\ 1,\ 2, ...,$$

et le (n,k)-ème polynôme partiel r-Bell

$$B_{n+r,k+r}^{(r)}(\mathbf{a};\mathbf{b}) = B_{n+r,k+r}^{(r)}(a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots),$$

introduit par Mihoubi et Rahmani [41] est défini par sa fonction génératrice exponentielle donnée par :

$$\sum_{n\geq k} B_{n+r,k+r}^{(r)}\left(\mathbf{a};\mathbf{b}\right)\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{k!}\left(\sum_{j\geq 1} a_j\frac{t^j}{j!}\right)^k\left(\sum_{j\geq 0} b_{j+1}\frac{t^j}{j!}\right)^r.$$

Soient $\mathbf{a}=(a_1,a_2,...)$ une suite de nombres réels définie par

$$\varphi\left(t\right)=\sum_{n\geq 1} a_n\frac{t^n}{n!},$$

et $\mathbf{b}=(b_1,b_2,...)$ la suite définie par

$$b_0=1 \text{ et } b_n=a_{n-1},\quad n\geq 2.$$

La suite $\mathbf{b}$ peut alors être mise sous la forme

$$\mathbf{b}=\mathbf{e}+L\mathbf{a},$$

où $\mathbf{e}=(1,0,0,\ldots)$ et les suites $(L^n\mathbf{a})$ sont définies par

$$L^0\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots),\ L\mathbf{a}=(0,a_1,a_2,\ldots),\ L^2\mathbf{a}=(0,0,a_1,a_2,\ldots),\ldots.$$

Proposition 54 *Soient $\mathcal{V}_{n,r}\left(x\right)$ et $\mathcal{V}_n\left(x\right)$ deux polynômes définis par*

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{n,r}\left(x\right) &= \sum_{k=0}^{n} B_{n+r,k+r}^{(r)}\left(\mathbf{a};\mathbf{e}+L\mathbf{a}\right)x^k,\\ \mathcal{V}_n\left(x\right) &= \mathcal{V}_{n,0}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}\left(\mathbf{a}\right)x^k.\end{aligned}$$

Si le polynôme $\mathcal{V}_n\left(x\right)\in\mathbf{RZ}$, alors le polynôme $\mathcal{V}_{n,r}\left(x\right)\in\mathbf{RZ}$.

Preuve. Par le théorème 4 donné dans [41], on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} B_{n+r,k+r}^{(r)}\left(\mathbf{a};\mathbf{e}+L\mathbf{a}\right)\frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!}\left(\varphi\left(t\right)\right)^k\left(1+\varphi\left(t\right)\right)^r,\\ \sum_{n\geq 0}\mathcal{V}_{n,r}\left(x\right)\frac{t^n}{n!} &= \left(1+\varphi\left(t\right)\right)^r\exp\left(x\varphi\left(t\right)\right).\end{aligned}$$

Pour le polynôme $f_n\left(x\right):=\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}\left(\mathbf{a}\right)\left(x\right)_k$, on obtient

$$f_n\left(\mathbf{B_x}\right)=\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}\left(\mathbf{a}\right)\left(\mathbf{B_x}\right)_k=\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}\left(\mathbf{a}\right)x^k=\mathcal{V}_n\left(x\right),$$

et

$$f_n\left(\mathbf{B_x}+r\right)=\mathcal{V}_{n,r}\left(x\right).$$

En effet, du fait que $(1+t)^{\alpha}=\sum\limits_{k\geq 0}\binom{\alpha}{k}t^k$, on a d'une part,

$$\begin{aligned}
\left(1+\varphi\left(t\right)\right)^{\mathbf{B_x}+r} &= \sum_{k\geq 0}\binom{\mathbf{B_x}+r}{k}\left(\varphi\left(t\right)\right)^k \\
&= \sum_{k\geq 0}\left(\mathbf{B_x}+r\right)_k\sum_{n\geq k}B_{n,k}\left(\mathbf{a}\right)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0}f_n\left(\mathbf{B_x}+r\right)\frac{t^n}{n!},
\end{aligned}$$

et d'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\left(1+\varphi\left(t\right)\right)^{\mathbf{B_x}+r} &= \left(1+\varphi\left(t\right)\right)^r\left(1+\varphi\left(t\right)\right)^{\mathbf{B_x}} \\
&= \left(1+\varphi\left(t\right)\right)^r\sum_{k\geq 0}\binom{\mathbf{B_x}}{k}\left(\varphi\left(t\right)\right)^k \\
&= \left(1+\varphi\left(t\right)\right)^r\sum_{k\geq 0}\binom{\mathbf{B_x}}{k}\left(\varphi\left(t\right)\right)^k \\
&= \left(1+\varphi\left(t\right)\right)^r\sum_{k\geq 0}\left(\mathbf{B_x}\right)_k\sum_{n\geq k}B_{n,k}\left(\mathbf{a}\right)\frac{t^n}{n!} \\
&= \left(1+\varphi\left(t\right)\right)^r\sum_{n\geq 0}f_n\left(\mathbf{B_x}\right)\frac{t^n}{n!} \\
&= \left(1+\varphi\left(t\right)\right)^r\sum_{n\geq 0}\mathcal{V}_n\left(x\right)\frac{t^n}{n!} \\
&= \left(1+\varphi\left(t\right)\right)^r\exp\left(x\varphi\left(t\right)\right) \\
&= \sum_{n\geq 0}\mathcal{V}_{n,r}\left(x\right)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Par suite, l'application du théorème 50 complète la preuve. □

Un cas particulier de la proposition 54 est donné par le corollaire suivant :

Corollaire 55 *Pour* $\mathbf{a}=(1,1,1,\ldots)$, *les polynômes*

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{n,r}\left(x\right) &= \sum_{k=0}^{n}B_{n+r,k+r}^{(r)}\left(L\mathbf{a};\mathbf{e}+L^2\mathbf{a}\right)x^k, \\
\mathcal{U}_{n,r}\left(x\right) &= \sum_{k=0}^{n}B_{n+r,k+r}^{(r)}\left(L^2\mathbf{a};\mathbf{e}+L^3\mathbf{a}\right)x^k,
\end{aligned}$$

ont que des racines réelles.

Preuve. Soit $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{m\uparrow}$ le (n,k)-ème nombre r-Stirling m-associé de deuxième espèce [41] défini par

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{m\uparrow} = B_{n,\,k}^{(r)} \left(\overbrace{0,\ldots,0}^{m-1}, 1, 1, \ldots \right).$$

Pour $m = 2$ où $m = 3$, $\mathbf{a} = (1,1,1,\ldots)$ et $r = 0$ dans la proposition 54, nous trouvons

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(L\mathbf{a})\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{2\uparrow} x^k, \\ \mathcal{U}_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}\left(L^2\mathbf{a}\right) x^k = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{3\uparrow} x^k, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{2\uparrow} \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!}\left(e^t - 1 - t\right)^k, \\ \sum_{n\geq k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{3\uparrow} \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!}\left(e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2}\right)^k. \end{aligned}$$

Les polynômes $\mathcal{V}_n(x), \mathcal{U}_n(x)$ ont que des racines réelles, voir [10, 62], et l'application de la proposition 54 complète la preuve. $\square$

5.3 Polynômes exponentiels à racines réelles

Dans cette section, nous donnons des applications sur des polynômes exponentiels.

Théorème 56 *Soient $(A_n(x))$ une suite binomiale définie par*

$$1 + \sum_{n\geq 1} A_n(x) \frac{t^n}{n!} = \exp(xh(t)), \quad h(t) = \sum_{j\geq 1} a_j \frac{t^j}{j!},$$

et $\left(A_n^{(s)}(x)\right)$ la suite binomiale définie par

$$\begin{aligned} A_n^{(0)}(x) &= A_n(x), \\ A_n^{(s)}(x) &= A_n^{(s-1)}(\mathbf{B_x}),\ s \geq 1. \end{aligned}$$

Alors, on a

$$1 + \sum_{n\geq 1} A_n^{(s)}(x) \frac{t^n}{n!} = \exp\left(x \sum_{j\geq 1} A_j^{(s-1)}(1) \frac{t^j}{j!} \right),\ s \geq 1.$$

De plus, si la suite $\left(\frac{A_n^{(s-1)}(1)}{(n-1)!}\right)$ *est log-concave, alors pour* $x>0$*, la suite* $A_n^{(s)}(x)$ *est log-convexe et la suite* $\left(\frac{A_n^{(s)}(x)}{n!}\right)$ *est log-concave.*

Preuve. Tout d'abord, prouvons l'identité

$$1+\sum_{n\geq 1}A_n^{(s)}(x)\frac{t^n}{n!}=\exp\left(x\sum_{j\geq 1}A_j^{(s-1)}(1)\frac{t^j}{j!}\right),\ s\geq 1.$$

Pour cela, nous procédons par récurrence sur s. Pour $s=1$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}A_n^{(1)}(x)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n\geq 0}A_n^{(0)}(\mathbf{B_x})\frac{t^n}{n!}\\ &= \exp(\mathbf{B_x}h(t))\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{\mathcal{B}_n(x)}{n!}(h(t))^n\\ &= \exp(x(\exp h(t)-1))\\ &= \exp\left(x\sum_{n\geq 1}A_n^{(0)}(1)\frac{t^n}{n!}\right),\end{aligned}$$

donc, l'assertion est vérifiée pour $s=1$. Supposons que l'assertion est vérifiée pour tout entier $s\geq 1$. On a

$$\begin{aligned}1+\sum_{n\geq 1}A_n^{(s+1)}(x)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n\geq 0}A_n^{(s)}(\mathbf{B_x})\frac{t^n}{n!}\\ &= \exp\left(\mathbf{B_x}\sum_{j\geq 1}A_j^{(s-1)}(1)\frac{t^j}{j!}\right)\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{\mathbf{B_x^n}}{n!}\left(\sum_{j\geq 1}A_j^{(s-1)}(1)\frac{t^j}{j!}\right)^n\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{\mathcal{B}_n(x)}{n!}\left(\sum_{j\geq 1}A_j^{(s-1)}(1)\frac{t^j}{j!}\right)^n\\ &= \exp\left(x\left(\exp\left(\sum_{j\geq 1}A_j^{(s-1)}(1)\frac{t^j}{j!}\right)-1\right)\right)\\ &= \exp\left(x\sum_{n\geq 1}A_n^{(s)}(1)\frac{t^n}{n!}\right),\end{aligned}$$

et l'assertion est ainsi démontrée pour $s+1$, ce qui complète la preuve. Pour le reste, il suffit de procéder par induction sur s et d'appliquer le théorème de Bender-Canfield [5] pour montrer que les suites $A_n^{(s)}(x)$ et $\left(\frac{A_n^{(s)}(x)}{n!}\right)$ sont respectivement log-convexe et log-concave. $\square$

Ci-dessous, nous donnons quelques exemples d'applications du théorème précédent.

Exemple 25 *Pour $a_n = 1$, nous obtenons le Théorème 1 dans [2, Th.1]*

Exemple 26 *Du fait que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle x \rangle_n \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{(1-t)^x} = e^{-x\ln(1-t)},$$

alors pour $A_n^{(0)}(x) = \langle x \rangle_n, h(t) = -\ln(1-t)$ et $a_n = (n-1)!$, on trouve

$$\begin{aligned} A_n^{(0)}(x) &= A_n(x) = \langle x \rangle_n, \\ A_n^{(1)}(x) &= A_n^{(0)}(\mathbf{B_x}) = \langle \mathbf{B_x} \rangle_n = \mathcal{L}_n(x), \\ A_n^{(2)}(x) &= A_n^{(1)}(\mathbf{B_x}) = \mathcal{L}_n(\mathbf{B_x}) = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)\,\mathcal{B}_k(x), \ \text{etc.} \end{aligned}$$

Le théorème 56 nous permet de conclure que pour $s = 1$ et $s = 2$ les suites

$$(\mathcal{L}_n(x)), \quad \left(\sum_{k=0}^{n} L(n,k)\,\mathcal{B}_k(x)\right)$$

sont log-convexes et que les suites

$$\left(\frac{\mathcal{L}_n(x)}{n!}\right), \quad \left(\frac{\sum_{k=0}^{n} L(n,k)\,\mathcal{B}_k(x)}{n!}\right),$$

sont log-concaves.

Corollaire 57 *Soient $\mathbf{a}_s = \left(A_1^{(s)}(1), A_2^{(s)}(1), \ldots\right)$, $s \geq 0$ et les polynômes $\mathcal{V}_{n,r}^{(s)}(x)$, $\mathcal{V}_n^{(s)}(x)$ définis par*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{n,r}^{(s)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} B_{n+r,k+r}^{(r)}(\mathbf{a}_s; \mathbf{e} + L\mathbf{a}_s)\, x^k, \\ \mathcal{V}_n^{(s)}(x) &= \mathcal{V}_{n,0}^{(s)}(x) = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(\mathbf{a}_s)\, x^k. \end{aligned}$$

Si le polynôme $\mathcal{V}_n^{(s)}(x) \in \mathbf{RZ}$, alors le polynôme $\mathcal{V}_{n,r}^{(s)}(x) \in \mathbf{RZ}$.

Preuve. Par le théorème 56, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} A_n^{(s+1)}(x)\frac{t^n}{n!} &= \exp\left(x\sum_{j\geq 1} A_j^{(s)}(1)\frac{t^j}{j!}\right) \\
&= \sum_{k\geq 0}\frac{\left(x\sum_{j\geq 1} A_j^{(s)}(1)\frac{t^j}{j!}\right)^k}{k!} \\
&= \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\mathcal{B}_{n,k}(\mathbf{a}_s)\frac{t^n}{n!}x^k\right) \\
&= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathcal{B}_{n,k}(\mathbf{a}_s)x^k\right)\frac{t^n}{n!},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
A_n^{(s+1)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\mathcal{B}_{n,k}(\mathbf{a}_s)x^k = \mathcal{V}_n^{(s)}(x) = f_n(\mathbf{B_x}), \\
f_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}\mathcal{B}_{n,k}(\mathbf{a}_s)(x)_k,
\end{aligned}$$

et d'aprés la proposition 54, si le polynôme $A_n^{(s+1)}(x) = \mathcal{V}_n^{(s)}(x)$ est à racines réelles, alors

$$\mathcal{V}_{n,r}^{(s)}(x) = f_n(\mathbf{B_x}+r) = \sum_{k=0}^{n} B_{n+r,k+r}^{(r)}(\mathbf{a}_s;\mathbf{e}+L\mathbf{a}_s)x^k \in \mathbf{RZ},$$

ce qui qui achève la preuve. □

Exemple 27 *Pour $s=0$ le polynôme défini ci-dessous*

$$\mathcal{V}_n^{(0)}(x) = \mathcal{L}_n(x),$$

n'a que des racines réelles [1], alors d'après le corollaire 57, le polynôme

$$\mathcal{V}_{n,r}^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^{n} B_{n+r,k+r}^{(r)}(\mathbf{a}_0;\mathbf{e}+L\mathbf{a}_0)x^k,$$

n'a que des racines réelles, où $\mathbf{a}_0 = (1!,2!,\ldots)$.

Théorème 58 *Soient $\left(f_n^{(r)}(x)\right)$ la suite binomiale définie par*

$$\sum_{n\geq 0} f_n^{(r)}(x)\frac{t^n}{n!} = F(t)(h(t))^r\exp(xh(t)), \quad h(t) = \sum_{j\geq 1} a_j\frac{t^j}{j!},$$

où, r est un entier positif, $F(t)$ une série formelle et $f_n^{(r)}(x) := \frac{d^r}{dx^r} f_n(x)$.
Pour $r \leq n-1$, si le polynôme $f_n^{(0)}(x)$ est de degré n et $f_n^{(0)}(x) \in \mathbf{RZ}$, alors le polynôme

$$f_n^{(r)}(x) = r! \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} B_{k,r}(\mathbf{a}) f_{n-k}^{(0)}(x) \in \mathbf{RZ}.$$

Preuve. Par définition, on a

$$f_n^{(r)}(x) = \frac{d}{dx} f_n^{(r-1)}(x),$$

donc $\deg\left(f_n^{(r)}(x)\right) = n-r$. Nous déduisons la preuve par récurrence sur r et par l'application du théorème de Rolle. □

Exemple 28 *Soit $\left(f_n^{(r)}(x)\right)$ la suite définie par*

$$\sum_{n \geq 0} f_n^{(r)}(x) \frac{t^n}{n!} = \left(e^t - 1\right)^r \exp\left(x\left(e^t - 1\right)\right),$$

ici $\mathbf{a} = (1, 1, \ldots)$, $B_{n,k}(\mathbf{a}) = \left\{ {n \atop k} \right\}$, le polynôme $f_n^{(0)}(x) = \mathcal{B}_n(x)$ est de degré n et est dans $\mathbf{RZ}$. Alors le polynôme

$$f_n^{(r)}(x) = r! \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop r} \right\} \mathcal{B}_{n-k}(x),$$

appartient à $\mathbf{RZ}$.

Exemple 29 *Soit $\left(f_n^{(r)}(x)\right)$ la suite définie par*

$$\sum_{n \geq 0} f_n^{(r)}(x) \frac{t^n}{n!} = (\ln(1+t))^r \exp(x(\ln(1+t))),$$

ici $\mathbf{a} = (0!, -1!, 2!, \ldots)$, $B_{n,k}(\mathbf{a}) = (-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right]$, le polynôme

$$f_n^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[{n \atop k} \right] x^k = (x)_n,$$

est de degré n et est dans $\mathbf{RZ}$, alors le polynôme

$$f_n^{(r)}(x) = r! \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{n}{k} \left[{k \atop r} \right] (x)_{n-k},$$

appartient à $\mathbf{RZ}$.

Exemple 30 *Soit* $\left(f_n^{(r)}(x)\right)$ *la suite définie par*

$$\sum_{n\geq 0} f_n^{(r)}(x)\,\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{r!}\left(\frac{t}{1-t}\right)^r \exp\left(\frac{xt}{1-t}\right),$$

ici $\mathbf{a} = (1!, 2!, 3!, \ldots)$, $B_{n,k}(\mathbf{a}) = L(n,k)$ *et le polynôme*

$$f_n^{(0)}(x) = \mathcal{L}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)\,x^k,$$

est de degré n *et n'admet que des racines réelles. Alors le polynôme*

$$f_n^{(r)}(x) = r!\sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r}\binom{n}{k} L(k,r)\,\mathcal{L}_{n-k}(x),$$

appartient à **RZ**.

Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse par l'utilisation du calcul ombral, nous avons établi de nombreuses congruences intéressantes pour diverses suites de polynômes et généralisé certains résultats. Plus précisément par l'ombre généralisée de Bell $\mathbf{B_x}$, nous avons donné des représentations ombrales et de nouvelles congruences pour les polynômes suivants : polynôme r-dérangement, polynôme de Lah et r-Lah, polynôme de Bell, r-Bell et $(r_1, \ldots, r_q)$-Bell, ainsi que des congruences concernant le nombre de Bell sans singletons. Ces résultats ont constitué le deuxième chapitre. Nous avons étudié de plus la périodicité des polynômes liés à l'ombre de Bell $\mathbf{B}$, ce qui nous a permis de fournir de nouveaux résultats, présentés dans le troisième chapitre. Une autre exploitation de l'ombre généralisée de Bell est la généralisation de plusieurs identités connues en identités sur les polynômes r-dérangement, Lah, r-Lah, Bell, r-Bell. Ces résultats ont fait l'objet du chapitre quatre. Une dernière exploitation de l'ombre généralisée de Bell a concerné les polynômes à racines réelles. Cette exploitation a fait l'objet du dernier chapitre où nous avons donné un résultat intéressant sur les polynômes à racines réelles [7]. et obtenu de nouvelles suites de polynômes n'ayant que des racines réelles. Il faut préciser que le résultat principal obtenu donne une possibilité ouverte permettant de trouver d'autres exemples. D'autres résultats auxiliaires dans le dernier chapitre concernent une application du théorème de Bender-Canfield [5] et des applications sur les polynômes de partitions. Certainement, il est important de regarder comment peut-on exploiter le calcul ombral dans d'autres domaines.

Les perspectives que ce travail nous permettent d'envisager les travaux suivants.

- Mihoubi et Taharbouchet [43] ont donné une représentation ombrale pour les suites de polynômes d'Appell et ont fourni plusieurs résultats intéressants, ce qui nous donne la possibilité d'obtenir d'éventuels nouveaux résultats. Par exemple, on sait que la suite binomiale $(\mathcal{D}_n(x))_{n\geq 0}$ est 'une suite de polynômes d'Appell. Soit $\mathcal{D}$ l'ombre de dérangement définie par :

$$\mathcal{D}^n = \mathcal{D}_n \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } \mathcal{D}^0 = 1,$$

où $\mathcal{D}_n$ est le n-ème nombre de dérangement, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{D}_n(x)\frac{t^n}{n!} &= \frac{e^{-t}}{1-t}e^{xt}\\ &= \exp((\mathcal{D}+x)\,t),\end{aligned}$$

on peut donc définir l'ombre généralisée de dérangement $\mathbf{D_x}$ par

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{\mathbf{x}}^n &= \mathcal{D}_n(x)\\ &= (\mathcal{D}+x)^n,\end{aligned}$$

nous croyons que cette représentation nous donne un moyen pour montrer d'autre propriétés cocernant la suite binomiale $(\mathcal{D}_n(x))_{n\geq 0}$.

- Pour tout entier $n \geq 0$, le n-ème polynôme de Bell sans singletons $\mathcal{V}_n(x)$ est défini par

$$\mathcal{V}_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}^{2\uparrow} x^k,$$

où $\left\{\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right\}^{2\uparrow} := \left\{\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right\}_0^{2\uparrow}$ est le nombre Stirling de deuxième espèce qui compte le nombre de partitions de l'ensemble $[n]$ en k blocs sans singletons [41]. On définit l'ombre généralisée de Bell sans singletons $\mathbf{V_x}$ par $\mathbf{V}_{\mathbf{x}}^n = \mathcal{V}_n(x)$. Nous pensons que cette représentation ombrale nous permet de donner des résultats nouveaux concernant la suite de polynômes $\mathcal{V}_n(x)$, comme par exemple des congruences, des identités, etc.

- Il est possible et d'une maniére similaire qu'au polynôme r-dérangement [6] de définir la suite de polynômes $\mathbf{r}_q$-dérengement et de généraliser les propriétés cocernant le polynôme r-dérangement au polynôme $\mathbf{r}_q$-dérangement.

- La conjecture suivante [58] représente pour nous un thème en continuité de cette thèse pour étude : Pour tout entier $k \geq 0$ et tout nombre premier p le nombre N_p est la période minimale pour les suites $(\mathcal{V}_{n+k,k})_{n\geq 0}$, $(\mathcal{V}_{n+k,k})_{k\geq 0}$.

Bibliographie

[1] J.C. Ahuja and E.A. Enneking, Concavity property and a recurrence relation for associated Lah numbers,*The Fibonacci Quart.,* 17 (1979) 158–61.

[2] N. Asai, I. Kubo and H. Kubo, Bell Numbers, Log-Concavity and Log-Convexity. *Acta Appl Math,* 63(1-3) (2000) 79–87.

[3] H. Belbachir and A. Belkhir, Cross recurrence relations for r-Lah numbers. *Ars Combin.,* 110 (2013) 199–203.

[4] E.T. Bell, Exponential polynomials. *Ann. Math.,* 35 (1934) 258–277.

[5] E.A. Bender and E.R. Canfield, Log-concavity and related properties of the cycle index polynomials. *J. Combi. Theory Ser. A,* 74 (1996) 57-70.

[6] **A. Benyattou** and M. Mihoubi, Curious congruences related to the Bell polynomials. *Quaest. Math., 41(3) (2018) 437–448.*

[7] **A. Benyattou** and M. Mihoubi, Note on the polynomials with real zeros. Soumis : *Notes Number Th. Discr. Math.*

[8] **A. Benyattou** and M. Mihoubi, Congruences par l'ombre généralisée de Bell, *Journées Scientifiques du Laboratoire RECITS,* USTHB, 21-22 avril 2018.

[9] J. Blissard, Theory of generic equations. *Quart. J. Pure Appl. Math.,* 4 (1861) 279-305.

[10] M. Bóna and I. Mező, Real zeros and partitions without singleton blocks. *European J. Combin.*, 51 (2016) 500–510.

[11] F. Brenti, Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry : an update. *Contemp. Math.,* 178 (1994) 71–89.

[12] F. Brenti, Unimodal polynomials arising from symmetric functions. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 108 (1990) 1113-1141.

[13] A.Z. Broder, The r-Stirling numbers. *Discrete Math.,* 49 (1984) 241–259.

[14] W.Y.C. Chen, R. Tang, and A. Zaho, Derangement Polynomials and Excedances of Type B. *Electron. J. Combin.,* 16(2) (2009) #R15.

[15] L. Comtet, *Advanced Combinatorics.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland / Boston-U.S.A, (1974).

[16] J.N. Darroch, On the distribution of the number of successes in independent trials. *Ann. Math. Stat.,* (1964) 1317–1321.

[17] S. Daboul, J. Mangaldan, M. Spivey and P. Taylor, The Lah Numbers and the n-th Derivative of $e^{\frac{1}{x}}$. *Mathematics Magazine,* 86(1) (2013) 39–47.

[18] A. Di Bucchianico, A Selected Survey of Umbral Calculus. *Electron. J. Combin.,* # DS3 Update of April, (2000).

[19] E. Di Nardo, H. Niederhausen and D. Senato, A symbolic handling of sheffer polynomials. *Annali di Matematica*, 190(3) (2011) 489–506.

[20] E. Di Nardo, H. Niederhausen and D. Senato, The Classical Umbral Calculus : Sheffer sequences. *Lectures Notes of Seminario Interdisciplinare di Matemtica,* 8 (2009) 101-130.

[21] E. Di Nardo and D. Senato, Umbral nature of the Poisson random variables. *Algebraic Combinatorics and Computer science,* (2001) 245–266.

[22] F.M. Dong, K.M. Koh and L. Teo, *Chromatic polynomials and chromaticity of graphs.* World Scientific, British library, 2005.

[23] A. Gertsch and A.M. Robert, Some congruences concerning the Bell numbers. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin,* 3 (1996) 467–475.

[24] I.M. Gessel, Applications of the classical umbral calculus. *Algebr. Univ.,* 49 (2003) 397–434.

[25] H.W. Gould, *Combinatorial Identities.* Morgantown. A Standardized Set of Tables Listing 500 Binomial Coefficient Summations, Revised Edition, published by the author,Morgantown, WV, 1972.

[26] R.L. Graham, D.E. Knuth and O. Patashnik, *Concrete Mathematics, 2nd Edition.* Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1994.

[27] G.H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, Inequalities (Cambridge : The university Press, 1952).

[28] Y. He and W. Zhang. Some symmetric identities involving a sequence of polynomials. *Electron. J. Combin.*, 17 (2010) #N7.

[29] M. Kaneko. A recurrence formula for the Bernoulli numbers. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 71 (1995) 192–193.

[30] J. Levine and R.E. Dalton, Minimum periods, modulo p, of first-order Bell exponential integers. *Math. Comp.,* 16 (1962) 416–423.

[31] W. Ljunggren, Et elementært bevis for en formel av A. C. Dixon. *Norsk Mat. Tidssrift,* 29 (1947) 35-38. (Also in P. Ribenboim, Collected Papers of Wilhelm Ljunggren, vol 2, (2003).

[32] M.S. Maamra and M. Mihoubi, The $(r_1, \ldots, r_p)$-Bell polynomials. *Integers,* 14 (2014) Article A34.

[33] M.S. Maamra and M. Mihoubi, Note on some restricted Stirling numberes of the second kind. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I,* 354 (2016) 231-234.

[34] T. Mansour, Cominatorics of set partitions. *Discrete mathematics and its Applications,* taylor & Francis Group, LLC.

[35] I. Mező, On the maximum of r-Stirling numbers. *Adv. Applied Math.,* 41 (2008) 293–306.

[36] I. Mező, The r-Bell numbers. *J. Integer Seq.,* 14 (2011) Article 11.1.1.

[37] I. Mező and J.L. Ramirez, Divisibility properties of the r-Bell numbers and polynomials. *J. Num. Theory.,* 177 (2017) 136-152.

[38] M. Mihoubi, Bell polynomials and binomial type sequences. *Discrete Math.*, 308 (2008) 2450–2459.

[39] M. Mihoubi, The role of binomial type sequences in determination identities for Bell polynomials. *Ars Combin.,* 111 (2013) 323–337.

[40] M. Mihoubi and M.S. Maamra, The $(r_1, \ldots, r_p)$-Stirling numbers of the second kind. *Integers* 12 (2012), Article A35.

[41] M. Mihoubi and M. Rahmani, The partial r-Bell polynomials. *Afr. Mat.,* 28(7-8) (2017) 1167–1183.

[42] M. Mihoubi and L. Reggane, The s-degenerate r-Lah numbers. *Ars Combin.,* 120 (2015) 333-340.

[43] M. Mihoubi and S. Taharbouchet, Some identities involving Appell polynomials. Avalaible electronically at https ://arxiv. 1709.07910v2 [math.NT] 7 Dec. 2017.

[44] M. Mihoubi and S. Taharbouchet, Some identities involving Appell polynomials. A paraître dans *Quaest. Math.*

[45] P.L. Montgomery, S. Nahm Jr. and S. Wagstaff, The period of the Bell numbers modulo a prime. *Math. Comp.,* 79 (2010)1793–1800.

[46] G. Nyul and G. Racz, The r-Lah numbers. *Discrete Math.,* 338(10) (2015) 1660-1666.

[47] I. Oliva, *Amoment symbolic representation of levy processes with application.* Doctorat thesis, Università di Pologna, 2012.

[48] C. On chow, On derangement polynomials of type B. *J. Combi. Theory Ser. A,* 116 (2009) 816-830.

[49] C. Radoux, Nombres de Bell modulo p premier et extensions de degré p de F_p. *C. R. Acad. Sci. série A,* 281 (1975) 879–882.

[50] P. Richard. Stanley, Log-Concave and Unimodal Sequences in Algebra, Combinatorics, and Geometry. *Ann. New York Acad. Sci.,* 576 (1989) 500–534.

[51] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis.* John Wiley, New York, 1958.

[52] S. Roman, *The umbral calculus*, Academic press, 1984.

[53] S. Roman and G.C. Rota, The Umbral Calculus. *Adv. Math.,* 27 (1978).

[54] G.C. Rota, The Number of Partitions of a Set. *Amer. Math. Monthly,* 71 (5) (1964) 498–504.

[55] G.C. Rota and B.D Taylor, The classical umbral calculus. *SIAM J. Math. Anal.*, 25 (2) (1994) 694–711.

[56] M. Shattuck, Some combinatorial formulas for the partial r-Bell polynomials, *Notes Number Th. Discr. Math.*, 23(1) (2017) 63–76.

[57] S. Simons, A curious identity. *The Mathematical Gazette,* 85 (2001) 296–298.

[58] Y. Sun and X. Wu, The largest singletons of set partitions. *European J. Combin.*, 32 (2011) 369–382.

[59] Y. Sun, X. Wu and J. Zhuang, Congruences on the Bell polynomials and the derangement polynomials. *J. Num. Theory,* 133 (2013) 1564–1571.

[60] Z.-W. Sun and D. Zagier, On a curious property of Bell numbers. *Bull. Aust. Math. Soc.,* 84 (2011) 153–158.

[61] M. Tanny, On some numbers related to the Bell numbers. *Canad. Math. Bull.,* 17(5) 1975.

[62] A.F. Tebtoub, *Aspects combinatoires liés à la monotonie des suites classiques.* Thèse de Doctorat, USTHB, 2017.

[63] J. Touchard, Propriétés arithmétiques de certains nombres recurrents. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles,* 53A (1933) 21–31.

[64] M. Wachs. On q-Derangement numbers. *American Mathematical Society,* 106(1) (1989).

[65] C. Wang, P. Miska and I. Mező, The r-derangement numbers. *Discrete Math.,* 340 (7)(2017) 1681–1692.

[66] G.T. Williams, Numbers generated by the function $\exp(e^t - 1)$. *Amer. Math. Monthly,* 52 (1945) 323–327.

[67] G. Yasmin, Some identities of the Apostol type polynomials arising from umbral calculus. *Palestine Journal of Mathematics*, 7(1)(2018) 35-52.